AUFLÖSUNGSMETHODE

FÜR

ALGEBRAISCHE BUCHSTABENGLEICHUNGEN

MIT EINER EINZIGEN UNABHÄNGIGEN BUCHSTABENGRÖSSE.

VON

DR. IGNAZ HEGER.

Mit 1 Tafel.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 26. JUNI 1856.

Untersuchungen über die Unstätigkeit der Genüge leistenden Functionen.

I. Bestimmung jener speciellen Werthe α, für welche die Entwickelung der Wurzeln in Form einer nach Potenzen von $a-\alpha$ aufsteigend geordneten Reihe vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel nicht bewerkstelligt werden kann.

§. 1.

Bekanntlich lässt sich jede Function einer einzigen Variablen a in eine Reihe entwickeln von der folgenden Gestalt:

$$(1) \qquad f(a) = f(\alpha) + f'(\alpha) \, . \, (a-\alpha) + \frac{1}{2} f''(\alpha) \, . \, (a-\alpha)^2 + \ldots$$

Diese Reihe ist unter dem Namen der Mac-Laurin'schen bekannt. Sie bildet ein sehr wirksames Mittel, um beliebige explicite oder implicite Functionen darzustellen. Sie kann auch dazu verwendet werden, die Wurzeln einer höheren algebraischen Buchstabengleichung zu entwickeln. Der hierbei einzuschlagende Weg wäre folgender:

$$P = 0$$

sei die gegebene Gleichung, in der die zwei Buchstabengrössen x und a erscheinen, also P eine Function dieser zwei Grössen. Man denke sich nun anstatt x die Genüge leistende Function $\varphi(a)$ substituirt und dadurch P in eine Function der einzigen Grösse a verwandelt, die jedoch identisch Null ist; so ist es verstattet, P beliebig oft nach der Grösse a zu differentiiren und auf solche Weise eine beliebige Anzahl neuer, gleichfalls identischer Gleichungen daraus abzuleiten. Man erhält, von folgender bequemeren Bezeichnungsweise Gebrauch machend:

$$(2) \qquad \frac{dP}{dx} = P', \ \frac{dP}{da} = P_{,}, \ \frac{d^2P}{dx^2} = P'', \ \frac{d^2P}{dx\,da} = P_{,}', \ \frac{d^2P}{da^2} = P_{,,}, \ldots \ \frac{d^{r+s}P}{dx^r\,da^s} = P^{(r)}_{(s)}$$

$$(3) \qquad \frac{dx}{da} = x', \quad \frac{d^2x}{da^2} = x'', \ldots \frac{d^rx}{da^r} = x^{(r)}$$

die Reihe identischer Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{aligned} 0 &= P \\ 0 &= P'x' + P_{,} \\ 0 &= P'x'' + P''x'^2 + 2P_{,}'x' + P_{,,} \\ 0 &= P'x''' + 3(P''x' + P_{,}')x'' + P'''x'^3 + 3P_{,}''x'^2 + 3P_{,,}'x' + P_{,,,} \\ 0 &= P'x^{IV} + 4(P''x' + P_{,}')x''' + 3P''x''^2 + 6(P'''x'^2 + 2P_{,}''x' + P_{,,}')x'' + \\ &\quad + P^{IV}x'^4 + 4P_{,}'''x'^3 + 6P_{,,}''x'^2 + 4P_{,,,}'x' + P_{IV} \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

wobei aber stets unter x, x', x'',... die Genüge leistende Function $\varphi(a)$ und ihre successiven Differentialquotienten zu verstehen sind.

Will man die Entwickelung von x vornehmen, aufsteigend geordnet nach Potenzen der Grösse $a - \alpha$, unter α einen ganz beliebigen Zahlwerth verstanden, so können diese Gleichungen zur Bestimmung der Coëfficienten dienen, die darin erscheinen. Bezeichnet man nämlich mit x, x', x'',... P, P', $\mathrm{P}_{,}$, P'', $\mathrm{P}_{,}'$, $\mathrm{P}_{,,}$,... dasjenige, was durch die Substitution $a = \alpha$ aus x, x', x'',... P, P', $P_{,}$, P'', $P_{,}'$, $P_{,,}$ hervorgeht, wo also x, x', x'',..., P, P', $\mathrm{P}_{,}$,... bestimmte Zahlen bedeuten, weil α eine solche ist; so hat man einerseits zufolge der Mac-Laurin'schen Formel:

$$(5) \qquad x = \mathrm{x} + \mathrm{x}'(a - \alpha) + \frac{1}{2}\mathrm{x}''(a - \alpha)^2 + \ldots\ldots$$

andererseits aber:

$$(6) \qquad \begin{aligned} 0 &= \mathrm{P} \\ 0 &= \mathrm{P}'\mathrm{x}' + \mathrm{P}_{,} \\ 0 &= \mathrm{P}'\mathrm{x}'' + \mathrm{P}''\mathrm{x}'^2 + 2\mathrm{P}_{,}'\mathrm{x}' + \mathrm{P}_{,,} \\ 0 &= \mathrm{P}'\mathrm{x}''' + 3(\mathrm{P}''\mathrm{x}' + \mathrm{P}_{,}')\mathrm{x}'' + \mathrm{P}'''\mathrm{x}'^3 + 3\mathrm{P}_{,}''\mathrm{x}'^2 + 3\mathrm{P}_{,,}'\mathrm{x}' + \mathrm{P}_{,,,} \\ 0 &= \mathrm{P}'\mathrm{x}^{IV} + 4(\mathrm{P}''\mathrm{x}' + \mathrm{P}_{,}')\mathrm{x}''' + 3\mathrm{P}''\mathrm{x}''^2 + 6(\mathrm{P}'''\mathrm{x}'^2 + 2\mathrm{P}_{,}''\mathrm{x}' + \mathrm{P}_{,,}')\mathrm{x}'' + \\ &\quad + \mathrm{P}^{IV}\mathrm{x}'^4 + 4\mathrm{P}_{,}'''\mathrm{x}'^3 + 6\mathrm{P}_{,,}''\mathrm{x}'^2 + 4\mathrm{P}'_{,,,}\mathrm{x}' + \mathrm{P}_{IV} \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

denn die Gleichungen (4) sind für jedes a, also auch für $a = \alpha$ erfüllt. Diese letzteren Gleichungen (4) sind identisch erfüllt, wenn man sich anstatt x die Genüge leistende Function $\varphi(a)$ gesetzt denkt. Sie können aber auch als Bestimmungsgleichungen für die in denselben und in der (5) erscheinenden Grössen x, x', x'', x''',... benützt werden, wenn man x unberührt lässt und die an ihr vorzunehmende Substitution $a = \alpha$ nur anzeigt, durch Verwandeln von x, x', x'',... in x, x', x'',... Die erste derselben, die $\mathrm{P} = 0$ nämlich, enthält dann eine einzige Unbekannte x und liefert für dieselbe entsprechende Zahlwerthe, und zwar deren mehrere, weil sie von höherem Grade ist. Jeden dieser Werthe kann man als erstes Glied von x erwählen und dazu die Folgeglieder suchen. Diese Folgeglieder ergeben sich aus den übrigen Gleichungen, indem diese die Grössen x', x'',... bestimmen. Da der Zahlwerth von x durch die erste Gleichung bestimmt ist, so kann man sich durch Substitution dieses Werthes anstatt x die Grössen P', $P_{\prime}$, P'', $P'_{\prime}$, $P_{\prime\prime}$,... in Zahlen verwandelt denken. Die zweite Gleichung dient nun zur Bestimmung von x' und liefert einen einzigen Werth für diese Grösse. Diesen Werth kann man nun in die dritte Gleichung setzen und verwandelt sie dadurch in eine Gleichung des ersten Grades nach x'' mit vollkommen bestimmten Coëfficienten. Sie liefert daher einen und zwar einen einzigen Werth für x''. Auf gleiche Weise erhält man aus der vierten Gleichung den Werth von x''', aus der fünften jenen von x^{IV} u. s. w. Substituirt man diese gefundenen und zusammengehörigen Werthe von x, x', x'',... in die Formel (5), so ergibt sich x in der verlangten Gestalt. Weil nur die erste der Gleichungen (6) von höherem Grade ist und für x mehrere von einander verschiedene Werthe liefert, während die folgenden Gleichungen, alle dem ersten Grade angehörig, zu einem bestimmten x nur eine einzige Reihe zugehöriger Werthe für x', x'', x''',... liefern, so ist es ersichtlich, dass diese Entwickelungsweise zu allen Wurzeln der Gleichung führen könne, wenn man der Reihe nach alle verschiedenen Werthe von x erschöpft und zu jedem derselben die zugehörigen x', x'', x''', . . . sucht.

Dieser Entwickelungsgang findet meistentheils in solcher Weise Statt. Es gibt jedoch Fälle, d. h. specielle Werthe von α, für welche diese Entwickelung zu eigenthümlichen Erscheinungen führt:

Erstens kann es sich treffen, dass die Gleichung $P=0$ nicht die genügende Anzahl von Werthen für x liefert, sondern deren weniger. Die unmittelbare Folge hievon ist, dass nicht alle, sondern nur einige der Genüge leistenden Functionen $\varphi\ (\alpha)$ erhalten werden.

Zweitens. Es kann sich ereignen, dass irgend eine der darauffolgenden Gleichungen in (6), welche zur Bestimmung der Grössen x', x'',... dienen sollen, diesen Zweck nicht erfüllt, sondern im Gegentheile einen Widerspruch aufweist, wodurch gleichfalls die Anzahl der brauchbaren Werthe x und mit diesen die Anzahl der Wurzeln verringert wird.

Diesem Verluste einer oder mehrerer Wurzeln lässt sich zwar stets durch eine geeignete Wahl von α vorbeugen, weil die erwähnten Erscheinungen nur für ganz bestimmte und specielle Zahlwerthe eintreten können; allein für unseren Zweck haben vorzugsweise eben nur diese speciellen Werthe α praktische Bedeutung, weil sie über wichtige Eigenschaften der Genüge leistenden Functionen Aufschluss geben, während die aufsteigende Reihenentwickelung für alle anderen Werthe von α von uns niemals eingeleitet wird, da sie keine Durchsichtigkeit gewährt. Es ist demnach jene bekannte aufsteigende Reihenentwickelung, wie sie vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel bewerkstelligt werden kann, vollkommen unbrauchbar für unsere Zwecke, und sie gewinnt erst dann eine praktische Bedeutung, wenn die Mac-Laurin'sche Formel ihre Wirksamkeit verliert. Dies ist auch der Grund, warum wir die aufsteigende Reihenentwickelung von einem viel allgemeineren Gesichtspunkte aus abgeleitet, die Exponenten von $a-\alpha$ in den einzelnen Entwickelungsgliedern nicht auf die ganzen positiven Werthe: 0, 1, 2, 3, 4, ... beschränkt, wie dies bei der Mac-Laurin'schen Formel in der That geschieht, sondern, ohne über ihre möglichen Werthe irgend eine Annahme zu machen, dieselben vielmehr erst gesucht haben.

Die vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel eingeleitete Entwickelung haben wir hier nur desshalb in ihren Grundzügen angedeutet, weil wir dadurch Gelegenheit finden werden, jene für uns wichtigen speciellen Werthe α zu ermitteln. Wir wollen daher den Entwickelungsgang nochmals aufmerksam durchgehen und die Bedingungen erörtern, unter welchen auf die eine oder andere Weise eine oder mehrere Wurzeln verloren gehen.

§. 2.

Richten wir zuvörderst unsere Aufmerksamkeit auf die erste der Gleichungen (6), auf die P=0 nämlich. Für die bisher untersuchte Gattung algebraischer Gleichungen, die in der Form:

$$S[\Pi a^{\alpha} x^{r}] = 0$$

oder in der:

$$(7) \qquad A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots.. + A_1 x + A_o = 0$$

erscheinen, besitzt diese Gleichung die specielle Gestalt:

$$S[\Pi \alpha^{\alpha} \mathrm{x}^{r}] = \mathrm{A}_m \mathrm{x}^m + \mathrm{A}_{m-1} \mathrm{x}^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_1 \mathrm{x} + \mathrm{A}_o = 0.$$

Wir wollen nun die Frage aufwerfen: In welchen Fällen, d. h. für welche speciellen Werthe α liefert diese Gleichung weniger als m von einander verschiedene und endliche Werthe für x. Diese Frage beantwortet sich mit Leichtigkeit. Die Anzahl m der Auflösungen x kann auf eine zweifache Weise vermindert werden:

Erstens dadurch, dass A_m und vielleicht auch A_{m-1}, A_{m-2}, ... nämlich die Coëfficienten der höchsten Potenzen von x zufällig den Werth Null bekommen, und

Zweitens dadurch, dass unter den Wurzelwerthen x zwei oder mehrere gleiche vorkommen.

Die Werthe α, welche eine Verminderung der Anzahl m der von einander verschiedenen x herbeiführen, lassen sich demnach in zwei Classen theilen. Die ersteren veranlassen das Nullwerden von A_m und vielleicht auch von einigen der unmittelbar nachfolgenden Coëfficienten A_{m-1}, A_{m-2}, ... und vermindern auf diese Weise die Gradzahl der Gleichung und mit ihr die Anzahl der Wurzeln x. Die andern aber belassen zwar die Gradzahl m der Gleichung unberührt, vermindern aber die Anzahl der von einander verschiedenen Werthe von x durch das Herbeiführen wiederholter Wurzeln. Ausser den erwähnten zwei Gattungen specieller Werthe α bestehen keine mehr, die eine Verminderung der Anzahl der Werthe x herbeiführen könnten. Wir werden nun jede dieser beiden Gattungen einer genaueren Prüfung unterziehen in Bezug auf ihren Einfluss auf die aufsteigende Reihenentwickelung vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel.

Die zur ersten Gattung gehörigen Werthe α findet man durch Nullsetzen von A_m und Auflösung der so erhaltenen Zahlengleichung:

$$(8) \qquad A_m = 0.$$

Ist der Coëfficient A_m der höchsten Potenz von x ein a enthaltender Ausdruck, so kann man dieser Gleichung Genüge leisten und die derselben entsprechenden Wurzeln sind die gesuchten Werthe α der ersten Gattung. Nur wenn A_m eine bestimmte Zahl ist und gar kein a enthält, so ist es nicht möglich ihr Genüge zu leisten, und dann bestehen auch gar keine Werthe α der ersten Gattung.

Die auf solche Weise gewonnenen speciellen Werthe von α denke man sich nun in die Coëfficienten A_m, A_{m-1}, ... A_1, A_0 substituirt. Sie verwandeln sich dadurch in bestimmte Zahlen: 0, A_{m-1}; .... A_1, A_0. In der Regel wird A_{m-1} von Null verschieden sein; es kann sich jedoch auch ereignen, dass mit A_m, auch A_{m-1} und wohl noch einige der nächstfolgenden

Coëfficienten für $a = \alpha$ verschwinden. Durch diese Substitution gewinnt man die Gleichung $P = 0$ in der Gestalt:

$$(9) \qquad \mathrm{A}_{m-1}\mathrm{x}^{m-1} + \mathrm{A}_{m-2}\mathrm{x}^{m-2} + \ldots\ldots + \mathrm{A}_1\mathrm{x} + \mathrm{A}_0 = 0$$

oder in der:

$$(10) \qquad \mathrm{A}_r\mathrm{x}^r + \mathrm{A}_{r-1}\mathrm{x}^{r-1} + \ldots\ldots + \mathrm{A}_1\mathrm{x} + \mathrm{A}_0 = 0.$$

Diese Gleichungen liefern die Werthe von x. Da sie aber nicht vom Grade m, sondern von niedrigerem : $m—1$, oder r sind, so erhält man aus ihnen anstatt m, nur $m—1$, oder r Werthe für x. Es sind also dadurch, dass eben jener specielle Werth α erwählt wurde, ein oder mehrere Werthe x verloren gegangen. Wendet man sich nun zu den folgenden Gleichungen der (6), die zur Bestimmung von x', x'', ... dienen, so sieht man, dass sie zu einem jeden Werthe x nur eine einzige Reihe zugehöriger x', x'', ... liefern, und es unterliegt nun wohl keinem Zweifel mehr, dass die vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel eingeleitete aufsteigende Entwickelung von x in diesem Falle nicht alle m Wurzeln, sondern nur einige von ihnen zu liefern geeignet sei. Leitet man hingegen diese Entwickelung nach der allgemeineren Methode ein, die in einer früheren Abhandlung exponirt wurde, so findet man alle m Wurzeln. Unter diesen finden sich jene, welche die Mac-Laurin'sche Formel lieferte, in genau derselben Gestalt wieder, aber auch die übrigen die sie verweigerte. Es zeigt sich, dass diese Wurzeln nicht mit einem von $a—\alpha$ freien Anfangsgliede x, sondern mit einem Gliede beginnen, welches einen negativen Exponenten trägt, also mit einem Gliede von der Form $h_0(a—\alpha)^{-k}$ und nun ist der eigentliche Grund, warum die Mac-Laurin'sche Formel dieselben nicht liefern konnte, unmittelbar ersichtlich. Die verlorenen Wurzeln x besitzen nämlich $(a—\alpha)^k$ im Nenner und lassen sich demnach nicht mittelst der Mac-Laurin'schen Formel aufsteigend in der Form (5) entwickeln, wenn man nicht zu unendlichen Werthen der Grössen x, x', x'', ... seine Zuflucht nehmen wollte.

Wir schliessen hieraus, dass die Auflösung der Gleichung

$$A_m = 0$$

die Nenner der Genüge leistenden Functionen $\varphi\,(a)$ zu liefern geeignet sei, und zwar durch ein sehr einfaches Verfahren. Hat man nämlich alle Wurzeln α dieser Gleichung ermittelt, so braucht man nur für jeden solchen Werth α die aufsteigend nach Potenzen von $\mathrm{a} = a—\alpha$ geordnete Reihenentwickelung und namentlich nur die Bestimmung der mit negativen Exponenten ξ_0 versehenen Anfangsglieder einzuleiten, um alsogleich Aufschluss zu erhalten über die Art und Weise des Vorkommens eines solchen Nenners. Es wird sich dabei zeigen, ob die Grösse $a—\alpha$ oder eine Potenz derselben als Nenner von $\varphi\,(a)$ erscheint, ferner, ob dieser Nenner nur in einer oder in mehreren Wurzeln vorkommt.

§. 3.

Schreiten wir nun zur Untersuchung der Werthe α, welche der zweiten Gattung angehören, d. h. welche gleiche Wurzeln x in der (7) herbeiführen. Die Bedingung gleicher Wurzeln ist analytisch ausgedrückt, wenn man zur (7) noch die durch einmaliges Differentiiren nach x abgeleitete Gleichung:

$$(11) \qquad P' = m\,A_m\,x^{m-1} + (m—1)\,A_{m-1}\,x^{m-2} + \ldots + A_1 = 0$$

t*

hinzufügt. Durch diese Bedingung ist gleichfalls meistentheils der Werth von α bestimmt, denn es liegen nun zur Bestimmung der zwei Grössen x und α zwei Gleichungen vor. Die aus diesem Systeme von zwei Gleichungen gezogenen Werthe von α sind eben die Werthe α der zweiten Gattung. Ausnahmsweise kann es sich wohl treffen, dass diese zwei Gleichungen den Werth von α nicht als eine bestimmte Zahl feststellen, weil es geschehen kann, dass ein α und x enthaltender Factor in beiden gemeinschaftlich erscheint. Es würde dann genügen, diesen gemeinschaftlichen Factor der Nulle gleichzusetzen, um beide Gleichungen zu erfüllen, und es gäbe dann unendlich viele Werthe α, welche gleiche Wurzeln herbeiführen. Zufolge der Ableitungsweise der zweiten Gleichung jedoch kann ein solcher gemeinschaftlicher Factor nur dann erscheinen, wenn derselbe in der (7) zweimal existirt, also nur dann, wenn die gegebene Gleichung $P = 0$ gleiche Wurzeln x besitzt, und es darf daher nicht Wunder nehmen, dass gelegentlich für ganz beliebige Werthe α gleiche Wurzeln x bestehen. Nachdem nun gezeigt wurde, wie die Werthe α der zweiten Gattung durch Auflösung eines Systems von zwei Zahlengleichungen gewonnen werden, wollen wir jetzt den Gang der Rechnung verfolgen, wie er sich bei der aufsteigenden Entwickelung nach einer solchen Grösse $a = a - \alpha$ vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel ergibt.

Die Ermittelung von x aus der $P = 0$ bietet nichts Anstössiges, denn wenn gleich nicht m von einander verschiedene Werthe dafür gefunden werden, so sind dennoch gewissermassen alle m Auflösungen x repräsentirt und es ist bis jetzt wenigstens noch immer möglich, dass wirklich m aufsteigend geordnete Reihen für x erhalten werden. Wenden wir uns nun zu den nachfolgenden Gleichungen der (6), die sonst der Reihe nach die zu x gehörigen Werthe von x', x'', . . . geliefert haben. Zufolge der Relation: $P' = 0$ verwandeln sie sich in folgende neue Gleichungen:

$$
(12) \qquad
\begin{aligned}
0 &= P_{,} \\
0 &= P'' x'^2 + 2 P_{,}' x' + P_{,,} \\
0 &= 3\,[P'' x' + P_{,}']\, x'' + P''' x'^3 + 3 P_{,}'' x'^2 + 3 P_{,,}' x' + P_{,,,} \\
0 &= 4\,[P'' x' + P_{,}']\, x''' + 3 P'' x''^2 + 6\,[P''' x'^2 + 2 P_{,}'' x' + P_{,,}']\, x'' + \\
&\quad + P^{IV} x'^4 + 4 P_{,}''' x'^3 + 6 P_{,,}'' x'^2 + 4 P_{,,,}' x' + P_{IV} \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}
$$

Wir bemerken, dass alle diese Gleichungen ihre Rollen wechseln, indem jede derselben nun nicht mehr dieselbe Grösse bestimmt, wie früher, sondern dieses Amt an die nächstfolgende überträgt. So z. B. bestimmt die zweite der (6) nun nicht mehr den Werth von x', wie dies früher der Fall war, sondern die darauffolgende dritte. Diese wieder hat aufgehört, x'' zu liefern, und dasselbe ist nunmehr aus der nächstfolgenden zu ziehen u. s. w. Man bemerkt ferner, dass die zweite der (12) nunmehr nach x' vom zweiten Grade ist, während die dritte nach x'' schon wieder dem ersten Grade angehört. Gleiches gilt von den darauffolgenden, die x''', x^{IV}, ... zu bestimmen haben. Auch diese neue Erscheinung hat nichts Befremdendes, denn da zwei gleiche Werthe x bestehen, so steht zu erwarten, dass hiezu zwei Werthe x' gehören, die wohl meistentheils verschieden sein werden. Zu einem jeden solchen Werthe x' wird daher nur eine einzige Reihe x'', x''' ... gehören. Dies würde also ganz gut zusammenpassen, wenn nur die erste der Gleichungen (12) nicht noch übrig wäre, und die keine wählbare Grösse mehr enthält, wenn man sich x und a schon ihrem Zahlwerthe nach durch die (7) und (11) bestimmt denkt. Diese Gleichung kann daher nur entweder zufälligerweise erfüllt sein oder nicht. Ist sie nicht erfüllt, so besteht ein Widerspruch, der durch keine im endlichen Bereiche getroffene Wahl von x', x'', x''', ... mehr behoben werden kann, und der besagt, dass keine Reihe von der angenommenen Form (5) bestehe, welche eben dieses erwählte Anfangsglied x besitzt. Man wird daher auf dieselbe Verzicht leisten müssen und dadurch so viele Wurzeln x einbüssen, als gleiche Wurzeln x vorhanden waren. Ist hingegen die Gleichung:

$$P_{,} = 0$$

zufälligerweise erfüllt, so unterliegt die wirkliche Entwickelung in der Regel keiner Schwierigkeit.

Man ersieht hieraus, dass die durch Auflösung der zwei Gleichungen (7) und (11) gewonnenen Werthe a nicht nothwendigerweise eine Störung in der vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel eingeleiteten Reihenentwickelung herbeiführen werden, sondern dass zur Entscheidung der Frage, ob eine solche Störung eintreten wird oder nicht, der Zahlwerth $P_{,}$ berücksichtigt werden müsse. Ist $P_{,}$ von Null verschieden, so ist der Widerspruch und mit ihm die Störung der Reihenentwickelung offen dargethan. Ist aber $P_{,} = 0$, so bleibt die Frage vor der Hand noch unbeantwortet. Fragt man nach dem eigentlichen Grunde dieser Störung, welche durch das Nichtnullsein von $P_{,}$ herbeigeführt wird, so muss man sich zu der von einem allgemeineren Gesichtspunkte ausgehenden und stets zum Ziele führenden Reihenentwickelung wenden, wie sie früher gezeigt wurde. Dieselbe liefert nun auch die hier verloren gegangenen Wurzeln x und es zeigt sich, dass sie wirklich mit jenem Anfangsgliede x beginnen, welches als wiederholte Wurzel der (7) auftrat; das unmittelbar darauffolgende Glied enthält jedoch $a—a$ erhoben zu einem gebrochenen Exponenten $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$ Es ist auch nunmehr klar, dass die Mac-Laurin'sche Formel diese Werthe x zu verschweigen genöthigt war, weil sie in dieser Form mit endlichen Werthen von x', x'' ... nicht darstellbar sind.

Wenden wir uns nun zu dem anderen Falle, wo $P_{,} = 0$ ist, wo es also noch unentschieden bleibt, ob alle m-Wurzeln erhalten werden oder nicht, und richten wir zuvörderst die Aufmerksamkeit auf die zweite der Gleichungen (12), auf die:

$$P'' x'^2 + 2P_{,}' x' + P_{,,} = 0. \tag{13}$$

Diese Gleichung wird in der Regel zwei endliche und von einander verschiedene Werthe x' liefern und zu jedem dieser Werthe wird dann eine zugehörige Reihe von x'', x''', x^{IV}, ... aus den nachfolgenden Gleichungen des ersten Grades gewonnen werden, so zwar, dass dann das Auftreten von zwei gleichen Wurzeln x keinen Verlust an Genüge leistenden Reihen veranlassen wird. Sobald aber diese Gleichung des zweiten Grades weniger als zwei endliche und von einander verschiedene Wurzeln für x' liefert, ist ein solcher Verlust eine nothwendige oder doch wenigstens mögliche Folge.

Die Gleichung (13) kann in diesen Ausnahmsfall auf zweierlei Art gerathen:

Erstens: wenn sie vom niedrigeren Grade als vom zweiten ist.

Zweitens: wenn sie gleiche Wurzeln besitzt.

Das Erstere findet Statt:

a) wenn $P'' = 0$, $P_{,}'$ aber von Null verschieden ist.

b) wenn $P'' = 0$ und $P'_{\prime} = 0$, $P_{\prime\prime}$ aber von Null verschieden ist;

c) wenn $P'' = 0$, $P'_{\prime} = 0$ und $P_{\prime\prime} = 0$ ist.

Das Zweite, wenn:

d) $P''x' + P'_{\prime} = 0$ ist.

Wir wollen diese vier Fälle nun der Reihe nach berücksichtigen.

a) Es sei $P'' = 0$, $P'_{\prime}$ aber von Null verschieden.

Die Gleichung (7) hat in einem solchen Falle mindestens drei gleiche Wurzeln x. Die aufsteigende Entwickelung vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel würde daher nur dann keiner Störung unterliegen, wenn sie dazu wirklich drei verschiedene Reihen lieferte. Die Gleichungen (6) sind in diesem Falle folgende:

$$
\begin{aligned}
&0 = 2P'_{\prime}x' + P_{\prime\prime} \\
(14)\quad &0 = 3P'_{\prime}x'' + P'''x'^3 + 3P''_{\prime}x'^2 + 3P'_{\prime\prime}x' + P_{\prime\prime\prime} \\
&0 = 4P'_{\prime}x''' + 6(P'''x'^2 + 2P''_{\prime}x' + P'_{\prime\prime}) + P^{IV}x'^4 + 4P'''_{\prime}x'^3 + 6P''_{\prime\prime}x'^2 + 4P'_{\prime\prime\prime}x' + P_{IV} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

und man ersieht aus ihnen unmittelbar, dass nur eine einzige Reihe von Werthen x', x'', x''', ... gewonnen werden könne. Die Mac-Laurin'sche Formel liefert demnach statt dreier Wurzeln x nur eine einzige. Es unterliegt in diesem Falle die Entwickelung stets einer Störung, und alle übrigen Wurzeln, welche durch das Anfangsglied x bezeichnet sind, enthalten eine Irrationalgrösse $\sqrt[p]{a}$, welche denselben die Entwickelbarkeit vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel benimmt.

b) Ist $P'' = 0$, $P'_{\prime} = 0$ und $P_{\prime\prime}$ von Null verschieden, so liegt der Widerspruch in der dritten der Gleichungen (6) unmittelbar am Tage. Es ist dann keine der durch x bezeichneten Wurzeln in der hier supponirten Weise entwickelbar.

c) Ist $P'' = 0$, $P'_{\prime} = 0$, $P_{\prime\prime} = 0$, so verwandeln sich die Gleichungen (6) in:

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
&0 = P'''x'^3 + 3P''_{\prime}x'^2 + 3P'_{\prime\prime}x' + P_{\prime\prime\prime} \\
&0 = 6[P'''x'^2 + 2P''_{\prime}x' + P'_{\prime\prime}]x'' + P^{IV}x'^4 + 4P'''_{\prime}x'^3 + 6P''_{\prime\prime}x'^2 + 4P'_{\prime\prime\prime}x' + P_{IV} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Die erste derselben ist meistentheils vom dritten Grade, liefert daher drei Werthe für x'; die folgenden sind alle dem ersten Grade angehörig; man gewinnt daher zu jedem Werthe x' eine Reihe von Werthen x'', x''', ... So oft daher die erste dieser Gleichungen wirklich drei verschiedene und endliche Werthe für x' liefert, unterliegt die Reihenentwickelung keinerlei Störung. Gehen aber von diesen drei Werthen einige verloren, entweder durch Verminderung der Gradzahl der Gleichung oder durch Auftreten gleicher Wurzeln, so kann eine Störung der Reihenentwickelung eintreten. Die Untersuchung der hiebei möglichen Fälle zersplittert sich in mehrere Theile. Sie lässt sich jedoch ohne Schwierigkeit durchführen, wenn man die eben geführten Untersuchungen als Muster benützt.

d) Besitzt die Gleichung (13) gleiche Wurzeln x', ist also $P''x' + P'_{\prime} = 0$, so gestalten sich die Gleichungen (6) folgendermassen:

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
&0 = P'''x'^3 + 3P''_{\prime}x'^2 + 3P'_{\prime\prime}x' + P_{\prime\prime\prime} \\
&0 = 3P''x''^2 + 6(P'''x'^2 + 2P''_{\prime}x' + P'_{\prime\prime})x'' + \\
&\quad + P^{IV}x'^4 + 4P'''_{\prime}x'^3 + 6P''_{\prime\prime}x'^2 + 4P'_{\prime\prime\prime}x' + P_{IV} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Von diesen Gleichungen ist die erste keine Bestimmungsgleichung mehr, denn sie enthält nur Grössen, die bereits ihrem Werthe nach bestimmt sind. Sie spricht eine Bedingung aus der nicht mehr durch schickliche Wahl gewisser Grössen entsprochen werden kann, und sie kann daher nur zufälligerweise, wird aber in der Regel jedoch nicht erfüllt sein. Das zufällige Erfüllt- oder Nichterfülltsein derselben wird darüber entscheiden, ob die aus den Gleichungen (7) und (13) gewonnenen Werthe x und x′ brauchbar sind oder nicht. Ist sie nicht erfüllt, so ist der Widerspruch offen am Tage und die Mac-Laurin'sche Formel versagt ihre Wirksamkeit bei der Entwickelung dieser zwei Wurzeln. Sucht man sich durch die andere allgemeine aufsteigende Entwickelung für diesen speciellen Werth α die Wurzeln x zu verschaffen, so gewinnt man durch dieselbe wieder alle Wurzeln, und zwei derselben besitzen die zwei Anfangsglieder $\mathrm{x} + \mathrm{x}'(a-\alpha)$ gemeinschaftlich, welche die Gleichungen (7) und (13) geliefert haben, aber die darauffolgenden Glieder der Entwickelung passen nicht mehr in die Form (5), denn sie weisen ein Glied von der Form $h\mathrm{a}^{\frac{3}{2}}$ auf. Es ist nun auch klar, warum die Mac-Laurin'sche Formel diese zwei Wurzeln zu liefern ausser Stande ist und warum gerade vom dritten Entwickelungsgliede angefangen ein Widerspruch in den Gleichungen (6) auftritt. Man gewinnt zugleich die Überzeugung, dass der specielle Werth α, der aus den zwei Gleichungen fliesst, unter diesen Bedingungen auf eine in zwei Wurzeln erscheinende Irrationalgrösse $\sqrt{\mathrm{a}} = \sqrt{a-\alpha}$ den vollkommen strengen Schluss verstattet.

Ist aber die erste der Gleichungen (16) zufälligerweise erfüllt, so werden die übrigen Gleichungen in der Regel Werthe für x″, x‴, ... liefern, und zwar deren zwei. Die zweite Gleichung in (16) ist nämlich nach x″ dem zweiten Grade angehörig und liefert zwei in der Regel verschiedene Werthe für diese Grösse. Die nächstfolgenden Gleichungen dienen dann wirklich zur Bestimmung der Grössen x‴, x^{IV}, ... und sind alle dem ersten Grade angehörig. Nur wenn die zweite der Gleichungen (16) für x″ weniger als zwei endliche und verschiedene Werthe liefert, findet wieder eine Veränderung Statt, die auf die Zu- oder Unzulässigkeit der Reihenentwickelung Einfluss hat.

Wir erachten es nicht für nöthig, den Gang dieser Untersuchungen weiter fortzuspinnen; das hier Gesagte erweist zur Genüge den Charakter derselben und den eigenthümlichen Zusammenhang zwischen den Gleichungen (16).

§. 4.

Fassen wir das Ergebniss dieser Untersuchungen kurz zusammen, so gewinnen wir folgende wichtige Lehrsätze:

1. Die Wurzeln einer algebraischen Gleichung besitzen, wie jede andere Function, die Eigenschaft, sich vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel nach einer Grösse $\mathrm{a} = a - \alpha$ in eine aufsteigende Reihe:

$$\mathrm{x} + \mathrm{x}'(a-\alpha) + \frac{\mathrm{x}''}{2}(a-\alpha)^2 + \ldots\ldots$$

entwickeln zu lassen, und verlieren diese Eigenschaft nur für ganz specielle Werthe α, indem weniger als m Wurzeln der Gleichung erhalten werden.

2. Diese speciellen Werthe von α sind von zweierlei Gattung und werden auch durch zwei getrennte Untersuchungen gewonnen. Die der ersten Gattung beigezählten Werthe α

liefern weniger als m Werthe x, indem die dazu dienende Bestimmungsgleichung von niedrigerem Grade ist. Man gewinnt sie durch Nullsetzen des Coëfficienten der höchsten Potenz von x und durch Auflösung der so erhaltenen Gleichung:

$$A_m = 0.$$

Auf diese Weise können Werthe x und mit ihnen auch die Wurzeln x sowohl einzeln als auch gruppenweise verloren gehen. Der Grund dieses Verlustes ist die Anwesenheit eines Divisors a oder a^k in den verloren gegangenen Wurzeln, so zwar, dass die Bestimmung der Werthe α der ersten Gattung den Schlüssel bietet zur Auffindung aller in den Wurzeln erscheinenden Nenner.

Die speciellen Werthe α der zweiten Gattung bedingen den Verlust an Wurzeln x nicht bei der Bestimmung des Anfangsgliedes x, sondern erst bei einem gewissen Folgegliede. Sie bieten zur Bestimmung des Werthes von x eine Gleichung des m^{ten} Grades, aber versehen mit gleichen Wurzeln. Dieselben veranlassen niemals den Verlust einer einzigen Wurzel, sondern immer einer Gruppe von zweien oder mehreren solchen. Die zu einer solchen Gruppe gehörigen Wurzeln stimmen in einer Anzahl von Anfangsgliedern vollkommen überein bis zu jenem Gliede, bei dessen Bestimmung der Widerspruch auftaucht, ausgesprochen durch eine überschüssige, nicht erfüllbare Bedingungsgleichung. Diese Werthe α haben nebst der Bedingung gleicher Wurzeln x noch andere Bedingungen zu erfüllen. Man erhält sie durch Auflösung eines Systems zweier Gleichungen:

$$P = 0 \;, \quad \frac{dP}{dx} = 0;$$

allein nicht alle auf solche Weise gewonnenen Werthe von α sind wirklich Werthe α der zweiten Gattung, sondern man hat noch eine bald längere, bald kürzere Untersuchung nachfolgen zu lassen, die die Bestimmung der Folge-Coëfficienten x′, x″,... zum Gegenstande hat, eine Untersuchung, die mit der Ermittelung der mehrfachen Punkte bei einer ebenen Curve und der Bestimmung der dort stattfindenden Berührungsordnung zwischen den verschiedenen Curvenästen congruent ist. Die Ursache des für solche Werthe α eintretenden Verlustes an Wurzeln x ist das Vorhandensein gewisser Irrationalgrössen $\sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{(a-\alpha)}$ in denselben. Die Bestimmung der Werthe α der zweiten Gattung bildet den Schlüssel zur Ermittelung aller in den Wurzeln der Gleichung erscheinenden Irrationalgrössen.

Wir haben im Vorhergehenden nicht blos von den Störungen gesprochen, auf welche man bei der aufsteigenden Entwickelung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit rationalen Coëfficienten stossen kann, wenn man hierzu die Mac-Laurin'sche Formel verwendet, also eine Methode gebraucht, welche bisher die einzige bekannte war; sondern wir haben auch an den bezüglichen Stellen die Erwähnung gethan, dass die von uns angegebene und von einem allgemeineren Gesichtspunkte abgeleitete aufsteigende Entwickelungsmethode keinen solchen Zufälligkeiten und Störungen unterworfen sei, ja dass sie eben jene Bestandtheile liefere, welche die Unzulässigkeit der Mac-Laurin'schen Entwickelungsweise bedingen. Es wurde zwar bisher diese Entwickelung nicht wirklich vollführt, sondern nur das Resultat derselben angegeben und dieselbe auf später verschoben, wo von der Bestimmung der in den Wurzeln erscheinenden Nenner und Irrationalgrössen gehandelt werden soll. Der eigentliche Grund, warum die von uns angegebene aufsteigende Entwickelungsweise stets zu allen Wurzeln der Gleichung und in Form von Reihen mit endlichen Coëfficienten in den Gliedern führt, während die Mac-Laurin'sche Formel für gewisse Werthe a dies nicht thut, sondern entweder gewisse Wurzeln gar nicht liefert, oder, falls man dieselben sich erzwingen wollte, zu unendlichen Coëfficienten führt, liegt darin, dass der Mac-Laurin'schen Formel die Voraussetzung der Form (5) zu Grunde liegt, mit lauter positiven und ganzen Exponenten von a in den Gliedern, während unsere Entwickelungsweise auf keiner solchen Voraussetzung beruht, sondern im Gegentheile die Bestimmung der Exponenten in sich begreift. Da wir also von einer viel allgemeineren Form ausgehen, in der die (5) als ein sehr specieller Fall enthalten ist, so besitzt diese Methode allgemeine Giltigkeit und führt selbst dann noch zu brauchbaren Formen, wenn die Mac-Laurin'sche Formel ungiltig wird. Gerade diese allgemeine Giltigkeit unserer Methode für ganz beliebige a verschafft ihr den hohen praktischen Werth, weil sie dadurch Aufschluss zu ertheilen befähigt ist über gewisse wichtige Eigenschaften der Wurzeln, während die auf die Grenzen der Stetigkeit beschränkte Entwickelung vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel fast ganz ohne Werth bleibt.

II. Bestimmung der in den Wurzeln der Gleichung erscheinenden Nenner.

§. 5.

Im Vorhergehenden wurde bemerkt, dass die speciellen Werthe a der ersten Gattung den Schlüssel abgeben zur Ermittlung aller in den Wurzeln erscheinenden Nenner. Es wurde daselbst gezeigt, dass man durch Auflösung einer Zahlengleichung, die durch Nullsetzen des Coëfficienten der höchsten im Gleichungspolynome erscheinenden Potenz von x hervorgeht, jene speciellen Werthe a finde, welche eine Störung der vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel eingeleiteten aufsteigenden Reihenentwickelung bedingen, indem sie für das Anfangsglied x weniger Werthe liefert, als zufolge der Gradzahl m zu erwarten stehen. Es wurde dort auch die Bemerkung hinzugefügt, dass die von uns gelehrte aufsteigende Reihenentwickelung diesem Übelstande nicht unterliege, sondern alle m Auflösungen durch m Anfangsglieder markire. Unter diesen Anfangsgliedern erscheinen nämlich genau dieselben x, welche die Mac-Laurin'sche Entwickelungsweise liefert, aber überdies noch jene anderen, die dabei verloren gingen. Diese Letzteren besitzen die Gestalt $h_0 a^{-k}$, enthalten also a, erhoben zu einer Potenz mit einem negativen Exponenten, und es ist nunmehr vollkommen klar, warum die Mac-Laurin'sche Formel diese Auflösungen verschweigen musste. Da nämlich der Mac-Laurin'schen Formel die Voraussetzung zu Grunde liegt, dass die Reihe nur Glieder mit positiven Exponenten von a enthält, so konnten vermittelst derselben offenbar nur jene Auflösungen gewonnen werden, bei denen diese Voraussetzung wirklich erfüllt war; hingegen alle übrigen mussten verloren gehen, bei welchen Glieder mit negativen Exponenten vorkommen. Die von uns gelehrte Entwickelungsmethode, der keine solche beschränkende Voraussetzung zu Grunde liegt, ist daher geeignet, eben jene verlorenen Auflösungen zu liefern und dadurch über die Ursache, warum die Mac-Laurin'sche Formel zu einem Verluste von Auflösungen führt, helles Licht zu verbreiten. Diese Eigenschaften unserer allgemeinen Entwickelungsmethode wurden dort ohne alle Begründung angeführt, weil wir schon damals die Absicht hatten, dieselbe folgen zu lassen.

Hier soll nun die Entwickelung nach unserer Methode für die speciellen Werthe a der ersten Gattung wirklich eingeleitet werden. Wir werden aber nicht nur Gelegenheit haben die früher gemachten Bemerkungen ausser Zweifel zu stellen und darzuthun, dass diese Methode wirklich vor der Mac-Laurin'schen den Vorzug verdiene, weil sie alle Wurzeln der Gleichung liefert, sondern werden auch aus der Form der neu gewonnenen Anfangsglieder einerseits Aufschluss erhalten über den wahren Grund, warum die Mac-Laurin'sche Formel zu einem mangelhaften Resultate führt, andererseits aber auch die für uns viel wichtigere Kenntniss aller in den Wurzeln erscheinenden Nenner erreichen.

Wir werden zuerst die Coëfficienten A der gegebenen Gleichung:

$$P = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots + A_1 x + A_0 = 0 \tag{17}$$

aufsteigend nach Potenzen der Grösse $\mathrm{a} = a - \alpha$ entwickeln, wobei α eine Wurzel der Zahlengleichung

$$A_m = 0 \tag{18}$$

bedeutet. Dies bewerkstelligt man durch die Substitution:

$$a = \alpha + \mathrm{a} \tag{19}$$

in den einzelnen Coëfficienten. Das Resultat dieser Substitution sei:

$$\begin{aligned} A_m &= \mathrm{A}'_m \mathrm{a} + \mathrm{A}''_m \mathrm{a}^2 + \mathrm{A}'''_m \mathrm{a}^3 + \ldots\ldots \\ A_{m-1} &= \mathrm{A}_{m-1} + \mathrm{A}_{m-1}' \mathrm{a} + \mathrm{A}''_{m-1} \mathrm{a}^2 + \mathrm{A}'''_{m-1} \mathrm{a}^3 + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 &= \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}'_1 \mathrm{a} + \mathrm{A}''_1 \mathrm{a}^2 + \mathrm{A}'''_1 \mathrm{a}^3 + \ldots\ldots \\ A_0 &= \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}'_0 \mathrm{a} + \mathrm{A}''_0 \mathrm{a}^2 + \mathrm{A}'''_0 \mathrm{a}^3 + \ldots\ldots \end{aligned} \tag{20}$$

Die hier aufgestellte Form der Coëfficienten A ist unter allen die häufigste; es entspricht nämlich meistentheils dem ersten Coëfficienten nur ein einziger Factor a, während alle übrigen keinen solchen besitzen. So lange also der gewöhnliche Fall stattfindet, α nur eine einfache Wurzel der Gleichung (18) ist und für diesen speciellen Werth $a = \alpha$ alle übrigen Coëfficienten A_{m-1}, A_{m-2}, ... A_2, A_1, A_0 von Null verschieden ausfallen, sind die Gleichungen (20) am Platze. Es kann sich jedoch treffen, dass entweder α eine wiederholte Wurzel der Gleichung $A_m = 0$ und demnach das erste von Null verschiedene Glied von A_m in (20) $\mathrm{A}''_m \mathrm{a}^2$ oder noch ein späteres ist, oder dass für $a = \alpha$ gleichzeitig mit A_m auch A_{m-1}, und vielleicht auch A_{m-2}, ... verschwinden. Alle diese verschiedenen Fälle werden Einfluss nehmen auf die Gestalt der Anfangsglieder der nach a geordneten Coëfficienten (20) und Wurzeln x. Es kann aber ferner noch sich ereignen, dass einzelne der Coëfficienten A überhaupt nicht mehr in der Form (20) nach aufsteigenden Potenzen von a mit ganzen und positiven Exponenten entwickelbar sind, da sie wohl auch Irrationalgrössen oder Nenner bergen, überhaupt für $a = \alpha$ unstetig werden können. Daher ist es nöthig, alle diese verschiedenen Fälle gesondert der näheren Betrachtung zu unterwerfen, und für einen jeden einzelnen unter ihnen die Form der Anfangsglieder von x zu bestimmen. Diese im Anfange vielleicht minutiös erscheinende Untersuchung wird zu einer allgemeinen und sehr einfachen Regel führen, welche in Betreff der in den Wurzeln erscheinenden Nenner die gewünschten Aufschlüsse ertheilt.

§. 6.

1. Beginnen wir mit dem gewöhnlichsten Falle, wo A'_m und A_{m-1} in den Ausdrücken (20) von Null verschiedene Werthe besitzen und entwickeln wir unter dieser Voraussetzung

x aufsteigend nach a. Die mit der niedrigsten Potenz von a versehenen Glieder der successiven Coëfficienten weisen die Exponenten: 1, 0, ... 0 auf. Die dabei in Betracht kommenden Quotienten sind demnach:

$$-\frac{1}{1}\,,\quad -\frac{1}{2}\,,\quad -\frac{1}{3}\,\dots\dots\quad -\frac{1}{m}$$
$$\frac{0}{1}\,,\quad \frac{0}{2}\,,\,\dots\dots\quad \frac{0}{m}$$

und wir erhalten daher zwei Werthe von ξ_0 nämlich:

$$\xi_0 = -1 \text{ und } \xi_0 = 0. \tag{21}$$

Die zur Bestimmung der Coëfficienten h_0 dienenden Gleichungen sind:

(22) für $\xi_0 = -1$, $\mathrm{A}_m' h_0^m + \mathrm{A}_{m-1} h_0^{m-1} = 0$

(23) für $\xi_0 = 0$, $\mathrm{A}_{m-1} h_0^{m-1} + \mathrm{A}_{m-2} h_0^{m-2} + \dots + \mathrm{A}_1 h_0 + \mathrm{A}_0 = 0$.

Die erste liefert einen einzigen von Null verschiedenen Werth von h_0, die zweite aber deren $m-1$ an der Zahl, so lange A_0 von Null verschieden ist. Wir gewinnen also m Anfangsglieder: eines von der Form:

$$h_0 \mathrm{a}^{-1} = -\frac{\mathrm{A}_{m-1}}{\mathrm{A}_m' \mathrm{a}} \tag{24}$$

welches $\mathrm{a} = a - \alpha$ im Nenner besitzt, und $m-1$ andere die kein a enthalten.

Hätte man vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel diese Entwickelung einzuleiten versucht, so wäre die Gleichung:

$$P = 0$$

aufzulösen gewesen. Dieselbe besitzt in dem hier vorausgesetzten Falle die Gestalt:

$$\mathrm{P} = \mathrm{A}_{m-1}\mathrm{x}^{m-1} + \mathrm{A}_{m-2}\mathrm{x}^{m-2} + \dots + \mathrm{A}_1\mathrm{x} + \mathrm{A}_0 = 0$$

und ist daher von der (23) nicht verschieden, welche die zu $\xi_0 = 0$ gehörigen Coëfficientenwerthe h_0 zu geben bestimmt ist.

Vergleicht man diese beiden Resultate, so zeigt sich, dass die Mac-Laurin'sche Formel nur $m-1$ Auflösungen, die vollkommenere Entwickelungsmethode aber alle m Wurzeln liefert. In den $m-1$ Anfangsgliedern, die dem a^0 proportional sind, stimmen beide Methoden vollkommen überein, und der Unterschied besteht nur in dem einzigen Anfangsgliede (24) welches dem a^{-1} proportional ausfällt. Man bemerkt ferner, dass in diesem Falle eine einzige Wurzel mit dem Nenner $\mathrm{a} = a - \alpha$ versehen erscheint. Die Anwesenheit dieses Nenners bildet den eigentlichen Grund, warum die für diesen speciellen Werth von α mittelst der Mac-Laurin'schen Formel eingeleitete Reihenentwickelung einen Verlust einer Wurzel x und somit auch den einer Auflösung x aufweist, so lange man sich auf endliche Werthe von x beschränkt; denn diese Wurzel x, so wie alle ihre Differentialquotienten werden für $a = \alpha$ unendlich und sind demnach vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel nicht entwickelbar.

Man gelangt also zu dem Schlusse, dass bei dem Vorhandensein eines einzigen Factors $\mathrm{a} = a - \alpha$ im ersten Coëfficienten A_m des Gleichungspolynomes, und dem Fehlen desselben im zweiten Coëfficienten A_{m-1} eine einzige Wurzel mit dem Nenner $\mathrm{a} = a - \alpha$ versehen sei. Dies gilt auch dann noch, wenn einige der nachfolgenden Coëfficienten $A_{m-2}, \dots A_0$, den zweiten A_{m-1} ausgenommen einen oder wiederholte solche Factoren aufweisen würden, denn dadurch könnten höchstens zu dem sonst bestehenden zweiten Werthe $\xi_0 = 0$ noch positive und von Null verschiedene Werthe von ξ_0 treten; aber die diesen entsprechenden Auflösungen sind mittelst der Mac-Laurin'schen Formel ohne Anstand entwickelbar.

2. Es sei α eine wiederholte Wurzel der Gleichung $A_m = 0$, also $\mathrm{a} = a - \alpha$ zwei- oder mehrmal z. B. r—mal Factor von A_m, hingegen A_{m-1} ohne einen solchen Factor. Die Form der aufsteigend nach a geordneten Coëfficienten des Gleichungspolynomes ist dann wegen:

$$\mathrm{A}_m = \mathrm{A}_m' = \ldots\ldots = \mathrm{A}_m^{(r-1)} = 0 \tag{25}$$

folgende:

$$\begin{aligned} A_m &= \mathrm{A}_m^{(r)} \mathrm{a}^r + \mathrm{A}_m^{(r+1)} \mathrm{a}^{r+1} + \ldots\ldots \\ A_{m-1} &= \mathrm{A}_{m-1} + \mathrm{A}'_{m-1} \mathrm{a} + \mathrm{A}''_{m-1} \mathrm{a}^2 + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{26}$$

Dieselben weisen die niedrigsten Exponenten von a:

$$r \quad , \quad 0 \ldots\ldots 0$$

auf und liefern für ξ_0 die zwei Werthe:

$$\xi_0 = -r \quad \text{und} \quad \xi_0 = 0. \tag{27}$$

Die Bestimmungsgleichungen für h_0 sind:

$$\text{für } \xi_0 = -r \quad , \quad \mathrm{A}_m^{(r)} h_0^m + \mathrm{A}_{m-1} h_0^{m-1} = 0 \tag{28}$$

$$\text{für } \xi_0 = 0 \quad , \quad \mathrm{A}_{m-1} h_0^{m-1} + \mathrm{A}_{m-2} h_0^{m-2} + \ldots\ldots + \mathrm{A}_{,} h_0 + \mathrm{A}_0 = 0. \tag{29}$$

Man ersicht hieraus, dass wieder nur eine einzige Wurzel den Nenner aufweist. Ihr Anfangsglied ist:

$$-\frac{\mathrm{A}_{m-1}}{\mathrm{A}_m{}^{(r)} \mathrm{a}^r}. \tag{30}$$

Alle übrigen Wurzeln m—1 an der Zahl beginnen mit einem von a völlig freien Gliede. Selbst wenn zufälligerweise A_0 gleich Null ausfallen, also A_0 einen Factor $\mathrm{a} = a - \alpha$ ein- oder mehrere Male aufweisen oder sogar eine Gruppe der letzten Coëfficienten mit Factoren a versehen sein sollte, würde dies nur insoferne eine Änderung bewirken, dass eine oder mehrere derjenigen Auflösungen, die hier mit einem von a freien Gliede beginnen, dann ein Anfangsglied mit einem positiven und von Null verschiedenen ξ_0 erhalten würden. Der Nenner a erscheint aber stets nur in einer einzigen Wurzel und zwar zur r^{ten} Potenz erhoben.

Wollte man die Mac-Laurin'sche Formel hier anwenden, so würde man zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$\mathrm{P} = \mathrm{A}_{m-1} \mathrm{x}^{m-1} + \mathrm{A}_{m-2} \mathrm{x}^{m-2} + \ldots + \mathrm{A}_1 \mathrm{x} + \mathrm{A}_0 = 0$$

aufzulösen haben, die mit der (29) vollkommen übereinstimmt. Diese Entwickelungsweise würde also nur m—1 Wurzeln durch ihre Anfangsglieder markiren; die unter allen wichtigste, mit dem Nenner a^r versehene jedoch gänzlich verschweigen. Der Grund hievon liegt klar am Tage, denn die der Mac-Laurin'schen Formel zu Grunde liegende Voraussetzung schliesst sie aus dem Bereiche der Entwickelung, so lange von endlichen Werthen von x gesprochen wird.

Erscheint also $\mathrm{a} = a - \alpha$ im ersten Coëfficienten A_m als Factor r Mal, im zweiten A_{m-1} aber gar nicht, so geht daraus hervor, dass eine einzige Wurzel den Nenner a^r besitzt, alle übrigen aber keinen solchen Nenner aufweisen.

3. Es sei $\mathrm{a} = a - \alpha$ nicht blos im ersten Coëfficienten A_m, sondern auch in den unmittelbar nächstfolgenden Coëfficienten: $A_{m-1}, A_{m-2}, \ldots A_{m-s+1}$ als Factor enthalten, so zwar, dass A_{m-s} der erste, von diesem Factor freie Coëfficient des Gleichungspolynomes ist; es sei ferner bezüglich:

$$r_1 \;,\; r_2 \;,\; r_3 \;,\; \ldots . \; r_s \;,\; 0$$

die Anzahl der Factoren a, wie sie in den Coëfficienten:

$$A_m \;,\; A_{m-1} \;,\; A_{m-2} \;,\; \ldots . \; A_{m-s+1} \;,\; A_{m-s}$$

vorkommen. Die Gestalt der aufsteigend nach a entwickelten Coëfficienten ist dann folgende:

$$\begin{aligned}
A_m &= \mathrm{A}_m^{(r_1)} \mathrm{a}^{r_1} + \mathrm{A}_m^{(r_1+1)} \mathrm{a}^{r_1+1} + \ldots . . \\
A_{m-1} &= \mathrm{A}_{m-1}^{(r_2)} \mathrm{a}^{r_2} + \mathrm{A}_{m-1}^{(r_2+1)} \mathrm{a}^{r_2+1} + \ldots . . \\
A_{m-2} &= \mathrm{A}_{m-2}^{(r_3)} \mathrm{a}^{r_3} + \mathrm{A}_{m-2}^{(r_3+1)} \mathrm{a}^{r_3+1} + \ldots . . \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{m-s+1} &= \mathrm{A}_{m-s+1}^{(r_s)} \mathrm{a}^{r_s} + \mathrm{A}_{m-s+1}^{(r_s+1)} \mathrm{a}^{r_s+1} + \ldots . . \\
A_{m-s} &= \mathrm{A}_{m-s} + \mathrm{A}'_{m-s} \mathrm{a} + \ldots . . \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Werthe von ξ_0 liegen folgende Reihen von Quotienten vor:

$$(31) \qquad \begin{array}{llll}
\frac{r_2-r_1}{1} \;,\; \frac{r_3-r_1}{2} \;, \ldots . & \frac{r_s-r_1}{s-1} & , -\frac{r_1}{s} & , \ldots . . \\
\qquad\quad \frac{r_3-r_2}{1} \;, \ldots . & \frac{r_s-r_2}{s-2} & , -\frac{r_2}{s-1} & , \ldots . . \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
& \frac{r_s-r_{s-1}}{1} & , -\frac{r_{s-1}}{2} & , \ldots . . \\
& & \;\; -\frac{r_s}{1} & , \ldots . .
\end{array}$$

Man hat aus jeder solchen Reihe den kleinsten Quotienten zu bestimmen, und es ist unmittelbar ersichtlich, dass diese Werthe von ξ_0 sämmtlich negativ sein werden, weil in jeder Reihe wenigstens Ein negativer Quotient unmittelbar ersichtlich ist. Diese Werthe von ξ_0 und überhaupt die dadurch bestimmten Anfangsglieder sind genau dieselben, welche aus der Gleichung:

$$(32) \qquad \mathrm{A}_m^{(r_1)} \mathrm{a}^{r_1} \mathrm{x}^s + \mathrm{A}_{m-1}^{(r_2)} \mathrm{a}^{r_2} \mathrm{x}^{s-1} + \mathrm{A}_{m-2}^{(r_3)} \mathrm{a}^{r_3} \mathrm{x}^{s-2} + \ldots . + \mathrm{A}_{m-s+1}^{(r_s)} \mathrm{a}^{r_s} \mathrm{x} + \mathrm{A}_{m-s} = 0$$

hervorgehen würden. Diese Gleichung ist vom s_{ten} Grade und wird daher s Auflösungen, also auch s Anfangsglieder besitzen. Es ist also ausser allem Zweifel, dass s Anfangsglieder mit negativen Exponenten ξ_0, also s Auflösungen mit Nennern a versehen sein werden. Gesetzt die Werthe von ξ_0 in diesen Anfangsgliedern wären:

$$-k_1 \;,\; -k_2 \;,\; \ldots . \; -k_s$$

so geht daraus hervor, dass diese Auflösungen, s an der Zahl, die Nenner:

$$(a-\alpha)^{k_1}\ ,\ (a-\alpha)^{k_2}\ ,\ \ldots\ (a-\alpha)^{k_s}$$

besitzen.

Geht man in der Bestimmung der Werthe von ξ_0 weiter, so hat man so zu verfahren, als ob die Gleichung:

$$\text{(33)} \qquad \mathrm{A}_{m-s}\mathrm{x}^{m-s} + \mathrm{A}_{m-s-1}\mathrm{x}^{m-s-1} + \ \ldots + \mathrm{A}_1\mathrm{x} + \mathrm{A}_0 = 0$$

vorliegen würde. Es wird sich nur der Werth $\xi_0 = 0$ ergeben, der $m-s$ Auflösungen angehört. Selbst das Nullwerden von A_0 oder einer Gruppe der letzten Coëfficienten kann keine andere Veränderung herbeiführen, als dass nebst dem Werthe $\xi_0 = 0$ noch positive und von Null verschiedene Werthe von ξ_0 auftauchen. Die Anzahl der vom Nenner a freien Auflösungen ist stets gleich $m-s$. Unter den hier vorausgesetzten Umständen erhält man also s Auflösungen mit Nennern, die bestimmte Potenzen von a sind, versehen und $m-s$ Auflösungen, die keine solchen Nenner besitzen.

Die Mac-Laurin'sche Entwickelungsweise führt in diesem Falle zur Gleichung:

$$\mathrm{P} = \mathrm{A}_{m-s}\mathrm{x}^{m-s} + \mathrm{A}_{m-s-1}\mathrm{x}^{m-s-1} + \ldots + \mathrm{A}_1\mathrm{x} + \mathrm{A}_0 = 0$$

und liefert daher nur $m-s$ Werthe x, also genau dieselben Anfangsglieder, wie die allgemein giltige Entwickelungsmethode, aber nur für jene Wurzeln, die keinen Nenner a besitzen. Die übrigen mit Nennern a versehenen Wurzeln s an der Zahl verschweigt sie gänzlich aus dem bekannten Grunde.

Wenn daher im Gleichungspolynome eine Reihe von Coëfficienten der höchsten Potenzen von x einen Factor a gemeinschaftlich besitzen, so gibt die Anzahl derselben zugleich die Zahl der Wurzeln an, in welchen a, zu gewissen Potenzen erhoben, als Nenner vorkommt. Die Exponenten k dieser als Nenner fungirenden Potenzen von a ergeben sich aus den Zahlen: r_1, $r_2, \ldots r_s$, 0, welche angeben, wie oft a in den Coëfficienten A_m, $A_{m-1}, \ldots A_{m-s+1}$, A_{m-s} als Factor enthalten ist, wenn man auf dieselben die bekannte, zur Ermittelung von ξ_0 für die aufsteigende Entwickelung dienende Regel in Anwendung bringt.

§. 7.

Aus diesen Untersuchungen ergibt sich eine sehr einfache Regel, um bei einer gegebenen Buchstabengleichung die in ihren Wurzeln erscheinenden einfachen Nenner und die Art ihres Vorkommens zu erfahren:

Man betrachte den Coëfficienten A_m der höchsten Potenz von x. Ist derselbe ein α enthaltender Ausdruck; so kann man hieraus mit Gewissheit auf die Existenz von Nennern schliessen. Ist derselbe hingegen eine bestimmte Zahl und von α völlig unabhängig, so bestehen gar keine Nenner in den Wurzeln der Gleichung. Nun setzte man A_m (vorausgesetzt, dass es α in sich enthält) der Nulle gleich und verschaffe sich alle Wurzeln dieser Zahlengleichung: $A_m = 0$. Man gewinnt so alle Werthe a der ersten Gattung. Einem jeden solchen Werthe a entspricht eine Grösse $\alpha - a = \mathrm{a}$, die in A_m ein- oder mehrere

Male als Factor, in Einer oder mehreren der Genüge leistenden Functionen der Buchstabengleichung aber als Nenner erscheint. Der nächste Schritt bezweckt nun, genaueren Aufschluss zu ertheilen über die Art des Vorkommens dieser Nenner. Man hat desshalb jeden durch Auflösung der Zahlengleichung $A_m = 0$ gewonnenen einfachen Factor $\mathfrak{a} = a - \alpha$ einer eigenen Untersuchung zu unterwerfen und folgende zwei Fragen zu beantworten: Erstens, in wie vielen Wurzeln x erscheint die Grösse $\mathfrak{a}$ als Nenner? Zweitens, zu welcher Potenz ist sie in diesem Nenner erhoben?

Eigentlich erheischt die Beantwortung dieser beiden Fragen die Einleitung der aufsteigend nach Potenzen einer solchen Grösse $\mathfrak{a} = a - \alpha$ geordneten Reihenentwickelung von x, und es würden dann namentlich jene Anfangsglieder, welche negative Werthe des Exponenten ξ_0 aufweisen, die gewünschten Aufschlüsse geben. Die aufsteigende Reihenentwickelung aber erfordert im Grunde immer, dass das Gleichungspolynom durch eine vorhergehende Transformation nach Potenzen der Grösse $\mathfrak{a} = a - \alpha$ geordnet werde. In jenen Fällen aber, wo nur das Vorkommen der Nenner genauer untersucht werden soll, reicht es hin, die Werthe von ξ_0 zu ermitteln, und hiezu kann man die Transformation der Gleichung umgehen und nach der nachfolgenden Regel verfahren:

Um die erste dieser beiden Fragen zu beantworten, untersucht man, in wie vielen der Anfangscoëfficienten der Gleichung der Factor $a - \alpha = \mathfrak{a}$ erscheint. Die Anzahl dieser Anfangscoëfficienten ist zugleich die gesuchte Anzahl der Wurzeln, welche diesen Nenner besitzen. Sind s Anfangscoëfficienten: $A_m, A_{m-1}, A_{m-2}, \ldots . A_{m-s+1}$ mit dem Factor $(a - \alpha)$ versehen, hingegen der nächstfolgende A_{m-s} davon frei; so erscheint in s Wurzeln der Gleichung ein Nenner von der Form $(a - \alpha)^k$. Die Beantwortung der zweiten Frage besteht in der Angabe des Werthes von k in diesen s Wurzeln. Man hat zu diesem Ende die Anzahlen der Factoren $a - \alpha$ in der Gruppe von Anfangscoëfficienten:

$$A_m\,,\; A_{m-1}\,,\; A_{m-2}\,,\; \ldots .\; A_{m-s+1}\,,\; A_{m-s}$$

der Reihe nach aufzuschreiben — sie mögen folgende sein:

$$r_1\,,\; r_2\,,\; r_3\,,\; \ldots .\; r_s\,,\; 0$$

— und auf diese Reihe von Zahlen die bekannte Regel in Anwendung zu bringen, welche den Werth des Exponenten ξ_0 im Anfangsgliede der nach aufsteigenden Potenzen von $a - \alpha$ geordneten Entwickelung von x liefert. Man gewinnt aus ihnen eine Reihe von negativen Werthen für ξ_0, und diese mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen, stellen die Werthe von k für diese s Wurzeln vor.

Wir wollen nun an einem Beispiele die Anwendung dieser Regel zeigen:

$$\begin{aligned}
&[4a^4 + 9a^3 + a^2 - 9a - 5]x^4 + [-12a^4 - 47a^3 - 84a^2 - 47a + 10]x^3 + \\
&+ [-2a^6 - 2a^5 + 2a^4 + 5a^3 + 51a^2 + 89a + 37]x^2 + \\
&+ [6a^6 + 16a^5 + 22a^4 - 13a^3 - 24a^2 - 33a + 6]x + \\
&+ [-24a^4 - 16a^3 + 36a + 24] = 0
\end{aligned}$$

sei die gegebene Gleichung. Man setze den ersten Coëfficienten derselben gleich Null und löse die so erhaltene Gleichung

$$4a^4 + 9a^3 + a^2 - 9a - 5 = 0$$

nach a auf. Diese Gleichung liefert nur drei verschiedene Werthe:

$$a = +1 \;,\; a = -1 \;,\; a = -\frac{5}{4}$$

und der zweite dieser Werthe ist eine doppelte Auflösung, denn er erfüllt auch die derivirte Gleichung $16a^3 + 27a^2 + 2a - 9 = 0$. Diesen drei Werthen entsprechen die drei einfachen Factoren:

$$a - 1 \;,\; a + 1 \;,\; 4a + 5.$$

Um nun über die Nenner der Genüge leistenden Functionen Aufschluss zu erhalten, muss für jeden dieser Factoren eine Untersuchung eingeleitet werden:

Erste Untersuchung betreffend den Factor $a - 1$:

In den fünf Coëfficienten der gegebenen Gleichung erscheinen folgende Anzahlen von Factoren $a - 1$:

$$1 \;,\; 0 \;,\; 0 \;,\; 0 \;,\; 0$$

folglich ist eine einzige Wurzel x mit $a - 1$ im Nenner versehen und zwar mit der ersten Potenz dieser Grösse, denn diese Reihe von Zahlen liefert die Quotientenreihe:

$$-\frac{1}{1} \;,\; -\frac{1}{2} \;,\; -\frac{1}{3} \;,\; -\frac{1}{4}$$

von denen der erste $-\frac{1}{1} = -1$ den kleinsten Werth besitzt. Das Anfangsglied von x ist demnach von der Form $h_0 (a-1)^{-1} = \frac{h_0}{a-1}$.

Zweite Untersuchung betreffend den Factor $a + 1$.

Die Anzahl der Factoren $a + 1$ in den fünf Coëfficienten der Gleichung ist beziehungsweise:

$$2 \;,\; 0 \;,\; 0 \;,\; 0 \;,\; 0$$

somit eine einzige Wurzel mit $a + 1$ im Nenner versehen. Die Quotientenreihe, abgeleitet aus diesen Anzahlen, ist:

$$-\frac{2}{1} \;,\; -\frac{2}{2} \;,\; -\frac{2}{3} \;,\; -\frac{2}{4}$$

und unter ihnen der erste am kleinsten und gleich: -2. Folglich ist $(a+1)^2$ der Nenner einer einzigen Wurzel.

Dritte Untersuchung betreffend den Factor $4a + 5$.

Die Anzahl der Factoren $4a + 5$ in den fünf Coëfficienten der Gleichung ist:

$$1 \;,\; 1 \;,\; 0 \;,\; 0 \;,\; 0.$$

Da hier zwei Anfangscoëfficienten den Factor $4a + 5$ besitzen, so erscheint auch in zwei Wurzeln ein Nenner $(4a + 5)^k$. Die Quotientenreihe ist:

$$\frac{0}{1} \;,\; \frac{-1}{2} \;,\; \frac{-1}{3} \;,\; \frac{-1}{4}$$

und unter ihnen der zweite: $-\frac{1}{2}$ am kleinsten. Es erscheinen somit zwei Wurzeln mit $(4a + 5)^{\frac{1}{2}}$ im Nenner.

In diesem Beispiele gelingt mit Hilfe dieser Untersuchung der Nenner sogar die complete Auflösung der Gleichung in geschlossener Form. Beginnen wir mit der aufsteigenden Entwickelung, geordnet nach Potenzen von $a-1$, derjenigen Wurzel, welche diese Grösse im Nenner besitzt. Man muss zu diesem Ende die Gleichung umformen und ihre Coëfficienten nach Potenzen der Grösse $a-1$ aufsteigend ordnen. Dies erreicht man vermittelst der Substitution: $a = \mathrm{a} + 1$ und erhält so die transformirte Gleichung:

$$\begin{aligned}
&[36\,\mathrm{a} + 52\,\mathrm{a}^2 + 25\,\mathrm{a}^3 + 4\,\mathrm{a}^4]x^4 + [-180 - 404\,\mathrm{a} - 297\,\mathrm{a}^2 - 95\,\mathrm{a}^3 - 12\,\mathrm{a}^4]x^3 + \\
&+ [+180 + 192\,\mathrm{a} + 28\,\mathrm{a}^2 - 47\,\mathrm{a}^3 - 38\,\mathrm{a}^4 - 14\,\mathrm{a}^5 - 2\,\mathrm{a}^6]x^2 + \\
&+ [-20 + 84\,\mathrm{a} + 319\,\mathrm{a}^2 + 355\,\mathrm{a}^3 + 192\,\mathrm{a}^4 + 52\,\mathrm{a}^5 + 6\,\mathrm{a}^6]x + \\
&+ [+20 - 108\,\mathrm{a} - 192\,\mathrm{a}^2 - 112\,\mathrm{a}^3 - 24\,\mathrm{a}^4] = 0.
\end{aligned}$$

Diese liefert für x einen geschlossenen Werth:

$$x = \frac{5}{\mathrm{a}} + 3 = \frac{3a+2}{a-1}$$

und die übrigen drei Wurzeln in Form von unendlichen Reihen.

Man erhält noch einen zweiten Genüge leistenden Werth von x, wenn man die aufsteigende Reihenentwickelung nach Potenzen von $a+1$ ordnet. Es ist aber hiezu nothwendig früher durch die Substitution $a = \mathrm{a} - 1$ die transformirte Gleichung:

$$\begin{aligned}
&[-2\,\mathrm{a}^2 - 7\,\mathrm{a}^3 + 4\,\mathrm{a}^4]x^4 + [+8 + 28\,\mathrm{a} - 15\,\mathrm{a}^2 + \mathrm{a}^3 - 12\,\mathrm{a}^4]x^3 + \\
&+ [-4 - 4\,\mathrm{a} + 38\,\mathrm{a}^2 + 17\,\mathrm{a}^3 - 18\,\mathrm{a}^4 + 10\,\mathrm{a}^5 - 2\,\mathrm{a}^6]x^2 + \\
&+ [+40 - 68\,\mathrm{a} + 77\,\mathrm{a}^2 - 61\,\mathrm{a}^3 + 32\,\mathrm{a}^4 - 20\,\mathrm{a}^5 + 6\,\mathrm{a}^6]x + \\
&+ [-20 + 84\,\mathrm{a} - 96\,\mathrm{a}^2 + 80\,\mathrm{a}^3 - 24\,\mathrm{a}^4] = 0
\end{aligned}$$

abzuleiten, deren Coëfficienten nach Potenzen von $\mathrm{a} = a + 1$ aufsteigend geordnet sind. Der geschlossene Werth von x bei dieser Gleichung ist ein einziger:

$$x = \frac{4}{\mathrm{a}^2} = \frac{4}{a^2 + 2a + 1}$$

Es unterliegt nun keiner Schwierigkeit mehr, auch die beiden anderen Wurzeln in geschlossener Form zu finden. Dividirt man nämlich das Gleichungspolynom der ursprünglich gegebenen Gleichung durch das Product der beiden gefundenen Wurzelfactoren:

$$(a-1)x - 3a - 2 \quad \text{und} \quad (a^2 + 2a + 1)x - 4,$$

so geht die quadratische Gleichung:

$$(4\,\mathrm{a} + 5)x^2 - 2a^3 + 3 = 0$$

hervor, deren Wurzeln sind:

$$x = +\sqrt{\frac{2a^3-3}{4a+5}} \quad \text{und} \quad x = -\sqrt{\frac{2a^3-3}{4a+5}}$$

Man gelangt also hier ohne Schwierigkeit und auf einem geregelten Wege zu den vier Genüge leistenden Functionen der vorgelegten Gleichung in geschlossener Form:

$$\frac{3a+2}{a-1}, \quad \frac{4}{a^2+2a+1}, \quad +\sqrt{\frac{2a^3-3}{4a+5}}, \quad -\sqrt{\frac{2a^3-3}{4a+5}}$$

Hier findet man Gelegenheit, sich durch den unmittelbaren Anblick von der Wahrheit der früheren Ergebnisse zu überzeugen; ja noch mehr, man sieht mit leichter Mühe ein, dass hier gerade die Untersuchung der Nenner auch für das Auffinden geschlossener Formen von Nutzen war, indem nur die nach Potenzen der Grössen $a-1$ und $a+1$ geordneten Entwickelungen geschlossene Formen für je eine Wurzel zu liefern im Stande sind. In unserer Absicht liegt es jedoch hier nicht, diesen Punkt vollkommen zu erledigen und die Regeln vollständig zu entwickeln, um geschlossene Formen der Wurzeln überall, wo es nur möglich ist, zu erhalten; nur so viel wollen wir bemerken, dass die hier eingeleiteten Untersuchungen dazu unentbehrlich wären. Auch die von Lagrange gelehrte Entwickelungsweise der Genüge leistenden Functionen in Form von Kettenbrüchen wäre ein geeignetes Mittel, um die in Form eines algebraischen Bruches mit geschlossenen Polynomen im Zähler und Nenner erscheinenden Genüge leistenden Functionen darzustellen. Mehr ins Detail dieser Aufgabe einzugehen, liegt hier nicht in unserem Plane.

Bei der Untersuchung der Nenner kann aber noch eine andere Frage auftauchen, nämlich: ob zwei verschiedene Nenner $(a-\alpha_1)^{k_1}$, $(a-\alpha_2)^{k_2}$ in einer und derselben oder in verschiedenen Wurzeln x erscheinen; mit anderen Worten: ob eine Wurzel in der Form: $\frac{\varphi(a)}{(a-\alpha_1)^{k_1}(a-\alpha_2)^{k_2}}$ oder zwei Wurzeln in der Form: $\frac{\varphi_1(a)}{(a-\alpha_1)^{k_1}}$ oder $\frac{\varphi_2(a)}{(a-\alpha_2)^{k_2}}$ bestehen. Diese Frage hat allerdings eine vollkommen bestimmte Bedeutung und lässt sich auch stets beantworten, allein die hier gegebenen Regeln, welche nur die Anfangsglieder der aufsteigenden Entwickelung in Berücksichtigung ziehen, reichen dazu nicht hin. Man muss dazu die sämmtlichen Wurzeln in mehreren Gliedern entwickeln und falls nicht die Form von $\varphi(a)$ oder $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(a)$ zufällig eine geschlossene ist, das Ergänzungsglied der unendlichen Reihe mit in Betrachtung ziehen, wie am Schlusse dieser Abhandlung gezeigt wird. In jedem Falle nämlich muss man, geometrisch gesprochen, den Curvenast, dem der Nenner $(a-\alpha_1)^{k_1}$ angehört, so weit verfolgen, bis man in den Bereich des Werthes $a=\alpha_2$ gelangt, wo sich dann die Frage ohne Schwierigkeit entscheidet.

Anhang.

Einen nicht unwichtigen Aufschluss gewährt es, die in den Genüge leistenden Functionen erscheinenden einfachen Factoren kennen zu lernen. Dazu ist gleichfalls die aufsteigende Entwickelung dienlich, wenn man die Grösse $a-\alpha$, nach deren Potenzen die Reihe geordnet wird, entsprechend wählt. Man gelangt nämlich dann zu Anfangsgliedern von der Form $h_0(a-\alpha)^{\xi_0}$, wo ξ_0 einen positiven Werth besitzt, und gewinnt dadurch die Überzeugung, dass $(a-\alpha)^{\xi_0}$ ein Factor der Genüge leistenden Function ist. Dies ereignet sich immer dann, wenn für $a=\alpha$ der Coëfficient A_0 der niedrigsten Potenz von x verschwindet, d. h. wenn α eine Wurzel der Zahlengleichung $A_0=0$ ist. Die vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel eingeleitete Entwickelung würde in der Gleichung $P=0$ eine oder mehrere Wurzeln Null liefern, weil A_0 identisch gleich Null ist. Für das Aufsuchen der einfachen Factoren der Genüge leistenden Functionen einer Buchstabengleichung lässt sich eine ähnliche Regel aufstellen, wie zur Bestimmung der Nenner:

Man zerlege den letzten Coëfficienten A_0, der mit der niedrigsten Potenz von x multiplicirt ist, in seine einfachen Factoren $a-\alpha$ vermittelst Auflösung der Gleichung $A_0=0$ und leite nun für jeden solchen Factor $a - \alpha$, die aufsteigend nach Potenzen desselben geordnete Reihenentwickelung x ein nach der bekannten Regel.

III. Bestimmung der Irrationalgrössen, welche in den Wurzeln der Gleichung vorkommen und eine Unterbrechung der Stetigkeit herbeiführen.

§. 8.

In §. 4 geschah Erwähnung gewisser specieller Werthe von a, für welche die nach der Grösse $\mathfrak{a} = a - \alpha$ aufsteigend geordnete Reihenentwickelung einer eigenthümlichen Störung unterliegt, wenn man hiezu die Mac-Laurin'sche Formel benützen will. Es geschieht nämlich, dass bei der Bestimmung eines gewissen späteren Entwickelungsgliedes ein Widerspruch in den Bedingungsgleichungen auftritt, wodurch man bemüssigt wird, zwei oder mehrere Wurzeln ganz und gar aufzugeben, weil es unmöglich ist, durch endliche Werthe der Coëfficienten Genüge zu leisten.

Dieser Widerspruch tritt nicht bei dem Anfangsgliede der Entwickelung, sondern erst bei einem Folgegliede auf, gibt sich also nicht anfangs, sondern erst im weiteren Verlaufe der Entwickelung kund. Diese Störung kann aber nur dann Platz greifen, wenn zwei oder mehrere verschiedene Wurzeln in den Anfangsgliedern übereinstimmen und ist an specielle Werthe von α gebunden, die wir dort der zweiten Gattung zugezählt haben. Es wurde auch dort gesagt, wiewohl nicht erwiesen, dass die von uns gezeigte Reihenentwickelung keinem solchen Übelstande unterliegen könne; dass sie vielmehr Aufschluss ertheile über den eigentlichen Grund dieser Störung, indem sie anfangs genau dieselben Entwickelungsglieder wie die Mac-Laurin'sche Formel liefert, aber dort, wo eben die Störung eintritt, ein Glied folgen lässt, welches $\mathfrak{a}$ zu einer Potenz mit gebrochenem Exponenten erhoben aufweist, so zwar, dass man eine solche Störung stets einer Irrationalgrösse zu verdanken hat, welche unter dem Wurzelzeichen den Factor $\mathfrak{a} = a - \alpha$ besitzt. Sie gibt nicht nur darüber Aufschluss, sondern bezeichnet auch eine Anzahl Wurzeln, in welchen diese Irrationalgrösse je in ihren verschiedenen Bedeutungen erscheint.

In diesem Paragraphe soll einerseits diese früher gemachte Behauptung erwiesen und ferner noch das Wichtigste über die Bestimmung der in den Wurzeln der Gleichung erscheinenden Irrationalgrössen abgehandelt werden.

Wir erwählen daher einen Werth α der zweiten Gattung, d. h. eine Auflösung α der zwei Gleichungen:

$$P = 0 \text{ und } \frac{dP}{dx} = 0 \tag{36}$$

und bewerkstelligen nun die aufsteigende Entwickelung nach der Grösse $\mathfrak{a} = a - \alpha$ vermittelst der von uns gelehrten Entwickelungsmethode. Zu diesem Zwecke sind die Coëfficienten der Gleichung:

$$P = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots . + A_1 x + A_0 = 0 \tag{37}$$

aufsteigend nach der Grösse $\mathfrak{a}$ zu ordnen. Dieselben seien in dieser Gestalt folgende:

$$\begin{aligned} A_m &= \mathrm{A}_m + \mathrm{A}_m' \mathfrak{a} + \mathrm{A}_m'' \mathfrak{a}^2 + \ldots . . \\ A_{m-1} &= \mathrm{A}_{m-1} + \mathrm{A}_{m-1}' \mathfrak{a} + \mathrm{A}_{m-1}'' \mathfrak{a}^2 + \ldots . . \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned} \tag{38}$$

v*

$$A_1 \quad = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_1' \mathrm{a} + \mathrm{A}_1'' \mathrm{a}^2 + \ldots\ldots$$
$$A_0 \quad = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_0' \mathrm{a} + \mathrm{A}_0'' \mathrm{a}^2 + \ldots\ldots$$

Es ist hier stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass $\mathrm{A}_m, \mathrm{A}_{m-1} \ldots\ldots \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_0$ von Null verschieden sind, eine Voraussetzung, die wohl in der Regel erfüllt sein wird. Nichts desto weniger gelten unsere unter dieser Voraussetzung gezogenen Folgerungen mit den betreffenden Änderungen auch für jene Fälle, wo einige dieser Grössen gleich Null ausfallen. Wir gehen vor der Hand über diese Fälle hinaus, und wollen sie später zur Sprache bringen.

Da in allen Coëfficienten die niedrigste Gradzahl von a Null ist, so wird ein einziger Werth, nämlich: $\xi_0 = 0$ gefolgert werden. Diesem Werthe entspricht die Bestimmungsgleichung:

$$(39) \qquad \mathrm{A}_m h_0^m + \mathrm{A}_{m-1} h_0^{m-1} + \ldots\ldots + \mathrm{A}_1 h_0 + \mathrm{A}_0 = 0.$$

Die Anfangsglieder sämmtlicher Wurzeln x sind demnach von a frei und constante Zahlen, nämlich die für h_0 hervorgehenden Werthe.

Unter diesen werden hier zwei oder mehrere gleiche erscheinen, weil, der getroffenen Wahl des Werthes α entsprechend, die beiden Gleichungen (36) erfüllt sind. Die Auflösung dieser beiden Gleichungen besteht nämlich, wie bekannt, im Grunde darin, zuvörderst a dermassen zu wählen, dass für den speciellen Zahlwerth $a = \alpha$ die beiden Polynome P und $\frac{dP}{dx}$ einen x enthaltenden Factor gemeinschaftlich besitzen, der daher für einen entsprechenden Werth von x Null werden kann, wobei dann P und $\frac{dP}{dx}$ gleichzeitig verschwinden. Dieser gemeinschaftliche Factor ist nun wohl in der Regel nur vom ersten Grade, so zwar, dass man beim Nullsetzen desselben nur eine einzige Wurzel x gewinnt. Dann erscheint aber dieser Factor in $\frac{dP}{dx}$ nur einmal, in P hingegen zweimal, und der gewonnene Werth von x ist daher eine doppelte Wurzel der Gleichung (37) für $a = \alpha$ oder, was dasselbe ist, der Gleichung (39). Gelegentlich aber kann dieser für $a = \alpha$ in P und $\frac{dP}{dx}$ gemeinschaftlich erscheinende Factor nach x einem höheren Grade angehören und wird sich dann in mehrere einfache Wurzelfactoren zerlegen lassen, entweder in lauter von einander verschiedene, oder in gleiche. Jeder solche Wurzelfactor $x - h_0$ wird aber dann stets in P um einmal öfter erscheinen, als in $\frac{dP}{dx}$. Aus dem Gesagten geht daher hervor, dass man im Allgemeinen nur zwei gleiche Wurzeln h_0 mit Sicherheit erwarten könne, sich aber gelegentlich treffen wird, dass in Folge zufällig stattfindender Relationen drei und noch mehrere gleiche Wurzeln h_0, wohl auch mehrere verschiedene Gruppen von solchen auftreten. Alle diese verschiedenen Fälle nehmen Einfluss auf die gegenwärtige Untersuchung und wir werden desshalb all' diese verschiedenen Fälle gesondert zu untersuchen haben.

§. 9.

1. Der gewöhnlichste von allen ist derjenige, wo die Gleichung (39) zwei gleiche Wurzeln h_0 aufweist, wo also für diesen speciellen Werth h_0

$$(39) \qquad \mathrm{A}_m h_0^m + \mathrm{A}_{m-1} h_0^{m-1} + \ldots\ldots + \mathrm{A}_1 h_0 + \mathrm{A}_0 = 0$$

und

$$(40) \qquad m \mathrm{A}_m h_0^{m-1} + (m-1) \mathrm{A}_{m-1} h_0^{m-2} + \ldots\ldots + \mathrm{A}_1 = 0$$

ist, aber

$$(41)\qquad m(m-1)\mathrm{A}_m h_0^{m-2} + (m-1)(m-2)\mathrm{A}_{m-1} h_0^{m-3} + \ldots . + 2\mathrm{A}_2$$

von Null verschieden ausfällt.

Schreiten wir zur Bestimmung der Folgeglieder, die zu diesem Anfangsgliede h_0 gehören. Das auf h_0 folgende Glied wird hier, wie bekannt, nicht aus einer Gleichung des ersten, sondern aus einer des zweiten Grades gewonnen. Diese Gleichung ist folgende:

$$(42)\qquad \mathfrak{H}_0 \mathfrak{a}^{\mathfrak{A}_0} + \mathfrak{H}_0' \mathfrak{a}^{\mathfrak{A}_0'} x_1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}_0'' \mathfrak{a}^{\mathfrak{A}_0''} . x_1^2 = 0,$$

wo

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_0 \mathfrak{a}^{\mathfrak{A}_0} &= [\mathrm{A}_m' h_0^m + \mathrm{A}_{m-1}' h_0^{m-1} + \ldots . + \mathrm{A}_1' h_0 + \mathrm{A}_0']\mathfrak{a} \\ \mathfrak{H}_0' \mathfrak{a}^{\mathfrak{A}_0'} &= [m\,\mathrm{A}_m' h_0^{m-1} + (m-1)\mathrm{A}_{m-1}' h_0^{m-2} + \ldots . + \mathrm{A}_1']\mathfrak{a} \\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}_0'' \mathfrak{a}^{\mathfrak{A}_0''} &= \tfrac{1}{2}[m(m-1)\mathrm{A}_m h_0^{m-2} + (m-1)(m-2)\mathrm{A}_{m-1} h_0^{m-3} + \ldots . + 2\mathrm{A}_2] \end{aligned}$$

ausfällt, so lange

$$(43)\qquad \mathrm{A}_m' h_0^m + \mathrm{A}_{m-1}' h_0^{m-1} + \ldots . + \mathrm{A}_1' h_0 + \mathrm{A}_0'$$

von Null verschieden bleibt. Wendet man auf diese Gleichung die bekannte Regel zur Bestimmung der Anfangsglieder von x_1 an, so findet man dieselben in der doppelten Gestalt:

$$(44)\qquad x_1 = \sqrt{-\frac{2\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{H}_0''}}\,\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}} + \ldots . ,\quad x_1 = -\sqrt{-\frac{2\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{H}_0''}}\,\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}} + \ldots . .$$

Vergleichen wir dieses Ergebniss mit demjenigen, welches die Mac-Laurin'sche Formel geliefert hätte, so sehen wir, dass dort die Gleichung

$$\mathrm{P} = 0$$

mit der (39) identisch ist und daher die Anfangsglieder x mit den h_0 vollkommen übereinstimmen, die zweite der Gleichungen (6), die

$$(45)\qquad \mathrm{P}'.\mathrm{x}' + \mathrm{P}_1 = 0 \quad\text{oder}\quad \mathrm{P}_1 = 0$$

spricht einen Widerspruch aus, wenn man unter x eben jenen speciellen hier betrachteten Werth h_0 versteht, der als doppelte Wurzel der (39) erscheint, und zwingt daher, auf diese zwei Auflösungen x Verzicht zu leisten, während unsere Methode ohne alle Schwierigkeit zu den Folgegliedern führt. In denselben erscheint aber die Irrationalgrösse $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{a - \alpha}$ und es ist auf diese Weise unmittelbar ersichtlich, dass die Mac-Laurin'sche Entwickelung hier auf einen Widerspruch stossen musste, da sie nur ganze Werthe der Exponenten von $\mathfrak{a}$ voraussetzt. Es ist auch überflüssig, die Entwickelung weiter fortzuführen, um über das Vorkommen der Irrationalgrössen, die $a - \alpha$ unter dem Wurzelzeichen besitzen, Aufschluss zu erhalten; denn da mit der Bestimmung der zweiten Entwickelungsglieder (44) die mit dem gemeinschaftlichen Anfangsgliede h_0 versehenen zwei Wurzeln x isolirt sind, so ergeben sich die übrigen Glieder durch eine blosse Division und es kann daher keine neue Irrationalgrösse mehr in ihnen auftauchen.

2. Es sei h_0 eine doppelte Wurzel der (39), also auch die (40) erfüllt, der Ausdruck (41) aber von Null verschieden; ferner sei

$$(46)\qquad \mathrm{A}_m' h_0^m + \mathrm{A}_{m-1}' h_0^{m-1} + \ldots . + \mathrm{A}_1' h_0 + \mathrm{A}_0' = 0.$$

In diesem Falle geht die Bestimmung der zweiten Entwickelungsglieder in einer anderen Weise vor sich. Es ist nämlich dann:

$$(47) \qquad \mathfrak{H}_0\, a^{\mathfrak{A}_0} = [A_m'' h_0^m + A_{m-1}'' h_0^{m-1} + \ldots . + A_1'' h_0 + A_0''] \mathrm{a}^2,$$

während $\mathfrak{H}_0 a'^{\mathfrak{A}_0'}$ und $\mathfrak{H}_0 a''^{\mathfrak{A}_0''}$ die früheren Werthe fortbehalten. Die Gleichung (42) liefert nun für $x_{,}$ Anfangsglieder von der Form: $h_1 \mathrm{a}$.

Die zur Bestimmung von $h_{,}$ dienende Gleichung

$$(48) \qquad \begin{aligned} & A_m'' h_0^m + A_{m-1}'' h_0^{m-1} + \ldots . + A_1'' h_0 + A_0'' + \\ & + [m A_m' h_0^{m-1} + (m-1) A_{m-1}' h_0^{m-2} + \ldots . + A_1'] h_1 + \\ & + \tfrac{1}{2} [m(m-1) A_m h_0^{m-2} + (m-1)(m-2) A_{m-1} h_0^{m-3} + \ldots . + 2 A_2] h_1^2 = 0 \end{aligned}$$

ist vom zweiten Grade. Sie liefert in der Regel zwei verschiedene Werthe dafür, kann jedoch auch gleiche Wurzeln aufweisen. Findet das Erstere Statt, so erfolgt mit der Bestimmung des zweiten Entwickelungsgliedes die Trennung der noch nicht getrennten zwei Wurzeln und die weitere Entwickelung kann zu keinen Irrationalgrössen mehr führen, weil alle Folgeglieder durch Auflösung von Gleichungen des ersten Grades, also durch Division hervorgehen. Sind aber zwei gleiche Werthe von h_1 erhalten worden, also die zwei Wurzeln x in den zwei ersten Entwickelungsgliedern vollkommen übereinstimmend, so ist weder die Trennung der Wurzeln erfolgt, noch der Beweis geliefert, dass sie keine Irrationalgrösse beherbergen. Man wird daher zur Bestimmung der dritten Entwickelungsglieder $h_2 a^{\xi_2}$ schreiten. Da dieselben gleichfalls aus einer quadratischen Gleichung gezogen werden, deren Coëfficienten meistentheils die Factoren a^0, a^2, a^3 aufweisen, so wird gewöhnlich der Werth:

$$(49) \qquad \xi_2 = 1\tfrac{1}{2}$$

hervorgehen, womit das Erscheinen der Irrationalgrösse $\sqrt{\mathrm{a}} = \sqrt{a - \alpha}$ in den beiden Wurzeln x erwiesen ist. Die dritten Entwickelungsglieder unterscheiden sich in einem solchen Falle nur durch das Zeichen von einander. Da dann gleichfalls die Trennung der Wurzeln erfolgt ist, so erscheint eine weitere Entwickelung für den hier beabsichtigten Zweck unnütz. Bisweilen ist aber die Anordnung der Coëfficienten der quadratischen Gleichung eine andere, und es erscheinen in ihren Coëfficienten die Factoren a^0, a^2, a^4, woraus der Werth:

$$\xi_2 = 2$$

hervorgeht. Dann ist aber eine gewisse Relationsgleichung erfüllt und tritt wieder die Form:

$$x = h_0 + h_1 \mathrm{a} + h_2 \mathrm{a}^2 + \ldots . .$$

in Giltigkeit. In der Regel gewinnt man zwei verschiedene Werthe von h_2, womit dann die Trennung der Wurzeln bewerkstelligt und der Beweis geliefert ist, dass keine solche Irrationalgrösse $\sqrt{\mathrm{a} - \alpha}$ in den beiden Wurzeln erscheint. Bisweilen aber stimmen die beiden Wurzeln auch in diesem dritten Entwickelungsgliede überein. Es ist dann dies als Beweis anzusehen, dass die Entwickelung noch nicht weit genug geführt ist, um zu entscheiden, ob eine Irrationalgrösse $\sqrt{a - \alpha}$ wirklich vorhanden ist oder nicht. Man wird in derselben Weise, wie bisher, vorgehen und Glied für Glied entwickeln, so lange, bis die Trennung der Wurzeln erfolgt. Sobald diese eintritt, liegt die Irrationalgrösse am Tage; wo nicht, so ist ihre Nichtexistenz ausser Zweifel gestellt.

Wenn der Leser gleichlaufend mit der hier eingeleiteten Untersuchung, jene andere auf die Mac-Laurin'sche Formel gestützte Entwickelungsweise, wie sie in §. 3 gezeigt wurde, verfolgt, so wird er sich mit leichter Mühe überzeugen, dass, so lange die Entwickelungsglieder die Form:

$$h_0 + h_1 \mathrm{a} + h_2 \mathrm{a}^2 + \ldots\ldots$$

einhalten, beide Methoden vollkommen übereinstimmen, und dass sie erst bei dem Auftreten der Irrationalgrösse $\sqrt{a - \alpha}$ von einander differiren. Unsere Methode liefert dieses Glied ohne Anstand, die Mac-Laurin'sche aber zeigt nur durch eine widersprechende Bedingungsgleichung, dass die ihr zu Grunde liegende Voraussetzung nicht mehr giltig sei.

Wir gewinnen hieraus die Regel, dass beim Auftreten von nur zwei gleichen Wurzeln h_0 der (39) in den entsprechenden Werthen x nur eine Irrationalgrösse $\sqrt{a - \alpha}$ erscheinen könne. Um zu unterscheiden, ob dies wirklich geschehe oder nicht, hat man die zwei Werthe x aufsteigend nach der Grösse $\mathrm{a} = a - \alpha$ zu entwickeln, bis die Trennung derselben erfolgt. Diese Entwickelung kann dann entweder vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel oder unserer Methode eingeleitet werden; für die Beantwortung dieser Frage sind beide Methoden gleich gut, ja völlig congruent. Unsere Methode besitzt den einzigen Vortheil, dass sie das isolirende Entwickelungsglied immer liefert, auch dann, wenn es irrational ist, während die Mac-Laurin'sche Formel nur die rationalen Entwickelungsglieder gibt, und das irrationale Entwickelungsglied durch einen auftauchenden Widerspruch anmeldet.

§. 10.

3. h_1 sei eine dreifache Wurzel der (39), also:

(50) $$A_m h_0^m + A_{m-1} h_0^{m-1} + \ldots . + A_1 h_0 + A_0 = 0$$

(51) $$m A_m h_0^{m-1} + (m-1) A_{m-1} h_0^{m-2} + \ldots . + A_1 = 0$$

(52) $$m(m-1) A_m h_0^{m-2} + (m-1)(m-2) A_{m-1} h_0^{m-3} + \ldots . + 2 A_2 = 0$$

und

(53) $$m(m-1)(m-2) A_m h_0^{m-3} + (m-1)(m-2)(m-3) A_{m-1} h_0^{m-4} + \ldots . + 6 A_3$$

von Null verschieden.

Die Bestimmung des Folgegliedes $h_1 a^{\xi_1}$ hängt hier bekanntermassen von der Auflösung einer Gleichung des dritten Grades, nämlich der:

(54) $$\mathfrak{H}_0 \mathrm{a}^{\mathfrak{A}_0} + \mathfrak{H}_0' \mathrm{a}^{\mathfrak{A}_0'} \mathrm{x}_1 + \tfrac{1}{2} \mathfrak{H}_0'' \mathrm{a}^{\mathfrak{A}_0''} \mathrm{x}_1^2 + \tfrac{1}{6} \mathfrak{H}_0''' \mathrm{a}^{\mathfrak{A}_0'''} \mathrm{x}_1^3 = 0$$

ab. Gewöhnlich ist:

(55) $$\mathfrak{H}_0 \mathrm{a}^{\mathfrak{A}_0} = [A_m' h_0^m + A_{m-1}' h_0^{m-1} + \ldots . + A_1' h_0 + A_0'] \mathrm{a}$$

(56) $$\mathfrak{H}_0' \mathrm{a}^{\mathfrak{A}_0'} = [m A_m' h_0^{m-1} + (m-1) A_{m-1}' h_0^{m-2} + \ldots . + A_1'] \mathrm{a}$$

(57) $$\tfrac{1}{2} \mathfrak{H}_0'' \mathrm{a}^{\mathfrak{A}_0''} = [\tbinom{m}{2} A_m' h_0^{m-2} + \tbinom{m-1}{2} A_{m-1}' h_0^{m-3} + \ldots . + A_2'] \mathrm{a}$$

(58) $$\tfrac{1}{6} \mathfrak{H}_0''' \mathrm{a}^{\mathfrak{A}_0'''} = [\tbinom{m}{3} A_m h_0^{m-3} + \tbinom{m-1}{3} A_{m-1} h_0^{m-4} + \ldots . + A_3] \cdot$$

Die Coëfficienten der (54) weisen daher bezüglich die Factoren: a, a, a, a^0 auf und man gewinnt den Werth:

$$\xi_1 = \tfrac{1}{3} \tag{59}$$

und zur Bestimmung von h_1 die binomische Gleichung des dritten Grades:

$$\begin{aligned} &\Lambda_m' h_0^m + \Lambda_{m-1}' h_0^{m-1} + \ldots . + \Lambda_1' h_0 + \Lambda_0' + \\ &+ \left[\tbinom{m}{3}\Lambda_m h_0^{m-3} + \tbinom{m-1}{3}\Lambda_{m-1} h_0^{m-4} + \ldots . + \Lambda_3\right] h_1^3 = 0. \end{aligned} \tag{60}$$

Man erhält also, wenn der Ausdruck (55) nicht Null ist, drei von einander verschiedene Werthe für $h_1 a^{\xi_1}$, enthalten in der Form:

$$-\sqrt[3]{\frac{\Lambda_m' h_0^m + \Lambda_{m-1}' h_0^{m-1} + \ldots + \Lambda_1' h_0 + \Lambda_0'}{\binom{m}{3}\Lambda_m h_0^{m-3} + \binom{m-1}{3}\Lambda_{m-1} h_0^{m-4} + \ldots + \Lambda_3}} . \, \mathrm{a} \tag{61}$$

wenn man diese dritte Wurzel der Reihe nach in ihren drei verschiedenen Bedeutungen nimmt. Jedes solche Glied gehört einer einzigen Wurzel x und es ist somit die Trennung der drei Wurzeln erfolgt und gleichzeitig die Anwesenheit der Irrationalgrösse $\sqrt[3]{a - a}$ in ihnen nachgewiesen. Dies ist auch die einzige in ihnen erscheinende Irrationalgrösse dieser Gattung, denn die ferneren Entwickelungsglieder gehen aus Gleichungen des ersten Grades hervor, und können daher keine neuen Wurzelgrössen beherbergen.

Wäre jedoch der Ausdruck (55) zufälliger Weise Null, so wird:

$$\mathfrak{H}_0 \mathrm{a}^{\mathfrak{A}_0} = [\Lambda_m'' h_0^m + \Lambda_{m-1}'' h_0^{m-1} + \ldots . + \Lambda_1'' h_0 + \Lambda_0''] \mathrm{a}^2, \tag{62}$$

während $\mathfrak{H}'_0 a^{\mathfrak{A}_0'}$, $\frac{1}{2}\mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0''}$ und $\frac{1}{6}\mathfrak{H}_0''' a^{\mathfrak{A}_0'''}$ ihre früheren Werthe behalten. Die Gleichung (54) birgt in ihren Coëfficienten dann die Factoren: a^2, a, a, a^0 und liefert jetzt zwei Werthe für ξ_1, nämlich:

$$\xi_1 = 1 \text{ und } \xi_1 = \tfrac{1}{2}$$

Die Bestimmungsgleichungen für $h_,$ sind bezüglich:

$$\begin{aligned} &\Lambda_m'' h_0^m + \Lambda_{m-1}'' h_0^{m-1} + \ldots . + \Lambda_1'' h_0 + \Lambda_0'' + \\ &+ [m \Lambda_m' h_0^{m-1} + (m-1) \Lambda_{m-1}' h_0^{m-2} + \ldots . + \Lambda_1'] h_1 = 0 \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} &[m \Lambda_m' h_0^{m-1} + (m-1) \Lambda_{m-1}' h_0^{m-2} + \ldots . + \Lambda_1'] h_1 + \\ &+ \left[\tbinom{m}{3}\Lambda_m h_0^{m-3} + \tbinom{m-1}{3}\Lambda_{m-1} h_0^{m-1} + \ldots . + \Lambda_3\right] h_1^3 = 0. \end{aligned} \tag{64}$$

Die erste derselben liefert einen einzigen, die zweite aber zwei von einander und von Null verschiedene Werthe von $h_,$. Man findet dermassen drei Folgeglieder $h_, a^{\xi_1}$ und die Trennung der Wurzeln ist wieder bewerkstelligt. Die erste derselben besteht in der Form:

$$h_0 + h_1 \mathrm{a} + h_2 \mathrm{a}^2 + \ldots . .$$

die beiden anderen aber enthalten die Irrationalgrösse $\sqrt{a - a}$ und erscheinen in folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} &h_0 + h_1 \mathrm{a}^{\frac{1}{2}} + h_2 \mathrm{a} + \ldots . . \\ &h_0 - h_1 \mathrm{a}^{\frac{1}{2}} + h_2 \mathrm{a} - \ldots . . \end{aligned} \tag{65}$$

Hiermit ist wieder die Untersuchung beendigt, weil durch die Trennung der Wurzeln das Hinzutreten einer neuen Irrationalgrösse bei fortgeführter Entwickelung unmöglich wird.

Es kann aber auch gleichzeitig der Ausdruck (55) und (56) Null werden, und dadurch $\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0}$ und $\mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'}$ in der Gleichung (54) die neuen Werthe erhalten:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0} = [A_m'' h_0^m + A_{m-1}'' h_0^{m-1} + \ldots + A_1'' h_0 + A_0''] \mathrm{a}^2 \tag{66}$$

$$\mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'} = [m A_m'' h_0^{m-1} + (m-1) A_{m-1}'' h_0^{m-2} + \ldots + A_1''] \mathrm{a}^2 \tag{67}$$

während $\mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0''}$ und $\mathfrak{H}_0''' a^{\mathfrak{A}_0'''}$ bei ihren alten Werthen (57) und (58) belassen werden. Die Coëfficienten der Gleichung (54) weisen dann bezüglich die Factoren:

$$\mathrm{a}^2 \;,\; \mathrm{a}^2 \;,\; \mathrm{a} \;,\; \mathrm{a}^0$$

auf, und ihnen entspricht ein einziger Werth:

$$\xi_0 = \frac{2}{3} \tag{68}$$

Die Bestimmungsgleichung in $h_{,}$ ist eine binomische:

$$\begin{aligned} & A_m'' h_0^m + A_{m-1}'' h_0^{m-1} + \ldots + A_1'' h_0 + A_0'' + \\ & + [\tbinom{m}{3} A_m h_0^{m-3} + \tbinom{m-1}{3} A_{m-1} h_0^{m-4} + \ldots + A_3] h_1^3 = 0 \end{aligned} \tag{69}$$

und liefert daher stets drei verschiedene Werthe für $h_{,}$. Das Folgeglied ist daher Folgendes:

$$h_1 a^{\xi_1} = -\sqrt[3]{\frac{A_m'' h_{0}{}^m + A_{m-1}'' h_0{}^{m-1} + \ldots + A_1'' h_0 + A_0''}{\binom{m}{3} A_m h_0{}^{m-3} + \binom{m-1}{3} A_{m-1} h_0{}^{m-4} + \ldots + A_3}} \,.\, \mathrm{a}^{\frac{2}{3}} \tag{70}$$

wobei die dritte Wurzel in ihren drei verschiedenen Bedeutungen genommen werden muss. Es erfolgt also in diesem Falle die Trennung der Wurzeln im zweiten Entwickelungsgliede, welches die Irrationalgrösse $\sqrt[3]{a - \alpha}$ aufweist.

Endlich können alle drei Ausdrücke (55), (56), (66) gleichzeitig Null sein, und daher die Coëfficienten der Gleichung (54) die Werthe erhalten:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0} = [A_m''' h_0^m + A_{m-1}''' h_0^{m-1} + \ldots + A_1''' h_0 + A_0'''] \mathrm{a}^3 \tag{71}$$

$$\mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'} = [m A_m'' h_0^{m-1} + (m-1) A_{m-1}'' h_0^{m-2} + \ldots + A_1''] \mathrm{a}^2 \tag{72}$$

$$\frac{1}{2} \mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0''} = [\tbinom{m}{2} A_m' h_0^{m-2} + \tbinom{m-1}{2} A_{m-1}' h_0^{m-3} + \ldots + A_2'] \mathrm{a} \tag{73}$$

$$\frac{1}{2\,.\,3} \mathfrak{H}_0''' a^{\mathfrak{A}_0'''} = [\tbinom{m}{3} A_m h_0^{m-3} + \tbinom{m-1}{3} A_{m-1} h_0^{m-4} + \ldots + A_3]. \tag{74}$$

Die Coëfficienten weisen dann die Factoren:

$$\mathrm{a}^3 \;,\; \mathrm{a}^2 \;,\; \mathrm{a} \;,\; \mathrm{a}^0$$

auf und liefern demnach den Werth:

$$\xi_1 = 1$$

und für $h_{,}$ die Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned} & A_m''' h_0^m + A_{m-1}''' h_0^{m-1} + \ldots + A_1''' h_0 + A_0''' + \\ & + [m A_m'' h_0^{m-1} + (m-1) A_{m-1}'' h_0^{m-2} + \ldots + A_1''] h_1 + \\ & + [\tbinom{m}{2} A_m' h_0^{m-2} + \tbinom{m-1}{2} A'_{m-1} h_0^{m-3} + \ldots + A_2'] h_1^2 + \\ & + [\tbinom{m}{3} A_m h_0^{m-3} + \tbinom{m-1}{3} A_{m-1} h_0^{m-4} + \ldots + A_3] h_1^3 = 0. \end{aligned} \tag{75}$$

Die Wurzeln besitzen also die zwei Anfangsglieder:

$$x = h_0 + h_1 \mathrm{a} + \ldots\ldots$$

und wir befinden uns jetzt wieder am Ausgangspunkt ähnlicher Distinctionen, wie beim Anfangsgliede h_0. Sind nämlich alle drei Wurzeln h_1 der Gleichung (75) von einander verschieden, so ist die Trennung der Wurzeln erfolgt, ohne alles Auftreten einer Irrationalgrösse, und es ist nunmehr ausser allem Zweifel, dass für $a = \alpha$ die Stetigkeit dieser drei Wurzeln nicht unterbrochen ist und dass sie vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel entwickelbar sind. Finden sich aber unter den Wurzeln der Gleichung (75) gleiche vor, so können es wieder entweder doppelte oder dreifache sein. Sind zwei Wurzeln gleich, die dritte aber verschieden, so ist, nur eine einzige Wurzel x vollkommen isolirt und folglich auch erwiesenermassen von einer Irrationalgrösse von der betrachteten Gestalt frei, die beiden anderen stimmen aber in den aufgesuchten zwei ersten Entwickelungsgliedern überein und können daher nur die Irrationalgrösse $\sqrt{a-\alpha}$ bergen, oder auch nicht. Man hat zur Entscheidung dieser Frage die Entwickelung dieser zwei Wurzeln noch weiter zu führen, so lange bis die Trennung derselben erfolgt. Sind endlich alle drei Wurzeln der (75) gleich, so hat man alle drei Werthe x weiter zu entwickeln und kann dann eben sowohl zur Irrationalgrösse $\sqrt{a-\alpha}$ in zweien derselben, oder zur anderen $\sqrt[3]{a-\alpha}$ in allen dreien, oder endlich zu keiner von beiden gelangen.

Wir erachten es nicht für nöthig, dies wirklich durchzuführen; die vorhergegangenen Untersuchungen erläutern es zur Genüge. Eben so wenig wollen wir jene anderen Fälle einer eigenen Betrachtung unterwerfen, wo die Gleichung (39) vier, fünf und allgemein r gleiche Wurzeln h_0 liefert. Diese Untersuchungen würden schon um Vieles complicirter ausfallen, im Wesentlichen aber doch nichts Neues bieten. Es würde sich zeigen, dass beim Auftreten von r gleichen Wurzeln h_0, die Irrationalgrössen $\sqrt[r]{a-\alpha}$, $\sqrt[r-1]{a-\alpha}$, ... $\sqrt{a-\alpha}$, oder auch keine von ihnen auftritt. Es können entweder nur eine einzige, oder auch zwei oder noch mehrere derselben sich ergeben; Letzteres aber nur dann, wenn die Zahl r oder die unter ihr liegenden in zwei oder mehrere Factoren zerlegbar sind. So z. B. können bei 6 gleichen Wurzeln h_0, die Irrationalgrössen $\sqrt[6]{a-\alpha}$, $\sqrt[5]{a-\alpha}$, $\sqrt[4]{a-\alpha}$, $\sqrt[3]{a-\alpha}$ und $\sqrt{a-\alpha}$ einzeln vorkommen, aber auch $\sqrt[3]{a-\alpha}$ und $\sqrt{a-\alpha}$ beide zugleich erscheinen. Die Irrationalgrösse erscheint immer in so vielen Wurzeln x, als ihr verschiedene Bedeutungen zukommen, also $\sqrt[r]{a-\alpha}$ immer in r Wurzeln. Diese Wurzeln stimmen in allen vorhergehenden Entwickelungsgliedern überein, und unterscheiden sich erst in dem mit der Irrationalgrösse behafteten Entwickelungsgliede von einander. Alle diese Erscheinungen lassen sich ohne alle Schwierigkeit für jede Anzahl r gleicher Wurzeln ableiten, nur sieht man sich, wenn man dies allgemein thun will, in eine Unzahl von Distinctionen verwickelt. Vergleicht man dabei den Entwickelungsgang mit jenem, der sich auf die Mac-Laurin'sche Formel stützt, so bemerkt man die vollkommenste Übereinstimmung zwischen beiden, so lange in den Entwickelungsgliedern a mit ganzen und positiven Exponenten versehen ist; sobald aber ein gebrochener Werth des Exponenten auftaucht, tritt der Unterschied der beiden Methoden ans Tageslicht. Unsere Methode erweist sich fortan als brauchbar, während die andere durch eine widersprechende Bedingungsgleichung zu erkennen gibt, dass der Bereich ihrer Giltigkeit überschritten sei.

§. 11.

Fassen wir nun die Ergebnisse dieser Untersuchungen zusammen, so gelangen wir zur folgenden Regel, um die Irrationalgrössen kennen zu lernen, die in den Wurzeln einer gegebenen algebraischen Gleichung mit rationalen Coëfficienten erscheinen.

Erstens: Man füge zu der gegebenen Gleichung $P = 0$ noch die durch einmaliges Differentiiren partiell nach x abgeleitete andere: $\frac{dP}{dx} = 0$ hinzu und löse dieses System von zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten a und x nach a auf und notire alle so erhaltenen Werthe als α der zweiten Gattung.

Zweitens: Man unterwerfe nun jeden dieser Werthe α einer eigenen Untersuchung, welche die Frage zu beantworten hat, ob demselben eine Irrationalgrösse in den Wurzeln x entspricht oder nicht. Man leitet desshalb die aufsteigende Entwickelung nach Potenzen von $\mathrm{a} = a - \alpha$ ein, aber führt dieselbe nur so weit durch, bis jede Wurzel x vollkommen isolirt ist. Bei der Bestimmung der Anfangsglieder erhält man unter ihnen gleiche, und zwar bald nur eine einzige Gruppe, bald aber auch mehrere. Nach der Bestimmung der Anfangsglieder schreitet man zur Entwickelung der Folgeglieder, vollführt diese aber nur bei jenen Wurzeln, die durch die Anfangsglieder noch nicht isolirt erscheinen, also an jenen Anfangsgliedern, die zweien oder mehreren Wurzeln gemeinschaftlich zukommen, und bestimmt nur so viele Folgeglieder, bis die Trennung der Wurzeln erfolgt ist. Auf diese Weise erhält man eine jede Wurzel in einer Anzahl von Anfangsgliedern entwickelt; in so vielen, als zu ihrer vollständigen Isolirung von allen übrigen hinreicht. Findet sich unter diesen Gliedern eines, und zwar meistentheils das letzte mit einem gebrochenen Exponenten von a versehen, so liegt es am Tage, dass die betreffende Wurzel x eine Irrationalgrösse beherbergt, wo $a - \alpha$ als Factor unter dem Wurzelzeichen erscheint. Der Nenner des gebrochenen Exponenten ist zugleich der Index dieses Wurzelzeichens. Ist hingegen unter den entwickelten Gliedern keines mit einem gebrochenen Exponenten versehen, so ist es auch ausser allem Zweifel, dass diese Wurzel keine solche Irrationalgrösse mit $a - \alpha$ als Factor unter dem Wurzelzeichen beherberge. Da diese Untersuchung der Reihe nach an allen Werthen α vorgenommen wird, die durch Auflösung des oberwähnten Systems von zwei Gleichungen $P = 0$, $\frac{dP}{dx} = 0$ erhalten wurden, so gelangt man zu allen einfachen Factoren, aus welchen die Irrationalgrössen in den Wurzeln bestehen.

§. 12.

Wir müssen noch einige wichtige Bemerkungen folgen lassen, die sich auf specielle Fälle beziehen, von denen bisher keine Erwähnung geschah. Diese Fälle sind folgende zwei:

1. Es kann geschehen, dass das System von zwei Gleichungen, das zu dem Werthe α der zweiten Gattung führen soll, einen Werth der ersten Gattung liefert, d. h. einen solchen, der einem Nenner in den Wurzeln entspricht, und

2. dass die zwei Gleichungen einen gemeinschaftlichen Factor aufweisen und folglich für jeden beliebigen Werth von a erfüllbar sind. Geschieht das Letztere, so ist der Beweis hergestellt, dass die gegebene Gleichung $P = 0$ gleiche Wurzeln x besitzt.

w *

In dem ersteren dieser beiden Fälle benimmt man sich auf ganz gleiche Weise, wie sonst. Da der Werth a gleichzeitig der ersten und zweiten Gattung angehört, so werden nur unter den Anfangsgliedern auch solche mit negativem Werthe von ξ_0 erscheinen. Auf die weitere Entwickelung hat dies aber keinen Einfluss, sondern man entwickelt jede Wurzel x so weit, bis sie isolirt erscheint.

Der zweite dieser beiden Fälle aber bedarf einer ganz anderen Behandlung, denn da nun erwiesen ist, dass die gegebene Gleichung $P = 0$ gleiche Wurzeln besitzt, so wird es niemals gelingen, alle Wurzeln bis zur vollständigen Isolirung entwickeln zu können; die gleichen Wurzeln werden fortan in den Entwickelungsgliedern übereinstimmen. Andererseits aber ist auch die Angabe der Werthe a der zweiten Gattung noch mangelhaft, und es können in den gleichen Wurzeln Irrationalgrössen erscheinen, deren Werthe a unter den aufgesuchten nicht vorfindig sind. Man kann in diesem Falle wohl verschiedene Wege einschlagen, die alle zum Ziele führen; am einfachsten ist es aber jedenfalls, den in P und $\frac{dP}{dx}$ gemeinschaftlich erscheinenden Factor auf bekannte Weise zu suchen. Derselbe kann im Allgemeinen eine Function beider Buchstabengrössen x, a sein. Setzt man ihn nun gleich Null, so liegt eine Partialgleichung vor, die jedenfalls weit einfacher ist, als die ursprünglich gegebene $P = 0$. Durch Auflösung derselben wird man gewisse Werthe von x finden, die auch die $P = 0$ erfüllen und namentlich in derselben als wiederholte Wurzeln erscheinen. Jedenfalls wird man aus dieser neuen Partialgleichung mit viel geringerer Mühe alle auf diese gleichen Wurzeln x Bezug habenden Fragen beantworten, also auch die in ihnen erscheinenden Irrationalgrössen ermitteln können, denn in ihr erscheint jede wiederholte Wurzel der Gleichung $P = 0$ um einmal minder oft. Die doppelten Wurzeln der $P = 0$ erscheinen hier als einfache und lassen sich daher jedenfalls isoliren. Wiederholte Wurzeln können in ihr nur erscheinen, wenn $P = 0$ dreifache, vierfache Wurzeln u. s. w. besass, und selbst in diesem Falle kann man immer zu einer einfacheren Gleichung gelangen, welche diese wiederholten Wurzeln nur einmal besitzt, und bei der demnach die Isolirung derselben und folglich auch jede auf Irrationalgrössen Bezug habende Untersuchung ohne Schwierigkeit ausgeführt werden kann. Der Fall, wo $P = 0$ wiederholte Wurzeln besitzt, ist überhaupt stets viel günstiger als derjenige, wo dies nicht der Fall ist, denn in den meisten Fällen gelingt es, diese wiederholten Wurzeln in geschlossener Form zu finden, und man ist dadurch alsogleich vieler mühsamen Untersuchungen überhoben.

In den bisherigen Untersuchungen wurde in der ursprünglich gegebenen Gleichung $P=0$ das Gleichungspolynom P als ganzes und rationales vorausgesetzt. Nichts desto weniger gilt alles bisher Gesagte ebenfalls für die anderen Fälle, wo im Gleichungspolynome $P = S[Ha^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}]$ auch gebrochene oder negative Exponenten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ erscheinen. Es ist zwar Sitte jede irrationale oder gebrochene Gleichung in eine rationale und ganze zu verwandeln, allein diese Transformation ist keine nothwendige und nur in gewissen Fällen von Vortheil. Uns ist hier nicht der Raum gestattet, näher darauf einzugehen. Wir wollen nur die Bemerkung machen, dass bei Gleichungen, die nach x ganz und rational sind, also in der Form:

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0$$

erscheinen, bei welchen aber die Coëfficienten A irrationale Elemente in sich bergen, dieselben auch im Allgemeinen in einer oder mehreren Wurzeln vorkommen. Die genauen Angaben über das Erscheinen dieser Irrationalgrössen liefert auch hier die genügend weit fortgesetzte aufsteigende Entwickelung der Wurzel x nach Potenzen einer schicklich gewählten Grösse $a-\alpha$; hier aber reicht es nicht hin, die Entwickelung nur bis zur Isolirung der einzelnen Wurzeln fortzusetzen, weil diese in den Coëfficienten der Gleichung erscheinenden Irrationalgrössen gelegentlich nur einer einzigen Wurzel x zukommen und erst in den späteren Entwickelungsgliedern auftreten können. Man ist desshalb verhalten, entweder sich in einer anderen Weise die Überzeugung zu verschaffen, dass die beliebig weit fortgesetzte Entwickelung kein neues irrationales Element mehr bringen könne oder aber zur entsprechenden Gleichung überzugehen, bei der die irrationalen Elemente immer in einer Gruppe von Wurzeln x gleichzeitig erscheinen und an ihr die Entwickelung bis zur vollständigen Isolirung der Wurzeln vorzunehmen.

Das Aufsuchen der irrationalen Elemente in den Wurzeln x hat im Grunde nur eine untergeordnete Bedeutung, da sie nicht wie die absteigende Entwickelung und die Bestimmung der Nenner über eine Haupteigenschaft der Genüge leistenden Functionen Aufschluss ertheilt. Diese beiden letztgenannten Untersuchungen führen nämlich zu allen Asymptoten der Curve, deren Gleichung $P=0$ ist und gerade die Kenntniss der Curven in ihrem unendlichen Verlaufe ist für den mathematischen Forscher meistentheils die wichtigere. Die Bestimmung der in den Wurzeln erscheinenden irrationalen Elemente hat aber einen anderen Nutzen; sie macht es nämlich gar nicht selten möglich, die Wurzeln einer Gleichung höheren Grades in geschlossener Form zu finden, indem sie die nöthigen Andeutungen gibt, ob eine solche erwartet werden, und den Weg bezeichnet, auf dem man zu derselben gelangen könne. Die nachfolgenden Beispiele werden über diesen Punkt einige Aufklärung geben. In unserer Absicht liegt es aber keineswegs diesen Gegenstand vollständig zu erschöpfen. Die Entscheidung der Frage, ob geschlossene Formen der Genüge leistenden Functionen bei einer vorgelegten Buchstabengleichung wirklich vorhanden seien und wie man die wirklich bestehenden durch ein geregeltes analytisches Verfahren und ohne Probiren gewinnen könne, bildet vielmehr ein Problem, das bisher, so zu sagen, noch nicht im Entferntesten seiner Lösung entgegen sieht. Die hier gegebenen Andeutungen gelten nur für die einfachsten Fälle.

§. 13.

Wir wollen nun hier einige Beispiele zur Erläuterung folgen lassen.

Erstes Beispiel:

$$x^5-2a^2x^4+[a^4-a-1]x^3+[4a^2+a-5]x^2+[-2a^4-2a^3+10a^2+2a-2]x+$$
$$+[a^5-5a^4-a^2+6a-5]=0,$$

fügen wir zu dieser gegebenen Buchstabengleichung ihre Derivirte hinzu:

$$5x^4-8a^2x^3+3[a^4-a-1]x^2+2[4a^2+a-5]x+[-2a^4-2a^3+10a^2+2a-2]=0,$$

so findet man für $a=1$, $x=1$ beide Gleichungen gleichzeitig erfüllt. Der Werth $a=1$ ist daher vielleicht ein unstetig machender Werth der zweiten Gattung. Wir wollen ihn in Bezug dieser Eigenschaft genauer untersuchen. Es ist zu diesem Zwecke die aufsteigende Reihenentwickelung von x, geordnet nach Potenzen der Grösse $a - 1 = \mathrm{a}$ einzuleiten und desshalb die gegebene Gleichung vermittelst der Substitution $a = \mathrm{a} + 1$ zu transformiren in die:

$$x^5 + [-2 - 4\,\mathrm{a} - 2\,\mathrm{a}^2]x^4 + [-1 + 3\,\mathrm{a} + 6\,\mathrm{a}^2 + 4\,\mathrm{a}^3 + \mathrm{a}^4]x^3 + [9\,\mathrm{a} + 4\,\mathrm{a}^2]x^2 +$$
$$+ [+6 + 8\,\mathrm{a} - 8\,\mathrm{a}^2 - 10\,\mathrm{a}^3 - 2\,\mathrm{a}^4]x - 4 - 11\,\mathrm{a} - 21\,\mathrm{a}^2 - 10\,\mathrm{a}^3 + \mathrm{a}^5 = 0$$

bei welcher die aufsteigende Entwickelung von x alsogleich eingeleitet werden kann. Man findet hier für ξ_0 einen einzigen Werth: $\xi_0 = 0$ und für h_0 die Bestimmungsgleichung:

$$h^5 - 2h^4 - h^3 + 6h - 4 = 0.$$

Ihre Wurzeln sind die drei einfachen: $h = 2$, $h = -1 + \sqrt{-1}$, $h = -1 - \sqrt{-1}$ und die doppelte: $h = 1$. Dieser letzteren entspricht das Anfangsglied $x_0 = 1$, gehörig zu zwei Entwickelungsreihen von x und diese sind weiter zu entwickeln. Man findet zum Anfangsgliede $x_0 = 1$ zwei verschiedene Folgeglieder $h_1 a^{\xi_1}$, nämlich:

$$x_1 = 1 + \mathrm{a}^{\frac{1}{2}} \text{ und } x_1 = 1 - \mathrm{a}^{\frac{1}{2}}.$$

Mit der Bestimmung der Folgeglieder tritt also die Trennung auch dieser beiden Wurzeln x ein, und es ist zugleich die Irrationalgrösse $\sqrt{a}$ in demselben ersichtlich gemacht.

Eie Entwickelung braucht man nicht weiter fortzusetzen, denn die Isolirung der Wurzeln ist erfolgt und somit dargethan, dass auch in allen späteren Folgegliedern nur die Irrationalgrösse $\sqrt{a}$ erscheinen könne. Hier aber gelangt man bei fortgesetzter Entwickelung zu den geschlossenen Ausdrücken:

$$x = 1 \pm \mathrm{a}^{\frac{1}{2}} + 2\,\mathrm{a} + \mathrm{a}^2.$$

Zweites Beispiel:

$$x^3 + (3a - 3)x^2 + (3a^2 - 6a + 3)x + a^3 - 3a^2 + 2a + 1 = 0.$$

Zur Ermittelung der Werthe a der zweiten Gattung hat man die derivirte Gleichung hinzuzufügen:

$$3x^2 + (6a - 6)x^2 + 3a^2 - 6a = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sind gleichzeitig erfüllt für $a = 2$, $x = -1$. Ausser dieser Auflösung besteht keine andere mehr.

Man hat nun die aufsteigend nach Potenzen von $\mathrm{a} = a - 2$ geordnete Reihenentwickelung einzuleiten, und zwar bei der durch die Substitution $a = \mathrm{a} + 2$ abgeleiteten Gleichung:

$$x^3 + (3 + 3\,\mathrm{a})x^2 + (3 + 6\,\mathrm{a} + 3\,\mathrm{a}^2)x + (1 + 2\,\mathrm{a} + 3\,\mathrm{a}^2 + \mathrm{a}^3) = 0.$$

Leitet man dieselbe wirklich ein, so findet man ein einziges Anfangsglied: $x_0 = -1$ für alle drei Wurzeln, hiezu aber drei verschiedene Folgeglieder:

$$x_1 = -1 + \mathrm{a}^{\frac{1}{3}}$$
$$x_1 = -1 + \tfrac{1}{2}[-1 + \sqrt{-3}]\,\mathrm{a}^{\frac{1}{3}}$$
$$x_1 = -1 + \tfrac{1}{2}[-1 - \sqrt{-3}]\,\mathrm{a}^{\frac{1}{3}}$$

somit erscheint die Irrationalgrösse $\sqrt[3]{\mathrm{a}} = \sqrt{a - 2}$ in allen drei Wurzeln.

Bei diesem Beispiele schliesst sich die Entwickelung beim dritten Gliede von selbst und man findet folglich x in geschlossener Form:

$$x = -1 + \sqrt[3]{\mathrm{a}\tfrac{1}{2}} - \mathrm{a} = -a + 1 + \sqrt[3]{a-2}.$$

Drittes Beispiel:

$$(a^2 - a - 2)x^5 + (-2a^2 + a - 3)x^4 + (-3a^3 + 4a^2 + 6a - 1)x^3 + (6a^3 + 2a^2 + 4a - 10)x^2 +$$
$$+ (-3a^3 - 10a^2 + 8a - 15)x + (5a^2 - 5) = 0.$$

Hier ergibt sich $a = \frac{1}{5}$ als ein Werth von a der zweiten Gattung, denn es sind für $a = \frac{1}{5}$, $x = -\frac{2}{3}$ die vorgelegte Gleichung und ihre Derivirte:

$$5(a^2 - a - 2)x^4 + 4(-2a^2 + a - 3)x^3 + 3(-3a^3 + 4a^2 + 6a - 1)x^2 +$$
$$+ 2(6a^3 + 2a^2 + 4a - 10)x + (-3a^3 - 10a^2 + 8a - 15) = 0$$

gleichzeitig erfüllt. Um nun die aufsteigende Entwickelung von x, geordnet nach Potenzen von $(a - \frac{1}{5})$ oder von $(5a - 1) = \mathrm{a}$ einzuleiten, hat man zuerst die Substitution $a = \frac{1}{5}(\mathrm{a} + 1)$ auszuführen und gelangt so zur transformirten Gleichung:

$$(-270 - 15\,\mathrm{a} + 5\,\mathrm{a}^2)x^5 + (-360 + 5\,\mathrm{a} - 10\,\mathrm{a}^2)x^4 + (+42 + 181\,\mathrm{a} + 11\,\mathrm{a}^2 - 3\,\mathrm{a}^3)x^3 +$$
$$+ (-1134 + 138\,\mathrm{a} + 28\,\mathrm{a}^2 + 6\,\mathrm{a}^3)x^2 + (-1728 + 91\,\mathrm{a} - 59\,\mathrm{a} - 3\,\mathrm{a}^2)x +$$
$$+ (-600 + 50\,\mathrm{a} + 25\,\mathrm{a}^2) = 0.$$

Hier findet man das Anfangsglied:

$$x_0 = -\frac{2}{3}$$

zweien Wurzeln entsprechend, allein die zugehörigen Folgeglieder sind verschieden und rational:

$$x_1 = -\frac{2}{3} + \frac{5}{18}\mathrm{a}; \quad x_1 = -\frac{2}{3} - \frac{5}{27}\mathrm{a}$$

und es folgt hieraus, dass der Werth $a = \frac{1}{5}$ keine Unterbrechung der Stetigkeit bewirkt, weil die Trennung dieser beiden Wurzeln ohne Auftauchen von Irrationalgrössen erfolgt.

Bestimmung des Ergänzungsgliedes für die unendlichen Reihen und Beurtheilung ihrer Convergenz. Anwendbarkeit der auseinandergesetzten Auflösungsmethoden im Gebiete der analytischen Geometrie insbesondere zur Bestimmung der Asymptoten für Curven von einfacher Krümmung.

EINLEITUNG.

Die im Vorhergehenden auseinandergesetzten Auflösungsmethoden gründen sich im Wesentlichen auf Reihenentwickelungen und liefern die Wurzeln der Buchstabengleichung meistentheils nicht in geschlossener Form, sondern nur in einer gewissen Annäherung. In der Regel nämlich lässt sich das zur Bestimmung der Folgeglieder dienende Rechnungsverfahren ins Unendliche fortsetzen, weil das durch Substitution der gewonnenen Entwickelungsglieder in das Gleichungspolynom hervorgehende Substitutionsresultat gewöhnlich von Null verschieden bleibt. Die erwähnten Auflösungsmethoden sind daher streng genommen keine solchen, weil sie für die Unbekannte x Werthe liefern, die im Allgemeinen das Gleichungspolynom nicht auf Null bringen, und erscheinen bisher nur für jene Fälle gerechtfertigt, in denen die Reihenentwickelung sich von selbst schliesst. In allen übrigen Fällen aber, in welchen die Reihenentwickelung sich ins Unendliche fortsetzen lässt, ist erst die Frage zu beantworten, ob und unter welchen Bedingungen man bei fortgesetzter Entwickelung, d. h. durch das Hinzufügen neuer Folgeglieder, sich dem wahren Wurzelwerthe von x fortwährend nähert oder davon entfernt. Nur auf solche Weise können die gelehrten Reihenentwickelungen ihre volle Rechtfertigung erlangen und ein Missbrauch derselben vermieden werden, und es geht hieraus die Nothwendigkeit einer weiteren Untersuchung hervor, welche zu bestimmen hat, ob der durch Abbrechen der Reihenentwickelung gewonnene Ausdruck, wenn auch nicht als exacter, so doch als ein angenäherter Werth von x angesehen werden könne. Diese Untersuchung wird aber noch mehr leisten, denn sie wird die richtige und vortheilhafteste Gebrauchsweise der verschiedenen Entwickelungsarten angeben. Die Auflösung einer Buchstabengleichung $F(x, a) = 0$ kann stets durch das Verzeichnen einer Curve von einfacher Krümmung versinnlicht werden. Die hier besprochenen Auflösungsmethoden bezwecken aber meistentheils nicht die vollkommen genaue Verzeichnung dieser Curve, sondern begnügen sich, ein hinlänglich angenähertes Bild derselben zu entwerfen, indem sie die complicirte Curve stückweise aus einfachen Linien zusammensetzt. Damit aber diese, aus ganz differenten Linienstücken zusammengesetzte Zeichnung, wenn gleich kein vollkommen genaues, so doch ein hinlänglich angenähertes Bild der wirklichen Curve gebe, ist eine zweckmässige Anordnung und vortheilhafte Abtheilung der Curve in Stücke erforderlich. Dies ist der Zweck der nachfolgenden Untersuchungen.

Die Aufgabe, die wir uns stellen, ist eine doppelte: e r s t e n s, wenn man durch die eingeleitete und bei einem beliebigen Gliede abgebrochene Reihenentwickelung sich einen Bestandtheil x_r, bestehend aus $r+1$ Anfangsgliedern verschafft hat, so soll für den Fehler, den man begehen würde, wenn man diesen Ausdruck als einen Werth von x annähme, ein zu angenäherten Werthen führen, aber für den beabsichtigten Zweck genau dasselbe leisten, wie vollkommen geschlossene Ausdrücke.

Schon früher und zu wiederholten Malen wurde die Bemerkung gemacht, dass die bekannten Regeln zur algebraischen Division und zum Wurzelausziehen nur specielle Anwendungen seien der hier erörterten allgemeinen Auflösungsmethode, angewendet auf binomische Gleichungen des ersten und höheren Grades. Diese beiden einfachen Rechnungsoperationen führen nur in speciellen Fällen zu geschlossenen Ausdrücken, meistentheils aber lassen sie sich ins Unendliche fortsetzen. Bricht man nun die Rechnung irgendwo ab, so ist das gewonnene Resultat (Quotient oder Wurzel) fehlerhaft. Um denselben fehlerfrei zu erhalten, muss man noch ein Ergänzungsglied hinzufügen. Bei der Division von Polynomen hat man nämlich zum unvollständigen Quotienten noch einen Bruch hizuzufügen, dessen Zähler der letzte Partialrest und dessen Nenner der Divisor ist. Dieser aus dem letzten Reste und dem Divisor gebildete Bruch gibt den bestehenden Fehler ganz genau an, und zwar für jeden beliebigen Werth der darin erscheinenden Buchstabengrösse.

Man kann aber auch die Frage sich vorlegen, ob und für welche Werthe der unabhängigen Buchstabengrösse die unendliche Reihe, welche bei fortgesetzter Division hervorgeht und die bekanntlich eine recurrirende genannt wird, convergent sei, und auch diese Frage lässt sich mit Leichtigkeit beantworten.

Diese zwei Fragen nun, welche in bekannter Weise schon bei der algebraischen Division und beim Wurzelziehen beantwortet sind, sollen nun auch für den allgemeinen Fall, nämlich bei der Auflösung einer Buchstabengleichung höheren Grades, ihre Erledigung finden. Dies ist aber der Zweck der nachfolgenden Untersuchungen. Die Ergebnisse dieser allgemeinen Untersuchungen werden, wie sich dies von selbst versteht, für den einfachen Fall einer binomischen Gleichung des ersten oder eines höheren Grades, mit den bereits bekannten, für die algebraische Division von Polynomen und das Wurzelziehen geltenden vollkommen übereinstimmen.

Bevor wir jedoch zur wirklichen Beantwortung dieser beiden Fragen schreiten, ist es unerlässlich, sich von ihrer Bedeutung eine vollkommen klare und deutliche Vorstellung zu verschaffen, weil nur auf solche Weise ihre Beantwortung möglich wird. Die erste derselben erheischt die Vergleichung des gefundenen Bestandtheiles x_r, der ein vollkommen bestimmter und bekannter Ausdruck ist, mit dem exacten Wurzelwerthe $\varphi(a)$ von x, der selber noch unbekannt und nur durch die Gleichung bestimmt ist, und es soll bei dieser Vergleichung entschieden werden, ob die Relation $x_r > \varphi(a)$ oder die entgegengesetzte $x_r < \varphi(a)$ besteht und welchen numerischen Werth der Fehler $\varphi(a) - x_r$ erlangen könne. Da die beiden in Vergleich zu bringenden Grössen x_r, $\varphi(a)$ Functionen von a und keine bestimmten Zahlen sind, so kann offenbar die Entscheidung nicht für beliebige, sondern nur für bestimmte und specielle Werthe von a bewerkstelligt werden, denn eine jede der drei Relationen:

$$x_r < \varphi(a) \quad , \quad x_r = \varphi(a) \quad , \quad x_r > \varphi(a)$$

kann gelegentlich, d. h. für gewisse Werthe von a erfüllt sein. Man hätte demnach eigentlich für alle möglichen Werthe von a, also für das ganze unendliche Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ diese Vergleichung von x_r mit $\varphi(a)$ durchzuführen und für jede der drei angeführten Relationen die zugehörigen Werthe von a aufzuzählen. Diese Vergleichung der beiden Functionen x_r, $\varphi(a)$ würde nicht einmal hinreichen, weil bekanntlich unter den Wurzeln einer algebraischen Gleichung auch imaginäre erscheinen können, so zwar, dass also gelegentlich x_r und $\varphi(a)$ für gewisse Intervalle von a imaginäre Zahlwerthe erlangen können, denn dann haben die Relationen $x_r < \varphi(a)$, $x_r > \varphi(a)$, die sich nur auf reelle Zahlen erstrecken, keinen Sinn mehr; ja die vollständige Beantwortung dieser Frage würde sogar fordern, nicht blos die reellen, sondern auch die imaginären Werthe von a zu erschöpfen.

Zudem ist es nicht genügend, $\varphi(a)$ als irgend eine beliebige Wurzel der Gleichung $P = 0$ anzusehen, sondern man ist genöthigt, eine bestimmte Wurzel darunter zu verstehen. Dies ist in den oberwähnten Fragen auch, wie wohl nur stillschweigend, niedergelegt und namentlich unter $\varphi(a)$ daselbst jene Wurzel der Gleichung verstanden, deren Entwickelung eben mit der Gliedersumme x_r beginnt. Da nun meistentheils diese Gliedersumme einer einzigen Wurzel eigen ist, so hat auch die gestellte Frage eine vollkommen bestimmte Bedeutung. Trotzdem aber, dass unter diesen Umständen die gestellte Frage eine vollkommen bestimmte ist, würde es dennoch schwer halten, diese bestimmte Wurzel $\varphi(a)$ für alle möglichen Werthe von a festzuhalten und von den übrigen zu unterscheiden. Diese Unterscheidung ist zwar immer möglich, aber nicht immer auf eine leichte Art. Glücklicherweise benöthigt man aber die vollständige Erledigung der gestellten Fragen nicht. Reihenentwickelungen erweisen sich nämlich nur so lange vortheilhaft, als sie einen bedeutenden Grad von Convergenz besitzen, so zwar, dass man mit einer verhältnissmässig geringen Anzahl von Anfangsgliedern dem wahren Wurzelwerthe hinreichend nahe kömmt. Die absteigende Reihenentwickelung wird nur für numerisch grosse Werthe von a mit Vortheil benützt, die aufsteigend nach Potenzen von $\mathrm{a} = a - \alpha$ fortschreitende, aber für die nahe an Null liegenden Werthe von a einen bequemen Verbrauch verstatten. Es wird daher genügen, die Beantwortung der obigen Fragen nur für solche, einen praktischen Nutzen versprechenden Werthe von a vorzunehmen und alle übrigen Bereiche von a ausser Acht zu lassen. In all' diesen Fällen geschieht aber das Hervorheben der bestimmten Wurzel $\varphi(a)$ leicht und sicher.

I. Bestimmung des Ergänzungsgliedes.

§. 1.

Wir schreiten nun zur Beantwortung der ersten der beiden aufgestellten Fragen, nämlich zur Bestimmung der Fehlergrenze oder des Ergänzungsgliedes Δ, welches über die mögliche Grösse der Summe aller nicht entwickelten, auf die Gliedersumme x_r folgenden Glieder, also auch über die Grösse des bestehenden Fehlers Aufschluss ertheilt. Wir sind aber genöthigt, die nachfolgenden Untersuchungen auf den einfachsten Fall zu beschränken, wo die in Betrachtung zu ziehenden Grössen x_r, x, a reelle Werthe besitzen, alle anderen hingegen unberücksichtigt zu lassen. Es genügt auch eine einfache Überlegung, dass die hier nicht berücksichtigten Fälle eigentlich zu einem complicirteren Probleme gehören, nämlich zur Auflösung eines Systemes von Gleichungen, denn sobald eine oder mehrere der Grössen x_r, x, a imaginär sind, lässt sich jede derselben in zwei Theile trennen, in den reellen und in den mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten und auch die Gleichung $P=0$ zerfällt dann in zwei, die beide gleichzeitig erfüllt werden müssen und dies ist auch der Grund, wesshalb sie hier füglich nicht erledigt werden können.

Eine zweite Voraussetzung, zu der wir durch die Natur der Aufgabe genöthigt sind, ist, dass x_r eine isolirende Gliedersumme, d. h. einer einzigen Wurzel x eigen sei. Im Vorhergehenden wurde schon zu wiederholten Malen erwähnt, dass man stets von dieser Voraussetzung ausgehen könne, weil man durch hinlänglich weit fortgesetzte Entwickelung fast immer dahin gelangt, oder, falls gleiche Wurzeln x in der ursprünglichen Gleichung $P=0$ erscheinen, deren Trennung niemals erfolgen könnte, durch Sonderung eines gemeinschaftlichen Factors aus P und $\frac{dP}{dx}$ eine andere und einfachere Gleichung sich bilden lässt, welche eben diese wiederholten Wurzeln der $P=0$ aber nunmehr als unwiederholte besitzt. Diese zweite Voraussetzung ist aus dem Grunde unerlässlich, weil sonst, wie in der Einleitung bemerkt wurde, die gestellte Frage keine Bestimmtheit hätte. Wollte man früher, bevor noch die vollständige Trennung der Wurzel erfolgt ist, zur Bestimmung des Ergänzungsgliedes schreiten, so wäre Δ eine Grösse von der Art, dass zwischen x_r und $x_r+\Delta$ alle diese Wurzeln liegen, denen die Gliedersumme x_r gemeinschaftlich zukommt. Dann wäre wohl die Bestimmung des Ergänzungsgliedes gleichfalls ein bestimmtes Problem, das wir aber hier seiner geringeren praktischen Wichtigkeit wegen übergehen.

Die gemachte Voraussetzung, dass x_r eine isolirende Gliedersumme sei, bringt aber noch den anderen wichtigen Vortheil, dass man dadurch die Überzeugung erlangt, ob die der Entwickelung unterworfene Wurzel x auch in den späteren Folgegliedern reell ist oder nicht, weil nach dem im vorhergehenden Abschnitte Erwiesenen bei rationalen Gleichungen von dem Momente der vollständigen Isolirung an keine neuen irrationalen Elemente mehr in den Folgegliedern auftauchen können, die nicht schon in der isolirenden Gliedersumme bemerkbar wären. Daraus dass die isolirende Gliedersumme und demnach die ganze Entwickelung dieser Wurzel x von jedem irrationalen Elemente frei und daher für beliebige reelle Werthe der unabhängigen Buchstabengrösse a stets reell ist, folgt nun wohl freilich noch nicht, dass x dieselbe Eigenschaft besitzen müsse; es ist vielmehr sehr leicht, an einem Beispiele sich vom Gegentheile zu überzeugen. Die Function $\sqrt{a^2-1}$, absteigend entwickelt, zeigt keine Spur eines irrationalen Elementes und dennoch nimmt sie für alle zwischen -1 und $+1$ liegenden reellen Werthe von a imaginäre Werthe an; allein für eben diesen Bereich wird auch die absteigende Entwickelung divergirend. Die isolirende Gliedersumme gibt aber Aufschluss über das Reell- oder Imaginärsein von x im Bereiche der Convergenz der Entwickelung. Es ist hieraus ersichtlich, dass die zweite gemachte Voraussetzung schon durch die erste gefordert wird.

Bevor wir die Bestimmung des Ergänzungsgliedes selber zum Gegenstande der Untersuchung machen, ist es unerlässlich die Bedingungen präcis aufzustellen, die erfüllt werden sollen. Wenn man die Entwickelung einer Wurzel $x=\varphi(a)$ in ihren $r+1$ Anfangsgliedern vollführt hat, ohne dass das entsprechende Substitutionsresultat $\mathfrak{P}_r$ identisch verschwindet, so lässt sich der exacte Werth derselben wohl durch x_r+x' vorstellen, wo x' eine noch unbekannte Function von a ist, welche zugleich den Fehler angibt, den man begeht, wenn man die Gliedersumme x_r als einen Genüge leistenden Werth von x ansehen wollte. Allein den genauen Ausdruck für x' zu finden, gelingt nur selten, nur ausnahmsweise, und man begegnet dabei gewöhnlich denselben unübersteiglichen Hindernissen, wie bei der ursprünglichen Bestimmung von x. Hier genügt es, anstatt des wirklichen Fehlers x' einen anderen Ausdruck Δ zu finden, der in geschlossener Form besteht, dasselbe Vorzeichen, wie x', und einen numerisch grösseren Werth besitzt. Gelingt es wirklich, einen solchen Ausdruck Δ zu finden, so wird der exacte Wurzelwerth x_r+x' jedenfalls zwischen x_r und $x_r+\Delta$ fallen und der bestehende Fehler x' zwischen 0 und Δ liegen. Für jenen Rechner, der sich mit einem hinlänglich angenäherten Werthe von x begnügt, sobald ihm nur die Grösse des Fehlers zur Einsicht vorliegt, wird, sobald nur Δ genügend klein ausfällt, die Gliedersumme x_r vollkommen ausreichen.

Da x, x_r, x', Δ hier Functionen von a und keine bestimmten Zahlen sind, so können die obigen Bedingungen nicht für alle möglichen Werthe von a, sondern nur für einen beschränkten Bereich gelten und folglich auch nur für diesen Bereich von a die Werthe x_r und $x_r + \Delta$ den exacten $x = \varphi\,(a)$ zwischen sich einschliessen und als zwei Grenzwerthe figuriren. Würde man sich unter Δ irgend eine ganz nach Belieben erwählte Function von a denken und nun dem Buchstaben a in x_r und $x_r + \Delta$ einen bestimmten, nach Willkür erwählten Zahlwerth ertheilen, so dass sich diese beiden Grössen in Zahlen verwandeln, so könnten mehrere verschiedene Fälle stattfinden. Es könnte nämlich zwischen x_r und $x_r + \Delta$ entweder gar keine, oder eine einzige, oder mehrere Wurzeln x der Gleichung $P = 0$ liegen, die sich für diesen bestimmten Zahlwerth von a in eine numerische Gleichung verwandelt. Liegt gar keine Wurzel dazwischen, so ist entweder die erwählte Function Δ nicht als Ergänzungsglied brauchbar, oder der betrachtete Werth von a liegt ausser dem Bereiche ihrer Giltigkeit. Aber selbst dann, wenn eine einzige Wurzel dazwischen fällt, ist es noch keineswegs eine nothwendige Folge, das die getroffene Wahl von Δ eine brauchbare sei und der betrachtete Werth von a dem Bereiche ihrer Giltigkeit angehöre, denn dieser eine Wurzelwerth kann ebensowohl der mit $\varphi\,(a)$ bezeichneten Wurzel, der eben die Gliedersumme x_r eigen ist, als irgend einer der übrigen entsprechen, deren Anfangsglieder der Entwickelung von x_r verschieden sind, und nur wenn der erste dieser beiden Fälle stattfindet, ist die getroffene Wahl von Δ zweckentsprechend, und der angenommene Werth von a im Bereiche ihrer Giltigkeit; im zweiten Falle würde die Grösse Δ sich auf eine fremde Wurzel beziehen und die ganz werthlose Angabe der Differenz zwischen ihr und der Gliedersumme x_r machen. Eben aus demselben Grunde ist auch dann, wenn eine Gruppe von mehreren Wurzeln zwischen x_r und $x_r + \Delta$ fällt, dem Zwecke nicht entsprochen; selbst dann nicht, wenn sich unter dieser Gruppe die Wurzel $\varphi\,(a)$ befände, abgesehen davon, dass eine solche Entscheidung in diesem Falle mit einigen Schwierigkeiten verknüpft wäre.

Aus all' dem Gesagten ist einleuchtend, dass es sich bei der Bestimmung des Ergänzungsgliedes nicht blos um das Auffinden einer Function Δ, sondern auch um die Ermittelung des Intervalles für a handelt, für welches sie ihre Giltigkeit besitzt, und dabei hat man Bedingungen zu erfüllen, welche besagen, dass für alle im fraglichen Intervalle liegenden Werthe von a zwischen den beiden Grenzen x_r und $x_r + \Delta$ stets eine einzige reelle Wurzel x und zwar eben die $\varphi\,(a)$ falle, der die Gliedersumme x_r eigen ist.

Man kann sich dies durch ein geometrisches Bild versinnlichen, indem man x und a als orthogonale Coordinaten eines Punktes auf einer Ebene, namentlich a als Abscisse, x als Ordinate betrachtet. Der gegebenen Gleichung $F(x,a) = 0$ und auch den beiden andern: $x = x_r$, $x = x_r + \Delta$ entspricht je eine bestimmte Curve. Alle diese drei Curven sind von einander verschieden. Die erste derselben, die der Gleichung $F(x,a) = 0$ angehört, ist (in einem gewissen Sinne) aus mehreren verschiedenen Ästen zusammengesetzt, von welchem der eine, dem die Gliedersumme x_r entspricht, durch $x = \varphi(a)$ analytisch ausgedrückt sein mag. Die drei Curven $x = \varphi(a)$, $x = x_r$, $x = x_r + \Delta$, gleichzeitig auf einer und derselben Ebene verzeichnet, werden sich mannigfach durchschneiden, so zwar, dass die $x = \varphi\,(a)$ bald zwischen den beiden andern $x = x_r$, $x = x_r + \Delta$, bald ausserhalb derselben zu liegen kommen wird. Verzeichnet man aber nicht blos den einzigen Ast $x = \varphi(a)$ sondern den Complex aller Äste, welche durch die Gleichung $F(x,a) = 0$ gegeben sind, so wird die Verschlingung der drei

Curven noch complicirter erscheinen und nun bald der eine, bald ein anderer, bald keiner, bald nur ein einziger, bald mehrere verschiedene Äste zwischen $x = x_r$ und $x = x_r + \Delta$ fallen. Um nun zu entscheiden, ob in einem gewissen Bereiche der Ast $x = \varphi(a)$ zwischen oder ausserhalb dieser beiden Grenzlinien liegt, muss man denselben sorgfältig verfolgen und namentlich an den Durchkreuzungsstellen mehrerer Äste seine richtige Fortsetzung aufsuchen und dermassen fortschreiten, bis man an jene Stelle gelangt, an der seine Lage angegeben werden soll.

Das, was hier in der geometrischen Figur geschehen, hat man auch bei dem analytischen Vorgehen zu thun. Der Curvenast $x = \varphi(a)$ lässt sich bei der completen Curve, ähnlich wie bei einem verwickelten Knäul nur an einem Ende oder an einer Schlinge, kurz nun für einen speciellen Werth von a erkennen, und von dieser einen Stelle aus muss man ihn weiter verfolgen. Dabei stösst man aber auf mancherlei Schwierigkeiten und so lange eben nur eine einzige Entwickelungsweise der Wurzel $x = \varphi(a)$ und selbst diese nur in einer beschränkten Anzahl von Gliedern, gegeben durch die Gliedersumme x_r, vorliegt, ist es in der Regel unmöglich, weiter, als bis zu einer bestimmten Grenze vorzudringen. Bei der ersten Verschlingung, der man begegnet, stellt sich das Hinderniss dar.

Anfangs nämlich findet sich zwischen den beiden Grenzlinien der Ast $x = \varphi(a)$ und zwar nur dieser allein vor. Im weiteren Fortschreiten auf den beiden Grenzlinien kann nun der dazwischen gelegene Ast plötzlich hinaustreten oder ein oder mehrere andere Äste hineintreten. Tritt der Ast aus dem Zwischenraume zwischen x_r und $x_r + \Delta$ hinaus, so befindet sich nun gar kein Ast der Curve $F(x, a) = 0$ mehr dazwischen und dies wird sich nur in der Weise zutragen können, dass der hinaustretende Ast $x = \varphi(a)$ eine der beiden Grenzlinien $x = x_r$ oder $x = x_r + \Delta$ schneidet, was sich an dem betreffenden Substitutionsresultate $F(x_r, a)$ oder $F(x_r + \Delta, a)$ dadurch analytisch zu erkennen gibt, dass für eben diesen Werth von a, für welchen das Hinaustreten stattfindet, eine dieser beiden Functionen von a verschwindet und dabei das Zeichen wechselt. In einer anderen, als der angedeuteten Weise ist ein Verschwinden des Astes $x = \varphi(a)$ aus dem Intervalle zwischen den beiden Grenzlinien nicht möglich, wenn die Gleichung, wie hier vorausgesetzt, nach x und a rational ist, weil das Imaginärwerden der Wurzel $\varphi(a)$, welches gleichfalls ein Verschwinden des Curvenastes zur Folge haben könnte, nur dann erfolgen kann, wenn mit ihr zugleich eine andere Wurzel imaginär wird, nachdem sich beide im letzten Momente des Reellseins vereinigt haben. Eine solche Vereinigung aber setzt voraus, dass wenigstens im letzten Momente des Reellseins von $\varphi(a)$ mehr als eine einzige reelle Wurzel der Gleichung zwischen den beiden Grenzen x_r und $x_r + \Delta$ befindet, wofür ein ganz untrügliches Zeichen der Analysis besteht.

Treten aber neue Äste zu dem früheren $x = \varphi(a)$ hinzu, wobei genau dieselben Umstände wie beim Austritte von Ästen obwalten, so gibt es kein Mittel mehr, durch das blosse Verfolgen von Grenzlinien und aus der Anzahl der dazwischen fallenden Äste anzugeben, ob der Ast $x = \varphi(a)$ noch reell ist oder nicht, so lange man nicht die Sonderung der verschiedenen Äste bewerkstelligt oder zu anderen Hilfsmitteln greift, und es hört demnach auch die Möglichkeit auf, den Ast $x = \varphi(a)$ weiter zu verfolgen, oder wohl gar an einer späteren Stelle, wo wieder nur ein einziger Curvenast zwischen den beiden Grenzlinien liegt, zu entscheiden, ob dies eben der $x = \varphi(a)$ oder ein anderer sei.

Das Gesagte dürfte wohl einiges Licht werfen auf die Natur des vorliegenden Problemes.

§. 2.

Aus dem Vorhergehenden geht klar hervor, dass die Bestimmung des Ergänzungsgliedes füglich in zwei getrennte Untersuchungen zerfällt werden könne. Der erste Theil dieser Untersuchungen hat nur zum Zwecke, für einen ganz speciellen Werth von a, der sich eben hiezu eignet, die eine Wurzel $\varphi(a)$ durch die beiden Grenzwerthe x_r und $x_r + \Delta$ von allen übrigen zu isoliren; der zweite hingegen hat vorzüglich die Ermittelung des giltigen Intervalles von a zur Aufgabe, welches alle jene Werthe von a in sich schliesst, für welche zwischen den beiden Grenzen x_r und $x_r + \Delta$ die Wurzel $\varphi(a)$ einzig und allein fällt. Hier wollen wir uns zunächst mit dem ersten Theile dieser Untersuchungen beschäftigen.

Vor allem anderen handelt es sich um die Angabe jenes Werthes von a, der dieser Untersuchung zu Grunde gelegt werden soll und den wir ein für allemal mit a_∞ bezeichnen wollen. Es ist ein bekannter Satz, dass bei jedem geordneten Polynome für gewisse extreme Werthe der darin erscheinenden Buchstabengrösse, gleichgiltig, ob dasselbe ein geschlossenes oder ein unendliches ist, das Anfangsglied einen bei weitem grösseren numerischen Werth erlangt, als alle Folgeglieder. Diese extremen Werthe von a sind bei einem absteigend nach Potenzen von a geordneten Polynome die numerisch grossen, also namentlich die im Bereiche des Unendlichen liegenden $+\infty$ und $-\infty$, hingegen bei einem aufsteigend geordneten die numerisch kleinen Werthe von a, also namentlich die abermals im Bereiche des unendlich Kleinen liegenden: $+\frac{1}{\infty}$ und $-\frac{1}{\infty}$. Für solche Werthe von a, die wir immer mit $\pm a_\infty$ bezeichnen wollen, um den Unterschied zwischen absteigender und aufsteigender Entwickelung nicht immer erwähnen zu müssen, genügt es, nur das Anfangsglied zu berücksichtigen, um über den Werth des ganzen Polynomes, namentlich über sein Vorzeichen Aufschluss zu erhalten.

Diese Werthe sind es auch, für welche die Trennung der Wurzel $x = \varphi(a)$ von allen übrigen am leichtesten gelingt, und auch die Bestimmung der Function Δ keiner Schwierigkeit unterliegt. Man wird die Aufgabe gelöst haben, wenn man Δ dermassen wählt, dass die beiden für $x = x_r$ und die zweite Substitution $x = x_r + \Delta$ aus $F(x, a)$ hervorgehenden Substitutionsresultate, die beziehungsweise mit $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ angedeutet sein sollen, in ihren Anfangsgliedern verschieden ausfallen und diese namentlich für den betrachteten extremen Werth a_∞ entgegengesetzte Zeichen erlangen, während das derivirte Polynom $F'(x, a)$ für diese beiden Substitutionen und auch für alle zwischenliegenden übrigen stets einerlei Anfangsglied im Substitutionsresultate liefert, denn dann liegt für den betrachteten extremen Werth a_∞ zwischen x_r und $x_r + \Delta$, den bekannten, für Zahlengleichungen geltenden Sätzen zufolge, eine einzige reelle Wurzel, und zwar gerade die $\varphi(a)$, deren Entwickelung mit der Gliedersumme x_r beginnt, wie später noch umständlicher nachgewiesen werden soll.

Die hier festgestellte Bedingung ist keineswegs im Stande, die Function Δ völlig zu bestimmen; sie lässt vielmehr der willkürlichen Wahl noch weite Schranken. In der That denkt man sich die Function Δ genau in derselben Weise, wie die Gliedersumme x_r entwickelt und geordnet, so bezieht sich die hier aufgestellte Bedingung nur auf das Anfangsglied dieser Entwickelung, welches wir mit θa^δ bezeichnen wollen. Fügt man diese mit θa^δ beginnende Reihe Δ zu x_r hinzu und bildet nun für $x = x_r + \Delta$ das aus dem Gleichungspolynome $F(x, a)$ hervorgehende Substitutionsresultat, so sind drei verschiedene Fälle denkbar:

1. δ ist der Rangordnung nach früher als der Exponent ξ_{r+1} des unmittelbar auf x_r folgenden, noch nicht entwickelten Gliedes $h_{r+1}\, a^{\xi_{r+1}}$, d. h. es ist $\delta > \xi_{r+1}$, wenn die absteigende,

hingegen $\delta < \xi_{r+1}$, wenn die aufsteigende Entwickelungsform vorliegt. In diesem Falle ist bekanntermassen das erste nicht verschwindende Glied des Substitutionsresultates:

$$(76) \qquad \theta \mathfrak{H}_r' a^{\mathfrak{A}_r'+\delta} \text{ oder } \frac{1}{s!} \theta^s \mathfrak{H}_r^{(s)} a^{\mathfrak{A}_r^{(s)}+s\delta}$$

oder erscheint auch wohl als Summe von zweien oder mehreren solchen Ausdrücken. Hier bedeutet in der schon zu wiederholten Malen angewendeten Bezeichnungsweise $\mathfrak{H}_r' a^{\mathfrak{A}'_r}$ das Anfangsglied von $\mathfrak{P}_r'$, $\mathfrak{H}_r^{(s)} a^{\mathfrak{A}_r^{(s)}}$ jenes von $\mathfrak{P}_r^{(s)}$. Die Ableitung dieser Ausdrücke, so wie die genaue Angabe, wann die eine und wann die andere Form auftritt, kann hier füglich übergangen werden; wir verweisen den Leser, dem dies unklar sein sollte, auf unsere frühere Abhandlung in dem XII. Bande der Denkschriften der mathem.-naturw. Classe und namentlich auf die §§. 8, 9, 10, 11, 19, 20.

2. Es ist $\delta = \xi_{r+1}$ und demnach das Anfangsglied des Substitutionsresultates $\mathfrak{Q}_r$:

$$(77) \qquad (\mathfrak{H}_r' + \theta \mathfrak{H}_r') a^{\mathfrak{A}_r}$$

3. δ ist der Rangordnung nach später als ξ_{r+1}, d. h. $\delta < \xi_{r+1}$ bei der absteigenden, $\delta > \xi_{r+1}$ bei der aufsteigenden Entwickelung. In diesem Falle ist das Anfangsglied von $\mathfrak{Q}_r$:

$$(78) \qquad \mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}$$

also von jenem in $\mathfrak{P}_r$ nicht verschieden.

Betrachtet man nun die drei erhaltenen Formen des Anfangsgliedes von $\mathfrak{Q}_r$ (76), (77), (78) und vergleicht sie mit dem Anfangsgliede $\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}$ von $\mathfrak{P}_r$, so überzeugt man sich alsogleich, dass nur die beiden ersteren (77), (78) davon verschieden ausfallen und dass man durch eine zweckmässige Wahl der Grösse θ denselben stets das verlangte entgegengesetzte Vorzeichen ertheilen könne. Hat man über θ und δ entsprechend verfügt, so können die übrigen auf θa^δ folgenden Glieder von Δ ganz nach Belieben gewählt werden. Man sieht hieraus, wie schon früher behauptet worden, dass es unendlich viele verschiedene Functionen von a gebe, welche die Rolle des Ergänzungsgliedes zu übernehmen im Stande sind; alle bisher geforderten Eigenschaften beziehen sich nur auf das Anfangsglied θa^δ. Wir wollen sie später noch aufmerksamer betrachten, jetzt aber zunächst auch die andere Bedingung für Δ in Erwägung ziehen, welche besagt, dass die Anfangsglieder der für $x = x_r$, $x = x_r + \Delta$ und auch für alle Zwischensubstitutionen aus dem derivirten Polynome $F'(x, a)$ hervorgehenden Substitutionsresultate einerlei Anfangsglied besitzen sollen.

Stellen wir abermals Δ in seiner entwickelten Gestalt auf, beginnend mit dem Anfangsgliede θa^δ, und substituiren den Werth $x_r + \Delta$ anstatt x in das derivirte Polynom $F'(x, a)$, bezeichnen ferner mit $h_p a^{\xi_p}$ jenes Glied der Gliedersumme x_r, für welches die vollständige Isolirung der entwickelten Wurzel erfolgt ist. Das isolirende Glied $h_p a^{\xi}{}_p$ ist meistentheils das Anfangsglied $h_0 a^{\xi_0}$, bisweilen ein späteres; hier wo, der schon anfangs gemachten Voraussetzung nach, x_r eine isolirende Gliedersumme vorstellt, aber jedenfalls in dieser Gliedersumme x_r enthalten. Das isolirende Glied $h_p a^{\xi_p}$ gibt sich bei der Entwickelung der Gliedersumme x_r unzweifelhaft zu erkennen dadurch, dass von diesem angefangen, alle späteren Folgeglieder $h_{p+1} a^{\xi_{p+1}}, h_{p+2} a^{\xi_{p+2}}, \ldots h_r a^{\xi_r}$ in der Gliedersumme x_r durch Gleichungen des ersten Grades ermittelt werden, während alle vorhergehenden und $h_p a^{\xi_p}$ selber nur durch Betrachtung einer Buchstabengleichung höheren Grades erhalten wurden. Eine andere, hiemit im innigen Zusammenhange stehende, hier für uns noch wichtigere Erscheinung, vermittelst deren sich gleichfalls das isolirende Glied $h_p a^{\xi_p}$ erkennen lässt, besteht darin, dass von diesem Momente an das Anfangsglied $\mathfrak{H}'_p a^{\mathfrak{A}'_p}$ des aus $F'(x, a)$ hervorgehenden Substitutionsresultates $\mathfrak{P}'_p$ fortwährend dasselbe bleibt, auch für alle späteren Indices: $p+1, p+2, \dots r$, womit eben erwiesen ist, dass das Glied $h_p a^{\xi_p}$ denjenigen Bedingungen widerspricht, welche es erfüllen müsste, um als ein Entwickelungsglied einer Wurzel der derivirten Gleichung $F'(x, a) = 0$ zu gelten. Da also das isolirende Glied $h_p a^{\xi_p}$, in der Gliedersumme x_p das letzte, der Gleichung $F'(x, a) = 0$ in der Weise widerspricht, dass nur eine an ihm angebrachte Änderung der Grössen ξ_p und h_p keineswegs aber das Hinzufügen anderer, der Rangordnung späterer Glieder das Nullwerden des Anfangsgliedes $\mathfrak{H}'_p a^{\mathfrak{A}'_p}$ herbeiführen kann, welches sonst unterbleibt; so ist es hier klar, dass δ jedenfalls der Rangordnung später als ξ_p, d. h. bei der absteigenden Entwickelung $\delta < \xi_p$, bei der aufsteigenden hingegen $\delta > \xi_p$ gewählt werden müsse, wenn die beiden für $x = x_r$ und $x = x_r + \Delta$ aus $F'(x, a)$ hervorgehenden Substitutionsresultate $\mathfrak{P}'_r$ und $\mathfrak{Q}'_r$ in ihrem Anfangsgliede $\mathfrak{H}'_p a^{\mathfrak{A}'_p}$ übereinstimmen sollen. Thut man dies wirklich, so werden nicht nur für diese beiden Substitutionen: $x = x_r$ und $x = x_r + \theta a^\delta + \dots$, sondern auch für alle dazwischenliegenden, die alle in der einzigen Form $x = x_r + \theta a^\delta$ enthalten sind, wenn man dem Coëfficienten θ alle möglichen zwischen 0 und θ liegenden Zwischenwerthe ertheilt, die aus $F'(x, a)$ hervorgehenden verschiedenen Substitutionsresultate einerlei Anfangsglied $\mathfrak{H}'_p a^{\mathfrak{A}'_p}$ besitzen.

Halten wir nun die so eben abgeleitete Bedingung für δ mit der früheren zusammen, so sieht man, dass δ seinem Werthe nach zwischen ξ_p und ξ_{r+1} fallen oder mit ξ_{r+1} übereinstimmen müsse, wenn den beiden Bedingungen entsprochen werden soll. Es ist jetzt noch übrig, die für den Coëfficienten θ bestehenden Bedingungen genauer kennen zu lernen, und wir wenden uns desshalb wieder zu den beiden früher aufgestellten Hauptformen (76) und (77), die für dermassen gewählte δ gelten können, wobei noch zu bemerken ist, dass von den beiden unter (76) aufgeführten nur die erste giltig sei, da die zweite für solche Werthe von δ am Platze ist, die dem ξ_p der Rangordnung nach vorhergehen. Beginnen wir mit jenem Falle, in welchem δ von ξ_{r+1} verschieden und somit die erste der beiden Formen (76) das Anfangsglied des für $x = x_r + \Delta$ hervorgehenden Substitutionsresultates $\mathfrak{Q}_r$ darstellt und vergleichen hiemit das Anfangsglied $\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}$ von $\mathfrak{P}_r$, das der anderen Substitution $x = x_r$ angehört.

Sollen für den extremen Werth $\pm a_\infty$ diese beiden Anfangsglieder entgegengesetzte Zeichen tragen, so muss offenbar der Quotient:

$$\frac{\theta \mathfrak{H}_r'}{\mathfrak{H}_r} (\pm a_\infty)^{\mathfrak{A}_r' - \mathfrak{A}_r + \delta}$$

das Zeichen *minus* erhalten, folglich dem Coëfficienten θ das entgegengesetzte Zeichen von

(79) $$\frac{\mathfrak{H}_r'}{\mathfrak{H}_r} (\pm a_\infty)^{\mathfrak{A}_r' - \mathfrak{A}_r + \delta}$$

ertheilt werden. Der numerische Werth von θ unterliegt aber hier keiner Beschränkung.

Wählt man hingegen $\delta = \xi_{r+1} = \mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}'_r$, so ist die Form (77) giltig für das Anfangsglied von $\mathfrak{Q}_r$. Sollen nun für den extremen Werth $\pm a_\infty$ die beiden Anfangsglieder von $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ entgegengesetzte Zeichen erhalten, so muss der Quotient derselben:

(80) $$1 + \theta \frac{\mathfrak{H}_r'}{\mathfrak{H}_r}$$

negativ sein, und da bekanntermassen der Coëfficient h_{r+1} des nächsten auf x_r folgenden Gliedes gegeben ist durch die Gleichung $h_{r+1} = -\frac{\mathfrak{H}_r}{\mathfrak{H}_r'}$, so kann man in (80) den Bruch $\frac{\mathfrak{H}_r'}{\mathfrak{H}_r}$ durch den ihm gleichen: $-\frac{1}{h_{r+1}}$ ersetzen und gelangt dermassen zur Bedingung, dass

$$1 - \frac{\theta}{h_{r+1}} < 0 \tag{81}$$

sein soll. Dieser Bedingung gemäss ist daher das Zeichen von θ jenem von h_{r+1} gleich, sein numerischer Werth aber grösser, sonst aber nach Belieben zu wählen.

Diese sind die Bedingungen, die man in dem einen und in dem anderen Falle zu erfüllen hat. Es drängt sich hier die Frage auf: Welcher Wahl von δ soll man den Vorzug geben? und ist nicht schwer, sie zu beantworten. Da zunächst nur die extremen Werthe von a und die an sie grenzenden endlichen Nachbarwerthe in Betracht kommen, für die der numerische Werth von θa^{δ} desto kleiner ausfällt, je eine spätere Rangordnung dieses Glied δ einnimmt, mit jeder unnützen Vergrösserung des numerischen Werthes von Δ auch die Ungenauigkeit zunimmt, so ist schon von diesem Gesichtspunkte aus der Werth $\delta = \xi_{r+1} = \mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}_r'$ der zweckmässigste. Es lässt sich aber diese Wahl von δ noch aus einem anderen Grunde als die zweckmässigste bezeichnen, denn in diesem Falle besteht für den Coëfficienten θ die Bestimmungsrelation (81), die den extremen Werth $\pm a_\infty$ nicht in sich enthält. Einerlei Werth von θ wird daher sowohl für $+a_\infty$ als für $-a_\infty$ giltig sein, wenn er nur die Relation (81) erfüllt. Nicht so verhält es sich, wenn man δ von ξ_{r+1} verschieden nimmt, denn in diesem Falle hat man dem Coëfficienten θ das entgegengesetzte Zeichen zu ertheilen von jenem, welches der Ausdruck (79) besitzt und das gelegentlich für $+a_\infty$ ein anderes wird als für $-a_\infty$, und namentlich dann, wenn der Exponent $\mathfrak{A}_r' = \mathfrak{A}_r + \delta$ keine gerade Zahl ist. Gegen diese wichtigen Gründe tauchen zwar für den ersten Anblick folgende Gegengründe auf: Die Wahl $\delta = \xi_{r+1} = \mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}_r'$ setzt eigentlich die vollkommene Bestimmung des Folgegliedes $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ voraus: Der Exponent ξ_{r+1} muss gesucht werden, weil dieser noch unbekannte Zahlwerth dem δ ertheilt werden soll, aber auch h_{r+1} ist zu suchen, denn aus ihm ergibt sich der Werth von θ, der Relation (81) zufolge, einfach dadurch, dass man sein Zeichen unverändert lässt und nur seinen numerischen Werth um eine ganz beliebige Grösse erhöht. Hingegen erfordert die Wahl $\delta = \xi_r$ gar keine Rechnung, da ξ_r schon bekannt ist, und zur Bestimmung von θ braucht man nur das Zeichen von (79) zu kennen, also nur das noch unbekannte Zeichen von $\mathfrak{H}_r$ und den Werth von $\mathfrak{A}_r$ zu ermitteln. Allein die Bestimmung des Zahlwerthes von $\mathfrak{H}_r$ ist das Einzige, was man dabei ersparen würde, und erfordert fast nicht mehr Mühe, als die blosse Bestimmung seines Zeichens. Ist aber der Zahlwerth dieser Grösse ermittelt, somit das Anfangsglied $\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}$ von $\mathfrak{P}_r$ bekannt, so erheischt die Bestimmung von $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ abermals keine grössere Rechnung als jene des Zeichens von (79), nur dass man auch den Zahlwerth des Bruches $\frac{\mathfrak{H}_r}{\mathfrak{H}_r'}$ suchen muss, eine Mühe, die nicht der Erwähnung werth ist. Überdies fordert die später einzuleitende Bestimmung des giltigen Intervalles von a jedesmal, dass die Substitutionsresultate $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ vollständig gebildet werden, womit eben die zur Bestimmung des Folgegliedes $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ erforderliche Rechnung bis auf eine einfache Division zweier Monome vollendet ist. Nach all' dem Gesagten ist wohl kein Zweifel mehr übrig, dass die Wahl $\delta = \xi_{r+1}$ die zweckmässigste sei.

Es geht hieraus folgende allgemeine Regel zur Bestimmung des Ergänzungsgliedes $\Delta = \theta a^{\delta}$ hervor: Man führe die bekannten Rechnungen aus, die das nächste Folgeglied

$h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ liefern, und zuletzt vergrössere man den numerischen Werth des Coëfficienten h_{r+1} ohne Rücksicht auf sein Zeichen um eine nach Belieben oder anderen Bedingungen entsprechend gewählte Grösse; so hat man das Anfangsglied von Δ. Man kann nun nach Willkür dieses Monom $\theta a^{\xi_{r+1}}$ für Δ selber nehmen, und dies dürfte wohl meistentheils die zweckmässigste und einfachste Wahl sein, oder man kann beliebige Glieder von einer späteren Rangordnung und in beliebiger Anzahl hinzufügen, wohl auch ganz beliebige Functionsformen erwählen, wenn sie nur die Eigenschaft besitzen, bei der geordneten Entwickelung mit dem Anfangsgliede $\theta a^{\xi_{r+1}}$ versehen zu sein.

Wir wollen hier noch ein Verfahren erwähnen, das sich bei einigermassen weiter fortgeführter Entwickelung mit Erfolg anwenden lässt, um das Ergänzungsglied als ein Polynom zu finden, welches einen viel höheren Grad von Genauigkeit verstattet. Es ist schon bei der Bestimmung der Folgeglieder bemerkt worden, dass bei weiter fortgesetzter Entwickelung sich dieselben gruppenweise ermitteln lassen und die Anzahl der in einer Gruppe enthaltenen Glieder in einem raschen Verhältnisse zunimmt. Dieses Verfahren tritt in Wirksamkeit, sobald die Entwickelung der Wurzel so weit vorgeschritten ist, dass dadurch nicht blos die Trennung derselben von allen Wurzeln der ersten derivirten Gleichung $F'(x, a) = 0$, sondern auch von allen der zweiten $F''(x, a) = 0$ bewerkstelligt worden, mit anderen Worten, wenn die Anfangsglieder von $\mathfrak{P}_r'$ und $\mathfrak{P}_r''$ unveränderliche Werthe erlangt haben: $\mathfrak{H}_p' a^{\mathfrak{A}_p'}$ und $\mathfrak{H}_q'' a^{\mathfrak{A}_q''}$. In diesem Falle kann man die Entwickelung des Quotienten $\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_r'}$ bis exclusive zu dem mit dem Exponenten: $\mathfrak{A}_q'' - 3\mathfrak{A}_p' + 2\mathfrak{A}_r$ versehenen Gliede fortsetzen und erhält so eine Gruppe von mehreren richtigen Folgegliedern mit einem einzigen Schritte. Genau dasselbe Verfahren lässt sich anwenden, um das Ergänzungsglied in Gestalt eines mehrgliederigen Ausdruckes zu erhalten. Bezeichnet man nämlich mit $\xi_{r+s} = \xi_{r+1} \pm 2i$ jene zwischen ξ_r und $\mathfrak{A}_q'' - 3\mathfrak{A}_p' + 2\mathfrak{A}_r$ fallende Zahl, die von $\xi_{r+1} = \mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}_p'$ um eine gerade ganze Zahl $\pm 2i$ differirt und dem genannten Grenzwerthe: $\mathfrak{A}_q'' - 3\mathfrak{A}_p' + 2\mathfrak{A}_r$ möglichst nahe kommt; entwickelt nun den Quotienten $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_r'}$ in den Anfangsgliedern: $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2} a^{\xi_{r+2}} + \ldots + h_{r+s} a^{\xi_{r+s}}$, wobei der Coëfficient h_{r+s} im letzten Gliede entweder den Werth Null oder einen significativen Werth erlangen kann, und fügt nun zu dem so gewonnenen Ausdrucke noch ein Glied $\theta a^{\xi_{r+s}}$ hinzu, dessen Coëfficient θ dasselbe Vorzeichen trägt, wie der Coëfficient h_{r+1} im ersten Gliede, dessen numerischer Werth aber ganz nach Belieben gewählt sein kann; so ist das solchergestalt hervorgehende Polynom:

$$(82) \qquad h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2} a^{\xi_{r+2}} + \ldots\ldots + (h_{r+s} + \theta) a^{\xi_{r+s}}$$

ein brauchbarer Werth für das Ergänzungsglied Δ. In der That führt man die Substitution $x = x_r + \Delta$ in das Gleichungspolynom aus, so erhält man, in Folge der eintretenden Reduction auf Null in den höchsten Gliedern, das Anfangsglied von $\mathfrak{Q}_r$ in der Gestalt: $\theta \mathfrak{H}'_r a^{\mathfrak{A}'_r + \xi_{r+s}}$. Da nun den gewählten Bezeichnungen gemäss $\xi_{r+s} = \xi_{r+1} \pm 2i = \mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}'_r \pm 2i$, und folglich $\mathfrak{A}'_r + \xi_{r+s} = \mathfrak{A}_r \pm 22$ ist, so besteht für das Anfangsglied von $\mathfrak{Q}_r$ auch die Form: $\theta \mathfrak{H}_r' a^{\mathfrak{A}'_r \pm 2i}$. Vergleicht man nun dasselbe mit dem Anfangsgliede $\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}$ von $\mathfrak{P}_r$ und erinnert sich, dass θ einerlei Vorzeichen mit $h_{r+1} = -\frac{\mathfrak{H}_r}{\mathfrak{H}_r'}$ trägt, also $\theta \mathfrak{H}_r'$ das entgegengesetzte Zeichen von $\mathfrak{H}_r$ besitzt; so sieht man alsogleich, dass die beiden Anfangsglieder $\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}$ und $\theta \mathfrak{H}'_r a^{\mathfrak{A}'_r \pm 2i}$ sowohl für positive, als für negative Werthe von a entgegengesetzte Zeichen besitzen, und demnach der mehrgliedrige Ausdruk (82) für die beiden extremen Werthe: $+a_\infty$ und $-a_\infty$ die Bedingungen für das Ergänzungsglied erfüllt. Es ist wohl überflüssig, zu bemerken, dass der anderen geforderten Bedingung, der zufolge die Substitutionsresultate $\mathfrak{P}'_r$ und $\mathfrak{Q}'_r$ einerlei Anfangsglied erhalten sollen, hier gleichfalls schon von selbst Genüge geleistet sei. Es versteht sich auch von selbst, dass man zu dem Ausdrucke (82) nach Belieben noch Glieder von späterer Ordnung hinzufügen könne, ohne dass dadurch eine Änderung im Anfangsgliede des Substitutionsresultates $\mathfrak{Q}_r$ erfolgt, und dass alle diese unendlich vielen verschiedenen Functionen brauchbare Formen des Ergänzungsgliedes seien. Man wird aber meistentheils dem Ausdrucke (82) den Vorzug einräumen, weil er die einfachste Gestalt besitzt und daher die Rechnungen nicht unnützer Weise complicirt.

Es ist nur noch übrig, den Beweis zu liefern, dass die für $a = \pm a_\infty$ zwischen x_r und $x_r + \Delta$ liegende exacte Wurzel eben diejenige sei, welcher die Gliedersumme x_r eigen ist. Dies unterliegt hier keiner Schwierigkeit. Bildet man nämlich für die verschiedenen Wurzeln x der Gleichung $F(x, a) = 0$ die Differenz $x - x_r$ und berechnet den numerischen Werth derselben für die extremen Werthe $\pm a_\infty$ von a, so erhält dieselbe nur für eine einzige, und zwar für die mit der Gliedersumme x_r beginnende Wurzel einen numerisch kleineren Werth als Δ, für alle übrigen aber durchaus numerisch grössere Werthe, und es kann somit kein Zweifel mehr obwalten, dass die zwischen x_r und $x_r + \Delta$ fallende Wurzel für die extremen Werthe $\pm a_\infty$ eben diejenige sei, deren Entwickelung die Gliedersumme x_r eigenthümlich zukommt.

§. 3.

Bisher wurde die Bestimmung des Ergänzungsgliedes Δ nur bezüglich der extremen Werthe von a zum Gegenstande der Betrachtung gemacht. Jetzt wollen wir uns aber zu den anderen und endlichen Werthen von a wenden und untersuchen, für welche Intervalle von a die nach den Regeln des vorhergehenden Paragraphes bestimmte Function Δ die Bedingungen erfüllt, welche für das Ergänzungsglied aufgestellt wurden. Die im Vorhergehenden untersuchten Bedingungen waren nur im Stande, den Werth des Exponenten ∂ und das Zeichen des Coëfficienten θ im Anfangsgliede θa^∂ des Ergänzungsgliedes zu bestimmen; der numerische Werth von θ aber kann nach Belieben, wenn nur grösser als h_{r+1}, gewählt werden. Im Nachfolgenden wollen wir voraussetzen, dass man über diese willkürlichen Grössen in Δ bereits in einer bestimmten Weise verfügt habe, so zwar, dass Δ eine vollkommen bestimmte, nur noch die einzige Buchstabengrösse a enthaltende Function darstellt, und nun untersuchen, in welchem Intervalle von a dieselbe die Rolle des Ergänzungsgliedes zu übernehmen im Stande sei.

Für jeden bestimmten Zahlwerth von a verwandeln sich sowohl die Grenzen x_r und $x_r + \Delta$, als auch die ihnen entsprechenden aus $F(x, a)$ hervorgehenden Substitutionsresultate $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ in bestimmte Zahlen. Nur dann, wenn die Vorzeichen dieser beiden Zahlen $\mathfrak{P}_r$, $\mathfrak{Q}_r$ entgegengesetzt sind, ist der Werth von a in dem Intervalle von a enthalten, welches dem erwählten Ergänzungsgliede Δ entspricht. Daraus aber, dass die Vorzeichen von $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ entgegengesetzt sind, folgt aber noch keineswegs, dass für diesen speciellen Werth von a das Ergänzungsglied Δ giltig sei, wie dies für die extremen Werthe $\pm a_\infty$ der Fall war, sondern man muss sich noch andere Kennzeichen verschaffen, um diese Frage entscheiden zu können. In der That folgt daraus keineswegs, dass nur eine einzige Wurzel x zwischen den Grenzen enthalten sei, sondern es können deren auch 3, 5,... dazwischen fallen; noch viel weniger ist erwiesen, dass die dazwischen liegende Wurzel eben diejenige sei, der die Gliedersumme x_r

eigen ist. Man ersieht hieraus, dass für endliche Werthe von a die Untersuchung einen anderen und complicirteren Gang nimmt, als bei den extremen Werthen.

Die Untersuchung selbst lässt sich auf zwei verschiedene Weisen durchführen, deren jede ihre eigenen Vortheile gewährt. Diese zwei Untersuchungsweisen sind nicht blos verschieden im Gange der Rechnung, sondern führen auch zu einem verschiedenen Resultate, indem die eine derselben das vollständige Intervall von a genau oder doch in einer beliebigen Annäherung zu liefern im Stande ist, während die andere nur einen Theil des giltigen Intervalles aufzufinden vermag; dafür verstattet die zuletzt erwähnte Methode, Aufschluss zu ertheilen über den Grad der Convergenz bei weiter fortgesetzter Entwickelung der Wurzel, während dies bei der früheren nicht möglich wird. Aus diesem Grunde finden wir uns veranlasst, dieses Problem auf zwei verschiedene Weisen zur Lösung zu bringen. Wir beginnen mit der Auseinandersetzung der ersten Art.

Bei dieser Untersuchungsweise hat man folgende Regel zu befolgen: Man substituire die beiden Grenzen x_r und $x_r + \Delta$ anstatt x in das Gleichungspolynom $F(x, a)$ und bilde die beiden mit $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ bezeichneten Substitutionsresultate. Nun suche man vom extremen Werthe $+a_\infty$ ausgehend und zu den nächstliegenden endlichen Werthen stufenweise vorschreitend, jenen speciellen Zahlwerth von a, für welchen eine der beiden anfangs mit entgegengesetzten Zeichen versehenen Functionen $\mathfrak{P}_r$, $\mathfrak{Q}_r$ ihr Vorzeichen wechselt. $+a_,$ sei dieser Werth; so ist $+a_\infty \ldots\ldots +a_,$ vorläufig ein Intervall von a, über dessen Bereich hinaus sich die Giltigkeit von Δ als Ergänzungsglied nicht erstrecken kann. Ob aber nur ein Theil dieses Intervalles oder das ganze den Bereich der Giltigkeit von Δ als Ergänzungsglied angibt, entscheidet man nun auf folgende Weise: Man sucht, ob das System von zwei Gleichungen $F(x, a) = 0$, $F'(x, a) = 0$, welches schon im Vorhergehenden zur Ermittelung der von Irrationalgrössen herrührenden Unterbrechung der Stetigkeit in den Genüge leistenden Functionen angewendet wurde, eine Auflösung besitzt, bei welcher der Werth von a zwischen $+a_\infty$ und $+a_,$, jener von x aber zwischen die Zahlwerthe von x_r und $x_r + \Delta$ fällt, welche diese zwei Functionen von a annehmen, wenn man anstatt a eben jenen der Auflösung des Systems zukommenden Zahlwerth setzt. Findet sich keine Auflösung dieser Art, so ist das volle Intervall $+a_\infty \ldots\ldots +a_,$ giltig, denn es ist nunmehr gewiss, dass im ganzen Bereiche dieses Intervalles nur eine einzige, und zwar stets dieselbe Wurzel zwischen den Grenzen x_r und $x_r + \Delta$ liegt, nämlich die der Gliedersumme x_r entsprechende $\varphi(a)$. Findet sich hingegen eine oder wohl auch mehrere Auflösungen des oberwähnten Systems, deren Zahlwerthe für a und x in den Bereich zwischen $+a_\infty$ und $+a_,$ einerseits, und zwischen x_r und $x_r + \Delta$ andererseits fallen, so ist man genöthigt, das Intervall $+a_\infty \ldots\ldots +a_,$ zu verkleinern, weil trotzdem dass $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ fortan entgegengesetzte Zeichen behalten, an gewissen Stellen plötzlich nebst der ursprünglich einzigen Wurzel $\varphi(a)$ noch andere, und zwar paarweise in dem Zwischenraume $x_r \ldots\ldots x_r + \Delta$ auftreten, die von Imaginär in Reell übergehen. Der in der Auflösung des Systems erscheinende Werth von a, den wir mit $+a'$ bezeichnen wollen, bestimmt die Ausdehnung des giltigen Intervalles $+a_\infty \ldots\ldots +a'$ von a, das dem Ergänzungsgliede Δ angehört. Sind mehrere verschiedene Auflösungen des Systems vorhanden, welche gleichzeitig im erwähnten Intervalle liegen, so dass ein Zweifel entsteht, welcher von den verschiedenen Werthen von a als Grenzwerth des giltigen Intervalles $+a_\infty \ldots\ldots +a_1$ genommen werden soll, so entscheidet sich dieser Zweifel immer dadurch, dass von ihnen stets derjenige zu nehmen ist, dem das kleinste Intervall von a entspricht, also derjenige Werth von a, der dem extremen $+a_\infty$ am nächsten liegt.

Hat man das für positive Werthe von a geltende Intervall aufgefunden, so schreitet man genau in derselben Weise zur Bestimmung des für negative Werthe von a geltenden: $-a_\infty \ldots\ldots -a''$ vor. Hiemit ist aber die Bestimmung der giltigen Intervalle beendigt.

Wir wollen diesen Vorgang nun näher beleuchten und vollkommen begründen. Vor allem anderen ist klar, dass in dem vorläufig aufgefundenen Intervalle $+a_\infty \ldots\ldots +a'$ und $-a_\infty \ldots\ldots -a''$ die beiden Substitutionsresultate $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ stets entgegengesetzte Zeichen besitzen werden, indem dies für die extremen Werthe $\pm a_\infty$ erwiesenermassen der Fall ist und in der vollen Ausdehnung der erwähnten Intervalle eine Zeichenänderung weder bei $\mathfrak{P}_r$ noch bei $\mathfrak{Q}_r$ eintritt. Daraus aber, dass $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ entgegengesetzte Vorzeichen behalten in der ganzen Ausdehnung dieser Intervalle, folgt aber nur, dass eine ungerade Anzahl von Wurzeln: $1, 3, 5, \ldots$ zwischen x_r und $x_r + \Delta$ enthalten ist, und zwar mindestens eine einzige, wohl auch deren drei, fünf an der Zahl u. s. w. Nur für die extremen Werthe $\pm a_\infty$ ist es erwiesen, dass nur eine einzige Wurzel zwischen x_r und $x_r + \Delta$ fällt. Beim Übergange von den extremen Werthen a_∞ zu den endlichen können aber andere Wurzeln paarweise zu der ursprünglichen $\varphi(a)$ hinzutreten. Überlegen wir etwas genauer, in welcher Weise dieses Hinzutreten anderer Wurzeln paarweise erfolgen könne. a' sei der specielle Werth von a, für welchen dies stattfindet, so zwar, dass für $a' + \varepsilon$, unter ε eine sehr kleine positive oder negative Grösse und unter $a' + \varepsilon$ ein im Intervalle $+a_\infty \ldots\ldots +a'$ liegender Werth von a verstanden, noch immer nur eine einzige Wurzel x zwischen x_r und $x_r + \Delta$ fällt, während für den im angrenzenden Intervalle liegenden Werth $a' - \varepsilon$ schon drei oder fünf Wurzeln u. s. w. zwischen x_r und $x_r + \Delta$ enthalten sind. Da vorausgesetztermassen a' im Intervalle $+a_\infty \ldots\ldots +a_1$ oder $-a_\infty \ldots\ldots -a_2$ liegt und somit $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ für a' von Null verschieden sind, so treten offenbar die paarweise hinzugekommenen neuen Wurzeln plötzlich in der Mitte zwischen x_r und $x_r + \Delta$ auf, was nur in der einzigen Weise denkbar ist, dass diese Paare von Wurzeln für $a' + \varepsilon$ noch imaginär waren und für a' gleiche und reelle Werthe erhalten; kurz die neu hinzugetretenen Wurzeln können nicht durch einen stetigen Übertritt, sondern nur durch ein unstetiges Überspringen in den Zwischenraum $x_r \ldots\ldots x_r + \Delta$ gelangen.

Der Werth a' und der correspondirende gleiche Werth dieser paarweise reell gewordenen Wurzeln muss daher nach den früher entwickelten Vorschriften gefunden werden können, welche die in den Genüge leistenden Functionen erscheinenden Irrationalgrössen aufzudecken bestimmt sind. Findet sich kein Werth von a und x, der dem Systeme $P = 0$, $\frac{dP}{dx} = 0$ Genüge leistet und innerhalb $x_r + \Delta$ in dem Intervalle $+a_\infty \ldots\ldots +a_1$ oder $-a_\infty \ldots\ldots -a_2$ befindlich ist, so ist auch die Unmöglichkeit des plötzlichen Auftauchens neuer Wurzeln durch eine Unterbrechung der Stetigkeit erwiesen und es unterliegt auch keinem Zweifel, dass in der vollen Ausdehnung der erwähnten Intervallen von a die entgegengesetzten Vorzeichen von $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ nur auf eine einzige zwischen x_r und $x_r + \Delta$ fallende Wurzel der Gleichung $P = 0$ hindeuten und diese daher nothwendig die $\varphi(a)$ sein müsse, da für den extremen Werth $\pm a_\infty$ dies unzweifelhaft nachgewiesen ist.

Es ist wohl kaum nothwendig zu bemerken, dass der eben angeführte Beweis zunächst nur gelte, wenn x_r und $x_r + \Delta$ in den erwähnten Bereichen keine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden, denn in jenen Fällen, in welchen eine Unterbrechung der Stetigkeit stattfindet, müsste man das Intervall stückweise untersuchen, so dass in einem jeden einzelnen Theile keine Unstetigkeit mehr besteht. Bei den von uns erwählten Functionsformen ist diese Störung nicht vorhanden, denn x_r ist eine Summe von Gliedern von der Form $h a^{\frac{\varepsilon}{\,}}$ und kann daher nur für

$a = 0$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden. Dieser Werth $a = 0$ findet nur bei der aufsteigenden Entwickelung eine Anwendung, und in diesem Falle trennt man schon von vorne her das Intervall in zwei Theile, deren eines die positiven, das andere die negativen Werthe von a enthält. Der Werth $a = 0$ selber fällt aus dem Bereiche der Untersuchung so zu sagen heraus und an seine Stelle treten die unendlich kleinen Grössen $+\frac{1}{\infty}$ und $-\frac{1}{\infty}$. Genau dasselbe gilt für die zweite Grenze $x_r + \Delta$, so lange man, wie gewöhnlich, Δ als ein Monom oder auch als Polynom mit Gliedern von der Form $h\,a^{\xi}$ erwählt und selbst in jenen selteneren Fällen, in welchen man für Δ eine andere Functionsform, z. B. die eines algebraischen Bruches annimmt mit einem Polynome im Nenner, das durch sein Nullwerden immer eine Unterbrechung der Stetigkeit herbeiführen würde, dehnt man das Intervall von a nie über den Bereich der Stetigkeit von Δ aus.

Das Gesagte dürfte vollkommen hinreichen zur Begründung des obigen Verfahrens. Nur Betreff der praktischen Ausführung der Untersuchungen sind noch einige Bemerkungen am Platze. Da x_r und $x_r + \Delta$, wie eben erwähnt, niemals unstetig zu werden pflegen im Bereiche der brauchbaren Werthe von a, so sind auch $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ stetige Functionen, da das Gleichungspolynom $F(x, a)$, wie bei allen Untersuchungen in diesem Abschnitte vorausgesetzt wird, eine rationale und ganze Function ist, die weder nach x noch nach a für sich einer Unterbrechung der Stetigkeit unterliegt. Hieraus geht hervor, dass man nur bei $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ jene Zeichenänderungen zu berücksichtigen hat, die beim stetigen Durchgange durch Null eintreten können, d. h. man hat nur die Gleichungen $\mathfrak{P}_r = 0$ und $\mathfrak{Q}_r = 0$ zu betrachten und die zunächst dem extremen Werthe $\pm a_\infty$ liegende Wurzel derselben zu ermitteln. Da diese Gleichungen zu den numerischen gehören, so ist diese Bestimmung der Wurzeln $+a_1$, $-a_2$ in der bekannten Weise zu bewerkstelligen. Mit dieser meist nur in einer sehr rohen Annäherung erforderlichen Auflösung sind die Werthe $+a_1$ und $-a_2$ und die Intervalle $+a_\infty \ldots . + a_1$ und $-a_\infty \ldots . - a_2$ gefunden. Die noch übrig bleibende Untersuchung, ob diese Intervalle verkleinert werden sollen oder nicht, erfordert fast gar keine Rechnung, wenn von einer früheren Untersuchung her, welche die Ermittelung der in den Wurzeln x erscheinenden Irrationalgrössen zum Zwecke hat, schon die Auflösungen des Systemes von zwei Gleichungen $P = 0$, $\frac{dP}{dx} = 0$ bekannt sind. Sonst müsste man aber erst zur Auflösung des Systemes von zwei Gleichungen $P = 0$ und $\frac{dP}{dx}$ schreiten; aber die Mühe dieser Rechnung wäre wohl in der Regel im Vergleiche zur Ausbeute wegen der bis jetzt noch immer sehr unbequemen Auflösungsmethoden für Systeme numerischer Gleichungen in einem argen Missverhältnisse, und man wird daher dann lieber die andere Methode, die wir im Eingange angekündigt haben, in Anwendung bringen. Die Auseinandersetzung derselben ist der Gegenstand des nächstfolgenden Paragraphes.

§. 4.

Die zweite Methode, welche zu dem giltigen Intervalle von a führt, wenn das Ergänzungsglied Δ eine vollkommen bestimmte Function von a vorstellt, ist eine Anwendung gewissermassen eine Verallgemeinerung des bekannten von Fourier für numerische Gleichungen angegebenen Verfahrens zur Bestimmung der Grenzen der Wurzeln. Sie setzt aber, um in Anwendung treten zu können, voraus, dass die Entwickelung der Wurzel $\varphi(a)$ schon genügend weit fortgesetzt sei, so zwar, dass die Gliedersumme x_r nicht blos die Isolirung dieser Wurzel von allen Wurzeln der ersten derivirten Gleichung $F'(x, a) = 0$, sondern auch von jenen aller übrigen: $F''(x, a) = 0$, $F'''(x, a) = 0 \ldots$, die durch öfter wiederholte partielle Differentiation des Gleichungspolynomes $F(x, a)$ nach x abgeleitet sind, bewerkstelligt sei. Meistentheils erscheint kein gemeinschaftlicher x enthaltende Factor gleichzeitig im Gleichungspolynome $F(x, a)$ und irgend einem der daraus durch partielle Differentiation nach x abgeleiteten: $F'(x, a)$, $F''(x, a)$, $F'''(x, a), \ldots$ und folglich wird man in der Regel durch hinlänglich weit fortgesetzte Entwickelung zu dem verlangten Punkte gelangen. In den anderen Fällen hingegen, in welchen ein gemeinschaftlicher Factor in $F(x, a)$ und in einer der derivirten Functionen $F'(x, a)$, $F''(x, a,)$ $F'''(x, a), \ldots$ erscheint, lässt sich derselbe nach den bekannten Regeln auffinden, sondern und gleich Null setzen. Die erhaltene Gleichung ist viel einfacher als die $F(x, a) = 0$ und liefert eben jene Wurzeln x, deren beliebig weit fortgesetzte Entwickelung bei der $F(x, a) = 0$ nicht zu der gewünschten Trennung führen konnte, die aber hier ohne alle Schwierigkeit gelingt. Man sieht hieraus, dass der verlangten Bedingung stets Genüge geleistet werden könne, und zwar meistentheils bei der ursprünglichen Gleichung $F(x, a) = 0$ nur durch hinreichend weit fortgesetzte Entwickelung, in gewissen Ausnahmsfällen jedoch, zwar nicht bei dieser, sondern bei einer anderen und viel einfacher gebauten Gleichung, welche dieselbe Wurzel besitzt.

Man erkennt, dass diese Bedingung erfüllt ist, daran, dass von dem Augenblicke an, als die in diesem Sinne isolirende Gliedersumme x_r ermittelt worden, durch ein ferneres Hinzufügen von Folgegliedern die Anfangsglieder $\mathfrak{H}_r' a^{\mathfrak{A}_r'}$, $\mathfrak{H}_r'' a^{\mathfrak{A}_r''}$, $\mathfrak{H}_r''' a^{\mathfrak{A}_r'''}, \ldots$ der Substitutionsresultate $\mathfrak{P}_r'$, $\mathfrak{P}_r''$, $\mathfrak{P}_r''', \ldots$ unverändert bleiben. Dasselbe findet aber auch Statt, wenn man zur isolirenden Gliedersumme x_r andere, ganz nach Belieben gewählte Glieder von späterer Rangordnung hinzufügt und die entsprechenden Substitutionsresultate aus $F'(x, a)$, $F''(x, a)$, $F'''(x, a), \ldots$ ableitet; immer werden die Anfangsglieder dieselben Werthe besitzen wie für $x = x_r$, weil die hinzugefügten Glieder auf die Anfangsglieder keinen Einfluss haben. Dies gilt also auch für den zweiten Grenzwerth $x_r + \Delta$, da die hinzugefügten Glieder Δ stets von einer späteren Rangordnung sind.

Betrachten wir nun die Functionenreihe:

$$F^{(m)}(x,a)\ ,\ F^{(m-1)}(x,a)\ ,\ \ldots\ F''(x,a)\ ,\ F'(x,a)\ ,\ F(x,a), \tag{83}$$

substituiren in dieselbe zuvörderst den einen Grenzwerth $x = x_r$, hierauf den anderen $x = x_r + \Delta$ und bezeichnen die hervorgehenden Substitutionsresultate beziehungsweise mit:

$$\begin{matrix} \mathfrak{P}_r^{(m)}\ , & \mathfrak{P}_r^{(m-1)} & ,\ \ldots\ldots & \mathfrak{P}_r'' & , & \mathfrak{P}_r' & , & \mathfrak{P}_r \\ \mathfrak{Q}_r^{(m)}\ , & \mathfrak{Q}_r^{(m-1)} & ,\ \ldots\ldots & \mathfrak{Q}_r'' & , & \mathfrak{Q}_r' & , & \mathfrak{Q}_r. \end{matrix} \tag{84}$$

Würde hier a nicht eine willkürliche Buchstabengrösse, sondern einen bestimmten Zahlwerth bedeuten, so wäre die Functionsreihe (83) eben dieselbe, die von Fourier zur Beurtheilung der Grenzen für die Wurzeln einer numerischen Gleichung — denn eine solche wäre dann die $F(x, a) = 0$ — vorgeschlagen wurde; die in (84) erscheinenden Functionen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ wären bestimmte Zahlen und aus ihren Vorzeichen liesse sich in der bekannten Weise die Anzahl der Zeichenwechsel für die eine Substitution x_r und die andere $x_r + \Delta$ entnehmen und aus der Differenz dieser Anzahlen in den Zeichenwechseln auf die Anzahl reeller Wurzeln x ein Schluss ziehen, welche innerhalb der beiden Grenzwerthe x_r und $x_r + \Delta$ fallen. So z. B.

auch, wenn der Grösse a ein extremer Werth $\pm a_\infty$ ertheilt wird. Da für die extremen Werthe von a, wie schon früher erwähnt, das Vorzeichen der Substitutionsresultate nur von den Anfangsgliedern derselben abhängt, so kann man in den beiden Reihen (84) die Polynome $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ durch ihre Anfangsglieder ersetzen. Nun sind aber unter den hier gemachten Voraussetzungen die Anfangsglieder von: $\mathfrak{P}_r^{(m)}, \mathfrak{P}_r^{(m-1)}, \ldots . \mathfrak{P}_r'', \mathfrak{P}'_r$ beziehungsweise genau dieselben wie von $\mathfrak{Q}_r^{(m)}, \mathfrak{Q}_r^{(m-1)}, \ldots . \mathfrak{Q}_r'', \mathfrak{Q}_r'$ und nur die Anfangsglieder von $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ sind verschieden und besitzen entgegengesetzte Vorzeichen. Es folgt hieraus, dass für die extremen Werthe $\pm a_\infty$ in (84) die obere und untere Reihe von Zeichen, mit Ausnahme der letzten, genau dieselben seien und daher die Differenz in der Anzahl der Zeichenwechsel gleich Eins ausfallen müsse, woraus sich mit Sicherheit schliessen lässt, dass eine einzige Wurzel x zwischen x_r und $x_r + \Delta$ fällt, wie wir schon von einer früheren Untersuchung her wissen. Geht man von diesen extremen Werthen $\pm a_\infty$ stufenweise zu den endlichen über, so wird sich die Zeichenanordnung in den beiden Reihen (84) und folglich auch die Differenz in der Anzahl der Zeichenwechsel nicht ändern können, so lange keine der mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bezeichneten Functionen ihr Vorzeichen wechselt und erst bei dem ersten endlichen Werthe von a, dem man bei diesem stetigen Fortschreiten begegnet, für welchen irgend eine der Functionen $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ ihr Vorzeichen wechselt, kann die Zeichenanordnung in (84) eine andere und vielleicht auch die Differenz in der Anzahl der Zeichenwechsel von Eins in eine andere übergehen. Bezeichnen wir, um einen bestimmten Werth von a festzuhalten, mit a' den Werth von a, dem man zuerst begegnet, für welchen eine der mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bezeichneten Functionen ihr Vorzeichen wechselt, und untersuchen wir nun den Einfluss, den dies auf die Differenz in der Anzahl der Zeichenwechsel haben kann. Für den Bereich $+ a_\infty \ldots + a'$ ist es erwiesen, dass die Differenz in der Anzahl der Zeichenwechsel stets gleich Eins bleibt, indem die Anordnung der Zeichen in (84) stets dieselbe bleibt. Es wird sohin im vollen Bereiche dieses Intervalles zwischen x_r und $x_r + \Delta$ nur eine einzige, und zwar fortwährend dieselbe Wurzel $\varphi(a)$ liegen. Für den Werth a' selbst und das angrenzende Intervall tritt eine Änderung in der Zeichenanordnung auf und es sind mehrere verschiedene Fälle denkbar. Meistentheils wird nur eine einzige der Functionen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ und nur ausnahmsweise eine Gruppe von mehreren gleichzeitig ihr Vorzeichen wechseln. Wir wollen die verschiedenen hier möglichen Fälle aufzählen und genauer untersuchen.

1. Die Änderung des Vorzeichens erfolgt nur bei der Function $\mathfrak{P}_r$ oder der anderen $\mathfrak{Q}_r$. In diesem Falle erhalten dann im nächsten Intervalle von a, die beiden Functionen $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ gleiche Zeichen und es besteht nun gar kein Unterschied mehr in der Anordnung der Vorzeichen zwischen der oberen und unteren Reihe in (84). Die Differenz in der Anzahl der Zeichenwechsel ist somit gleich Null und folglich keine Wurzel x zwischen x_r und $x_r + \Delta$ enthalten. Es folgt hieraus, dass a' der Grenzwerth sei des giltigen Intervalles von a, das dem Ergänzungsgliede Δ entspricht, und dass über diesen Werth a' hinaus das Intervall nicht weiter ausgedehnt werden dürfe.

2. Die Änderung des Vorzeichens erfolgt abermals bei einer einzelnen Function, aber bei einer Mittelfunction $\mathfrak{P}_r^{(s)}$ oder $\mathfrak{Q}_r^{(s)}$. Hier müssen wieder zwei verschiedene Fälle unterschieden werden, je nachdem die beiden Nachbarfunctionen zur Linken und Rechten: $\mathfrak{P}_r^{(s+1)}$ und $\mathfrak{P}_r^{(s-1)}$ oder $\mathfrak{Q}_r^{(s+1)}$ und $\mathfrak{Q}_r^{(s-1)}$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen für $a = a'$. Besitzen die beiden Nachbarfunctionen gleiche Zeichen, so bedingen bei der Änderung des Vorzeichens der Mittelfunction diese drei Functionen jedenfalls eine Änderung in der Anzahl der Zeichenwechsel in der entsprechenden Reihe der $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ in (84), denn je nachdem vor

der erfolgten Zeichenänderung bei der Mittelfunction diese drei Glieder der Reihe zwei Zeichenwechsel oder zwei Zeichenfolgen darbieten, werden nach der erfolgten Zeichenänderung an ihrer Stelle zwei Zeichenfolgen oder zwei Zeichenwechsel auftreten, kurz es erfolgt in der betreffenden Reihe der (84) eine Zu- oder Abnahme in der Zeichenwechselanzahl um zwei; und da die Zeichenanordnung in der anderen Reihe (84) ungeändert geblieben, so wird die Differenz in der Anzahl der Zeichenwechsel beim Übertreten vom Intervalle $+a_\infty \ldots + a'$ in das nächstliegende $+a' \ldots\ldots$ in 3 übergehen. Der andere Übergang von 1 in -1 ist bekanntermassen unmöglich, da dem grösseren der beiden Werthe x_r, $x_r + \Delta$ stets die geringere Anzahl von Zeichenwechseln entspricht.

Mit dem Auftreten des Index 3 anstatt 1 ist nun wohl keineswegs erwiesen, dass wirklich drei reelle Wurzeln x zwischen x_r und $x_r + \Delta$ fallen; es lässt sich im Gegentheile sehr leicht der Beweis führen, dass das angedeutete neue Paar von Wurzeln in diesem Zwischenraume für die unmittelbar nächsten Werthe von a fehlt, d. h. imaginär ist; allein man ist dennoch genöthigt, das giltige Intervall von a mit dem Werthe a' zu schliessen, weil jede Erweiterung desselben den Beweis der imaginären Beschaffenheit dieser zwei Wurzeln nothwendig voraussetzen würde. Ein solcher Beweis lässt sich aber, wie Fourier dargethan hat, nur mit Hilfe des engeren Zusammenziehens der Grenzen bewerkstelligen, reducirt sich also im Grunde immer auf das weitere Fortsetzen der Entwickelung von x über x_r hinaus, was hier nicht in unserer Absicht liegt.

3. Erfolgt hingegen die Zeichenänderung bei einer Mittelfunction, deren beide Nachbarfunctionen ungleiche Zeichen haben, so zwar, dass diese drei unmittelbar aufeinanderfolgenden Functionen immer einen Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge darstellen, gleichgiltig, ob die Mittelfunction das eine oder das entgegengesetzte Zeichen trägt; so hat diese Zeichenänderung gar keinen Einfluss auf die Anzahl der Zeichenwechsel in der betreffenden Reihe der (84) und somit bleibt auch die Differenz in den Anzahlen der Zeichenwechsel, so wie früher, gleich Eins. Man kann daher in diesem Falle das giltige Intervall von a über diesen speciellen Werth a' hinaus ausdehnen, bis eine Begrenzung desselben durch die Zeichenänderung bei einer andern Function erfolgt, welche auf die Differenz der Zeichenwechsel einen Einfluss hat.

4. Nun wären noch jene Ausnahmsfälle zu besprechen, in welchen mehrere Functionen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ gleichzeitig ihr Vorzeichen ändern. Allein die Beurtheilung dieser seltenen Fälle ergibt sich von selbst aus dem früheren, indem der Gesammteffect sich aus den Einzelwirkungen zusammensetzt. Es ist daher überflüssig, eine weitläufige Erörterung all' der verschiedenen Fälle, die hier möglich sind, hier folgen zu lassen.

Fassen wir all' das bisher Gesagte zusammen, so ergibt sich, dass die mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bezeichneten Functionen in (84) bezüglich ihres Einflusses auf die bestehende Differenz in der Anzahl der Zeichenwechsel bei der oberen mit $\mathfrak{P}$ und der unteren mit $\mathfrak{Q}$ bezeichneten Reihe in zwei Abtheilungen zu trennen sind: erstens in solche, die beim Ändern ihres Vorzeichens gar keine Änderung in den Anzahlen der Zeichenwechsel bedingen, und diese sind jene Mittelfunctionen, deren beide Nachbarfunctionen entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, und zweitens in andere, welche beim Ändern ihres Vorzeichens auch in der Anzahl der Zeichenwechsel eine Änderung bedingen; dahin sind die beiden Endfunctionen $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$, ferner alle jene Mittelfunctionen zu zählen, deren Nachbarfunctionen gleiche Vorzeichen besitzen.

Es ergibt sich hieraus folgendes einfache Verfahren, um das giltige Intervall von a zu finden: Man substituire die beiden Grenzwerthe x_r und $x_r + \Delta$ anstatt x in die Reihe von

Functionen (83), die durch wiederholtes partielles Differentiiren nach x aus dem Gleichungspolynome $F(x, a)$ abgeleitet sind, und ordne die Substitutionsresultate in zwei Reihen (84). Es ist dabei unerlässlich, dass die mit $\mathfrak{Q}$ bezeichneten Substitutionsresultate mit Ausnahme der beiden letzten $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ mit den darüberstehenden $\mathfrak{P}$ beziehungsweise dieselben Anfangsglieder aufweisen. Sollte dies nicht der Fall sein, so wäre es als ein Beweis anzusehen, dass die Gliedersumme x_r den anfänglich ausgesprochenen Bedingungen noch nicht entspricht und die Entwickelung der Wurzel x weiter fortzusetzen sei. Nun substituire man anstatt a in diese Substitutionsresultate $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ oder vielmehr in ihre Anfangsglieder einen der beiden extremen Werthe $\pm a_\infty$, d. h. wenn die absteigende Entwickelung vorliegt $\pm\infty$, bei der aufsteigenden hingegen $\frac{1}{\infty}$ bestimmt und notirt aber nur die Vorzeichen, nicht die numerischen Werthe. Man erhält so zwei Reihen von Zeichen, entsprechend den beiden Reihen (84), die mit Ausnahme der beiden letzten, welche den Endfunctionen $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ angehören und entgegengesetzt sind, vollkommen übereinstimmen. Die Differenz in den Anzahlen der Zeichenwechsel bei diesen beiden Zeichenreihen ist demnach gleich Eins. Nun übergeht man von dem erwählten extremen Werthe von a zu den endlichen Werthen, welche dasselbe Zeichen besitzen, in der natürlichen Ordnung und untersucht, welche der Functionen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zuerst ihr Vorzeichen ändert, wobei man jene Mittelfunctionen unberücksichtigt lässt, deren Nachbarfunctionen entgegengesetzte Vorzeichen besitzen für den bereits substituirten extremen Werth von a. Der Werth von a, bei dem man bei diesem natürlichen Vorschreiten zuerst einer Änderung des Zeichens bei einer der Functionen $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ in (84) begegnet, deren Nachbarfunctionen nicht entgegengesetzte Zeichen besitzen, ist die Grenze des giltigen Intervalles von a in dem Sinne, dass eine Erweiterung desselben vermittelst der hier eingeleiteten Untersuchung nicht gut thunlich ist.

Bezüglich der praktischen Ausführung der eben angedeuteten Untersuchung versteht es sich von selbst, dass man nicht in einem stetigen Übergange von den extremen Werthen $\pm\frac{1}{\infty}$ zu den endlichen vorschreiten könne, sondern dass eine beschränkte Anzahl von willkürlichen Substitutionen anstatt a einzuleiten sei. Bezeichnen wir beispielsweise mit $a_{,}$ einen bestimmten Zahlwerth, und mit $+a\ldots a_{,}$ daher ein gewisses Intervall. Zufolge der bekannten Methoden zur Auffindung der reellen Wurzeln einer numerischen Gleichung ist man für jede einzelne der Functionen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in (84) im Stande, anzugeben, ob und wie oft dieselbe in dem vorliegenden Intervalle durch Null hindurchgeht und dabei das Zeichen wechselt. Man denke sich für jede der Functionen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in (84) diese Anzahl der wirklichen Zeichenänderungen, den Index bestimmt. Sind alle diese Indices gleich Null oder nur bei solchen Mittelfunctionen von Null verschieden, deren beide Nachbarfunctionen fortwährend entgegengesetzte Zeichen behalten, so erfolgt in diesem Intervalle keinerlei Änderung in der Anzahl der Zeichenwechsel der beiden Reihen (84). Sind aber einzelne oder mehrere jener Functionen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ mit einem von Null verschiedenen Index versehen, bei welchen die Änderung des Vorzeichens auf die Anzahl der Zeichenwechsel von Einfluss ist; so muss man durch Zwischensubstitutionen das Intervall $+a\ldots a_{,}$ so lange verkleinern, bis keine dieser Functionen mehr einen von Null verschiedenen Index besitzt. Diese Zwischensubstitutionen wird man anfänglich nach Gutdünken wählen, später aber, wenn man dem eigentlichen Ziele schon näher gerückt ist, durch ein geregeltes Approximationsverfahren erhalten, weil der gesuchte Grenzwerth des Intervalles von a, für welchen eben die Zeichenänderung bei einer bestimmten Function $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ erfolgt, stets die Wurzel einer numerischen Gleichung ist.

Es ist für sich klar, dass das solchergestalt gefundene Intervall von a eine viel geringere Ausdehnung besitzen wird, als das complete giltige Intervall, welches die erste Methode liefert, allein es ist hier unmöglich, ohne sich in weitläufigere Untersuchungen über das Reell- und Immaginärsein von Wurzeln, welche durch Zeichenwechselverluste angedeutet werden, einzulassen, diese Intervalle zu erweitern.

Hiemit kann daher die erste der beiden gestellten Aufgaben, nämlich die Bestimmung des Ergänzungsgliedes Δ als gelöst angesehen werden. Der Werth von θ ist zwar bisher nur nach Willkür gewählt worden und man könnte allerdings diese Grösse noch dazu benützen, um eine Bedingung damit zu erfüllen und einen Vortheil zu erreichen, worauf man bei der willkürlichen Wahl verzichten muss. Je grösser der numerische Werth von θ ist, desto weiter liegen die beiden Grenzen x_r und $x_r + \Delta$ aus einander, wenigstens für die extremen Werthe von a; aber eben dadurch, wenigstens bis zu einer gewissen Grenze hin, wird man auch das entsprechende Intervall vergrössern, innerhalb dessen die beiden Grenzen die exacte Wurzel $\varphi(a)$ einschliessen. Was man also einerseits an Genauigkeit aufgibt, gewinnt man andererseits durch eine grössere Ausdehnung des giltigen Intervalles von a. Von dem jedesmaligen speciellen Zwecke allein, den der Rechner verfolgt, kann es abhängen, in welcher Weise man hier zwischen Vor- und Nachtheil die gehörige Ausgleichung zu treffen hätte. Eine genaue und weitläufigere Berücksichtigung dieser Anforderungen liegt aber hier nicht in unserem Plane.

II. Untersuchungen über die Convergenz der unendlichen Reihen.

§. 5.

Wir wollen nun zur Beantwortung der zweiten Frage schreiten, die wir uns anfangs gestellt haben, nämlich untersuchen, ob die bei den besprochenen Auflösungsmethoden hervorgehenden unendlichen Reihen gegen den wahren Wurzelwerth convergiren und nach welchem Gesetze dies erfolgt. Diese Untersuchung wird darüber Aufschluss ertheilen, ob die weiter fortgesetzte Entwickelung der Wurzel über die Gliedersumme x_r hinaus auch ein genaueres Resultat liefert oder nicht.

Fourier hat im zweiten Buche seines unvollständig erschienenen Werkes: „Analyse des équations déterminées" das Gesetz der Convergenz für die Approximationsmethoden der verschiedenen Ordnungen entwickelt. Diese Untersuchungen beziehen sich zwar dort nur auf den Fall einer numerischen Gleichung, die gewonnenen Gesetze sind aber allgemein giltig und erstrecken, wie auch dort ausdrücklich bemerkt ist, ihre Wirksamkeit auf die verschiedenartigsten Gebiete der algebraischen und Infinitesimal-Analysis. Diese von Fourier aufgestellten Sätze sind es, welche auch die hier vorliegende Aufgabe zur Lösung bringen und über die Convergenz der bei der Auflösung von Buchstabengleichungen hervorgehenden unendlichen Reihen Aufschluss ertheilen. Wir werden daher zuvörderst diese Gesetze der Approximation auf den hier in Rede stehenden Fall einer Buchstabengleichung ausdehnen, untersuchen, welcher Ordnung die bei der Auflösung derselben angewendeten Approximationsmethoden angehören, und endlich die verschiedenen Enwickelungsweisen vermittelst derselben einer genauen Prüfung bezüglich ihrer Convergenz unterwerfen.

Die in den vorhergehenden Abschnitten gelehrten Reihenentwickelungen lassen sich, wie schon früher zu wiederholten Malen bemerkt wurde, in zwei getrennte Operationen zerfällen: Die Bestimmung der Anfangsglieder beruht auf ganz anderen Untersuchungen und erfüllt auch einen anderen Zweck, als jene der Folgeglieder. Erstere bezweckt die Sonderung einzelner Wurzeln oder einer Gruppe von mehreren solchen von allen übrigen und ist der Bestimmung der Grenzwerthe bei numerischen Gleichungen gleichzuhalten. Ist aber ein bestimmtes Anfangsglied gefunden, so bildet dasselbe dann den Ausgangspunkt für die fernere Entwickelung, und die zugehörigen Folgeglieder gehen jetzt aus einer Reihe von Gleichungen hervor, die von der ursprünglich gegebenen wesentlich verschieden und meistentheils von weit niedrigerem Grade sind. Der Grad der Gleichungen, welche die Folgeglieder liefern, kommt nämlich gleich der Anzahl der Wurzeln, welchen das betreffende Anfangsglied gemeinschaftlich zukommt. Ist das Anfangsglied nur einer einzigen Wurzel eigen, so sind alle diese Gleichungen, welche die Folgeglieder liefern, vom ersten Grade; kommt hingegen das Anfangsglied p Wurzeln gemeinschaftlich zu, so erhält die Gleichung die Gradzahl p.

Wir wollen nun zunächst darthun, dass die Bestimmung der Folgeglieder, auf die bekannte Weise ausgeübt, eigentlich ein Approximationsverfahren der ersten oder einer höheren Ordnung vorstelle. Ist nämlich x_r ein zwar nicht vollkommen genauer, sondern nur angenäherter Werth von x, so lässt sich stets der genaue Werth darstellen in der Gestalt: $x = x_r + x'$, wo x' einen geeigneten Zusatz bedeutet und zu dessen Bestimmung eigentlich die Gleichung: $F(x_r + x', a) = 0$ dienlich wäre, die aus der ursprünglich gegebenen $F(x, a) = 0$ hervorgeht, wenn man in ihr vermittelst der Substitution $x = x_r + x'$ anstatt der Unbekannten x die andere x' einführt. Durch Auflösung der Gleichung $F(x_r + x', a) = 0$ würde man zwar den vollkommenen genauen Werth von x' und folglich auch jenen von x erhalten, wenn man nicht dabei genau denselben unübersteiglichen Hindernissen begegnen würde, welche der exacten Auflösung der ursprünglichen Gleichung im Wege stehen. Man kann aber in der Gleichung $F(x_r, + x', a) = 0$ gewisse Glieder, namentlich die mit den höheren Potenzen von x' verknüpften weglassen, sie auf solche Weise in eine andere, wesentlich verschiedene verwandeln, die eine niedrigere Gradzahl trägt, aber auch andere Werthe von x' liefert. Löst man nun die solchergestalt vereinfachte Gleichung auf nach der darin enthaltenen Unbekannten x', so erhält man wohl keinesfalls jenen Zusatz, der, zu x_r hinzugefügt, den exacten Wurzelwerth x liefert, sondern einen anderen, der aber unter gewissen Umständen eine Annäherung zum wahren Wurzelwerthe zur Folge hat. Die Art, wie diese Erniedrigung der Gradzahl der Gleichung $F(x_r + x', a) = 0$ bewerkstelligt wird, kann aber verschieden sein. Denkt man sich die Function $F(x_r + x', a)$ aufsteigend nach Potenzen von x' entwickelt, so wird man in der Regel erhalten:

$$(85)\quad F(x_r + x', a) = F(x_r, a) + F'(x_r, a)\frac{x'}{1} + F''(x_r, a)\,.\,\frac{x'^2}{1\,.\,2} + F'''(x_r, a)\frac{x'^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\ldots$$

Nimmt man nun von all' diesen Gliedern nur die beiden ersten und setzt ihre Summe gleich Null, so erhält man eine Gleichung des ersten Grades in x'. Der auf diese Weise gewonnene Werth von x' bringt bisweilen die Summe $x_r + x'$ dem wahren Wurzelwerthe x näher, als x_r war, und das dabei eingeschlagene Verfahren stellt die Approximation der ersten Ordnung dar, auch die lineare oder Newton'sche genannt. Man berücksichtigt dabei nur die beiden Substitutionsresultate $F(x_r, a)$ und $F'(x_r, a)$, die für $x = x_r$ aus dem ursprünglichen Gleichungspolynome $F(x, a)$ und seinem ersten partiell nach x genommenen Differentialquotienten $F'(x, a)$ hervorgehen.

Würde man aber anstatt der zwei ersten Glieder der Summe (85) die drei ersten: $F(x_r, a) + F'(x_r, a) . \frac{x'}{1} + F''(x_r, a) . \frac{x'^2}{1.2}$ hervorheben, alle übrigen aber weglassen, so erhält man durch gleich Null Setzen derselben eine Gleichung des zweiten Grades, die wieder in geeigneten Fällen einen Werth von x', wohl auch deren zwei zu liefern im Stande ist, welche eine Annäherung zum wahren Wurzelwerthe herbeiführen. Dies ist dann das Approximationsverfahren der zweiten Ordnung, wobei drei Substitutionsresultate: $F(x_r, a)$, $F'(x_r, a)$, $F''(x_r, a)$ berücksichtigt werden, die für $x = x_r$ aus dem ursprünglichen Gleichungspolynome und seinem ersten und zweiten, partiell nach x genommenen Differentialquotienten hervorgehen.

Im Allgemeinen kann man von der Summe (85) eine beliebige Anzahl von $p + 1$ ersten Gliedern behalten und der Null gleichsetzen, alle übrigen, mit höheren Potenzen von x' verknüpften hingegen weglassen und erhält so eine Gleichung des p^{ten} Grades in x', die gelegentlich einen, wohl auch mehrere Werthe für die Unbekannte zu liefern geeignet ist, welche, zu x_r hinzugefügt, eine Annäherung zum wahren Wurzelwerthe zur Folge haben. Dies ist das Approximationsverfahren der p^{ten} Ordnung und wird dadurch charakterisirt, dass dabei nur die aus dem ursprünglichen Gleichungspolynome $F(x, a)$ und seinen p ersten partiell nach x genommenen Differentialquotienten für $x = x_r$ hervorgehenden Substitutionsresultate in Betracht kommen.

Nach dem bisher Gesagten ist es wohl leicht einzusehen, dass all' diese verschiedenen Approximationsmethoden der ersten sowohl, als auch jene der höheren Ordnungen bei der Entwickelung der Folgeglieder in Anwendung kommen. Am häufigsten unter allen tritt die Approximation der ersten Ordnung in Wirksamkeit. In der That ist meistentheils mit der Bestimmung des Anfangsgliedes die betreffende Wurzel schon von allen übrigen isolirt, was sich bei der Ermittelung des Coëfficienten h_0 zu erkennen gibt dadurch, dass die hiezu dienende Gleichung $\Sigma[Hh_0^{\tau}] = 0$ einen unwiederholten Wurzelwerth für h_0 liefert. In diesem gewöhnlichsten aller Fälle ergeben sich alle zugehörigen Folgeglieder der Reihe nach aus Gleichungen des ersten Grades. Ist nämlich x_r die bereits ermittelte Gliedersumme, so hat man die beiden Substitutionsresultate: $F(x_r, a) = \mathfrak{P}_r$ und $F'(x_r, a) = \mathfrak{P}_r'$ zu bilden, vermittelst derselben die Gleichung des ersten Grades: $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}_r' x' = 0$ zu construiren und dieselbe nach x' aufzulösen, wobei der Quotient $x' = -\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_r'}$ in einem einzigen oder wohl auch in mehreren Anfangsgliedern entwickelt wird. Der unmittelbare Anblick dieser Gleichung lässt wohl keinen Zweifel übrig, dass man hier eigentlich die Approximationsmethode der ersten Ordnung in Anwendung gebracht habe, denn anstatt die complete transformirte Gleichung in x', nämlich die $F(x_r + x', a) = 0$ vorzunehmen, beschränkt man sich auf die Auflösung einer durch Hinweglassen der Glieder mit den höheren Potenzen von x' daraus abgeleiteten Gleichung des ersten Grades. Man begegnet bei der Auflösung von Buchstabengleichungen der Approximation der ersten Ordnung, sobald durch hinlänglich weit geführte Entwickelung einer Wurzel die vollständige Trennung derselben von allen übrigen bewerkstelligt ist, also jedesmal dann, wenn die der Entwickelung unterworfene Wurzel eine unwiederholte ist, und zwar entweder gleich Anfangs oder im späteren Verlaufe der Rechnung bei der Bestimmung der Folgeglieder.

Allein auch die Approximationsmethoden höherer Ordnungen finden gelegentlich Anwendung, und zwar namentlich dann, wenn das Anfangsglied x_0 oder überhaupt der bereits entwickelte Bestandtheil x_r zweien oder mehreren Wurzeln gemeinschaftlich zukommt, d. h. wenn der Coëfficient h des zuletzt entwickelten Gliedes ein wiederholter Wurzelwerth seiner Bestimmungsgleichung ist. Die bekannte, zur Bestimmung der Folgeglieder dienliche Regel schreibt dann vor, den bereits entwickelten Bestandtheil x_r in das Gleichungspolynom und seine p ersten partiell nach x genommenen Differentialquotienten zu substituiren, falls h_r eine p-mal wiederholte Wurzel war, aus den solchergestalt gewonnenen Substitutionsresultaten: $\mathfrak{P}_r, \mathfrak{P}_r', \mathfrak{P}_r'', \ldots \mathfrak{P}_r^{(p)}$ die Gleichung des p-Grades:

$$\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}_r'.x' + \frac{1}{1.2}\mathfrak{P}_r''x'^2 + \frac{1}{1.2.3}\mathfrak{P}_r'''x'^3 + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2\ldots p}\mathfrak{P}_r^{(p)}x'^p = 0$$

zu bilden und die Anfangsglieder von x' zu suchen; mit anderen Worten, man findet das nächstfolgende Glied vermittelst der Approximationsmethode der p^{ten} Ordnung.

Nachdem durch das eben Erwähnte bewiesen ist, dass die in den früheren Abschnitten auseinandergesetzten Entwickelungen im weiteren Verlaufe sich auf die Approximationsmethoden der ersten und höheren Ordnungen zurückführen lassen und zur Beurtheilung ihrer Convergenz die von Fourier gefundenen allgemeinen Gesetze dienlich sind, so ist hiemit schon der Weg vorgezeichnet, den die nachfolgenden Untersuchungen zu nehmen haben. Wir wollen aber keineswegs denselben eine grössere Ausdehnung geben, als für das praktische Bedürfniss unumgänglich nothwendig ist. Aus diesem Grunde werden wir nur die lineare Approximation, d. h. jene der ersten Ordnung einer näheren Betrachtung unterwerfen, die Approximationen höherer Ordnungen jedoch unberücksichtigt lassen. Es ist uns dies verstattet, wiewohl man dem früher Gesagten zufolge auch den Approximationen höherer Ordnungen begegnet, denn man kann es zuletzt immer dahin bringen, dass man nur mit der Approximation der ersten Ordnung zu thun hat. In der That begegnet man den Approximationen höherer Ordnungen nur dann, wenn mehrere Wurzeln in den Anfangsgliedern übereinstimmen. Alsdann sind aber nur folgende zwei Fälle möglich: entweder alle diese in den Anfangsgliedern übereinstimmenden Wurzeln sind dennoch sämmtlich von einander verschieden und dann wird durch hinlänglich weit fortgesetzte Entwickelung derselben ihre vollständige Trennung bei irgend einem Gliede nothwendig erfolgen und von diesem Momente an weiterhin nur die Approximation der ersten Ordnung in Anwendung kommen; oder einige oder alle dieser Wurzeln sind vollkommen gleich, und dann gelingt zwar die Trennung derselben selbst bei der ins Unendliche fortgesetzten Entwickelung nicht und man kann sonach zu ihrer Entwickelung niemals die lineare Approximationsmethode in Anwendung bringen; allein dann lässt sich auf bekannte Weise durch Sonderung des gemeinschaftlichen Factors, der im ursprünglichen Gleichungspolynome und seinem ersten partiell nach x genommenen Differentialquotienten, wohl auch im zweiten und den darauf folgenden erscheint, stets eine andere und einfachere Gleichung ableiten, welche nur diese gleichen Wurzeln, aber nunmehr als unwiederholte enthält, und zuletzt vermittelst der linearen Approximation ihre Entwickelung in Reihenform ermöglicht. Es ist somit stets möglich, zur linearen Approximation zu gelangen und folglich hinreichend, nur diese einer genaueren Betrachtung zu unterziehen.

Eine fernere Beschränkung, zu der wir genöthigt sind, schliesst alle imaginären Grössen aus dem Bereiche der nachfolgenden Untersuchungen, so zwar, dass nur die reellen Wurzeln x und die Convergenz der sie darstellenden unendlichen Reihen für reelle Werthe der unabhängigen Buchstabengrösse a in ihren Bereich gezogen erscheinen. Diese Lücke ist gewiss um so eher zu entschuldigen, da selbst in dem viel einfacheren Probleme der numerischen Gleichungen dieser Punkt noch immer nicht erledigt ist.

Endlich machen wir noch die beschränkende Annahme, dass das Gleichungspolynom $F(x,a)$ sowohl nach x, als nach a eine ganze und rationale algebraische Function sei. Diese Beschränkung ist aber keineswegs eine nothwendige, da die nachfolgenden Untersuchungen und Ergebnisse auf jede beliebige Functionsform passen, bringt aber den Vortheil, dass die Darstellung eine einfachere wird, weil diese Functionsform keine Unterbrechung der Stetigkeit aufweist.

§. 6.

Die Function $F(x_r + x', a)$ lässt sich vermittelst der Taylor'schen Formel mit dem Ergänzungsgliede darstellen in folgender Form:

$$F(x_r + x', a) = F(x_r, a) + x', F'(x_r + \rho x', a) \tag{86}$$

und diese Gleichung ist richtig, so lange für die angenommenen Werthe von a und innerhalb x_r und $x_r + x'$ die Functionen: $F(x,a)$, $F'(x,a)$ endlich und stetig bleiben. Die im letzten Gliede erscheinende Grösse ρ besitzt einen zwischen 0 und 1 liegenden Werth und ist im Allgemeinen auch von a abhängig, so zwar, dass $x_r + \rho x'$ eine zwischen x_r und $x_r + x'$ fallende Mittelgrösse bedeutet. Die Ableitung dieser Formel ist hinlänglich bekannt.

Durch gleich Null Setzen dieses Ausdruckes (86) erhält man die Gleichung:

$$F(x_r, a) + x' . F'(x_r + \rho x', a) = 0$$

und diese liefert:

$$x' = -\frac{F(x_r, a)}{F'(x_r + \rho x', a)}. \tag{87}$$

Dies ist der vollkommen genaue Werth von x' unter der Voraussetzung, dass für $x_r + \rho x$, die entsprechende Mittelgrösse gesetzt würde. Die in dieser Formel enthaltene Regel ist folgende: Wenn ein Werth x_r bekannt ist, welcher, anstatt x gesetzt, die Gleichung $F(x,a) = 0$ nicht identisch erfüllt; so findet man den Zusatz x', welcher zu x_r als Correction hinzugefügt werden soll, wenn man das Substitutionsresultat $F(x_r a)$ durch einen Werth von $F'(x,a)$ dividirt, den diese Function für eine zwischen dem exacten Wurzelwerthe $x_r + x'$ und dem davon differirenden x_r liegende Zwischensubstitution $x_r + \rho x'$ annimmt und das Zeichen des erhaltenen Quotienten in das entgegengesetzte verwandelt.

Durch eine geometrische Construction kann man diesen Satz, so zu sagen, unmittelbar einsehen. In Fig. 1 stellt das Bogenstück *nsorm* ein Stück irgend einer Curve $y = f(x)$ dar, die im Punkte 0 die Abscissenaxe *qop* schneidet. Die dem Punkte 0 entsprechende Abscisse ist eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Denkt man sich irgend eine andere Abscisse x_r aufgetragen, welcher der Punkt p auf der Axe der x entsprechen mag, die entsprechende Ordinate $pm = y_r$ errichtet, die einen von Null verschiedenen Werth hat und im Punkte m die Curve trifft, und nun durch die Sehne om die beiden Punkte o und m verbunden, so hat man: $Ao = Ap - op$ und $op = \frac{mp}{tang\ pom}$. Die Richtung der Linie om ist offenbar parallel zur im Punkte r der Curve gezogenen Tangente rt. Dieser Punkt r befindet sich jedenfalls, so lange die Curve orm eine continuirliche ist, zwischen o und m und es entspricht demselben eine

Abscisse, welche zwischen Ao und Ap fällt. Man hat dem zufolge $tang\ pom = tang\ ptr$ und folglich: $op = \frac{mp}{tang\ ptr}$ und somit: $Ao = Ap - \frac{mp}{tang\ ptr}$. Ersetzt man in diesen Gleichungen Ao, Ap, mp, op beziehungsweise durch die ihnen zukommenden Bezeichnungen x, x_r, $y_r = f(x_r)$, $-x'$; $tang\ ptr$ aber durch den gleichgeltenden Werth von $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, den diese Function für den dem Punkte r entsprechenden Werth der Abscisse und die durch $x_r + \rho x'$ dargestellt werden kann, annimmt; so erhält man die mit der (87) übereinstimmenden Gleichungen:

$$x' = -\frac{f'(x_r)}{f'(x_r + \rho x')},\ x = x_r + x' = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r + \rho x')}$$

Dies wäre für eine numerische Gleichung giltig. Für eine Buchstabengleichung jedoch, in der nebstdem noch eine willkürliche Grösse a erscheint, hätte man eine ähnliche Construction, wie hier in der Ebene, im Raume mit drei Dimensionen zu entwerfen. Für jeden einzelnen Zahlwerth von a nämlich lässt sich eine der Fig. 1 ähnliche Zeichnung entwerfen, in der aber die hier ersichtlichen Linien stets eine andere Grösse und Lage erhalten. Die Fig. 1 stellt eigentlich den Durchschnitt dieser im Raume von drei Dimensionen zu construirenden Gebilde dar für einen speciellen Werth von a. Man kann sich daher die Ebene der Fig. 1 längs einer darauf senkrechten Geraden, fortwährend parallel zu sich selber bewegt und dabei die darin vorkommenden Linien und Winkel in geeigneter Weise abgeändert denken und wird so die im Raume von drei Dimensionen bestehende Construction finden. Jede in der Fig. 1 ersichtliche Linie verwandelt sich dabei in eine entsprechende Fläche: die Abscissenaxe in eine Coordinatenebene, die Curve $nsorm$ in eine krumme Fläche, die Ordinate mp in eine Cylinderfläche, die auf der Coordinatenebene senkrecht steht und dieselbe in der ebenen Curve $x = x_r$ schneidet, die Sehne om in eine windschiefe Fläche, welche man sich dadurch gebildet zu denken hat, dass man die gerade Linie om gleichzeitig auf der Curve: $x = \varphi(a)$ von einfacher, und die andere: $y = F(x, a)$, $x = x_r$ von doppelter Krümmung fortbewegt und dabei fortwährend zur Coordinatenebene der xy parallel erhält. Die Tangente rt geht dadurch über in eine tangirende windschiefe Fläche, welche die Fläche $F(x, a) = y$ in einer Linie von doppelter Krümmung berührt, die fortan zwischen denjenigen zwei Curven liegt, deren Durchschnitte mit o und m in Fig. 1 bezeichnet sind und deren Projection auf die Ebene der $x\ y$ als eine Curve von einfacher Krümmung fortan zwischen den beiden Curven $x = \varphi(a)$ und $x = x_r$ liegt, und demnach durch die Gleichung: $x = x_r + \rho x'$ dargestellt werden kann. Hier bedeutet x' die Differenz: $\varphi(a) - x_r$ und ρ eine unbekannte Function von a, die jedoch die Eigenschaft hat, nur zwischen 0 und 1 liegende Werthe anzunehmen.

Die Gleichung (87), deren Sinn durch die angegebene Construction vollkommen beleuchtet wird, dient dazu, über die Convergenz der Approximation ein Urtheil zu fällen. Denken wir uns nämlich in dem Ausdrucke (87), welcher den genauen Werth der Correction x' liefern würde, die im Nenner erscheinende Function $F'(x_r + \rho x', a)$ durch eine andere $\Phi'(a)$ ersetzt, die genau dasselbe Vorzeichen, aber einen numerisch grösseren Werth besitzt, so wird, so lange diese Bedingung erfüllt bleibt, der durch diese Änderung abgeleitete Ausdruck:

$$-\frac{F(x_r, a)}{\Phi'(a)} \tag{88}$$

stets dasselbe Zeichen wie der exacte Zusatz x', aber einen numerisch kleineren Werth erhalten, und demzufolge liegt der Werth dieses Ausdruckes (88) zwischen 0 und x'. Man kann nun diesen Ausdruck (88) zu x_r hinzufügen und der so erhaltene Werth:

$$(89) \qquad x_r - \frac{F(x_r, a)}{\Phi'(a)}$$

wird dann jedenfalls zwischen x_r und $x_r + x'$, d. h. zwischen x_r und dem exacten Wurzelwerthe $\varphi(a)$ liegen, aber von demselben noch verschieden sein. Der neue Ausdruck (89) liegt daher, unter der oberwähnten, bei der Wahl von $\Phi'(a)$ beobachteten Vorsicht, dem wahren Wurzelwerthe $\varphi(a)$ jedenfalls näher als der Werth x_r, ist aber noch immer, und zwar in genau demselben Sinne fehlerhaft wie x_r, mit anderen Worten, ist noch immer grösser als der genaue Werth von x, wenn x_r zu gross war, und kleiner, wenn x_r zu klein war.

So wie hier durch einen einmaligen Schritt aus dem ungenauen ersten Werthe x_r ein zweiter genauerer Werth abgeleitet wurde, so kann man durch mehrmalige Wiederholung dieses Verfahrens der Reihe nach einen dritten, vierten, stets näher liegenden Werth finden und dem wahren Wurzelwerthe $\varphi(a)$ stets näher kommen. Alle solchergestalt der Reihe nach gefundenen Werthe sind sämmtlich entweder zu gross oder zu klein, je nachdem der als Ausgangspunct benützte Werth x_r zu gross oder zu klein war. Der dabei einzuschlagende Weg ist leicht einzusehen: Bezeichnen wir mit: $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots \mathfrak{X}_t$ der Reihe nach diese Werthe, unter $\mathfrak{X}_0$ den ursprünglichen x_r verstanden, so ist jedes Glied dieser Reihe aus dem unmittelbar vorhergehenden durch Substitution desselben anstatt x in das Gleichungspolynom $P = F(x, a)$ und nachherige Multiplication des dabei gewonnenen Substitutionsresultates mit $\frac{-1}{\Phi'(a)}$ abgeleitet, wie dies in den nachfolgenden Gleichungen ersichtlich gemacht ist:

$$(90) \qquad X_1 = -\frac{F(X_0, a)}{\Phi'(a)}, \; X_2 = -\frac{F(X_1, a)}{\Phi'(a)} \; \ldots\ldots, X_t = -\frac{F(X_{t-1}, a)}{\Phi'(a)}.$$

Hier muss aber die Function $\Phi'(a)$, wenn sie stets dieselbe bleiben soll, dasselbe Zeichen, aber einen numerisch grösseren Werth besitzen als die Functionen:

$$(91) \qquad F'(x \ldots X_0, a), \; F'(x \ldots X_1, a), \ldots\ldots F'(x \ldots X_t, a)$$

unter $x \ldots\ldots \mathfrak{X}_0$, $x \ldots\ldots \mathfrak{X}_1$, $x \ldots\ldots \mathfrak{X}_t$ die entsprechenden Mittelgrössen verstanden, welche an die Stelle der früheren $x + \rho x'$ treten. Diesen Bedingungen kann man jedoch nur dann entsprechen durch einen einzigen Werth von $\Phi'(a)$, wenn alle diese Functionen (91) einerlei Vorzeichen tragen. Da nun alle hier erscheinenden Mittelgrössen zwischen x und $\mathfrak{X}_0$ liegen, so ist es möglich, all' diesen Bedingungen durch ein einziges $\Phi'(a)$ zu genügen, wenn die Function $F'(x, a)$ für alle zwischen x und $\mathfrak{X}_0$ liegenden Werthe von x einerlei Vorzeichen behält, und zwar dadurch, dass man der Grösse $\Phi'(a)$ eben dieses Vorzeichen und den grössten numerischen oder einen noch grösseren Werth ertheilt, dessen $F(x, a)$ in diesem Intervalle fähig ist. Hat man eine solche Wahl der Function $\Phi'(a)$ wirklich getroffen, was offenbar wieder nur für ein beschränktes Intervall von a möglich ist, so werden die aus den Gleichungen (90) gezogenen Werthe $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots \mathfrak{X}_t$ der Reihe nach der exacten Wurzel $\varphi(a)$ näher rücken, und zwar in der Richtung von $\mathfrak{X}_0$ gegen dieselbe, also stets grösser oder stets kleiner sein.

Das hier angegebene Approximationsverfahren, welches offenbar ein lineares ist, unterscheidet sich von demjenigen, welches bei numerischen Gleichungen angewendet zu werden pflegt, denn man dividirt hier stets durch denselben Ausdruck $\Phi'(a)$, während dort der Divisor sich fortan ändert. Aus diesem Grunde besitzt auch die hier besprochene Approximation einen geringeren Grad der Convergenz, wie durch Vergleichung von Fig. 2 und Fig. 3 alsogleich eingesehen werden kann. Fig. 2 stellt den Gang der hier angegebenen Approximation vor, bei welchem die gezogenen Geraden: m_1p_1, m_2p_2, m_3p_3 zu einander parallel sind und mit der Abscissenaxe op einen grösseren Winkel bilden, als die einzelnen Elemente der Curve $om_3m_2m_1$; während in Fig. 3 die Geraden $m_1p_1, m_2p_2, \ldots$ die Curve tangiren und sich daher die einzelnen Punkte p, p_1, $p_2 \ldots$ in einem viel rascheren Verhältnisse dem Durchschnittspunkte o nähern. Trotzdem ist die hier angegebene Approximationsmethode ebenfalls convergent, und zwar selbst dann noch, wenn die andere divergent wird, wie dies an dem Bogenstücke on bemerkt werden kann.

§. 7.

Wir wollen nun zunächst das Gesetz der Annäherung genauer untersuchen, welches bei diesem Verfahren gültig ist, und beginnen mit dem einfachsten Falle, der dann für die übrigen complicirteren als Richtschnur dienen wird. In Fig. 4 sei nom eine gerade Linie, welche die Abscissenaxe qop in einem Punkte o schneidet, $y = \alpha x + \beta$ ihre Gleichung. Man denke sich vom Punkte p die Ordinate pm_1 errichtet und nun die Gerade m_1p_1 gezogen, welche mit der Abscissenaxe einen grösseren, aber mit denselben Zeichen versehenen Winkel als die nm einschliesst, mit anderen Worten, in deren Gleichung $y = (\alpha + \alpha')x + \beta'$ der Coëfficient $\alpha + \alpha'$ einen numerisch grösseren Werth und dasselbe Vorzeichen wie α besitzt. Dieselbe trifft die Abscissenaxe im Durchschnittspunkte p_1, welcher offenbar zwischen o und p liegt. Hier errichtet man abermals eine Ordinate p_1m_2, zieht durch den Punkt m_2 die m_2p_2 unter demselben Winkel gegen die Abscissenaxe wie die frühere m_1p_1 und fährt so fort in der gebrochenen Zickzacklinie $pm_1p_1m_2p_2 \ldots$ sich dem Punkte o zu nähern. Dies ist offenbar das früher erwähnte Verfahren, angewendet auf die Gleichung des ersten Grades: $\alpha x + \beta = 0$. Eine solche Anwendung wird zwar niemals gemacht werden, allein die Untersuchung dieses Falles hat einen anderen Zweck und ist für das Nachfolgende von Wichtigkeit. $\alpha + \alpha'$ ist in dem gegenwärtigen Falle der Werth von $\Phi'(a)$, $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2, \ldots$ sind die Abscissen der Punkte p, p_1, $p_2, \ldots$ und die jedesmaligen Fehler x', x_1', $x_2', \ldots$ sind durch die Linienstücke op, op_1, $op_2, \ldots$ sowohl ihrer Grösse, als auch ihrem Zeichen nach ausgedrückt.

Es soll nun das Gesetz der Reihe x', x'_1, $x'_2, \ldots$ angegeben werden. Man hat zunächst $p_1p \, tang \, pp_1m_1 = m_1p$, d. h. $(\mathfrak{X}_0 - \mathfrak{X}_1)(\alpha + \alpha') = \alpha\mathfrak{X}_0 + \beta$ und findet, weil $x' - x_1' = \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_0$, ferner $\alpha\mathfrak{X}_0 + \beta = -\alpha x'$ ist: $(x' - x_1')(\alpha + \alpha') = \alpha x'$, also: $x_1' = \frac{\alpha'}{\alpha + \alpha'} x'$. Wendet man diese Formel daz an, um jedes Glied der Reihe: x', x_1', $x_2', \ldots$ aus dem unmittelbar vorhergehenden abzuleiten, wozu sie sich eben eignet, indem man nur die Stellenzeiger 0, 1 der in ihr erscheinenden Grössen x', x_1' in andere, gleichfalls um Eins differirende ganze Zahlen zu verwandeln braucht, so überzeugt man sich, dass diese Reihe eine geometrische sei mit dem constanten Quotienten $\frac{\alpha'}{\alpha + \alpha'}$, so zwar, dass das allgemeine Glied derselben

$$x_t' = x' \cdot \left(\frac{\alpha'}{\alpha + \alpha'}\right)^t \tag{92}$$

wird. Man erhält also den Betrag des nach t-maliger Anwendung des in Rede stehenden Approximationsverfahrens bei der Gleichung des ersten Grades $\alpha x + \beta = 0$ noch vorhandenen

Fehlers x'_t, wenn man den ursprünglichen Fehler x' t-mal mit der Grösse $\frac{\alpha'}{\alpha+\alpha'}$ multiplicirt. Es lassen sich hier die Folgerungen ziehen:

Erstens: Wenn α und α', wie eben hier vorausgesetzt, gleiche Zeichen haben, also der numerische Werth von $\alpha+\alpha'$ grösser ist als jener von α', so erhält der Bruch $\frac{\alpha'}{\alpha+\alpha'}$ einen zwischen Null und Eins liegenden Werth und beim fortwährenden Wachsen von t nähert sich x'_t daher dem Werthe Null. Die Grössen $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots$ nähern sich folglich unbegrenzt dem wahren Wurzelwerthe $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Zweitens: Der Werth des Bruches $\frac{\alpha'}{\alpha+\alpha'}$ ist unter eben dieser Voraussetzung positiv, und demnach besitzen alle Grössen: $x', x'_1, x'_2, \ldots$ einerlei Zeichen und die Werthe $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2, \ldots$ sind entweder sämmtlich zu gross, oder sämmtlich zu klein, je nachdem der erste von ihnen $\mathfrak{X}_0$ zu gross oder zu klein war.

Drittens: Die Convergenz wird durch den Werth des Bruches $\frac{\alpha'}{\alpha+\alpha'}$ bestimmt. Je näher dieser Werth der Nulle liegt, desto rascher ist die Approximation. Von zwei Geraden: $y = \pm\alpha_1(x-\xi)$ und $y = \pm(\alpha_1+\alpha_2)(x-\xi)$, welche die Abscissenaxe in einem und demselben Punkte $x=\xi$ schneiden, mit ihr aber ungleiche Winkel einschliessen und bei welchen man, von einem und demselben $\mathfrak{X}_0$ ausgehend, einerlei Verfahren und Werth $\Phi'(\alpha)$ anwendet, um zum exacten Wurzelwerthe $x=\xi$ zu gelangen, bietet die zweite, der der grössere Winkel entspricht, die raschere Approximation. Der Werth des Bruches $\frac{\alpha'}{\alpha+\alpha'}$ ist nämlich in diesen beiden Fällen beziehungsweise: $\frac{\Phi'-\alpha_1}{\Phi'}$, $\frac{\Phi'-(\alpha_1+\alpha_2)}{\Phi'}$, von diesen zwei Grössen aber offenbar die zweite kleiner als die erste, folglich auch bei der zweiten Gleichung die Convergenz eine stärkere. Sie entspricht derjenigen Geraden, welche den grösseren Winkel mit der Abscissenaxe einschliesst, oder auch, der die grösseren Zahlwerthe der Ordinaten entsprechen.

Alle diese Bemerkungen, wiewohl hier nur für gerade Linien entwickelt, haben eine allgemeine Geltung auch bei beliebig geformten krummen Linien. Wir wollen hier zunächst nur die Verallgemeinerung der dritten Folgerung ableiten.

A sei eine beliebige krumme Linie, welche in einem gewissen Bereiche der Abscisse x, der sich von $x=\mathfrak{X}_0$ bis $x=\mathfrak{X}_\infty$ erstreckt, fortan numerisch kleinere, aber mit demselben Vorzeichen versehene Ordinaten besitzt, als eine andere, gleichfalls beliebig gestaltete krumme Linie B, so zwar, dass in dem angegebenen Bereiche die Curve A zwischen der Abscissenaxe und der zweiten Curve B liegt; ferner sollen diese zwei Linien A und B die Abscissenaxe in einem und demselben Punkte $x=\mathfrak{X}_\infty$ schneiden. Wählt man nun für beide Curven eine und dieselbe Abscisse $\mathfrak{X}_0$ als Ausgangspunkt des in Rede stehenden Approximationsverfahrens und einerlei Werth von Φ', so wird man zwar bei geeigneter Wahl dieser letztgenannten Grösse sowohl bei der Curve A als bei der anderen B dem Durchschnittspunkte $x=\mathfrak{X}_\infty$ fortwährend näher rücken: allein die Annäherung wird bei der Curve B eine viel raschere sein, weil ihre Ordinaten numerisch grössere Werthe besitzen, als bei der Curve A.

Der Werth Φ' muss numerisch grösser, mindestens gleich gewählt werden, als der grösste Werth, welchen der Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ innerhalb des Bereiches von $x=\mathfrak{X}_0$ bis $x=\mathfrak{X}_\infty$ bei den beiden Curven A und B anzunehmen vermag; das Vorzeichen von Φ' aber ist jenem der Ordinaten dieser beiden Curven gleich zu setzen, wenn eine wirkliche Annäherung bezweckt werden soll.

In Fig. 5 sei m ein beliebiger Punkt der Curve A, dessen Abscisse zwischen $\mathfrak{X}_0$ und der exacten Wurzel $\mathfrak{X}_\infty$ fällt. Man ziehe mq unter dem geeigneten Winkel, so dass $tang\ mqp = \Phi'$

wird. q ist hier offenbar der Punkt, zu dem man durch einmalige Anwendung des Approximationsverfahrens gelangt. Entspricht p der Abscisse $\mathfrak{X}_t$, so gehört dem Punkte q die Abscisse $\mathfrak{X}_{t+1}$ an. Man könnte nun vom Punkte m aus in der Richtung von p gegen s die Curve A verzeichnen, würde aber dabei bemerken, dass sie fortwährend oberhalb der Linie mq verläuft und so weder diese trifft, noch in das Innere des Dreieckes mqp gelang t. Dies ist eine nothwendige Folge der in Bezug auf den Werth von Φ' gemachten Annahme, dass derselbe numerisch grösser sei als der grösste Werth, dessen $\frac{dy}{dx}$ in diesem Bereiche fähig ist, oder doch mindestens demselben gleichkomme. In der That selbst dann, wenn bei der Curve A $\frac{dy}{dx}$ im Punkte m gerade den numerisch grössten Werth besässe und Φ' nicht grösser, sondern demselben gleich gewählt wäre, würde qm eine Tangente zur Curve A sein, und fortwährend zwischen ihr und der Abscissenaxe verlaufen, da dann eben dort die Curve ihre Convexität der Abscissenaxe zukehren muss, weil $\frac{dy}{dx}$ ein numerisches Maximum erreicht. Um so viel mehr findet dies dann Statt, wenn $\frac{dy}{dx}$ und Φ' im Punkte m verschiedene Werthe besitzen. Aber auch die zweite Curve B, von der verticalen Linie pr aus nach der Richtung ps verzeichnet, muss fortan oberhalb der Curve A, also auch oberhalb der Geraden mq verlaufen und alle diesem Stücke der Curve B angehörigen Punkte können nur im Inneren des Polynomes $sqmr$ liegen. Gesetzt nun, m' wäre ein Punkt derselben und man ziehe von ihm aus die $m'q'$ parallel zu mq, so fällt der Punkt q' offenbar niemals zwischen p und q, sondern ausserhalb dieses Intervalles zwischen q und s.

Setzen wir nun voraus, der Punkt p entspräche der ursprünglichen Abscisse $\mathfrak{X}_0$, m sei der zugehörige Punkt der Curve A, m' der mit einer noch grösseren Ordinate versehene Punkt der Curve B. q und q' sind nun offenbar diejenigen Punkte auf der Abscissenaxe, zu denen die einmalige Anwendung des Approximationsverfahrens bei den beiden Curven A und B führt. Bezeichnen wir ferner mit s den Durchschnittspunkt der beiden Curven A und B mit der Abscissenaxe, dem also der exacte Wurzelwerth als Abscisse angehört, so sind sq und sq' die beiden correspondirenden Fehler x'_1, welche nach der einmaligen Anwendung bestehen. Dem früher Bewiesenen zufolge ist $sq > sq'$, also der Fehler x'_1 bei der Curve A grösser, als bei der anderen B. Diese Relation bleibt aber dieselbe auch für die späteren Fehler, welche nach mehrmaliger Anwendung des Approximationsverfahrens übrig sind. In der That stellen sp und sp' in Fig. 5 die Werthe von x'_t für die beiden Curven A, B dar, und setzen wir nun, wie in der Zeichnung ersichtlich gemacht ist, $sp > sp'$ voraus, so sind sq und sq' die beiden Werthe von x'_{t+1} für diese zwei Curven und es besteht dem früher Bewiesenen zufolge zwischen ihnen die Relation: $sq > sq'$. Wir ziehen hieraus den Schluss, dass, wenn überhaupt irgend ein Fehler x'_t, der nach t-maliger Anwendung des Approximationsverfahrens noch übrig bleibt, bei der Curve A grösser ist, als bei der anderen B, dieselbe Relation auch bei den Fehlern x'_{t+1}, $x'_{t+2}, \ldots$, deren Stellenzeiger t übersteigen, fortbestehen müsse. Da nun dieses Verhalten schon für $t = 1$, und zwar eben früher bewiesen wurde, so gilt daher die Relation ganz allgemein für jedes beliebige t, und es unterliegt nun keinem Zweifel mehr, dass der nach gleich oft wiederholter Anwendung des Approximationsverfahrens übrig bleibende Fehler bei der Curve B, welche die numerisch grösseren Ordinaten besitzt, stets kleiner ausfällt, als bei der mit den kleineren Ordinaten versehenen anderen Curve A.

Von dem eben bewiesenen Satze lässt sich eine wichtige Anwendung machen, um die Convergenz des Verfahrens bei einer krummen Linie zu beurtheilen. Fig. 6 stellt ein Bogenstück

$n\ o\ r\ m$ einer Curve $y = f(x)$ vor, welche die Abscissenaxe im Punkte o schneidet. Um nun das Gesetz der Approximation bei der Gleichung $f(x) = 0$ wenigstens annäherungsweise zu finden, denken wir uns durch den Punkt o zwei Gerade $o\,m'$ und $o\,m$ derart gezogen, dass sie die Curve zwischen sich einschliessen in dem ganze Bereiche von o bis zur Ordinate $p\ m$. Die Curve orm besitzt in dem erwähnten Bereiche stets kleinere Ordinaten als die Gerade om und folglich wird bei ihr die Approximation, welche vom Punkte p ausgehen soll, minder rasch zur exacten Wurzel führen, als bei der Geraden $o\,m$. Aus demselben Grunde aber wird die Approximation bei der Curve orm viel rascher zum Ziele führen, als bei der unterhalb gelegenen om', die durchaus kleinere Ordinaten besitzt. Der Grad der Convergenz bei der Curve liegt demnach in der Mitte zwischen denjenigen, welche für die sie einschliessenden Geraden om und om' gelten und sich auf bekannte Weise durch den constanten Quotienten einer geometrischen Progression messen lassen.

Wenn das Bogenstück orm der Curve in seiner ganzen Ausdehnung stets einerlei Convexität oder Concavität besitzt, so lässt sich die Sehne om als die eine, die zum Punkte o' gezogene Tangente om' als die zweite Gerade verwenden, um den Grad der Convergenz annäherungsweise zu bestimmen durch jene bei geraden Linien. Denkt man sich nun den Punkt m unbegrenzt dem Durchschnittspunkte o genähert, gewissermassen die Sehne in demselben Masse verkürzt, als man sich mit dem Werthe $\mathfrak{X}$, dem der Punkt p entsprechen soll, der wahren Wurzel nähert, so fallen offenbar zuletzt beide Richtungen in eine einzige zusammen, nämlich in jene der Tangente om', gegeben durch die Gleichung: $y = f'(x_\infty)\,(x - x_\infty)$. Es folgt hieraus, dass im weiteren Verlaufe der Rechnung der Grad der Convergenz sich fortan demjenigen nähert, welcher bei der im Durchschnittspunkte o tangirenden Geraden: $y = f(x_\infty)(x - x_\infty)$ stattfindet. d. h. man erhält für unendlich grosse Werthe von t:

$$x_{t+u}' = x_t' \cdot q^u \tag{93}$$

wo q einen bestimmten und constanten Zahlwerth besitzt, nämlich den Werth des Bruches $\frac{\alpha'}{\alpha + \alpha'}$ für die Gerade om' die im Punkte o tangirt, d. h. den Grenzwerth, dem sich der Bruch $\frac{\Phi' - f'(x)}{\Phi'}$ für gegen den Wurzelwerth x_∞ convergirende x fortan nähert. Man sieht hieraus, dass die Reihe der successiven Fehler x', x'_1, x'_2, ... im letzten Stadium immer mehr und mehr den Charakter einer geometrischen Progression mit einem constanten Quotienten annimmt, die der im Punkte o zukommenden Tangente eigen wäre. Die Krümmung der Curve, überhaupt die Differentialquotienten von $f(x)$ der zweiten und der höheren Ordnungen haben auf den Gang der Approximation im Endstadium keinen Einfluss.

Aus all' dem bisher Gesagten geht hervor, dass man bei einer Gleichung $f(x) = 0$, deren Wurzel zwischen zwei Grenzen x_r und $x_r + \Delta$ eingeschlossen ist, in folgender Weise verfahren könne, um von der einen Grenze sowohl, wie von der anderen dem wahren Wurzelwerthe stets näher zu rücken: Man verschafft sich zuvörderst die Überzeugung, dass zwischen den beiden Grenzen x_r und $x_r + \Delta$ wirklich nur eine einzige Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt und die erste derivirte Function $f'(x)$ in dem ganzen Bereiche einerlei Zeichen besitzt und sich fortwährend im Wachsen oder im Abnehmen befindet. Hiezu eignet sich die von Fourier aufgestellte Functionenreihe am besten. Man wird in dieselbe die zwei Substitutionen x_r und $x_r + \Delta$ anstatt x ausführen und vermittelst der wahrnehmbaren Zeichenwechselverluste beim Übergange von der kleineren zur grösseren Substitution untersuchen, ob die Function $f'(x)$ wirklich nur ein einziges Mal, die beiden derivirten Functionen $f'(x)$ und $f''(x)$ aber gar nicht durch Null hindurchgehen und folglich auch stets einerlei Zeichen behalten. Findet dies wirklich Statt, so ist durch das unveränderliche Zeichen $+$ oder $-$ von $f''(x)$ auch bewiesen, dass $f'(x)$ sich stets im Zustande des Wachsens oder Abnehmens befinde, und es sind somit alle erforderlichen Bedingungen erfüllt, um mit voller Bestimmtheit das Zeichen und den grössten numerischen Werth von $f'(x)$ innerhalb dieser Grenzen x_r und $x_r + \Delta$ anzugeben. Ertheilt man nun der Grösse Φ' eben diesen numerisch grössten Werth von $f'(x)$ oder einen noch grösseren und sein Zeichen, so wird auch das Approximationsverfahren selber convergent sein gegen die zwischen x_r und $x_r + \Delta$ liegende Wurzel x, und es ist dabei gleichgiltig, ob man die Grenze x_r oder die andere $x_r + \Delta$ als Ausgangspunkt für dieselbe wählt; beide führen in völlig beliebiger Genauigkeit zum exacten Wurzelwerthe von x. Der einzige Unterschied zwischen diesen beiden Grenzen besteht nur darin, dass die über x liegende lauter zu grosse, die darunter liegende andere lauter zu kleine Werthe liefert. Würde man daher beide Grenzen gleichzeitig als Ausgangspunkte wählen, so würde man stets zwei andere und näher an einander liegende Grenzen ableiten können, zwischen denen fortan der wahre Wurzelwerth liegt. Dadurch wäre man in die Lage versetzt, über den erreichten Grad der Genauigkeit urtheilen zu können.

Der eigentliche Gang der Rechnung dabei ist folgender: Man substituirt den einen Grenzwerth z. B. x_r anstatt x in das Gleichungspolynom P und dividirt das erhaltene Substitutionsresultat $\mathfrak{P}_r$ durch den in der früher angegebenen Weise bestimmten Werth von Φ'; der hervorgehende Quotient $\frac{\mathfrak{P}_r}{\Phi'}$ wird mit entgegengesetztem Zeichen zu x_r hinzugefügt und das so gewonnene Resultat: $x_r - \frac{\mathfrak{P}_r}{\Phi'}$ ist jetzt ein genauerer Werth von x, der aber in der That zwischen x und x_r fällt. Man kann nun dieses Verfahren beliebig oft wiederholen, indem man den eben erhaltenen genaueren Werth abermals anstatt x substituirt, und das hervorgehende Substitutionsresultat wieder durch Φ' dividirt und mit entgegengesetztem Zeichen zu $x_r - \frac{\mathfrak{P}_r}{\Phi'}$ hinzufügt u. s. w. und wird dabei der exacten Wurzel im Sinne von x_r gegen x fortwährend und beliebig näher rücken, ohne sie je wirklich zu erreichen. Der so abgeleitete Werth der Wurzel kann in der Form:

$$(94) \qquad x_r + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_t$$

dargestellt werden. t ist hier die Anzahl der Wiederholungen des besprochenen Verfahrens $u_1, u_2, u_3, \ldots u_t$ sind die jedesmaligen, mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Quotienten, welche die angebrachte Correction vorstellen. Dem früher Bewiesenen nach convergirt diese Reihe für ins Unendliche wachsende t gegen die wahre, zwischen x_r und $x_r + \Delta$ liegende Wurzel, ohne sie jedoch wirklich zu erreichen. Der bestehende Fehler x'_t ist stets mit einerlei Zeichen versehen. Die Fehler $x', x'_1, x'_2, x'_3, \ldots$ sind die Glieder einer fallenden Reihe, die sich beim fortwährenden Wachsen der Stellenzeiger immer mehr einer geometrischen Progression mit constanten Quotienten nähert, d. h. der Quotient $\frac{x'_{t+1}}{x'_t}$ convergirt beim Wachsen von t ins Unendliche gegen eine bestimmte, zwischen 0 und 1 liegende Zahl q, welche den Werth $\frac{\Phi' - f(x)}{\Phi'}$ besitzt, unter x die exacte Wurzel verstanden. Es folgt hieraus, dass die Glieder der ins Unendliche fortgesetzten Summe (94) gleichfalls jener einer geometrischen Progression mit dem constanten Quotienten q fortwährend näher kommen. In der That ist ein beliebiges derselben u_{t+v} offenbar gleich der Differenz $x'_{t+v-1} - x'_{t+v}$. Da nun bei einer geometrischen Progression die Differenzen von je zwei unmittelbar auf einander folgenden Gliedern wieder eine geometrische Progression mit eben demselben constanten Quotienten, nur mit einem anderen Anfangsgliede bilden; so ist von den Gliedern u dargethan, dass sie im späteren Verlaufe einer geometrischen Reihe mit dem constanten Quotienten q immer mehr sich nähern werde. Man hat:

$$u_{t+v} = x_{t+v}'(1-q) = x_t'(1-q) \cdot q_{v-1}.$$

Die bisherigen Bemerkungen gelten hier zunächst nur für numerische Gleichungen, lassen sich aber leicht auf Buchstabengleichungen ausdehnen. Der einzige Unterschied besteht nämlich darin, dass man noch auf den Werth der Grösse a Rücksicht zu nehmen und die hier gewissermassen nur für einen speciellen Werth von a eingeleitete Voruntersuchung, ob innerhalb der beiden Grenzen x_r und $x_r + \Delta$ nur eine einzige Wurzel der Gleichung $F(x,a) = 0$ und keine der zwei derivirten $F'(x,a) = 0$, $F''(x,a) = 0$ liegt, oder nicht, jetzt für eine ganze Reihe von solchen Werthen von a, d. h. für ein ganzes Intervall von a einzuleiten hat. Findet sich ein entsprechendes Interwall von a, in welchem diese Bedingungen innerhalb der Grenzen x_r und $x_r + \Delta$ immer erfüllt bleiben, so kann man, von einem oder dem anderen Grenzwerthe ausgehend, in der eben angegebenen Weise der exacten Wurzel $\varphi(a)$ beliebig nahe kommen, wenn man nur das angegebene Verfahren hinreichend oft wiederholt. Man erhält hier wieder eine Reihe ähnlich der (94), mit dem einzigen Unterschiede, dass alle darin erscheinenden Glieder $x_r, u_1, u_2, \ldots\ldots$ Functionen von a sind. Die Grössen u sind Brüche mit einer Potenz von $\Phi'(a)$ im Nenner. Es ist nämlich $u_1 = -\frac{\mathfrak{P}_r}{\Phi'(a)}$, also $x_r + u_1 = \frac{x_r \Phi'(a) - \mathfrak{P}_r}{\Phi'(a)}$. Diesen Werth hat man nun anstatt x in das Gleichungspolynom $F(x,a)$ zu substituiren, das vorausgesetztermassen ein Polynom vom Grade m ist, und wird somit ein Substitutionsresultat erhalten, das in Gestalt einer Bruches mit $[\Phi'(a)]^m$ als Nenner erscheint, und durch $\frac{\mathfrak{M}_2}{[\Phi'(a)]^m}$ angedeutet werden mag. Diesen Ausdruck hat man nun durch $\Phi'(a)$ zu dividiren und sein Zeichen in das entgegengesetzte zu verwandeln und findet so: $u_2 = -\frac{\mathfrak{M}_2}{[\Phi'(a)]^{m+1}}$. In ähnlicher Weise ergibt sich u_3 in der Gestalt: $u_3 = -\frac{\mathfrak{M}_3}{[\Phi'(a)]^{m^2+m+1}}$, ferner $u_4 = -\frac{\mathfrak{M}_4}{[\Phi'(a)]^{m^3+m^2+m+1}}$, allgemein $u_t = -\frac{\mathfrak{M}_t}{[\Phi'(a)]^{m^{t-1}+m^{t-2}+\ldots\ldots}}$. Die solcher Gestalt erscheinende Reihe (94) convergirt in dem untersuchten Intervalle von a jedesmal gegen die zwischen x_r und $x_r + \Delta$ liegende Wurzel $\varphi(a)$.

Diese Entwickelungsweise der Wurzel $\varphi(a)$ ist durch die in §. 4 dieses Abschnittes eingeleiteten Untersuchungen vorbereitet. Es wurde dort gezeigt, wie man die bekannte, von Fourier für numerische Gleichungen angegebene Methode, Grenzen für die Wurzeln zu finden, auch auf Buchstabengleichungen in Anwendung bringen könne, um zur isolirenden Gliedersumme x_r eine zweite Grenze $x_r + \Delta$ zu finden, welche die exacte Wurzel in einem Bereiche von a zwischen sich einschliessen. Für den gegenwärtigen Zweck braucht man nur noch darauf zu achten, dass die derivirten Gleichungen $F'(x,a) = 0$, $F''(x,a) = 0$ innerhalb dieser Grenzen für x und a keine Wurzel besitzen, so dass die Functionen $F'(x,a)$ und $F''(x,a)$ stets einerlei Vorzeichen tragen, mit anderen Worten, dass die Indices dieser zwei Functionen in den Reihen (84) gleich Null werden, während die Hauptfunction $F(x,a)$ den Index 1 besitzt. Es wird dadurch der Gang der dort angegebenen Untersuchung durchaus kein anderer, sondern höchstens das Intervall von a den neu hinzugetretenen Bedingungen gemäss etwas kleiner. Hat man dieses Intervall von a mit genügender Genauigkeit ermittelt, für welches innerhalb der Grenzen x_r und $x_r + \Delta$ die Indicesreihe in (84) mit 0, 0, 1 schliest, so ist das hier besprochene Verfahren geeignet, eine convergirende Reihe für x zu liefern, nämlich die (95); es ist nur nothwendig für $\Phi'(a)$ das Substitutionsresultat $\mathfrak{P}'_r$ oder das andere $\mathfrak{Q}'_r$ zu erwählen, je nachdem x_r oder $x_r + \Delta$ die äussere Grenze vorstellt, d. h. je nachdem $\mathfrak{P}''_r$ und $\mathfrak{P}_r$ gleiche oder entgegengesetzte Zeichen besitzen.

§. 8.

Das hier auseinandergesetzte Verfahren unterscheidet sich einigermassen von dem in den früheren Abschnitten zur Entwickelung der Folgeglieder angegebenen. Die dort gegebene Regel schreibt nämlich wohl genau so, wie die hier aufgestellte, vor, den bereits entwickelten Bestandtheil der Wurzel anstatt x in das Gleichungspolynom zu setzen, hierauf das erhaltene Substitutionsresultat durch einen unverändert bleibenden Ausdruck zu dividiren und den Quotienten mit entgegengesetzten Zeichen dann als Correction zum früheren Bestandtheile der Wurzel hinzuzufügen; allein dort entwickelt man diesen Quotienten nur in seinem Anfangsgliede, während hier sein vollständiger und unentwickelter Werth genommen wird. Aus diesem Grunde unterscheidet sich auch die hier abgeleitete Reihe (94) von der dort erhaltenen geordneten und zwar vorzüglich dadurch, dass die Glieder u derselben Brüche sind von der Form $-\frac{\mathfrak{M}}{[\Phi'(a)]^p}$, wo $\mathfrak{M}$ und $\Phi'(a)$ geschlossene Polynome vorstellen. Man kann aber die Reihe (94) gleichfalls geordnet nach Potenzen von a hinstellen, wenn man jeden dieser Brüche in eine unendliche Reihe entwickelt und alle solchen addirt. Die Summe derselben ist eine nach Potenzen von a geordnete unendliche Reihe, die von der durch unmittelbare und geregelte Entwickelung abgeleiteten anderen:

$$(95) \qquad x_r + h_{r+1} a^{\xi_r+1} + h_{r+2} a^{\xi_r+2} + h_{r+3} a^{\xi_r+3} + \ldots\ldots$$

offenbar nicht verschieden ist, wie man sich leicht überzeugen kann. Es lässt sich nun auch leicht beurtheilen, ob dieselbe convergent oder divergent ist. Bekanntlich convergirt nämlich die absteigende Entwickelung eines Bruches, dessen Zähler und Nenner geschlossene Polynome sind, für alle jene Werthe der darin erscheinenden Buchstabengrösse a, deren Modulus grösser ausfällt als der grösste Modulus derjenigen Wurzelwerthe a, welche den Nenner auf Null bringen. Setzt man also den Nenner des Bruches gleich Null und sucht die mit dem grössten Modulus versehene Wurzel derselben vermittelst der verbesserten Methode von Gräffe, so bestimmt eben dieser grösste Modulus A die Intervalle von a, in welchen die Entwickelungsweise convergirt. Diese reellen Werthe von a liegen nämlich in den beiden Intervallen: $-\infty \ldots\ldots -A$ und $+A \ldots\ldots +\infty$. Will man hingegen aufsteigend nach Potenzen von a entwickeln, so findet die Convergenz Statt für alle jene Werthe von a, deren Modulus kleiner ist als der kleinste Modulus unter den Wurzeln, welche den Nenner auf Null bringen. Die reellen Intervalle für a sind somit: $-A \ldots\ldots 0$ und $0 \ldots\ldots +A$, und A bedeutet jetzt den kleinsten Modulus, der bei den Wurzeln der Gleichung vorfindig ist, welche durch Nullsetzen des Nenners hervorgeht. Im gegenwärtigen Falle, wo alle in Betracht kommenden Nenner Potenzen von $\Phi'(a)$ sind, wird man daher nur die Gleichung $\Phi'(a) = 0$ zu berücksichtigen und den grössten oder kleinsten Modulus ihrer Wurzeln zu bestimmen haben, je nachdem man die absteigende oder aufsteigende Entwickelung vorliegen hat. Der auf solche Weise gefundene Werth A ist massgebend bei allen die Convergenz der Reihen betreffenden Fragen.

Setzen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, voraus, die Reihe (94) sei absteigend entwickelt und die vorhergehende Untersuchung hätte erwiesen, dass die andere

Reihe (94) für die beiden Intervalle: $-\infty \ldots\ldots -a_2$ und $+a_1 \ldots\ldots +\infty$ convergire gegen die zwischen x_r und $x_r+\Delta$ liegende Wurzel $\varphi(a)$. Ferner sei A der grösste Modulus der Wurzeln der Gleichung $\Phi'(a)$. Man kann nun damit beginnen, die einzelnen Glieder u der Reihe (94), die Brüche sind von der Form: $-\frac{\mathfrak{M}_t}{\Phi'(a)^p}$ absteigend in eine Reihe zu entwickeln. Jede dieser Reihen ist convergirend für die beiden Intervalle $-\infty \ldots\ldots -A$ und $+A \ldots\ldots +\infty$. Ihre Summe zu x_r hinzugefügt führt nun, wie früher bemerkt worden, zu einer unendlichen Reihe, welche in ihren $r+t$ Anfangsgliedern mit der Reihe (95) übereinstimmt. Auf eine ähnliche Weise lässt sich der andere Grenzwerth $x_r+\Delta$ als Ausgangspunkt benützen und aus ihm durch t—malige Wiederholung des Approximationsverfahrens ein Werth:

$$(96) \qquad x_r+\Delta+v_1+v_2+v_3+\ldots\ldots+v_t$$

ableiten, dessen Glieder v gleichfalls Brüche sind von der Form $-\frac{\mathfrak{N}}{[\Phi'(a)]^p}$ und die sich demnach für die Intervalle $-\infty \ldots\ldots -A$ und $+A \ldots\ldots +\infty$ in convergirende Reihen absteigend nach a entwickeln lassen. Ordnet man diesen Ausdruck (96) absteigend, so liegt eine zweite unendliche Reihe vor, die mit der (95) gleichfalls in $r+t$ Anfangsgliedern übereinstimmt.

Man hat solchergestalt aus den zwei Werthen x_r und $x_r+\Delta$ zwei neue Werthe (94) und (96) abgeleitet, die absteigend entwickelt in ihren $r+t$ Anfangsgliedern mit dem wahren Wurzelwerthe (95) übereinstimmen, für die Intervalle $-\infty \ldots\ldots -A$ und $+A \ldots\ldots +\infty$ convergirende Reihen darstellen, und für die Intervalle $-\infty \ldots\ldots -a_2$ und $+a_1 \ldots\ldots +\infty$ die wahre Wurzel $\varphi(a)$ zwischen sich einschliessen. Für jene Werthe von a, welche gleichzeitig den beiden Intervallen: $-\infty \ldots\ldots -A$ und $-\infty \ldots\ldots -a_2$ oder den beiden anderen: $+A \ldots\ldots +\infty$ und $+a_1 \ldots\ldots +\infty$ angehören, findet sich die exacte Wurzel $\varphi(a)$ zwischen zwei convergirende unendliche Reihen (94) und (96) eingeschlossen, die in ihren $r+t$ Anfangsgliedern mit einander und mit der (95) übereinstimmen.

Denkt man sich nun t ins Unendliche wachsend, so werden die beiden Reihen (94) und (96) unbegrenzt gegen einander convergiren und zuletzt zusammenfallen. Die (95), welche dann von ihnen nicht mehr differirt, ist folglich für eben diese Intervalle von a convergent.

Man wird daher die Intervalle von a, für welche die absteigend geordnete Entwickelung (95) gegen die exacte Wurzel $\varphi(a)$ convergirt, finden, wenn man untersucht, welches der beiden Intervalle $-\infty \ldots\ldots -a_2$ und $-\infty \ldots\ldots -A$ die kleinere Ausdehnung besitzt, und dieselbe Untersuchung auch bei den beiden anderen $+a_1 \ldots\ldots +\infty$ und $+A \ldots\ldots +\infty$ einleitet. Die gefundenen zwei Intervalle von der geringeren Ausdehnung enthalten nur solche Werthe von a, für welche die Reihe (95) gegen $\varphi(a)$ convergirt.

Bei der aufsteigend geordneten Entwickelung gelten genau dieselben Vorgänge mit dem einzigen Unterschiede, dass unter A der kleinste Modulus der Wurzeln der Gleichung $\Phi'(a)$ zu verstehen ist, und die in Vergleichung kommenden Intervalle: $-a_2 \ldots\ldots 0$, $0 \ldots\ldots +a_1$, $-A \ldots\ldots 0$, $0 \ldots\ldots +A$ sind. Auch hier enthalten die zwei mit der kleinsten Ausdehnung versehenen Intervalle, deren eines lauter negative, das andere aber lauter positive Werthe in sich schliessen wird, nur solche Werthe von a, für welche die aufsteigend geordnete Reihe (95) gegen $\varphi(a)$ convergirt.

Aus dem bisher Erwiesenen geht also klar und deutlich hervor, dass die früher gelehrten Entwickelungen selbst dann noch, wenn sie zu unendlichen Reihen führen, vollkommen gerechtfertigt erscheinen, und man ist stets in der Lage, sowohl den Grad der erreichten

Genauigkeit anzugeben, als auch die Intervalle von a zu bestimmen, für welche diese unendlichen Reihen convergiren.

Bricht man die Reihe willkürlich bei einem Gliede ab, vorausgesetzt, dass man dieselbe mindestens bis zur vollständigen Isolirung der Wurzel fortgesetzt hat, so wird man zur Bestimmung des Ergänzungsgliedes Δ genau so verfahren, als wenn man zur entwickelten Gliedersumme x_r noch ein ferneres Entwickelungsglied $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ hinzufügen wollte mit dem einzigen Unterschiede, dass man den numerischen Werth von h_{r+1} um eine beliebige Grösse θ erhöht. Hätte man die Entwickelung schon weiter fortgeführt, so zwar, dass mit einem einzigen Schritte eine Gruppe von mehreren Folgegliedern erhalten werden kann, so wird man meistentheils gut thun, dieselben vollständig zu bilden, da dies einen geringen Mehraufwand von Rechnung erfordert, und dann auf diejenige Weise zur Bildung des Ergänzungsgliedes Δ schreiten, wie dies zu Ende des §. 2 dieses Abschnittes ausführlich angegeben wurde. Nun bleibt noch übrig, die Intervalle von a zu suchen, für welche dieses Ergänzungsglied giltig ist, und zu diesem Ende entweder die in §. 3 oder in §. 4 auseinandergesetzte Methode anzuwenden. Diese Intervalle erstrecken sich bei der absteigenden Entwickelung bis zu den unendlichen Werthen $-\infty$ und $+\infty$, bei der aufsteigenden aber gehen sie von 0 aus in der Doppelrichtung $+$ und $-$ vor. Hat man diese Intervalle, deren stets zwei zu untersuchen sind, mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmt, so ist diese erste Frage erledigt.

Soll aber entschieden werden, für welche Werthe von a die ins Unendliche fortgesetzte Reihe convergirt, so muss die Entwickelung der betreffenden Wurzel hinlänglich weit fortgesetzt werden, und zwar so lange, dass die Gliedersumme x_r weder einer Wurzel der derivirten Gleichung $F'(x, a) = 0$ noch der anderen $F''(x, a) = 0$ u. s. w. mehr angehört, kurz dass die Anfangsglieder von $\mathfrak{P}_r'$, $\mathfrak{P}_r''$ und $\mathfrak{P}_r'''$, ... unveränderliche Werthe erlangen. Hierauf hat man die Bestimmung des Ergänzungsgliedes Δ und jene des entsprechenden Intervalles von a vorzunehmen, in der eben angedeuteten Weise mit dem einzigen Unterschiede, dass noch überdies bei der Bestimmung des Intervalles von a darauf Rücksicht genommen werden muss, dass die Functionen $F''(x, a)$ und $F'(x, a)$ innerhalb der Grenzen x_r und $x_r + \Delta$ und in der ganzen Ausdehnung des Intervalles von a ihr Vorzeichen nicht ändern; kurz dass den zwei Substitutionsreihen (84) stets 0, 0, 1 als die letzten drei Indices in der entsprechenden Indicesreihe angehören. Sind alle diese Vorarbeiten vollendet, so hat man nur noch von den beiden Grenzen x_r und $x_r + \Delta$ die äussere zu suchen, d. h. jene, für welche $F''(x, a)$ und $F(x, a)$ gleiche Zeichen besitzen. Haben $\mathfrak{P}_r''$ und $\mathfrak{P}_r$ gleiche Zeichen, ist somit x_r die äussere Grenze, so setzt man die in (84) dazwischen liegende Function $\mathfrak{P}_r'$ gleich Null; findet aber das Gegentheil Statt, haben also $\mathfrak{Q}_r''$ und $\mathfrak{Q}_r$ gleiche Zeichen, so hat man $\mathfrak{Q}_r' = 0$ zu setzen. Für die so erhaltene Gleichung $\mathfrak{P}_r' = 0$ oder $\mathfrak{Q}_r' = 0$ sucht man nun den grössten oder kleinsten Modulus A der mit demselben versehenen Wurzel, je nachdem die absteigende oder aufsteigende Entwickelung vorliegt. Ist der Werth von A annäherungsweise bestimmt, so hat man nun nur zu untersuchen, ob die Werthe $-A$ und $+A$ in den für das Ergänzungsglied Δ ermittelten Intervallen von a enthalten sind oder nicht. Sind sie darin nicht enthalten, so ist die unendliche Reihe in dem vollen Intervalle von a convergent; findet sich aber der Werth A darin vor, so muss man ihre Ausdehnung so weit verkleinern, bis sich derselbe nicht mehr darin vorfindet, und hat dann wieder zwei Intervalle von a, für welche die unendliche Reihe jedenfalls convergirt.

Es ist wohl überflüssig zu bemerken, dass man diese Intervalle von a jedenfalls zu enge und überhaupt bald grösser, bald kleiner finden wird, je nachdem die Gliedersumme x_r eine grössere oder kleinere Anzahl von Entwickelungsgliedern in sich schliesst. Für das praktische Bedürfniss sind auch zunächst nur diese Werthe von a vom Belange, für welche die Convergenz eine raschere ist, während die an der Grenze der Convergenz stehenden Werthe von a ohne wesentlichen Nutzen bleiben. Man kann ferner die Gleichungen $\mathfrak{P}_r' = 0$ oder $\mathfrak{Q}_r' = 0$ durch andere ersetzen auf unendlich viele verschiedene Weisen, denn die mit $\Phi'(a)$ bezeichnete Function hat nur die Bedingung zu erfüllen, dasselbe Zeichen wie $\mathfrak{P}_r'$ und $\mathfrak{Q}_r'$ aber einen numerisch grösseren Werth zu besitzen und kann im Übrigen ganz beliebig gewählt werden, wenn sie nur diesen Bedingungen wirklich für alle in den betreffenden Intervallen liegenden Werthe von a Genüge leistet. Von der Auflösung der Gleichung $\mathfrak{P}_r' = 0$ oder $\mathfrak{Q}_r' = 0$ oder $\Phi' = 0$ kann man sich aber nicht dispensiren, wiewohl die bei der Bestimmung des Ergänzungsgliedes Δ und der giltigen Intervalle von a eingeleitete Untersuchung dargethan hat, dass keine reelle Wurzel dieser Gleichungen einen dazwischen fallenden Werth von A liefern könne, denn der massgebende Werth A könnte von einem Paare imaginärer Wurzeln herrühren und alsdann übersehen werden.

§. 9.

Bisher wurde nur jene Approximationsmethode berücksichtigt, bei welcher in der Gleichung (87) die Function $F'(x_r + \rho x', a)$ für den ganzen Verlauf der Rechnung stets durch eine und dieselbe Function $\Phi'(a)$ ersetzt wird. Dieses Verfahren liefert die Entwickelungsglieder nur einzeln und war für uns zunächst aus dem Grunde von Interesse, weil sie zur Beurtheilung der Convergenz der hervorgehenden Reihen am besten sich eignet. Man kann aber auch noch in anderer Weise vorgehen und die Function $F'(x_r + \rho x', a)$ bei jedem Schritte des Approximationsverfahrens durch eine stets neue Function ersetzen, die ihrem wahren Werthe fortwährend nachrückt. In dieser Weise pflegt man bei den numerischen Gleichungen vorzugehen. Auch bei Buchstabengleichungen ist diese Methode anwendbar und liefert dann bei hinlänglich weit fortgeschrittener Entwickelung mit einem einzigen Schritte nicht nur immer ein einziges richtiges Glied, sondern eine ganze Gruppe von solchen. Das Verfahren selbst wurde schon in der vorhergehenden Abhandlung §. 15 und §. 22 auseinandergesetzt; hier aber werden wir dasselbe von einem viel allgemeineren Gesichtspunkte ableiten und uns überzeugen, dass die dort bemerkte Eigenthümlichkeit und Gesetzmässigkeit eine unmittelbare Folge der linearen Approximationsmethode sei und überall auftaucht, wo man dieselbe anwendet.

Gehen wir von der beim dritten Gliede abgebrochenen Entwickelung von $F(x_r + x', a)$ aus:

$$F(x_r + x', a) = F(x_r, a) + x' . F'(x_r, a) + \frac{1}{2} . x'^2 F''(x_r + \rho x', a) \tag{97}$$

in der wieder $x_r + \rho x'$ eine zwischen x_r und $\varphi(a)$ fallende Mittelgrösse ist, und bilden wir durch gleich Null Setzen dieses Ausdruckes die Gleichung:

$$F(x_r, a) + x' . F'(x_r, a) + \frac{1}{2} x'^2 . F''(x_r + \rho x', a) = 0. \tag{98}$$

Dieselbe ist erfüllt, wenn man anstatt x' seinen exacten Werth $\varphi(a) - x_r$ setzt. Beim linearen Approximationsverfahren sucht man nun diesen exacten Werth der Correction x' nicht, sondern begnügt sich mit der Auflösung einer Gleichung des ersten Grades, die hier die:

$$F(x_r, a) + u F'(x_r, a) = 0 \tag{99}$$

sein mag. Sie ist von der richtigen dadurch verschieden, dass $F'(x_r, a)$ an die Stelle von $F'(x_r+\rho x', a)$ gesetzt wird, und es wurde desshalb auch die in ihr erscheinende Unbekannte zum Unterschiede von x' mit u bezeichnet. Man zieht aus ihr den Werth:

$$(100) \qquad u = -\frac{F(x_r, a)}{F'(x_r, a)}.$$

welcher von der richtigen Correction x' verschieden ausfällt und zu x_r hinzugefügt den Ausdruck $x_r + u$ liefert, der abermals von dem exacten Wurzelwerthe $\varphi(a)$ differirt und einer ferneren Correction x'' bedarf. Dieser Vorgang wurde von Newton angewendet, unterliegt aber dem Übelstande, dass man nur unter gewissen Bedingungen sich dem wahren Wurzelwerthe $\varphi(a)$ fortwährend nähert, in der Mehrzahl der Fälle sich aber davon entfernt. Diese Bedingungen sind von Fourier zuerst genau angegeben worden. Es folgt hieraus, dass die auf diesem Wege gefundenen unendlichen Reihen bisweilen gegen $\varphi(a)$ convergiren, sehr oft aber divergiren oder gegen eine andere Wurzel convergiren. Hier, wo noch überdies eine Buchstabengrösse a erscheint, ist dieses Verhalten der Reihe für verschiedene Werthe von a ein verschiedenes. Wir haben aber die auf die Convergenz oder Divergenz Bezug habende Frage bereits beantwortet und wollen hier einen anderen Punkt erörtern.

Denkt man sich in der Gleichug (98) x' durch den gleichgeltenden Werth $u + x''$ ersetzt und dabei auf die Relation (99) Rücksicht genommen, so erhält man:

$$(101) \qquad F'(x_r, a).x'' + \frac{1}{2}F''(x_r + \rho x', a).x'^2 = 0,$$

folglich:

$$(102) \qquad x'' = -\frac{F''(x_r + \rho x', a)}{2F'(x_r, a)}x'^2.$$

Man kann jetzt voraussetzen, die Entwickelung der Gliedersumme x_r sei so weit vorgeschritten, dass sich dadurch die Wurzel $\varphi(a)$ der Gleichung $F(x, a) = 0$ von allen Wurzeln der zwei derivirten Gleichungen: $F'(x, a) = 0$ und $F''(x, a) = 0$ unterscheidet, denn jene Fälle, bei welchen man selbst bei der ins Unendliche fortgesetzten Entwickelung gar nie zu diesem Punkte gelangt, weil in den zwei Functionen $F(x, a)$, $F'(x, a)$ oder in den beiden anderen $F(x, a)$, $F''(x, a)$ ein x enthaltender Factor gemeinschaftlich erscheint, wird man ohnehin, sobald man sie als solche erkennt, alsogleich durch Sonderung und gleich Null Setzen dieser Factoren viel leichter behandeln. Die unmittelbare Folge dieser Voraussetzung ist, dass die Anfangsglieder der beiden Substitutionsresultate $F'(x_r, a)$ und $F''(x_r+\rho x', a)$ vollkommen bestimmt sind und auch im weiteren Verlaufe der Rechnung, beim Zunehmen der Gliederzahl r ungeändert bleiben; namentlich ist das Anfangsglied des unbestimmten Substitutionsresultates $F''(x_r+\rho x', a)$ genau dasselbe, wie bei dem bestimmten $F''(x_r, a)$. Dass dem wirklich so sei, ist leicht einzusehen, denn würden hinzugefügte Glieder einer späteren Rangordnung noch auf die Anfangsglieder der aus $F'(x,a)$ und $F''(x,a)$ hervorgehenden Substitutionsresultate einen Einfluss nehmen, so müsste demnach auch durch eine zweckmässige Wahl dieser hinzugefügten Glieder eine Reduction auf Null in den Anfangsgliedern der Substitutionsresultate herbeigeführt werden können, und folglich x_r, der gemachten Voraussetzung zuwider, einen Bestandtheil der geordneten Entwickelung einer Wurzel der derivirten Gleichungen darstellen.

Bezeichnen wir nun die unveränderlichen Anfangsglieder der Substitutionsresultate, die aus $F'(x,a)$ und $F''(x,a)$ hervorgehen, beziehungsweise mit $\mathfrak{H}_p' a^{\mathfrak{A}_p'}$ und $\mathfrak{H}_q'' a^{\mathfrak{A}_q''}$, das Anfangsglied von x' aber mit $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} = -\frac{\mathfrak{H}_r}{\mathfrak{H}_{p'}} a^{\mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}_{p'}}$, so findet man aus der (102) das Anfangsglied von x'' in folgender Form:

$$x'' = -\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{H}_r^2\,\mathfrak{H}_q''}{\mathfrak{H}'_{p^3}} a^{\mathfrak{A}_{q''} - 3\mathfrak{A}_{p'} + 2\mathfrak{A}_r} + \ldots.$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass die am Ausdrucke $x_r + u$ noch nothwendige Correction x'' nur bei dem mit dem Exponenten $\mathfrak{A}_q' - 3\mathfrak{A}_p' + 2\mathfrak{A}_r$ versehenen Gliede und den darauffolgenden ausgeführt werden müsse, alle vorhergehenden aber ungeändert bleiben. Entwickelt man daher den Quotienten $u = -\frac{F(x_r,\,a)}{F'(x_r,\,a)}$ in eine geordnete Reihe, aber nur bis exclusive dem Gliede, welches den Exponenten $\mathfrak{A}_q'' - 3\mathfrak{A}_p' + 2\mathfrak{A}_r$ besitzt, so hat man eine Gruppe von lauter richtigen Folgegliedern, an denen keine Correction mehr anzubringen ist. Diese Eigenschaft wurde schon früher bewiesen, findet aber hier ihre eigentliche und allgemeine Begründung.

III. Bestimmung der Asymptoten bei Curven von einfacher Krümmung.

§. 10.

Es gibt wohl kein geeigneteres Mittel, um analytische Wahrheiten zur klaren Einsicht zu bringen, als geometrische Betrachtungen. Dieses Mittel leistet auch hier wesentliche Dienste und verbreitet über das Auseinandergesetzte ein helles Licht. Wir haben schon im Vorhergehenden von diesem Mittel zu wiederholten Malen Gebrauch gemacht. Hier finden wir es noch für zweckmässig, eine Anwendung der hier erörterten Auflösungsmethode auf ein Problem der analytischen Geometrie in Kürze zu erwähnen.

Eine jede Buchstabengleichung mit nur zwei Buchstabengrössen hat eine geometrische Bedeutung. Denkt man sich nämlich die unabhängige Grösse a als Abscisse, die abhängige x als Ordinate eines Punktes auf der Ebene, so entspricht der Gleichung selber eine krumme Linie von einfacher Krümmung. Allein auch alle hier erwähnten Auflösungsmethoden erhalten eine geometrische Bedeutung, indem sie gewisse Eigenschaften dieser krummen Linien aufdecken. Die absteigende Entwickelung der Wurzeln, welche vorzüglich für sehr grosse Werthe der Grösse a sich als massgebend erwiesen hat, gibt Aufschluss über den Verlauf der Curve im Bereiche sehr grosser Abscissenwerthe. Die Bestimmung der Anfangsglieder für diese Entwickelungsform liefert die Asymptoten der Curve im Bereiche unendlich grosser Abscissen. In der That drückt die einfache Gleichung $x = h_0 a^{\xi_0}$ zwar nicht den zwischen x und a stattfindenden Zusammenhang genau aus, aber unter allen Gleichungen von dieser einfachen Form $x = h a^{\xi}$ ist sie diejenige, welche für ins Unendliche wachsende oder abnehmende a, d. h. für $a = \pm\infty$ der Wahrheit am nächsten kommt, denn jede noch so kleine am Exponenten ξ_0 oder dem Coëfficienten h_0 angebrachte Änderung vergrössert den Werth des Substitutionsresultates $\mathfrak{P}_0$ für $a = \pm\infty$, wie im Vorhergehenden ersichtlich ist, und vermehrt daher die bestehende Unrichtigkeit. Dehnt man daher den Begriff der Asymptoten aus auf solche einfache Curven, die die Eigenschaft besitzen, im Bereiche des Unendlichen dem wirklichen Curvenaste so weit nahe zu kommen, dass eine fernere Annäherung nur durch Grössen niederer Ordnungen herbeigeführt werden kann, ohne dabei die Eigenschaft der unbegrenzten Annäherung der Asymptote gegen den Curvenast als eine wesentliche mit in den Begriff aufzunehmen; so führt die Bestimmung der Anfangsglieder bei der absteigenden Entwickelung zu den Asymptoten der Curve, die im Bereiche unendlich grosser Abscissen liegen. Sie lassen sich in drei Kategorien theilen, je nachdem in der asymptotischen Gleichung:

$$x = h_0 a^{\xi_0}$$

der Exponent ξ_0 positiv, gleich Null oder negativ ist. Die mit positivem ξ_0 versehenen Asymptoten sind parabolisch oder geradlinig, und zwar, wenn $\xi_0 > 1$ ist, sind dieselben Parabeln höherer Ordnungen mit der Abscissenaxe als Axe; für $\xi_0 = 1$ gerade Linien, die mit der Abscissenaxe einen Winkel einschliessen, dessen trigonometrische Tangente h_0 ist, gewissermassen eine Parabel der ersten Ordnung; endlich, wenn ξ_0 zwischen 1 und 0 liegt, abermals Parabeln der zweiten oder höheren Ordnungen, denen jedoch die Ordinatenaxe als Axe angehört. Alle diese Asymptoten der ersten Kategorie haben die Eigenschaft, dass mit der Abscisse auch die Ordinate ins Unendliche wächst.

Die mit $\xi_0 = 0$ versehenen Asymptoten stellen eine zur Abscissenaxe parallele Gerade dar.

Die mit negativem ξ_0 versehenen Asymptoten sind Hyperbeln der ersten oder einer höheren Ordnung, welche sich beim fortwährenden Wachsen der Abscissenaxe unbegrenzt nähern.

Entwickelt man die betreffenden Wurzeln in mehreren Anfangsgliedern x_r und namentlich so weit, bis man mindestens alle mit positiven Werthen von ξ, den gleich Null mit einbegriffen, erschöpft hat, so dass nur die mit negativen Exponenten versehenen Folgeglieder unentwickelt bleiben, so erhält man die Gleichungen der Asymptoten im engeren Sinne des Wortes, d. h. die Gleichungen jener von der Curve selbst differirenden Linien, welche die Eigenschaft besitzen, sich dem betreffenden Curvenaste beim fortwährenden Wachsen der Abscisse unbegrenzt zu nähern, ohne wirklich zusammenzufallen. Diese Entwickelungsweise aller mit positiven ξ und dem $\xi = 0$ versehenen Glieder ist insbesondere dann massgebend, wenn die Anfangsgleichung die folgende war: $x_0 = h_0 a$, also wenn $\xi_0 = 1$ ist und wenn dieses Anfangsglied zweien oder mehreren Wurzeln gemeinschaftlich ist, denn sie wird dann zur Entscheidung bringen, ob das nächste Folgeglied $h_1 a^{\xi_1}$ einen positiven und gebrochenen oder den Werth $\xi_1 = 0$ oder einen noch kleineren besitzt. Ist ξ_1 gebrochen und positiv, in welchem Falle eine Gruppe von zweien oder mehreren Wurzeln diesen Werth von ξ_1 besitzen muss, so bedeutet die Gleichung $x = h_0 a + h_1 a^{\xi_1}$ offenbar eine Parabel, deren Axe eben die Gerade $x = h_0 a$ ist und mit der Abscisse einen Winkel einschliesst, während im entgegengesetzten Falle: $\xi_1 = 0$ die Asymptote wirklich eine Gerade ist und bleibt, nur dass sie nicht mehr durch den Anfangspunkt hindurchgeht, sondern zur früheren $x = h_0 a$ parallel jetzt die Ordinatenaxe in einer Entfernung h_1 vom Anfangspunkte schneidet.

Die Asymptoten im engeren Sinne des Wortes lassen sich daher in drei Classen eintheilen:

1. parabolische, und zwar erstens mit einer zur Abscissenaxe parallelen Axe, wenn ξ_0 positiv und grösser als Eins ist, zweitens mit einer schief stehenden Axe, wenn $\xi_0 = 1$ und ξ_1 gebrochen positiv ist, drittens mit einer verticalen Axe, die zur Ordinatenaxe parallel ist, wenn ξ_0 positiv und kleiner als Eins, somit gebrochen ist.

2. Geradlinige, und zwar bald horizontale, bald schiefe, je nachdem $\xi_0 = 0$ oder $\xi_0 = 1$ und $\xi_1 = 0$ ist. Zu den horizontalen geradlinigen Asymptoten können füglich auch jene gerechnet werden, deren ξ_0 einen negativen Werth besitzt, wenn man annimmt, dass dem Gliede $h_0 a^{\xi_0}$ noch ein verschwindendes Glied $h a^0$ vorangeht, in welchem $h = 0$ ist, und bedenkt, dass sie nur einen speciellen Fall der horizontalen geradlinigen Asymptoten darstellen, denjenigen nämlich, wo sie mit der Abscissenaxe zusammenfallen.

3. Hyperbolische. Diese können jedoch im Grunde nicht als eine eigene Classe dargestellt werden, sondern erscheinen vielmehr als die weiter getriebene Annäherung der geradlinigen Asymptoten. Sie können entweder die Abscissenaxe selber oder eine zu ihr parallele, oder endlich eine schiefe Gerade als Asymptote besitzen.

Bei allen Asymptoten müssen die Coëfficienten h, die darin erscheinen, reelle Zahlwerthe haben, weil nur in diesem Falle ihnen eine geometrische Bedeutung zuerkannt werden kann. Imaginäre Werthe der Coëfficienten h in den asymptotischen Gleichungen deuten vielmehr darauf hin, dass die entsprechenden Äste der Curve im unendlichen Bereiche der Abscissen nicht mehr erscheinen und in diesem Sinne die Curve eine geschlossene sei.

Will man ferner nicht der Gefahr ausgesetzt sein, reelle Asymptoten für imaginäre Curvenäste zu finden und solchergestalt in Beziehung des Geschlossen- oder Nichtgeschlossenseins der Curve in einen Irrthum zu gelangen, so ist man genöthigt, die Entwickelung der Wurzeln selbst über die Anfangsglieder und über die mit positiven Exponenten ξ und dem speciellen $\xi = 0$ versehenen Glieder hinaus fortzusetzen, sobald eine Gruppe von mehreren Wurzeln diese Glieder gemeinschaftlich besitzt, und zwar so lange, bis die vollständige Isolirung der einzelnen Wurzeln dieser Gruppe erfolgt oder die völlige Gleichheit der nicht trennbaren erwiesen ist, weil man nur in diesem Falle die volle Überzeugung hat, dass in den späteren Folgegliedern imaginäre Werthe der Coëfficienten nicht mehr auftauchen können, wenn sie in der entwickelten isolirenden Gliedersumme nicht erscheinen.

Die absteigende Entwickelung führt in der angegebenen Weise zu allen Asymptoten, welche im Bereiche unendlich grosser Abscissen verlaufen, aber keineswegs zu denen, welche im Bereiche endlicher Werthe der Abscisse vorhanden sind. Man könnte zwar auf einem Umwege auch zu diesen gelangen vermittelst der absteigenden Entwickelung, indem man die beiden Buchstabengrössen a und x ihre Rollen vertauschen lässt, a als die Unbekannte, x aber als eine unabhängige Grösse betrachtet. Dieser Weg ist auch meines Wissens bisher einzig und allein befolgt worden, wie in Crammer's „Introduction à l'analyse de lignes courbes algebriques“ zu ersehen ist. Man kann aber auch auf einem directen Wege und ohne diese Vertauschung der Unbekannten zum Ziele gelangen vermittelst der Bestimmung der in den Wurzeln erscheinenden Nenner und der aufsteigenden Entwickelungsweise. Dieser Vorgang wurde zuerst von Petzval angegeben. In der That, soll für endliche Werthe α von a x einen unendlich grossen Werth erlangen, so muss die aufsteigend nach Potenzen von $a - \alpha$ geordnete Entwickelung mit einem Anfangsgliede beginnen, dessen ξ_0 negativ ist, d. h. die Wurzel mit $a - \alpha$ oder einer Potenz dieser Grösse im Nenner versehen sein. Man wird daher nach der im Vorhergehenden angegebenen Weise durch gleich Null Setzen des mit der höchsten Potenz von x verknüpften Coëfficienten A_m und Auflösung dieser Gleichung nach a alle jene speciellen Werthe von α ermitteln, welche einer Grösse $(a - \alpha)$ im Nenner einer oder mehrerer Wurzeln angehören. Einem jeden solchen Werthe α entspricht eine Gleichung:

$$a = \alpha$$

also eine verticale zur Ordinatenaxe parallele gerade Linie, die sich für fortwährend wachsende Werthe von x, für $x = \pm\infty$ einem oder mehreren Curvenästen unbegrenzt nähert. Denkt man sich nämlich die betreffende Wurzel x aufsteigend nach dieser Grösse $a - \alpha$ entwickelt, so reducirt sich der Werth dieser Reihe beim Convergiren von a gegen α immer mehr auf den des Anfangsgliedes:

$$x_0 = h_0 (a - \alpha)^{-k}$$

welches einen ins Unendliche zunehmenden Werth erhält. Setzt man zuvörderst $a - \alpha = \mathrm{a}$ und ertheilt dem a einen sehr kleinen positiven Werth, der gegen Null convergirt, so erhält dieses Anfangsglied offenbar das Zeichen von h_0 aber einen sehr grossen numerischen Werth und die Gerade $a = \alpha$ ist von dem entsprechenden Curvenaste in der Richtung der Abscissenaxe nur um eine sehr kleine Grösse entfernt, die beim fortwährenden Abnehmen von a stets kleiner und kleiner wird und der Null beliebig nahe gebracht werden kann. Ertheilt man nun dem a einen sehr kleinen negativen Werth und lässt diesen abermals gegen Null convergiren, so besitzen die entsprechenden Ordinaten x gleichfalls sehr grosse Werthe, aber jetzt entweder das Zeichen von h_0 oder das entgegengesetzte, je nachdem k eine gerade oder ungerade ganze Zahl ist. Für gebrochene Werthe von k kann das Anfangsglied x_0 imaginär werden. Dies genügt, um einzusehen, dass die Gerade $a = \alpha$, und zwar bald nur in einer, bald in beiden ihren Richtungen ins Unendliche nach auf- und abwärts verlängert, eine gerade Asymptote zur Curve ist.

Die Gleichung des Anfangsgliedes der aufsteigenden Entwickelung $x_0 = a_0 (a - \alpha)^{-k}$ oder die aus einer Gruppe von zweien oder mehreren Anfangsgliedern gebildete, selbst daher gleichfalls eine und zwar hyperbolische Asymptote dar und gibt über die Curvenäste genauere Aufschlüsse.

Man sieht hieraus, dass alle Asymptoten, die im endlichen Bereiche von a liegen, geradlinige und bei weiter getriebener Annäherung derselben hyperbolische sind.

Hiemit ist also die Bestimmung der Asymptoten geschlossen. Man sieht, dass die Bestimmung aller Asymptoten bei einer algebraischen Curve eines beliebig hohen Grades auf eine sehr einfache Weise und mit Hilfe verhältnissmässig sehr einfacher Rechnungen bewerkstelligt werden könne, und hiemit ist eine der wichtigsten Anwendungen der hier auseinandergesetzten Auflösungsmethoden in dem Gebiete der analytischen Geometrie dargethan.

Fig. 1.

Fig. 2.

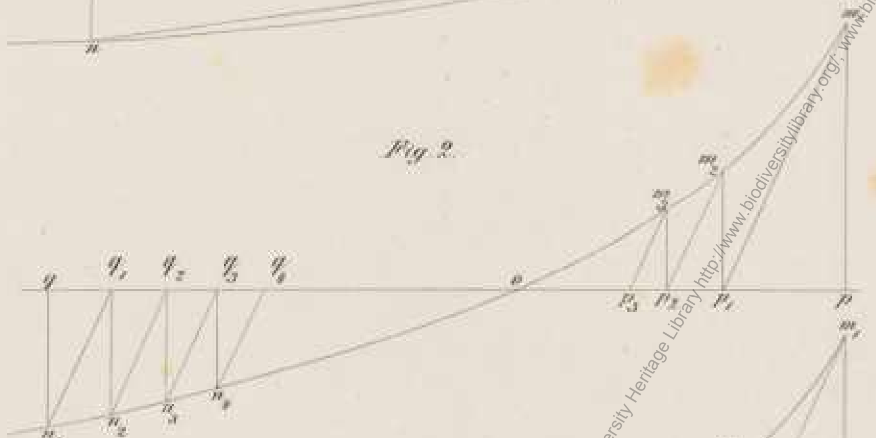


Fig. 3.

Fig. 4.

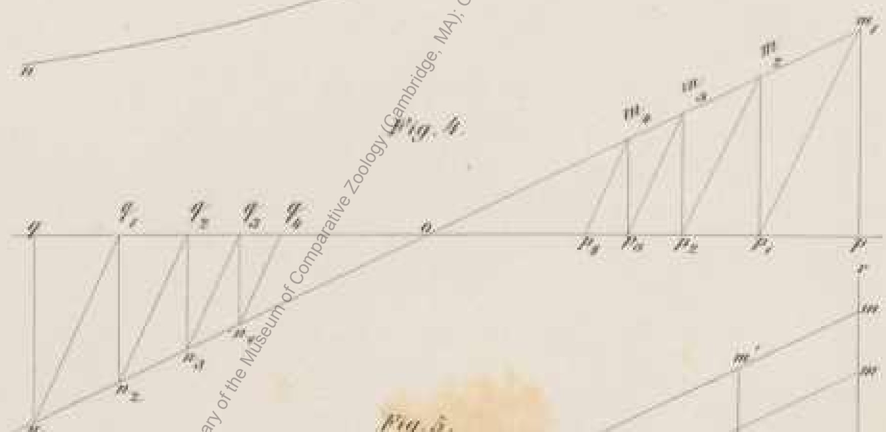
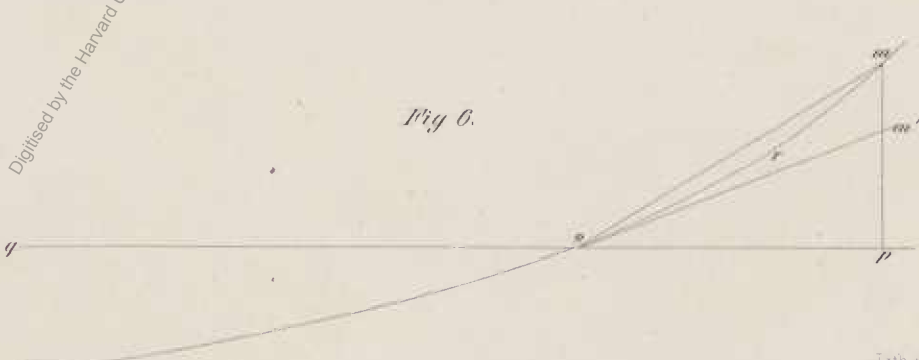


Fig. 5.

Fig. 6.



Lith. u. gedr. i. d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.