

BRECHUNG UND REFLEXION DES LICHTS AN ZWILLINGSFLÄCHEN

OPTISCH EINAXIGER VOLLKOMMEN DURCHSICHTIGER MEDIEN.

VON

DR. JOSEPH GRAILICH,

PRIVAT-DOCENTEN AN DER K. HOCHSCHULE ZU WIEN.

(SCHLUSS DER ABHANDLUNG IM IX. BANDE DIESEER DENKSCHRIFTEN.)

VIERTER ABSCHNITT.

DISCUSSION DER ALLGEMEINEN INTENSITÄTSFORMELN.

1.

Wenn man die Schlussgleichungen des dritten und sechsten Paragraphen des dritten Abschnittes dieser Untersuchung ins Auge fasst, so fällt sogleich, vor allem näheren Eingehen in den Bau dieser Relationen, der Umstand auf, dass die Formel für \mathcal{W}_0 , die Amplitude des reflectirten ordentlichen Strahles, er rühre nun von einer einfallenden ordentlichen, oder ausserordentlichen Lichtwelle her, im Allgemeinen der Nulle nicht gleich ist.

Da der ordentliche einfallende Strahl sich ohne Unterbrechung von dem einen Krystallindividuo in das andere fortpflanzt, so gelangen wir demnach zu folgendem einfachen Gesetze:

Der einfallende ordentliche Strahl wird an der Zwillingsfläche zwar nicht gebrochen, aber doch reflectirt.

Betrachtet man die Bilder einer Kerzenflamme, die an einer Zwillingsfläche sich spiegelt, so findet man im Allgemeinen deren vier: der von aussen in den Krystall tretende Strahl wird doppelt gebrochen und jeder der also getrennten Strahlen erleidet an der Zwillingsfläche doppelte Reflexion. Da für jeden einfallenden Strahl auch vier Strahlen anstreten, so ist nachgewiesen, dass der ordentliche Strahl bei seinem Durchgange durch die Zwillingsfläche durch Reflexion geschwächt wird. — Was für einfachbrechende Mittel und in gewissen Lagen der brechenden Ebene für Krystalle und einfachbrechende Mittel nur für die senkrechte Incidenz gilt, dass nämlich der Strahl ungebrochen, aber durch Reflexion in seiner Intensität geschwächt ins zweite Mittel tritt, findet hier im Allgemeinen für jede Incidenz des

ordentlichen Strahles Statt. Es erinnert dies an ein ähnliches Verhalten in den Richtungen der einfallenden und gebrochenen Strahlen; während bei isotropen Medien nur für den einzigen Fall der senkrechten Incidenz Einfallswinkel-, Reflexions- und Brechungswinkel gleich werden, finden wir diese Gleichheit ganz allgemein für jeden Incidenzwinkel der ordentlichen Strahlen an der Zwillingsfläche.

§. 2.

Untersuchen wir nun zuvörderst die Verhältnisse im optischen Hauptschnitte. Setzen wir $\omega = 0$ oder $\omega = 180^\circ$, so erhalten wir

1. für die einfallende ordentliche Welle aus 13 und 15

$$r = \cos \varphi \sin a \pm \sin \varphi \cos a = \sin (a \pm \varphi)$$

$$r' = \cos \varphi \sin a \mp \sin \varphi \cos a = \sin (a \mp \varphi)$$

$$r'' = \cos \varphi'' \sin a \mp \sin \varphi'' \cos a = \sin (a \mp \varphi'')$$

$$\cos \theta = \frac{\sin \varphi \sin a \mp \cos \varphi \cos a}{\cos (a \pm \varphi)} = \mp 1$$

$$\cos \theta' = \frac{\sin \varphi \sin a \pm \cos \varphi \cos a}{\cos (a \mp \varphi)} = \mp 1$$

$$\cos \theta'' = \frac{\sin \varphi'' \sin a \pm \cos \varphi'' \cos a}{\cos (a \mp \varphi'')} = \pm 1$$

welche Werthe in 37, 39, 41 substituirt, folgende Ausdrücke liefern

$$a_e'' = \mp \sin (\varphi + \varphi'') \cos (a \mp \varphi) [(\sin \varphi^2 - \cos a^2) + \cos (a \pm \varphi) \cos (a \mp \varphi)] = 0$$

$$b_e'' = \mp \cos (a \mp \varphi'') [\cos^2 (\varphi \mp \varphi'') \sin (\varphi + \varphi'') - (\sin \varphi^2 - \cos a^2) (\sin (\varphi - \varphi''))] = \mp 2 \cos^2 (a \mp \varphi'') \cos (a \mp \varphi) \sin \varphi \cos \varphi.$$

$$c_e'' = 0.$$

$$a_e' = \pm \sin (\varphi - \varphi'') \cos (a \mp \varphi) \cos (a \mp \varphi'') [\cos (a \mp \varphi) \cos (a \pm \varphi) + (\sin \varphi^2 - \cos a^2)] = 0.$$

$$b_e' = \mp \cos (a \mp \varphi) \cos (a \mp \varphi'') [\cos^2 (a \mp \varphi) \sin (\varphi + \varphi'') - (\sin \varphi^2 - \cos a^2) \sin (\varphi - \varphi'')] = \mp 2 \cos^2 (a \mp \varphi'') \cos (a \mp \varphi) \cos (a \pm \varphi) \sin \varphi \cos \varphi.$$

$$c_e' = 0.$$

$$a_o'' = \mp \cos (a \mp \varphi) [\sin (\varphi + \varphi'') \sin a - \cos \varphi'' \cos (a \pm \varphi)].$$

$$b_o'' = \pm \cos (a \mp \varphi) [\sin (\varphi - \varphi'') \sin a - \cos \varphi'' \cos (a \mp \varphi)].$$

$$c_o'' = \mp \sin (\varphi + \varphi'') \cos (a \mp \varphi) \sin a + \cos \varphi'' (\sin \varphi^2 - \sin a^2).$$

Substituiren wir diese Werthe in die Gleichungen 88, 89, 90, so finden wir für die Amplituden unbestimmte Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$; wir müssen demnach für diesen speciellen Fall auf die Grundgleichungen zurückgehen, welche durch die Einführung des Azimuths O^0 und 180° folgende Relationen liefern

$$U = \cos \varphi \frac{\pm \sin \varphi \sin a - \cos \varphi \cos a}{\sqrt{1 - \gamma^2}} = \mp \cos \varphi$$

$$V = 0.$$

$$W = \sin \varphi \frac{\pm \cos \varphi \cos a - \sin \varphi \sin a}{\sqrt{1 - \gamma^2}} = \pm \sin \varphi$$

$$U = -\cos \varphi \frac{\pm \sin \varphi \sin a + \cos \varphi \cos a}{\sqrt{1-\gamma^2}} = -\cos \varphi$$

$$V = 0.$$

$$W = -\sin \varphi \frac{\pm \cos \varphi \cos a + \sin \varphi \sin a}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \mp \sin \varphi$$

$$U'' = 0.$$

$$V'' = \frac{\mp \sin \varphi' \sin a - \cos \varphi' \cos a}{\sqrt{1-\gamma'^2}} = +1.$$

$$W'' = 0.$$

Setzt man die hier erhaltenen Werthe zunächst in 18, so findet man nach dem Princip der Äquivalenz der Schwingungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \cos \varphi + \mathfrak{A}' \cos \varphi &= \mathfrak{A}'' \cos \varphi \\ -\mathfrak{A}' &= \mathfrak{A}' \\ \pm \mathfrak{A} \sin \varphi \mp \mathfrak{A}' \sin \varphi &= \pm \mathfrak{A}'' \sin \varphi. \end{aligned}$$

Die zweite dieser Gleichungen ist nur möglich, wenn

$$\mathfrak{A}' = 0 \quad \mathfrak{A}'' = 0$$

und die erste und dritte gibt durch Addition

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}''$$

folglich

$$\mathfrak{A}' = 0$$

Substituirt man diese Werthe in 46, so reducirt sich diese Gleichung auf Null.

Es zeigt sich demnach, dass die im Hauptschnitte einfallende ordentliche Welle weder eine reflectirte noch gebrochene ausserordentliche Welle erzeugt; und dass im Hauptschnitte die ordentliche Welle ohne Änderung ihrer Oscillationsintensität durch den Zwillingkrystall sich fortpflanzt; dass also für den ordentlichen Strahl in der Ebene des Hauptschnittes der Zwillingkrystall ein einziges ununterbrochenes Individuum darstellt, die Zwillingfläche hier für denselben gar nicht existirt. Der Strahl geht ungebrochen, mit ungeschwächter Intensität in das zweite Individuum über.

2. Für die einfallende ausserordentliche Welle substituiren wir auch hier $\omega=0$, $\omega=180^\circ$, so finden wir in 66, 68

$$\gamma = \pm \sin \varphi \cos a + \cos \varphi \sin a = \sin (a \pm \varphi)$$

$$\gamma' = \mp \sin \varphi' \cos a + \cos \varphi' \sin a = \sin (a \mp \varphi')$$

$$\gamma'' = \mp \sin \varphi'' \cos a + \cos \varphi'' \sin a = \sin (a \mp \varphi'')$$

$$\cos \theta = \frac{\sin \varphi \sin a \mp \cos \varphi \cos a}{\cos (a \pm \varphi)} = \mp 1$$

$$\cos \theta = \frac{\sin \varphi' \sin a \pm \cos \varphi' \cos a}{\cos (a \mp \varphi')} = \mp 1$$

$$\cos \theta = \frac{\sin \varphi'' \sin a \pm \cos \varphi'' \cos a}{\cos (a \mp \varphi'')} = \pm 1$$

wodurch sich die Ausdrücke in 88, 89, 90 folgendermassen gestalten:

$$a_e'' = 0$$

$$b_e'' = \mp \cos(a \pm \varphi) \cos(a \mp \varphi'') [\sin(\varphi' + \varphi'') \cos^2(a \mp \varphi') - (\sin \varphi'^2 - \cos a^2) \sin(\varphi' - \varphi'')]]$$

$$c_e'' = 0$$

$$a_e' = 0$$

$$b_e' = \mp \cos(a \pm \varphi) \cos(a \mp \varphi') [\sin(\varphi' + \varphi'') \cos^2(a \pm \varphi) - (\sin \varphi'^2 - \cos a^2) \sin(\varphi' - \varphi'')]]$$

$$c_e' = 0$$

$$a_o'' = 0$$

$$b_o'' = -\cos(a \pm \varphi) [\cos \varphi'' (\cos a^2 - \sin \varphi'^2) \mp \sin(\varphi' + \varphi'') \cos(a \mp \varphi') \sin a]$$

$$c_o'' = \mp \cos(a \pm \varphi) \cos(a \mp \varphi') [\sin(\varphi' - \varphi'') \sin a + \cos \varphi'' \cos(a \mp \varphi')]$$

Auch hier gelangen wir durch Substitution in 100, 101, 102 zu unbestimmten Ausdrücken, wir müssen daher auf die Grundgleichungen zurückgehen und führen zu dem Ende das Azimuth Null und 180° im vierten Paragraphen des vorigen Abschnittes ein. Dies gibt

$$U = 0$$

$$V = \frac{\pm \sin a \sin \varphi \cos a \cos \varphi}{\cos(a \pm \varphi)} = -1$$

$$W = 0$$

$$U' = \frac{\mp \sin a \sin \varphi' - \cos a \cos \varphi'}{\cos(a \mp \varphi')} \cos \varphi' = -\cos \varphi'$$

$$V' = 0$$

$$W' = \frac{\cos \varphi' \cos a - \sin \varphi' \sin a}{\cos(a \mp \varphi')} \sin \varphi' = -\sin \varphi'$$

$$U'' = 0$$

$$V'' = -\frac{\mp \sin \varphi'' \sin a - \cos \varphi'' \cos a}{\cos(a \mp \varphi'')} = +1$$

$$W'' = 0.$$

Substituiren wir dies in 69, so erhalten wir folgende Relationen

$$\mathfrak{A}'_o \cos \varphi' = \mathfrak{A}''_o \cos \varphi'$$

$$- \mathfrak{A} - \mathfrak{A}'_e \cos \varphi' = \mathfrak{A}''_e$$

$$- \mathfrak{A}'_o \sin \varphi' = \mathfrak{A}''_o \sin \varphi'$$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt

$$\mathfrak{A}'_o = 0 \quad \mathfrak{A}''_o = 0$$

d. i. die im Hauptschnitte einfallende ausserordentliche Welle erregt gar keine, weder eine reflectirte noch eine gebrochene ordentliche Welle. Im Hauptschnitte ist also ein Zwillingskrystall bezüglich der Zwillings Ebenen durchaus einfach brechend.

Zur Bestimmung der Intensität des reflectirten und gebrochenen Strahles dient zunächst die Gleichung

$$[1]$$

$$- \mathfrak{A} = \mathfrak{A}'_e + \mathfrak{A}''_e$$

zu welcher dann noch nach §. 6 des vorigen Abschnittes die zweite Bestimmungsgleichung gefunden wird. Führen wir dort in 91 die eben gefundenen Werthe von \mathfrak{N}_0 und \mathfrak{N}'_0 ein, so haben wir

$$\mathfrak{N}^2 \sin \varphi \cos \varphi \left[1 + \frac{(o^2 - e^2) \gamma \left(\frac{\sin a}{\cos \varphi} - \gamma \right)}{e^2 + (o^2 - e^2) \gamma^2} \right] = (\mathfrak{N}_e'^2 + \mathfrak{N}_e''^2) \sin \varphi \cos \varphi'' \cdot \left[1 + \frac{(o^2 - e^2) \gamma'' \left(\frac{\sin a}{\cos \varphi} - \gamma \right)}{e^2 + (o^2 - e^2) \gamma'^2} \right]$$

multiplizieren wir beiderseits mit dem Nenner innerhalb der Klammer, lösen wir auf und multiplizieren dann mit $\cos \varphi$ einerseits, $\cos \varphi''$ andererseits hinein, so finden wir:

$$\mathfrak{N}^2 \sin \varphi \left[\frac{e^2 \cos \varphi + (o^2 - e^2) \gamma \sin a}{e^2 + (o^2 - e^2) \gamma^2} \right] = (\mathfrak{N}_e'^2 + \mathfrak{N}_e''^2) \sin \varphi'' \cdot \left[\frac{e^2 \cos \varphi'' + (o^2 - e^2) \gamma'' \sin a}{e^2 + (o^2 - e^2) \gamma'^2} \right].$$

Nun ist aber (siehe Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften, naturw. Classe XI, 820)

$$\frac{\sin \varphi^2}{\sin \varphi'^2} = \frac{e^2 + (o^2 - e^2) \gamma^2}{e^2 + (o^2 - e^2) \gamma'^2}$$

folglich wenn wir beiderseits die Brüche wegschaffen und die letzte Relation berücksichtigen

$$\mathfrak{N}^2 \sin \varphi'' [e^2 \cos \varphi + (o^2 - e^2) \gamma \sin a] = (\mathfrak{N}_e'^2 + \mathfrak{N}_e''^2) \sin \varphi [e^2 \cos \varphi'' + (o^2 - e^2) \gamma'' \sin a]$$

d. i.

$$\mathfrak{N}^2 \sin \varphi'' [o^2 \gamma \sin a + e^2 (\cos \varphi - \gamma \sin a)] = (\mathfrak{N}_e'^2 + \mathfrak{N}_e''^2) \sin \varphi \cdot [o^2 \gamma'' \sin a + e^2 (\cos \varphi'' - \gamma'' \sin a)].$$

Es ist aber

$$\cos \varphi - \gamma \sin a = \cos a (\cos \varphi \cos a - \sin \varphi \cos \omega \sin a)$$

$$\cos \varphi'' - \gamma'' \sin a = \cos a (\cos \varphi'' \cos a + \sin \varphi'' \cos \omega \sin a)$$

folglich unsere Gleichung

$$\mathfrak{N}^2 \sin \varphi'' [o^2 \sin a (\cos \varphi \sin a + \sin \varphi \cos \omega \cos a) + e^2 \cos a (\cos \varphi \cos a - \sin \varphi \cos \omega \sin a)] = (\mathfrak{N}_e'^2 + \mathfrak{N}_e''^2) \sin \varphi [o^2 \sin a (\cos \varphi'' \sin a - \sin \varphi'' \cos \omega \cos a) + e^2 \cos a (\cos \varphi'' \cos a - \sin \varphi'' \cos \omega \sin a)].$$

Setzen wir hier nun $\omega = 0$, $\omega = 180^\circ$ so erhalten wir

$$[2] \quad \mathfrak{N}^2 \sin \varphi'' [o^2 \sin a \sin (a \pm \varphi) + e^2 \cos a \cos (a \pm \varphi)] = (\mathfrak{N}_e'^2 + \mathfrak{N}_e''^2) \sin \varphi [o^2 \sin a \sin (a \mp \varphi'') + e^2 \cos a \cos (a \mp \varphi'')].$$

Es ist aber nach den Gleichungen, welche in dem oben citirten Aufsätze in den Sitzungsberichten über den Zusammenhang der Richtungen der Wellennormalen diesseits und jenseits der Zwillingssebene mitgetheilt wurden, für das Azimuth 0

$$\sin (a - \varphi'') = \frac{P \sin (a - \varphi) + 2Q \sin a \sin \varphi}{\sqrt{4Q \sin \varphi (Q \sin \varphi + P \cos \varphi) + P^2}}$$

$$\cos (a - \varphi'') = \frac{P \cos (a - \varphi) + 2Q \sin a \sin \varphi}{\sqrt{4Q \sin \varphi (Q \sin \varphi + P \cos \varphi) + P^2}}$$

und im Azimuth π

$$\sin (a + \varphi'') = \frac{P \sin (a + \varphi) - 2Q \sin a \sin \varphi}{\sqrt{4Q \sin \varphi (Q \sin \varphi - P \cos \varphi) + P^2}}$$

$$\cos (a + \varphi'') = \frac{P \cos (a + \varphi) - 2Q \sin a \sin \varphi}{\sqrt{4Q \sin \varphi (Q \sin \varphi - P \cos \varphi) + P^2}}$$

Dies gibt, da im ganzen Hauptschnitte

$$\sin \varphi'' = \frac{P \sin \varphi}{\sqrt{4Q \sin \varphi (Q \sin \varphi \pm P \cos \varphi) + P^2}}$$

ellipsoides, so wird SO der einfallende Strahl. Macht man $T'O = TO$, legt durch T eine Berührende an die untere und obere Ellipse, und nennt man die Berührungspunkte respective σ und S' , so ist OS' der gebrochene, und $O\sigma$ der reflectirte ausserordentliche Strahl. Da nach [1] $\mathfrak{N}'_o = 0$, $\mathfrak{N}''_o = 0$ ist, so sind blos die zu den Oscillationen der ausserordentlichen Bewegung gehörigen Volumina zu suchen. Das Volum, welches zur einfallenden Bewegung gehört, ist proportional dem Producte $TS \times OR$; die Volumina, welche zur reflectirten und gebrochenen Bewegung gehören, sind proportional den Producten $T'\sigma \times Op$ und $T'S' \times OR'$, wo R, p, R' die Fusspunkte der Wellennormalen sind. Aber bekanntlich ist

$$T'S' = T'\sigma \quad OR' = Op$$

folglich würde die Gleichung, welche die Erhaltung der lebendigen Kraft ausspricht,

$$\mathfrak{N}^2 \cdot TS \cdot OR = (\mathfrak{N}'^2 + \mathfrak{N}''^2) T'S' \cdot OR'$$

werden. Es ist somit nur noch nachzuweisen, dass $TS \cdot OR = T'S' \cdot OR'$ um die Gleichung [3] zu erhalten. Aber dies ist nach den bekannten Eigenschaften der Ellipse leicht anzuführen. Ergänzt man nämlich die obere Ellipse und zieht aus T eine zweite Berührende, welche die Ellipse in S'' trifft, so ist offenbar

$$\begin{aligned} \Delta OTS'' &= \Delta OT'S' = \Delta OT'\sigma \\ TS'' &= T'S' = T'\sigma \\ OR'' &= OR' = Op \end{aligned}$$

folglich

$$TS'' \cdot OR'' = T'S' \cdot OR'$$

Aber die Producte $TS \cdot OR$, $TS'' \cdot OR''$ sind proportional dem Flächeninhalte der Dreiecke TSO , $TS''O$. Legt man durch irgend einen Punkt ausserhalb eines Kreises Tangenten an diesen, so werden die beiden rechtwinkligen Dreiecke, deren Hypotenusen die beiden Tangenten, deren Katheten die von dem gegebenen Punkte durch den Kreismittelpunkt gelegte Gerade und die aus dem Mittelpunkte auf die Tangenten gefällten Normalen (Radien) sind, unter einander gleich sein. Die Ellipse ist eine Projection des Kreises; legt man aus einem beliebigen Punkte T ausser der Ellipse Berührende an dieselbe, so sind die beiden Dreiecke TSO , $TS''O$ Projectionen zweier congruenter Dreiecke unter demselben Neigungswinkel; folglich ist

$$TSO = TS''O; \quad 1)$$

1) Wenn man von einem beliebigen Punkte ausserhalb der Ellipse Tangenten an dieselbe zieht, und aus dem Mittelpunkte Normalen auf die Tangenten errichtet, so verhalten sich die Distanzen zwischen dem gegebenen Punkte und den Berührungspunkten umgekehrt wie die Längen der Normalen.

Ist $x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2$ Gleichung der Ellipse und $y = Ax$ Gleichung einer Geraden durch den Mittelpunkt derselben; nimmt man in dieser Geraden irgend einen Punkt T an, dessen Abscisse x' ist, so ist die Gleichung der beiden Tangenten $x'(x b^2 + y a^2 A) = a^2 b^2$; folglich sind die Coordinaten der Berührungspunkte

$$\xi = \frac{a^2}{x'} \left(\frac{b^2 \pm A \sqrt{x'^2 (A^2 a^2 + b^2) - a^2 b^2}}{A^2 a^2 + b^2} \right), \quad \eta = \frac{b^2}{x'} \left(\frac{A a^2 \mp b^2 \sqrt{x'^2 (A^2 a^2 + b^2) - a^2 b^2}}{A^2 a^2 + b^2} \right)$$

die Länge TS oder TS' ist sonach gleich der Quadratwurzel von

$$[x'^2 (b^2 + A^2 a^2) - a^2 (b^2 \pm A \sqrt{x'^2 (A^2 a^2 + b^2) - a^2 b^2})]^2 + [A x'^2 (b^2 + A^2 a^2 - b^2 (A^2 a^2 \mp b^2 \sqrt{x'^2 (A^2 a^2 + b^2) - a^2 b^2}))]^2$$

die Länge der Normalen OR ist $TO \sin OTS$; nun ist aber, wenn θ die trigonometrische Tangente des Winkels ist, den eine der Tangenten mit der Abscissenaxe einschliesst

$$\sin^2 OTS \cdot (1 + A^2) (1 + \theta_1^2) = (A - \theta_1)^2, \quad \sin^2 OTS' (1 + A^2) (1 + \theta_2^2) = (A - \theta_2)^2$$

folglich

$$\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{A}''^2.$$

Die Gleichung [4] lässt es unbestimmt, ob \mathfrak{A}' oder \mathfrak{A}'' gleich Null wird. Wenn nun aber auch nicht die Analogie mit dem ordentlichen Strahle, so wie die unveränderte Lage der Polarisationsebene zu beiden Seiten des Hauptschnittes leiten würde, so werden es die später mitzutheilenden Tafeln, welche zeigen, wie die Amplituden der reflectirten Strahlen gegen den Hauptschnitt hin sehr rasch abnehmen, genugsam anzeigen, dass im Hauptschnitte die Intensität der reflectirten Wellen null sei; so dass wir hier zu dem merkwürdigen Gesetze gelangen, dass der ausserordentliche Strahl im Hauptschnitte ungeschwächt, obschon nicht ungebrochen, in das zweite Individuum übergeht. Die Wirkung der Zwillingsene verschwindet daher für diesen Strahl nicht ganz und gar wie bei dem ordentlichen; aber der Einfluss derselben erstreckt sich nur auf die Richtung, nicht auf die Grösse der Oscillationen. Die isophanen Mittel, welche durch Reflexion vollständig oder doch nahezu vollständig polarisiren, zeigen eine Erscheinung, welche an die hier gefundene erinnert; der unter der Hauptincidenz einfallende Lichtstrahl wird nämlich sobald er senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, gänzlich oder nahezu gänzlich in das zweite Medium dringen und dabei zwar seine Richtung, aber nicht oder doch kaum seine Intensität ändern. Was nun bei isophanen Mitteln für den Polarisationswinkel, das gilt im Hauptschnitte optisch einaxiger Zwillingskrystalle für jeden Incidenzwinkel des extraordinären Strahles; dort haben wir einen Winkel, hier eine Ebene der totalen Brechung.

§. 3.

Wir betrachten nun die Verhältnisse im optischen Querschnitte, in der Ebene, welche auf dem Hauptschnitte und der Zwillingsfläche senkrecht steht.

Die Gleichungen der beiden Wellenflächen im ersten und zweiten Individuo sind beziehlich (s. Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Cl. XI, 817 ff.)

$$\frac{1}{e^2} (x^2 + y^2 + z^2) + \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{e^2} \right) (x \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 = 1$$

$$\frac{1}{e^2} (x^2 + y^2 + z^2) + \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{e^2} \right) (x \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 = 1$$

der Querschnitt hat $x = 0$; es ist somit der Schnitt der beiden Ellipsoide gleichmässig

$$\frac{1}{e^2} (y^2 + z^2) + \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{e^2} \right) z^2 \sin^2 \alpha = 1$$

d. i. die Wellenflächen der zwei Individuen haben im Querschnitt eine Ellipse gemeinschaftlich, deren Axen nach den Coordinatenrichtungen Y und Z sich wie $\sqrt{e^2 + (o^2 - e^2) \cos^2 \alpha} : o$ verhalten; dabei ist die Axe, welche in die Zwillingsene entfällt, gleich dem Äquatorialdurchmesser der Wellenfläche, somit die grössere Axe bei negativen, die kleinere bei positiven Krystallen.

d. i. (wenn wir ϕ einen der beiden Winkel OTS , OTS' nennen)

$$\sin \phi^2 = \frac{[b^2 (A a^2 \mp b^2 \sqrt{x'^2 (A^2 a^2 + b^2) - a^2 b^2}) - A a^2 (b^2 \pm A \sqrt{x'^2 (A^2 a^2 + b^2) - a^2 b^2})]^2}{(1 + A^2) [(x'^2 (b^2 + A^2 a^2) - a^2 (b^2 \pm A \sqrt{x'^2 (A^2 a^2 + b^2) - a^2 b^2}))^2 + (A x'^2 (b^2 + A^2 a^2) - b^2 (A a^2 \mp b^2 \sqrt{x'^2 (A^2 a^2 + b^2) - a^2 b^2}))^2]}$$

substituirt man diese Werthe in die Gleichung

$$\frac{\sin \phi_1^2}{\sin \phi_2^2} = \frac{OR'^2}{OR^2} = \frac{TS^2}{TS'^2} = \omega$$

so findet man nach allen Reductionen $\omega = 1$, wodurch der Satz bewiesen ist.

Die Intensitätsverhältnisse leiten wir wieder aus den Grundgleichungen her, da sich dabei interessante Vereinfachungen herausstellen, welche in den allgemeinen Gleichungen verborgen bleiben. Wir beginnen mit dem Falle wo die einfallenden Wellen ordentliche sind.

Wir haben, wenn wir $\omega = 90^\circ$ setzen in 13, 15 des ersten Paragraphes des vorigen Abschnittes

$$\begin{aligned}\gamma &= \cos \varphi \sin a \cos \theta = \frac{\sin \varphi \sin a}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 a}} \\ \gamma' &= \cos \varphi \sin a \cos \theta' = -\frac{\sin \varphi \sin a}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 a}} \\ \gamma'' &= \cos \varphi' \sin a \cos \theta'' = -\frac{\sin \varphi' \sin a}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi' \sin^2 a}}\end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned}U &= \frac{-\cos a}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 a}} & U' &= \frac{-\cos a}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 a}} & U'' &= \frac{\sin \varphi' \sin a}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi' \sin^2 a}} \\ V &= \frac{\sin \varphi \cos \varphi \sin a}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 a}} & V' &= -\frac{\sin \varphi \cos \varphi \sin a}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 a}} & V'' &= \frac{\cos \varphi' \cos a}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi' \sin^2 a}} \\ W &= \frac{-\sin \varphi^2 \sin a}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 a}} & W' &= -\frac{\sin \varphi^2 \sin a}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 a}} & W'' &= \frac{-\sin \varphi' \cos a}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi' \sin^2 a}}\end{aligned} \quad [7]$$

folglich

$$U = U', \quad V = -V', \quad W = W'.$$

Setzen wir diese Werthe, so erhalten wir für 18 folgendes System von Gleichungen

$$\begin{aligned}A + U \alpha'' + U'' S &= 0 \\ B + V \alpha'' - V'' S &= 0 \\ C - W \alpha'' - W'' D &= 0\end{aligned} \quad [8]$$

wo

$$\begin{aligned}A &= -(\alpha + \alpha_0) U & B &= (\alpha - \alpha_0) V & C &= -(\alpha + \alpha_0) W \\ S &= \alpha' + \alpha'' & D &= \alpha' - \alpha''\end{aligned} \quad [9]$$

bedeutet. Aus diesen Gleichungen finden wir

$$\begin{aligned}\alpha'' &= \alpha \frac{-U V'' + U'' V}{-U V'' + U'' V} + \alpha_0' \\ \alpha' &= \alpha \frac{U V'' + U'' V}{U V'' + U'' V} \left(1 - \frac{V'' W}{V W''}\right) - \frac{W}{W''} \alpha_0' \\ \alpha_0'' &= \alpha \frac{U V'' + U'' V}{U V'' + U'' V} \left(1 + \frac{V'' W}{V W''}\right) + \frac{W}{W''} \alpha_0'\end{aligned} \quad [10]$$

Wir werden im nächsten der Kürze halber

$$\begin{aligned}\frac{U V'' - U'' V}{U V'' + U'' V} &= n & \frac{+ U V}{U V'' + U'' V} &= q & \frac{U V''}{(U V'' + U'' V) \cdot \frac{W}{W''}} &= p \\ \alpha'' &= \alpha m + \alpha_0' & \alpha' &= \alpha (n - q) - \alpha_0' p & \alpha_0'' &= \alpha (n + q) + \alpha_0' p\end{aligned} \quad [11]$$

setzen. Als vierte Bestimmungsgleichung dient die Relation 46 (III. Abschn., §. 3)

$$(\alpha^2 - \alpha_0'^2 - \alpha_0''^2) \sin \varphi \cos \varphi = (\alpha_0'^2 + \alpha_0''^2) \sin \varphi' \cos \varphi' \left[1 + \frac{(o^2 - e^2) \gamma'' \left(\frac{\sin a}{\cos \varphi'} - \gamma'' \right)}{e^2 + (o^2 - e^2) \gamma''^2} \right].$$

Es ist

$$\frac{\sin \varphi^2}{\sin \varphi'^2} = \frac{o^2}{e^2 + (o^2 - e^2) \gamma''^2} \quad \frac{\sin \varphi'^2}{\sin \varphi'^2} = \frac{e^2 + (o^2 - e^2) \gamma''^2}{e^2 + (o^2 - e^2) \gamma''^2} \quad \frac{\sin \varphi^2 - \sin \varphi'^2}{\sin \varphi^2} = \frac{o^2 - e^2}{e^2 + (o^2 - e^2) \gamma''^2} (1 - \gamma''^2)$$

folglich

$$1 + \frac{(o^2 - e^2) \gamma'' \left(\frac{\sin a}{\cos \varphi''} - \gamma'' \right)}{e^2 + (o^2 - e^2) \gamma''^2} = \frac{1}{1 - \gamma''^2} \left[(1 - \gamma''^2) + \frac{\sin \varphi^2 - \sin \varphi''^2}{\sin \varphi^2} \cdot \frac{\gamma''}{\cos \varphi''} (\sin a - \gamma'' \cos \varphi'') \right]$$

Substituirt man in die letzte eckige Klammer den Werth von $\gamma'' = \cos \varphi'' \sin a$, so wird

$$(1 - \gamma''^2) + \frac{\sin \varphi^2 - \sin \varphi''^2}{\sin \varphi^2} \cdot \frac{\gamma''}{\cos \varphi''} (\sin a - \gamma'' \cos \varphi'') = \\ 1 - \cos \varphi''^2 \sin a^2 + (\sin \varphi^2 - \sin \varphi''^2) \sin a^2 = 1 - \sin a^2 \cos \varphi^2$$

aber $\cos \varphi \sin a = \gamma$, folglich

$$[12] \quad 1 + \frac{(o^2 - e^2) \gamma'' \left(\frac{\sin a}{\cos \varphi''} - \gamma'' \right)}{e^2 + (o^2 - e^2) \gamma''^2} = \frac{1 - \gamma^2}{1 - \gamma''^2}$$

und 46 wird

$$[13] \quad (\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{A}_o'^2 - \mathfrak{A}_o''^2) (1 - \gamma''^2) \sin \varphi \cos \varphi = (\mathfrak{A}_e'^2 + \mathfrak{A}_e''^2) (1 - \gamma^2) \sin \varphi'' \cos \varphi''$$

Substituiren wir hier die Werthe aus [11] und setzen wir

$$[14] \quad \begin{aligned} (1 - \gamma''^2) \sin \varphi \cos \varphi &= k \\ (1 - \gamma^2) \sin \varphi'' \cos \varphi'' &= k' \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$[15] \quad \mathfrak{A}_o' = \frac{1}{2} \mathfrak{A} \left[\frac{km + 2pqk' - N}{k + k'p^2} \right]$$

wo

$$N^2 = (km + 2pqk')^2 + [k(1 - m^2) - 2k'(n^2 + q^2)] (k + k'p^2)$$

und wenn wir hier aus [11] die Werthe von m, n, p, q einführen

$$N^2 W^2 = k^2 W''^2 [(UV'' + U''V)^2 + 4UU''VV''] \\ - 4kk'UV(U''V''W - UVW'') - 4k'U^2V^2W^2$$

und wenn wir hier aus [7] die Werthe von U, V, W, U'', V'', W'' , und aus [14] die Werthe von k, k' substituiren, nach allen Reductionen

$$N^2 \frac{\sin \varphi''^2}{\sin \varphi^2 \cos \varphi^2} \cdot \frac{1 - \gamma^2}{1 - \gamma''^2} = (\sin \varphi'' \cos \varphi'' \cos a^2 + \sin \varphi \cos \varphi \sin a^2)^2.$$

Nach dieser Formel sind die Werthe der folgenden Tafel gerechnet. Sie soll dazu dienen eine ungefähre Vorstellung über den Einfluss der Zwillingfläche in bestimmten speciellen Fällen zu ermöglichen. Da mir die Instrumente fehlen die hier mitgetheilten Zahlen selbst näher zu prüfen, so stelle ich sie her wie sie die Rechnung ergab; es ist aber kein Zweifel, dass sie der Wirklichkeit entsprechen, nachdem die Verhältnisse im Hauptschnitte volle Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zeigen, und, so weit es die Schätzung mit der mikroskopischen Lupe zulässt, die Intensitäten auch im Querschnitte den hier mitgetheilten Zahlen gemäss sind. — Obschon die Natur nur wenige bestimmte Zwillinge bietet, so habe ich die Tafeln doch von 10 zu 10 Grad für alle Neigungen der optischen Axen zwischen 0° und dem Winkel der einfachen Reflexion und Brechung (S. Sitzb. XII, 236) gerechnet, um eine nähere Einsicht in den Gang der Verhältnisse zu gewinnen; die Constanten sind die des Kalkspathes.

In den folgenden Tafeln ist

φ der Einfallswinkel der ebenen Welle, d. i. der Winkel, den sie mit der Zwillingsebene einschliesst;

γ der Cosinus des Winkels, den die Normale der einfallenden Welle mit der optischen Axe des ersten Individuums einschliesst;

φ'' der Brechungswinkel der ausserordentlichen ebenen Wellen, d. i. der Winkel, den die ausserordentlich gebrochene Welle mit dem Hauptschnitte einschliesst;

γ'' der Cosinus des Winkels, den die Normale der ausserordentlich gebrochenen Welle mit der optischen Axe des zweiten Individuums einschliesst;

$\mathfrak{A}'_o, \mathfrak{A}'_e, \mathfrak{A}''_o, \mathfrak{A}''_e$ die Amplitude der ordentlich und ausserordentlich reflectirten, und der ordentlich und ausserordentlich gebrochenen Welle;

1. $\alpha = 10^\circ . \mathfrak{A} = 1$

φ	arc. cos γ	φ''	arc. cos γ''	\mathfrak{A}'_o	\mathfrak{A}'_e	\mathfrak{A}''_o	\mathfrak{A}''_e
10°	80° 9.2	11° 9.3	80° 11.5	0.00048	0.99830	0.00324	0.05817
20°	80° 36.5	22° 24.5	80° 45.7	0.00090	0.99270	0.00712	0.11503
30°	81° 21.1	33° 53.4	81° 42.7	0.00197	0.98363	0.01295	0.17373
40°	82° 21.3	45° 49.8	83° 3.0	0.01291	0.98181	0.01575	0.18718
50°	83° 35.5	58° 48.0	84° 50.3	0.01165	0.96235	0.04412	0.28345
60°	85° 1.2	75° 22.5	87° 29.2	0.03862	0.94052	0.15274	0.42400

2. $\alpha = 20^\circ . \mathfrak{A} = 1$

φ	arc. cos γ	φ''	arc. cos γ''	\mathfrak{A}''_o	\mathfrak{A}'_o	\mathfrak{A}''_e	\mathfrak{A}'_e
10°	70° 49.0	11° 3.7	70° 23.2	0.00064	0.99181	0.00615	0.12018
20°	71° 15.2	22° 14.0	71° 32.6	0.00349	0.96920	0.01324	0.23560
30°	72° 46.2	33° 39.4	73° 27.6	0.00887	0.93529	0.02286	0.34323
40°	74° 48.7	45° 34.7	76° 8.9	0.01933	0.89451	0.03862	0.44125
50°	77° 18.0	58° 34.2	79° 34.5	0.04286	0.84997	0.07428	0.55218
60°	80° 9.2	75° 15.1	85° 0.3	0.13160	0.77376	0.22925	0.79867

3. $\alpha = 26^\circ 15' 2. \mathfrak{A} = 1$

φ	arc. cos γ	φ''	arc. cos γ''	\mathfrak{A}'_o	\mathfrak{A}''_o	\mathfrak{A}'_e	\mathfrak{A}''_e
10°	64° 10.5	10° 58.5	64° 15.7	0.00135	0.98534	0.00764	0.16295
20°	65° 26.3	22° 4.3	65° 47.9	0.00581	0.94435	0.01612	0.31642
30°	67° 28.2	33° 26.7	68° 20.3	0.01610	0.88603	0.03006	0.45151
40°	70° 11.6	45° 20.8	71° 53.2	0.02357	0.82253	0.04687	0.58113
50°	73° 28.6	58° 22.2	76° 35.2	0.06797	0.74233	0.14051	0.64611
60°	77° 13.3	75° 8.2	83° 29.1	0.20681	0.63870	0.24743	0.96683

$\alpha = 26^\circ 52' 8 . \mathfrak{A} = 1$

φ	arc. cos γ	φ''	arc. cos γ''	\mathfrak{A}'_o	\mathfrak{A}''_o	\mathfrak{A}'_e	\mathfrak{A}''_e
10°	63° 33.3	10° 58.1	63° 39.0	0.00185	0.98497	0.00774	0.16746
20°	64° 51.5	22° 3.2	65° 13.6	0.00618	0.94145	0.01633	0.32482
30°	66° 57.0	33° 25.2	67° 49.8	0.01518	0.87839	0.02732	0.46578
40°	69° 44.2	45° 19.2	71° 27.8	0.03247	0.80561	0.04448	0.59165
50°	73° 6.3	58° 20.8	76° 16.5	0.07044	0.73012	0.08101	0.71979
60°	76° 56.1	75° 7.5	83° 20.1	0.21377	0.62340	0.24598	0.98282

$$a = 30^\circ \cdot \mathfrak{N} = 1.$$

φ	arc. cos γ	φ''	arc. cos γ''	\mathfrak{N}_0'	\mathfrak{N}_0''	\mathfrak{N}_1'	\mathfrak{N}_1''
10°	60°29.9	10°54.8	60°35.7	0.00282	0.98109	0.00226	0.19081
20°	61°58.5	21°57.3	62°22.3	0.00731	0.92451	0.01629	0.36768
30°	64°20.5	33°17.7	65°17.8	0.01832	0.84514	0.02844	0.52225
40°	67°28.7	45°11.0	69°21.9	0.03877	0.75522	0.04510	0.65929
50°	71°15.2	58°13.5	74°44.7	0.08094	0.66199	0.08098	0.78865
60°	75°31.3	75° 3.4	82°35.5	0.24788	0.54512	0.23297	1.05589

$$a = 40^\circ \cdot \mathfrak{N} = 1.$$

φ	arc. cos γ	φ''	arc. cos γ''	\mathfrak{N}_0'	\mathfrak{N}_0''	\mathfrak{N}_1'	\mathfrak{N}_1''
10°	50°43.6	10°43.8	50°50.1	0.00401	0.95939	0.00939	0.27663
20°	52°50.5	21°36.9	53°18.2	0.01182	0.84708	0.01866	0.51756
30°	56°10.4	32°50.3	57°18.7	0.02781	0.69897	0.02698	0.70520
40°	59°30.1	44°41.1	62°58.3	0.05229	0.56156	0.03066	0.85383
50°	65°35.7	57°46.6	69°57.3	0.11086	0.48028	0.05743	0.97396
60°	71°15.2	74°48.3	80°18.1	0.32990	0.27214	0.13611	1.22361

$$a = 45^\circ 23' 4 \cdot \mathfrak{N} = 1.$$

φ	arc. cos γ	φ''	arc. cos γ''	\mathfrak{N}_0'	\mathfrak{N}_0''	\mathfrak{N}_1'	\mathfrak{N}_1''
10°	45°29.1	10°37.4	45°35.8	0.00217	0.93976	0.00990	0.33251
20°	48° 0.7	21°24.8	48°29.3	0.01581	0.78646	0.01728	0.60700
30°	51°56.2	32°40.4	53°11.0	0.03439	0.59014	0.02488	0.79919
40°	56°57.1	44°23.1	59°25.3	0.06444	0.40191	0.02892	0.93069
50°	62°46.0	57°36.6	67°31.1	0.12871	0.24316	0.03528	1.04095
60°	69° 8.9	74°39.4	79° 8.6	0.35836	0.12118	0.05203	1.27793

$$a = 50^\circ \cdot \mathfrak{N} = 1.$$

φ	arc. cos γ	φ''	arc. cos γ''	\mathfrak{N}_0'	\mathfrak{N}_0''	\mathfrak{N}_1'	\mathfrak{N}_1''
10°	41° 1.6	10°31.8	41° 8.2	0.00416	0.01008	0.91776	0.38748
20°	43°57.5	21°14.4	44°26.3	0.01053	0.01686	0.70759	0.70109
30°	48°26.4	32°20.3	49°40.0	0.03515	0.01950	0.47465	0.87620
40°	54° 4.1	44° 8.1	56°38.8	0.06759	0.01763	0.25909	0.98539
50°	60°30.1	57°16.7	65°32.3	0.13269	0.01321	0.09035	1.07403
60°	67°28.7	74°31.5	78°12.4	0.35149	-0.01429	-0.02767	1.28677

$$a = 60^\circ \cdot \mathfrak{N} = 1.$$

φ	arc. cos γ	φ''	arc. cos γ''	\mathfrak{N}_0'	\mathfrak{N}_0''	\mathfrak{N}_1'	\mathfrak{N}_1''
10°	31°28.5	10°19.9	31°34.3	0.00493	0.00760	0.83388	0.74459
20°	35°31.9	20°52.8	35°59.2	0.01809	0.00979	0.48031	0.87108
30°	41°24.6	31°51.3	42°38.0	0.03597	0.00522	0.14267	0.99538
40°	48°26.4	43°35.9	51° 9.5	0.06243	-0.00693	-0.10543	1.02567
50°	56°10.4	56°47.3	61°40.9	0.09642	-0.02276	-0.28962	1.02634
60°	64°20.5	74°14.8	76°21.4	0.29793	-0.16182	-0.34525	0.22472

$$a = 63^\circ 44' 8 \cdot \mathfrak{N} = 1.$$

φ	arc. cos γ	φ''	arc. cos γ''	\mathfrak{N}_0'	\mathfrak{N}_0''	\mathfrak{N}_1'	\mathfrak{N}_1''
10°	27°58.1	10°16.5	28° 3.6	0.00546	0.00662	0.77942	0.62022
20°	32°34.1	20°45.5	28° 0.3	0.01779	0.00662	0.35048	0.93310
30°	39° 2.5	31°41.5	40°15.7	0.03342	0.00029	-0.01369	0.90917
40°	46°36.3	43°24.9	49°20.9	0.05590	-0.02667	-0.25810	0.98885
50°	54°47.8	56°37.1	60°25.9	0.10956	-0.06125	-0.39924	1.01297
60°	63°21.5	74° 9.0	75°49.3	0.25990	-0.20183	-0.46497	0.16114

$\alpha = 70^\circ . \mathfrak{N} = 1.$

φ	arc. cos γ	φ''	arc. cos γ''	\mathfrak{N}_o'	\mathfrak{N}_e'	\mathfrak{N}_o''	\mathfrak{N}_e''
10°	22°16'2	10°10'8	22°20'8	0·00528	0·00455	0·62890	0·77307
20°	27°59'4	20°24'2	28°16'1	0·01316	-0·01518	0·06447	1·00033
30°	35°31'9	31°27'1	36°42'8	0·03613	-0·00857	-0·30703	0·96520
40°	43°57'5	43° 8'7	46°42'9	0·04067	-0·02528	-0·51328	0·89255
50°	52°50'5	56°22'3	58°38'4	0·06989	-0·06254	-0·61655	0·85707
60°	61°58'3	74° 0'5	74°59'8	0·18283	-0·23468	-0·65694	1·19641

$\alpha = 80^\circ . \mathfrak{N} = 1.$

φ	arc. cos γ	φ''	arc. cos γ''	\mathfrak{N}_o'	\mathfrak{N}_e'	\mathfrak{N}_o''	\mathfrak{N}_e''
10°	14° 6'4	10° 4'5	14° 6'4	0·00391	-0·00003	0·01541	0·99639
20°	22°16'1	20°22'8	22°36'5	0·00679	-0·00487	-0·58002	0·82019
30°	31°28'4	31°10'8	32°35'4	0·00925	-0·01161	-0·77861	0·63978
40°	41° 1'6	42°50'5	43° 4'4	0·01303	-0·02138	-0·86029	0·53331
50°	50°43'6	56° 5'4	56°40'1	0·02131	-0·04851	-0·89725	0·48847
60°	60°30'1	73°50'8	74° 5'9	0·06080	-0·19848	-0·89846	0·59591

Für die Amplituden stellen sich sonach im Querschnitte sehr mannigfache Verhältnisse heraus. Im Allgemeinen zeigen die vorliegenden Berechnungen:

1. dass die Amplituden der reflectirten Welle immer nur einen sehr geringen Betrag gegenüber der Amplitude der gebrochenen Wellen besitzen. Dabei hat für Zwillingseombinationen, deren α unter 30° beträgt, die ausserordentlich reflectirte Welle die grössere Amplitude; bei $\alpha = 30^\circ$ überholt für einen Incidenzwinkel $\varphi = 50^\circ$ \mathfrak{N}_o' bereits \mathfrak{N}_e' und je mehr nun α zunimmt, desto früher tritt dies ein, so dass bei $\alpha = 60^\circ$ schon für jede Incidenz $\mathfrak{N}_o' > \mathfrak{N}_e'$ ausfällt. Dies Verhältniss nimmt dann wieder ab, und bei $\alpha = 80^\circ$ ist wieder für die höhere Incidenzwinkel $\mathfrak{N}_e' > \mathfrak{N}_o'$;

2. dass die Amplitude der ordentlich gebrochenen Wellen um so grösser ist gegenüber den Amplituden der ausserordentlich gebrochenen Wellen, je weniger Neigung die optische Axe gegen die Zwillingfläche besitzt;

3. dass bei zunehmendem Einfallswinkel das Verhältniss $\frac{\mathfrak{N}_o''}{\mathfrak{N}_e''}$ fortwährend abnimmt, so lange die Neigung der optischen Axe 50° nicht erreicht; bei $\alpha = 50^\circ$ geht es bei einer Incidenz φ von etwa 57° durch die Nulle und nimmt von da an wieder zu; je grösser α wird, für desto geringere Incidenzwinkel tritt der Nullwerth dieses Verhältnisses ein, so dass dies für $\alpha = 80^\circ$ schon bei der Incidenz $\varphi = 10^\circ$ stattfindet. Der Curve A_e' entspricht dabei immer eine Änderung in der Richtung und dem Zeichen ihres Krümmungshalbmessers.

Die Zahlenwerthe dieser Tabellen finden sich anschaulich dargestellt auf der Curventafel am Schlusse dieses Aufsatzes.

§. 4.

Um die Verhältnisse im Querschnitte vollständig darzustellen, erübrigt noch die Betrachtung der ausserordentlichen einfallenden Welle. Da allgemein

$$u_e'' = -u_e \frac{P}{\sqrt{4 Qu_e (Qu_e + Pw_e) + P^2}}$$

$$v_e'' = -v_e \frac{P}{\sqrt{4 Qu_e (Qu_e + Pw_e) + P^2}}$$

$$w_e'' = - \frac{Pw_e + 2 Qu_e}{\sqrt{4 Qu_e (Qu_e + Pw_e) + P^2}}$$

(Sitzb. XI, pag. 838) ist, und für $\omega = 90^\circ$ (s. Denkschr. IX, pag. 45)

$$[17] \quad \begin{array}{lll} u_e = 0 & u' = 0 & u'' = 0 \\ v_e = \sin \varphi & v' = -\sin \varphi' & v'' = -\sin \varphi'' \\ w_e = \cos \varphi & w' = \cos \varphi' & w'' = \cos \varphi'' \end{array}$$

(wo die einfach gestrichelten Buchstaben sich auf die ordentlich reflectirte, die doppeltgestrichelten auf die ausserordentlich gebrochene Welle beziehen); so hat man

$$[18] \quad \begin{array}{l} \sin \varphi'' = \sin \varphi \\ \cos \varphi'' = \sin \varphi \end{array}$$

d. i. die Welle geht ungebrochen durch den Krystall; anders verhält es sich mit den Strahlen. Setzen wir in (15) Sitzungsbericht XI, 832, für u_e, v_e, w_e , die dem Querschnitte entsprechenden Werthe und substituiren wir die also erhaltenen Grössen ξ_e, η_e, ζ_e für ξ, ζ, η in die Formeln, welche die Richtung der gebrochenen Strahlen angeben (Denkschr. IX, 61), so finden wir für den einfallenden Strahl

$$\begin{aligned} \xi_e &= \frac{Q \cos \varphi}{\sqrt{1 + (q^2 - 1) \cos^2 \varphi \sin^2 a^2}} = \frac{Q \cos \varphi}{\sqrt{1 + (q^2 - 1) \gamma^2}} \\ \eta_e &= \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + (q^2 - 1) \cos^2 \varphi \sin^2 a^2}} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + (q^2 - 1) \gamma^2}} \\ \zeta_e &= \frac{P \cos \varphi}{\sqrt{1 + (q^2 - 1) \cos^2 \varphi \sin^2 a^2}} = \frac{P \cos \varphi}{\sqrt{1 + (q^2 - 1) \gamma^2}} \end{aligned}$$

und für den gebrochenen Strahl

$$\begin{aligned} \xi_e'' &= \frac{Q \cos \varphi''}{\sqrt{1 + (q^2 - 1) \cos^2 \varphi'' \sin^2 a^2}} = \frac{Q \cos \varphi}{\sqrt{1 - (q^2 - 1) \gamma^2}} \\ &= \frac{-\sin \varphi''}{\sqrt{1 + (q^2 - 1) \cos^2 \varphi'' \sin^2 a^2}} = \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{1 - (q^2 - 1) \gamma^2}} \\ \zeta_e'' &= \frac{-P \cos \varphi''}{\sqrt{1 + (q^2 - 1) \cos^2 \varphi'' \sin^2 a^2}} = \frac{-P \cos \varphi}{\sqrt{1 - (q^2 - 1) \gamma^2}} \end{aligned}$$

es ist somit

$$\xi_e = \xi_e \quad \eta_e = -\eta_e'' \quad \zeta_e = -\zeta_e''$$

d. i. der gebrochene Strahl liegt nicht nur mit dem einfallenden und der Axe der X (der Projection der optischen Axen) in derselben Ebene, sondern er schliesst mit der Axe X auch denselben Winkel ein, wie der einfallende Strahl; der Querschnitt verhält sich somit für diese Strahlen völlig wie eine reflectirende Ebene und die Projection der optischen Axen wie ein Einfallslloth.

Die Richtung des reflectirten ausserordentlichen Strahles ist bestimmt durch

$$[19] \quad \begin{array}{lll} \xi_e' = \xi_e'' & \eta_e' = \eta_e'' & \zeta_e' = -\zeta_e'' \\ \xi_e' = \xi_e & \eta_e' = -\eta_e & \zeta_e' = \zeta_e \end{array}$$

Um die Intensität des reflectirten und gebrochenen Lichtes zu bestimmen, bedienen wir uns wieder der Gleichungen, welche §. 5 und 6 des letzten Abschnittes abgeleitet wurden. Wir erhalten so

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\sin \varphi \sin a}{\sqrt{1-\gamma^2}} & U' &= -\frac{\cos a}{\sqrt{1-\gamma'^2}} & U'' &= -\frac{\sin \varphi'' \sin a}{\sqrt{1-\gamma''^2}} \\ V &= -\frac{\cos \varphi \cos a}{\sqrt{1-\gamma^2}} & V' &= -\frac{\sin \varphi' \cos \varphi' \sin a}{\sqrt{1-\gamma'^2}} & V'' &= -\frac{\cos \varphi'' \cos a}{\sqrt{1-\gamma''^2}} \\ W &= -\frac{\sin \varphi \cos a}{\sqrt{1-\gamma^2}} & W' &= -\frac{\sin \varphi'^2 \sin a}{\sqrt{1-\gamma'^2}} & W'' &= -\frac{\sin \varphi'' \cos a}{\sqrt{1-\gamma''^2}} \end{aligned} \quad [21]$$

folglich, da $\varphi = \varphi$, $\gamma = \gamma''$

$$U = U'' \quad V = V'' \quad W = -W'' \quad [22]$$

Führen wir diese Werthe in 69 des vorigen Abschnittes ein, so ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + D U' - \mathfrak{N}_e'' U &= 0 \\ B + D V' - \mathfrak{N}_e'' V &= 0 \\ C + S W' + \mathfrak{N}_e'' W &= 0 \end{aligned} \quad [23]$$

wo

$$\begin{aligned} A &= (\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_e') U & B &= (\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_e') V & C &= -(\mathfrak{N} + \mathfrak{N}_e') W \\ D &= \mathfrak{N}_e' - \mathfrak{N}_e'' & S &= \mathfrak{N}_e' + \mathfrak{N}_e'' \end{aligned} \quad [24]$$

Aus diesen Gleichungen finden wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_e'' &= \mathfrak{N} - \mathfrak{N}_e' \\ \mathfrak{N}_e' &= \frac{W}{W'} \mathfrak{N}_e' \\ \mathfrak{N}_e'' &= \mathfrak{N}_e' \end{aligned} \quad [25]$$

Als vierte Bestimmungsgleichung dient die Relation 91 (III. Abschn., §. 6)

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}^2 \sin \varphi \cos \varphi \left(1 + \frac{(\sigma^2 - e^2) \gamma \left(\frac{\sin a}{\cos \varphi} - \gamma \right)}{e^2 + (\sigma^2 - e^2) \gamma^2} \right) - (\mathfrak{N}_e'^2 + \mathfrak{N}_e''^2) \sin \varphi' \cos \varphi' &= \\ = (\mathfrak{N}_e'^2 + \mathfrak{N}_e''^2) \sin \varphi'' \cos \varphi'' \left(1 + \frac{(\sigma^2 - e^2) \gamma'' \left(\frac{\sin a}{\cos \varphi''} - \gamma'' \right)}{e^2 + (\sigma^2 - e^2) \gamma''^2} \right) \end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{\sin \varphi'^2}{\sin \varphi^2} = \frac{\sigma^2}{e^2 + (\sigma^2 - e^2) \gamma^2} \quad \frac{\sin \varphi''^2}{\sin \varphi^2} = \frac{e^2 + (\sigma^2 - e^2) \gamma^2}{e^2 + (\sigma^2 - e^2) \gamma^2} \quad \frac{\sin \varphi'^2 - \sin \varphi^2}{\sin \varphi^2} = \frac{(\sigma^2 - e^2)(1 - \gamma^2)}{e^2 + (\sigma^2 - e^2) \gamma^2}$$

folglich

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma^2 - e^2) \gamma \left(\frac{\sin a}{\cos \varphi} - \gamma \right)}{e^2 + (\sigma^2 - e^2) \gamma^2} &= \frac{(\sin \varphi'^2 - \sin \varphi^2) \gamma (\sin a - \gamma \cos \varphi)}{\sin \varphi^2 \cos \varphi (1 - \gamma^2)} \\ \left(1 + \frac{(\sigma^2 - e^2) \gamma \left(\frac{\sin a}{\cos \varphi} - \gamma \right)}{e^2 + (\sigma^2 - e^2) \gamma^2} \right) (1 - \gamma^2) &= 1 - \gamma^2 + \frac{\sin \varphi'^2 - \sin \varphi^2}{\sin \varphi^2} \cdot \frac{\gamma}{\cos \varphi} (\sin a - \gamma \cos \varphi) \end{aligned}$$

für den Querschnitt $\omega = 90^\circ$ wird $\gamma = \cos \varphi \sin a$; substituirt man dies, so ergibt sich nach wenigen Reductionen

$$1 + \frac{(\sigma^2 - e^2) \gamma \left(\frac{\sin a}{\cos \varphi} - \gamma \right)}{e^2 + (\sigma^2 - e^2) \gamma^2} = \frac{1 - \gamma'^2}{1 - \gamma^2}$$

und da $\varphi = \varphi''$, auch

$$1 + \frac{(o^2 - e^2 \gamma'' \left(\frac{\sin a}{\cos \varphi} - \gamma'' \right))}{o^2 + (o^2 - e^2) \gamma''^2} = \frac{1 - \gamma''^2}{1 - \gamma^2}$$

folglich die Gleichung der lebendigen Kräfte

$$(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{A}_e'^2 - \mathfrak{A}_e''^2) (1 - \gamma'^2) \sin \varphi \cos \varphi = (\mathfrak{A}_e'^2 + \mathfrak{A}_e''^2) (1 - \gamma^2) \sin \varphi' \cos \varphi'.$$

Quadrirt man die erste Gleichung in 25 und führt man \mathfrak{A}_e' und \mathfrak{A}_e'' als Functionen von \mathfrak{A}' ein, so verwandelt sich 26 in

$$\mathfrak{A}_e' \mathfrak{A}_e'' (1 - \gamma'^2) \cos \varphi \sin \varphi = \mathfrak{A}_e'^2 \frac{W_e'^2}{W^2} (1 - \gamma^2) \sin \varphi' \cos \varphi'.$$

Diese Gleichung lässt sich in beiden

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_e' &= 0 \\ \mathfrak{A}_e'' (1 - \gamma'^2) \cos \varphi \sin \varphi &= \mathfrak{A}_e'' \frac{W^2}{W'^2} (1 - \gamma^2) \sin \varphi' \cos \varphi' \end{aligned}$$

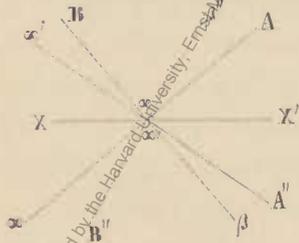
zerlegen, und es ist zu untersuchen, welche von beiden die Lösung ertheilt. Wenn eine Lichtwelle den Zwillingskrystall parallel mit dem Hauptschnitte durchschreitet, so wird, da $\omega = 0$, $\varphi = 90^\circ$ ist $\gamma = 0$ und

$$\begin{aligned} \sin \varphi' \frac{o}{e} \gamma' &= \frac{\sin a}{e} \sqrt{e^2 - o^2} \\ U &= - \sin a \quad U' = - \frac{e \cos a}{\sqrt{e^2 \cos a^2 + o^2 \sin a^2}} \quad U'' = - \sin a \\ V &= 0 \quad V' = - \frac{\frac{o}{e} \sqrt{e^2 - o^2} \cdot \sin a}{\sqrt{e^2 \cos a^2 + o^2 \sin a^2}} \quad V'' = 0 \\ W &= \cos a \quad W' = - \frac{\frac{o}{e} \sin a}{\sqrt{e^2 \cos a^2 + o^2 \sin a^2}} \quad W'' = - \cos a. \end{aligned}$$

Fände nun wirklich eine Brechung und Reflexion Statt, so müsste ein einfallender ausserordentlicher Strahl, der in diesem Falle mit der Wellennormale coincidirt, folgende Wirkungen äussern:

1. Da er einem parallelen Bündel angehört (wir betrachten die ganze Welle und diese schreitet in dem einen Individuum sowohl als in dem anderen fort), so wird er von einem zweiten Strahle begleitet sein, der jenseits der Zwillingsfläche parallel mit dieser sich fortpflanzt. Es sei a der Strahl im ersten, a'' im zweiten Medium, AA' die Projection der optischen Axen aA , $a''A''$ und die Ebene der Zeichnung die Hauptschnittsebene. Nimmt man an, die Schwingungen der ausserordentlichen Welle geschehen in der Polarisations-ebene, so werden die Oscillationen des Strahles a in der Richtung aB (senkrecht auf aA), die des Strahles a'' in der Richtung $a''B''$ (senkrecht auf $a''A''$) entfallen; nimmt man dagegen an, die Schwingungen der ausserordentlichen Welle geschehen senkrecht zur Polarisations-ebene, so werden die Oscillationen des Strahles a in die Richtung aA , die des Strahles a'' in die Richtung $a''A''$ entfallen.

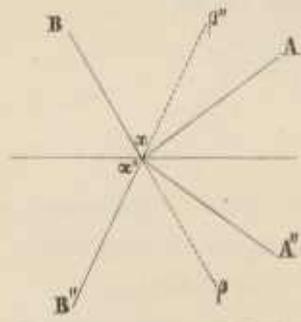
Da die hier abzuleitenden Folgerungen unter der einen Hypothese sowohl als unter der anderen bestehen, so werde ich mich auf die Darstellung nach der ersten beschränken.



Wir fanden (III. Abschn. S. 101)

$$\begin{array}{lll} U = -\sin a & U_e' = \sin a & U_e'' = -\sin a \\ W = \cos a & W_e' = -\cos a & W_e'' = -\cos a \end{array}$$

d. i. wenn die einfallende Welle nach aB schwingt, so gibt sie an der Trennungsebene Veranlassung zu einer Bewegung nach der Richtung $a\beta$ und aB'' : die letztere ist im zweiten Individuum eine mögliche und wird daher, da sie in die Oscillationsrichtung des parallelen Strahles a'' entfällt, die Amplitude desselben um die Grösse \mathfrak{A}_e'' verstärken; die erstere Bewegung ist im zweiten Individuum eine unmögliche, und ist zugleich der im ersten Individuum entgegengesetzt, ihre Wirkung wird sich somit als eine Verringerung der Amplitude des Strahles a auf die Grösse \mathfrak{A}_e' äussern. Somit wäre das Resultat, sobald man einen einfachen Strahl für sich allein betrachtet, Vermehrung der Intensität des benachbarten Strahles



(Brechung) und Verminderung der Intensität des einfallenden Strahles (Reflexion). Nun findet aber genau dasselbe auch für den benachbarten Strahl a'' im nächsten Individuum Statt: er veranlasste eine Bewegung in der Richtung $B''\beta''$ und $B''\beta$; die letztere ist eine im ersten Individuum mögliche und verstärkt die Amplitude des Strahles a um die Grösse \mathfrak{A}_e'' , die erstere aber ist eine im ersten Individuum unmögliche und ist gerade entgegengesetzt der Bewegung im zweiten Individuum, vermindert daher die Amplitude der letzteren auf \mathfrak{A}_e' . Das Resultat ist somit, dass die Amplitude sowohl des Strahles a , als auch die des Strahles a'' gleich der Differenz $\mathfrak{A}_e'' - \mathfrak{A}_e'$ geworden ist. Die Componente \mathfrak{A}_e kann nicht verschwinden. Denn denkt man sich eine Reihe elastischer Kugeln in Ba , eine andere in $B''a$, welche beide nur nach den gegebenen Richtungen hin verschoben werden können, und wird von der ersten Reihe in a ein Stoss auf a'' geübt, so entsteht in a ein Bestreben nach $a\beta''$ zu reflectiren, in a'' ein Bestreben nach $a''\beta$ vorzudringen: von beiden Bewegungen werden nur die Componenten wirklich in die Erscheinung treten, welche in die Richtung der möglichen Bewegung entfallen.

2. Da somit in der ausserordentlichen Welle nicht die Gesamtarbeit, welche in der einfallenden enthalten gewesen, aufgenommen werden kann, so muss die Arbeitsdifferenz auf irgend eine andere Weise wirksam werden. Dies geschieht, indem die für die extraordinäre Bewegung unwirksame Componente zur Erregung zweier ordinären Wellen Veranlassung wird. Die Amplituden derselben (reflectirten und gebrochenen) sind unter einander gleich $= \cotg a \frac{e}{o^2} \sqrt{e^2 \cos^2 a^2 + o^2 \sin^2 a^2} \cdot \mathfrak{A}_e'$ und da auch hier die zwei benachbarten Strahlen a und a'' sich gegenseitig verstärken, so wird die Intensität der von der Zwillingsebene zurückstrahlenden ordentlichen Strahlen der doppelten Amplitude \mathfrak{A}_e' entsprechen.

Schleifen wir daher aus einem Zwillinge senkrecht gegen seine Zwillingfläche parallel dem Hauptschnitte eine Platte und lassen wir das senkrecht einfallende Licht so polarisirt sein, dass die Schwingungsrichtung den auf das erste Individuum fallenden Strahlen parallel aB , und der auf das zweite Individuum fallenden Strahlen parallel $a''B''$ ist, so wird in der unmittelbaren Nähe der Zwillingfläche das extraordinärschwingende Licht in geringerer Intensität durchgehen als im übrigen Krystalle, wogegen von der Zwillingfläche aus gespiegeltes, aber ordentlich polarisirtes Licht nach beiden Seiten hin sich verbreitet.

Diesem Experimente dürften sich aber unübersteigliche Hindernisse in der Unmöglichkeit Licht von dem erforderlichen Polarisationszustande einfallen zu lassen, entgegenstellen. Dagegen ist es immer möglich, wenigstens dem einen Individuum Licht der entsprechenden Qualität zuzuführen. Da aber diese Form des Versuches die Frage über die Totalreflexion und Totalbrechung als erledigt voraussetzt, so kann hier noch nicht darauf eingegangen werden. Soviel jedoch ist aus den einfachen Betrachtungen, die ich hier anstellte, einzusehen, dass die erste der Lösungen 27 nicht statthaben könne, folglich als vierte Gleichung zu 25

$$\mathfrak{A}_e'' (1 - \gamma'^2) \cos \varphi \sin \varphi = \mathfrak{A}_e' \frac{W'}{W'^2} (1 - \gamma'^2) \sin \varphi' \cos \varphi'$$

zu treten habe. Hieraus leiten wir nun ab

$$\mathfrak{A}_e' = \mathfrak{A}_e'' = \frac{\cos \varphi \operatorname{tg} a \operatorname{tg} a \frac{\sqrt{1-\gamma'^2}}{\sqrt{1-\gamma^2}}}{1 + \frac{\sin \varphi' \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi'} \sin \varphi' \operatorname{tg} a^2}$$

$$\mathfrak{A}_e' = \frac{\frac{\sin \varphi' \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi'} \sin \varphi'^2 \operatorname{tg} a^2}{1 + \frac{\sin \varphi' \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi'} \sin \varphi'^2 \operatorname{tg} a^2}$$

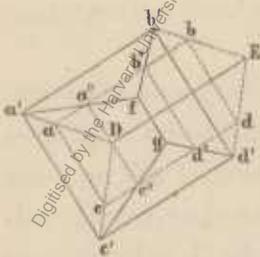
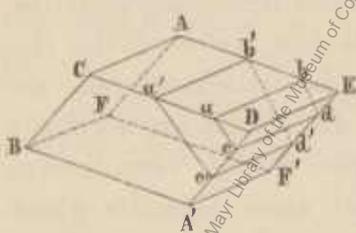
$$\mathfrak{A}_e'' = \mathfrak{A} \frac{1}{1 + \frac{\sin \varphi' \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi'} \sin \varphi'^2 \operatorname{tg} a^2}$$

§. 5.

Für die im Hauptschnitte stattfindenden Verhältnisse lässt sich der Nachweis leicht führen. Im Doppelspath findet sich häufig ein einziges Individuum von zahlreichen, höchst feinen Zwillingplatten durchzogen, deren Stellung dem Zwillingsgesetz $\alpha = 45^\circ 23' .4$ entspricht. Ist $ABCDEF A'$ die Theilungsgestalt des Kalkspaths, so liegen die eingebetteten Zwillingsschichten parallel $abcd$, $a'b'c'd'$, d. i. sie stumpfen die Axenkante gerade ab. Die Zwillingfläche gehört somit dem nächst stumpfen Rhomboeder an.

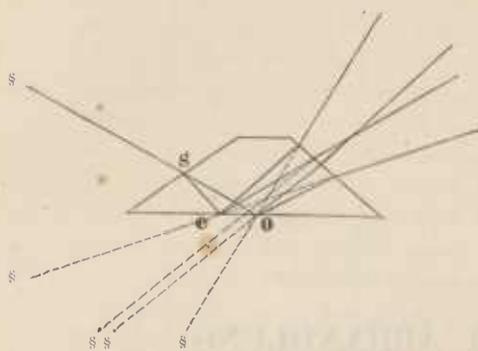
Ich wählte einen Krystall, in welchem diese Schichten ziemlich weit aus einander liegen und schnitt ein Stück desselben parallel $a'b'c'd'$ ab. Die Ecken E und D wurden nun durch Schnitte entfernt, so dass bei fg eine sehr stumpfe Kante entstand, die nun senkrecht gegen den Hauptschnitt gerichtet war. Die Schnittfläche $a'b'c'd'$ wurde matt gelassen, während die Seitenflächen $a'c'fg$, $b'dfg$, $a'bf$, $c'dg$ einen möglichst vollkommenen Schliff erhielten.

Sieht man nun durch eine der Flächen $a'bf$, $c'dg$ in den Krystall, während gegenüber in passender Höhe und Entfernung eine brennende Kerze gehalten wird, so gewahrt man vier Bilder derselben; zwei dieser Bilder liegen genähert in der Mitte, zwei sind mehr nach oben und unten abgelenkt. Mit dem Nicol'schen Prisma untersucht, erweist sich das oberste als extraordinär, das erste der mittleren als ordinär, das zweite als extraordinär, das unterste als ordinär. Die beiden ersten Bilder



werden daher von dem stärker gebrochenen Strahl se die beiden anderen von dem schwächer gebrochenen Strahl so durch seine Reflexion an der Zwillingsebene geliefert. Die grösste Intensität besitzen diese Bilder dann, wenn die Einfallsebene in die Kante fg tritt, d. i. im Querschnitte; dreht man den Krystall vor dem Auge so, dass die Einfallsebene mit fg einen Winkel einschliesst, so nimmt ihre Intensität ab und zwar in einem sehr rasch steigenden Verhältnisse, ohne dass jedoch ein völliges Auslöschen zu erreichen wäre. Dabei nimmt man auch deutlich wahr, wie von den zwei Bildern, welche der ordinäre Strahl liefert, das ordinäre in seiner Intensität um so mehr verliert, je grösser der Incidenzwinkel wird, während gleichzeitig die Lichtstärke des extraordinären Bildes zunimmt. Dies steht in voller Übereinstimmung mit der Berechnung des §. 3.

Sieht man aber durch die Fläche $a'c'fg$, $b'd'fg$, so erblickt man bei schiefer Lage von fg vier Bilder, von denen je zwei einander genähert stehen; die Analyse mittelst des Nicols weist nach, dass die beiden oberen dem ordinären, die beiden unteren den extraordinären Strahle ihre Entstehung verdanken. Alle vier Bilder sind verglichen mit jenen, welche das Prisma in der erten Stellung zeigte, schwach und matt. Dreht man nun das Prisma vor dem Auge so, dass die Einfallsebene immer mehr rechtwinkelig gegen fg gestellt wird, so nimmt die Lichtstärke der vier Bilder rasch ab, und wenn die rechtwinkelige Stellung nahezu erreicht ist, so verschwindet sie ganz, zuerst die beiden extraordinären, dann auch die ordinären. Im Hauptschnitte findet demnach gar keine Reflexion Statt. Bei fortgesetzter Drehung stellen sich wieder zuerst die beiden ordinären, dann die beiden extraordinären Bilder ein und ihre Intensität nimmt zu, je kleiner der Winkel zwischen den Einfallsebenen und der Kante fg wird. Somit ist der Nachweis auch für die Ergebnisse des §. 2 hergestellt.



Digitized by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology, Cambridge, Mass.

ERRATA IM ERSTEN THEILE DIESER ABHANDLUNG.

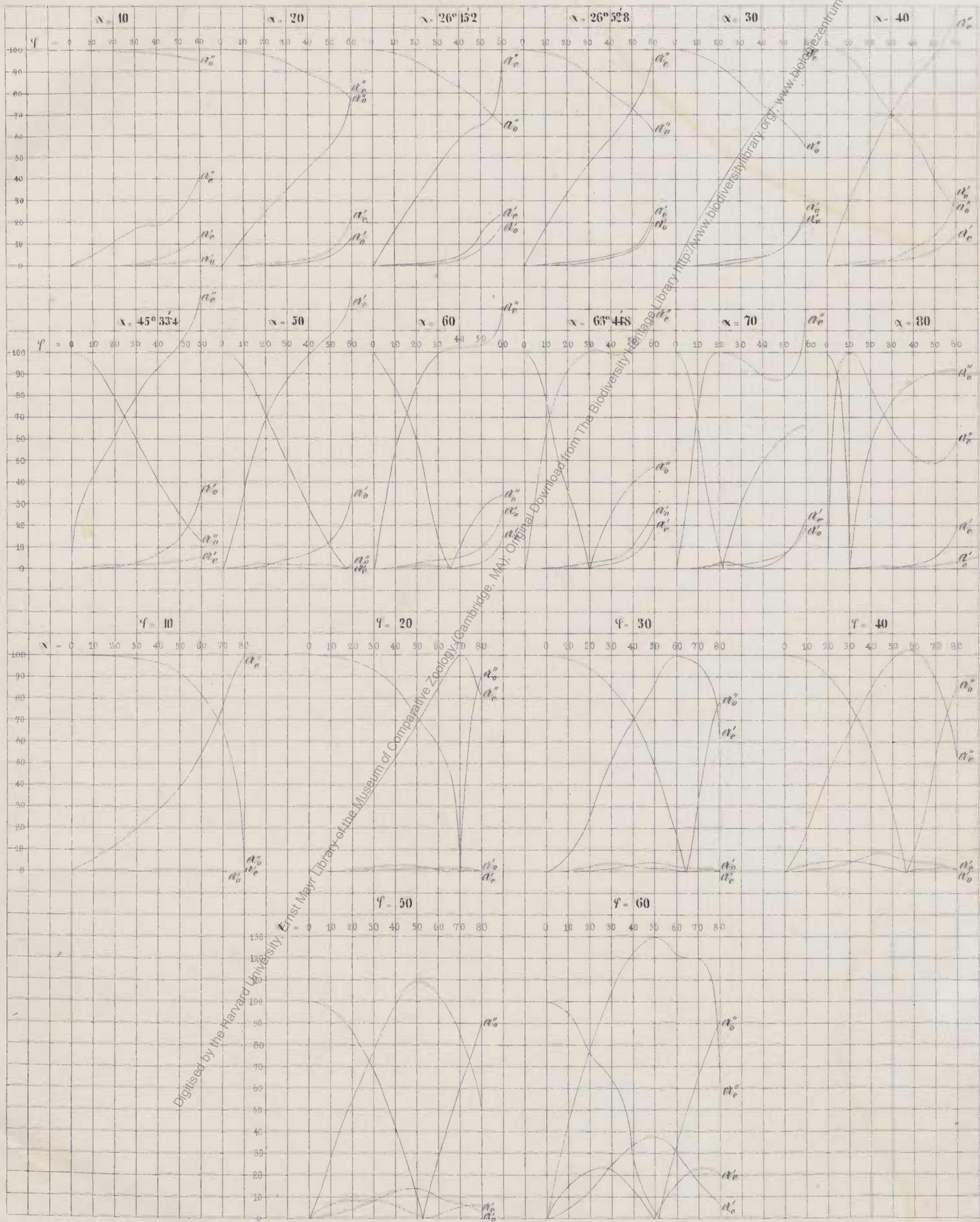
Seite 73, Zeile 11 von oben nach „Phasenverschiebung“ innerhalb der Grenze partieller Reflexion.

„ 112,	„ 9	von unten	statt ad	lies Aa .
„	8	„	„ cd	„ ab .
„	6	„	„ aA	„ A_2B_2 , statt „ cd bis CD “ lies „ ab bis c “.
„	5	„	„ $cdlc' CDDC'$	„ $aa'bb' AA'BB'$.
„	4	„	„ $BAB'A' bab'a'$	„ $b_2cc'b_2' A_2A_2'B_2B_2'$.
„	3	„	„ $CDC'D'$	„ $aba'b'$.
„	2	„	„ CD'	„ ab' , statt C lies a .
„	1	„	„ $CDC'D'$	„ $aba'b'$, statt DCH lies baH .

Downloaded from The Biodiversity Heritage Library
<http://www.biodiversitylibrary.org/>; www.biologiezentrum.at

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Downloaded from The Biodiversity Heritage Library

Graphisch. Brechung und Reflexion des Lichtes an Zwillingsflächen.



Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology, Cambridge, MA; Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/ www.biodiversitylibrary.org

Lith. u. d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.](#)

Jahr/Year: 1856

Band/Volume: [11_2](#)

Autor(en)/Author(s): Grailich Wilhelm Josef

Artikel/Article: [Über die Brechung und Reflexion des Lichts an Zwillingsflächen optisch einaxiger vollkommen dursichtiger Medien. 41-59](#)