ÜBER DIE AUFLÖSUNG EINES SYSTEMES

VON

MEHREREN UNBESTIMMTEN GLEICHUNGEN

DES ERSTEN GRADES IN GANZEN ZAHLEN.

VON

DR. IGNAZ HEGER.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 24. JULI 1856

Vorbemerkung.

Probleme der unbestimmten Analytik haben wohl bisher im Allgemeinen nur eine sehr untergeordnete Anwendung in der Analysis gefunden; von dem vorliegenden Probleme jedoch kann dies nicht mehr gesagt werden; dasselbe hat vielmehr für die verschiedensten Gebiete der Analysis eine nicht geringe, nur bisher wenig beachtete Wichtigkeit. Es lassen sich solche Fälle in grosser Anzahl aufführen. Hier mögen einige Beispiele genügen.

In der Theorie der höheren Buchstabengleichungen handelt es sich sehr häufig um die Auflösung eines Systemes von binomischen Gleichungen höheren Grades mit mehreren Unbekannten, wie z. B.

$$(a) \quad x^m y^n = 1, \quad x^p y^q = 1$$

und diese lässt sich auf die Auflösung eines Systemes von zwei Gleichungen des ersten Grades:

$$(b) \quad m\xi + n\eta = i, \quad p\xi + q\eta = j$$

mit vier Unbekannten: ξ, η, i, j in ganzen Zahlen zurückführen. In der That kann man die Genüge leistenden Werthe von x und y darstellen, in der Form:

$$(c) \quad x = e^{2\pi\xi\sqrt{-1}}, \quad \eta = e^{2\pi\eta\sqrt{-1}},$$

wobei ξ und η reelle Zahlen bedeuten, die so zu wählen sind, dass die aus den Gleichungen (b) gezogenen i und j ganze Werthe erlangen. Solcher Werthe ξ, η lassen sich unendlich viele auffinden; allein für die beabsichtigte Auflösung der Gleichungen (a) sind nur jene von Wichtigkeit, die nicht um ganze Zahlen von einander differiren, weil nur diesen ξ, η stets andere und

andere Werthe von x und y entsprechen. Um sich diese beschränkte Anzahl von Werthen ξ, η zu verschaffen, hat man mit der Auflösung des Systemes (β) in ganzen Zahlen nach den vier Unbekannten ξ, η, i, j zu beginnen und findet so drei specielle Auflösungen: erstens: die unmittelbar ersichtliche: $i=0, j=0$: zweitens: die $i=\mu, j=0$, wo μ den numerisch kleinsten ganzen, von Null verschiedenen Werth von i bedeutet, dessen diese Unbekannte fähig ist, wenn $j=0$ gesetzt wird, und drittens: die $j=\nu$, wo ν den numerisch kleinsten ganzen, von Null verschiedenen Werth bezeichnet, dessen j überhaupt fähig ist. Ertheilt man nun der Reihe nach der Grösse i die Werthe: $0, 1, 2, 3, \dots, \mu-1$, der anderen j hingegen die: $0, 1, 2, 3, \dots, \nu-1$, und zwar in allen hier möglichen $\mu\nu$ Combinationen, sucht man aus den Gleichungen (β), die sich dadurch in bestimmte verwandeln, die Werthe von ξ und η , und substituirt endlich die gefundenen ξ, η in die Gleichungen (γ); so ergeben sich alle von einander verschiedenen Werthe für x und y , welche das vorliegende System (α) erfüllen. Mehr als diese $\mu\nu$ Auflösungen bestehen nicht.

Diese Methode, ein System von zwei binomischen Gleichungen aufzulösen, lässt sich auch dann noch anwenden, wenn die Anzahl der Gleichungen und mit ihr jene der Unbekannten grösser ausfällt, nur liegt dann statt der zwei Gleichungen (β) ein System von mehreren unbestimmten Gleichungen mit der doppelten Anzahl von Unbekannten zur Auflösung in ganzen Zahlen vor.

Eine andere Anwendung, die sich von der Auflösung eines Systemes von mehreren unbestimmten Gleichungen des ersten Grades machen lässt, findet sich bei der Darstellung vielgliedriger Ausdrücke in symbolischer Form mit Hilfe des Summenzeichens, das man dem allgemeinen Gliede vorsetzt. Eine solche symbolische Darstellung von Polynomen erweist sich sehr oft als vortheilhaft. Ein Beispiel dieser Art und von der einfachsten Form ist die bekannte Polynomialformel:

$$(a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r)^n = S \left[\frac{n!}{a! a_1! a_2! \dots a_r!} a^a a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_r^{a_r} x^{a+2a_2+\dots+ra_r} \right].$$

Hier bezieht sich die Summirung auf die Buchstaben $a, a_1, a_2, \dots, a_r$ und ist auf alle jene ganzen und positiven Werthe dieser Grössen auszudehnen, welche die Gleichung:

$$n = a + a_1 + a_2 + \dots + a_r$$

erfüllen. Im gegenwärtigen Falle liegt nur eine einzige unbestimmte Gleichung vor, und sie wäre auf alle möglichen Weisen, in ganzen und positiven Zahlen aufzulösen, wenn man das symbolisch ausgedrückte Polynom entwickeln wollte.

So wie hier eine einzige, können in anderen Fällen zwei und mehrere Bedingungsgleichungen auftreten, um die Ausdehnung der Summe festzustellen. So z. B. ist in eben dieser Polynomialformel der Coefficient von x^m gegeben durch:

$$S \left[\frac{n!}{a! a_1! a_2! \dots a_r!} a^a a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_r^{a_r} \right]$$

und die Summirung ist hier auf alle jene ganzen und positiven Werthe von $a, a_1, a_2, \dots, a_r$ auszudehnen, welche die zwei folgenden Bedingungsgleichungen gleichzeitig erfüllen:

$$\begin{aligned} n &= a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r \\ m &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + ra_r. \end{aligned}$$

Ähnliche Formeln mit einer, zweien und mehreren Bedingungsgleichungen lassen sich in Unzahl aufzählen: man begegnet ihnen in den verschiedensten Bereichen der Analysis.

Die Anwendungen des in Rede stehenden Problemes sind demnach sehr zahlreich, und das Gesagte dürfte zur Genüge beweisen, dass gerade dieses Problem der unbestimmten Analytik eine nicht unbedeutende Wichtigkeit besitze, und jedenfalls viel öfter in Anwendung komme, als die unbestimmten Probleme höheren Grades.

Es ist gewiss überraschend, dass gerade dieser Theil der Analytik bisher wenig gepflegt wurde, und keine allgemeine und zweckentsprechende Auflösungsmethode für solche Systeme von Gleichungen besteht.

Die allgemeine Auflösung einer einzelnen, unbestimmten Gleichung des ersten Grades in ganzen Zahlen ist schon lange bekannt. Die hiezu dienliche Methode wurde zuerst von Euler angegeben; später gab Lagrange eine andere Ableitungsweise für diese Regel, und zeigte den Zusammenhang dieses Problemes mit der Theorie der Kettenbrüche; zuletzt endlich wurde eben derselbe Gegenstand noch von Cauchy auf eine gänzlich verschiedene Art behandelt, die zunächst in theoretischer Hinsicht von Wichtigkeit ist. Hiemit war gewissermassen die Grundoperation für die unbestimmten Probleme des ersten Grades festgestellt.

Die Behandlung eines Systemes von mehreren unbestimmten Gleichungen des ersten Grades mit einer beliebig grossen Anzahl von Unbekannten war aber, einige specielle Fälle ausgenommen, nicht erledigt; sondern bestand mehr oder weniger nur in blossem Probiren, aber in keinem geregelten analytischen Verfahren. Der Weg, den man dabei einschlug, war stets den bekannten Auflösungsmethoden für bestimmte Gleichungen des ersten Grades nachgebildet. Nun eignet sich von all' diesen verschiedenen Behandlungsweisen eines Systemes von mehreren bestimmten Gleichungen des ersten Grades nur das Substitutionsverfahren für die Auflösung eines Systemes von unbestimmten Gleichungen. Dieses allein hatte einen Anspruch auf den Rang einer analytischen Methode. Alle übrigen für bestimmte Systeme bestehenden Auflösungsmethoden sind bei unbestimmten nicht anwendbar.

Wenn aber schon bei den Systemen bestimmter Gleichungen die Substitutionsmethode nicht allen Anforderungen Genüge leistet, und andere Methoden von grösserer Durchsichtigkeit als ein Bedürfniss erscheinen; so stellt sich diese Mangelhaftigkeit bei unbestimmten Gleichungen in einem noch weit höheren Grade dar. Sehr oft nämlich handelt es sich gar nicht um die wirkliche numerische Berechnung, sondern um die Aufstellung eines allgemeinen Gesetzes. Ein Beispiel dieser Art ist der von Crammer gegebene Lehrsatz für die Auflösung eines Systemes von mehreren bestimmten Gleichungen des ersten Grades, überhaupt die so fruchtbringende Lehre von der Determinante. Dieser Satz hat für die numerische Berechnung nur eine sehr untergeordnete Rolle, kommt aber in den verschiedensten Gebieten der Analysis in Anwendung und ist von unbestreitbarer Wichtigkeit. Ein ähnliches Bedürfniss stellt sich auch bei den unbestimmten Problemen des ersten Grades heraus, und von diesem Gesichtspunkte aus ist das in Rede stehende Problem bis jetzt als ungelöst zu betrachten.

Gauss hat in seinem berühmten Werke: *Disquisitiones arithmeticae* pag. 26 — 30 ein ähnliches Problem behandelt, nämlich die Auflösung eines Systemes von mehreren Congruenzen des ersten Grades mit einer gleich grossen Anzahl von Unbekannten und einem gemeinschaftlichen Modulus. Es gibt allerdings Fälle, in welchen ein System von unbestimmten Gleichungen sich darauf zurückführen lässt; allein dies ist keineswegs allgemein der Fall. Die

daselbst ausgesprochene Behauptung: „*Simili modo, ut in aequationibus, perspicitur, etiam hic totidem congruentias haberi debere, quot sint incognitae determinandae*“ wird nicht erwiesen und ist in der That unrichtig. Es besteht im Gegentheile gar kein nothwendiger Zusammenhang zwischen der Anzahl der Unbekannten und jener der Congruenzen, ohne dass dadurch das Problem unmöglich würde. Eine einzige Congruenz kann genügen, um eine grosse Anzahl von Unbekannten zu bestimmen, und eine einzige Unbekannte kann mehrere verschiedene Congruenzen gleichzeitig erfüllen. Widersprüche, denen man dabei gelegentlich begegnet und die das Problem unmöglich machen, können sowohl bei einer einzigen Congruenz, wie bei mehreren solchen vorkommen, gleichviel, wie gross die Anzahl der darin erscheinenden Unbekannten sein mag; sie hängen von ganz anderen Umständen ab.

Trotzdem, dass die erwähnte Behauptung sich als nicht stichhältig erweist, ist dennoch der von Gauss betretene Weg an das Bestehen der Gleichheit in der Anzahl der Congruenzen und der Unbekannten, als einer unerlässlichen Bedingung gebunden, und es dürfte sehr schwer halten, sein Verfahren für jene anderen Fälle anzupassen, wo diese beiden Anzahlen ungleich sind, weil es der bekannten Behandlungsweise eines Systemes bestimmter Gleichungen des ersten Grades vollkommen nachgebildet ist.

Die in der vorliegenden Abhandlung niedergelegte Methode ist ganz allgemein. Sie eignet sich eben so gut für die einfachen, wie für die complicirtesten Fälle. Denjenigen Leser, welcher über die Hauptergebnisse dieser Abhandlung einen Überblick gewinnen will, ohne sie ganz zu durchlesen, verweisen wir auf §. 17. Sie stehen mit der Lehre der Determinante in einem innigen Zusammenhange. Die gewonnenen Sätze gewähren die grösste Durchsichtigkeit und ertheilen zugleich der numerischen Berechnung die grösstmögliche Einfachheit.

§. 1.

Wenn eine Gleichung des ersten Grades, oder ein System von mehreren solchen vorliegt, welche eine grössere Anzahl von Unbekannten in sich schliessen, als sie zu bestimmen im Stande sind, und nun unter der Unzahl von Auflösungen, die ihnen entsprechen, jene hervorgehoben werden sollen, bei welchen alle Unbekannten ganze Zahlwerthe besitzen; so zerfällt diese Aufgabe in folgende drei Probleme:

Erstens: Es soll angegeben werden, ob der vorgelegten Gleichung oder dem gegebenen Systeme durch ganze Werthe sämtlicher Unbekannten Genüge geleistet werden könne. Diese Frage, deren Beantwortung nur in Ja oder Nein bestehen kann, lässt sich noch in einer allgemeineren Form, auf folgende Weise stellen: Es soll der kleinste mögliche Nenner angegeben werden, der einer Gruppe von zusammengehörigen Werthen sämtlicher Unbekannten eigen ist, wenn man sie in Bruchform auf einerlei Benennung bringt. Die Beantwortung dieser verallgemeinerten Frage besteht immer in der Angabe einer bestimmten ganzen Zahl. Ist dieselbe zufällig Eins, so bestehen ganze Auflösungen, sonst aber nicht.

Zweitens: Man soll von den bestehenden Auflösungen in ganzen Zahlen eine einzige und specielle angeben, z. B. jene, bei der gewisse Unbekannte die numerisch kleinsten Werthe besitzen.

Drittens: Es sollen alle bestehenden Auflösungen in ganzen Zahlen durch eine Formel dargestellt werden.

$$1_k = 2_k = 3_k = \dots = n_k = 0$$

der vollständigen Allgemeinheit der Untersuchung keinerlei Eintrag geschieht. Wir wollen nun die allgemeine Form der Auflösungen in ganzen Zahlen ermitteln, d. h. einen Ausdruck, der in sich alle ganzen Auflösungen, keine einzige ausgenommen, enthält, seiner allgemeinen Gestalt nach bestimmen.

Schon früher wurde bemerkt, dass

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{m+n} = 0$$

eine Auflösung in ganzen Zahlen des Systemes (1) sei. Wir werden nun noch die übrigen zu ermitteln haben, bei welchen einige oder alle Unbekannte von Null verschiedene ganze Werthe erhalten. Dass solche wirklich bestehen, lässt sich erweisen, wie alsogleich geschehen soll. Um aber den Beweis in der einfachsten Weise führen zu können, ohne uns in die Discussion verschiedener Ausnahmen einlassen zu müssen, die die Führung des Beweises keineswegs unmöglich machen, sondern nur seine Gestalt verändern; wollen wir von den Voraussetzungen ausgehen: erstens, dass das System (1) wirklich aus n von einander verschiedenen Gleichungen bestehe, d. h. dass keine derselben aus den übrigen durch Multiplication mit gewissen Zahlen und Addition hervorgehen könne, und zweitens, dass die n Unbekannten:

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}$$

durch dieselben bestimmt werden können, wenn man die übrigen entweder mit beliebigen Zahlwerthen belegt, oder als unabhängige Veränderliche betrachtet. Es ist hinreichend bekannt, dass diese zwei gemachten Voraussetzungen nicht nothwendig immer erfüllt sind, und solche Ausnahmefälle gar nicht zu den Seltenheiten gehören, wo unter den n Gleichungen eines gegebenen Systemes, zwei oder mehrere von den übrigen nicht wesentlich verschieden sind; ferner, dass gewisse, der darin enthaltenen Unbekannten, in keinerlei Weise die Rolle der abhängigen Veränderlichen zu übernehmen im Stande sind; andererseits ist es aber auch einleuchtend, dass man bei der hier vorausgesetzten Form der Gleichungen (1) diesen beiden Bedingungen, durch Weglassen der von den übrigen nicht verschiedenen Gleichungen und durch ein entsprechendes Ordnen der Unbekannten, stets Genüge leisten könne. Bei der allgemeineren Form (2) könnte dies ganz allgemein nicht behauptet werden, weil hier ein Widersprechen der Gleichungen im Bereiche der Möglichkeit liegt; und solchergestalt gewahren wir einen neuen Vorzug der hier getroffenen Wahl, in Bezug auf die Form der Gleichungen (1).

Nach diesen Voraussetzungen lässt sich der Beweis, dass auch von Null verschiedene ganze Auflösungen des Systemes bestehen, ohne Schwierigkeit führen, so wie die allgemeine Form der vollständigen Auflösung in ganzen Zahlen ableiten.

Man denke sich das System (1) auf bekannte Weise nach $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}$ aufgelöst, indem man die überschüssigen Grössen $x_1, x_2, \dots, x_m$ als unabhängige Veränderliche betrachtet. Die Werthe dieser Unbekannten lassen sich nach dem, was über Systeme linearer Gleichungen bekannt ist, darstellen in Bruchform. Der gemeinschaftliche Nenner aller dieser Brüche ist eine bestimmte Zahl, die Zähler aber sind Polynome, welche die überschüssigen Grössen $x_1, x_2, \dots, x_m$ enthalten in linearer Form, aber kein constantes Glied besitzen. Also im Allgemeinen sind es Brüche von der Form:

$$\frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3 + \dots + M_m x_m}{N}$$

$M_1, M_2, M_3, \dots, M_m$ und N sind bestimmte ganze Zahlen. Den früher gemachten Voraussetzungen zufolge ist N jedenfalls von Null verschieden, da ein Verschwinden dieser Grösse nur in jenen zwei Ausnahmefällen vorkommen kann, wo entweder nicht alle m Gleichungen von einander verschieden sind, oder doch wenigstens die n Grössen $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}$ nicht durch dieselben bestimmt werden. Hier unterliegt es nun keinem Zweifel mehr, dass man die Grössen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ von Null verschieden, ganz und dermassen wählen könne, dass die Werthe aller dieser Brüche, oder was dasselbe ist, jene von $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}$ ganz ausfallen. In der That erfolgt dies sonder Zweifel, wenn man für $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ ganze Zahlen setzt, welche durch N theilbar sind, und somit ist also erwiesen, dass das System (1) wirklich auch durch von Null verschiedene ganze Zahlwerthe sämtlicher Grössen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m+n}$, und zwar auf unendlich viele verschiedene Weisen erfüllt werden könne. Wir wollen jetzt durch eine allgemeine Formel alle diese unendlich vielen verschiedenen Auflösungen darzustellen versuchen.

Es lässt sich zeigen, dass alle Werthe einer Unbekannten, welche den unendlich vielen ganzen Auflösungen entsprechen, die Glieder einer arithmetischen Reihe bilden. Bezeichnen wir mit $\overset{1}{x}$ den numerisch kleinsten und von Null verschiedenen Werth von x_1 , der unter allen möglichen ganzen Auflösungen des vorliegenden Systemes vorkommt. Dass ein solcher wirklich existirt, kann wohl nicht mehr bezweifelt werden, nachdem gerade früher erwiesen wurde, dass von Null verschiedene Werthe der Unbekannten, also auch von x_1 , den Gleichungen genügen. Die diesem kleinsten Werthe x_1 entsprechenden ganzen Werthe der Unbekannten, oder, Falls deren wieder mehrere verschiedene bestehen, eine specielle Zusammenstellung solcher, gleichgiltig, ob sie gleich Null, oder davon verschieden sind, seien: $\overset{1}{x}_2, \overset{1}{x}_3, \overset{1}{x}_4, \dots, \overset{1}{x}_{m+n}$. Es ist nun eine unmittelbare Folge, dass auch dann die Producte dieser bestimmten Werthe mit einer völlig willkürlichen ganzen Zahl ξ_1 , d. h.

$$\overset{1}{x}_1 \xi_1, \overset{1}{x}_2 \xi_1, \overset{1}{x}_3 \xi_1, \dots, \overset{1}{x}_{m+n} \xi_1$$

den Gleichungen genügen werden. In der That unterscheiden sich die durch Substitution dieser Werthe hervorgehenden Substitutionsresultate von jenen der früheren Werthe nur in dem hinzugeetretenen Factor ξ_1 und sind demnach gleichfalls Null, d. h. diese Werthe erfüllen die Gleichungen (1). Es bestehen demnach unzählig viele Werthe von x_1 , die alle durch die Formel:

$$(5) \quad x_1 = \overset{1}{x}_1 \xi_1$$

vorgestellt werden, unter ξ_1 eine völlig willkürliche Zahl verstanden. Allein ausser diesen Werthen sind auch keine andern mehr möglich. Gesetzt nämlich, es bestünde noch ein anderer ganzer Werth von x_1 , dem auch ganze Werthe der übrigen Unbekannten $x_2, x_3, \dots, x_{m+n}$ entsprechen, der sich nicht in der Form (5) darstellen lässt, mit andern Worten, der durch $\overset{1}{x}_1$ nicht theilbar ist; so könnte $\overset{1}{x}_1$ nicht der kleinste mögliche von Null verschiedene ganze Werth sein, dessen x_1 fähig ist. In der That sei $\bar{x}_1$ dieser Werth, so liegt derselbe offenbar zwischen zwei zunächst an einander liegenden Werthen der Formel (5) z. B.

$$\overset{1}{x}_1 \bar{\xi} < \bar{x}_1 < \overset{1}{x}_1 (\bar{\xi} + 1)$$

und es ist offenbar:

$$0 < \bar{x}_1 - \overset{1}{x}_1 \bar{\xi} < \overset{1}{x}_1$$

aber gleichzeitig $\overline{x_1} - \overline{x_1 \xi}$ zufolge der linearen Form der Gleichungen ein Genüge leistender ganzer Werth, und folglich wäre nicht $\overline{x_1}$, sondern $\overline{x_1 - x_1 \xi}$ der kleinste unmerische Werth, dessen x_1 fähig ist, was der früher gemachten Voraussetzung widerspräche. Es folgt hieraus, dass keine ganze Auflösung des Systemes (1) bestehen könne, in der x_1 einen Werth besitzt, der durch die Formel (5) nicht darstellbar wäre.

Noch eine wichtige Folgerung wollen wir hier ziehen. Es enthalten nämlich die Zahlen:

$$\overline{x_1} , \overline{x_2} , \overline{x_3} , \dots , \overline{x_{m+n}}$$

keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich, denn wäre ein solcher vorhanden, so würden für ξ , statt ganzer Zahlen, auch Brüche mit eben diesem Factor im Nenner gesetzt werden können, ohne dass

$$\overline{x_1 \xi} , \overline{x_2 \xi} , \overline{x_3 \xi} , \dots , \overline{x_{m+n} \xi}$$

aufhören, ganze Werthe zu sein und die Gleichungen zu erfüllen, x_1 aber würde kleinere Werthe, als $\overline{x_1}$ annehmen können, was zu dem schon früher erwähnten Widerspruch führen würde, und demnach unstatthaft ist.

Wenn auch hier bewiesen wurde, dass x_1 in keiner andern Form, als in der (5) vorkommen könne, so gilt dies doch keineswegs von den übrigen Unbekannten in Bezug auf die für dieselben hier gefundenen Werthe:

$$\overline{x_2 \xi} , \overline{x_3 \xi} , \dots , \overline{x_{m+n} \xi}$$

Es lässt sich im Gegentheile zeigen, dass ausser diesen unendlich vielen Auflösungen noch andere bestehen. In der That setzen wir in den Gleichungen (1)

$$(6) \quad x_1 = \overline{x_1 \xi} , \quad x_2 = \overline{x_2 \xi} + x'_2 , \quad x_3 = \overline{x_3 \xi} + x'_3 , \quad \dots , \quad x_{m+n} = \overline{x_{m+n} \xi} + x'_{m+n}$$

unter $x'_2 , x'_3 , \dots , x'_{m+n}$ unbestimmte Zusätze verstanden, so erhält man neue Gleichungen, welche die neuen Unbekannten $x'_2 , x'_3 , \dots , x'_{m+n}$ in sich schliessen und ihre Werthe zu bestimmen haben. Diese Gleichungen unterscheiden sich von den (1), und lassen sich unmittelbar daraus ableiten, wenn man:

$$x_1 = 0 , \quad x_2 = x'_2 , \quad x_3 = x'_3 , \quad \dots , \quad x_{m+n} = x'_{m+n}$$

setzt. Sie sind folgende:

$$(7) \quad \begin{aligned} 1_2 x'_2 + 1_3 x'_3 + \dots + 1_m x'_m + 1_{m+1} x'_{m+1} + \dots + 1_{m+n} x'_{m+n} &= 0 \\ 2_2 x'_2 + 2_3 x'_3 + \dots + 2_m x'_m + 2_{m+1} x'_{m+1} + \dots + 2_{m+n} x'_{m+n} &= 0 \\ 3_2 x'_2 + 3_3 x'_3 + \dots + 3_m x'_m + 3_{m+1} x'_{m+1} + \dots + 3_{m+n} x'_{m+n} &= 0 \\ \dots & \\ n_2 x'_2 + n_3 x'_3 + \dots + n_m x'_m + n_{m+1} x'_{m+1} + \dots + n_{m+n} x'_{m+n} &= 0 \end{aligned}$$

Sie stellen gleichfalls ein System von unbestimmten Gleichungen dar, wenn überhaupt m einen von Eins verschiedenen Werth besitzt, aber mit $m-1$ überschüssigen Grössen, und verstatten gleichfalls unendlich viele verschiedene von Null differirende Auflösungen, wie früher allgemein bewiesen worden. Wendet man hier die eben früher angewendeten Schlussfolgerungen an, so gelangt man zur Überzeugung, dass kein einziger Werth von x'_2 bestehen könne, der nicht durch die Formel:

$$(8) \quad x'_2 = \overset{2}{x}_2 \xi_2$$

gegeben wäre, unter $\overset{2}{x}_2$ eine bestimmte ganze Zahl verstanden, die den kleinsten von Null verschiedenen Werth angibt, dessen x'_2 fähig ist, um eine Auflösung des Systemes in ganzen Zahlen zu ermöglichen, und wo ξ_2 eine völlig willkürliche Zahl bedeutet. Die Werthe der übrigen Unbekannten sind, wohl nicht alle, aber doch einige, gegeben durch die Formel:

$$(9) \quad x'_3 = \overset{2}{x}_3 \xi_2, \quad x'_4 = \overset{2}{x}_4 \xi_2 \dots \dots x'_{m+n} = \overset{2}{x}_{m+n} \xi_2$$

wo $\overset{2}{x}_3, \overset{2}{x}_4, \dots, \overset{2}{x}_{m+n}$ ganze Zahlen vorstellen, die irgend einer speciellen Auflösung des Systemes (7) entsprechen, wenn $x'_2 = \overset{2}{x}_2$ gesetzt wird. Substituiert man diese Werthe (8), (9) in die Gleichungen (6), so erhält man:

$$(10) \quad x_1 = \overset{1}{x}_1 \xi_1, \quad x_2 = \overset{1}{x}_2 \xi_1 + \overset{2}{x}_2 \xi_2, \quad x_3 = \overset{1}{x}_3 \xi_1 + \overset{2}{x}_3 \xi_2 \dots \dots x_{m+n} = \overset{1}{x}_{m+n} \xi_1 + \overset{2}{x}_{m+n} \xi_2$$

und es ist nunmehr keinem Zweifel unterworfen, dass die beiden ersten dieser Gleichungen (10) alle möglichen ganzen Werthe von x_1 und x_2 liefern, welche in den ganzen Auflösungen des Systemes (1) erscheinen können. Von den übrigen Werthen (10) gilt dies jedoch nicht mehr, im Gegentheile bedürfen dieselben alle noch einer Completirung, ausser wenn zufällig $m=2$ ist. Diese Vervollständigung der Werthe (10) lässt sich auf dieselbe Weise vollführen, wie jene der früheren Werthe so eben bewerkstelligt wurde. Sie führt zunächst zu folgenden drei complete Werthen:

$$(11) \quad \begin{aligned} x_1 &= \overset{1}{x}_1 \xi_1 \\ x_2 &= \overset{1}{x}_2 \xi_1 + \overset{2}{x}_2 \xi_2 \\ x_3 &= \overset{1}{x}_3 \xi_1 + \overset{2}{x}_3 \xi_2 + \overset{3}{x}_3 \xi_3 \end{aligned}$$

und hier bedeutet ξ_3 eine willkürliche ganze Zahl, $\overset{3}{x}_3$ aber den kleinsten möglichen, von Null verschiedenen Werth von x_3 , welcher für $x_1 = 0, x_2 = 0$ im Systeme (1) ganze Auflösungen ermöglicht.

Dieses Verfahren der Completirung der gewonnenen Werthe ist so lange fortzusetzen, bis auch der Werth der letzten überschüssigen Unbekannten x_m vervollständigt worden. Ist aber dies geschehen, so sind dann auch die Werthe der übrigen Unbekannten $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}$ vollständig, da sie durch die vorliegenden n Gleichungen vollkommen bestimmt werden, sobald man über die überschüssigen Grössen $x_1, x_2, \dots, x_m$ verfügt hat.

Man gelangt so zu den folgenden Werthen:

$$(12) \quad \begin{aligned} x_1 &= \overset{1}{x}_1 \xi_1 \\ x_2 &= \overset{1}{x}_2 \xi_1 + \overset{2}{x}_2 \xi_2 \\ x_3 &= \overset{1}{x}_3 \xi_1 + \overset{2}{x}_3 \xi_2 + \overset{3}{x}_3 \xi_3 \\ &\dots \dots \dots \\ x_m &= \overset{1}{x}_m \xi_1 + \overset{2}{x}_m \xi_2 + \overset{3}{x}_m \xi_3 + \dots \dots + \overset{m}{x}_m \xi_m \\ x_{m+1} &= \overset{1}{x}_{m+1} \xi_1 + \overset{2}{x}_{m+1} \xi_2 + \overset{3}{x}_{m+1} \xi_3 + \dots \dots + \overset{m}{x}_{m+1} \xi_m \\ &\dots \dots \dots \\ x_{m+n} &= \overset{1}{x}_{m+n} \xi_1 + \overset{2}{x}_{m+n} \xi_2 + \overset{3}{x}_{m+n} \xi_3 + \dots \dots + \overset{m}{x}_{m+n} \xi_m \end{aligned}$$

Diese Form schliesst in sich m willkürliche ganze Grössen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m$, so viele nämlich, als überschüssige Unbekannte in den Gleichungen (1) erscheinen, und diesem

Umstände ist es zuzuschreiben, dass wirklich alle möglichen ganzen Auflösungen des Systemes (1) aus diesen Formeln gewonnen werden können, indem man den darin erscheinenden willkürlichen Grössen alle möglichen ganzen (sowohl positiven, wie negativen) Werthe ertheilt. Man bemerkt ferner, dass diese willkürlichen Grössen nicht in allen überschüssigen Unbekannten vorkommen: x_1 enthält nur eine einzige derselben, nämlich ξ_1 ; x_2 enthält deren zwei: ξ_1, ξ_2 ; x_3 deren drei: ξ_1, ξ_2, ξ_3 und nur die letzte derselben x_m enthält alle m Grössen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m$ in sich, gerade so, wie alle übrigen abhängigen Unbekannten: $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}$.

Die Grössen $x_1^1, x_2^2, x_3^3, \dots, x_m^m$ sind vollkommen bestimmte Zahlen: x_1^1 ist nämlich der numerisch kleinste von Null verschiedene Werth, dessen x_1 überhaupt fähig ist, ohne irgend einer der übrigen Unbekannten einen gebrochenen Werth aufzumöthigen; x_2^2 ist ebenso der kleinste numerische, von Null verschiedene Werth von x_2 , aber unter der Voraussetzung, dass $x_1^1 = 0$ gesetzt worden; x_3^3 ist der kleinste numerische von Null verschiedene Werth dessen x_3 fähig ist, aber nicht überhaupt, sondern für $x_1 = x_2 = 0$ u. s. w. x_m^m endlich der kleinste zulässige nicht verschwindende numerische Werth von x_m , wenn alle übrigen überschüssigen Unbekannten gleich Null gesetzt werden. Dessgleichen sind auch die Grössen $x_{m+1}^m, x_{m+2}^m, \dots, x_{m+n}^m$ vollkommen bestimmte Zahlen, denn sie gehen durch Auflösung der Gleichungen (1) hervor, wenn man über alle darin erscheinenden überschüssigen Unbekannten in folgender Weise verfügt hat:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{m-1} = 0, \quad x_m = x_m^m.$$

Alle übrigen in den Formeln (12) erscheinenden Grössen $x_2^1, x_3^1, x_3^2, \dots$ unterliegen noch immer einer gewissen Willkürlichkeit, die aber der Brauchbarkeit derselben keinerlei Eintrag thut. Es ist nämlich klar, dass x_2^1 um ein Vielfaches von x_2^2 nach Belieben geändert werden könne, ohne dass die für x_2 bestehende Formel aufhören wird, alle möglichen ganzen Werthe dieser Unbekannten zu liefern. Gleiches gilt von allen übrigen Grössen $x_3^1, x_3^2, \dots$. Es besteht demnach nicht blos eine einzige Formel der erwähnten Art, sondern unendlich viele verschiedene, die aber alle in Bezug auf Brauchbarkeit gleichen Werth besitzen. Diese Willkürlichkeit lässt sich freilich wohl auch beheben, man dürfte nur z. B. die Bestimmung treffen, dass alle Grössen:

$$\begin{matrix} x_2^1 \\ x_3^1, x_3^2 \\ \dots \\ x_m^1, x_m^2, x_m^3, \dots, x_m^{m-1} \end{matrix}$$

die numerisch kleinsten und positiven Werthe erhalten sollen, deren sie überhaupt fähig sind, so würde also gleich jede Willkürlichkeit verschwinden.

Die in diesen Formeln angenommene Ordnung der Unbekannten lässt sich in den meisten Fällen durch jede beliebige andere ersetzen, allein in gewissen Ausnahmefällen, die später zum Gegenstande einer genauen Erörterung werden gemacht werden, besteht auch in dieser Hinsicht eine gewisse Beschränkung, da sich bisweilen einige Unbekannte nicht dazu eignen, die Rolle der unabhängigen Veränderlichen zu übernehmen, was im Grunde hier die m überschüssigen Unbekannten thun.

$$(14) \quad \begin{aligned} x_m &= x_m^0 + x_m^1 \xi_1 + x_m^2 \xi_2 + x_m^3 \xi_3 + \dots + x_m^m \xi_m \\ x_{m+1} &= x_{m+1}^0 + x_{m+1}^1 \xi_1 + x_{m+1}^2 \xi_2 + x_{m+1}^3 \xi_3 + \dots + x_{m+1}^m \xi_m \\ &\dots \\ x_{m+n} &= x_{m+n}^0 + x_{m+n}^1 \xi_1 + x_{m+n}^2 \xi_2 + x_{m+n}^3 \xi_3 + \dots + x_{m+n}^m \xi_m \end{aligned}$$

Hier bedeutet nun

$$x_1^0 \quad x_2^0 \quad x_3^0 \quad \dots \quad x_{m+n}^0$$

irgend eine specielle Auflösung der Gleichungen (2) in ganzen Zahlen, die übrigen Glieder haben die bekannte Bedeutung.

Ist hingegen in (13) x_k^0 von Eins verschieden, zum Beispiele gleich N , so verstattet offenbar das System (2) keine ganzen Auflösungen. Es wird aber die Auflöslichkeit des Systemes (2) in ganzen Zahlen allsogleich möglich, wenn man alle im zweiten Theile dieser Gleichungen erscheinenden Constanten $1_k, 2_k, \dots, n_k$ mit der Zahl N multiplieirt. Dies geschieht aber geradezu, wenn man die Unbekannten in Bruchform (4) mit den Nenner N aufstellt; und die ganzen Auflösungen, gezogen aus den solchergestalt veränderten Gleichungen, sind die Werthe der Zähler dieser Brüche. Es folgt hieraus, dass die mit dem kleinsten Nenner N versehenen Auflösungen des Systemes (3) gegeben sind durch die Formel:

$$(15) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{N} (x_1^0 + x_1^1 \xi_1) \\ x_2 &= \frac{1}{N} (x_2^0 + x_2^1 \xi_1 + x_2^2 \xi_2) \\ x_3 &= \frac{1}{N} (x_3^0 + x_3^1 \xi_1 + x_3^2 \xi_2 + x_3^3 \xi_3) \\ &\dots \\ x_m &= \frac{1}{N} (x_m^0 + x_m^1 \xi_1 + x_m^2 \xi_2 + x_m^3 \xi_3 + \dots + x_m^m \xi_m) \\ x_{m+1} &= \frac{1}{N} (x_{m+1}^0 + x_{m+1}^1 \xi_1 + x_{m+1}^2 \xi_2 + x_{m+1}^3 \xi_3 + \dots + x_{m+1}^m \xi_m) \\ &\dots \\ x_{m+n} &= \frac{1}{N} (x_{m+n}^0 + x_{m+n}^1 \xi_1 + x_{m+n}^2 \xi_2 + x_{m+n}^3 \xi_3 + \dots + x_{m+n}^m \xi_m). \end{aligned}$$

Über Systeme von zwei Gleichungen, mit mehr als zwei Unbekannten.

§. 3.

$$(16) \quad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots + d_1 u + e_1 v + g_1 w &= k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots + d_2 u + e_2 v + g_2 w &= k_2 \end{aligned}$$

sei das gegebene System von zwei Gleichungen des ersten Grades mit einer beliebig grossen Anzahl von Unbekannten: $x, y, z, \dots, u, v, w$.

1. Erörterung der Bedingung für das Vorhandensein ganzer Auflösungen.

Die Frage, ob einem vorliegenden Systeme von zwei Gleichungen ganze Werthe der Unbekannten genügen können, oder nicht, lässt zwar in einem jeden speciellen Falle nur

immer eine einzige Beantwortung zu: Ja oder Nein; allein man kann auf sehr verschiedenen Wegen zu diesem Endresultate gelangen. Die Beantwortung dieser Frage kann nämlich nicht unmittelbar, durch blosses Ansehen der Gleichungen erfolgen, sondern erfordert immer eine Rechnung. Dieses Rechnungsverfahren kann jedoch auf sehr viele verschiedene Weisen eingeleitet werden, und alle diese verschiedenen Weisen führen zu demselben Endresultate; aber nicht alle sind von gleichem Werthe in Bezug auf Einfachheit und Übersicht. Ich bin durch eine sorgsame Prüfung all' der verschiedenen möglichen Methoden zu einer bestimmten Regel gelangt, welche vor allen übrigen einen unbestreitbaren Vorzug der Einfachheit und Allgemeinheit besitzt.

Die Regel lautet folgendermassen: Man bilde aus den Coëfficienten der beiden gegebenen Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot \dots \cdot d_1 \cdot e_1 \cdot g_1 \\ a_2 \cdot b_2 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot d_2 \cdot e_2 \cdot g_2 \end{aligned}$$

die Grössen, welche unserer Bezeichnungsweise entsprechend, durch:

$$(17) \quad \begin{aligned} & (a_1 b_2) \\ & (a_1 c_2) \cdot (b_1 c_2) \\ & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & (a_1 e_2) \cdot (b_1 e_2) \cdot (c_1 e_2) \cdot \dots \cdot (d_1 e_2) \\ & (a_1 g_2) \cdot (b_1 g_2) \cdot (c_1 g_2) \cdot \dots \cdot (d_1 g_2) \cdot (e_1 g_2) \end{aligned}$$

angedeutet werden, d. h. die Determinanten: $(a_1 b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$, $(a_1 c_2) = a_1 c_2 - a_2 c_1$, $(b_1 c_2) = b_1 c_2 - b_2 c_1$ u. s. w. und suche nun ihren grössten gemeinschaftlichen Theiler. Ist derselbe gleich Eins, so sind ganze Auflösungen des gegebenen Systemes wirklich vorhanden, und zwar für alle beliebigen ganzen Werthe von k_1 und k_2 . Ist hingegen dieser grösste gemeinschaftliche Theiler eine von Eins verschiedene Zahl, so bestehen im Allgemeinen keine ganzen Auflösungen und können nur ausnahmsweise, d. h. nur für specielle Werthe von k_1 und k_2 erscheinen. Bevor wir jedoch zum Beweise dieses Lehrsatzes schreiten können, müssen wir noch früher einige Hilfssätze vorausschicken und erweisen, welche denselben vorbereiten.

§. 4.

1. Wenn die dem Systeme (16) entsprechenden Determinanten (17) keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen, so ist der grösste gemeinschaftliche Divisor von g_1 und g_2 von jenem der mit g verknüpften Grössen:

$$(18) \quad (ag) \cdot (bg) \cdot (cg) \cdot \dots \cdot (dg) \cdot (eg)$$

nicht verschieden.

Bezeichnen wir mit ϕ_g den grössten gemeinschaftlichen Theiler der mit g verknüpften Grössen (18), hingegen mit φ_g jenen der von g freien:

$$(19) \quad \begin{aligned} &(ab) \\ &(ac) \quad . \quad (bc) \\ &\quad . \quad . \quad . \\ &(ae) \quad . \quad (be) \quad . \quad (ce) \quad . \quad . \quad . \quad (de). \end{aligned}$$

so ist unmittelbar einleuchtend, dass φ_g und ψ_g zwei relative Primzahlen sind, denn jeder Factor, welcher diesen beiden Zahlen gemeinschaftlich zukäme, würde auch gleichzeitig in allen Grössen der Gruppe (18) und der andern (19), somit in allen Grössen (17) erscheinen, was der gemachten Voraussetzung widerspräche. Führen wir nun, um diese Factoren ersichtlich zu machen, die neuen Bezeichnungen ein:

$$(20) \quad \begin{aligned} (ab) &= \varphi_g(ab) \\ (ac) &= \varphi_g(ac) \quad . \quad (bc) = \psi_g(bc) \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ (ae) &= \varphi_g(ae) \quad . \quad (be) = \varphi_g(be) \quad . \quad (ce) = \varphi_g(ce) \quad . \quad . \quad . \quad (de) = \varphi_g(de) \\ (ag) &= \psi_g(ag) \quad . \quad (bg) = \psi_g(bg) \quad . \quad (cg) = \psi_g(cg) \quad . \quad . \quad . \quad (dg) = \psi_g(dg) \quad . \quad (eg) = \psi_g(eg) \end{aligned}$$

wobei:

$$(21) \quad \begin{aligned} &(ab) \\ &(ac) \quad . \quad (bc) \\ &\quad . \quad . \quad . \\ &(ae) \quad , \quad (be) \quad , \quad (ce) \quad . \quad . \quad . \quad (de) \end{aligned}$$

als eine Gruppe von Zahlen anzusehen ist, welche keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen können, und für die andere Gruppe:

$$(22) \quad (ag) \quad . \quad (bg) \quad . \quad (cg) \quad . \quad . \quad . \quad (dg) \quad . \quad (eg)$$

genau dasselbe gilt. Wir müssen hier die Relationen:

$$(23) \quad \begin{aligned} a_1(ac) - b_1(ac) + c_1(ab) &= 0 \\ a_2(bc) - b_1(ac) + c_1(ab) &= 0 \end{aligned}$$

vorausschieken, von deren identischem Erfülltsein man sich unmittelbar überzeugen kann, wenn man die Grössen (ab) , (ae) , (bc) durch ihre binomischen Werthe ersetzt und die dabei möglichen Reductionen durchführt. Solcher Relationen lassen sich hier so viele Paare aufstellen, als die Grössen $a, b, c, \dots, d, e, g$ Combinationen zu dreien zulassen. Sie lassen sich aus den (23) ableiten, wenn man die Grössen a, b, c beziehungsweise durch jene der andern Combination: a, b, d ; a, b, e ; $\dots$ ersetzt. An ihrer Giltigkeit ist nicht zu zweifeln. Für unseren Zweck bedürfen wir jedoch nur jene Relationen, welche g in sich schliessen, also einer g enthaltenden Terme entsprechen. Ihre Anzahl kommt gleich der Anzahl Amben, welche die Grössen: $a, b, c, \dots, d, e$ zulassen. Denkt man sich dieselben gebildet, dabei aber die neuen Bezeichnungen (20) eingeführt, so findet man:

$$(30) \quad a_2'x + b_2'y + c_2'z + \dots + d_2'u + e_2'v + g_2'w = k_2'$$

ab; so sind die diesem neuen Systeme entsprechenden Grössen:

$$(31) \quad \begin{matrix} (a_1'b_2') \\ (a_1'e_2') \cdot (b_1'e_2') \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ (a_1'e_2') \cdot (b_1'e_2') \cdot (e_1'e_2') \cdot \dots \cdot (d_1'e_2') \\ (a_1'g_2') \cdot (b_1'g_2') \cdot (e_1'g_2') \cdot \dots \cdot (d_1'g_2') \cdot (e_1'g_2') \\ (k_1'a_2') \cdot (k_1'b_2') \cdot (k_1'e_2') \cdot \dots \cdot (k_1'd_2') \cdot (k_1'e_2') \cdot (k_1'g_2') \end{matrix}$$

jenen des ursprünglichen Systemes:

$$(32) \quad \begin{matrix} (a_1b_2) \\ (a_1c_2) \cdot (b_1c_2) \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ (a_1e_2) \cdot (b_1e_2) \cdot (e_1e_2) \cdot \dots \cdot (d_1e_2) \\ (a_1g_2) \cdot (b_1g_2) \cdot (e_1g_2) \cdot \dots \cdot (d_1g_2) \cdot (e_1g_2) \\ (k_1a_2) \cdot (k_1b_2) \cdot (k_1c_2) \cdot \dots \cdot (k_1d_2) \cdot (k_1e_2) \cdot (k_1g_2) \end{matrix}$$

proportional.

Das Verfahren, mittelst dessen man aus den ursprünglichen Gleichungen neue, ihnen gleichgeltende abzuleiten vermag, ist bekannt. Man multiplicirt nämlich die erste und die zweite mit irgend welchen Zahlen, die völlig willkürlich gewählt sein können, und addirt sie alsdann, so erhält man eine neue Gleichung. Wiederholt man dasselbe Verfahren mit zwei anderen willkürlich gewählten Multiplicatoren, so erhält man eine zweite Gleichung. Diese zwei neuen Gleichungen sind dem ursprünglichen Systeme vollkommen gleichgeltend, wenn man bei der Wahl der Multiplicatoren eine einzige Vorsicht gebraucht hat, von der alsogleich Erwähnung geschehen soll. Bezeichnen wir mit λ_1, λ_2 die beiden zuerst erwähnten Multiplicatoren und mit (29) die entsprechende Gleichung, mit μ_1, μ_2 die beiden anderen Multiplicatoren, welche zur zweiten neuen Gleichung (30) führen; so sind diese zwei Gleichungen für alle Werthe der Unbekannten erfüllt, welche dem ursprünglichen Systeme genügen, und noch überdies von einander verschieden, wenn die beiden Quotienten $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ und $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ ungleich ausfallen, oder mit anderen Worten, wenn die Determinante $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$ von Null verschieden ist.

Es ist auch leicht einzusehen, dass die hier erwähnte Ableitungsweise neuer Systeme aus dem alten die einzig mögliche sei, da bei allen übrigen erlaubten Transformationen und Combinationen der Gleichungen die lineare Form derselben verloren ginge, abgesehen davon, dass neue Wurzeln eingeführt würden. Trotzdem lassen sich dennoch unendlich viele Systeme aufstellen, die alle dem ursprünglichen vollkommen äquivalent sind, weil die Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ auf unendlich viele Arten gewählt werden können, ohne dass die beiden Quotienten $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ und $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ gleich werden. Wir übergehen es hier, diese Behauptungen zu erweisen und weiter zu erörtern, da dieselben als bekannt vorausgesetzt werden können, und schreiten nun zum Beweise des obigen Satzes.

Man hat unter den angegebenen Umständen:

$$(33) \quad \begin{aligned} a_1' &= a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2, & b_1' &= b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2, & c_1' &= c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2, & \dots & k_1' &= k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 \\ a_2' &= a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2, & b_2' &= b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2, & c_2' &= c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2, & \dots & k_2' &= k_1 \mu_1 + k_2 \mu_2 \end{aligned}$$

eine Reihe von Gleichungen, die im Grunde nur die Ableitungsweise der neuen Gleichungen (57) und (58) feststellen. Aus ihnen folgt nun unmittelbar:

$$(a_1' b_2') = a_1' b_2' - a_2' b_1' = a_1 b_2 \lambda_1 \mu_2 - a_1 b_2 \lambda_2 \mu_1 - a_2 b_1 \lambda_1 \mu_2 + a_2 b_1 \lambda_2 \mu_1 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)$$

also:

$$(34) \quad (a_1' b_2') = (a_1 b_2) (\lambda_1 \mu_2)$$

und auf dieselbe Weise findet man für die übrigen Grössen:

$$(35) \quad \begin{aligned} (a_1' c_2') &= (a_1 c_2) (\lambda_1 \mu_2) & (b_1' c_2') &= (b_1 c_2) (\lambda_1 \mu_2) \\ &\dots & \dots & \dots \\ (a_1' g_2') &= (a_1 g_2) (\lambda_1 \mu_2) & (b_1' g_2') &= (b_1 g_2) (\lambda_1 \mu_2) & \dots & (e_1' g_2') &= (e_1 g_2) (\lambda_1 \mu_2) \\ (k_1' a_2') &= (k_1 a_2) (\lambda_1 \mu_2) & (k_1' b_2') &= (k_1 b_2) (\lambda_1 \mu_2) & \dots & (k_1' g_2') &= (k_1 g_2) (\lambda_1 \mu_2). \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man, dass die Grössen (31) des neuen Systemes den Grössen (32) des ursprünglich gegebenen proportional sind, womit der obige Satz erwiesen ist, und zwar lassen sie sich durch Multiplication mit $(\lambda_1 \mu_2) = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$ aus ihnen ableiten. Dies ist der aus der Theorie der Determinanten bekannte Satz von der Multiplication der Determinanten.

§. 6.

3. Hilfssatz. Wenn bei einem Systeme von zwei Gleichungen die Determinanten (17) einen grössten gemeinschaftlichen Divisor φ besitzen und derselbe auch in den Determinanten

$$(36) \quad (k_1 a_2) \cdot (k_1 b_2) \cdot (k_1 c_2) \cdot \dots \cdot (k_1 d_2) \cdot (k_1 e_2) \cdot (k_1 g_2)$$

als Factor erscheint, so lässt sich ein anderes System von zwei Gleichungen (29) und (30) ableiten, das demselben vollkommen äquivalent ist, und bei welchem die Determinanten:

$$(37) \quad \begin{aligned} &(a_1' b_2') \\ &(a_1' c_2') \cdot (b_1' c_2') \\ &\dots \\ &(a_1' d_2') \cdot (b_1' d_2') \cdot (e_1' d_2') \\ &(a_1' e_2') \cdot (b_1' e_2') \cdot (c_1' e_2') \cdot \dots \cdot (d_1' e_2') \\ &(a_1' g_2') \cdot (b_1' g_2') \cdot (c_1' g_2') \cdot \dots \cdot (d_1' g_2') \cdot (e_1' g_2') \end{aligned}$$

keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen, ohne dass die Coëfficienten $a', b', \dots, e', g', k'$ aufhören, ganze Zahlen zu sein.

Die neuen Gleichungen werden abgeleitet durch Multiplication der ursprünglichen Gleichungen mit schicklich gewählten Multiplicatoren und Addition, wie dies im vorhergehenden Lehrsatz umständlicher besprochen wurde. Dies ist nämlich die einzig mögliche Weise aus

einem Systeme von zwei Gleichungen ein anderes vollkommen gleichgeltendes abzuleiten und es ist demnach unmittelbar einleuchtend, dass nur durch eine geeignete Wahl der Multipliatoren $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ der gewünschte Zweck erreicht werden könne, falls derselbe überhaupt im Bereiche der Möglichkeit liegt. Im vorhergehenden Lehrsätze wurde erwiesen, dass die Determinanten des neuen Systemes jenen des ursprünglich gegebenen proportional seien und namentlich durch Multiplication derselben mit $(\lambda_1 \mu_2)$ hervorgehen. Hieraus folgt nun wieder, dass für ganze Zahlwerthe der Multipliatoren $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, wo dann auch $(\lambda_1 \mu_2)$ eine ganze Zahl bedeutet, die Grössen ausser dem Factor φ noch den anderen $(\lambda_1 \mu_2)$, also im Ganzen den Factor $\varphi (\lambda_1 \mu_2)$ gemeinschaftlich besitzen werden. Der gewünschte Zweck wird daher durch ganze Zahlwerthe der Multipliatoren $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ niemals erreicht, sondern nur durch gebrochene und namentlich mit dem Nenner φ versehene solche, die so zu wählen sind, dass

$$(38) \quad \varphi (\lambda_1 \mu_2) = 1 \quad \text{also} \quad (\lambda_1 \mu_2) = \frac{1}{\varphi}$$

ausfällt. Gelingt es, die Multipliatoren $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ dermassen zu wählen, ohne dass die Coëfficienten: $a'_1, b'_1, c'_1, \dots, d'_1, e'_1, g'_1, k'_1, a'_2, b'_2, c'_2, \dots, d'_2, e'_2, g'_2, k'_2$ aufhören, ganze Zahlen zu sein, so ist der gewünschte Zweck erreicht, denn man hat dann:

$$(39) \quad (a'_1 b'_2) = \frac{(a_1 b_2)}{\varphi}, \quad (a'_1 c'_2) = \frac{(a_1 c_2)}{\varphi}, \quad (b'_1 c'_2) = \frac{(b_1 c_2)}{\varphi}, \dots$$

Es erübrigt nur noch, die Möglichkeit einer solchen Wahl darzuthun.

Wir wollen hier die vollkommen analytische Behandlung dieses Problemes geben, weil sie für die späteren Probleme wichtige Aufschlüsse ertheilt.

Die Bedingungen sind:

$$(40) \quad \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = \frac{1}{\varphi}$$

	$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 = a'_1$		$a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 = a'_2$
(41)	$b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 = b'_1$	(42)	$b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2 = b'_2$
	$c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = c'_1$		$c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 = c'_2$
			

Diese Gleichungen sollen erfüllt werden durch ganze Zahlwerthe von $a'_1, b'_1, c'_1, \dots, a'_2, b'_2, c'_2, \dots$ und geeignete (ganze oder gebrochene) von $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$. Die Unbekannten zerfallen hier in zwei Gruppen, erstens in solche, deren Werthe die Bedingungen zu erfüllen haben, ganz zu sein, und zweitens in andere, die an eine solche Bedingung nicht gebunden sind. Die Anzahl der Unbekannten übersteigt jene der Gleichungen um drei und dies ist demnach voraussichtlich die Anzahl der ganzen willkürlichen Grössen, welche in der vollständigen Auflösung erscheinen werden. Eine dieser Gleichungen, nämlich die (40) ist nicht linear und solchergestalt ist das hier vorliegende Problem complicirter als dasjenige, welches zum Gegenstande der vorliegenden Abhandlung gewählt wurde. Nichts desto weniger lässt sich dieses Problem auf dieselbe Weise auflösen, ohne alle Schwierigkeit, weil in der nicht linearen Gleichung (40) nur die vier Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ erscheinen, deren Werthe an die Bedingung, ganz zu sein, nicht gebunden sind. Wir werden hier, wie bei jedem anderen Probleme, wobei einige Unbekannte an die Bedingung, ganz zu sein, gebunden sind, die

anderen aber nicht, die Letzteren durch Elimination auf bekannte Weise herauschaffen und von den dabei erhaltenen Gleichungen, welche nur noch jetzt diejenigen Unbekannten in sich schliessen, deren Werthe ganze Zahlen sein sollen, zuerst allein Gebrauch machen. Man verwandelt dadurch das Problem in ein anderes, welches nur die Unbekannten der einen Gattung enthält und nur durch ganze Werthe der darin erscheinenden Unbekannten erfüllt werden darf. Die zu eliminirenden Grössen sind hier die folgenden vier: $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$. Allein selbst bei dieser Elimination wird man eine Vorsicht zu beobachten haben, wenn man die lineare Form der Gleichungen so weit als möglich zu erhalten wünscht. Da dies in unserer Absicht liegt, wollen wir in folgender Weise verfahren: Das System (41) enthält nur zwei Grössen, die eliminirt werden sollen, nämlich λ_1 und λ_2 und besteht aus lauter linearen Gleichungen. Eliminirt man aus ihnen λ_1 und λ_2 , so erhält man eine Anzahl Gleichungen, die nur noch die übrigen Grössen $a_1', b_1', c_1', \dots$ in sich schliessen. In ganz gleicher Weise lässt sich das System (42) durch Elimination von μ_1 und μ_2 auf ein ähnliches System von Gleichungen bringen, in welchem weder μ_1 noch μ_2 , sondern nur $a_2', b_2', c_2', \dots$ erscheinen. Es ist auch kein Zweifel, dass sich diese aus dem Systeme (42) gewonnenen Gleichungen von den früheren aus dem Systeme (41) abgeleiteten nur dadurch unterscheiden können, dass hier die Unbekannten $a_2', b_2', c_2', \dots$ beziehungsweise an die Stelle der dortigen $a_1', b_1', c_1', \dots$ treten, weil sich das System (42) von dem anderen (41) nur in den Unbekannten, aber keineswegs in den Coëfficienten unterscheidet. Hat man also die Eliminationsgleichungen für das System (41) gebildet, so lassen sich auch gleichzeitig jene für das System (42) mit Leichtigkeit daraus ableiten, wenn man die Unbekannten:

$$a_1', b_1', c_1', \dots$$

durch die anderen

$$a_2', b_2', c_2', \dots$$

ersetzt. Wir wollen dieselben also gleich bilden. Man denke sich aus den Gleichungen (41), z. B. die drei folgenden herausgehoben:

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 = a_1'$$

$$b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 = b_1'$$

$$c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = c_1'$$

und aus ihnen die Grössen λ_1 und λ_2 auf bekannte Weise eliminirt, so gelangt man zur Gleichung:

$$(43) \quad a_1'(b_1 c_2) - b_1'(a_1 c_2) + c_1'(a_1 b_2) = 0.$$

Die Ableitung derselben unterliegt keiner Schwierigkeit; man hat nämlich nur die drei Gleichungen beziehungsweise mit den Multiplicatoren:

$$(b_1 c_2), \quad -(a_1 c_2), \quad (a_1 b_2)$$

zu multipliciren und hierauf zu addiren, so erhält man unmittelbar die aufgestellte Eliminationsgleichung, wenn man auf die zwei identisch erfüllten Relationen:

$$a_1(b_1 c_2) - b_1(a_1 c_2) + c_1(a_1 b_2) = 0$$

$$a_2(b_1 c_2) - b_2(a_1 c_2) + c_2(a_1 b_2) = 0$$

Rücksicht nimmt, deren Giltigkeit sich leicht erweisen lässt. In vollkommen ähnlicher Weise lassen sich alle übrigen Eliminationsgleichungen ableiten. Man hat nämlich die beiden ersten Gleichungen in (41) mit allen späteren der Reihe nach zu combiniren. Die dabei hervorgehenden Eliminationsgleichungen werden sich von der (43) nur darin unterscheiden, dass der Buchstabe c durch die übrigen: $d, e, g, \dots$ der Reihe nach ersetzt ist. Sonach sind die durch Elimination von λ_1 und λ_2 aus den (41) hervorgehenden Gleichungen folgende:

$$(44) \quad \begin{aligned} a_1'(b_1 c_2) - b_1'(a_1 c_2) + c_1'(a_1 b_2) &= 0 \\ a_1'(b_1 d_2) - b_1'(a_1 d_2) + d_1'(a_1 b_2) &= 0 \\ a_1'(b_1 e_2) - b_1'(a_1 e_2) + e_1'(a_1 b_2) &= 0 \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Ihre Anzahl ist um zwei kleiner als jene in (41). Es ist wohl überflüssig zu bemerken, dass man auch andere Gleichungen hätte erhalten können, wenn man bei der Combination der Gleichungen zu dreien in einer anderen Ordnung vorgegangen wäre. Diese Verschiedenheit wäre aber nur eine Formverschiedenheit gewesen, keine wesentliche.

Dieses so eben erhaltene System (44) geht, wie eben früher bemerkt wurde, durch Verwandlung der Grössen:

$$a_1' \cdot b_1' \cdot c_1' \cdot \dots$$

in

$$a_2', b_2', c_2', \dots$$

über in die durch Elimination von μ_1 und μ_2 aus den (42) hervorgehenden Gleichungen. Sie sind folgende:

$$(45) \quad \begin{aligned} a_2'(b_1 c_2) - b_2'(a_1 c_2) + c_2'(a_1 b_2) &= 0 \\ a_2'(b_1 d_2) - b_2'(a_1 d_2) + d_2'(a_1 b_2) &= 0 \\ a_2'(b_1 e_2) - b_2'(a_1 e_2) + e_2'(a_1 b_2) &= 0 \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Durch das hier eingeschlagene Verfahren ist die lineare Form der Gleichungen bewahrt worden. Hätte man aber auch die (40) mit in die Elimination einbezogen, so hätte man die nicht linearen Gleichungen:

$$(46) \quad \begin{aligned} (a_1' b_2') &= \frac{(a_1 b_2)}{\varphi} \\ (a_1' c_2') &= \frac{(a_1 c_2)}{\varphi} \quad \cdot \quad (b_1' c_2') = \frac{(b_1 c_2)}{\varphi} \\ (a_1' d_2') &= \frac{(a_1 d_2)}{\varphi} \quad \cdot \quad (b_1' d_2') = \frac{(b_1 d_2)}{\varphi} \end{aligned}$$

gefunden. Hier also ist zu den Gleichungen (44) und (45) noch die (40), oder, was dasselbe ist, eine der (46), z. B. die

$$(47) \quad (a_1' b_2') = \frac{(a_1 b_2)}{\varphi}$$

hinzuzufügen.

Der nächste Schritt besteht nun in der Bestimmung der Auflösungen in ganzen Zahlen für die Gleichungen (44), (45), (47). Wir beginnen wieder mit der allgemeinen Auflösung des Systemes (44), denn mit ihr ist zugleich jene des anderen Systemes (45) bekannt, da nur die Unbekannten andere Bezeichnungen tragen, die Coëfficienten jedoch dieselben sind. Die allgemeine Auflösung des Systemes (44) enthält offenbar nur zwei willkürliche Grössen in sich, wir wollen sie mit ξ_1 und η_1 bezeichnen. In gleicher Weise erscheinen in der allgemeinen Auflösung des Systemes (45) wieder zwei willkürliche Grössen ξ_2 und η_2 . Substituirt man nun die Werthe von a'_1, a'_2, b'_1, b'_2 in die (47), so geht eine Gleichung hervor, welche nur noch die vier Grössen $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ enthält und in ganzen Zahlwerthen aufgelöst werden soll. Die dabei hervorgehenden Werthe von $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ sind dann die wirklich brauchbaren. Man wird sie in die allgemeinen Werthe von $a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, \dots, a'_2, b'_2, c'_2, d'_2, \dots$ substituiren und besitzt dann die Werthe dieser Grössen und hiemit also die Coëfficienten und Constanten der beiden gesuchten transformirten Gleichungen.

Die allgemeine Auflösung des Systemes (44) mit zwei unabhängigen Grössen ist nach §. 2 in folgender Form vorhanden:

$$\begin{aligned}
 (48) \quad & a'_1 = A_0 + A_1 \xi_1 \\
 & b'_1 = B_0 + B_1 \xi_1 + B_2 \eta_1 \\
 & c'_1 = C_0 + C_1 \xi_1 + C_2 \eta_1 \\
 & d'_1 = D_0 + D_1 \xi_1 + D_2 \eta_1 \\
 & e'_1 = E_0 + E_1 \xi_1 + E_2 \eta_1 \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Hier ist $A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, \dots$ eine specielle Auflösung in ganzen Zahlen. Eine solche begreift hier in sich lauter Nullwerthe, und es können demnach diese Grössen durch Null ersetzt werden. Hiedurch gewinnt die allgemeine Auflösung des Systemes die Form:

$$\begin{aligned}
 (49) \quad & a'_1 = A_1 \xi_1 \\
 & b'_1 = B_1 \xi_1 + B_2 \eta_1 \\
 & c'_1 = C_1 \xi_1 + C_2 \eta_1 \\
 & d'_1 = D_1 \xi_1 + D_2 \eta_1 \\
 & e'_1 = E_1 \xi_1 + E_2 \eta_1 \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

wo $A_1, B_2, C_2, D_2, \dots$ bestimmte Zahlen bedeuten. Die anderen $B_1, C_1, D_1, \dots$ unterliegen noch einer Willkürlichkeit, die aber alsogleich behoben wird, wenn man B_1 feststellt, z. B. den kleinsten numerischen Werth ertheilt oder dergl.

Die Auflösung des Systemes (45) ist in ähnlicher Form vorhanden:

$$\begin{aligned}
 (50) \quad & a'_2 = A_1 \xi_2 \\
 & b'_2 = B_1 \xi_2 + B_2 \eta_2 \\
 & c'_2 = C_1 \xi_2 + C_2 \eta_2 \\
 & d'_2 = D_1 \xi_2 + D_2 \eta_2 \\
 & e'_2 = E_1 \xi_2 + E_2 \eta_2 \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

nur mit anderen willkürlichen Grössen ξ_2 und γ_2 . Substituiren wir nun die Werthe von a_1' , b_1' , a_2' , b_2' in die (47), so geht die Gleichung

$$(51) \quad (\xi_1 \gamma_2) = \frac{(a_1 b_2)}{A_1 B_2 \varphi}$$

hervor. Man erhält sie auch ohne aller Rechnung vermittelst der Ergebnisse von §. 5, denn man hat dem zufolge:

$$(a_1' b_2') = (A_1 B_2) (\xi_1 \gamma_2) = A_1 B_2 (\xi_1 \gamma_2).$$

woraus mit Hilfe der (49) die (51) alsogleich hervorgeht. Diese Gleichung stellt die Bedingungsgleichung für ξ_1 , ξ_2 , γ_1 , γ_2 vor. Sie ist nicht linear, aber es ist leicht einzusehen, dass sie durch ganze Werthe dieser Grössen erfüllt werden können, nur dann, wenn $\frac{(a_1 b_2)}{A_1 B_2 \varphi}$ eine ganze Zahl ist. Es ist nun A_1 , B_2 zu suchen und in die Gleichung zu setzen.

Wir beginnen mit der Bestimmung von B_2 . Hierzu dienen die nachfolgenden Gleichungen:

$$(52) \quad \begin{aligned} -B_2(a_1 c_2) + C_2(a_1 b_2) &= 0 \\ -B_2(a_1 d_2) + D_2(a_1 b_2) &= 0 \\ -B_2(a_1 e_2) + E_2(a_2 b_2) &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Der blosse Anblick dieser Gleichungen lehrt, dass die Grössen:

$$(53) \quad B_2, C_2, D_2, E_2, \dots$$

den andern:

$$(54) \quad (a_1 b_2), (a_1 c_2), (a_1 d_2), (a_1 e_2), \dots$$

proportional sind. Da ferner laut §. 2 die Grössen $B_2, C_2, D_2, E_2, \dots$ keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen dürfen, so hat man nur die Grössen (54) durch ihren grössten gemeinschaftlichen Theiler zu dividiren, um alsogleich die Grössen (53) zu finden. Dieser grösste gemeinschaftliche Theiler ist unserer Bezeichnungsweise zufolge: $\varphi \phi_a$ und demnach erhält man:

$$(55) \quad B_2 = \pm \frac{(a_1 b_2)}{\varphi \phi_a}, C_2 = \pm \frac{(a_1 c_2)}{\varphi \phi_a}, D_2 = \pm \frac{(a_1 d_2)}{\varphi \phi_a}, E_2 = \pm \frac{(a_1 e_2)}{\varphi \phi_a}, \dots$$

Es ist noch übrig, die andern Grössen: $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, \dots$ zu suchen und zwar aus dem Systeme von Gleichungen:

$$(56) \quad \begin{aligned} A_1(b_1 c_2) - B_1(a_1 c_2) + C_1(a_1 b_2) &= 0 \\ A_1(b_1 d_2) - B_1(a_1 d_2) + D_1(a_1 b_2) &= 0 \\ A_1(b_1 e_2) - B_1(a_1 e_2) + E_1(a_1 b_2) &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Dieses System ist aufzulösen durch ganze Zahlenwerthe und dabei soll A_1 den möglich kleinsten von Null verschiedenen Werth erlangen. Zuerst handelt es sich also darum, diesen Werth von A_1 zu finden. Multipliciren wir diese Gleichungen beziehungsweise mit ganzen Grössen $\gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ so erhält man:

$$(57) \quad A_1[(b_1 c_2)\gamma + (b_1 d_2)\delta + (b_1 e_2)\varepsilon + \dots] - B_1[(a_1 c_2)\gamma + (a_1 d_2)\delta + (a_1 e_2)\varepsilon + \dots] + (a_1 b_2)[C_1\gamma + D_1\delta + E_1\varepsilon + \dots] = 0$$

Wenn $\gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ völlig willkürliche Grössen bedeuten, so ist diese Gleichung dem Systeme (56) vollkommen äquivalent. Dies ist auch dann noch der Fall, wenn man für diese Multiplicatoren eine Bedingungsgleichung aufstellt, die aber noch eine fernere Grösse β in sich schliesst, denn eine solche Gleichung enthält in ihrer Auflösung, gleichgiltig ob sie in ganzen Zahlen geschieht oder nicht, gerade so viele willkürliche Grössen, als im Systeme Gleichungen vorhanden sind. Diese Bedingungsgleichung sei:

$$(58) \quad (a_1 b_2) \beta + (a_1 c_2) \gamma + (a_1 d_2) \delta + (a_1 e_2) \varepsilon + \dots = \varphi \phi_a.$$

Sie gestattet stets ganze Auflösungen. Die aus ihr hervorgehenden ganzen Werthe für $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ in ihrer allgemeinen Form mit m willkürlichen Constanten, denke man sich in die Gleichung (57) gesetzt, so geht sie über in:

$$(59) \quad A_1 [(b_1 c_2) \gamma + (b_1 d_2) \delta + (b_1 e_2) \varepsilon + \dots] - B_1 [\varphi \phi_a - (a_1 b_2) \beta] + (a_1 b_2) [C_1 \gamma + D_1 \delta + E_1 \varepsilon + \dots] = 0$$

und ist noch immer dem Systeme (56) äquivalent. Um den kleinsten Werth von A_1 zu finden, der einer ganzen Auflösung dieser Gleichung entspricht, schreibt die bekannte Regel vor, den grössten gemeinschaftlichen Divisor der Coëfficienten:

$$(60) \quad \varphi \phi_a - (a_1 b_2) \beta, (a_1 b_2) \gamma, (a_1 b_2) \delta, (a_1 b_2) \varepsilon, \dots$$

zu dividiren durch den grössten gemeinschaftlichen Divisor aller dieser Grössen und der

$$(b_1 c_2) \gamma + (b_1 d_2) \delta + (b_1 e_2) \varepsilon + \dots$$

Nun zeigt eine leichte Überlegung, dass wenn θ den grössten gemeinschaftlichen Factor der Grössen $\gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ bezeichnet, die Coëfficienten (60) höchstens $\varphi \phi_a$ als grössten gemeinschaftlichen Factor aufweisen können. In der That ist der grösste gemeinschaftliche Factor von:

$$(a_1 b_2) \gamma, (a_1 b_2) \delta, (a_1 b_2) \varepsilon, \dots$$

gleich $(a_1 b_2) \theta$. Sucht man nun den grössten gemeinschaftlichen Factor von:

$$(61) \quad \varphi \phi_a - (a_1 b_2) \beta \quad \text{und} \quad (a_1 b_2) \theta$$

so erscheint jedenfalls $\varphi \phi_a$ in beiden Grössen als Factor, weil $(a_1 b_2)$ diesen Factor enthält. Die ausser $\varphi \phi_a$ noch in $(a_1 b_2)$ erscheinenden Factoren kommen aber in $\varphi \phi_a - (a_1 b_2) \beta$ unmöglich vor, weil nur ein Theil diesen Factor enthält, der andere aber gewiss nicht. Folglich könnte nun höchstens noch θ , im Ganzen also $\varphi \phi_a \theta$ in beiden Grössen (61) erscheinen. Fasst man nun noch die Grösse $(b_1 c_2) \gamma + (b_1 d_2) \delta + (b_1 e_2) \varepsilon + \dots$ ins Auge, so zeigt sich alsogleich, dass in ihr jedenfalls $\varphi \theta$ als Factor erscheint; von ϕ_a aber kann man weder das Erscheinen noch das Fehlen unmittelbar nachweisen. Es geht hieraus hervor, dass der kleinste Werth von A_1 keinesfalls kleiner sein könne, als ϕ_a . In der That bestünde ein kleinerer Werth z. B. $A_1 = \frac{\phi_a}{\rho}$ so ginge die Gleichung (51) über in:

$$(62) \quad (\xi_1 \eta_2) = \frac{(a_1 b_2) \varphi \phi_a \rho}{\varphi \phi_a (a_1 b_2)} = \rho$$

oder:

$$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = \rho.$$

Diese Gleichung ist offenbar in ganzen Werthen auflöslich, z. B. für $\xi_1 = 1$, $\eta_2 = \rho$, $\xi_2, \eta_1 = 0$. Hieraus folgt, dass jedenfalls zwei Gleichungen bestehen, deren Coefficienten ganz sind, und deren Determinanten die oben verlangten Werthe:

$$\frac{(a_1 b_2)}{\varphi} \cdot \frac{(a_1 c_2)}{\varphi} \dots \dots \dots$$

$$\frac{(b_1 c_2)}{\varphi} \dots \dots \dots$$

besitzen. Man hat hier $a_1' = \frac{\varphi \varphi}{\rho}$, $a_2' = 0$. Nun sollen a_1' und a_2' den Factor φ_a gemeinschaftlich besitzen, weil er in den mit a verknüpften Determinanten erscheint. Dies ist aber nur für $\rho = 1$ der Fall. Folglich ist:

$$(63) \quad A_1 = \varphi_a$$

und die Bedingungsgleichung (62) verwandelt sich in:

$$(64) \quad (\xi_1 \eta_2) = 1.$$

Nachdem nun A_1 bekannt ist, unterliegt es keiner Schwierigkeit, auch $B_1, C_1, D_1 \dots$ zu finden. Substituiren wir $A_1 = \varphi_a$ in die Gleichung (59), so finden wir:

$$(65) \quad \varphi_a [(b_1 c_2) \gamma + (b_1 d_2) \delta + (b_1 e_2) \varepsilon + \dots] - B_1 [\varphi \varphi_a - (a_1 b_2) \beta] + (a_1 b_2) [C_1 \gamma + D_1 \delta + E_1 \varepsilon + \dots] = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich durch $\varphi \varphi_a$ abkürzen, und gewinnt dadurch die Form:

$$(66) \quad \left[\frac{(b_1 c_2)}{\varphi} \gamma + \frac{(b_1 d_2)}{\varphi} \delta + \frac{(b_1 e_2)}{\varphi} \varepsilon + \dots \right] - B_1 \left[1 - \frac{(a_1 b_2)}{\varphi \varphi_a} \beta \right] + \frac{(a_1 b_2)}{\varphi \varphi_a} [C_1 \gamma + D_1 \delta + E_1 \varepsilon + \dots] = 0.$$

Die hier angezeigten Divisionen lassen sich wirklich ausführen. Es ist dies eine unbestimmte Gleichung, wie für sich klar ist. Da es sich aber nun um irgend eine beliebige Auflösung derselben handelt, so können wir noch Verfügungen treffen, die nur ganze Auflösungen nicht unmöglich machen dürfen. Hier ist eine einzige Grösse willkürlich, folglich darf auch nur eine einzige Grösse zur willkürlichen Verfügung erwählt, oder, was dasselbe heisst, eine einzige Bedingungsgleichung aufgestellt werden. Für unsere Zwecke ist die folgende:

$$(67) \quad B_1 \beta + C_1 \gamma + D_1 \delta + E_1 \varepsilon + \dots = 0$$

die zweckdienlichste. Sie ist nämlich stets durch ganze Werthe auflöslich und verwandelt die (66) in die sehr einfache bestimmte Gleichung:

$$(68) \quad B_1 = \frac{1}{\varphi} [(b_1 c_2) \gamma + (b_1 d_2) \delta + (b_1 e_2) \varepsilon + \dots].$$

Die entsprechenden Werthe von C_1, D_1, E_1 findet man unmittelbar aus den einzelnen Gleichungen des Systemes (56), wenn man A_1 und B_1 durch ihre Werthe (63) und (68) ersetzt. Sie sind zufolge der (58):

$$(69) \quad C_1 = \frac{1}{\varphi (a_1 b_2)} \left[- (a_1 b_2) (b_1 c_2) \beta - (a_1 c_2) (b_1 c_2) \gamma - (a_1 d_2) (b_1 c_2) \delta - (a_1 e_2) (b_1 c_2) \varepsilon + \dots \right]$$

und mit Rücksicht auf die identisch erfüllten Relationen:

$$\begin{aligned} (a_1 c_2)(b_1 d_2) - (a_1 d_2)(b_1 c_2) &= (a_1 b_2)(c_1 d_2) \\ (a_1 c_2)(b_1 e_2) - (a_1 e_2)(b_1 c_2) &= (a_1 b_2)(c_1 e_2) \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

lassen sich Reductionen ausführen und man erhält solchergestalt:

$$(70) \quad C_1 = \frac{1}{\varphi} [-(b_1 c_2)\beta + (c_1 d_2)\delta + (c_1 e_2)\varepsilon + \dots]$$

In vollkommen ähnlicher Weise ergeben sich die Werthe der übrigen Grössen $D_1, E_1, \dots$. Im Folgenden haben wir die Werthe aller dieser Grössen zusammengestellt und eine blosser Anschauung gibt über das Gesetz ihrer Bildung Aufschluss:

$$(71) \quad \begin{aligned} A_1 &= \phi_a \\ B_1 &= \frac{1}{\varphi} [(b_1 c_2)\gamma + (b_1 d_2)\delta + (b_1 e_2)\varepsilon + \dots] \\ C_1 &= \frac{1}{\varphi} [-(b_1 c_2)\beta + (c_1 d_2)\delta + (c_1 e_2)\varepsilon + \dots] \\ D_1 &= \frac{1}{\varphi} [-(b_1 d_2)\beta - (c_1 d_2)\gamma + (d_1 e_2)\varepsilon + \dots] \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Die hier erscheinenden Grössen $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ sind ganze Zahlen, die durch Auflösungen der Gleichung (58) gewonnen werden. Hiemit sind demnach sämtliche Coefficienten der zwei transformirten Gleichungen bekannt: Man hat nämlich die gefundenen Werthe (55) und (71) nur in die Gleichungen (49) und (50) zu substituiren, für die Grössen $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ aber ganze Werthe zu wählen, welche die Gleichung (64) erfüllen; so sind sämtliche Coefficienten der zwei gesuchten transformirten Gleichungen bekannt. Man kann sich leicht hinterher überzeugen, dass bei denselben die Determinanten sich von jenen des ursprünglichen Systemes nur im Fehlen des allen gemeinschaftlichen Factors φ unterscheiden. Noch leichter geschieht dies aber, wenn man den Werth von $(\lambda_1 \mu_2)$ betrachtet.

Wir wollen nun noch die Werthe von $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ entwickeln. Zu ihrer Bestimmung braucht man nur zwei der Gleichungen (41) und zwei der (42) zu erwählen: z. B.

$$(72) \quad \begin{aligned} a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 &= a_1' & a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 &= a_2' \\ b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 &= b_1' & b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2 &= b_2' \end{aligned}$$

die Grössen a_1', b_1', a_2', b_2' durch ihre Werthe zu ersetzen:

$$(73) \quad \begin{aligned} a_1' &= \phi_a \xi_1 & a_2' &= \phi_a \xi_2 \\ b_1' &= B_1 \xi_1 + B_2 \eta_1 & b_2' &= B_1 \xi_2 + B_2 \eta_2 \end{aligned}$$

Die Auflösung der Gleichungen (72) liefert zunächst:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{(a_1 b_2)} [a_1' b_2 - a_2 b_1'] & \mu_1 &= \frac{1}{(a_1 b_2)} [a_2' b_2 - a_2 b_2'] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{(a_1 b_2)} [a_1 b_1' - a_1' b_1] & \mu_2 &= \frac{1}{(a_1 b_2)} [a_1 b_2' - a_2' b_1] \end{aligned}$$

und diese gehen durch Einführung der Werthe über in:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{1}{(a_1 b_2)} [(\phi_a b_2 - a_2 B_1) \xi_1 - a_2 B_2 \eta_1] \\
 \lambda_2 &= \frac{1}{(a_1 b_2)} [-(\phi_a b_1 - a_1 B_1) \xi_1 + a_1 B_2 \eta_1] \\
 \mu_1 &= \frac{1}{(a_1 b_2)} [(\phi_a b_2 - a_2 B_1) \xi_2 - a_2 B_2 \eta_2] \\
 \mu_2 &= \frac{1}{(a_1 b_2)} [-(\phi_a b_1 - a_1 B_1) \xi_2 + a_1 B_2 \eta_2]
 \end{aligned}
 \tag{74}$$

Ersetzt man hier ϕ_a , B_1 , B_2 durch ihre Werthe, so erhält man zunächst:

$$(\phi_a b_2 - a_2 B_1) = \frac{1}{\varphi} \left[\begin{aligned} &b_2(a_1 b_2) \beta + b_2(a_1 c_2) \gamma + b_2(a_1 d_2) \delta + b_2(a_1 e_2) \varepsilon + \dots \\ &- a_2(b_1 c_2) \gamma - a_2(b_1 d_2) \delta - a_2(b_1 e_2) \varepsilon + \dots \end{aligned} \right]$$

und mit Rücksicht auf die identischen Relationen:

$$\begin{aligned}
 b_2(a_1 c_2) - a_2(b_1 c_2) &= c_2(a_1 b_2) \\
 b_2(a_1 d_2) - a_2(b_1 d_2) &= d_2(a_1 b_2) \\
 b_2(a_1 e_2) - a_2(b_1 e_2) &= e_2(a_1 b_2) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

also:

$$(\phi_a b_2 - a_2 B_1) = \frac{(a_1 b_2)}{\varphi} [b_2 \beta + c_2 \gamma + d_2 \delta + e_2 \varepsilon + \dots]$$

Hingegen:

$$(\phi_a b_1 - a_1 B_1) = \left[\begin{aligned} &b_1(a_1 b_2) \beta + b_1(a_1 c_2) \gamma + b_1(a_1 d_2) \delta + b_1(a_1 e_2) \varepsilon + \dots \\ &- a_1(b_1 c_2) \gamma - a_1(b_1 d_2) \delta - a_1(b_1 e_2) \varepsilon - \dots \end{aligned} \right]$$

oder mit Rücksicht auf die identischen Relationen:

$$\begin{aligned}
 b_1(a_1 c_2) - a_1(b_1 c_2) &= c_1(a_1 b_2) \\
 b_1(a_1 d_2) - a_1(b_1 d_2) &= d_1(a_1 b_2) \\
 b_1(a_1 e_2) - a_1(b_1 e_2) &= e_1(a_1 b_2) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

folglich:

$$(\phi_a b_1 - a_1 B_1) = \frac{(a_1 b_2)}{\varphi} [b_1 \beta + c_1 \gamma + d_1 \delta + e_1 \varepsilon + \dots]$$

Durch diese Werthe erhält man aus den Gleichungen (74)

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{1}{\varphi} [(b_2 \beta + c_2 \gamma + d_2 \delta + e_2 \varepsilon + \dots) \xi_1 - \frac{a_2}{\phi_a} \eta_1] \\
 \lambda_2 &= \frac{1}{\varphi} [(b_1 \beta + c_1 \gamma + d_1 \delta + e_1 \varepsilon + \dots) \xi_1 - \frac{a_1}{\phi_a} \eta_1] \\
 \mu_1 &= \frac{1}{\varphi} [(b_2 \beta + c_2 \gamma + d_2 \delta + e_2 \varepsilon + \dots) \xi_2 - \frac{a_2}{\phi_a} \eta_2] \\
 \mu_2 &= \frac{1}{\varphi} [(b_1 \beta + c_1 \gamma + d_1 \delta + e_1 \varepsilon + \dots) \xi_2 - \frac{a_1}{\phi_a} \eta_2].
 \end{aligned}$$

Die Grössen β , γ , δ , ε , ... sind durch Auflösung der unbestimmten Gleichung (58). jene von ξ_1 , ξ_2 , η_1 , η_2 aber aus der (64) zu suchen.

Die Auflösung der Gleichung

$$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 1$$

wiewohl sie schon der zweiten Ordnung angehört, lässt sich dennoch bewerkstelligen vermittelst jener Vorschriften, die für eine unbestimmte Gleichung des ersten Grades gelten. In der That kann man ξ_1 und ξ_2 vollkommen beliebig wählen, nur dürfen sie keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen. Sind die Werthe dieser zwei Grössen festgestellt, so verwandelt sich die Gleichung in eine gewöhnliche unbestimmte Gleichung des ersten Grades und die Werthe von μ_1 und μ_2 ergeben sich mit Leichtigkeit.

Für unsere Zwecke ist nur eine specielle Auflösung von Wichtigkeit, nämlich:

$$\xi_1 \eta_2 = 1, \quad \xi_2 \eta_1 = 0$$

also:

$$\xi_1 = 1, \quad \eta_2 = 1, \quad \xi_2 \text{ oder } \eta_1 \text{ oder beide} = 0.$$

Dies liefert:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\varphi} [b_2 \beta + c_2 \gamma + d_2 \delta + e_2 \varepsilon + \dots]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\varphi} [b_1 \beta + c_1 \gamma + d_1 \delta + e_1 \varepsilon + \dots]$$

$$\mu_1 = \frac{a_2}{\varphi \psi_a}$$

$$\mu_2 = \frac{a_1}{\varphi \psi_a}$$

Fassen wir nun alle bisherigen Ergebnisse zusammen, so geht folgende einfache Regel hervor, um ein System von zwei Gleichungen:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots + d_1 u + e_1 v + g_1 w = k_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots + d_2 u + e_2 v + g_2 w = k_2$$

dessen Determinanten:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \\ \dots & \dots \\ a & d \\ a & e \\ a & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & c \\ b & d \\ b & e \\ b & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ c & e \\ c & g \end{pmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{pmatrix} d & e \\ d & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & g \end{pmatrix}$$

einen gemeinschaftlichen Factor φ besitzen, der auch in:

$$(ka), (kb), (kc) \dots (kd), (ke), (kg)$$

erscheint, in zwei andere vollkommen gleichgeltende Gleichungen:

$$a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z + \dots + d'_1 u + e'_1 v + g'_1 w = k'_1$$

$$a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z + \dots + d'_2 u + e'_2 v + g'_2 w = k'_2$$

zu transformiren, welche gleichfalls lauter ganze Zahlen zu Coëfficienten besitzen und deren Determinanten von dem gemeinschaftlichen Factor φ befreit erscheinen: Man multiplicire die

beiden Gleichungen zuvörderst mit bestimmten Zahlen λ_1, λ_2 und addire sie und erhält so eine erste transformirte Gleichung; hierauf verfähre man mit zwei andern Multiplicatoren μ_1 und μ_2 in vollkommen ähnlicher Weise und gewinnt so die zweite transformirte Gleichung. Die Werthe von $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ sind gegeben durch die Formeln:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\varphi} [b_2\beta + c_2\gamma + d_2\delta + e_2\varepsilon + g_2\eta] \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{\varphi} [b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta + e_1\varepsilon + g_1\eta] \\ \mu_1 &= -\frac{a_2}{\varphi\psi_a} \\ \mu_2 &= \frac{a_1}{\varphi\psi_a} \end{aligned}$$

Hier bedeuten die Grössen $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ ganze Zahlen, welche die unbestimmte Gleichung:

$$(ab)\beta + (ac)\gamma + (ad)\delta + (ae)\varepsilon + (ag)\eta = \varphi\psi_a$$

erfüllen; $\varphi\psi_a$ ist der grösste gemeinschaftliche Divisor der mit a verknüpften Determinanten:

$$(ab), (ac), (ad), (ae), (ag).$$

Diese unbestimmte Hilfsgleichung hat man in einer speciellen Form aufzulösen in ganzen Zahlwerthen.

Die Coëfficienten der transformirten Gleichungen sind gegeben durch die Formeln:

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{1}{\varphi} [(ab)\beta + (ac)\gamma + (ad)\delta + (ae)\varepsilon + (ag)\eta] = \psi_a \\ b'_1 &= \frac{1}{\varphi} [(bc)\gamma + (bd)\delta + (be)\varepsilon + (bg)\eta] = (bc)\gamma + (bd)\delta + (be)\varepsilon + (bg)\eta \\ c'_1 &= \frac{1}{\varphi} [-(bc)\beta + (cd)\delta + (ce)\varepsilon + (cg)\eta] = -(bc)\beta + (cd)\delta + (ce)\varepsilon + (cg)\eta \\ d'_1 &= \frac{1}{\varphi} [-(bd)\beta - (cd)\gamma + (de)\varepsilon + (dg)\eta] = -(bd)\beta - (cd)\gamma + (de)\varepsilon + (dg)\eta \\ e'_1 &= \frac{1}{\varphi} [-(be)\beta - (ce)\gamma - (de)\delta + (eg)\eta] = -(be)\beta - (ce)\gamma - (de)\delta + (eg)\eta \\ g'_1 &= \frac{1}{\varphi} [-(bg)\beta - (cg)\gamma - (dg)\delta - (eg)\varepsilon] = -(bg)\beta - (cg)\gamma - (dg)\delta - (eg)\varepsilon \\ k'_1 &= \frac{1}{\varphi} [(kb)\beta + (kc)\gamma + (kd)\delta + (ke)\varepsilon + (kg)\eta] = (kb)\beta + (kc)\gamma + (kd)\delta + (ke)\varepsilon + (kg)\eta \\ a'_2 &= 0, \quad b'_2 = (ab), \quad c'_2 = (ac), \quad d'_2 = (ad), \quad e'_2 = (ae), \quad g'_2 = (ag), \quad k'_2 = (af). \end{aligned}$$

Die Determinanten des transformirten Systemes sind von dem gemeinschaftlichen Factor φ befreit, da

$$(\lambda\mu) = \frac{1}{\varphi^2\psi_a} [(ab)\beta + (ac)\gamma + (ad)\delta + (ae)\varepsilon + (ag)\eta] = \frac{1}{\varphi}$$

ist.

Ausser dieser Form der transformirten Gleichungen bestehen, wie sich von selbst ergibt, noch unendlich viele andere Formen. Sie sind durch die allgemeinen Formeln gegeben, zu denen wir gelangt sind.

§. 7.

Nach der Entwicklung dieser drei Hilfssätze können wir zum Beweise des im Eingange aufgestellten Satzes schreiten, der folgendermassen lautet: Wenn ein System von zwei Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten in allen Determinanten, die aus den Coëfficienten gebildet werden, nämlich in:

$$(75) \quad \begin{array}{l} (ab) \\ (ac) \text{ , } (bc) \\ (ad) \text{ , } (bd) \text{ , } (cd) \\ (ae) \text{ , } (be) \text{ , } (ce) \text{ , } (de) \\ (ag) \text{ , } (bg) \text{ , } (cg) \text{ , } (dg) \text{ , } (eg) \end{array}$$

nur solche Factoren gemeinschaftlich aufweist, die auch in den Grössen:

$$(76) \quad (ka) \text{ , } (kb) \text{ , } (kc) \text{ , } (kd) \text{ , } (ke) \text{ , } (kg)$$

erscheinen; so kann man demselben stets durch ganze Zahlwerthe sämtlicher Unbekannten Genüge leisten.

Der Beweis, den wir zu führen beabsichtigen, ist ein Inductionsbeweis. Wir werden nämlich zeigen, dass unter den angegebenen Umständen das vorgelegte System von zwei Gleichungen mit m Unbekannten sich zerlegen lasse in eine gewöhnliche unbestimmte Gleichung mit nur zwei Unbekannten, welche immer ganze Auflösungen besitzt, und in ein System von zwei anderen Gleichungen mit nur $m-1$ Unbekannten, bei welchem die aus den Coëfficienten gebildete Determinantengruppe keinen von Eins verschiedenen Factor besitzt. Diese gewöhnliche unbestimmte Gleichung mit zwei Unbekannten und das neue System von zwei Gleichungen sind dem ursprünglichen Systeme äquivalent.

Diese Transformation lässt sich für jede beliebige Anzahl m von Unbekannten ausführen; selbst für $m=3$, nur mit dem einzigen Unterschiede, dass in diesem Falle das neue System mit $m-1$ Unbekannten kein unbestimmtes mehr ist, sondern ein bestimmtes, dem folglich nur eine einzige Determinante entspricht, welche aber gleich Eins wird, so zwar dass die Auflöslichkeit derselben in ganzen Zahlen ausser Zweifel ist.

Durch eine $m-2$ malige Anwendung dieses Verfahrens wird man das ursprüngliche System von zwei Gleichungen mit m Unbekannten verwandeln in $m-2$ gewöhnliche unbestimmte Gleichungen mit je zwei Unbekannten und in ein System von zwei bestimmten Gleichungen. Alle diese Gleichungen sind in ganzen Zahlen auflöslich, folglich auch das ihnen gleichgeltende System von zwei unbestimmten Gleichungen, von dem man ausging.

Um die nachfolgenden Untersuchungen nicht unnützerweise zu compliciren, wollen wir von der Voraussetzung ausgehen, dass in den Determinanten (75) kein von Eins verschiedener Factor gemeinschaftlich vorkomme, wodurch die Allgemeinheit der Untersuchungen nicht im mindesten beeinträchtigt wird, da man sich den in den Grössen (75) und (76) gemeinschaftlich vorkommenden Factor stets durch die im vorhergehenden Paragraphe angegebene Transformation weggeschafft denken kann.

Unter dieser Voraussetzung wollen wir nun die ursprünglich gegebenen Gleichungen mittelst gewisser Multiplicatoren λ_1 , λ_2 , μ_1 , μ_2 in zwei neue Gleichungen (29) und (30) transformiren, so zwar, dass die eine derselben, etwa die (29) von einer Unbekannten, z. B.

der w befreit ist, und die Determinanten der neuen Gleichungen, welche von g frei sind, nämlich:

$$(77) \quad \begin{matrix} (a' b') \\ (a' c') , (b' c') \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ (a' d') , (b' d') , (c' d') \dots\dots\dots \\ (a' e') , (b' e') , (c' e') \dots\dots\dots (d' e') \end{matrix}$$

keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen.

Der Nutzen einer solchen Transformation ist unsehwer einzusehen. In der That sind dann die transformirten Gleichungen folgende:

$$\begin{matrix} a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z + \dots + d'_1 u + e'_1 v & = & k'_1 \\ a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z + \dots + d'_2 u + e'_2 v + g'_2 w & = & k'_2 \end{matrix}$$

Durch Einführen einer neuen Hilfsgrösse w' mittelst der Substitution:

$$a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z + \dots + d'_2 u + e'_2 v = w'$$

verwandelt sich die zweite Gleichung in:

$$w' + g'_2 w = k'_2$$

Diese Gleichung ist eine unbestimmte mit nur zwei Unbekannten: w und w' . Gesetzt, man hätte sie in ganzen Zahlen aufgelöst, was, wie später gezeigt werden soll, immer möglich ist, so kann man den gefundenen Werth von w' in die zweite der beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{matrix} a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z + \dots + d'_1 u + e'_1 v = k'_1 \\ a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z + \dots + d'_2 u + e'_2 v = w' \end{matrix}$$

setzen und hat nun zur Bestimmung der übrigen $m-1$ Unbekannten eben diese zwei Gleichungen mit lauter ganzen Coëfficienten und Constanten, bei welchen die Determinantengruppe keinen gemeinschaftlichen Factor aufweist und folglich derselben Transformation abermals unterworfen werden kann.

Bei diesem Probleme handelt es sich zunächst um die Bestimmung der Multipliatoren $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$. Da die neuen Determinanten der ursprünglichen proportional sind und namentlich durch Multiplication mit der Determinante $(\lambda\mu)$ entstehen; so muss offenbar $(\lambda\mu)$ gleichkommen dem reciproken Werthe des grössten gemeinschaftlichen Factors aller von g freien Determinanten.

$$\begin{matrix} (ab) \\ (ac) \cdot (bc) \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ (ad) \cdot (bc) \cdot (cd) \dots\dots\dots \\ (ac) \cdot (be) \cdot (ce) \dots\dots\dots (de) \end{matrix}$$

des ursprünglichen Systemes. Diesen grössten gemeinschaftlichen Factor wollen wir, einer schon früher gebrauchten Bezeichnung gemäss, mit φ_j andeuten. Ferner ist noch eine zweite

Bedingung zu erfüllen, nämlich die $g_1' = 0$ und endlich noch eine dritte, welche besagt, dass alle Coëfficienten und Constanten der transformirten Gleichungen mit Ausnahme von g_2' und k_2' ganze Zahlwerthe erhalten sollen. Diesen Bedingungen ist Genüge zu leisten.

§. 8.

Wir wollen nun zeigen, wie diese Werthe der Multiplicatoren λ_1 , λ_2 , μ_1 , μ_2 durch ein analytisches Verfahren abgeleitet werden können. Die zu erfüllenden Bedingungen sind durch die nachfolgenden Gleichungen ausgesprochen:

$$(78) \quad \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = \pm \frac{1}{\varphi_g}$$

$$(79) \quad g_1 \lambda_1 + g_2 \lambda_2 = 0$$

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 = a_1'$$

$$b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 = b_1'$$

$$c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = c_1'$$

.

$$(81) \quad d_1 \lambda_1 + d_2 \lambda_2 = d_1'$$

$$e_1 \lambda_1 + e_2 \lambda_2 = e_1'$$

$$k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 = k_1'$$

(80)

$$g_1 \mu_1 + g_2 \mu_2 = g_2'$$

$$a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 = a_2'$$

$$b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2 = b_2'$$

$$c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 = c_2'$$

.

(82)

$$d_1 \mu_1 + d_2 \mu_2 = d_2'$$

$$e_1 \mu_1 + e_2 \mu_2 = e_2'$$

Diese Gleichungen sollen erfüllt werden für ganze Werthe von a_1' , b_2' , c_1' , . . . d_1' , e_1' , k_1' , a_2' , b_2' , c_2' , . . . d_2' , e_2' und beliebige Werthe von λ_1 , λ_2 , μ_1 , μ_2 , g_2' gleichgültig, ob sie ganz, oder gebrochen sind.

Die Anzahl der hier vorliegenden Gleichungen ist $2m + 2$, jene der Unbekannten aber $2m + 4$, also um zwei grösser. Das vorliegende Problem ist demnach ein unbestimmtes und enthält voraussichtlich zwei überschüssige Grössen. Um zu einer Auflösung dieser Gleichungen zu gelangen, wollen wir den folgenden Weg einschlagen. Wir heben zuvörderst die zwei Gleichungen:

$$(83) \quad \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = \pm \frac{1}{\varphi_g}, \quad g_1 \mu_1 + g_2 \mu_2 = g_2'$$

heraus und eliminiren aus ihnen μ_1 oder μ_2 , z. B. μ_1 , so erhalten wir:

$$(g_1 \lambda_1 + g_2 \lambda_2) \mu_2 = \pm \frac{g_1}{\varphi_g} + g_2' \lambda_2$$

und wenn man jetzt auf die Bedingungsgleichung

$$(84) \quad g_1 \lambda_1 + g_2 \lambda_2 = 0$$

Rücksicht nimmt, geht dieselbe über in:

$$(85) \quad \pm \frac{g_1}{\varphi_g} + g_2' \lambda_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_2 = \mp \frac{g_1}{\varphi_g g_2'}$$

Dies belehrt uns, dass die beiden Gleichungen (83) zur Bestimmung der zwei Grössen μ_1 und μ_2 nicht, sondern nur zur Ermittlung einer dieser beiden benützt werden können, da eine Elimination einer dieser beiden Grössen gleichzeitig auch die andere heraus schafft.

Substituirt man nun den Werth (85) in die (84), so folgt:

$$(86) \quad \lambda_1 = \pm \frac{g_2}{\varphi_g g_2'}$$

Die drei Gleichungen:

$$(87) \quad \lambda_1 = \pm \frac{g_2}{\varphi_g g_2'} \quad , \quad \lambda_2 = \pm \frac{g_1}{\varphi_g g_2'} \\ g_1 \mu_1 + g_2 \mu_2 = g_2'$$

treten also an die Stelle der früheren drei Bedingungsgleichungen (78) (79) (80). Wir substituiren nun diese gefundenen Werthe von λ_1 und λ_2 in die Gleichungen (81), so verwandeln sie sich in andere, welche alle nur noch g_2' nebst den ganz sein sollen den Grössen $a_1', b_1', c_1', \dots, e_1', k_1'$ in sich schliessen. Sie sind folgende:

$$(88) \quad \begin{aligned} a_1' &= \pm \frac{(a_1 g_2)}{\varphi_g g_2'} \\ b_1' &= \pm \frac{(b_1 g_2)}{\varphi_g g_2'} \\ c_1' &= \pm \frac{(c_1 g_2)}{\varphi_g g_2'} \\ &\dots \dots \dots \\ e_1' &= \pm \frac{(e_1 g_2)}{\varphi_g g_2'} \\ k_1' &= \pm \frac{(k_1 g_2)}{\varphi_g g_2'} \end{aligned}$$

Sie dienen dazu, den Werth von g_2' festzustellen. In der That, sollen $a_1', b_1', c_1', \dots, d_1, e_1', k_1'$ ganze Werthe besitzen, so muss $\varphi_g g_2'$ den ganzen Werth ϕ_g erhalten, oder ein Bruch sein mit dem Zähler ϕ_g , aber einem völlig beliebigen Nenner*). Dies lässt sich auf folgende Weise einsehen. Multipliciren wir diese Gleichungen beziehungsweise mit unbestimmt gelassenen ganzen Zahlen: $a, \beta, \gamma, \dots, \delta, \varepsilon, z$ und addiren sie hierauf, so geht eine neue Gleichung hervor:

$$(89) (a_1' a + b_1' \beta + c_1' \gamma + \dots + d_1' \delta + e_1' \varepsilon + k_1' z) = \pm \frac{1}{\varphi_g g_2'} [(a_1 g_2) a + (b_1 g_2) \beta + (c_1 g_2) \gamma + \dots + (d_1 g_2) \delta + (e_1 g_2) \varepsilon + (k_1 g_2) z].$$

Diese Gleichung ist dem Systeme von Gleichungen (88) vollkommen äquivalent, so lange $a, \beta, \gamma, \dots, \delta, \varepsilon, z$ vollkommen willkürliche Grössen bedeuten. Hebt man aber die Willkürlichkeit einer oder mehrerer dieser Grössen auf, so kann dies wohl nicht mehr behauptet werden, weil eine Verminderung der Anzahl dieser willkürlichen Grössen denselben Effect hat, wie das Weglassen einer der Gleichungen im Systeme (88). In einem solchen Falle wird demnach nicht jede Auflösung der Gleichung (89) auch nothwendig dem Systeme (88) Genüge leisten, aber umgekehrt jede Auflösung des Systemes (88) die Gleichung (89) erfüllen. Lässt sich daher zeigen, dass unter gewissen Verhältnissen die Gleichung (89) keine ganzen Auflösungen nach

*) ϕ_g bedeutet hier, einer früheren Bezeichnungswiese gemäss, den grössten gemeinschaftlichen Factor der mit g behafteten Determinanten $(ag), (bg), (cg), \dots, (dg), (eg)$.

$a'_1, b'_1, c'_1, \dots, d'_1, e'_1, k'_1$ besitzen könne, so gilt dies um so mehr von dem Systeme (88). Nehmen wir jetzt an, $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta, \varepsilon, z$ seien der Bedingung:

$$(90) \quad (a_1 g_2) \alpha + (b_1 g_2) \beta + (c_1 g_2) \gamma + \dots + (d_1 g_2) \delta + (e_1 g_2) \varepsilon + (k_1 g_2) z = \phi_g$$

entsprechend gewählt, wo ϕ_g der schon früher gewählten Bezeichnung gemäss den grössten gemeinschaftlichen Factor von g_1 und g_2 und nach §. 4 auch aller mit g verknüpften Determinanten:

$$(a_1 g_2), (b_1 g_2), (c_1 g_2), \dots, (d_1 g_2), (e_1 g_2)$$

darstellt, und auch in $(k_1 g_2)$ als Factor erscheint. Eine solche Wahl von $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta, \varepsilon, z$ ist immer möglich, ohne diesen Grössen andere, als ganze Werthe zu ertheilen, indem ϕ_g der grösste gemeinschaftliche Factor der in dieser unbestimmten Gleichung des ersten Grades vorkommenden Coëfficienten ist, und so ist es klar, dass einerseits nur eine einzige Grösse ihrer Willkürlichkeit beraubt wird, andererseits aber, dass in den Werthen von $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta, \varepsilon, z$ kein von Eins verschiedener Factor gemeinschaftlich vorkommen könne. Es geht hiedurch die Gleichung (89) über in:

$$(91) \quad a'_1 \alpha + b'_1 \beta + c'_1 \gamma + \dots + d'_1 \delta + e'_1 \varepsilon + k'_1 z = \pm \frac{\phi_g}{g_2 g'_2}$$

und es unterliegt nun wohl keiner Schwierigkeit mehr, alsogleich auch einzusehen, dass diese Gleichung nur dann in ganzen Zahlen nach $a'_1, b'_1, c'_1, \dots, d'_1, e'_1, k'_1$ aufgelöst werden könne, wenn $\frac{\phi_g}{g_2 g'_2}$ eine ganze Zahl ist, also:

$$(92) \quad g'_2 = \frac{\phi_g}{g_2 \xi}$$

gesetzt wird, unter ξ eine willkürliche ganze Zahl verstanden. Also auch nur unter dieser Bedingung ist es möglich, keineswegs aber nothwendig, dass auch das System (88) in ganzen Zahlen aufgelöst werden kann. Um nun Gewissheit zu erhalten, ob für beliebige oder nur für beschränkte Werthe von ξ das System (88) in ganzen Zahlen aufgelöst werden könne, substituiren wir den gefundenen Werth von g'_2 in die Gleichungen (88) und finden sonach:

$$(93) \quad a'_1 = \pm \frac{(a_1 g_2) \xi}{\phi_g}, \quad b'_1 = \pm \frac{(b_1 g_2) \xi}{\phi_g}, \quad c'_1 = \pm \frac{(c_1 g_2) \xi}{\phi_g}, \quad \dots, \quad d'_1 = \pm \frac{(d_1 g_2) \xi}{\phi_g}, \\ e'_1 = \pm \frac{(e_1 g_2) \xi}{\phi_g}, \quad k'_1 = \pm \frac{(k_1 g_2) \xi}{\phi_g}.$$

Da nun ϕ_g als Factor in allen Grössen: $(a_1 g_2), (b_1 g_2), (c_1 g_2), \dots, (d_1 g_2), (e_1 g_2), (k_1 g_2)$ erscheint, so ist die hier angezeigte Division wirklich ausführbar und wir gelangen sonach zur Überzeugung, dass wirklich und für völlig willkürliche Werthe von ξ die Grössen $a'_1, b'_1, c'_1, \dots, d'_1, e'_1, k'_1$ ganze Zahlwerthe erhalten. Die Wahl des Werthes von g'_2 in (92) ist demnach hinreichend, aber auch erforderlich, um $a'_1, b'_1, c'_1, \dots, d'_1, e'_1, k'_1$ ganz ausfallen zu machen.

Es erübrigt aber auch noch, zu untersuchen, ob auch $a'_2, b'_2, c'_2, \dots, d'_2, e'_2$ ganze Werthe erlangen können und für welche Werthe von ξ .

Zu diesem Zwecke ist es aber nothwendig, auch aus dem Systeme (82) die Grössen μ_1, μ_2 herauszuschaffen und dafür g_2' einzuführen. Dies lässt sich auf verschiedene Weise bewerkstelligen, so z. B. könnte man aus der Gleichung (80) und je zwei Gleichungen des Systemes (82) μ_1 und μ_2 eliminiren und sohergestalt also gleich zu Gleichungen gelangen, in denen μ_1 und μ_2 durch g_2' ersetzt ist. Es besteht aber noch ein viel kürzerer Weg, wir wollen diesen hier einschlagen.

Aus dem in §. 5 entwickelten Satze folgt nämlich, dass hier, wo die Multipliatoren-Determinante $(\lambda\mu)$ den Werth $\frac{1}{\varphi_g}$ besitzt, zwischen den Determinanten des neuen Systemes und jenen des ursprünglichen folgende Relationen bestehen:

$$(94) \quad \begin{aligned} (a_1 b_2) &= \varphi_g (a_1' b_2') \quad , \quad (a_1 c_1) = \varphi_g (a_1' c_1') \quad , \quad (a_1 d_2) = \varphi_g (a_1' d_2') \quad , \quad (a_1 e_2) = \varphi_g (a_1' e_2') \\ (b_1 c_2) &= \varphi_g (b_1' c_2') \quad , \quad (b_1 d_2) = \varphi_g (b_1' d_2') \quad , \quad (b_1 e_2) = \varphi_g (b_1' e_2') \\ (c_1 d_2) &= \varphi_g (c_1' d_2') \quad , \quad (c_1 e_2) = \varphi_g (c_1' e_2') \\ (d_1 e_2) &= \varphi_g (d_1' e_2') \end{aligned}$$

und da nun φ_g geradezu der grösste gemeinschaftliche Factor ist, der in allen hier aufgezählten von g und k freien Determinanten des ursprünglichen Systemes erscheint, so werden nothwendig:

$$(95) \quad \begin{aligned} (a_1' b_2') \quad , \quad (a_1' c_2') \quad , \quad (a_1' d_2') \quad , \quad (a_1' e_2') \\ (b_1' c_2') \quad , \quad (b_1' d_2') \quad , \quad (b_1' e_2') \\ (c_1' d_2') \quad , \quad (c_1' e_2') \\ (d_1' e_2') \end{aligned}$$

keinen von Eins verschiedenen Factor mehr gemeinschaftlich besitzen können. Das ist aber so lange unmöglich, als in $a_1', b_1', c_1', d_1', e_1'$ ein Factor gemeinschaftlich vorkommt, der von Eins verschieden ist. Wendet man nun einen Blick auf die Werthe (93); so zeigt sich also gleich, dass ζ der grösste gemeinschaftliche Factor dieser Grössen ist, da

$$\frac{(a_1 g_2)}{\psi_g} \quad , \quad \frac{(b_1 g_2)}{\psi_g} \quad , \quad \frac{(c_1 g_2)}{\psi_g} \quad \dots \dots \dots \quad \frac{(d_1 g_2)}{\psi_g} \quad , \quad \frac{(e_1 g_2)}{\psi_g}$$

keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen: und man gelangt sonach zur Überzeugung, dass $\zeta = \pm 1$, d. h.

$$(96) \quad g_2' = \pm \frac{\psi_g}{\varphi_g}$$

zu setzen sei, wenn $a_2', b_2', c_2', \dots, d_2', e_2'$ ganze Zahlwerthe erhalten sollen. Ob aber eine solche Wahl diesen gewünschten Zweck wirklich herbeiführt, oder nicht, ob die gestellte Forderung überhaupt im Bereiche der Möglichkeit liegt, soll die nachfolgende Untersuchung entscheiden.

Zunächst gehen die Werthe (93) in die folgenden über:

$$(97) \quad \begin{aligned} a_1' &= \pm \frac{(a_1 g_2)}{\psi_g} \quad . \quad b_1' = \pm \frac{(b_1 g_2)}{\psi_g} \quad . \quad c_1' = \pm \frac{(c_1 g_2)}{\psi_g} \quad \dots \dots \dots \quad d_1' = \pm \frac{(d_1 g_2)}{\psi_g} \quad , \quad e_1' = \pm \frac{(e_1 g_2)}{\psi_g} \quad , \\ k_1' &= \pm \frac{(k_1 g_2)}{\psi_g} \end{aligned}$$

die Gleichungen (87) aber gewinnen die Form:

$$(98) \quad \lambda_1 = \pm \frac{g_2}{\psi_g}, \quad \lambda_2 = \pm \frac{g_1}{\psi_g}$$

$$g_1 \mu_1 + g_2 \mu_2 = \pm \frac{\psi_g}{\varphi_g}.$$

Es erübrigt also noch, die Werthe von μ_1 , μ_2 und von a_2' , b_2' , c_2' , $\dots$, d_2' , e_2' zu bestimmen, wobei die zuletzt aufgezählten Grössen ganze Zahlwerthe erlangen sollen. Die hierzu dienlichen Gleichungen sind:

$$(99) \quad g_1 \mu_1 + g_2 \mu_2 = \pm \frac{\psi_g}{\varphi_g}$$

$$(100) \quad \begin{aligned} a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 &= a_2' \\ b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2 &= b_2' \\ c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 &= c_2' \\ \dots &\dots \\ d_1 \mu_1 + d_2 \mu_2 &= d_2' \\ e_1 \mu_1 + e_2 \mu_2 &= e_2'. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Unbekannten übersteigt hier jene der Gleichungen um Eins und demnach ist das hier vorliegende Problem ein unbestimmtes, dessen complete Auflösung eine willkürliche ganze Grösse in sich schliessen wird. Da aber zwei der hier erscheinenden Unbekannten, nämlich: μ_1 , μ_2 an die Bedingung, ganz zu sein, nicht gebunden sind, so werden wir mit der Elimination dieser beiden Grössen beginnen, um dann nur jene Unbekannten zunächst zum Gegenstande der Untersuchung zu machen, welche ganze Werthe erlangen sollen. Beginnen wir mit der Elimination von μ_1 und μ_2 aus den drei Gleichungen:

$$(101) \quad \begin{aligned} a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 &= a_2' \\ b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2 &= b_2' \\ g_1 \mu_1 + g_2 \mu_2 &= \pm \frac{\psi_g}{\varphi_g} \end{aligned}$$

so gelangt man zur Gleichung:

$$(102) \quad a_2' (b_1 g_2) - b_2' (a_1 g_2) \pm \frac{\psi_g}{\varphi_g} (a_1 b_2) = 0.$$

Man hat nämlich nur diese drei Gleichungen beziehungsweise mit $(b_1 g_2)$, $-(a_1 g_2)$, $(a_1 b_2)$ zu multipliciren und hierauf zu addiren, so verschwinden zufolge der oft erwähnten identischen Relationen:

$$\begin{aligned} a_1 (b_1 g_2) - b_1 (a_1 g_2) + g_1 (a_1 b_2) &= 0 \\ a_2 (b_1 g_2) - b_2 (a_1 g_2) + g_2 (a_1 b_2) &= 0 \end{aligned}$$

die Coëfficienten von μ_1 und μ_2 . Auf ganz dieselbe Weise ergeben sich alle übrigen von μ_1 und μ_2 freien Gleichungen, indem man in (101) die Zweite ersetzt durch eine der darauffolgenden im Systeme (100) oder mit anderen Worten, wenn man in der Gleichung (102) den Buchstaben b der Reihe nach in c , $\dots$, d , e verwandelt. Das durch Elimination von μ_1 und μ_2 aus den Gleichungen (99) und (100) hervorgehende System ist sonach folgendes:

Aus ihnen folgt mit Rücksicht auf die bestehende Relation (106):

$$(121) \quad \begin{aligned} \mu_1 &= \mp \frac{1}{\varphi_g} [a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 \gamma + \dots + d_2 \delta + e_2 \varepsilon] + \frac{g_2}{\varphi_g} \xi \\ \mu_2 &= \pm \frac{1}{\varphi_g} [a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 \gamma + \dots + d_1 \delta + e_1 \varepsilon] - \frac{g_1}{\varphi_g} \xi. \end{aligned}$$

Hiermit ist also das vorliegende Problem erledigt. Die hier gewonnenen Werthe (117), (121) sind allgemeiner, als die früher erwähnten (114), indem in (117) und (121) eine willkürliche ganze Zahl ξ erscheint. Für $\xi=0$ gehen beiderlei Resultate in einander über. Eine kurze Überlegung zeigt auch, dass die hier gewonnenen allgemeineren Resultate keinerlei Vorzug verdienen vor den früheren speciellen, denn im Grunde gehen die allgemeinen Werthe (117) dadurch hervor, dass man die Grössen $a'_1, b'_1, c'_1, \dots, d'_1, e'_1$, deren Werthe in (97) ersichtlich sind, mit ξ multiplicirt und zu den speciellen Werthen (114) addirt, mit andern Worten, indem man die Gleichung:

$$a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z + \dots + d'_1 u + e'_1 v = k'_1$$

mit einer beliebigen ganzen Zahl ξ multiplicirt und zur:

$$a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z + \dots + d'_2 u + e'_2 v + g'_2 w = k'_2$$

addirt. Es ist auch leicht ersichtlich, dass damit kein wesentlicher Vortheil verknüpft sei, und man daher immer vorziehen wird, $\xi=0$ zu setzen.

Bevor wir unsere Aufmerksamkeit einem andern Gegenstande zuwenden, wollen wir noch die gewonnenen Resultate einer näheren Betrachtung würdigen. In den hier erhaltenen Formeln (117) und (121) erscheint nämlich nur eine einzige willkürliche Grösse ξ , in den übrigen (97) und (98) aber gar keine. Dies dürfte wohl bei vielen Lesern einen Zweifel erregen, ob denn doch die gewonnene Auflösung des Systemes (78), (79), (80), (81), (82) eine vollständige und ganz allgemeine sei, da doch, wie schon Anfangs bemerkt wurde, die Anzahl der Unbekannten $2m+4$ jene der Gleichungen $2m+2$ um zwei übersteigt. Es ist demnach hier eine willkürliche Grösse abhandeln gekommen. Diese Grösse ist eben ξ in den Gleichungen (93). So lange nämlich nur die Gleichungen (78), (79), (80), (81) berücksichtigt werden nebst der Bedingung, dass $a'_1, b'_1, c'_1, \dots, d'_1, e'_1$ ganz sein sollen, während die Gleichungen (82) und mit ihnen auch die Grössen $a'_2, b'_2, c'_2, \dots, d'_2, e'_2$ ausser dem Bereiche der Untersuchung bleiben, sind in Wirklichkeit noch immer zwei willkürliche Grössen vorhanden, nämlich ξ und eine der zwei Grössen μ_1, μ_2 . Dies ist in den Gleichungen (92), (93), (87) zu sehen, welche eben die allgemeine Auflösung der aufgezählten Gleichungen darstellen. Wie nun aber auch das System (82) hinzutritt, zeigt sich, dass ganze Werthe von $a'_2, b'_2, c'_2, \dots, d'_2, e'_2$ nur dann möglich sind, wenn $\xi = \pm 1$ gesetzt wird und hier liegt der Grund des Verschwindens einer der beiden willkürlichen Grössen, die im Voraus vermuthet wurden. Die erfolgt aber lediglich nur in Folge der nicht linearen Form der Gleichung (78). Bei nicht linearen unbestimmten Gleichungen ereignet es sich sehr häufig, dass durch die Bedingung der Auflösung in ganzen Zahlen gewisse Unbekannte einen vollkommen bestimmten Werth erlangen. Das einfachste Beispiel der Art ist die unbestimmte Gleichung $xy=1$, welche nur zwei Auflösungen in ganzen Zahlen besitzt: $x=+1, y=+1$ und $x=-1, y=-1$. Bei linearen Gleichungen kann jedoch dies nie stattfinden.

Hier folgen die gefundenen Werthe der Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ und der in den transformirten Gleichungen erscheinenden Coëfficienten und Constanten. In denselben ist

die willkürliche Grösse ξ gleich Null angenommen, da diese Wahl die einfachste Form liefert:

$$\lambda_1 = +g_2, \lambda_2 = -g_1$$

$$(122) \quad \mu_1 = + \frac{1}{\varphi_g} [a_2 a + b_2 \beta + c_2 \gamma + \dots + d_2 \delta + e_2 \varepsilon]$$

$$\mu_2 = - \frac{1}{\varphi_g} [a_1 a + b_1 \beta + c_1 \gamma + \dots + d_1 \delta + e_1 \varepsilon]$$

$$a'_1 = (ag), b'_1 = (bg), c'_1 = (cg), \dots, d'_1 = (dg), e'_1 = (eg), g'_1 = \theta, k'_1 = (fg)$$

$$a'_1 = + (ab)\beta + (ac)\gamma + \dots + (ad)\delta + (ae)\varepsilon$$

$$b'_1 = - (ab)a + (bc)\gamma + \dots + (bd)\delta + (be)\varepsilon$$

$$c'_2 = - (ac)a - (bc)\beta + \dots + (cd)\delta + (ce)\varepsilon$$

$$\dots$$

$$(123) \quad d'_2 = - (ad)a - (bd)\beta - \dots - (cd)\gamma - (de)\varepsilon$$

$$e'_2 = - (ae)a - (be)\beta - \dots - (ce)\gamma - (de)\delta$$

$$g'_2 = - \frac{\psi_g}{\varphi_g}$$

$$k'_2 = \frac{1}{\varphi_g} [(k_1 a_2) a + (k_1 b_2) \beta + (k_1 c_2) \gamma + \dots + (k_1 d_2) \delta + (k_1 e_2) \varepsilon].$$

In diesen Formeln bedeutet φ_g den grössten gemeinschaftlichen Factor der von g freien Determinanten des ursprünglichen Systems:

$$(ab)$$

$$(ac), (bc)$$

$$\dots$$

$$(ad), (bd), (cd) \dots$$

$$(ae), (be), (ce) \dots (de)$$

ψ_g ist der grösste gemeinschaftliche Factor von g_1 und g_2 oder, was nach § 4 dasselbe ist, von den mit g verknüpften Determinanten:

$$(ag), (bg), (cg), \dots, (dg), (eg), (kg).$$

Die Grössen $a, \beta, \gamma, \dots, \delta, \varepsilon$ sind ganze Zahlen, welche die Bedingungsgleichung:

$$(124) \quad (ag)a + (bg)\beta + (cg)\gamma + \dots + (dg)\delta + (eg)\varepsilon = 1$$

erfüllen. Diese Bedingungsgleichung ist zwar von der (90) verschieden, allein dies thut der Richtigkeit keinen Eintrag, weil die Determinanten:

$$(ag), (bg), (cg), \dots, (dg), (eg)$$

ausser ψ_g keinen anderen Factor gemeinschaftlich besitzen können, wie in §. 4 erwiesen wurde, und demnach ist für jeden beliebigen Werth von k die (90) in ganzen Zahlen auflöslich, also auch für $k = 0$.

Die übrigen in diesen Formeln erscheinenden Bezeichnungen $g = \frac{g}{\varphi_g}$, $(ag) = \frac{ag}{\varphi_g}$; $(bg) = \frac{(bg)}{\varphi_g}$... $(ab) = \frac{(ab)}{\varphi_g}$, $(ac) = \frac{(ac)}{\varphi_g}$, ... sind aus dem Früheren her bekannt.

§. 9.

Mit der eben auseinandergesetzten Transformation der ursprünglichen Gleichungen:

$$(125) \quad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \dots + d_1u + e_1v + g_1w &= k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots + d_2u + e_2v + g_2w &= k_2 \end{aligned}$$

in zwei andere:

$$(126) \quad \begin{aligned} a_1'x + b_1'y + c_1'z + \dots + d_1'u + e_1'v &= k_1' \\ a_2'x + b_2'y + c_2'z + \dots + d_2'u + e_2'v + g_2'w &= k_2' \end{aligned}$$

ist der Weg zur Beurtheilung, ob ganze Auflösungen bestehen, oder nicht, bereits angebahnt. Die erste der beiden transformirten Gleichungen ist von der Unbekannten w befreit und enthält lauter Coëfficienten und eine Constante mit ganzen Zahlwerthen, die in (122) ersichtlich sind; nur die zweite Gleichung der (126) enthält noch die Unbekannte w in sich. Ihre Coëfficienten $a_2', b_2', c_2', \dots, d_2', e_2'$ besitzen die in (123) ersichtlichen ganzen Werthe und nur g_2' und k_2' sind nothwendig gebrochene Zahlen. Führt man nun vermittelst der Substitution:

$$(127) \quad a_2'x + b_2'y + c_2'z + \dots + d_2'u + e_2'v = w'$$

eine Hilfsgrösse w' , gewissermassen eine fernere Unbekannte ein, so verwandelt sich die zweite der Gleichungen (126) in:

$$w + g_2'w = k_2'$$

oder mit Rücksicht auf die in (123) aufgestellten Werthe für g_2' und k_2' in:

$$(128) \quad \varphi_g w' - \psi_g w = (k_1 a_2) \alpha + (k_1 b_2) \beta + (k_1 c_2) \gamma + \dots + (k_1 d_2) \delta + (k_1 e_2) \varepsilon.$$

Zu dieser Gleichung hat man noch die zwei anderen:

$$(129) \quad \begin{aligned} a_1'x + b_1'y + c_1'z + \dots + d_1'u + e_1'v &= k_1' \\ a_2'x + b_2'y + c_2'z + \dots + d_2'u + e_2'v &= w' \end{aligned}$$

hinzuzufügen. Die drei Gleichungen (128), (129) sind nun dem ursprünglichen Systeme (125) vollkommen äquivalent. Die erste derselben (128) enthält nur zwei Unbekannte w' und w , die beiden anderen (129) sind ein System von zwei unbestimmten Gleichungen, welches ähnlich, wie das ursprünglich gegebene (125) lauter ganze Coëfficienten und Constanten besitzt, vorausgesetzt, dass w' ganz ist, und deren Determinantengruppe keinen von Eins verschiedenen gemeinschaftlichen Factor enthält; aber sie enthalten um eine Unbekannte, die w nämlich, weniger, weil wir hier annehmen, dass man zuvörderst mit der Auflösung der (128) in ganzen Zahlen beginne und den gefundenen Werth von w' in die zweite der Gleichungen (129) setze.

Die Gleichung (128), für sich allein betrachtet, kann in ganzen Zahlen aufgelöst werden, denn sie enthält nur die zwei Unbekannten w und w' und die Coëfficienten derselben: φ_g und ψ_g sind nothwendig relative Primzahlen, da vorausgesetzt wurde, dass die Determinanten des Systemes (125) keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen. Man kann daher irgend eine ganze Auflösung derselben, in der bekannten Weise gesucht, und den gefundenen ganzen Werth von w' in die zweite der Gleichungen (129) gesetzt denken.

Vermittelst des hier angegebenen Verfahrens kann man daher das ursprüngliche System von zwei Gleichungen mit m Unbekannten, dessen Determinantengruppe keinen gemeinschaftlichen Factor aufweist, transformiren in ein gleichgeltendes System von drei Gleichungen, nämlich in eine gewöhnliche unbestimmte Gleichung mit zwei Unbekannten w und w' und in ein System von zwei neuen Gleichungen mit nur $m-1$ Unbekannten. Die unbestimmte Gleichung mit den zwei Unbekannten w und w' ist in ganzen Zahlen auflöslich und das neue System von zwei Gleichungen besitzt in der Determinantengruppe gleichfalls keinen gemeinschaftlichen Factor und verstattet daher eine ähnliche Transformation, wie das ursprüngliche System.

§. 10.

Das hier erörterte Verfahren lässt sich mehrmals wiederholen und wird die Anzahl der Unbekannten von m der Reihe nach auf die kleineren: $m-1$, $m-2$, $m-3$. . . bringen. Für jede aus dem Systeme von zwei Gleichungen herausgeschaffte Unbekannte erhält man eine unbestimmte Gleichung mit zwei Unbekannten. Man wird demnach zuletzt zu einem Systeme von zwei Gleichungen gelangen, welches nur noch zwei Unbekannte, etwa x, y enthält und zur Bestimmung derselben vollkommen hinreicht. Ausser diesen zwei Gleichungen hat man aber dann noch eine Reihe von gewöhnlichen unbestimmten Gleichungen mit je zwei Unbekannten, deren Anzahl gleich $m-2$ ist, die und zur Bestimmung der übrigen Unbekannten $z, \dots u, v, w$ dienlich sind.

Es ist nicht schwer, sich diesen weiteren Gang der Rechnung zu vergegenwärtigen. Zunächst lässt sich dieses Verfahren auf die beiden Gleichungen (129) anwenden. Die hier geltenden Multiplicatoren sind:

$$\begin{aligned}
 (130) \quad & \lambda_1' = e_2', \quad \lambda_2' = -e_1' \\
 & \mu_1' = \frac{1}{\varphi_e} [a_2' \alpha' + b_2' \beta' + c_2' \gamma' + \dots + d_2' \delta'] \\
 & \mu_2' = \frac{1}{\varphi_e} [-a_1' \alpha' - b_1' \beta' - c_1' \gamma' - \dots - d_1' \delta']
 \end{aligned}$$

wobei $\alpha', \beta', \gamma', \dots \delta'$ ganze Zahlen bedeuten, welche die Relationen:

$$(131) \quad (a_1' e_2') \alpha' + (b_1' e_2') \beta' + (c_1' e_2') \gamma' + \dots + (d_1' e_2') \delta' = 1$$

zu erfüllen haben. Diese Bedingungsgleichung kann noch in einer anderen Form geschrieben werden, denn die Determinanten des Systemes (129) sind jenen des ursprünglichen proportional. Man hat namentlich:

$$(a_1' e_2') = - \frac{(a_1 e_2)}{\varphi_g \varphi_e} \quad , \quad (b_1' e_2') = - \frac{(b_1 e_2)}{\varphi_g \varphi_e} \quad , \quad (c_1' e_2') = - \frac{(c_1 e_2)}{\varphi_g \varphi_e} \quad , \quad \dots \quad (d_1' e_2') = - \frac{(d_1 e_2)}{\varphi_g \varphi_e}$$

wo $\varphi_g \varphi_e$ den grössten gemeinschaftlichen Factor aller von g freien und mit e verknüpften Determinanten des ursprünglichen Systemes bedeutet. Hiedurch geht die (131) über in:

$$(a_1 e_2) \alpha' + (b_1 e_2) \beta' + (c_1 e_2) \gamma' + \dots + (d_1 e_2) \delta' = - \varphi_g \varphi_e$$

Vermittelst dieser Multiplicatoren (130) gehen zunächst zwei neue Gleichungen hervor, die den beiden (129) vollkommen äquivalent sind, sich von ihnen aber dadurch unterscheiden.

dass die erste derselben von der Unbekannten v gänzlich befreit erscheint, die zweite hingegen diese Unbekannte zwar noch enthält, aber durch die Einführung einer Hilfsgrösse davon befreit werden kann.

Um aber den Formeln eine Regelmässigkeit zu ertheilen, wollen wir in den beiden Gleichungen (129) die Grössen k_1' und w_1' durch w_1 , und w_2 ersetzt denken. Sie sind daher folgende:

$$(132) \quad \begin{aligned} a_1'x + b_1'y + c_1'z + \dots + d_1'u + e_1'v &= w_1 \\ a_2'x + b_2'y + c_2'z + \dots + d_2'u + e_2'v &= w_2. \end{aligned}$$

In der Gleichung (128) aber wollen wir das im zweiten Theile erscheinende Polynom durch einen einzigen Buchstaben ersetzen, nämlich:

$$(133) \quad (k_1 a_2) \alpha + (k_1 b_2) \beta + (k_1 c_2) \gamma + \dots + (k_1 d_2) \delta + (k_1 e_2) \varepsilon = K_w$$

setzen, wodurch dieselbe übergeht in:

$$(134) \quad \varphi_g w_2 - \phi_g w = K_w.$$

Man hat hier:

$$(135) \quad w_1 = k_1' = k_1 g_2 - k_2 g_1.$$

Führt man nun mittelst der oben erwähnten Multiplikatoren (130) die Transformation der Gleichungen (132) aus, so erhält man zunächst zwei gleichgeltende Gleichungen von der Form:

$$(136) \quad \begin{aligned} a_1''x + b_1''y + c_1''z + \dots + d_1''w &= w_1' = v \\ a_2''x + b_2''y + c_2''z + \dots + d_2''w - \frac{\phi_e}{\varphi_e} &= w_2' = \frac{1}{\varphi_e} K_w \end{aligned}$$

und mittelst der Einführung einer neuen Unbekannten v_2 daraus:

$$(137) \quad \varphi_e v_2 - \phi_e v = K_e$$

$$(138) \quad \begin{aligned} a_1''x + b_1''y + c_1''z + \dots + d_1''u &= v_1 \\ a_2''x + b_2''y + c_2''z + \dots + d_2''u &= v_2. \end{aligned}$$

Die Gleichung (137) ist eine gewöhnliche unbestimmte Gleichung mit nur zwei Unbekannten und ist immer in ganzen Zahlen auflöslich, weil φ_e und ϕ_e relative Primzahlen sind. Alle Determinanten des ursprünglichen Systemes nämlich, die von g frei sind, besitzen in dem angenommenen Falle den grössten gemeinschaftlichen Factor φ_g . Theilt man sie in zwei Gruppen, deren erste die von e freien, die zweite aber die mit e behafteten Determinanten in sich begreift, so ist der gewählten Bezeichnung gemäss $\varphi_g \varphi_e$ der grösste gemeinschaftliche Factor der Grössen der ersten Gruppe, $\varphi_g \phi_e$ jener der zweiten, und demnach müssen φ_e und ϕ_e relative Primzahlen sein. Denkt man sich die Gleichung (137) in ganzen Zahlen aufgelöst und einen der gefundenen ganzen Werthe von v_2 in die zweite der Gleichungen (138) gesetzt; so enthält dieses System nur noch $m = 2$ Unbekannte: $x, y, z, \dots, u$ und die zugehörige Determinantengruppe enthält keinen gemeinschaftlichen Factor, weil $(\lambda_1' \mu_2')$ zufolge der angenommenen Werthe (130) und der Bedingungsgleichung (131) gleich $\frac{1}{\varphi_e}$ ist. Nun gehen aber die Determinanten des Systemes (132) aus jenen des Systemes (129) durch Multiplication mit

$(\lambda_1' \mu_2') = \frac{1}{\varphi_e}$ hervor und folglich verschwindet der in ihnen noch enthaltene grösste gemeinschaftliche Factor φ_e durch die eingeleitete Transformation. Wir gelangen sohin zu einem Systeme mit nur $m - 2$ Unbekannten, dessen Determinanten abermals keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen.

Eine zweimalige Anwendung des angegebenen Transformationsverfahrens vermindert demnach die Anzahl m der Unbekannten um zwei, führt aber zu zwei gewöhnlichen unbestimmten Gleichungen.

Eine abermalige Transformation des Systemes (138) erheischt die Multiplicatoren:

$$(139) \quad \begin{aligned} \lambda_1'' &= d_2'' , \quad \lambda_2'' = -d_1'' \\ \mu_1'' &= \frac{1}{\varphi_d} [a_2'' a'' + b_2'' \beta'' + c_2'' \gamma'' + \dots] \\ \mu_2'' &= \frac{1}{\varphi_d} [-a_1'' a'' - b_1'' \beta'' - c_2'' \gamma'' - \dots] \end{aligned}$$

wobei $a'' , \beta'' , \gamma'' , \dots$ ganze Zahlen bedeuten, welche die Bedingungsgleichung:

$$(140) \quad (a_1'' d_2'') a'' + (b_1'' d_2'') \beta'' + (c_1'' d_2'') \gamma'' + \dots = 1$$

erfüllen müssen. Man gelangt so zu den Gleichungen:

$$(141) \quad \varphi_d u_2 - \phi_d u = K$$

$$(142) \quad \begin{aligned} a_1''' x + b_1''' y + c_1''' z + \dots &= u_1 \\ a_2''' x + b_2''' y + c_2''' z + \dots &= u_2. \end{aligned}$$

Hier bedeuten φ_d und ϕ_d zwei relative Primzahlen, nämlich $\varphi, \varphi_e \varphi_d$ den grössten gemeinschaftlichen Factor der von d freien Determinanten:

$$\begin{aligned} &(a_1 b_2) \\ &(a_2 c_2) \cdot (b_1 c_2) \\ &\dots \end{aligned}$$

und $\varphi, \varphi_e \phi_d$ jenen der mit d verknüpften:

$$(a_1 d_2) , (b_1 d_2) , (c_1 d_2) \dots$$

Die erste dieser Gleichungen (141) ist eine gewöhnliche unbestimmte Gleichung mit zwei Unbekannten und liefert die ganzen Werthe für u_2 und u . Sucht man eine specielle Auflösung derselben und substituirt den Werth von u_2 in die zweite der (142), so liegt nun zur Bestimmung der übrigen Unbekannten $m - 3$ an der Zahl ein System von zwei Gleichungen vor, dessen Determinanten abermals keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen und welches folglich diesem Verfahren nochmals unterworfen werden kann, wodurch wieder eine Unbekannte herausfällt.

Verfährt man auf diese Weise, so gelangt man endlich zu einem Systeme von zwei Gleichungen mit nur noch drei Unbekannten, dessen Determinanten keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen und erhält zur Bestimmung der übrigen Unbekannten $m - 3$ an der Zahl eben so viele gewöhnliche unbestimmte Gleichungen mit je zwei Unbekannten.

§. 11.

Auch das zuletzt erwähnte System von zwei Gleichungen mit nur noch drei Unbekannten: x, y, z nämlich:

$$\begin{aligned} a_1^{(m-3)}x + b_1^{(m-3)}y + c_1^{(m-3)}z &= u_1 \\ a_2^{(m-3)}x + b_2^{(m-3)}y + c_2^{(m-3)}z &= u_2, \end{aligned}$$

welches das Ergebniss einer $(m-3)$ maligen Transformation ist, kann demselben Verfahren unterworfen werden.

Bezeichnen wir nämlich mit φ_c den grössten gemeinschaftlichen Factor von $c_1^{(m-3)}$ und $c_2^{(m-3)}$, also auch von $(a_1^{(m-3)} b_1^{(m-3)})$ und $(b_1^{(m-3)} c_1^{(m-3)})$ und setzen, um den früheren Bezeichnungen treu zu bleiben, $(a_1^{(m-3)} b_1^{(m-3)}) = \varphi_c$, so werden die Multiplicatoren, der allgemeinen Regel entsprechend, sein:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= c_2^{(m-3)}, \quad \lambda_2 = -c_1^{(m-3)} \\ \mu_1 &= \frac{1}{\varphi_c} [a_2^{(m-3)} a^{(m-3)} + b_2^{(m-3)} \beta^{(m-3)}] \\ \mu_2 &= -\frac{1}{\varphi_c} [a_1^{(m-3)} a^{(m-3)} + b_1^{(m-3)} \beta^{(m-3)}], \end{aligned}$$

wobei $\alpha^{(m-3)}$ und $\beta^{(m-3)}$ ganze Zahlen bedeuten, welche die Relation:

$$(143) \quad (a_1^{(m-3)} c_2^{(m-3)}) \alpha^{(m-3)} + (b_1^{(m-3)} c_2^{(m-3)}) \beta^{(m-3)} = 1$$

zu erfüllen haben, eine unbestimmte Gleichung, deren Coëfficienten erwiesenermassen relative Primzahlen sind und die demnach stets durch ganze Zahlen erfüllt werden kann. Vermittelst dieser Multiplicatoren erhält man zunächst, wenn man sich der Bezeichnung:

$$(a_1^{(m-3)} b_2^{(m-3)}) = \varphi_c$$

erinnert:

$$\begin{aligned} (a_1^{(m-3)} c_2^{(m-3)}) x + (b_1^{(m-3)} c_2^{(m-3)}) y &= (u_1 c_2^{(m-3)}) \\ \beta^{(m-3)} x - a^{(m-3)} y - \frac{\varphi_c}{\varphi_c} z &= \frac{1}{\varphi_c} [(u_1 a_2^{(m-3)}) \alpha^{(m-3)} + (u_1 b_2^{(m-3)}) \beta^{(m-3)}]. \end{aligned}$$

Dies sind jene Gleichungen, welche der angenommenen Bezeichnung gemäss mit:

$$(144) \quad \begin{aligned} a_1^{(m-2)} x + b_1^{(m-2)} y &= z_1 \\ a_2^{(m-2)} x + b_2^{(m-2)} y - \frac{\varphi_c}{\varphi_c} z &= u_2' \end{aligned}$$

angedeutet werden. Der nächste Schritt besteht nun in der Einführung einer neuen Unbekannten z_2 vermittelst der Substitution:

$$a_2^{(m-2)} x + b_2^{(m-2)} y = z_2,$$

wodurch die zweite der Gleichungen (144) in zwei zerfällt. Man erhält sonach folgende drei Gleichungen:

$$(145) \quad (a_1^{(m-3)} b_2^{(m-3)}) z_2 - \varphi_c z = K_2 = (k_1^{(m-3)} a_2^{(m-3)}) \alpha^{(m-3)} + (k_1^{(m-3)} b_2^{(m-3)}) \beta^{(m-3)}$$

$$(146) \quad (a_1^{(m-3)} a_2^{(m-3)}) x + (b_1^{(m-3)} a_2^{(m-3)}) y = (k_1^{(m-3)} a_2^{(m-3)})$$

$$(147) \quad \beta^{(m-3)} x - a^{(m-3)} y = z_2.$$

Die (145) ist eine unbestimmte Gleichung mit zwei Unbekannten z und z_2 und kann durch ganze Zahlenwerthe erfüllt werden, weil $(a_1^{(m-3)} b_2^{(m-3)}) = \varphi_c$ und φ_c relative Primzahlen sind. Denkt man sich eine specielle Auflösung in ganzen Zahlen gesucht und den Werth von z_2 in die dritte (147) gesetzt, so liegen nun zwei Gleichungen, nämlich die (146) und (147) zur Bestimmung von x und y vor. Diese Gleichungen sind aber bestimmte und liefern nur einen einzigen Werth von x und y . Die diesem Systeme entsprechende Determinante:

$$(a_1^{(m-3)} c_2^{(m-3)}) \alpha^{(m-3)} + (b_1^{(m-3)} c_2^{(m-3)}) \beta^{(m-3)}$$

ist zufolge der Relation (143) gleich Eins und sohin sind die aus den Gleichungen (146) und (147) gezogenen Werthe x, y nothwendig ganze Zahlen.

Durch eine $m-2$ malige Wiederholung der angegebenen Transformation gelangt man sohin von dem ursprünglich gegebenen Systeme:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots + d_1 u + e_1 v + g_1 w &= k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots + d_2 u + e_2 v + g_2 w &= k_2 \end{aligned}$$

zu $m-2$ unbestimmten Gleichungen mit je zwei Unbekannten und zu einem Systeme von zwei bestimmten Gleichungen, dessen Determinante gleich Eins ist. Alle diese Gleichungen lassen sich durch ganze Zahlwerthe der darin erscheinenden Unbekannten: $x, y, z, \dots, u, v, w$ und Hilfsunbekannten $x_2, \dots, u_2, v_2, w_2$ erfüllen, wenn in der Determinantengruppe:

$$\begin{aligned} &(a_1 b_2) \\ &(a_1 c_2) , (b_2 c_2) \\ &\dots \dots \dots \\ &(a_1 g_2) , (b_2 g_2) \dots (e_1 g_2) \end{aligned}$$

kein gemeinschaftlicher Factor erscheint und somit ist also dargethan, dass unter dieser Bedingung auch das ursprüngliche System für ganze Werthe der Unbekannten erfüllt werden könne, wie z. b. w.

§. 12.

Hier liegt die Frage nahe, ob ganze Auflösungen nur unter der eben angegebenen Bedingung vorhanden sind, und wenn nicht, welche die allgemeinste Bedingung für das Bestehen ganzer Auflösungen sei? Mit der Beantwortung dieser Frage wollen wir uns hier beschäftigen.

Vor allem ist schon, dem in §. 6 gewonnenen Satze zufolge, ersichtlich, dass auch in dem Falle, wo die Determinanten des Systemes einen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen, derselbe aber auch in allen Grössen:

$$(k_1 a_2) , (k_1 b_2) , (k_1 c_2) , \dots , (k_1 d_2) , (k_1 e_2) , (k_1 g_2)$$

erscheint, ganze Auflösungen bestehen werden, indem man durch die in §. 6 angegebenen Transformationen das System in ein anderes gleichgeltendes verwandeln kann, dessen Determinanten keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen. Dies beweist schon, dass zum Bestehen ganzer Auflösungen das gänzliche Fehlen eines gemeinschaftlichen Factors in den Determinanten keine unerlässliche Bedingung sei.

Es ist sonach die Frage zu beantworten: Unter welcher Bedingung besitzt ein System von zwei Gleichungen ganze Auflösungen, wenn die Determinanten desselben einen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen?

Mit der Beantwortung dieser Frage steht aber die einer anderen im innigsten Zusammenhange, nämlich der folgenden: Wenn ein System von zwei Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten vorliegt, dessen Determinanten keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen und dem somit dem früher Erwiesenen zufolge stets durch ganze Zahlwerthe der Unbekannten Genüge geleistet werden kann, welcher ist der grösste gemeinschaftliche Factor, der in einer Gruppe zusammengehöriger Werthe der Unbekannten erscheinen kann?

Der innige Zusammenhang dieser beiden Fragen wird durch die folgenden Bemerkungen eingesehen werden:

Denken wir uns ein System von zwei Gleichungen gegeben, dessen Determinanten einen von Eins verschiedenen Factor φ gemeinschaftlich besitzen, so kann man zwar im Allgemeinen durch die in §. 6 angegebene Transformation die Befreiung der Determinanten von diesem Factor nicht bewerkstelligen, ohne die ganzen Grössen k_1 und k_2 in Brüche zu verwandeln, allein eine Änderung der Veränderlichen führt augenblicklich zu dem gewünschten Ziele. In der That führen wir anstatt der Unbekannten:

$$x, y, z \dots u, v, w$$

andere ein:

$$x, y, z \dots u, v, w$$

vermittelst der Substitutionen:

$$(148) \quad x = \frac{x}{\varphi}, \quad y = \frac{y}{\varphi}, \quad z = \frac{z}{\varphi} \dots \dots u = \frac{u}{\varphi}, \quad v = \frac{v}{\varphi}, \quad w = \frac{w}{\varphi}$$

so verwandelt sich zunächst das ursprünglich gegebene System in ein anderes mit den neuen Unbekannten $x, y, z, \dots u, v, w$, in welchem zwar die Coëfficienten Brüche sind mit dem Nenner φ , aber sich alsogleich in ganze Zahlen verwandeln lassen, wenn man beide Gleichungen mit φ multiplicirt. Die solchergestalt hervorgehenden Gleichungen sind:

$$(149) \quad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots + d_1 u + e_1 v + g_1 w &= k_1 \varphi \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots + d_2 u + e_2 v + g_2 w &= k_2 \varphi. \end{aligned}$$

Sie unterscheiden sich von den ursprünglich vorgelegten ausser den neuen Unbekannten noch in ihren im zweiten Theile erscheinenden Constanten $k_1 \varphi$ und $k_2 \varphi$, welche beide den Factor φ besitzen und können daher der in §. 6 angegebenen Transformation unterworfen werden. Thut man dies, so gelangt man zu den zwei neuen, den beiden (149) völlig gleichgeltenden Gleichungen:

$$(150) \quad \begin{aligned} a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z + \dots + d'_1 u + e'_1 v + g'_1 w &= k'_1 \\ a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z + \dots + d'_2 u + e'_2 v + g'_2 w &= k'_2 \end{aligned}$$

in welchen alle Coëfficienten sowohl, wie die Constanten k'_1, k'_2 ganze Zahlwerthe besitzen und deren Determinanten von jedem gemeinschaftlichen Factor frei sind. Dieses System ist demnach jedenfalls in ganzen Werthen auflöslich; kann aber noch überdies dazu dienen, der Auflösungen des ursprünglichen Systemes habhaft zu werden. Substituirt man nämlich die gefundenen Werthe von $x, y, z, \dots u, v, w$ in die Gleichungen (148), so gehen unmittelbar

die correspondirenden Werthe von $x, y, z, \dots u, v, w$ hervor, welche dem ursprünglichen Systeme Genüge leisten. Diese Letzteren sind, wie unmittelbar zu ersehen, Brüche mit dem Nenner φ und können nur dann ganze Zahlwerthe erlangen, wenn in der entsprechenden Reihe der Werthe von $x, y, z, \dots u, v, w$ der Factor φ gemeinschaftlich erscheint und demnach den Nenner φ tilgt. Besteht daher unter all' den unendlich vielen verschiedenen Auflösungen der Gleichungen (149) in ganzen Zahlen keine einzige, bei welcher in den Werthen der Unbekannten $x, y, z, \dots u, v, w$ der Factor φ gemeinschaftlich erscheint, so kann auch keine einzige zu ganzen Werthen aller Unbekannten $x, y, z, \dots u, v, w$ führen, und es wird demnach auch unmöglich sein, durch ganze Zahlwerthe den ursprünglichen Gleichungen Genüge zu leisten.

Hier ist also unmittelbar der Zusammenhang der beiden oberwähnten Fragen ersichtlich.

§. 13.

Stellen wir uns demnach die Frage: Welcher Factor kann bei einer beliebigen ganzen Auflösung eines Systemes von zwei Gleichungen, dessen Determinanten keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen, möglicherweise in den zusammengehörigen Werthen aller Unbekannten: $x, y, z, \dots u, v, w$ gleichzeitig erscheinen?

Vor allem ist aus den beiden Gleichungen unmittelbar ersichtlich, dass jeder Factor, der in irgend einer Reihe von zusammengehörigen und Genüge leistenden Zahlwerthen der Unbekannten $x, y, z, \dots u, v, w$ erscheint, nothwendig in den beiden Constanten k_1 und k_2 als Factor vorkommen müsse, indem sie nur dann den im ersten Theile stehenden Polynomen identisch gleich sind. Es können demnach nur jene Factoren in $x, y, z, \dots u, v, w$ gemeinschaftlich erscheinen, welche gleichzeitig in k_1 und k_2 enthalten sind. Es lässt sich aber auch umgekehrt zeigen, dass zum mindesten eine specielle Auflösung besteht, welche diesen gleichzeitig in k_1 und k_2 erscheinenden grössten gemeinschaftlichen Factor in den Werthen sämtlicher Unbekannten: $x, y, z, \dots u, v, w$ wirklich besitzt. Dies wollen wir auf folgende Weise darlegen:

Zuvörderst denken wir uns dieses System durch die in §. 9, 10 gezeigten Transformationen in eine Reihe von Gleichungen verwandelt:

$$(151) \quad \begin{aligned} \varphi_g w_2 - \phi_g w &= K_w \\ \varphi_e v_2 - \phi_e v &= K_v \\ \varphi_d u_2 - \phi_d u &= K_u \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_c z_2 - \phi_c z &= K_z \end{aligned}$$

$$(152) \quad \begin{aligned} a_1^{(m-2)} x + b_1^{(m-2)} y &= z_1 \\ a_2^{(m-2)} x + b_2^{(m-2)} y &= z_2 \end{aligned}$$

für die hier erscheinenden Grössen bestehen folgende Gleichungen:

$$(153) \quad \begin{aligned} w_1 = k_1' &= k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2, & K_w &= [k_1 \mu_1 + k_2 \mu_2] \varphi_g \\ v_1 = w_1' &= v_1 \lambda_1' + v_2 \lambda_2', & K_v &= [w_1 \mu_1' + v_2 \mu_2'] \varphi_e \\ u_1 = v_1' &= v_1 \lambda_1'' + v_2 \lambda_2'', & K_u &= [v_1 \mu_1'' + v_2 \mu_2''] \varphi_d \\ &\dots \dots \dots & & \\ z_1 = u_1' &= u_1 \lambda_1^{(m-3)} + u_2 \lambda_2^{(m-3)}, & K_z &= [u_1 \mu_1^{(m-3)} + u_2 \mu_2^{(m-3)}] \varphi_c \end{aligned}$$

Fassen wir nun zuvörderst die ersten beiden Gleichungen der (153) ins Auge, so zeigt sich unmittelbar, dass jeder gemeinschaftlich in k_1 und k_2 vorkommende Factor auch in w erscheinen wird. Die erste der unbestimmten Gleichungen (151) verstattet aber, da φ_g und ϕ_g relative Primzahlen sind, ganze Auflösungen, und unter diesen bestehen, wie bekannt, solche, die durch K_w theilbar sind. Es wird sonach ein Werth von w und w_2 bestehen, der den in k_1 und k_2 gemeinschaftlich vorkommenden Factor enthält. Dieser Factor erscheint also nunmehr in w_1 und w_2 und folglich auch in K_w , wie in der zweiten (153) zu sehen. Man kann nun in gleicher Weise bei der Auflösung der zweiten unbestimmten Gleichung in (151) dafür Sorge tragen, dass dieser Factor auch in v_2 und v gleichzeitig erscheint. Nun erscheint also der in k_1 und k_2 vorhandene Factor schon in w , v , dann in v_1 und v_2 , folglich auch in v_1' und K_w , somit auch in u_1 und kann bei der Auflösung der dritten unbestimmten Gleichung in (151) auch dem Werthe von u_2 und u ertheilt werden. In solcher Weise fortfahrend, gelangt man endlich zum Schlusse, dass bei zweckmässiger Wahl auch z_1 und z_2 diesen Factor tragen, und demnach derselbe auch in den aus den beiden bestimmten Gleichungen (152) (mit der Determinante Eins) gezogenen Werthen von x und y erscheinen wird. Es ist folglich möglich, die ganzen Werthe der Unbekannten $x, y, z, \dots, w$ sämmtlich mit dem Factor zu versehen, der in k_1 und k_2 gemeinschaftlich vorhanden ist.

Fassen wir all' das bisher Gesagte zusammen, so gelangen wir zur folgenden Beantwortung der oben aufgestellten Frage: Bei einem Systeme von zwei Gleichungen, dessen Determinanten keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen, kann höchstens nur der grösste gemeinschaftliche Factor der beiden Constanten k_1, k_2 gleichzeitig in allen Werthen der Unbekannten, welche zu einer und derselben Auflösung gehören, enthalten sein, und es lässt sich stets eine solche Auflösung wirklich angeben.

§. 14.

Nach der Beantwortung dieser Frage wird es keiner Schwierigkeit mehr unterliegen, auch die mit ihr im innigen Zusammenhange stehende andere zu erledigen, nämlich anzugeben, unter welchen Bedingungen ein System von zwei Gleichungen ganze Auflösungen verstattet, selbst dann noch, wenn seine Determinanten einen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen. Um aber der nachfolgenden Untersuchung alsogleich die nothwendige Allgemeinheit zu verleihen, bezeichnen wir mit φ_k den grössten gemeinschaftlichen Factor aller Determinanten, mit φ_k jenen aller Grössen $(ka), (kb), (kc) \dots (kg)$, wo selbstredend φ der grösste gemeinschaftliche Factor ist, der sämmtlichen Determinanten, die sich aus den Coëfficienten und Constanten der Gleichungen bilden lassen, φ_k und ϕ_k hingegen zwei relative Primzahlen bedeuten. Dem in §. 4 Bewiesenen zufolge ist nur ϕ_k gleichzeitig auch ein gemeinschaftlicher Factor von k_1 und k_2 . Das hier in Rede stehende System sei durch die beiden Gleichungen:

$$(154) \quad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \dots + d_1u + e_1v + g_1w &= f_1\phi_k \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots + d_2u + e_2v + g_2w &= f_2\phi_k \end{aligned}$$

vorge stellt, wobei der in den beiden Constanten erscheinende gemeinschaftliche Factor ϕ_k ersichtlich gemacht wurde. Dasselbe lässt sich nun durch die im §. 12 angewendete

Änderung der Veränderlichen in ein anderes verwandeln, bei dem die Determinanten keinen gemeinschaftlichen Factor mehr aufweisen, der nicht auch zugleich ein Factor aller Grössen (ka) , (kb) , ... (kg) wäre; kurz, lässt sich in ein System verwandeln, das ganze Auflösungen zulässt. Im gegenwärtigen Falle treten aber an die Stelle der in §. 12 angewendeten Substitutionen (148) die anderen:

$$(155) \quad x = \frac{\xi}{\varphi_k}, \quad y = \frac{\eta}{\varphi_k}, \quad z = \frac{\zeta}{\varphi_k}, \quad \dots \quad u = \frac{u}{\varphi_k}, \quad v = \frac{v}{\varphi_k}, \quad w = \frac{w}{\varphi_k}$$

weil sich offenbar der in allen Determinanten und Grössen (ka) , (kb) ... erscheinende Factor φ auch ohne Einführung neuer Veränderlichen, durch die in §. 6 angegebene Combination der Gleichungen entfernen lässt. Hiedurch geht das System (154) in ein anderes über, mit den neuen Unbekannten $\xi, \eta, \zeta, \dots, u, v, w$, welches nach dem Wegschaffen aller Nenner der Brüche die Gestalt erlangt:

$$(156) \quad \begin{aligned} a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + \dots + d_1 u + e_1 v + g_1 w &= f_1 \varphi_k \phi_k \\ a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + \dots + d_2 u + e_2 v + g_2 w &= f_2 \varphi_k \phi_k. \end{aligned}$$

Die Determinanten dieses Systemes sind von jenen des ursprünglich vorgelegten (154) nicht verschieden, und demnach so wie jene mit dem grössten gemeinschaftlichen Factor $\varphi \varphi_k$ versehen. Die Constanten aber und demzufolge auch die Grössen (ka) , (kb) , (kg) unterscheiden sich in einem weiteren Factor φ_k von jenen des ursprünglichen Systemes. Während also früher die Grössen (ka) , (kb) ... (kg) den grössten gemeinschaftlichen Factor $\varphi \phi_k$ besaßen, werden sie bei dem neuen Systeme (156) den anderen: $\varphi \varphi_k \phi_k$ aufweisen. Der grösste gemeinschaftliche Factor $\varphi \varphi_k$ der Determinanten ist demnach bei diesem Systeme (156) gleichzeitig auch in allen Grössen (ka) , (kb) ... (kg) als Factor enthalten und es lässt sich demnach durch die in §. 6 auseinandergesetzte Transformation dieser Factor aus allen Determinanten herauschaffen, mit anderen Worten, dieses neue System (156) lässt sich den früheren Ergebnissen zufolge durch ganze Zahlwerthe der Unbekannten $\xi, \eta, \zeta, \dots, u, v, w$ erfüllen. Führt man die in §. 6 angegebene Transformation wirklich aus, so gelangt man zu zwei Gleichungen von folgender Gestalt:

$$(157) \quad \begin{aligned} a'_1 \xi + b'_1 \eta + c'_1 \zeta + \dots + d'_1 u + e'_1 v + g'_1 w &= f'_1 \phi_k \\ a'_2 \xi + b'_2 \eta + c'_2 \zeta + \dots + d'_2 u + e'_2 v + g'_2 w &= f'_2 \phi_k, \end{aligned}$$

wobei sämtliche Coëfficienten und auch die Constanten k'_1, k'_2 ganze Zahlwerthe besitzen. Eine leichte Überlegung zeigt noch überdies, dass k'_1 und k'_2 relative Primzahlen sind. In der That, besäßen sie noch irgend einen von Eins verschiedenen Factor z. B. θ gemeinschaftlich, so würde $\theta \phi_k$ in allen Grössen (ka) , (kb) ... (kg) dieses Systemes (157) als Factor enthalten sein und, da die entsprechenden Grössen des Systemes (156) nur in einem Factor $\varphi \varphi_k$ davon verschieden sind, so müsste ihnen $\varphi \varphi_k \phi_k \theta$ und nicht, wie unserer Annahme entspricht, $\varphi \varphi_k \phi_k$ als grösster gemeinschaftlicher Factor angehören, und somit ist klar dargethan, dass θ keinen von Eins verschiedenen Werth besitzen könne, mit anderen Worten, dass k'_1 und k'_2 relative Primzahlen sind. Dieses zuletzt erhaltene System (157) hat demnach in all' seinen Determinanten keinen von Eins verschiedenen Factor mehr gemeinschaftlich und ϕ_k ist der grösste gemeinschaftliche Factor der Grössen (ka) , (kb) , ... (kg) . Wir schliessen hieraus zufolge §. 10, dass man demselben durch ganze Zahlwerthe von $\xi, \eta, \zeta, \dots, u, v, w$ Genüge

leisten, und nach dem im §. 13 gewonnenen Satze, dass nur ϕ_k oder einzelne Factoren von ϕ_k , keineswegs aber eine andere Zahl in einer Auflösung, d. h. in einer Gruppe von zusammengehörigen Werthen der Unbekannten gemeinschaftlich erscheinen könne; also weder φ_k noch irgend ein einfacher Factor dieser Zahl. Denken wir uns demnach irgend eine beliebige Auflösung gesucht und die gefundenen Werthe von $x, y, z, \dots, u, v, w$ in die Gleichungen (155) substituirt, so gehen die correspondirenden Werthe von $x, y, z, \dots, u, v, w$ hervor, welche das ursprünglich vorgelegte System erfüllen; sie sind aber alle oder doch zum mindesten ein einziger, wirkliche Brüche, wenn φ_k von Eins verschieden ist. Bringt man sie alle auf einerlei und kleinste Benennung, so ist der gemeinschaftliche Nenner von φ_k nicht verschieden. Dass dieses Endresultat immer dasselbe bleibt, welche Auflösung des Systemes (157) man auch unter den unendlich vielen bestehenden erwählen mag, ist wohl überflüssig erst zu erwähnen und somit ausser allem Zweifel, dass ganze Auflösungen des ursprünglichen Systemes unmöglich sind, wenn φ_k einen von Eins verschiedenen Werth besitzt.

Wir gelangen sohin zur folgenden allgemeinen Regel, um die Frage zu entscheiden, ob ein gegebenes System von zwei Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten ganze Auflösungen zulässt oder nicht:

Man bestimme den grössten gemeinschaftlichen Factor φ_k aller aus den Coëfficienten der Gleichungen gebildeten Determinanten:

$$\begin{aligned} & (ab) \\ & (ac) , (bc) \\ & \dots \dots \dots \\ & (ad) , (bd) , (cd) \dots \dots \\ & (ae) , (be) , (ce) \dots \dots (de) \\ & (ag) , (bg) , (cg) , \dots \dots (dg) , (eg); \end{aligned}$$

suche hierauf den grössten gemeinschaftlichen Factor φ , der sowohl in dieser Gruppe von Determinanten, als auch in den Grössen:

$$(ka) , (kb) , (kc) , \dots \dots (kd) , (ke) , (kg)$$

erscheint, und dividire nun den ersten dieser gemeinschaftlichen Factoren durch den zweiten, so entscheidet der erhaltene Quotient φ_k , der jedesmal eine ganze Zahl ist, die obige Frage: Ist $\varphi_k = 1$, so sind ganze Auflösungen wirklich vorhanden. Erhält aber φ_k einen von Eins verschiedenen Werth, so kann man dem vorgelegten Systeme nur durch wirkliche Brüche Genüge leisten und φ_k ist geradezu unter allen möglichen der kleinste gemeinschaftliche Nenner derselben.

§. 15.

II. Über das Aufsuchen einer speciellen Auflösung in ganzen Zahlen, oder in gebrochenen Werthen mit einem bestimmten Nenner.

Das Problem, eine specielle Auflösung aufzusuchen, ist im Grunde schon durch die in §. 9 und §. 10 gelehrte Transformation vollständig gelöst, da zur Bestimmung der übersehössigen Unbekannten gewöhnliche unbestimmte Gleichungen mit je zwei Unbekannten, oder wenn

man will, gewöhnliche Congruenzen des ersten Grades vorliegen; die Bestimmung der übrigen zwei Unbekannten aber dann durch Auflösung eines Systemes von zwei Gleichungen des ersten Grades auf bekannte Weise bewerkstelligt werden kann. Unsere Absicht ist hier auch keineswegs eine andere, als den Gang der Rechnung zu regeln und namentlich die Bildung der unbestimmten Gleichungen auf eine einfache und independente Regel zurückzuführen. Unter (151) in §. 13 finden sich die unbestimmten Gleichungen zusammengestellt, die dem gegebenen Systeme von Gleichungen gleichgeltend sind. Bei den darin erscheinenden Grössen: $K_u, K_v, K_w, \dots, K_z$ ist eine independente Bestimmung wünschenswerth, nachdem sie bisher nur auf recurrirende Weise abgeleitet wurden. Um zu den Werthen dieser Grössen zu gelangen, werden wir nicht die früheren Substitutionen verfolgen, sondern einen anderen kürzeren und directen Weg einschlagen, indem wir aus den ursprünglich gegebenen Gleichungen alsogleich diejenigen ableiten, die durch eine öftere Wiederholung des bekannten Transformationsverfahrens hervorgehen.

Wir wollen also die gegebenen Gleichungen:

$$(158) \quad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \dots + l_1t + \dots + d_1u + e_1v + g_1w &= k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots + l_2t + \dots + d_2u + e_2v + g_2w &= k_2 \end{aligned}$$

vornehmen, und hier zwei neue Gleichungen mittelst einer einzigen Transformation ableiten, von welchen die erste von t frei ist, und bei welchen die von $l, \dots, d, e, g, k$ freien Determinanten von ihrem grössten gemeinschaftlichen Factor $\varphi_1, \dots, \varphi_d, \varphi_e, \varphi_g, \varphi$ befreit sind. Hier bedeutet φ den grössten gemeinschaftlichen Factor aller Determinanten:

$$\begin{aligned} &(ab) \\ &(ac) \quad , \quad (bc) \\ &\dots \dots \dots \\ &(al) \quad , \quad (bl) \quad , \quad (cl) \quad \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ &(ad) \quad , \quad (bd) \quad , \quad (cd) \quad \dots \dots \\ &(ae) \quad , \quad (be) \quad , \quad (ce) \quad \dots \dots \quad (de) \\ &(ag) \quad , \quad (bg) \quad , \quad (cg) \quad \dots \dots \quad (dg) \quad , \quad (eg) \\ &(ka) \quad , \quad (kb) \quad , \quad (kc) \quad \dots \dots \quad (kd) \quad , \quad (ke) \quad , \quad (kg). \end{aligned}$$

$\varphi \varphi_k$ ist der grösste gemeinschaftliche Factor aller jener Grössen dieser Gruppe, die nach Hinweglöschen der letzten Zeile übrig bleiben; $\varphi \varphi_k \varphi_g$ der grösste gemeinschaftliche Factor der nach dem Wegstreichen der zwei letzten Zeilen noch übrig bleibenden Grössen dieser Gruppe, d. h. der von k und g freien Determinanten u. s. w.

Ferner bedeutet $\varphi \varphi_k$ den grössten gemeinschaftlichen Factor der mit k versehenen Grössen der letzten Zeile; $\varphi \varphi_k \varphi_g$ jenen der mit g versehenen und von k freien Grössen der vorletzten Zeile u. s. w.

Es sollen nun mittelst schicklich gewählter Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ und unter der Annahme $\varphi_k = 1$ zwei neue Gleichungen abgeleitet werden:

$$(159) \quad \begin{aligned} a_1'x + b_1'y + c_1'z + \dots + l_1't + \dots + d_1'u + e_1'v + g_1'w &= k_1' \\ a_2'x + b_2'y + c_2'z + \dots + l_2't + \dots + d_2'u + e_2'v + g_2'w &= k_2', \end{aligned}$$

welche den ursprünglichen (158) vollkommen gleichgeltend sind. In diesen transformirten Gleichungen soll $l'_1 = 0$ sein, ferner sollen die Coëfficienten: $a'_1, b'_1, c'_1, \dots, a'_2, b'_2, c'_2, \dots$ ganze Werthe besitzen, mit Ausnahme der übrigen: $m'_1, \dots, d'_1, e'_1, g'_1, k'_1$ und $l'_2, \dots, d'_2, e'_2, g'_2$, welche auch gebrochene Werthe erhalten dürfen, und endlich sollen die von $l, \dots, d, e, g, k$ freien Determinanten von jedem gemeinschaftlichen Factor befreit erscheinen.

Diese Aufgabe hat nicht geringe Ähnlichkeit mit dem in §. 8 behandelten Probleme. Es ist namentlich einleuchtend, dass die Multipliatoren-Determinante $(\lambda_1 \mu_2)$ ein Bruch und zwar geradezu der reciproke Werth des gemeinschaftlichen Factors $\varphi_1 \dots \varphi_d \cdot \varphi_e \cdot \varphi_g \cdot \varphi$ sein müsse. Es unterliegt keiner Schwierigkeit, alle Bedingungen aufzustellen und durch ein rein analytisches Verfahren, ähnlich, wie in §. 8, zu den Werthen von $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ zu gelangen und zwar zu ihren allgemeinen Werthen. Wir halten eine Wiederholung der dort gemachten Bemerkungen für überflüssig, da der Leser dies leicht completiren kann, und geben hier nur die hervorgehenden Werthe der Multipliatoren, aber nicht in ihrer allgemeinen Form, sondern in der für unsere Zwecke hinreichenden speciellen:

$$\begin{aligned}
 (160) \quad \lambda_1 &= \frac{l_2}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi} & \lambda_2 &= \frac{-l_1}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi} \\
 \mu_1 &= \frac{-1}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi} [a_2 a + b_2 \beta + c_2 \gamma + \dots] \\
 \mu_2 &= \frac{1}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi} [a_1 a + b_1 \beta + c_1 \gamma + \dots],
 \end{aligned}$$

wo die Grössen $a, \beta, \gamma, \dots$ ganze Zahlen bedeuten, welche die Gleichung

$$(161) \quad (a_1 l_2) a + (b_1 l_2) \beta + (c_1 l_2) \gamma + \dots = \varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi$$

zu erfüllen haben.

Die Werthe der Coëfficienten der transformirten Gleichung (159) sind dann folgende:

$$\begin{aligned}
 (162) \quad a'_1 &= \frac{(a_1 l_2)}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi}, \quad b'_1 = \frac{(b_1 l_2)}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi}, \quad c'_1 = \frac{(c_1 l_2)}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi}, \dots \\
 l'_1 &= 0 \dots = \frac{-(l_1 e_2)}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi}, \quad g'_1 = \frac{-(l_1 g_2)}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi}, \quad k'_1 = \frac{(k_1 l_2)}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi} \\
 a'_2 &= \frac{1}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi} [(a_1 b_2) \beta + (a_1 c_2) \gamma + \dots] \\
 b'_2 &= \frac{-1}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi} [-(a_1 b_2) a - (b_1 c_2) \gamma + \dots] \\
 c'_2 &= \frac{-1}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi} [-(a_1 c_2) a - (b_1 c_2) \beta + \dots] \\
 &\dots \\
 (163) \quad l'_2 &= \frac{\varphi_1}{\varphi_1} \\
 &\dots \\
 d'_2 &= \frac{+1}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi} [(a_1 d_2) a + (b_1 d_2) \beta + (c_1 d_2) \gamma + \dots] \\
 e'_2 &= \frac{+1}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi} [(a_1 e_2) a + (b_1 e_2) \beta + (c_1 e_2) \gamma + \dots]
 \end{aligned}$$

$$g_2' = \frac{+1}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi} [(a_1 g_2) \alpha + (b_1 g_2) \beta + (c_1 g_2) \gamma + \dots]$$

$$k_2' = \frac{-1}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi} [(k_1 a_2) \alpha + (k_1 b_2) \beta + (k_1 c_2) \gamma + \dots].$$

In diesen Formeln ist unmittelbar ersichtlich, dass

$$a_1', b_1', c_1', \dots$$

$$a_2', b_2', c_2', \dots$$

ganze Werthe besitzen, indem sich alle hier angezeigten Divisionen wirklich ausführen lassen. Ferner sind alle aus diesen Coëfficienten gebildeten Determinanten von dem ursprünglich darin vorhandenen gemeinschaftlichen Factor $\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi$ befreit, weil $(\lambda_1 \mu_2)$ den Werthen (160) zufolge und mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung (161) den Werth $\frac{1}{\varphi_1 \varphi_m \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_g \varphi}$ besitzt. Endlich ist $l_1' = 0$ und somit sind alle Bedingungen erfüllt, die gefordert wurden. Vermittelt dieser Formeln lassen sich nun die Werthe von:

$$K_w, K_v, K_u, \dots$$

mit Leichtigkeit ableiten und die unbestimmten Gleichungen bilden. Ersetzt man zuvörderst l durch den letzten Coëfficienten g , so erhält man:

$$(164) \quad k_2' = \frac{-1}{\varphi_g \varphi} [(k_1 a_2) \alpha_1 + (k_1 b_2) \beta_1 + (k_1 c_2) \gamma_1 + \dots + (k_1 e_2) \varepsilon_1].$$

wobei $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$ ganze Zahlen sind, gezogen aus der unbestimmten Gleichung:

$$(165) \quad (a_1 g_2) \alpha_1 + (b_1 g_2) \beta_1 + (c_1 g_2) \gamma_1 + \dots + (e_1 g_2) \varepsilon_1 = \varphi \phi_g,$$

die erste der unbestimmten Gleichungen in (151) ist demnach:

$$(166) \quad \varphi_g w_2 - \phi_g w = \frac{1}{\varphi} [(k_1 a_2) \alpha_1 + (k_1 b_2) \beta_1 + (k_1 c_2) \gamma_1 + \dots + (k_1 e_2) \varepsilon_1].$$

Die hier im zweiten Theile angezeigte Division durch φ lässt sich wirklich ausführen, da die Grössen: $(k_1 a_2), (k_1 b_2), (k_1 c_2), \dots, (k_1 e_2)$ sämmtlich durch φ theilbar sind.

Ersetzt man jetzt die Grösse l in den allgemeinen Formeln durch den vorletzten Coëfficienten: e , so findet man zwei transformirte Gleichungen in der Form:

$$a_1' x + b_1' y + c_1' z + \dots + d_2' u + g_1' w = k_1'$$

$$a_2' x + b_2' y + c_2' z + \dots + d_2' u + \frac{\phi_e}{\varphi} v + g_2' w = k_2'.$$

und wird in der zweiten derselben:

$$a_2' x + b_2' y + c_2' z + \dots + d_2' u = -v_2$$

setzen. Man gelangt so zur unbestimmten Gleichung:

$$(167) \quad \varphi_e v_2 - \phi_e v_2 = \frac{1}{\varphi \varphi_g} [(k_1 a_2) \alpha_2 + (k_1 b_2) \beta_2 + (k_1 c_2) \gamma_2 + \dots + (k_1 d_2) \delta_2]$$

$$+ \frac{w}{\varphi \varphi_g} [(a_1 g_2) \alpha_2 + (b_1 g_2) \beta_2 + (c_1 g_2) \gamma_2 + \dots + (d_1 g_2) \delta_2].$$

wo die Grössen $\alpha_2 \cdot \beta_2 \gamma_2 \dots \delta_2$ ganze Zahlen bedeuten, welche die unbestimmte Gleichung erfüllen:

$$(168) \quad (a_1 e_2) \alpha_2 + (b_1 e_2) \beta_2 + (c_1 e_2) \gamma_2 + \dots + (d_1 e_2) \delta_2 = \varphi \varphi_g \varphi_e.$$

In ganz ähnlicher Weise ergibt sich die dritte unbestimmte Gleichung der (151), wenn man den allgemeinen Buchstaben l durch den andern d ersetzt. Die transformirten Gleichungen haben in diesem Falle die Gestalt:

$$\begin{aligned} a_1' x + b_1' y + c_1' z + \dots + e_1' v + g_1' w &= k_1' \\ a_2' x + b_2' y + c_2' z + \dots + \frac{\varphi_a}{\varphi_d} u + e_2' v + g_2' w &= k_2' \end{aligned}$$

und man wird:

$$a_2' x + b_2' y + c_2' z + \dots = -u_2$$

setzend, zur unbestimmten Gleichung gelangen:

$$(169) \quad \begin{aligned} \varphi_a u_2 - \varphi_d u &= \frac{1}{\varphi_e \varphi_g \varphi} [(k_1 \alpha_2) \alpha_3 + (k_1 \beta_2) \beta_3 + (k_1 \gamma_2) \gamma_3 + \dots] \\ &+ \frac{v}{\varphi_e \varphi_g \varphi} [(a_1 g_2) \alpha_3 + (b_1 g_2) \beta_3 + (c_1 g_2) \gamma_3 + \dots] \\ &+ \frac{r}{\varphi_e \varphi_g \varphi} [(a_1 e_2) \alpha_3 + (b_1 e_2) \beta_3 + (c_1 e_2) \gamma_3 + \dots] \end{aligned}$$

wo die Grössen $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \dots$ ganze Zahlen sind, welche durch Auflösung der unbestimmten Gleichung:

$$(170) \quad (a_1 d_2) \alpha_3 + (b_1 d_2) \beta_3 + (c_1 d_2) \gamma_3 + \dots = \varphi_a \varphi_e \varphi_g \varphi$$

gewonnen werden.

In dieser Weise fortfahrend, kann man der Reihe nach alle unbestimmten Gleichungen (151) aus den hier aufgestellten allgemeinen Formeln ableiten, indem man den allgemeinen Buchstaben l durch den passenden ersetzt. Das Gesetz, nach dem dieselben gebildet werden, ist aus den Formeln (166) (167) (169) mit den Bedingungsgleichungen (165) (168) (170) unmittelbar zu ersehen und es unterliegt keiner Schwierigkeit, auch die folgenden unbestimmten Gleichungen alsogleich zu bilden.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die zwei allerletzten bestimmten Gleichungen (152) zu bilden. Auch diese gehen aus den allgemeinen Formeln (163) hervor, und zwar wenn man l durch e ersetzt. In der That sind in diesem Falle die transformirten Gleichungen folgende:

$$\begin{aligned} a_1' x + b_1' y + \dots + d_1' u + e_1' v + g_1' w &= k_1' \\ a_2' x + b_2' y + \frac{\varphi_r}{\varphi_e} z + \dots + d_2' u + e_2' v + g_2' w &= k_2'. \end{aligned}$$

Hier ist nun:

$$\begin{aligned} k_1' - g_1' w - e_1' v - d_1' u - \dots &= + z_1 \\ a_2' x + b_2' y &= - z_2 \end{aligned}$$

zu setzen. Man gewinnt so die letzte unbestimmte Gleichung der (151) in der Form:

$$\begin{aligned}
 \varphi_c z_2 - \psi_c z &= \frac{1}{\dots \varphi_d \varphi_e \varphi_f \varphi_g} [(k_1 a_2) a + (k_1 b_2) \beta] \\
 (171) \quad &+ \frac{w}{\dots \varphi_d \varphi_e \varphi_f \varphi_g} [(a_1 g_2) a + (b_1 g_2) \beta] \\
 &+ \frac{v}{\dots \varphi_d \varphi_e \varphi_f \varphi_g} [(a_1 e_2) a + (b_1 e_2) \beta] \\
 &+ \frac{u}{\dots \varphi_d \varphi_e \varphi_f \varphi_g} [(a_1 d_2) a + (b_1 d_2) \beta] \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

wo a, β ganze Werthe besitzen, gezogen aus der Gleichung:

$$(172) \quad (a_1 e_2) a + (b_1 e_2) \beta = \psi_c \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_f \varphi_g$$

Die zwei bestimmten Gleichungen in x, y sind:

$$\begin{aligned}
 (173) \quad a_1' x + b_1' y &= + z_1 \\
 a_2' x + b_2' y &= - z_2
 \end{aligned}$$

mit den Werthen:

$$\begin{aligned}
 (174) \quad a_1' &= \frac{(a_1 e_2)}{\psi_c \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_f \varphi_g} , \quad b_1' = \frac{(b_1 e_2)}{\psi_c \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_f \varphi_g} \\
 a_2' &= -\beta , \quad b_2' = + a
 \end{aligned}$$

weil $(a_1 b_2) = + \psi_c \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_f \varphi_g$ ist, und:

$$\begin{aligned}
 (175) \quad + z_1 &= \frac{1}{\psi_c \dots \varphi_d \varphi_e \varphi_f \varphi_g} [(k_1 c_2) + (c_1 g_2) w + (c_1 e_2) v + (c_1 d_2) u + \dots] \\
 - z_2 &= - \frac{1}{(a_1 b_2)} \left[+ [(k_1 a_2) + (a_1 g_2) w + (a_1 e_2) v + (a_1 d_2) u + \dots] a + \right. \\
 &\quad \left. + [(k_1 b_2) + (b_1 g_2) w + (b_1 e_2) v + (b_1 d_2) u + \dots] \beta \right].
 \end{aligned}$$

Hiermit ist die wirkliche Berechnung vollkommen angebahnt. Um eine specielle Auflösung in ganzen Zahlen zu finden, wird man mit der Auflösung der ersten unbestimmten Gleichung (166) beginnen; nachdem man früher die darin enthaltenen Grössen $a_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \varepsilon_1$ aus der Bedingungsgleichung (165) gezogen hat. Den gefundenen ganzen Werth von w setzt man nun die zweite Gleichung (167) nachdem man früher die Hilfsgleichung (168) in ganzen Zahlen aufgelöst und die Werthe von $a_2, \beta_2, \gamma_2, \dots, \delta_2$ gesucht hat. Der zweite Theil der Gleichung (167) verwandelt sich hierdurch in eine ganze Zahl, wie aus den früheren Untersuchungen bekannt und leicht einzusehen ist, und man wird für v einen ganzen Werth finden können. Die gefundenen Werthe von v und w werden dann in dritte Gleichung (169) gesetzt, nebst den aus der (170) zu suchenden Werthen $a_3, \beta_3, \gamma_3, \dots$. Der zweite Theil verwandelt sich abermals in eine ganze Zahl und man wird demnach auch für u einen ganzen Werth finden u. s. w. bis endlich die letzte Gleichung (171) den zugehörigen ganzen Werth von z geliefert hat. Die Werthe von x und y findet man nun gleichfalls in ganzen Zahlen aus den Gleichungen (173) nachdem man die durch die (174) und (175) gegebenen Werthe von $a_1', b_1', a_2', b_2', z_1, -z_2$ mit Hilfe der früheren Ergebnisse berechnet hat. Die zwei Gleichungen (173) liefern in diesem Falle nur ganze Werthe für x und y , weil z_1 und $-z_2$ ganze Zahlwerthe erhalten und die Determinante $a_1' b_2' - a_2' b_1'$, wie auch aus den Formeln (174) und der bestehenden Bedingungsgleichung (172) ersichtlich ist, den Werth 1 besitzt.

§. 16.

III. Über das Aufstellen der allgemeinen Formel, welche alle möglichen ganzen oder gebrochenen Auflösungen mit einem bestimmten Nenner in sich enthält.

Die in §. 7—10 gelehrt Transformation eines unbestimmten Systemes von zwei Gleichungen wurde im Vorhergehenden mit Nutzen angewendet, um zuvörderst die Frage zu entscheiden, ob ganze Auflösungen bei einem Systeme zulässig seien, und wenn dies nicht der Fall war, den Werth des kleinsten möglichen Nenners kennen zu lernen; ferner hat sie ihre Wirksamkeit erwiesen bei der Berechnung einer speciellen Auflösung des Systemes; sie führt aber auch zur allgemeinen Formel, welche alle Auflösungen einer bestimmten Gattung (entweder alle ganzen oder alle gebrochenen mit einem bestimmten Nenner) in sich schliesst und mit einer entsprechenden Anzahl ganzer willkürlicher Grössen verknüpft ist. In §. 2 wurde die allgemeine Gestalt einer solcher Formel bereits entwickelt, und angegeben, dass die Aufstellung derselben im Grunde die specielle Auflösung mehrerer verschiedener Systeme von Gleichungen voraussetze, die aus dem gegebenen Systeme durch sehr einfache Substitutionen abgeleitet werden können. Die hier in Rede stehende Transformationsweise des Systemes von zwei Gleichungen würde ohne alle diese früheren Untersuchungen zu genau demselben Resultate führen, wenn man anstatt, wie bisher geschehen, bei der Auflösung der unbestimmten Gleichungen nur einen einzigen speciellen Werth der darin enthaltenen Unbekannten aufzusuchen, den completen, mit einer willkürlichen ganzen Grösse verknüpften Werth sich verschaffen würde. Die so eingeleitete Rechnung würde dann offenbar zu einer gleichen Anzahl von willkürlichen Grössen führen, als unbestimmte Gleichungen, oder was dasselbe ist, als überschüssige Unbekannte in den Gleichungen vorhanden sind. Insoferne wäre demnach mit der in Rede stehenden Transformation eines Systemes von zwei unbestimmten Gleichungen sogar das hier vorliegende Problem, nämlich die allgemeine Auflösung als erledigt und auf bekannte Grundoperationen zurückgeführt anzusehen. Nichts desto weniger halten wir es für erspriesslich dieses Problem noch einer näheren Erörterung zu unterziehen, da es in allen Fällen, wo diese Rechnungen nur einigermaßen an Umfang zunehmen, eine klare Übersicht und das Vermeiden aller Umwege unerlässlich wird. Dies ist der Grund warum wir hier die in Rede stehende Transformation ersetzen werden durch ein anderes geregeltes Verfahren.

Nach den Ergebnissen des §. 2 ist die allgemeine Formel der Auflösungen eines Systemes von zwei Gleichungen ihrer Gestalt nach durch die (15) gegeben, wenn man darin $n=2$ setzt. Bevor man aber zur Aufstellung derselben schreitet, ist noch früher zu bestimmen, welche Ordnung man den verschiedenen Unbekannten anzuweisen gesonnen sei, gewissermassen, welche derselben man als unabhängige und welche als abhängige betrachten wolle, weil von dieser Anordnung der Unbekannten die Gestalt der allgemeinen Auflösung abhängt, wie schon im §. 2 erörtert wurde. In den gewöhnlichen Fällen, wo alle Determinanten des Systemes von Null verschieden ausfallen, unterliegt diese Anordnung der Unbekannten keinerlei Beschränkung und man kann nach voller Willkür dabei zu Werke gehen, indem eine jede mit gleichem Geschick die Rolle der Unabhängigen, wie jene der Abhängigen zu übernehmen geeignet ist. In gewissen Fällen aber, die zu den Ausnahmen zu rechnen sind, erweisen sich manche Unbekannte als untauglich, die Rolle der Unabhängigen zu spielen, indem ihre Werthe

überhaupt erhalten werden kann, ohne die übrigen darin erscheinenden Unbekannten $x, y, z, \dots u, v, w$, der Möglichkeit zu berauben, ganze Werthe zu erlangen. Diese zwei Gleichungen unterscheiden sich von den ursprünglich gegebenen nur darin, dass die constanten Grössen k_1, k_2 mit $\mathfrak{N}$ multiplicirt werden und die Unbekannten $x, y, z, \dots u, v, w$ beziehungsweise in $x, y, z, \dots u, v, w$ geändert werden. Es kann aber auch $\mathfrak{N}$ schon im Voraus gegeben sein, nur muss dann, soll das Problem überhaupt möglich sein, dieser gegebene Werth von $\mathfrak{N}$ theilbar sein durch den numerisch kleinsten und von Null verschiedenen Werth von $\mathfrak{N}$, welcher den ganzen Auflösungen des Systemes (178) entspricht. Der Fall wo $\mathfrak{N}=1$ ausfällt, ist ein specieller und bezieht sich auf die ganzen Auflösungen. Jedes auf die Gleichungen (176) Bezug habende Problem, gleichgültig, ob dabei ganze oder gebrochene Auflösungen gesucht werden, lässt sich aus den allgemeinen Gleichungen (178) durch Auflösung derselben in ganzen Zahlen erledigen, wenn man über den Werth der darin erscheinenden Grösse $\mathfrak{N}$ die geeigneten Verfügungen trifft. Die in der allgemeinen Formel (177) erscheinenden Grössen $x_0, y_0, z_0, \dots u_0, v_0, w_0$ sind eine specielle Auflösung des Systemes (178) in ganzen Zahlen, wenn $\mathfrak{N}$ darin jenen bestimmten Werth besitzt, den es in den Formeln (177) bedeutet, und:

$$(179) \quad x = \frac{x_0}{\mathfrak{N}}, \quad y = \frac{y_0}{\mathfrak{N}}, \quad z = \frac{z_0}{\mathfrak{N}}, \dots \quad v = \frac{v_0}{\mathfrak{N}}, \quad w = \frac{w_0}{\mathfrak{N}}$$

ist alsdann eine specielle Auflösung des ursprünglich gegebenen Systemes (176) in Brüchen mit dem Nenner $\mathfrak{N}$.

Ersetzt man in den Gleichungen (178) $\mathfrak{N}$ durch Null, wodurch sie übergehen in:

$$(180) \quad \begin{aligned} 0 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots + d_1 u + e_1 v + g_1 w \\ 0 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots + d_2 u + e_2 v + g_2 w \end{aligned}$$

und sucht nun den kleinsten positiven, von Null verschiedenen ganzen Werth von x , welcher ganzen Auflösungen dieser zwei Gleichungen entspricht, so ist dies geradezu der Werth von x_1 , und die übrigen Grössen $y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1$, welche in den Formeln (177) die zweite Verticalreihe von Coëfficienten vervollständigen, sind irgend eine specielle Auflösung dieser zwei Gleichungen (180) in ganzen Zahlen, die dem Werthe $x = x_1$ entspricht.

Auf vollkommen ähnliche Weise findet man aus den zwei Gleichungen:

$$(181) \quad \begin{aligned} 0 &= b_1 y + c_1 z + \dots + d_1 u + e_1 v + g_1 w \\ 0 &= b_2 y + c_2 z + \dots + d_2 u + e_2 v + g_2 w \end{aligned}$$

die für $\mathfrak{N}=0, x=0$ aus den Gleichungen (178) hervorgehen, zunächst y_2 , wenn man den kleinsten positiven von Null verschiedenen Werth von y sucht, der ganzen Auflösungen entspricht, und hierauf $z_2, \dots u_2, v_2, w_2$, wenn man $y=y_2$ setzt, und irgend eine specielle Auflösung des Systemes nach den übrigen Unbekannten sucht.

Endlich die letzte in der Formel (177) erscheinende Verticalreihe von Coëfficienten: $u_{m-2}, v_{m-2}, w_{m-2}$ geht aus den zwei Gleichungen:

$$(182) \quad \begin{aligned} 0 &= d_1 u + e_1 v + g_1 w \\ 0 &= d_2 u + e_2 v + g_2 w \end{aligned}$$

(183) die zweite Horizontalreihe bilden, die also von k frei sind und a in sich enthalten. F_y , oder nach der früheren Bezeichnung $\varphi \varphi_k \varphi_a \phi_b$ ist der grösste gemeinschaftliche Factor aller von k und a freien und mit b versehenen Determinanten, die in (183) die dritte Horizontalreihe darstellen u. s. w.

Die Auflösung dieser Hilfsgleichungen (184) ist, wie leicht einzusehen, nur mit einer geringen Mühe verknüpft, weil mit dem Aufsuchen der Factoren $F_x, F_y, F_z, \dots, F_u$ der grösste Theil der Rechnung schon vollendet ist, wenn man bei der vorausgegangenen Bestimmung von φ_k den zweckmässigen Weg eingeschlagen hat.

Hat man diese Hilfsgleichungen (184) aufgelöst und für die Hilfsgrössen $\beta', \gamma', \delta', \epsilon', \eta', \beta'', \gamma'', \dots, \gamma^{(m+2)}$ ganze Zahlwerthe ermittelt, die ihnen Genüge leisten; so hat man nun nur noch die Werthe:

$$(185) \quad K_x = (kb)\beta' + (kc)\gamma' + \dots + (kd)\delta' + (ke)\epsilon' + (kg)\eta'$$

$$(186) \quad \begin{aligned} K_y &= (kc)\gamma'' + \dots + (kd)\delta'' + (ke)\epsilon'' + (kg)\eta'' \\ A_y &= (ac)\gamma'' + \dots + (ad)\delta'' + (ae)\epsilon'' + (ag)\eta'' \\ &\dots \end{aligned}$$

$$(187) \quad \begin{aligned} K_u &= (ke)\epsilon^{(m-2)} + (kg)\eta^{(m-2)} \\ A_u &= (ae)\epsilon^{(m-2)} + (ag)\eta^{(m-2)} \\ B_u &= (be)\epsilon^{(m-2)} + (bg)\eta^{(m-2)} \\ &\dots \end{aligned}$$

zu rechnen, um dann alsoogleich zu den Gleichungen zu gelangen, welche die Werthe $x_0, y_0, z_0, \dots, u_0, v_0, w_0$ zu liefern geeignet sind. Dieselben sind nach §. 15 folgende:

$$(188) \quad \begin{aligned} \phi_x x + \varphi_x \mathfrak{X} &= \frac{1}{f_k} [K_x \mathfrak{X}] \\ \phi_y y + \varphi_y \mathfrak{Y} &= \frac{1}{f_x} [K_y \mathfrak{X} - A_y x] \\ \phi_z z + \varphi_z \mathfrak{Z} &= \frac{1}{f_y} [K_z \mathfrak{X} - A_z x - B_z y] \\ &\dots \\ \phi_u u + \varphi_u \mathfrak{U} &= \frac{1}{f_t} [K_u \mathfrak{X} - A_u x - B_u y - C_u z - \dots] \\ &= \frac{1}{(eg)} [(kg)\mathfrak{X} - (ag)x - (bg)y - (cg)z - \dots - (dg)u] \\ w &= \frac{-1}{(eg)} [(ke)\mathfrak{X} - (ae)x - (be)y - (ce)z - \dots - (de)u]. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen bedeuten $\phi_x, \phi_y, \phi_z, \dots, \phi_u, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \dots, \varphi_u$ beziehungsweise die früher mit $\phi_a, \phi_b, \phi_c, \dots, \phi_d, \varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \dots, \varphi_d$ bezeichneten Factoren: $f_k, f_x, f_y, \dots, f_t$ aber haben folgende Bedeutungen:

$$(189) \quad \begin{aligned} f_k &= \varphi \varphi_k \\ f_x &= \varphi \varphi_k \varphi_x \\ f_y &= \varphi \varphi_k \varphi_x \varphi_y \\ f_z &= \varphi \varphi_k \varphi_x \varphi_y \varphi_z \\ &\dots \end{aligned}$$

und ordne sie, wie hier geschehen, in Vertical- und Horizontalreihen. Der erste Buchstabe einer jeden Ambe bezeichnet zugleich die betreffende Horizontalreihe, der zweite aber die Verticalreihe. Eine jede solche Ambe, wie z. B. (ka) bedeutet einen binomischen Ausdruck:

$$(ka) = k_1 a_2 - k_2 a_1,$$

der aus den vier Coëfficienten:

$$\begin{matrix} k_1 & a_1 \\ k_2 & a_2 \end{matrix}$$

abgeleitet wird, und für den die Bezeichnung: „Determinante“ gebräuchlich ist. Solcher Determinanten hat man so viele zu bilden, als Amben vorhanden sind.

Hat man alle Determinanten (192) gebildet und in der angegebenen Weise in Horizontal- und Verticalreihen geordnet; so hat man zwei Fälle zu unterscheiden: erstens alle Determinanten sind von Null verschieden, oder doch wenigstens in einer jeden Horizontalreihe eine einzige; oder zweitens sämtliche Determinanten einer Horizontalreihe sind Null. Im ersten und häufigeren Falle kann man ungehindert weiter schreiten, im zweiten jedoch ist es erwiesen, dass eine bisher als unabhängig betrachtete Unbekannte ihre Rolle mit einer der beiden bisher als abhängig betrachteten Unbekannten v , w vertauschen müsse. In einem solchen Ausnahmefalle hat man sich im weiteren Verlaufe der Rechnung an die Vorschriften des §. 25 zu halten.

Drittens: Nun suche man für jede Horizontalreihe von Determinanten (192) den grössten gemeinschaftlichen Factor. Die so gefundenen Zahlen seien beziehungsweise:

$$(193) \quad F_k, F_x, F_y, \dots, F_u, (eg).$$

Aus dieser leitet man nun drei andere Reihen ab:

$$(194) \quad f, f_k, f_x, \dots, f_t, (eg)$$

$$(195) \quad \phi_k, \phi_x, \phi_y, \dots, \phi_u, 1$$

$$(196) \quad \zeta_k, \zeta_x, \zeta_y, \dots, \zeta_u.$$

Die erste dieser Reihen (194) wird aus der (193) in der Richtung von rechts nach links abgeleitet. f_t ist der grösste gemeinschaftliche Factor der zwei letzten Glieder $F_u, (eg)$ der Reihe (193); f_x der grösste gemeinschaftliche Theiler von $F_y, F_z, \dots, F_u, (eg)$; f_k der grösste gemeinschaftliche Factor von F und f_x , also auch von $F_x, F_y, F_z, \dots, F_u, (eg)$; endlich f der grösste gemeinschaftliche Factor der zwei Zahlen F_k und f_k , also auch der kompletten Gruppe (193). Es ist hiemit klar, dass f der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Determinanten (192), f_k der grösste gemeinschaftliche Factor aller von k freien Determinanten sei, die nach dem Weglöschen der ersten Horizontalreihe übrig bleiben. f_x entspricht allen von k und a freien Determinanten, welche nach dem Weglöschen der zwei ersten Horizontalreihen übrig bleiben, als grösster gemeinschaftlicher Factor u. s. w.

Die Glieder der Reihe (195) werden durch Division der Glieder der Reihe (193) durch die entsprechenden der (194) gewonnen. Ihre Werthe sind folgende:

$$(195) \quad \phi_k = \frac{F_k}{f} \cdot \phi_x = \frac{F_x}{f_x} \cdot \phi_y = \frac{F_y}{f_y} \cdot \dots \cdot \phi_u = \frac{F_u}{f_t} \cdot 1.$$

$$\begin{aligned} \phi_u u + \varphi_u u &= \frac{1}{f_u} [K_u \mathfrak{R} - A_u x - B_u y - C_u z - \dots] \\ v &= \frac{1}{(eg)} [(kg) \mathfrak{R} - (ag)x - (bg)y - (cg)z - \dots - (dg)u] \\ w &= \frac{-1}{ey} [(ke) \mathfrak{R} - (ae)x - (be)y - (ce)z - \dots - (de)u]. \end{aligned}$$

Ihre Bildungsweise befolgt ein sehr einfaches, in die Augen springendes Gesetz. Diese Gleichungen liefern alle noch zu bestimmenden Grössen. Die $m - 2$ ersten derselben enthalten nebst den eigentlichen Unbekannten $x, y, z, \dots$ u noch die Hilfsunbekannten $\mathfrak{R}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \dots, u$ und sind gewöhnliche unbestimmte Gleichungen mit je zwei Unbekannten. Man beginnt mit der Auflösung der ersten derselben in ganzen Zahlen und setzt den gefundenen Werth von x in den zweiten Theil der zweiten Gleichung, der sich dann in eine ganze Zahl verwandelt, so dass auch für y ein ganzer Werth ermittelt werden kann. Die gewonnenen Werthe werden immer in die zweiten Theile der darauffolgenden Gleichungen substituirt, worauf sich dieselben immer in ganze Zahlen verwandeln.

Die $m - 2$ unbestimmten Gleichungen lassen sich auch als Congruenzen darstellen.

Um die Grössen $x_0, y_0, z_0, \dots, u_0, v_0, w_0$ in der Formel (199) zu finden, hat man für $\mathfrak{R}$ seinen bestimmten Werth zu setzen, der entweder φ_k ist, oder ein Vielfaches von φ_k . Die Gleichungen (201) der Reihe nach in ganzen Zahlen aufgelöst, liefern dann die gesuchten Grössen. Man thut gut, unter den verschiedenen möglichen Werthen jedesmal die numerisch kleinsten zu erwählen.

Die Grössen $y_1, z_1, \dots, u_1, v_1, w_1$ gehen auf dieselbe Weise aus den Gleichungen (201) hervor, wenn man von den Anfangssubstitutionen: $\mathfrak{R} = 0, x = \varphi_x$ ausgeht. Eben so findet man $y_2, \dots, u_2, v_2, w_2$, wenn man die Werthe $\mathfrak{R} = 0, x = 0, y_1 = \varphi_y$ als Ausgangspunkt bei der Auflösung der Gleichungen (201) erwählt, wodurch die zwei ersten derselben, als identisch erfüllt, wegfallen u. s. w. Endlich findet man auch v_{m-2}, w_{m-2} aus ihnen, wenn man von der Substitution: $\mathfrak{R} = 0, x = 0, y = 0, z = 0, \dots, u = \varphi_u$ ausgeht, wobei alle $m - 2$ unbestimmten Gleichungen (201) identisch erfüllt sind und nur die beiden letzten bestimmten Gleichungen zu berücksichtigen bleiben.

Hiemit ist die Bestimmung aller in der Formel (199) erscheinenden Grössen, somit auch die Aufstellung dieser Formel selbst zu Ende geführt.

Wir halten es für zweckmässig, die Anwendung dieser vielleicht complicirt erscheinenden Regel an einigen Beispielen zu erläutern.

§. 18.

Erstes Beispiel.

$$\begin{aligned} 3 &= x + 3y + 2z - u + 2r + 5w \\ 1 &= 2x + y - z + u + r - w. \end{aligned}$$

Die Determinanten sind folgende:

$$\begin{aligned} -5, & \quad 0, +5, -4, -1, +8 \\ +5, & \quad +5, -3, +3, +11 \\ +5, & \quad -4, -1, +8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -1 & , -4 , -3 \\
 & + 3 , + 4 \\
 & + 7 .
 \end{aligned}$$

Man findet aus den verschiedenen Horizontalreihen beziehungsweise die grössten gemeinschaftlichen Factoren:

$$\begin{aligned}
 F_k &= 1 \cdot f = 1 \cdot \varphi_k = 1 \\
 F_x &= 1 \cdot f_k = 1 \cdot \psi_x = 1 \cdot \varphi_x = 1 \\
 F_y &= 1 \cdot f_x = 1 \cdot \psi_y = 1 \cdot \varphi_y = 1 \\
 F_z &= 1 \cdot f_y = 1 \cdot \psi_z = 1 \cdot \varphi_z = 1 \\
 F_u &= 1 \cdot f_z = 1 \cdot \psi_u = 1 \cdot \varphi_u = 7 \\
 F_v &= 7 .
 \end{aligned}$$

Wir pflegen die Gruppe der Determinanten mit den ihnen zugehörigen gemeinschaftlichen Factoren in folgendes Schema zu vereinigen:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 & F & f & \psi & \varphi \\
 + 7w = 7 & - & - & - & - \\
 + 3v + 4w = 1 & , & 1 & , & 1 & , & + 7 \cdot u \\
 - 1u - 4v - 3w = 1 & , & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & , & z \\
 + 5z - 4u - v + 8w = 1 & , & 1 & , & 1 & \cdot & 1 & \cdot & y \\
 + 5y + 5z - 3u + 3v + 11w = 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & x \\
 - 5x & + & 5z - 4u - v + 8w = 1 & \cdot & 1 & \cdot & - & \cdot & 1 & \cdot & k .
 \end{array} \\
 (202)
 \end{array}$$

In den ersten Theilen dieser Gleichungen finden sich die Determinanten, aber nach den Horizontalreihen verkehrt geordnet, als dies in (192) der Fall ist, aus Gründen, die später einleuchten werden, und auf etwaige Abkürzungen der Rechnung wesentlich Einfluss nehmen. Den Determinanten sind ferner die betreffenden Unbekannten x, y, z, u, v, w angehängt, theils um die entsprechenden Verticalreihen zu bezeichnen, theils ersetzen diese Buchstaben in einer für die Bequemlichkeit der Übersicht sehr vortheilhaften Weise die bisher in den früheren Formeln mit $\alpha, \beta, \gamma \dots \delta, \varepsilon$ bezeichneten Grössen, ohne dass dadurch eine Irrung möglich wäre. Im zweiten Theile dieser Gleichungen befinden sich die mit F bezeichneten grössten gemeinschaftlichen Factoren je einer Horizontalreihe. Die darauffolgenden nach rechts befindlichen und mit f, ψ, φ bezeichneten Verticalreihen weisen die Werthe dieser Grössen aus, die auf bekannte Weise aus den Grössen F gebildet werden, ebenfalls auch in umgekehrter Ordnung. Die letzte Verticalreihe enthält wieder zur Orientirung die Grössen k, x, z, u , welche sonst den betreffenden ψ und φ als Index angefügt wären.

Der nächste Schritt der Rechnung besteht in der Auflösung der vorliegenden unbestimmten Gleichungen. Man beginnt mit der ersten derselben, nämlich mit:

$$3v + 4w = 1.$$

Dieselbe liefert:

$$v = -1 \cdot w = +1$$

und nun substituirt man diese Werthe also gleich in die ersten Theile aller folgenden Gleichungen, und findet demgemäss die Werthe von C_u, B_u, A_u, K_u , wofür wir aber wieder der Bequemlichkeit halber und ohne eine Störung befürchten zu müssen, die anderen Bezeichnungen: Z_u, Y_u, X_u, K_u setzen. Man findet dergestalt:

$$K_u = +9, X_u = +8, Y_u = +9, Z_u = +1.$$

Die zweite unbestimmte Gleichung:

$$-1 \cdot u - 4v - 3w = 1$$

liefert:

$$u = -1, v = 0, w = 0$$

und hieraus geht wieder hervor:

$$K_z = +4, X_z = +3, Y_z = +4.$$

Aus der nächstfolgenden:

$$+5z - 4u - 1v + 8w = 1$$

geht zunächst:

$$z = 1, u = 1, v = 0, w = 0$$

und hierauf:

$$K_y = 1, Y_y = +2$$

hervor; und endlich die letzte:

$$+5y + 5z - 3u + 3v + 11w = 1$$

ist erfüllt für:

$$y = -2, z = 0, u = 0, v = 0, w = +1$$

und führt zu dem Werthe

$$K_x = +8.$$

Die Werthe der hier berechneten Grössen K, X, Y, Z pflegen wir gleichfalls in ein Schema zu ordnen, welches gewissermassen die Fortsetzung nach rechts im Schema (202) bildet:

	ϕ	ϵ	K	X	Y	Z
u	1	+ 7	+ 9	+ 8	+ 9	+ 1
z	1	- 1	+ 4	+ 3	+ 4	
y	1	+ 1	+ 1	+ 2		
x	1	+ 1	+ 8			
h		1				

Aus dieser Zusammenstellung von Werthen hat man nun die folgenden Gleichungen zu bilden, nach einer sich selbst erklärenden Regel:

$$\begin{aligned}
 (203) \quad & 1 \cdot u + 7 u = + 9 \mathfrak{N} - 8 \mathfrak{r} - 9 \mathfrak{y} - 1 \cdot \mathfrak{z} \\
 & 1 \cdot \mathfrak{z} + 1 \cdot \mathfrak{Z} = + 4 \mathfrak{N} - 3 \mathfrak{r} - 4 \mathfrak{y} \\
 & 1 \cdot \mathfrak{y} + 1 \cdot \mathfrak{Y} = + 1 \mathfrak{N} - 2 \mathfrak{r} \\
 & 1 \cdot \mathfrak{r} + 1 \cdot \mathfrak{X} = + 8 \mathfrak{N} \\
 & \mathfrak{N} = 1
 \end{aligned}$$

Diese sind die unbestimmten Gleichungen, deren allgemeine Form in (201) aufgestellt wurde, nur in einer umgekehrten Ordnung. Man hat deshalb mit der Auflösung der letzten zu beginnen und zu den vorhergehenden überzugehen. Ausser diesen Gleichungen sind aber noch aus den zwei letzten Verticalreihen der Determinantengruppe die bestimmten:

$$\begin{aligned}
 (204) \quad & v = -\frac{1}{7} [8 \mathfrak{N} - 11 \mathfrak{r} - 8 \mathfrak{y} + 3 \mathfrak{z} - 4 u] \\
 & w = -\frac{1}{7} [-1 \mathfrak{N} - 3 \mathfrak{r} + \mathfrak{y} + 4 \mathfrak{z} - 3 u]
 \end{aligned}$$

zu bilden, und so hat man auch die zur Bestimmung von v und w dienenden Gleichungen.

Aus diesen nun hat man nach der früher angegebenen Regel die Werthe der Grössen:

$$\begin{aligned}
 (205) \quad & \mathfrak{r}_0 \quad , \quad \mathfrak{r}_1 \\
 & \mathfrak{y}_0 \quad , \quad \mathfrak{y}_1 \quad , \quad \mathfrak{y}_2 \\
 & \mathfrak{z}_0 \quad , \quad \mathfrak{z}_1 \quad , \quad \mathfrak{z}_2 \quad , \quad \mathfrak{z}_3 \\
 & u_0 \quad , \quad u_1 \quad , \quad u_2 \quad , \quad u_3 \quad , \quad u_4 \\
 & v_0 \quad , \quad v_1 \quad , \quad v_2 \quad , \quad v_3 \quad , \quad v_4 \\
 & w_0 \quad , \quad w_1 \quad , \quad w_2 \quad , \quad w_3 \quad , \quad w_4
 \end{aligned}$$

zu suchen, indem man mit der letzten Gleichung der (203) beginnt, zu den nächstvorhergehenden übergeht, bis man endlich nur noch v und w zu bestimmen hat, wozu die beiden Gleichungen (204) dienen. Aber eine kurze Überlegung zeigt schon, dass man in dem gegenwärtigen Falle sich die Mühe der Rechnung bedeutend verringern könne, und dass die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (206) \quad & u + 7 u = 9 \mathfrak{N} - 8 \mathfrak{r} - 9 \mathfrak{y} - \mathfrak{z} \\
 & v = \frac{1}{7} [8 \mathfrak{N} - 11 \mathfrak{r} - 8 \mathfrak{y} + 3 \mathfrak{z} - 4 u] \\
 & w = \frac{1}{7} [\mathfrak{N} + 3 \mathfrak{r} - \mathfrak{y} - 4 \mathfrak{z} + 3 u]
 \end{aligned}$$

vollkommen hinreichen, um alle zu suchenden Grössen wirklich zu finden. In der That sind die hier weggelassenen unbestimmten Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (207) \quad & \mathfrak{z} + \mathfrak{Z} = 4 \mathfrak{N} - 3 \mathfrak{r} - 4 \mathfrak{y} \\
 & \mathfrak{y} + \mathfrak{Y} = \mathfrak{N} - 2 \mathfrak{r} \\
 & \mathfrak{r} + \mathfrak{X} = 8 \mathfrak{N}
 \end{aligned}$$

offenbar in ganzen Zahlen erfüllt für alle möglichen ganzen Werthe von $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und es wäre demnach völlig überflüssig diese Gleichungen noch länger in Berücksichtigung zu ziehen. Man ist also ohne weitere Rechnung im Stande, alsogleich die Werthe der folgenden Grössen aufzuschreiben:

$$\begin{aligned}
 (208) \quad & \mathfrak{N} = 1 \\
 & \mathfrak{r}_0 = 0 \quad , \quad \mathfrak{r}_1 = 1
 \end{aligned}$$

$$\eta_0 = 0 \quad , \quad \eta_1 = 0 \quad , \quad \eta_2 = 1$$

$$\zeta_0 = 0 \quad , \quad \zeta_1 = 0 \quad , \quad \zeta_2 = 0 \quad , \quad \zeta_3 = 1$$

und es erübrigt nur noch, die übrigen Grössen zu bestimmen, welche in der Gruppe (205) die drei letzten Horizontalreihen ausfüllen und wozu die drei Gleichungen (206) dienlich sind, wenn man in ihnen $\mathfrak{R}$, x , y , z durch ihre in der betreffenden Verticalreihe der Gruppe (208) ersichtlichen Werthe ersetzt. So z. B. findet man die der ersten Verticalreihe zugehörigen Grössen u_0 , v_0 , w_0 , wenn man in den Gleichungen (206) zunächst die Substitutionen:

$$(209) \quad \mathfrak{R} = 1 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 0$$

ausführt, wodurch sie in die folgenden übergehen:

$$u + 7u = 9$$

$$v = \frac{1}{7} [8 - 4u]$$

$$w = \frac{1}{7} [1 + 3u].$$

Die erste dieser Gleichungen ist eine unbestimmte und liefert als den numerisch kleinsten ganzen Werth von u :

$$u_0 = + 2.$$

Substituirt man nun diesen Werth von u in den beiden andern Gleichungen, so erhält man:

$$v_0 = 0 \quad , \quad w_0 = + 1.$$

Auf ähnliche Weise ergeben sich die Werthe von u , v , w , welche den übrigen Verticalreihen in der Gruppe (205) entsprechen, wenn man nur die Substitution (209) durch die anderer, den übrigen Verticalreihen in (205) entsprechenden Werthe von $\mathfrak{R}$, x , y , z , ersetzt. Es ist fast überflüssig, zu bemerken, dass man sich vor allem andern, die Auflösung der Gleichung:

$$u + 7u = 1$$

verschaffen, und den dabei gewonnenen Werth:

$$(210) \quad u = + 1$$

für die weitere Benützung desselben aufnotiren werde, weil alle hier zur Auflösung kommenden unbestimmten Gleichungen die allgemeine Form:

$$u + 7u = P$$

tragen, wobei P für die verschiedenen Verticalreihen beziehungsweise die Werthe erhält:

$$+ 9 \quad , \quad - 8 \quad , \quad - 9 \quad , \quad - 1.$$

Um die entsprechenden Werthe von

$$u_0 \quad , \quad u_1 \quad , \quad u_2 \quad , \quad u_3$$

zu finden, wird man zunächst diese Zahlen mit dem Werthe $+ 1$ in (210) multipliciren und nun die erhaltenen Producte:

$$+ 9 \quad , \quad - 8 \quad , \quad - 9 \quad , \quad - 1$$

wiederholt um 7 verringern oder vergrössern bis man zu den gesuchten numerisch kleinsten Werthen:

$$u_0 = +2, u_1 = -1, u_2 = -2, u_3 = -1$$

gelangt. Diese Vorsicht ist hier weit weniger von Belang, als dann, wenn die Coëfficienten in dem vorgelegten Systeme von unbestimmten Gleichungen sehr grosse Zahlwerthe besitzen, da in einem solchen Falle nicht unbedeutende Rechnungen unnützerweise wiederholt würden.

Das Endresultat dieser einfachen Rechnung ist folgendes:

$$\mathfrak{R} = 1$$

$$r_0 = 0, r_1 = 1$$

$$\eta_0 = 0, \eta_1 = 0, \eta_2 = 1$$

$$\delta_0 = 0, \delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 1$$

$$u_0 = +2, u_1 = -1, u_2 = -2, u_3 = -1, u_4 = +7$$

$$v_0 = 0, v_1 = -1, v_2 = 0, v_3 = +1, v_4 = -4$$

$$w_0 = +1, w_1 = 0, w_2 = -1, w_3 = -1, w_4 = +3.$$

Hier unterliegt es nunmehr keinerlei Schwierigkeit, alsogleich die allgemeine Formel für Auflösungen einer beliebigen Gattung aufzuschreiben.

Vorerst überzeugt uns der gefundene Werth $\mathfrak{R} = 1$, dass ganze Auflösungen zulässig seien. Die allgemeine Formel für solche ist:

$$x = +\xi$$

$$y = +\eta$$

$$z = +\zeta$$

$$u = 2 - \xi - 2\eta - \zeta + 7\mu$$

$$v = -\xi + \zeta - 4\mu$$

$$w = 1 - \eta - \zeta + 3\mu.$$

Es besteht keine einzige Auflösung in ganzen Zahlen, welche in dieser Form nicht enthalten wäre.

Aber auch für gebrochene Auflösungen mit einem beliebigen Nenner N lässt sich die allgemeine Formel alsogleich aufstellen. Sie ist folgende:

$$x = \frac{1}{N} [+\xi]$$

$$y = \frac{1}{N} [+\eta]$$

$$z = \frac{1}{N} [+\zeta]$$

$$u = \frac{1}{N} [2N - \xi - 2\eta - \zeta + 7\mu]$$

$$v = \frac{1}{N} [-\xi + \zeta - 4\mu]$$

$$w = \frac{1}{N} [N - \eta - \zeta + 3\mu]$$

und es ist nicht schwer, sich zu überzeugen, dass diese Formel alle möglichen Auflösungen dieser Gattung in sich schliesst, wenn man den willkürlichen Grössen ξ, η, ζ, μ alle möglichen ganzen Werthe ertheilt.

§. 19.

Wenn wir nun noch einen Blick auf die durchgeführten Rechnungen werfen, so werden wir bald gewahren, dass ein nicht unbedeutlicher Theil ganz überflüssig war und füglich hätte unterbleiben können. Da nämlich die Gleichungen (207) als überflüssig beseitigt werden konnten, so hätte ihre Bildung sowohl, wie jene der Determinanten:

$$\begin{array}{r} -5x, \quad 0y, \quad +5z, \quad -4u \\ \quad \quad +5y, \quad +5z, \quad -3u \\ \quad \quad \quad \quad +5z, \quad -4u \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad -1u \end{array}$$

ganz unterbleiben können, nur jene der übrigen:

$$(211) \quad \begin{array}{r} -1v, \quad +8w \\ +3v, \quad +11w \\ -1v, \quad +8w \\ -4v, \quad -3w \\ +3v, \quad -4w \\ \quad \quad +7w \end{array}$$

war unerlässlich nothwendig. Wir werden die Wahrheit dieser Behauptung am einfachsten darlegen, wenn wir zeigen, dass wirklich diese Grössen zur Bildung der Gleichungen (206) hinreichen: Zunächst liefern die obersten Horizontalreihen dieser letzten Gruppe folgendes Schema von Werthen:

$$(212) \quad \begin{array}{r} \\ \\ +7w = 7 \\ +3v + 4w = 1, 1, 1, +7, u \\ -4v = 3w \\ -1v + 8w \\ +3v + 11w \\ -1v + 8w \end{array}$$

Gehen wir nun also gleich zur Bestimmung der Grösse K_u , X_u , Y_u , Z_u mit Hilfe der Auflösung der unbestimmten Gleichung:

$$+3v + 4w = 1$$

so finden wir:

$$v = -1, \quad w = 1$$

$$K_u = +9, \quad X_u = +8, \quad Y_u = +9, \quad Z_u = +1.$$

Aus ihnen folgen also gleich die drei Gleichungen (206) und da f_z hier schon den Werth Eins besitzt, so ist es unzweifelhaft, dass auch alle übrigen f , nämlich: f_y , f_x , f_k , f und folglich auch φ , φ , φ , φ den Werth Eins besitzen müssen. Man kann daher ohne alle

weitere Rechnung zu den drei Gleichungen (206) die Werthe (208) hinzufügen und gewinnt somit die Überzeugung, dass man mit dieser geringen Rechnung vollkommen ausreicht, um die allgemeine Formel abzuleiten.

Hieraus fliesst die für die wirkliche Berechnung wichtige Regel, dass man, um überflüssige Rechnungen zu vermeiden, folgendermassen zu verfahren habe: Man bilde zunächst die Determinanten in folgender Ordnung:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1u + e_1v + g_1w \\
 k_2 &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2u + e_2v + g_2w \\
 & \qquad \qquad \qquad (eg) \\
 & \qquad \qquad \qquad (de) , (dg) \\
 (213) \qquad & \qquad \qquad (ed) , (ce) , (cg) \\
 & \qquad \qquad (bc) , (bd) , (be) , (bg) \\
 & \qquad (ab) , (ac) , (ad) , (ae) , (ag) \\
 & (ka) , (kb) , (kc) , (kd) , (ke) , (kg),
 \end{aligned}$$

aber nicht alle auf Einmal, sondern zunächst nur immer eine Horizontalreihe und bestimme alsogleich die entsprechenden Grössen: F, f, ϕ, φ für die gebildete Horizontalreihe. Die erste Determinante (eg) steht allein. Besitzt sie zufällig den Werth Eins, so ist die Rechnung überaus einfach, denn man erhält dann unmittelbar alle Grössen f mit dem Werthe Eins versehen, also auch sämtliche φ gleich Eins. Die Folge hiervon ist, dass alle unbestimmten Gleichungen oder Congruenzen identisch erfüllt sind für alle möglichen ganzen Werthe der Grössen x, y, z, u, v, w . Man kann also unmittelbar setzen:

$$\begin{aligned}
 x &= 1 \\
 x_0 &= 0 , x_1 = 1 \\
 y_0 &= 0 , y_1 = 0 , y_2 = 1 \\
 z_0 &= 0 , z_1 = 0 , z_2 = 0 , z_3 = 1 \\
 & \dots \dots \dots \\
 u_0 &= 0 , u_1 = 0 , u_2 = 0 , u_3 = 0 , \dots \dots u_{m-2} = 1,
 \end{aligned}$$

und hat nun nur noch die Werthe von v und w aus den zwei bestimmten Gleichungen zu suchen. Um diese zu bilden, hat man noch die zwei letzten Verticalreihen der Determinanten (213) zu construiren und erhält dann alsogleich, je nachdem $(eg) = \pm 1$ ist:

$$\begin{aligned}
 v_0 &= \pm (kg) , v_1 = \mp (ag) , v_2 = \mp (bg) , v_3 = \mp (cg) , \dots \dots v_{m-2} = \mp (dg) \\
 w_0 &= \mp (ke) , w_1 = \pm (ae) , w_2 = \pm (be) , w_3 = \pm (ce) , \dots \dots w_{m-2} = \pm (de).
 \end{aligned}$$

Ist aber (eg) von Eins verschieden, so bilde man zunächst die zweite Horizontalreihe:

$$(de)v + (dg)w = F_u , f , \phi_u , \xi_u.$$

Ist hier $f=1$, so kann die regelmässige Bildung der Determinanten der nächstfolgenden Horizontalreihen vermieden werden, und man hat nur noch die Determinanten der letzten zwei Verticalreihen wirklich zu bilden und hierauf, die der zweiten Horizontalreihe zugehörigen Grössen $K_u, X_u, Y_u, Z_u, \dots$ zu rechnen. Das vollständige Schema ist dann folgendes:

$$\begin{array}{l}
 (eg)w \\
 (de)r + (dg)w = F_u, f_z = 1 \cdot \phi_u u + \varphi_u u = K_u \mathfrak{R} - X_u r - Y_u \eta - Z_u \mathfrak{z} - \dots \\
 (ce)v + (cg)w \\
 (be) \quad (bg) \\
 (ae) \quad (ag) \\
 (ke) \quad (kg)
 \end{array}$$

Um die allgemeine Auflösung zu erhalten, hat man

$$\begin{array}{l}
 \mathfrak{R} = 1 \\
 r_0 = 0, r_1 = 1 \\
 \eta_0 = 0, \eta_1 = 0, \eta_2 = 1 \\
 \mathfrak{z}_0 = 0, \mathfrak{z}_1 = 0, \mathfrak{z}_2 = 0, \mathfrak{z}_3 = 1
 \end{array}$$

zu setzen und die Werthe von u , v und w aus den drei Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
 \phi_u u + \varphi_u u = K_u \mathfrak{R} - X_u r - Y_u \eta - Z_u \mathfrak{z} \\
 v = \frac{1}{(eg)} [(kg) \mathfrak{R} - (ag) r - (bg) \eta - (cg) \mathfrak{z} - (dg) u] \\
 w = -\frac{1}{(eg)} [(ke) \mathfrak{R} - (ae) r - (be) \eta - (ce) \mathfrak{z} - (de) u]
 \end{array}$$

zu suchen.

Ist aber f_z von Eins verschieden, so muss man zunächst auch die dritte Horizontalreihe:

$$(cd)u + (ce)v + (cg)w = F_z, f_y, \phi_z, \varphi_z$$

bilden und hier entscheidet wieder der Werth von f_y , ob die regelmässige Bildung der Horizontalreihen im Schema beendigt sei, oder noch fortgesetzt werden müsse, je nachdem derselbe zufällig gleich Eins, oder davon verschieden ausfällt. In dieser Weise hat man so lange fortzufahren, bis man endlich entweder auf ein f kommt, welches zufällig den Werth Eins besitzt, oder falls sich dies niemals ereignen sollte, bis die vollständige Bildung aller Horizontalreihen des Schema's beendigt ist. Gelangt man bei der Rechnung zu einem $f=1$, so unterbricht man vor der Hand die weitere Bildung der Determinanten ganz und schreitet zur Auflösung der nun schon vorliegenden unbestimmten Hilfsgleichungen. Diese liefern nicht nur die entsprechenden Werthe der Hilfsgrössen, sondern bezeichnen zugleich jene Verticalreihen der Determinanten, die in ihrer vollen Ausdehnung gebildet werden müssen und zwar dadurch, dass die dieser Verticalreihe angehörige Unbekannte der Hilfsgleichung einen von Null verschiedenen Werth erlangt. Hingegen können alle jene Verticalreihen, deren Unbekannte in den Hilfsgleichungen den Werth Null erhalten, unberechnet bleiben, indem sie in die Rechnung nicht eingehen. Es versteht sich von selbst, dass man in jenen Fällen, wo eine zweckmässige Wahl dazu beiträgt, die Anzahl der Verticalreihen zu vermindern, diesen Vortheil nicht unbenutzt lassen wird, um die Rechnung möglichst zu vereinfachen. Sind die unumgänglich nothwendigen Verticalreihen der Determinanten bezeichnet, so geht man unverzüglich zu ihrer Bildung, da sie zunächst früher gerechnet werden müssen, um die Hilfsgrössen $K, X, Y, Z, \dots$ bilden zu können.

Das Gesagte wird hinreichen, um dem Rechner eine Regel an die Hand zu geben, bei deren Befolgung alle überflüssigen Rechnungen vermieden werden. Wir wollen die nachfolgenden Beispiele in dieser Weise behandeln, um die gegebenen Vorschriften zu erläutern und deutlich zu machen.

§. 20.

Zweites Beispiel.

$$(214) \quad \begin{aligned} 5 &= 10x + 13y + 18z + 7u + 15v + 2w \\ 12 &= 5x + 16y + 23z + 14u + 11v + 7w. \end{aligned}$$

Die erste Determinante, die nach der Regel des vorhergehenden Paragraphes zu bilden, ist die aus dem letzten Coëfficientenpaare hervorgehende: -83 ; weil dieselbe aber von Eins verschieden ist, so sieht man sich genöthigt, auch noch die nächste Horizontalreihe von Determinanten zu bilden, welche aus den drei letzten Gliedern der Gleichungspolynome hervorgehen. Sie sind: $+113$, -21 . Bevor man aber weiter schreitet in der Bildung der Determinanten, nämlich zur dritten Horizontalreihe, hat man sich noch früher zu überzeugen, ob die vollständige Bildung derselben wirklich nothwendig sei, oder ob sie umgangen werden könne. Zu diesem Zwecke bestimme man die Grössen F , f , ϕ , φ für die zweite Horizontalreihe: Man findet den grössten gemeinschaftlichen Factor von $+113$ und -21 , nämlich F_u gleich 7 , f_z hingegen den grössten gemeinschaftlichen Factor der drei Determinanten: -83 , $+113$, -21 , oder, was dasselbe ist, jenen der beiden Zahlen 83 und 7 gleich Eins und somit ist dargethan, dass mit dieser zweiten Horizontalreihe die regelmässige Bildung der Determinanten abgeschlossen werden könne. Man findet ferner noch $\phi_u = 7$, $\varphi_u = 83$ und der nächste Schritt der Untersuchung besteht in der Auflösung der Gleichung:

$$(215) \quad +133v - 21w = 7.$$

Diese liefert: $v = 1$, $w = 6$. Man hat jetzt nur noch die zwei letzten Verticalreihen der Determinanten zu bilden, indem man der Reihe nach die Coëfficienten der übrigen Unbekannten z , y , x und zuletzt die beiden Constanten im ersten Theile der Gleichungen mit den Coëfficienten der beiden letzten Unbekannten v , w zu Determinanten verbindet. Dies liefert:

$$(216) \quad \begin{aligned} &+ 147v - 80w \\ &+ 97v - 59w \\ &- 35v - 60w \\ &+ 125v - 11w. \end{aligned}$$

Nun schreitet man zur Bildung der Hilfsgrössen: K_u , X_u , Y_u , Z_u , indem man in den eben gefundenen Binomen (216) v und w durch ihre früher gewonnenen Werthe ersetzt. Man erhält so:

$$(217) \quad \begin{aligned} Z_u &= + 147 \times 1 - 80 \times 6 = - 333 \\ Y_u &= + 97 \times 1 - 59 \times 6 = - 257 \\ X_u &= - 35 \times 1 - 60 \times 6 = - 395 \\ K_u &= + 125 \times 1 - 11 \times 6 = + 59. \end{aligned}$$

Alle diese gewonnenen Werthe pflege ich auf die nachfolgende Weise in ein Schema zu vereinigen:

$$\begin{array}{r}
 = 7 \cdot 7u + 83u = + 59\mathfrak{R} + 395\mathfrak{r} + 257\mathfrak{y} + 333\mathfrak{z} \\
 (218) = 7 \cdot 7u + 83u = + 59\mathfrak{R} + 395\mathfrak{r} + 257\mathfrak{y} + 333\mathfrak{z} \\
 + 147r - 80w \\
 + 97r - 59w \\
 - 35r - 60w \\
 + 125r - 11w
 \end{array}$$

Mit Zuziehung der Werthe:

$$\begin{array}{l}
 (219) \quad \mathfrak{R} = 1 \\
 \quad \mathfrak{r}_0 = 0 \quad , \quad \mathfrak{r}_1 = 1 \\
 \quad \mathfrak{y}_0 = 0 \quad , \quad \mathfrak{y}_1 = 0 \quad , \quad \mathfrak{y}_2 = 1 \\
 \quad \mathfrak{z}_0 = 0 \quad , \quad \mathfrak{z}_1 = 0 \quad , \quad \mathfrak{z}_2 = 0 \quad , \quad \mathfrak{z}_3 = 1
 \end{array}$$

findet man aus der im obigen Schema (218) ersichtlichen unbestimmten Gleichung:

$$(220) \quad 7u + 83u = + 59\mathfrak{R} + 395\mathfrak{r} + 257\mathfrak{y} + 333\mathfrak{z}$$

folgende Werthe von u :

$$(221) \quad u_0 = -39 \quad , \quad u_1 = +9 \quad , \quad u_2 = +13 \quad , \quad u_3 = +12 \quad , \quad u_4 = 83.$$

Man verschafft sich dieselben auf folgende Weise: Erstlich liefert die Auflösung der Gleichung:

$$7u + 83u = 1$$

auf dem bekannten Wege:

$$(222) \quad u = 12.$$

Ersetzt man nun in dem zweiten Theile der unbestimmten Gleichung (220) der Reihe nach einzeln eine jede der Grössen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ durch die Einheit, alle übrigen aber durch Null, wie dies die verschiedenen Verticalreihen der Gruppe (219) ersichtlich machen, so geht der zweite Theil dieser Gleichung der Reihe nach über in:

$$+ 59 \quad , \quad + 395 \quad , \quad + 257 \quad , \quad + 333$$

und wenn man diese Grössen mit dem gefundenen Werthe (222) nämlich mit 12 multiplicirt, so erhält man:

$$+ 708 \quad , \quad + 4740 \quad , \quad + 3084 \quad , \quad + 3996$$

und diese stellen entsprechende Werthe von u vor. Um nun die numerisch kleinsten Werthe von u_0 , u_1 , u_2 , u_3 abzuleiten, hat man diese Zahlen durch 83 zu dividiren und zwar so, dass der Rest bei dieser Division den kleinsten numerischen Werth erhält, ohne, wie gewöhnlich bei der Division geschieht, sein Zeichen als massgebend zu bezeichnen. Man findet solchergestalt als Rest:

$$(223) \quad u_0 = -39 \quad , \quad u_1 = +9 \quad , \quad u_2 = +13 \quad , \quad u_3 = +12.$$

Der Werth von u_1 entspricht der Gleichung:

$$7u + 83u = 0$$

welche aus der (220) hervorgeht, wenn man alle Grössen $\mathfrak{R}, x, y, z$ der Nulle gleichsetzt, und ist der numerisch kleinste, positive, von Null verschiedene Werth von u , somit gleich $+ 83$.

$$(224) \quad u_1 = - 83.$$

Es erübrigt nur noch, die Werthe von v und w zu suchen. Hiezu dienen die zwei Gleichungen:

$$v = \frac{1}{-83} [- 11 \mathfrak{R} + 60 x + 59 y + 80 z + 21 u]$$

$$w = \frac{-1}{-83} [+ 125 \mathfrak{R} + 35 x - 97 y - 147 z - 133 u]$$

mit Zuziehung der bisher gefundenen Werthe von $\mathfrak{R}, x, y, z, u$. Diese zwei Gleichungen sind aus den zwei letzten Verticalreihen der Determinanten gebildet. Sie liefern:

$$(225) \quad v_0 = + 10, \quad v_1 = - 3, \quad v_2 = - 4, \quad v_3 = - 4, \quad v_4 = - 21$$

$$w_0 = + 64, \quad w_1 = - 14, \quad w_2 = - 22, \quad w_3 = - 21, \quad w_4 = - 133.$$

Hiemit ist die Rechnung geschlossen und man ist jetzt in den Stand gesetzt, jede Gattung der Auflösungen durch eine Formel allgemein auszudrücken. Für ganze Auflösungen ist diese Formel folgende:

$$x = \quad \quad \quad + \xi$$

$$y = \quad \quad \quad + \eta$$

$$z = \quad \quad \quad + \zeta$$

$$u = - 39 + 9\xi + 13\eta + 12\zeta + 83\theta$$

$$v = + 10 - 3\xi - 4\eta - 4\zeta - 21\theta$$

$$w = + 64 - 14\xi - 22\eta - 21\zeta - 133\theta.$$

Dieses Beispiel dürfte wohl zur Genüge darthun, dass die Rechnung bisweilen wirklich auf ein Minimum herabsinkt, wenn man die hier gegebenen Vorschriften befolgt. Dies ereignet sich aber keineswegs sehr selten, sondern gerade in der Mehrzahl der Fälle und die von uns aufgestellte Regel, wiewohl dem ersten Anscheine nach complicirt, führt zu weit einfacheren Rechnungen als alle bisher üblichen Eliminationen.

§. 21.

3. Beispiel. Um auch ein Beispiel zu geben von zwei Gleichungen, welche eine etwas längere Rechnung erheischen und auch an einem solchen die Wirksamkeit und Bequemlichkeit unserer Methode zu zeigen, wählen wir folgende zwei Gleichungen:

$$(226) \quad 26 = 145x + 211y + 113z - 213u + 854v$$

$$15 = 121x + 175y + 224z + 141u + 13v$$

Hier sind zwei Gründe vorhanden, welche die Rechnung nicht unbedeutend verlängern, erstens nämlich sind die Coëfficienten selbst mehrziffrige Zahlen und zweitens muss die Entwicklung der Determinanten bis zur vierten Horizontalreihe vollständig durchgeführt werden. In dem nachfolgenden Schema finden sich die Resultate der Rechnung in der gebräuchlichen Weise zusammengestellt:

$$\begin{array}{r}
 117645 \cdot v \\
 + 31779 \cdot u + 189827 \cdot v = 11, 11, 13 + 10695 \cdot \beta = \frac{1}{11} [-4337749 \mathfrak{R} + 65306378 \mathfrak{r} + 95454194 \mathfrak{y}] \\
 5603 - 938 \\
 - 27489 \cdot z + 7524 \cdot u + 146707 \cdot v = 11, 11, 1\eta + 1 \cdot \mathfrak{D} = \frac{1}{11} [7384631 \mathfrak{R} + 831763 \mathfrak{r}] \\
 0 - 6649 + 341 \\
 156 \cdot y - 18807 \cdot z + 5328 \cdot u + 101449 \cdot v = 1, 1, 1\mathfrak{r} + 11 \cdot \mathfrak{X} = -44745662 \mathfrak{R} \\
 0 + 39733 - 2087 \\
 - 471 \cdot u + 12172 \cdot v \phantom{= 1, 1, 1\mathfrak{r} + 11 \cdot \mathfrak{X}} \mathfrak{R} = 1
 \end{array}$$

$$(227) \quad u = \frac{1}{117645} [12472 \mathfrak{R} - 101449 \mathfrak{r} - 146707 \eta - 189827 \mathfrak{z}]$$

$$v = \frac{1}{117645} [471 \mathfrak{R} + 5328 \mathfrak{r} + 7524 \eta + 31779 \mathfrak{z}].$$

Man bemerkt hier, dass erst in der vierten Horizontalreihe die Grösse f den Werth Eins erlangt und ist daher genöthigt, die drei ersten Horizontalreihen der Determinanten mit den zugehörigen F und f vollständig zu entwickeln. Die vierte Horizontalreihe ist die erste, in der man eine Abkürzung eintreten lassen kann. Dieselbe enthält vier Determinanten, aber es genügt vollständig, nur die beiden letzten: $+ 5328$, $+ 101449$ zu bilden, die beiden anderen aber gänzlich zu überspringen, weil schon diese zwei Zahlen keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich haben. Da ferner noch z in der unbestimmten Gleichung der dritten Horizontalreihe den Werth Null erlangt, so genügt es auch für alle späteren Rechnungen, nur die zwei letzten Verticalreihen der Determinanten vollständig zu bilden.

Wir schreiten jetzt zur Bestimmung der Zahlwerthe von $\mathfrak{r}$, η , $\mathfrak{z}$, u , v in bekannter Weise durch Auflösung der im Schema aufgestellten Bestimmungsgleichungen. Der Anfang ist zu machen mit der Auflösung der Gleichung:

$$(228) \quad \mathfrak{r} + 11 \mathfrak{X} = -44745662 \mathfrak{R}$$

und zwar ist dieselbe für zwei verschiedene Werthe von $\mathfrak{R}$ zu bewerkstelligen, nämlich einmal für $\mathfrak{R} = 1$, um $\mathfrak{r}_0$ zu erhalten, und ein zweites Mal für $\mathfrak{R} = 0$, um $\mathfrak{r}_1$ zu finden. Man thut gut, früher die Gleichung:

$$\mathfrak{r} + 11 \mathfrak{X} = 1$$

aufzulösen. Diese liefert als numerisch kleinsten Werth von $\mathfrak{r}$:

$$\mathfrak{r} = 1.$$

Um nun $\mathfrak{r}_1$ zu finden, ersetzt man im zweiten Theile der Gleichung (228) $\mathfrak{R}$ durch 1, multiplicirt hierauf den Zahlwerth -44745662 , welcher das Resultat der eben bezeichneten Substitution ist, mit dem gefundenen Werthe von $\mathfrak{r}$, nämlich mit 1, so findet man die Zahl -44745662 als einen speciellen Werth von $\mathfrak{r}$, entsprechend der Bestimmungsgleichung (228). Dieser Werth ist aber keineswegs der numerisch kleinste und eignet sich daher auch nicht für die wirkliche Durchführung der Rechnung. Um sich also die Arbeit nicht unnützerweise zu erschweren, leitet man aus dem eben gefundenen Werthe von $\mathfrak{r}$ seinen numerisch kleinsten

Werth ab, indem man diese Zahl um ein entsprechendes Vielfache von 11 verändert, mit anderen Worten, indem man — 44745622 durch 11 dividirt und die letzte Stelle des Quotienten so wählt, dass der Rest zwischen + 5 und — 5 zu liegen kommt. Dieser Rest ist gleich — 5 und stellt den Werth von x_0 vor:

$$(229) \quad x_0 = -5$$

Der Werth von x_1 ist die numerisch kleinste positive aber von Null verschiedene Zahl, welche die Gleichung:

$$x + 11x = 0$$

erfüllt, d. h.

$$(230) \quad x_1 = +11.$$

Hiemit ist die doppelte Auflösung beendigt. Nun kommt die Gleichung:

$$(231) \quad \eta + \mathfrak{Y} = \frac{1}{11} [+ 7384631 \mathfrak{R} + 831763 x]$$

an die Reihe. Diese ist drei Mal aufzulösen, nämlich für:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} = 1 & \quad , \quad \mathfrak{R} = 0 & \quad , \quad \mathfrak{R} = 0 \\ x_0 = -5 & \quad , \quad x_1 = +11 & \quad , \quad x_2 = 0. \end{aligned}$$

Man beginnt wieder mit der Auflösung der Gleichung:

$$\eta + \mathfrak{Y} = 1$$

weil dann die der (231) entsprechenden Werthe durch eine kurze Rechnung gefunden werden. Diese Gleichung ist aber erfüllt für alle möglichen ganzen Werthe von η , weil $\mathfrak{Y}$ den Coefficienten Eins besitzt. Man findet daher ohne alle Rechnung:

$$\eta_0 = 0 \quad , \quad \eta_1 = 0 \quad , \quad \eta_2 = +1$$

und gelangt zur Überzeugung, dass überhaupt die Berechnung der Zahlen + 7384631. + 831763, somit auch die Auflösung der Hilfsgleichung:

$$- 27489.z + 7524.u + 146707.v = 11$$

überflüssig war. So oft also in einer Horizontalreihe $\varphi = 1$ wird, kann man sich die Auflösung der Hilfsgleichung und Bildung der Grössen $K, X, Y, \dots$ in derselben ersparen.

Nun kommt die Gleichung:

$$(232) \quad \mathfrak{z} + 10695\mathfrak{z} = \frac{1}{11} [- 14337749.\mathfrak{R} + 65306378.x + 95454194.\eta]$$

an die Reihe. Diese ist vier Mal aufzulösen, nämlich für die Werthe:

$$(233) \quad \begin{aligned} \mathfrak{R} = 1 & \quad , \quad \mathfrak{R} = 0 & \quad , \quad \mathfrak{R} = 0 & \quad , \quad \mathfrak{R} = 0 \\ x_0 = -5 & \quad , \quad x_1 = +11 & \quad , \quad x_2 = 0 & \quad , \quad x_3 = 0 \\ \eta_0 = 0 & \quad , \quad \eta_1 = 0 & \quad , \quad \eta_2 = +1 & \quad , \quad \eta_3 = 0. \end{aligned}$$

Hier hat man am besten Gelegenheit, sich zu überzeugen, dass es rätlich sei, mit der Auflösung der Gleichung:

$$3 + 10695 \beta = 1$$

zu beginnen, wenn man nicht in eine unnütze Wiederholung von Rechnungen verfallen will. Diese liefert:

$$(234) \quad \beta = 1.$$

Man substituirt nun der Reihe nach die Werthe (233) in den zweiten Theil der Gleichung (232) und findet folgende vier ganze Zahlen:

$$(235) \quad -30988149, +65306378, +8677654, 0.$$

Diese mit dem in (234) gefundenen Werthe 1 multiplicirt, wären brauchbare Werthe von β_0 , β_1 , β_2 , nur die letzte dieser Zahlen stellt keinen geeigneten Werth von β_3 dar, weil diese Grösse von Null verschieden sein soll. Man würde aber die nachfolgenden Rechnungen durch diese grossen Zahlen unnütz erschweren, und thut deshalb gut, die drei ersten Zahlen durch den Coëfficienten von β , nämlich durch 10695 zu dividiren, jedoch dabei die letzte Ziffer des Quotienten dermassen zu wählen, dass der letzte Rest zwischen $+5347$ und -5347 fällt; dieser letzte Rest ist ein gleichfalls entsprechender und viel bequemerer Werth von x . Die letzte der Zahlen (235), nämlich Null wird man aber durch Addition eben dieses Coëfficienten von β in 10695 verwandeln. Man erhält so:

$$\beta_0 = -4734; \beta_1 = +2708; \beta_2 = +4009; \beta_3 = +10695.$$

Nachdem nun die Werthe von $\mathfrak{R}$, x , η , β bekannt sind, braucht man nur dieselben in die zwei Gleichungen (227) zu substituiren, um u und v zu erhalten:

$$\begin{aligned} u_0 &= +7643 & u_1 &= +4379 & u_2 &= -6470 & u_3 &= -17257 \\ v_0 &= -1279 & v_1 &= +732 & v_2 &= +103 & v_3 &= +2889. \end{aligned}$$

Hiemit ist die Auflösung beendigt. Man hat jetzt noch diese Werthe zur entsprechenden Formel zu verbinden. Für ganze Auflösungen ist:

$$\begin{aligned} x &= -5 & + 11 \cdot \xi \\ y &= & + \eta \\ z &= -4734 + 2708 \cdot \xi + 4009 \cdot \eta + 10695 \zeta \\ u &= +7643 + 4379 \cdot \xi - 6470 \cdot \eta - 17257 \zeta \\ v &= -1279 + 732 \cdot \xi + 103 \cdot \eta + 2889 \zeta. \end{aligned}$$

Der Leser hat hier wieder Gelegenheit zu sehen, wie sehr sich die Rechnung vereinfacht hat.

§. 22.

4. Beispiel. Um auch einen Fall vorzuführen von zwei unbestimmten Gleichungen, welche beide gleichzeitig durch ganze Werthe der Unbekannten nicht erfüllt werden können, wollen wir noch die Auflösung der folgenden Gleichungen auseinandersetzen.

$$\begin{aligned} 7 &= 24x + 16y - 366z + 62u - 42v \\ 7 &= -9x - 6y + 186z - 32u + 22v. \end{aligned}$$

Demselben entspricht nachfolgendes Schema:

Aus diesen Werthen kann man jede beliebige Gattung von Auflösungen, welche überhaupt im Bereiche der Möglichkeit liegt, durch eine allgemeine Formel darstellen. Die mit dem kleinstmöglichen Nenner 10 versehenen Auflösungen sind gegeben durch die folgende allgemeine Formel:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{10} [\quad \quad + 2 \xi] \\ y &= \frac{1}{10} [\quad \quad + \eta] \\ z &= \frac{1}{10} [\quad \quad + \zeta] \\ u &= \frac{1}{10} [+ 224 + 15 \xi - 5 \eta + 12 \zeta] \\ v &= \frac{1}{10} [+ 329 - 21 \xi - 7 \eta + 9 \zeta]. \end{aligned}$$

Die hier aufgeführten Beispiele haben zur Genüge nicht blos die Wirksamkeit des in Rede stehenden Auflösungsverfahrens an den Tag gelegt, sondern auch gleichzeitig zur Überzeugung geführt, dass die erforderlichen Rechnungen keineswegs sehr bedeutend sind und sogar in den meisten Fällen durch zufällig obwaltende Umstände auf ein Minimum herabsinken. Solcher Zufälligkeiten haben wir zweierlei kennen gelernt: erstlich solche, welche die Bildung gewisser Determinanten ganz überflüssig machen, und zweitens andere, welche den Rechner von der Auflösung der unbestimmten Hilfsgleichungen, dann von der Bildung der Grössen $K, X, Y, Z, \dots$ und der im zweiten Theile der zur Bestimmung von $x, y, z, \dots$ dienenden unbestimmten Gleichungen oder Congruenzen stehenden Ausdrücke und einer wirklichen Auflösung derselben entheben. Die Fälle, in welchen solche günstigen Umstände zufällig obwalten, gehören keineswegs zu den seltenen Ausnahmen, sondern im Gegentheile zu den gewöhnlichen Fällen und es ist nicht schwer, sich zu überzeugen, dass die günstigen Fälle den ungünstigen an Wahrscheinlichkeit überlegen sind, besonders dann, wenn, wie dies gewöhnlich der Fall ist, die Coëfficienten der Gleichungen nur ein- oder zweiziffrige Zahlen sind. Vergleicht man nun mit unserer Auflösungsmethode die bisher üblichen, auf Substitution oder Elimination gegründeten Methoden, welche im Grunde sogar den Namen einer analytischen Methode nicht verdienen, da sie alle nur im Ausscheiden der unbrauchbaren Auflösungen und nicht in der directen Bildung der brauchbaren bestehen; so zeigt sich auch ein nicht unbeträchtlicher Vorzug unserer Methode selbst in Bezug auf die wirkliche Berechnung.

§. 23.

Die hier auseinandergesetzte Auflösungsmethode, insbesondere aber mit Rücksicht auf die eben erwähnten Abkürzungen der Rechnung, äussert auch ihre Wirksamkeit auf ein System von zwei Gleichungen mit einer unendlich grossen Anzahl von Unbekannten. Solche ergeben sich nicht selten in den verschiedenartigsten Partien der Analysis. So z. B. ist die n^{te} Potenz eines Polynomes $a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$ darstellbar als eine Summe:

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots)^n = S \left[\frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \delta! \dots} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \dots x^{3\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots} \right],$$

welche auf die verschiedenen Werthe der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ auszudehnen ist. Diese Grössen haben eine Bedingungsgleichung:

$$a + \beta + \gamma + \delta + \dots = n$$

zu erfüllen und dürfen noch überdies weder negative noch andere als ganze Werthe erlangen, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Verlangt man nicht die vollständige Entwicklung dieser n^{ten} Potenz des gegebenen Polynomes, sondern nur das mit x^n versehene Glied derselben, so ist dasselbe gegeben durch die Summe:

$$x^n \cdot S \left[\frac{x^n}{a^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma \delta^\delta \dots} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \dots \right]$$

die auf alle ganzen und positiven Werthe von $a, \beta, \gamma, \delta, \dots$ auszudehnen ist, Nullwerthe mit einbegriffen, welche die zwei Gleichungen erfüllen:

$$(237) \quad \begin{aligned} a + \beta + \gamma + \delta + \dots &= n \\ \beta + 2\gamma + 3\delta + \dots &= r. \end{aligned}$$

Diese zwei unbestimmten Gleichungen, deren Zusammenhang mit der Polynomialformel hier nachgewiesen ist, finden sich auch in genau derselben Gestalt in vielen anderen Formeln der Differentialrechnung. Wir wollen desshalb hier die gleichzeitige Auflösung derselben in ganzen Zahlen wirklich ausführen. Dieses eine Beispiel wird zur Genüge die Behandlungsweise solcher Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten deutlich machen.

Bezeichnen wir vor der Hand die m^{te} und $(m + 1^{\text{ste}})$ Unbekannte, die durch λ und μ angedeutet sein mögen, als die beiden abhängigen, so hat man nach der angegebenen Regel die vier Glieder:

$$\begin{aligned} \lambda + \mu \\ m\lambda + (m + 1)\mu \end{aligned}$$

hervorzuheben und die Determinante zu bilden. Dieselbe ist hier gleich Eins und somit liegt hier der einfachste mögliche Fall vor. Da dies für jeden beliebigen Werth von m stattfindet, somit auch für $m = \infty$, so ist klar, dass man die Unbekannten $a, \beta, \gamma, \delta, \dots$ sämmtlich als willkürliche ganze Zahlen betrachten könne.

Für den Zweck, die oberwähnten Formeln wirklich zu bilden, ist hiemit freilich wohl noch nicht Alles geschehen, weil ausser dem Erfülltsein der beiden Gleichungen in ganzen Zahlen noch gefordert wird, dass $a, \beta, \gamma, \delta, \dots$ positive Zahlen sind oder gleich Null ausfallen. mit anderen Worten, dass sie das System von Ungleichungen erfüllen:

$$a > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0, \dots$$

Die Erörterung dieser Bedingung erheischt noch eine andere Untersuchung, nämlich die Auflösung eines Systemes von linearen Ungleichungen.

§. 24.

Erörterung jener Fälle, in welchen einzelne oder Gruppen von Determinanten gleich Null werden.

Zuvörderst wollen wir die Frage beantworten: In welcher Weise können Determinanten gleich Null werden? Hierauf aber den Einfluss einer derartigen Erscheinung auf die Auflösung der Gleichungen untersuchen.

Schon im §. 4 wurde die Relation (23)

$$a(bc) - b(ac) + c(ab) = 0$$

aufgeführt. Diese führt auch zur Beantwortung der ersten Frage. Es ist hier ersichtlich, dass wenn die zwei Determinanten (ab) und (ac) gleichzeitig verschwinden, auch $a_1(bc)$ und $a_2(bc)$ gleich Null ausfallen. Dies kann aber nur erfolgen, wenn $(bc) = 0$ ist, da der andere mögliche Fall $a_1 = a_2 = 0$ offenbar für unsere Zwecke ohne Sinn ist. Wir schliessen hieraus, dass mit dem Verschwinden zweier Determinanten, welche einen Buchstaben gemeinschaftlich haben, auch das Nullwerden einer dritten Determinante nothwendig verknüpft sei, derjenigen nämlich, welche die beiden anderen Buchstaben in sich vereinigt hat. Diese Gruppe von drei gleichzeitig verschwindenden Determinanten entspricht den Amben, welche aus den drei combinatorischen Elementen a, b, c gebildet werden können.

Es ist nicht schwer, den hier betrachteten Fall von drei gleichzeitig verschwindenden Determinanten auf eine Gruppe von mehreren auszudehnen. Z. B. Es seien:

$$(ab), (bc), (cd)$$

drei verschwindende Determinanten, so werden nothwendig auch die folgenden Determinanten:

$$(ac), (bd), (ud)$$

gleichzeitig verschwinden, mit anderen Worten: alle jene Determinanten, welche den verschiedenen Amben entsprechen, welche aus vier combinatorischen Elementen a, b, c, d gebildet werden können, verschwinden alle gleichzeitig, sobald nur drei derselben, deren Buchstaben die vier Elemente a, b, c, d erschöpfen, gleich Null ausfallen. Diese Schlussfolgerung lässt sich auf beliebig viele Elemente ausdehnen und man gelangt ohne Schwierigkeit zu dem Satze, dass ein Verschwinden von $r - 1$ Determinanten, deren Buchstaben einen Complex von r Buchstaben darstellen, nothwendig auch das Verschwinden aller übrigen Determinanten zur Folge hat, die aus diesen r Buchstaben hervorgehen können.

Es gibt noch einen anderen Weg, sich von der Wahrheit des Gesagten zu überzeugen. Das Verschwinden einer einzelnen Determinante $(ab) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ erfolgt nämlich immer dann, wenn die Grössen a_1, a_2, b_1, b_2 einander proportional sind. Sind drei Coëfficientenpaare $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ einander proportional, so verschwinden offenbar alle Determinanten, die aus ihnen gebildet werden können, nämlich drei an der Zahl. Sind aber r Coëfficientenpaare einander proportional, so müssen nothwendig alle aus ihnen hervorgehenden Determinanten $\frac{r(r-1)}{2}$ an der Zahl gleich Null ausfallen.

Eine unmittelbare Folge des Gesagten ist, dass bei der von uns angewendeten Anordnungsweise der Determinanten in Vertical- und Horizontalreihen ein Verschwinden aller Determinanten irgend einer Horizontalreihe nur dann erfolgen könne, wenn auch alle Determinanten der vorhergehenden Horizontalreihen gleich Null ausfallen. Sollte z. B. in der Determinantengruppe:

$$(eg) \\ (de), (dg) \\ \dots \dots \dots$$

$$\begin{aligned}
 & (cd) \dots\dots (ce) , (cg) \\
 & (bc) , (bd) \dots\dots (be) , (bg) \\
 & (ab) , (ac) , (ad) \dots\dots (ae) , (ag) \\
 & (ka) , (kb) , (kc) , (kd) \dots\dots (ke) , (kg),
 \end{aligned}$$

die Horizontalreihe (de) , (dg) in ihren beiden Gliedern Nullwerthe erhalten, so muss nothwendig auch $(eg) = 0$ sein und würde unmittelbar die Proportionalität der drei letzten Coëfficientenpaare:

$$\begin{aligned}
 & d_1 \cdot e_1 \cdot g_1 \\
 & d_2 \cdot e_2 \cdot g_2
 \end{aligned}$$

beweisen. Das Verschwinden der Determinanten (cd) , $\dots$, (ce) , (cg) würde das Nullsein aller vorhergehenden Determinanten:

$$\begin{aligned}
 & (eg) \\
 & (de) \cdot (dg) \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

erheischen. Das Stattfinden dieser Erscheinung würde alsogleich den Beweis liefern, dass die letzten Coëfficientenpaare:

$$\begin{aligned}
 & c_1 \dots\dots d_1 \cdot e_1 \cdot g_1 \\
 & c_2 \dots\dots d_2 \cdot e_2 \cdot g_2
 \end{aligned}$$

einander proportional sind.

Wenden wir uns nun zur zweiten Untersuchung, nämlich zur Beantwortung der Frage: welchen Einfluss kann das Verschwinden einzelner, mehrerer oder endlich aller Determinanten auf den Gang der Rechnung bei der Auflösung des gegebenen Systemes ausüben? Es ist für sich klar, dass keinerlei Störung, sondern im Gegentheile meist eine Vereinfachung der Rechnung eintritt, wenn keine Horizontalreihe vollständig verschwindet. Erhält man nämlich (eg) von Null verschieden, so ist hiemit schon erwiesen, dass in allen nachfolgenden Reihen zum mindesten eine einzige Determinante einen significativen Werth erlangen müsse, und somit die Rechnung ihren ungestörten Fortgang nehmen werde. Also kann nur in jenen Fällen, wo (eg) gleich Null ausfällt, eine Störung der Rechnung eintreten.

Wird $(eg) = 0$, so ist hiemit die Proportionalität der zwei letzten Coëfficientenpaare e_1 , e_2 , g_1 , g_2 erwiesen und dies genügt schon vollkommen, um einzusehen, dass die beiden Unbekannten v und w , wenigstens nicht beide zugleich die Rolle der abhängigen Grössen spielen können, da ihre Werthe in keinem Falle durch die beiden Gleichungen bestimmt werden. In der That kann man in diesem Falle aus den zwei Gleichungen die zwei Unbekannten v und w gleichzeitig eliminiren und gelangt so zu einer andern Gleichung, in der diese zwei Grössen nicht mehr erscheinen, und die daher auch zu ihrer Bestimmung nichts beiträgt. Fügt man zu dieser von v und w freien Gleichung noch eine der beiden ursprünglich gegebenen hinzu, so hat man ein dem ursprünglichen vollkommen gleichgeltendes System, bei

welchem nur eine der beiden Grössen v , w als abhängig erscheinen kann. Man wird demnach durch das Verschwinden von (eg) genöthigt, eine der beiden Grössen v und w , vielleicht die Letztere als eine unabhängige, dafür aber eine der ursprünglich als unabhängig angesehenen anderen: x , y , z . . . u , vielleicht eben wieder die letzte derselben u als abhängig zu betrachten. Dem zu Folge ist auch das Rechnungsverfahren entsprechend abzuändern und namentlich der Unbekannten w in den Gleichungen eine frühere Stelle einzuräumen.

Verschwinden die drei Determinanten:

$$(eg)$$

$$(de) \cdot (dg)$$

gleichzeitig, welche die beiden ersten Horizontalreihen zusammensetzen, so ist hiemit die Proportionalität der drei letzten Coëfficientenpaare:

$$d_1 \text{ , } e_1 \text{ , } g_1$$

$$d_2 \text{ , } e_2 \text{ , } g_2$$

erwiesen und man kann nur eine einzige der drei letzten Unbekannten u , v , w , vielleicht die erste derselben u als abhängig ansehen und ist genöthigt die beiden andern als unabhängig zu betrachten, weil man im Stande ist, alle diese drei Grössen mit einem Male zu eliminiren und es muss nun wieder eine der früher als unabhängig angesehenen Unbekannten x , y , z . . . die Rolle der abhängigen übernehmen.

In gleicher Weise hat man beim Verschwinden einer grösseren Anzahl von Horizontalreihen eine entsprechende Änderung zu treffen in der Austheilung der Rollen der abhängigen und unabhängigen Grössen.

Zwei Fälle bleiben uns aber noch zu betrachten übrig, die einen anderen Effect, als den eben genannten haben:

Verschwinden alle Horizontalreihen der Determinanten mit Ausnahme der letzten vollständig, so ist die Proportionalität aller Coëfficientenpaare

$$a_1 \text{ , } b_1 \text{ , } c_1 \text{ } d_1 \text{ , } e_1 \text{ , } g_1$$

$$a_2 \text{ , } b_2 \text{ , } c_2 \text{ } d_2 \text{ , } e_2 \text{ , } g_2$$

erwiesen und nur die zwei Constanten k_1 , k_2 stehen in einem anderen Verhältnisse zu einander. Man kann daher alle Unbekannten mit einem Male eliminiren und gelangt zu einer widersprechenden Gleichung. Es ist also das vorliegende System widersprechend und besitzt keine Auflösungen.

Verschwinden alle Horizontalreihen der Determinanten, selbst die letzte mit eingerechnet, so sind alle Coëfficienten und Constanten einander proportional, man kann die zwei Gleichungen durch schickliche Combination in die identische $0 = 0$ verwandeln und es ist kein Zweifel, dass dieses System von zwei Gleichungen einer einzigen Gleichung gleichzuhalten sei. Man wird daher eine dieser beiden Gleichungen beibehalten, die andere streichen und nur eine gewöhnliche unbestimmte Gleichung vorliegen haben und ihre Auflösung in der bekannten Weise bewerkstelligen.

Aus dem hier Auseinandergesetzten ergibt sich eine eigene Regel, solche Ausnahmefälle zu behandeln, bei denen einige Horizontalreihen der Determinanten verschwinden. Die Rechnung ist durchaus keine andere, als bei den gewöhnlichen Fällen, sondern im Gegentheile oft eine nicht unbedeutende Vereinfachung damit verbunden.

Man beginnt mit der Bildung der Determinante (eg) . Erweist sich diese gleich Null, so ertheilt man der Unbekannten w die Rolle einer unabhängigen Grösse und sieht nun u und v als die beiden abhängigen Grössen an. Demgemäss streicht man die letzte Verticalreihe der Determinanten:

$$(eg) , (dg) , \dots (cg) , (bg) , (ag) , (kg).$$

Nun bildet man (de) und hat hier zwei Fälle zu berücksichtigen und darnach die weitere Rechnung einzurichten. Ist nämlich auch $(de) = 0$, so ist auch v als unabhängig anzusehen, also auch die Verticalreihe: $(de) \dots (ce)$, (be) , (ae) , (ke) der Determinanten zu streichen. Die beiden letzten der Unbekannten x , y , z , $\dots u$ sind nun vorläufig als die abhängigen Grössen anzusehen. Ist aber (de) von Null verschieden, so dient dies als Beweis, dass u und v wirklich als abhängige Grössen betrachtet werden können und der Gang der Rechnung unterliegt fernerhin keiner Störung mehr.

Aus dem Gesagten geht klar hervor, dass das bekannte gewöhnliche Verfahren auch hier gelte, und dass dasselbe namentlich anfangs nur die Aufsuchung derjenigen zwei Unbekannten zum Zwecke hat, welche die Rolle der abhängigen Grössen übernehmen können. Sind diese zwei gefunden, was sich immer dadurch kund gibt, dass man beim Fortschreiten in der Diagonalreihe:

$$(238) \quad (eg) , (de) , \dots (cd) , (bc) , (ab) , (ka)$$

endlich zu einer von Null verschiedenen Determinante gelangt, so ist das weitere Verfahren ein bekanntes und der gefundenen Vertheilung der Rolle der Abhängigkeit und Unabhängigkeit entsprechendes. Verschwinden (eg) , (de) , $\dots (cd)$, (bc) , (ab) sämmtlich, aber (ka) nicht, so sind die Gleichungen widersprechend, ist aber auch noch $(ka) = 0$, so sind die zwei Gleichungen von einander nicht verschieden.

Aus der bisherigen Auseinandersetzung würde aber folgen, dass den durch Nullwerden gewisser Anfangsdeterminanten der erwähnten Diagonalreihe (238) als unabhängig bezeichneten Unbekannten in den Gleichungen statt der letzten Stelle eine der ersteren einzuräumen wäre und dass demzufolge ihnen auch eine bestimmte Horizontalreihe von Determinanten im Schema entsprechen müsse. Man würde aber nur überflüssige Rechnungen ausführen, wollte man sich wirklich an diese Vorschrift halten. Es lässt sich nämlich zeigen, dass diese Determinanten sich von jenen einer entsprechenden schon gebildeten Verticalreihe nur in einem constanten Factor unterscheiden. Dies zu beweisen, soll zunächst unsere Aufgabe sein.

Wir nehmen also an, (eg) sei gleich Null, (de) aber von Null verschieden, und wollen nun zeigen, dass die Determinanten:

$$(dg) \dots (cg) , (bg) , (ag) , (kg)$$

$$(240) \quad \begin{aligned} e_1 v + g_1 w &= \varepsilon_1 V \\ e_2 v + g_2 w &= \varepsilon_2 V \end{aligned}$$

denn diese zwei Gleichungen unterscheiden sich nur in einem constanten Multiplicator und sind beide gleichzeitig für dieselben Werthe von v , w , V erfüllt. Jede derselben für sich allein gestattet aber ganze Auflösungen v , w , V und es ist dabei namentlich V fähig alle möglichen ganzen Zahlwerthe anzunehmen. Hieraus folgt nun, dass die drei Gleichungen:

$$(241) \quad \begin{aligned} k_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots + d_1 u + \varepsilon_1 V \\ k_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots + d_2 u + \varepsilon_2 V \end{aligned}$$

$$(242) \quad e_1 v + g_1 w = \varepsilon_1 V$$

den ursprünglich vorgelegten (239) vollkommen gleichgeltend sind. Man kann mit der Auflösung der zwei unbestimmten Gleichungen (241) beginnen und sie in bekannter Weise vollführen, wenn (d_1, ε_2) von Null verschieden ist, weil jedem beliebigen ganzen Werthe von V in die (242) gesetzt, ganze Zahlwerthe von v und w entsprechen. Auf solche Weise findet man für V einen gewissen Werth, meist einen Ausdruck, mit einer Anzahl willkürlicher ganzer Grössen versehen. Um nun v und w daraus abzuleiten, braucht man nur die für $V=1$ aus der (242) hervorgehende unbestimmte Gleichung:

$$e_1 v + g_1 w = \varepsilon_1$$

vollständig aufzulösen und die gefundenen, mit einer willkürlichen ganzen Grösse versehenen Werthe von v und w nun mit dem erhaltenen allgemeinen Werthe von V zu multipliciren. Solehergestalt findet man also die allgemeine Formel der ganzen Auflösungen des Systemes (239).

Wären mehrere Determinanten der Diagonalleihe: (eg) , (de) , . . . verschwunden, so würde man in ähnlicher Weise verfahren, nämlich durch Einführung einer Hilfsgrösse V die zwei Gleichungen (239) in zwei andere verwandeln, mit einer geringeren Anzahl von Unbekannten ähnlich den (241) und in eine dritte, gewöhnliche unbestimmte Gleichung mit mehreren Unbekannten, ähnlich der (242) und auf genau demselben Wege zur allgemeinen Auflösung in ganzen Zahlen gelangen wie in dem früher erörterten Falle.

Über Systeme von mehreren unbestimmten Gleichungen.

§. 25.

Wir wollen nun den allgemeinsten Fall zum Gegenstande unserer Untersuchung machen, nämlich ein System von beliebig vielen Gleichungen des ersten Grades mit einer überwiegen- den und gleichfalls willkürlich grossen Anzahl von Unbekannten.

$$(1) \quad \begin{aligned} 1_1 x_1 + 1_2 x_2 + 1_3 x_3 + 1_4 x_4 + \dots + 1_m x_m &= 1_k \\ 2_1 x_1 + 2_2 x_2 + 2_3 x_3 + 2_4 x_4 + \dots + 2_m x_m &= 2_k \\ 3_1 x_1 + 3_2 x_2 + 3_3 x_3 + 3_4 x_4 + \dots + 3_m x_m &= 3_k \\ \dots & \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 + \dots + n_m x_m &= n_k \end{aligned}$$

sei das gegebene System von Gleichungen, n deren Anzahl und m jene der darin erscheinenden Unbekannten: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$, wobei n und m beliebig grosse Zahlen bedeuten können, jedenfalls aber in der Relation $n < m$ zu einander stehen.

Die im Vorhergehenden auf ein System von zwei Gleichungen angewendete Methode lässt sich auch auf diesen allgemeinen Fall ausdehnen ohne eine wesentliche Abänderung zu erleiden. Wir verwandeln durch eine Reihe von Transformationen und durch Einführung neuer Unbekannten das ursprünglich gegebene System von n Gleichungen in eine Reihe von unbestimmten Gleichungen oder, wenn man will, Congruenzen des ersten Grades und in ein System von bestimmten Gleichungen. Die Anzahl der unbestimmten Gleichungen oder Congruenzen kommt der Anzahl $m - n$ der überschüssigen Unbekannten gleich, welche durch das vorliegende System nicht bestimmt werden.

Diese Transformationen der Gleichungen bilden keineswegs einen unvermeidlichen Theil der wirklichen Rechnung; im Gegentheile lässt sich eine sehr einfache Regel angeben, ähnlich derjenigen für ein System von zwei Gleichungen, wodurch die wirklichen Rechnungen auf ein Minimum herabsinken.

Bei der eben erwähnten Regel spielen gewisse Grössen eine Hauptrolle, welche aus den Coëfficienten der Gleichungen gebildet werden und für welche die bekannte Bezeichnung: „Determinanten“ besteht. Wäre nämlich das obige System von n Gleichungen ein bestimmtes, d. h. $m = n$, so würde denselben eine einzige Determinante entsprechen, gebildet aus der Gruppe von Coëfficienten:

$$(2) \quad \begin{matrix} 1_1, & 1_2, & 1_3, & \dots & 1_n \\ 2_1, & 2_2, & 2_3, & \dots & 2_n \\ 3_1, & 3_2, & 3_3, & \dots & 3_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_1, & n_2, & n_3, & \dots & n_n \end{matrix}$$

durch ein geregeltes combinatorisches Verfahren, das hinlänglich bekannt ist. Wir wollen diese Determinante mit dem Symbole:

$$(3) \quad [1_1, 2_2, 3_3, \dots, n_n]$$

bezeichnen. Im gegenwärtigen Falle aber, wo $m < n$ ist, also die Coëfficienten der Gleichungen eine grössere Anzahl von Verticalreihen als von Horizontalreihen bilden, kann man nach Belieben n Verticalreihen hervorheben und aus ihnen eine Grösse bilden ähnlich der (3). Dies wird auf so viele verschiedene Weisen geschehen können, und demnach auch zu so vielen verschiedenen Grössen führen, als Combinationen zu n Elementen aus m Grössen gebildet werden können. Es entsprechen folglich einem Systeme von n Gleichungen mit m Unbekannten

$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$ Determinanten. Sie sind folgende:

$$(4) \quad \begin{matrix} [1_1, 2_2, 3_3, \dots, n_n], & [1_1, 2_2, 3_3, \dots, (n-1)_{n-1}, n_{n+1}], & [1_1, 2_2, 3_3, \dots, (n-1)_{n-1}, n_{n+2}], & \dots \\ [1_2, 2_3, 3_4, \dots, n_{n+1}], & [1_2, 2_3, 3_4, \dots, (n-1)_n, n_{n+2}], & [1_2, 2_3, 3_4, \dots, (n-1)_n, n_{n+3}], & \dots \\ [1_3, 2_4, 3_5, \dots, n_{n+2}], & [1_3, 2_4, 3_5, \dots, (n-1)_{n+1}, n_{n+3}], & [1_3, 2_4, 3_5, \dots, (n-1)_{n+1}, n_{n+4}], & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [1_{m-n+1}, 2_{m-n+2}, 3_{m-n+3}, \dots, n_m] \end{matrix}$$

Ausser den Determinanten (4) kommen bei den in Rede stehenden Untersuchungen noch andere Grössen vor, in welchen die Constanten $1_k, 2_k, 3_k, \dots, n_k$ der Gleichungen erscheinen und die sich von den Determinanten (4) nur dadurch unterscheiden, dass an die Stelle der Coefficienten einer Verticalreihe diese Constanten treten, welche im Grunde die $(m+1)^{\text{te}}$ Verticalreihe vorstellen. Diese Grössen sind, der früheren Bezeichnungsweise treu bleibend:

$$(5) \quad [1_k 2_1 3_2 \dots n_{n-1}], [1_k 2_1 3_2 \dots (n-1)_{n-2} n_n], [1_k 2_1 3_2 \dots (n-1)_{n-2} n_{n-1}], \dots$$

Wir wollen diese Grössen kürzshalber mit dem Buchstaben K bezeichnen, während der Buchstabe D den Determinanten (4) als allgemeines Symbol entsprechen soll. Die Anzahl der Grössen K ist offenbar $\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{1 \cdot 2 \dots n-1}$, denn dies ist die Anzahl der Combinationen zu $n-1$ Elementen, die sich aus m Grössen bilden lassen.

Wir schreiten nun zu den wirklichen Untersuchungen und namentlich zur Aufstellung der allgemeinen Regeln, vermittelt deren sich die auf das vorliegende Problem Bezug habenden drei Hauptfragen beantworten lassen.

I. Erörterung der Bedingungen für das Vorhandensein ganzer Auflösungen.

Zur Beantwortung der Frage, ob ganze Werthe der Unbekannten $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ dem vorliegenden Systeme von Gleichungen Genüge leisten können oder nicht, führt folgender Lehrsatz: Wenn der grösste gemeinschaftliche Factor sämtlicher Determinanten D des vorgelegten Systemes gleich Eins ist, so bestehen ganze Auflösungen; ist hingegen derselbe von Eins verschieden, so sind ganze Auflösungen nur dann vorhanden, wenn auch alle Grössen K diesen Factor besitzen.

Bevor wir jedoch zum Beweise dieses Lehrsatzes schreiten, müssen wir noch einige Hilfsätze vorausschieken.

§. 26.

Ein System von mehreren Gleichungen des ersten Grades, gleichgültig ob ein bestimmtes oder unbestimmtes, lässt sich auf unendlich viele verschiedene Arten durch ein anderes gleichgeltendes System von Gleichungen ersetzen, welche dieselbe Hauptform tragen, und sich nur in den Coefficienten und Constanten unterscheiden.

Das Verfahren, mittelst dessen solche Gleichungen erhalten werden, ist hinlänglich bekannt: Man multiplicirt nämlich die Gleichungen der Reihe nach mit beliebig gewählten Zahlen und addirt sie hierauf. Das Ergebniss hievon ist jedesmal eine Gleichung, welche für genau dieselben Werthe der Unbekannten erfüllt ist, welche dem ursprünglich gegebenen Systeme Genüge leisten. Durch eine n malige Wiederholung dieses Verfahrens, nur mit Anwendung anderer Multiplicatoren gewinnt man ein System von n Gleichungen, die alle gleichzeitig erfüllt sind für jene Werthe der Unbekannten, welche das ursprüngliche System erfüllen. In der Regel gilt auch das Umgekehrte, d. h. alle jene Werthe der Unbekannten, welche das neue System erfüllen, leisten auch dem ursprünglichen Genüge, so zwar dass diese beiden Systeme einander völlig gleichgelten. Es kann sich aber in Folge einer unzuweckmässigen Wahl der Multiplicatoren ereignen, dass die abgeleiteten n neuen Gleichungen nicht

vollkommen verschieden sind und Auflösungen zulassen, die dem ursprünglichen Systeme widersprechen. Dies erfolgt namentlich dann, wenn die aus den erwählten Multiplicatoren

$$(6) \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ p_1, p_2, p_3 \dots p_n \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ p_1, p_2, p_3 \dots p_n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ p_1 \cdot p_2, p_3 \dots p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \\ p_1, p_2, p_3, \dots p_n \end{matrix}$$

gebildete Determinante gleich Null wird. So lange aber die Multiplicatoren-Determinante einen von Null verschiedenen Werth besitzt, ist das neue System dem ursprünglichen äquivalent.

Bezeichnen wir das neue System von Gleichungen mit:

$$(7) \begin{matrix} 1' x_1 + 1_2' x_2 + 1_3' x_3 + \dots + 1_m' x_m = 1_k' \\ 2' x_1 + 2_2' x_2 + 2_3' x_3 + \dots + 2_m' x_m = 2_k' \\ 3' x_1 + 3_2' x_2 + 3_3' x_3 + \dots + 3_m' x_m = 3_k' \\ \dots \\ n_1' x_1 + n_2' x_2 + n_3' x_3 + \dots + n_m' x_m = n_k' \end{matrix}$$

und gehen von der Voraussetzung aus, dass jene Multiplicatoren, die zur Ableitung irgend einer dieser Gleichungen, z. B. der a^m , in (6) die a^e Verticalreihe bilden; so ergeben sich für die Coëfficienten der neuen Gleichungen Relationen, welche durch die folgende allgemeine angedeutet sind:

$$(8) \quad a_{\beta}^{\prime} = 1_{\beta}^1 p_a^1 + 2_{\beta}^2 p_a^2 + 3_{\beta}^3 p_a^3 + \dots + n_{\beta}^n p_a^n$$

Um diese Relationen vollständig aufzuzeichnen, hätte man in der (8) der Reihe nach: α durch die Werthe 1, 2, 3, ..., n und β durch 1, 2, 3, ..., $m \cdot k$ zu ersetzen.

Auf Grundlage der eben aufgestellten Relationen gelangt man zu dem Satze, dass die Determinanten D' und K' des neuen Systemes (7) den Grössen D und K des ursprünglichen (1) proportional seien und namentlich durch Multiplication mit der aus den Multiplicatoren (6) gebildeten Determinante: $[p_1^1, p_2^2, p_3^3, \dots, p_n^n] = P$ hervorgehen.

Den Beweis dieses Satzes glauben wir hier übergangen zu sollen, da er aus der Theorie der Determinanten hinlänglich bekannt ist.

Dieser Lehrsatz von der Multiplication der Determinanten ist der erste Hilfssatz, dessen wir in der Folge benötigen werden.

§. 27.

Zweiter Hilfssatz: Wenn alle Determinanten D des vorgelegten Systemes einen grössten gemeinschaftlichen Factor ζ besitzen und derselbe auch in allen Determinanten K erscheint; so lässt sich stets ein neues und gleichgeltes System von Gleichungen ableiten, dessen Determinanten D' keinen von

Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen und dessen Coëfficienten und Constanten gleichfalls ganze Zahlen sind.

Die Verwandlung des gegebenen Systemes (1), dessen Determinanten D und K den grössten gemeinschaftlichen Factor φ besitzen, in ein anderes gleichgeltendes, mit Determinanten D', welche keinen von Eins verschiedenen Factor enthalten, kann, nach dem eben früher angeführten Satze von der Multiplication der Determinanten, nur für eine solche Wahl der transformirenden Multiplicatoren p zu Stande kommen, welche der Multiplicatoren-Determinante $P = [p_1^1, p_2^2, p_3^3, \dots, p_n^n]$ den Werth $\frac{1}{\varphi}$ ertheilen und noch überdies sämtlichen Coëfficienten und Constanten der transformirten Gleichungen ganze Zahlwerthe ertheilen.

Solcher Multiplicatoren bestehen unendlich viele. Es unterliegt keiner Schwierigkeit, die Form derselben in ihrer vollen Allgemeinheit zu entwickeln, wenn man die Bedingungen analytisch ausdrückt, welche sie zu erfüllen haben, und einen ähnlichen Weg wie in §. 6 einschlägt. Uns ist hier nicht der Raum gegönnt, diese Untersuchungen wirklich durchzuführen und wir beschränken uns darauf, specielle Werthe der Multiplicatoren p aufzustellen, welche die obenerwähnten Bedingungen erfüllen: sind aber genöthigt, wegen Mangel an Raum, dieselben in symbolischer Form anzuzuzeichnen. Sie sind folgende:

$$\begin{aligned}
 p_1^a &= (-1)^{a+1} \frac{[1_1 2_2 3_3 \dots (\alpha-1)_{\alpha-1} (\alpha+1)_\alpha \dots n_{n-1}]}{\varphi \cdot \phi_1 \cdot \phi_{1,2} \cdot \phi_{1,2,3} \dots \phi_{1,2,3 \dots n-1}} \\
 p_2^a &= (-1)^{a+2} \frac{S \{ [1_1 2_2 3_3 \dots (\alpha-1)_{\alpha-1} (\alpha+1)_\alpha \dots (n-1)_{n-2} n_n] \theta_{\beta} \}}{\varphi \cdot \phi_1 \cdot \phi_{1,2} \cdot \phi_{1,2,3} \dots \phi_{1,2,3 \dots n-2}} \\
 (9) \quad p_3^a &= (-1)^{a+3} \frac{S \{ [1_1 2_2 3_3 \dots (\alpha-1)_{\alpha-1} (\alpha+1)_\alpha \dots (n-2)_{n-3} (n-1)_{n-1}] \theta_{\gamma} \}}{\varphi \cdot \phi_1 \cdot \phi_{1,2} \cdot \phi_{1,2,3} \dots \phi_{1,2,3 \dots n-3}} \\
 &\dots \dots \dots \\
 p_i^a &= (-1)^{a+i} \frac{S \{ [1_1 2_2 3_3 \dots (\alpha-1)_{\alpha-1} (\alpha+1)_\alpha \dots (n-i+1)_{n-i} (n-i+2)_{n-i} \dots n_n] \theta_{\varepsilon} \}}{\varphi \cdot \phi_1 \cdot \phi_{1,2} \cdot \phi_{1,2,3} \dots \phi_{1,2,3 \dots n-i}} \\
 &\dots \dots \dots \\
 p_n^a &= (-1)^{a+n} \frac{S \{ [1_{\pi-2} 2_{\pi-1} 3_{\pi-1} \dots (\alpha-1)_{\pi-n} (\alpha+1)_{\pi-n} \dots (n-1)_{\pi-1} n_\pi] \theta_{\pi} \}}{\varphi}
 \end{aligned}$$

Diese Formeln geben die Werthe der Multiplicatoren p an und zwar zunächst derjenigen, welche die Zahl α als oberen Stellenzeiger besitzen. Aus diesen allgemeinen Formeln gehen unmittelbar die Werthe aller Multiplicatoren hervor, wenn man die Zahl α der Reihe nach durch $1, 2, 3, \dots, n$ ersetzt. Die erste der hier aufgestellten Formeln gibt den Werth von p_1^a : im Zähler des Bruches erscheint eine durch das Symbol:

$$[1_1 2_2 3_3 \dots (\alpha-1)_{\alpha-1} (\alpha+1)_\alpha \dots n_{n-1}]$$

angedeutete Determinante. Die Stellenzeiger in diesem Symbole sind: $1, 2, 3, \dots, \alpha-1, \alpha, \alpha+1, \dots, n-1$ somit die in natürlicher Reihenfolge geordneten ganzen Zahlen von 1 bis $n-1$ ohne alle Unterbrechung. Die Zahlen hingegen, denen diese Indices angehängt sind, zeigen eine Unterbrechung der natürlichen Zahlenfolge, denn es fehlt die Zahl α . Hiemit liegt auch die Regel offen am Tage, wie dieses Symbol zu bilden ist. Man schreibe der Reihe nach die ganzen Zahlen von 1 angefangen bis n mit Hinweglassung von α , füge denselben die natürliche Reihe der Stellenzeiger $1, 2, 3, \dots, n-1$ unten an und schliesse die Klammer. Der Nenner des Bruches, welcher den Werth von p_1^a gibt, ist ein Product mehrerer Factoren, welche folgende Bedeutung haben: φ ist der grösste gemeinschaftliche Factor, der in allen

Determinanten D des vorgelegten Systemes von unbestimmten Gleichungen erscheint, φ, ϕ_1 ist der grösste gemeinschaftliche Factor, der in der Gruppe jener Determinanten D erscheint, welche die mit dem Stellenzeiger Eins versehenen Coëfficienten in sich schliessen, also durch das allgemeine Symbol $[a_1 b_{\bar{\beta}} c_{\gamma} \dots g_{\gamma}]$ dargestellt sind, d. h. jene, zu deren Bildung die erste Verticalreihe der Gleichungscoefficienten eingeht. $\varphi \cdot \phi_1 \cdot \phi_{1.2}$ ist der grösste gemeinschaftliche Factor einer Unterabtheilung dieser Gruppe von Determinanten, nämlich aller jener Grössen D , in denen die beiden ersten Verticalreihen der Gleichungscoefficienten enthalten sind und die demnach durch das allgemeine Symbol $[a_1 b_2 c_{\gamma} \dots g_{\gamma}]$ gegeben werden. Endlich stellt $\varphi \cdot \phi_1 \cdot \phi_{1.2} \cdot \phi_{1.2.3} \dots \phi_{1.2.3. \dots n-1}$ den grössten gemeinschaftlichen Factor jener Determinanten D vor, in denen die $n-1$ ersten Verticalreihen der Gleichungscoefficienten enthalten sind und denen daher das Symbol entspricht: $[a_1 b_2 c_3 \dots f_{n-1} g_n]$.

Wenden wir nun den Blick auf die zweite Gleichung, welche den Werth von p_2^a gibt. Im Zähler des Bruches erscheint eine symbolisch geschriebene Summe. Das allgemeine Glied dieser Summe ist:

$$(10) \quad [1_1 2_2 3_3 \dots (a-1)_{a-1} (a+1)_{a+1} \dots n-1_{n-2} n_{\beta}] \theta_{\beta}$$

und stellt das Product einer Determinante der Ordnung $n-1$ mit einer ganzen Zahl θ_{β} dar. Die in der Determinante erscheinende Zahlenreihe ist genau dieselbe, wie in der früher betrachteten Formel p_1^a ; in ihr mangelt gleichfalls die Zahl a . Die Stellenzeiger in dieser Determinante laufen von 1 nur bis $n-2$ regelmässig; der letzte Stellenzeiger hat einen allgemeinen Werth β , dem alle möglichen Werthe von n bis m der Reihe nach zu ertheilen sind. Das diesem betrachteten Producte (10) vorgesetzte Summenzeichen bezieht sich auf den Stellenzeiger β und ist auf die Werthe:

$$(11) \quad \beta = n, n+1, \dots, m$$

auszudehnen. Die Zahl θ_{β} repräsentirt eine Reihe von Zahlen: $\theta_n, \theta_{n+1} \dots \theta_m$, die alle bestimmte und ganze Werthe besitzen. Die Art sie aufzusuchen, wird später angegeben werden.

Die dritte Formel, welche den Werth von p_3^a gibt, enthält im Zähler des Bruches abermals eine Summe, die hier nur durch das allgemeine Glied repräsentirt ist. Die Summirung hat aber hier nach zwei Grössen zu geschehen, nämlich nach den beiden letzten Stellenzeigern in der Determinante: γ_1, γ und zwar soll sie auf alle jene ganzen Werthe dieser zwei Grössen ausgedehnt werden, welche sich von $n-1$ bis m erstrecken, aber so, dass γ_1 stets von γ verschieden und grösser ausfällt. Diese Werthe sind folgende:

$$(12) \quad \begin{array}{l} \gamma_1 = n-1, n, \dots, m-1 \\ \gamma = n \\ \quad n+1, n+1 \\ \quad \dots \\ \quad m, m, \dots, m \end{array}$$

Sie lassen sich am einfachsten ableiten, wenn man aus den Zahlen:

$$n-1, n, n-1, \dots, m$$

alle möglichen Amben bildet. Jede solche Ambe, wie z. B. $n-1, n$ gibt eine Zusammenstellung von Werthen für γ_1 und γ .

ist eine identische, wie sich leicht erweisen lässt. $[1_a 2_b 3_c \dots (a-1)_a (a+1)_c \dots n_g]$ bezeichnet eine Determinante der Ordnung $n-1$, hingegen $[1_s 2_a 3_b 4_c \dots n_g]$ eine Determinante der Ordnung n , in welcher von den Zahlen $1, 2, 3, 4, \dots, n$ keine einzige fehlt. Die Indices $s, a, b, c, \dots, g$ unterscheiden sich von jenen in $[1_a 2_b 3_c \dots (a-1)_a (a+1)_c \dots n_g]$ dadurch, dass ihre Anzahl um Eins grösser ist, und s allen vorangesetzt erscheint. Hier wollen wir nur bemerken, dass die im zweiten Theile dieser Gleichung erscheinende Determinante gleich Null wird, wenn s mit irgend einem der Stellenzeiger $a, b, c, \dots, g$ übereinstimmt, im entgegengesetzten Falle aber von Null verschieden ist. Wenden wir diese Formel auf den vorliegenden Ausdruck (15) an, so lässt sich die Summirung nach a alsogleich bewerkstelligen und wir finden:

$$(17) \quad r'_s = \frac{(-1)^{r-1}}{\varphi \cdot \phi_1 \cdot \phi_{1,2} \dots \phi_{1,2,3} \dots \phi_{1,2,3,\dots,n-r}} S\{[1_s 2_1 3_2 4_3 \dots (n-r+1)_{n-r} \times \\ \times (n-r+2)_{\varepsilon_{r-2}} \dots n_\varepsilon] \theta_{\varepsilon_{r-2}, \dots, \varepsilon}\}.$$

In diesem Ausdrucke sind nur noch die Summirungen nach den Grössen ε zu bewerkstelligen. Man könnte auch die darin erscheinende Determinante:

$$(18) \quad [1_s 2_1 3_2 4_3 \dots (n-r+1)_n (n-r+2)_{\varepsilon_{r-2}} \dots n_\varepsilon]$$

auf eine geordnete Form bringen, indem man dem Stellenzeiger s eine spätere Stelle in der Reihe der Stellenzeiger einräumt, so zwar, dass sie in ihrer natürlichen Grössenordnung aufeinander folgen, wie dies bei unserer Bezeichnungsweise üblich war, wobei man noch ferner das Vorzeichen $+$ oder $-$ vorzusetzen hätte, je nachdem der Stellenzeiger s dann eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Stellenzeigern vor sich hätte. All' dies unterlassen wir aber hier, weil wir nur zeigen wollen, dass r'_s einen ganzen Zahlwerth besitzt. Dies zu beweisen gelingt sehr leicht, denn in der vorliegenden Determinante (18) sind unmittelbar die Stellenzeiger: $1, 2, 3, \dots, n-r$ ersichtlich und jede solche Determinante ist, unserer Bezeichnung gemäss, durch $\varphi \cdot \phi_1 \cdot \phi_{1,2} \dots \phi_{1,2,\dots,n-r}$ theilbar, denn dieses Product ist eben der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Determinanten, in denen die Stellenzeiger: $1, 2, 3, \dots, n-r$ erscheinen. Es ist folglich r'_s eine ganze Zahl, weil die in (17) angezeigte Division sich wirklich ausführen lässt und somit allgemein bewiesen, dass alle Coëfficienten der transformirten Gleichungen und auch die Constanten ganze Zahlwerthe besitzen.

Es bleibt nun noch übrig, zu zeigen, dass die Determinanten des transformirten Systemes vom gemeinschaftlichen Factor φ frei sind, überhaupt, dass sie keinen gemeinschaftlichen Factor mehr besitzen. Zu diesem Zwecke wollen wir die Coëfficienten der n ersten Verticalreihen im transformirten Systeme, nämlich:

$$(19) \quad \begin{matrix} 1'_1 & , & 1'_2 & , & 1'_3 & , & \dots & , & 1'_n \\ 2'_1 & , & 2'_2 & , & 2'_3 & , & \dots & , & 2'_n \\ 3'_1 & , & 3'_2 & , & 3'_3 & , & \dots & , & 3'_n \\ & & & & & & \dots & & \\ & & & & & & & & \\ n'_1 & , & n'_2 & , & n'_3 & , & \dots & , & n'_n \end{matrix}$$

einer genaueren Prüfung unterziehen. Sie gehen alle aus der allgemeinen Formel (17) für r'_s hervor, wenn man statt r und s die entsprechenden Werthe setzt. Vor allem zeigt sich, dass wenn $s \geq n-r$ ist, r'_s gleich Null wird. In der That wird die Determinante unter dem

$$\frac{[1_1 2_2 3_3 \dots n_n]}{\varphi \cdot \psi_1 \cdot \psi_{1,2} \cdot \psi_{1,2,3} \dots \psi_{1,2,3,\dots,n-1}}$$

zusammenfallen lässt. Setzt man nun in der Formel (25) der Reihe nach $r = 1, 2, 3, \dots, n$ mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\psi_{1,2,3,\dots,n}$ und substituirt die erhaltenen Werthe von $1'_n, 2'_n, 3'_n, \dots, n'_n$ in den zweiten Theil der Gleichung (22), so findet man:

$$(26) \quad [1'_1 2'_2 3'_3 \dots n'_n] = \frac{1}{\varphi} [1_1 2_2 3_3 \dots n_n]$$

Man sieht hieraus, dass diese Determinante des transformirten Systemes aus der ursprünglichen $[1_1 2_2 3_3 \dots n_n]$ mittelst Division durch φ erhalten wird. Die Multiplicatorendeterminante $[p_1^1 p_2^2 p_3^3 \dots p_n^n]$ hat somit den Werth $\frac{1}{\varphi}$ und es ist einleuchtend, dass auf solche Weise der in den ursprünglichen Determinanten enthaltene grösste gemeinschaftliche Factor φ bei allen herausfällt und sonach die Determinanten des neuen Systemes keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen können. Es ist hiemit der Satz erwiesen, dass jeder in allen Determinanten D und K eines Systemes von Gleichungen erscheinende gemeinschaftliche Factor durch geeignete Transformation herausgeschafft werden könne, ohne den Coëfficienten und Constanten der Gleichungen gebrochene Werthe zu ertheilen.

Es ist für sich klar, dass die hier gebrauchte Form der Multiplicatoren auf unendlich viele verschiedene Weisen durch andere Formen ersetzt werden könne. Die für ein System von zwei Gleichungen in §. 6 gegebene Form der Multiplicatoren stimmt mit der hier gegebenen vollkommen überein.

Man kann ohne viele Schwierigkeit einsehen, dass die hier gelehrte Transformation, an einem Systeme von Gleichungen vorgenommen, dessen Determinanten D einen grössten gemeinschaftlichen Factor φ besitzen, der aber in den Grössen K fehlt, nicht mehr ausführbar sei, ohne einigen der Constanten $1'_k, 2'_k, \dots, n'_k$ der transformirten Gleichungen gebrochene Werthe zu ertheilen. In der That, denkt man sich die Multiplicatoren dermassen gewählt, dass ihre Determinante $[p_1^1 p_2^2 p_3^3 \dots p_n^n]$ gleich $\frac{1}{\varphi}$ wird, so werden die Determinanten D' und K' des transformirten Systemes zu den früheren in der Relation:

$$D' = \frac{D}{\varphi}, \quad K' = \frac{K}{\varphi}$$

stehen. Die erste dieser Divisionen lässt sich ausführen, weil die Grössen D den Factor φ besitzen und folglich erhalten alle Determinanten D' einen ganzen Zahlwerth; allein $\frac{K}{\varphi}$ ist ein wirklicher Bruch oder, deutlicher gesprochen, nicht alle Grössen K sind durch φ theilbar und demnach werden mindestens einige der Grössen K' im transformirten Systeme gebrochene Werthe erlangen. Nun geht aus den früheren Ergebnissen hervor, dass die Wahl der Multiplicatoren p stets so eingeleitet werden könne, dass alle Coëfficienten der transformirten Gleichungen ganze Werthe erlangen, weil für diese genau dieselben Umstände obwalten, wie früher. Nur die Constanten: $1'_k, 2'_k, 3'_k, \dots, n'_k$ machen hievon eine Ausnahme, und weil die aus ihnen gebildeten Grössen K', zum mindesten einige derselben gebrochene Werthe erlangen, so müssen die Zahlwerthe dieser Constanten oder wenigstens einiger derselben wirkliche Brüche sein. Es ist demnach die Ausführbarkeit der obigen Transformation an die Bedingung gebunden, dass der Factor φ gleichzeitig in allen Grössen D und K erscheint.

denen die (30) eine gewöhnliche unbestimmte Gleichung mit zwei Unbekannten vorstellt. Denkt man sich mit der Auflösung derselben den Anfang gemacht und den Werth von x_1' in die letzte Gleichung der (31) substituirt, so ist dieses System von n Gleichungen nur noch mit $m-1$ Unbekannten versehen. Durch das hier eingeschlagene Verfahren vermindert man daher in dem ursprünglichen Systeme von Gleichungen die Anzahl der Unbekannten von m auf $m-1$ und findet zur Bestimmung der herausgeschafften Unbekannten x_1 eine gewöhnliche unbestimmte Gleichung mit nur zwei Unbekannten.

Wir gehen nun daran, folgenden Satz zu erweisen: Wenn die Determinanten D des ursprünglichen Systemes keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen, der von Eins verschieden ist, so lassen sich die Multipliatoren p immer dermassen wählen, dass auch die Determinanten des transformirten Systemes (31), welche wir durch das Symbol D' anzeigen wollen, keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen; alle in ihnen erscheinenden Coëfficienten und Constanten ganze Werthe erhalten und die unbestimmte Gleichung (30) in ganzen Zahlen nach x_1' und x_1 aufgelöst werden kann.

Die Gleichungen (31) unterscheiden sich in ihren Coëfficienten von jenen (7) nur im gänzlichen Mangel der mit dem Stellenzeiger 1 versehenen Glieder. Ihre Determinanten sind somit von jenen des Systemes (7) nicht verschieden, nur mangeln alle mit dem Stellenzeiger 1 versehenen.

Zufolge der früher erwähnten Relation sind die Determinanten D' sämmtlich den correspondirenden Determinanten D des ursprünglichen Systemes proportional und gehen namentlich durch Multiplication derselben mit der Multipliatoren-Determinante P hervor. Bezeichnen wir, den grössten gemeinschaftlichen Theiler aller jener Determinanten D , welche keinen Stellenzeiger 1 aufweisen, d. h. nach dem Weglöschen aller durch das allgemeine Symbol $[1, 2, 3, 4, \dots, n]$ vorgestellten Determinanten aus der ursprünglichen Determinantengruppe übrig bleiben mit φ_1 : so werden offenbar die Determinanten D' des transformirten Systemes (336) den grössten gemeinschaftlichen Factor $\varphi_1 P$ besitzen, wenn $\varphi_1 P$ einen ganzen Zahlwerth erhält. Soll nun der oben aufgestellte Satz gültig sein, d. h. soll in den Determinanten dieses Systemes kein Factor gemeinschaftlich erscheinen, so muss:

$$(32) \quad \varphi_1 P = 1 \text{ also } P = \frac{1}{\varphi_1}$$

sein. Dass dies für ganze Werthe der Multipliatoren p niemals geschehen könne, ist für sich klar, weil dann auch P einen ganzen Zahlwerth erlangt. Also nur gebrochene Werthe und zwar zum mindesten einiger, wenn nicht aller Multipliatoren p , werden dieser Bedingung entsprechen können. Aber nicht alle gebrochenen Werthe p , welche dieser Bedingung (32) Genüge leisten, sind darum schon brauchbare Multipliatoren, denn im Allgemeinen sind dann auch alle oder doch die meisten der Coëfficienten $1'_a, 2'_a, \dots, n'_a; 1'_k, 2'_k, \dots, n'_k$ zufolge der Relation (8) gebrochene Zahlen und es werden demnach die beiden anderen Bedingungen unerfüllt bleiben.

Alle in den Gleichungen (31) erscheinenden Coëfficienten und Constanten sollen nämlich ganze Zahlen sein, so dass also von all diesen Grössen nur die folgenden: n'_m und n'_k gebrochene Werthe erlangen dürfen. Weil aber auch die unbestimmte Gleichung (30) durch ganze

alle durch φ_1 theilbar; folglich sind $n'_2, n'_3, \dots, n'_m$ sämmtlich mit ganzen Zahlwerthen versehen. Nur n'_1 und n'_k machen hievon eine Ausnahme. Man hat für $s=1$ der Gleichung (39) zufolge :

$$n'_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{\varphi_1} S \{ [1_1 2_{\pi_{n-2}} 3_{\pi_{n-3}} 4_{\pi_{n-4}} \dots (n-1)_{\pi_1} n_{\pi}] \theta_{\pi_{n-2}, \pi_{n-3}, \dots, \pi_1, \pi} \}$$

und mit Rücksicht auf die Relation (34), welche die Grössen $\theta_{\pi_{n-2}, \pi_{n-3}, \dots, \pi_1, \pi}$ zu erfüllen haben :

$$(40) \quad n'_1 = \frac{\phi_1}{\varphi_1} (-1)^{n-1}.$$

Hier ist nun unmittelbar ersichtlich, dass n'_1 ein wirklicher Bruch sei, weil ϕ_1 und φ_1 ihrer Bedeutung nach relative Primzahlen sind. In der That findet man diese zwei Zahlen auf folgende Weise: Man trennt die sämmtlichen Determinanten D des ursprünglich gegebenen Systemes in zwei Gruppen: in eine erste Gruppe, welche alle jene Determinanten in sich begreift, in denen ein Stellenzeiger 1 erscheint, und in eine zweite Gruppe, in welcher dieser Stellenzeiger 1 fehlt. Nun sucht man den grössten gemeinschaftlichen Theiler für jede dieser beiden Gruppen und findet so beziehungsweise ϕ_1 und φ_1 . Da nun in der completen Gruppe aller Determinanten D kein von Eins verschiedener Factor gemeinschaftlich erscheint, so können auch die grössten gemeinschaftlichen Divisoren ϕ_1 und φ_1 keinen von Eins verschiedenen Factor besitzen; ϕ_1 und φ_1 sind demnach relative Primzahlen und der Bruch $\frac{\phi_1}{\varphi_1}$ kann nicht weiter abgekürzt werden.

Gleiches gilt von n'_k , gegeben durch die Formel:

$$(41) \quad n'_k = \frac{(-1)^{n-1}}{\varphi_1} S [1_k 2_{\pi_{n-2}} 3_{\pi_{n-3}} 4_{\pi_{n-4}} \dots (n-1)_{\pi_1} n_{\pi}] \theta_{\pi_{n-2}, \pi_{n-3}, \dots, \pi_1, \pi}$$

Auch hier lässt sich die Division durch φ_1 wenigstens in den meisten Fällen nicht ausführen.

Fasst man nun das bisher Abgeleitete zusammen, so überzeugt man sich, dass in den transformirten Gleichungen alle Coëfficienten und Constanten ganze Zahlwerthe erlangen mit Ausnahme der zwei: n'_1 und n'_k , welche beide (oder wenigstens die erste derselben) Brüche sind mit dem Nenner φ_1 .

Wir schreiten nun zum Beweise, dass die Determinanten des neuen Systemes (31) keinen von Eins verschiedenen Factor besitzen. Dies darzuthun gelingt am einfachsten durch Betrachtung der Werthe (36) und (40). Da alle in (36) aufgeführten Coëfficienten Nullwerthe erhalten, mit Ausnahme der letzten Diagonalreihe, so folgt, dass die aus den ersten n Verticalreihen der Coëfficienten des transformirten Systemes gebildete Determinante:

$$[1'_1 2'_2 3'_3 4'_4 \dots (n-1)'_{n-1} n'_n] = 1'_n \cdot 2'_{n-1} \cdot 3'_{n-2} \cdot 4'_{n-3} \dots (n-1)'_2 \cdot n'_1$$

sei. Substituirt man nun in den zweiten Theil dieser Gleichung die gefundenen Werthe (36) und (40), so erhält man:

$$(42) \quad [1'_1 2'_2 3'_3 4'_4 \dots (n-1)'_{n-1} n'_n] = \pm \frac{[1_1 2_2 3_3 \dots (n-1)_{n-1} n_n]}{\varphi_1}.$$

Diese zwischen zwei correspondirenden Determinanten des ursprünglichen und des neuen Systemes stattfindende Relation ist auch für alle übrigen Determinanten giltig und überzeugt uns, dass die Multiplicatorendeterminante $P = \pm \frac{1}{\varphi_1}$ ist. Der in den ursprünglichen vom Stellenzeiger 1 freien Determinanten D erscheinende grösste gemeinschaftliche Factor φ_1 fällt

$\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{m-n}$. Hier bedeutet φ_1 den grössten gemeinschaftlichen Theiler aller vom Stellenzeiger 1 freien Determinanten, $\varphi_1 \varphi_2$ ist der grösste gemeinschaftliche Factor aller von den zwei Stellenzeigern: 1, 2 freien Determinanten, $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ ist der grösste gemeinschaftliche Factor aller von den drei Stellenzeigern: 1, 2, 3 freien Determinanten, endlich $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \dots \varphi_{m-n}$ ist der grösste gemeinschaftliche Factor der von den Stellenzeigern 1, 2, 3, $\dots, m-n$ freien Determinanten. Da aber nur eine einzige solche besteht, nämlich die:

$$[(m-n+1)_1 (m-n+2)_2 (m-n+3)_3 \dots m_n]$$

so ist diese eben der Werth des Productes $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \dots \varphi_{m-n}$.

Bei den wiederholten Transformationen geht diese Determinante über in andere, die durch Division durch $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-n}$ hervorgehen, und nach der allerletzten Transformation ist sie geworden:

$$\frac{[(m-n+1)_1 (m-n+2)_2 \dots m_n]}{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{m-n}} = 1$$

Das zuletzt erhaltene System von n Gleichungen mit n Unbekannten:

$$(46) \quad \begin{aligned} 1_{m-n+1}^{(m-n)} x_{m-n+1} + 1_{m-n+2}^{(m-n)} x_{m-n+2} + \dots + 1_m^{(m-n)} x_m &= 1_k^{(m-n)} \\ 2_{m-n+1}^{(m-n)} x_{m-n+1} + 2_{m-n+2}^{(m-n)} x_{m-n+2} + \dots + 2_m^{(m-n)} x_m &= 2_k^{(m-n)} \\ \dots &\dots \\ n_{m-n+1}^{(m-n)} x_{m-n+1} + n_{m-n+2}^{(m-n)} x_{m-n+2} + \dots + n_m^{(m-n)} x_m &= n_k^{(m-n)} \end{aligned}$$

besitzt demnach die Determinante Eins und liefert folglich lauter ganze Werthe der Unbekannten:

$$x_{m-n+1}, x_{m-n+2}, \dots, x_m$$

Da nun auch die übrigen Unbekannten:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-n}$$

deren Werthe aus gewöhnlichen unbestimmten Gleichungen mit nur zwei Unbekannten, oder, wenn man will, aus Congruenzen des ersten Grades mit je einer einzigen Unbekannten hervorgehen, gleichfalls ganz sind, so ist der früher aufgestellte Satz bewiesen, dass jedes System von unbestimmten Gleichungen, dessen Determinanten D keinen Factor gemeinschaftlich besitzen, ganze Auflösungen zulasse.

Die Auflöslichkeit eines Systemes von Gleichungen in ganzen Zahlen besteht aber auch dann noch, wenn die Determinanten D einen von Eins verschiedenen Factor φ gemeinschaftlich besitzen, derselbe jedoch auch in allen Grössen K erscheint, denn in diesem Falle kann man nach der in §. 33 auseinandergesetzten Methode alle Determinanten D und Grössen K von diesem Factor φ befreien und gewinnt so ein äquivalentes System, das dem eben Bewiesenen zufolge ganze Auflösungen besitzt.

Erscheint aber in den Determinanten D des Systemes ein Factor φ_k gemeinschaftlich, der nicht in allen Grössen K erscheint, so bestehen keine ganzen, sondern nur gebrochene Auflösungen, und wenn φ_k das Product aller in D erscheinenden, aber in K fehlenden Factoren ist, so stellt φ_k zugleich den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner der Werthe der Unbekannten vor, welcher überhaupt möglich ist. Man kann sich hiervon sehr leicht auf folgende Weise überzeugen. Man transformire vermittelst des in §. 33 angegebenen Verfahrens das vorgelegte System, so dass die Determinanten D von dem in ihnen erscheinenden Factor φ_k befreit werden.

Die Coëfficienten der transformirten Gleichungen werden sämmtlich ganze Zahlwerthe, aber die Constanten: $1'_k, 2'_k, \dots, n'_k$ entweder alle, oder doch wenigstens einige derselben gebrochene Werthe erhalten, weil auch die Grössen K gebrochen sind. Diesem Systeme nun kann man offenbar durch keine ganzen Zahlwerthe der Unbekannten mehr genügen, sondern nur durch gebrochene und namentlich mit dem gemeinschaftlichen Nenner φ versehene. Dass aber solche Brüche wirklich Genüge leisten, erhellt augenblicklich, wenn man statt der Unbekannten $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ neue einführt:

$$\frac{r_1}{\varphi_k}, \frac{r_2}{\varphi_k}, \frac{r_3}{\varphi_k}, \dots, \frac{r_m}{\varphi_k}$$

Befreit man vom Nenner φ_k , so erhalten alle Constanten $1_k, 2_k, 3_k, \dots, n_k$ den Factor φ_k und folglich auch die Grössen K . Es erscheinen somit alle gemeinschaftlichen Factoren der Determinanten D auch in den Grössen K und demnach verstatet dieses neue System ganze Zahlwerthe der Grössen $r_1, r_2, r_3, \dots, r_m$.

Hieraus lässt sich folgender allgemeine Satz zur Beurtheilung des Bestehens oder Nichtbestehens ganzer Auflösungen ableiten.

Wenn die Determinanten D eines Systemes von beliebig vielen unbestimmten Gleichungen einen grössten gemeinschaftlichen Factor f besitzen, in den Determinanten D und Grössen K zusammengenommen aber nur der gemeinschaftliche Factor F erscheint, so entscheidet der Werth des Quotienten $\frac{f}{F} = \varphi_k$, welcher immer eine ganze Zahl ist, über das Bestehen ganzer oder gebrochener Auflösungen. Ist der Werth dieses Quotienten gleich Eins, so sind ganze Auflösungen wirklich vorhanden; ist hingegen sein Werth von Eins verschieden und gleich $\mathfrak{N}$, so bestehen keine ganzen Auflösungen, sondern nur gebrochene, und $\mathfrak{N}$ ist der kleinste zulässige gemeinschaftliche Nenner dieser Brüche.

§. 30.

II. Über das Aufsuchen einer speciellen Auflöſung.

Mit der hier angegebenen Transformation ist nicht blos die Frage über das Bestehen oder Nichtbestehen ganzer Auflösungen, sondern überhaupt das Problem der wirklichen Auflösung vollständig erledigt. Sie zerlegt das ursprünglich gegebene System so zu sagen in seine Elemente, nämlich erstens in eine Reihe von gewöhnlichen unbestimmten Gleichungen oder Congruenzen des ersten Grades, welche zur Bestimmung der $m - n$ überschüssigen Unbekannten: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-n}$ und der Hilfsgrössen $x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_{m-n}$ dienen und zweitens in ein System von n bestimmten Gleichungen, welche die Werthe der übrigen Unbekannten: $x_{m-n+1}, x_{m-n+2}, \dots, x_m$ liefern. Wenn aber auch hiemit von theoretischer Seite das Problem als vollständig gelöst erscheint, so bleiben dennoch die Anforderungen des praktischen Rechnens noch unbefriedigt, da die bisher gegebenen Formeln keine bequeme Anwendung verstaten. Diesem Gesichtspunkte entsprechend werden wir die Formeln umstalten, wobei wieder das einfache bereits erledigte Problem von nur zwei Gleichungen als Richtschnur dienen wird.

Hier stellen wir uns die Aufgabe, die früher durch Wiederholung eines und desselben Transformations-Verfahrens abgeleiteten Gleichungen jetzt direct aus dem ursprünglichen

$$(53) \quad \begin{matrix} 1_{\rho+1}' & , & 1_{\rho+2}' & , & 1_{\rho+3}' & , & \dots & 1_m' \\ 2_{\rho+1}' & , & 2_{\rho+2}' & , & 2_{\rho+3}' & , & \dots & 2_m' \\ 3_{\rho+1}' & , & 3_{\rho+2}' & , & 3_{\rho+3}' & , & \dots & 3_m' \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ n_{\rho+1}' & , & n_{\rho+2}' & , & n_{\rho+3}' & , & \dots & n_m' \end{matrix}$$

ganze Zahlwerthe erlangen; drittens: dass die aus diesen Coëfficienten gebildeten Determinanten keinen von Eins verschiedenen Factor gemeinschaftlich besitzen, und endlich viertens dass auch die hervorgehende unbestimmte Gleichung ganze Auflösungen verstattet.

Um diesen Beweis herzustellen, noch mehr aber, um den hier beabsichtigten Zweck der independenten Bestimmung der in den abgeleiteten Gleichungen erscheinenden Grössen zu erreichen, bilden wir den allgemeinen Coëfficienten r' der transformirten Gleichung mit Hilfe der Formel:

$$r'_s = 1_s p_r^1 + 2_s p_r^2 + 3_s p_r^3 + \dots + n_s p_r^n = S[a_s p_r^a].$$

Durch Substitution des Werthes p_r^a folgt:

$$r'_s = \frac{1}{\varphi \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \dots \varphi_{\rho-1} \cdot \psi_\rho \cdot \psi_{\rho, \rho+1} \dots \psi_{\rho, \dots, \rho+n-r-1}} S\{(-1)^{a+r} \cdot a_s [1_\rho 2_{\rho+1} 3_{\rho+2} \dots (a-1)_{\rho+a-2} \times \\ \times (a+1)_{\rho+a-1} \dots (n-r+2)_{n+\rho-r-1} (n-r+2)_{\varepsilon_{r-2}} \dots n_\varepsilon] \theta_{\varepsilon_{r-3}, \dots, \varepsilon}\}.$$

Mit Hilfe der Formel (16) lässt sich hier die Summirung nach a sogleich bewerkstelligen und liefert:

$$(54) \quad r'_s = \frac{(-1)^{s-1}}{\varphi \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \dots \varphi_{\rho-1} \cdot \psi_\rho \cdot \psi_{\rho, \rho+1} \dots \psi_{\rho, \dots, \rho+n-r-1}} S\{[1_s 2_\rho 3_{\rho+1} 4_{\rho+2} \dots \times \\ \times (n-r+1)_{n+\rho-r-1} (n-r+2)_{\varepsilon_{r-2}} \dots n_\varepsilon] \theta_{\varepsilon_{r-2}, \dots, \varepsilon}\}.$$

Diese Formel ist geeignet, die Coëfficienten und Constanten der transformirten Gleichungen zu liefern, mit Ausnahme der letzten derselben. Um n'_s auszudrücken, muss man die andere Formel anwenden:

$$(55) \quad n'_s = \frac{(-1)^{n-1}}{\varphi \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \dots \varphi_{\rho-1} \cdot \varphi_\rho} S\{[1_s 2_{\pi_{n-2}} 3_{\pi_{n-3}} 4_{\pi_{n-4}} \dots (n-1)_{\pi_1} n_\pi] \theta_{\pi_{n-2}, \pi_{n-3}, \dots, \pi_1, \pi}\}.$$

Diese beiden Formeln führen nun zu folgenden Schlüssen: Erstens: wenn s in der Reihe der Zahlen: $\rho, \rho+1, \rho+2, \dots, \rho+n-r-1$ enthalten ist, verschwindet r'_s , weil in allen unter den Summenzeichen vorkommenden Determinanten derselbe Stellenzeiger zweimal erscheint und alle solchen Determinanten einer bekannten Eigenschaft zufolge identisch gleich Null sind. Hieraus geht hervor, dass folgende Coëfficienten der transformirten Gleichungen verschwinden:

$$(56) \quad \begin{matrix} 1'_\rho, & 1'_{\rho+1}, & 1'_{\rho+2}, & \dots & \dots & \dots & 1'_{\rho+n-2} \\ 2'_\rho, & 2'_{\rho+1}, & 2'_{\rho+2}, & \dots & \dots & \dots & 2'_{\rho+n-3} \\ 3'_\rho, & 3'_{\rho+1}, & 3'_{\rho+2}, & \dots & \dots & \dots & 3'_{\rho+n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)'_\rho \end{matrix}$$

$$(65) \quad \varphi_\rho x'_\rho + (-1)^{\rho-1} \phi_\rho \cdot x_\rho = \frac{A_k^{(\rho)} - A_1^{(\rho)} x_1 - A_2^{(\rho)} x_2 - \dots - A_{\rho-1}^{(\rho)} x_{\rho-1}}{\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \dots \cdot \varphi_{\rho-1}} .$$

Um nun zu zeigen, dass diese unbestimmte Gleichung ganze Auflösungen besitze, wäre es nothwendig, den Beweis herzustellen, dass der im zweiten Theile erscheinende Bruch durch eine zweckmässige Wahl der Grössen $x_1, x_2, \dots, x_{\rho-1}$ sich in eine ganze Zahl verwandelt. Wir können aber hier diese Beweisführung übergehen, da die früheren Untersuchungen diese Behauptung als richtig dargethan haben.

Bei dem früher geführten Beweise, dass eine jede Gleichung, deren Determinanten D keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen, der nicht auch in allen Grössen K vorhanden wäre, ganze Auflösungen besitzt, gelangten wir Schritt für Schritt zur Überzeugung, dass der im zweiten Theile der unbestimmten Gleichungen erscheinende Ausdruck sich in eine ganze Zahl verwandelt, wenn man die Werthe der bereits ermittelten Hilfsgrössen $x'_1, x'_2, x'_3, \dots$ hineinsetzt. Hier erscheinen im zweiten Theile der Gleichungen statt dieser Hilfsgrössen die ursprünglichen Unbekannten und aus diesem Grunde ist die Beweisführung erschwert. Aber die früher gewonnenen Ergebnisse genügen hier. In der That wurde früher erwiesen, dass das ursprüngliche System für ganze Zahlwerthe der Unbekannten erfüllt werden könne. Die hier ausgeübte Transformation liefert aber ein vollkommen gleichgeltendes System, indem die Determinanten von Null verschieden ausfallen, wie an der einen gebildeten Determinante (60) sich zeigte. Demnach muss dieses System erfüllt werden, wenn man statt der Unbekannten und der Hilfsgrössen jene ganzen Zahlwerthe setzt, welche das ursprüngliche System erfüllen, und folglich muss für diese Werthe auch die Gleichung (61) und die daraus abgeleitete (65) sich in eine identische verwandeln. Für ganze Werthe von x'_ρ und x_ρ aber verwandelt sich der erste Theil der Gleichung (65) in eine ganze Zahl, folglich muss sich auch der zweite Theil in eine ganze Zahl verwandeln, wenn man die Grössen $x_1, x_2, \dots, x_{\rho-1}$ durch geeignete und ganze Zahlwerthe ersetzt. Solche bestehen immer. Sobald aber der zweite Theil dieser Gleichung eine ganze Zahl ist, gleichgiltig welche, ist dieselbe in ganzen Zahlen auflöslich, weil φ_ρ und ϕ_ρ relative Primzahlen sind. Dies wird genügen, um sich zu überzeugen, dass die Multiplificatoren (48) mit einem einzigen Schritte gerade dorthin führen, wohin früher eine ρ malige Transformation geführt hat.

§. 31.

Die gewonnenen Formeln, in denen die willkürliche Zahl ρ erscheint, sind sehr bequem, um unmittelbar die Reihe von unbestimmten Gleichungen hinzustellen, wie sie durch die früher erörterte Transformation sich der Reihe nach ergeben. Man braucht nur statt der Zahl ρ der Reihe nach 1, 2, 3, . . . $n-n$ zu setzen. Die Reihe der unbestimmten Gleichungen ist demnach folgende:

$$(66) \quad \begin{aligned} \varphi_1 x'_1 + (-1)^{1-1} \phi_1 \cdot x_1 &= A_k' \\ \varphi_2 x'_2 + (-1)^{2-1} \phi_2 \cdot x_2 &= \frac{1}{\varphi_1} [A_k'' - A_1'' x_1] \\ \varphi_3 x'_3 + (-1)^{3-1} \phi_3 \cdot x_3 &= \frac{1}{\varphi_1 \varphi_2} [A_k''' - A_1''' x_1 - A_2''' x_2] \\ &\dots \end{aligned}$$

Diese Summen beziehen sich auf die Stellenzeiger π und sind auf alle jene Werthe derselben auszudehnen, die sich durch ein einfaches combinatorisches Verfahren aus den Zahlen:

$$\rho + 1, \rho + 2, \rho + 3 \dots \dots m - 1, m$$

ableiten lassen, indem man der Reihe nach alle möglichen Combinationen zu $n - 1$ Elementen bildet. Jede solche Combination gibt durch die Werthe ihrer Elemente eine Zusammenstellung für die Stellenzeiger $\pi_{n-2}, \pi_{n-3}, \pi_{n-4}, \dots, \pi_1, \pi$ an und die obigen Summen vereinigen in sich alle diese Combinationen. Man kann noch eine andere und vielleicht einfachere Regel zur Bildung obiger Summen angeben.

Man bilde aus den Zahlen:

$$\rho, \rho + 1, \rho + 2, \rho + 3 \dots \dots m - 1, m$$

alle möglichen Combinationen von n Elementen, ersetze aber hinterher das erste Element ρ durch den Stellenzeiger s von A_s und betrachte nun jede solche Combination als die Reihe der Stellenzeiger in der Determinante:

$$[1_s \ 2_{\pi_{n-2}} \ 3_{\pi_{n-3}} \ \dots \ (n-1)_{\pi_1} \ \theta_{\pi}].$$

Jede dieser Determinanten ist mit einer gewissen Zahl θ zu multipliciren und hierauf die Summe aller dieser Producte zu bilden. Das Endresultat dieser Rechnung ist der Werth der Summe, die in A_s erscheint. Um die Grösse θ zu finden, hat man sich an die letzte der Bedingungsgleichungen (51) zu wenden, die durch dasselbe combinatorische Verfahren erhalten wird, wenn man nur in den Combinationen das erste Element ρ ungeändert lässt. Diese Gleichung wird in ganzen Zahlen aufgelöst und so die Werthe von θ gefunden, die in den Formeln (68) erscheinen.

Die entwickelten Formeln (66) (67) (68) und die letzte der Bedingungsgleichungen (51) eignen sich nun alsogleich für die wirkliche Rechnung. Sind sie einmal gebildet, so unterliegt die Bestimmung der Unbekannten keinerlei Schwierigkeit mehr, denn man hat nur gewöhnliche Congruenzen des ersten Grades mit einer einzigen Unbekannten aufzulösen. Man beginnt mit der Bestimmung von x_1 , mit Hilfe der ersten Congruenz in (66). Den gefundenen Werth substituirt man nun in allen Formeln (66) und (67) und kann jetzt aus der zweiten (66) unmittelbar x_2 finden und abermals seinen Werth in die übrigen Gleichungen setzen. In solcher Weise löst man der Reihe nach die Congruenzen (66) auf und wenn dies beendigt ist, geben die Gleichungen (67) unmittelbar die Werthe der übrigen Unbekannten.

Wir wollen nur noch über die Aufstellung dieser Formeln einige Worte sagen. Die Rechnung hat zu beginnen mit der Bildung der Determinanten D und Grössen K des Systemes. Aus diesen sind hierauf die verschiedenen mit $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots$ und ψ_1, ψ_2, ψ_3 bezeichneten Grössen zu suchen. Ferner hat man dann die letzte der Bedingungsgleichungen (51) aufzustellen und die Werthe der Grössen θ und vermittelst dieser die Werthe der Grössen A (68) zu rechnen. Sind diese Vorrechnungen beendigt, so lassen sich die Congruenzen (66) und Gleichungen (67) ohne Schwierigkeit bilden. Bezüglich des mechanischen Theiles der Rechnung lassen sich ähnliche Hilfsmittel und Abkürzungen anwenden, wie bei dem ausführlich behandelten Probleme von nur zwei Gleichungen. Hier ist uns nicht mehr gestattet, näher in diese Details einzugehen. Der Leser wird sich diese Lücke leicht selber completiren können.

§. 32.

III. Über das Aufstellen der allgemeinen Formel, welche alle möglichen ganzen Auflösungen enthält.

Die im Vorhergehenden entwickelten Formeln (66) und (67) verstatten nicht blos das Aufsuchen einer speciellen Auflösung des Systemes in ganzen Zahlen, sondern eignen sich auch zur Auffindung jener allgemeinen Formel, welche willkürliche ganze Zahlen in sich schliesst, und alle möglichen ganzen Auflösungen des vorgelegten Systemes in der compendiösesten Form darstellt. In §. 2 wurde diese allgemeine Form der Auflösungen bereits aufgestellt und ist in dem gegenwärtigen Falle folgende:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{1}{N} [\overset{0}{r}_1 + \overset{1}{r}_1 \xi_1] \\
 x_2 &= \frac{1}{N} [\overset{0}{r}_2 + \overset{1}{r}_2 \xi_1 + \overset{2}{r}_2 \xi_2] \\
 x_3 &= \frac{1}{N} [\overset{0}{r}_3 + \overset{1}{r}_3 \xi_1 + \overset{2}{r}_3 \xi_2 + \overset{3}{r}_3 \xi_3] \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 (69) \quad x_{m-n} &= \frac{1}{N} [\overset{0}{r}_{m-n} + \overset{1}{r}_{m-n} \xi_1 + \overset{2}{r}_{m-n} \xi_2 + \overset{3}{r}_{m-n} \xi_3 + \dots + \overset{m-n}{r}_{m-n} \xi_{m-n}] \\
 x_{m-n+1} &= \frac{1}{N} [\overset{0}{r}_{m-n+1} + \overset{1}{r}_{m-n+1} \xi_1 + \overset{2}{r}_{m-n+1} \xi_2 + \overset{3}{r}_{m-n+1} \xi_3 + \dots + \overset{m-n}{r}_{m-n+1} \xi_{m-n}] \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 x_m &= \frac{1}{N} [\overset{0}{r}_m + \overset{1}{r}_m \xi_1 + \overset{2}{r}_m \xi_2 + \overset{3}{r}_m \xi_3 + \dots + \overset{m-n}{r}_m \xi_{m-n}].
 \end{aligned}$$

Wenn ganze Auflösungen gesucht werden, hat man $N = 1$ zu setzen.

Um die Formeln (66) und (67) für den hier beabsichtigten Zweck anzupassen, hat man statt der Unbekannten $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ und der Hilfsgrössen $x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_{m-n}$ die Brüche zu substituieren:

$$\frac{r_1}{\mathfrak{R}}, \frac{r_2}{\mathfrak{R}}, \frac{r_3}{\mathfrak{R}}, \dots, \frac{r_m}{\mathfrak{R}} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{R}}, \frac{\mathfrak{r}_2}{\mathfrak{R}}, \frac{\mathfrak{r}_3}{\mathfrak{R}}, \dots, \frac{\mathfrak{r}_{m-n}}{\mathfrak{R}}.$$

oder mit anderen Worten, den Grössen $A'_k, A''_k, \dots, A_k^{(m-n)}$ in (66) und den Determinanten $[1_k 2_{m-n+2} \dots n_m]$, $[1_k 2_{m-n+1} 3_{m-n+3} \dots n_m]$, $[1_k 2_{m-n+1} \dots n_{m-1}]$ in den Gleichungen (67) den Factor $\mathfrak{R}$ noch anzufügen, hingegen die x und x'_1 in r und $\mathfrak{r}$ zu verwandeln. Man erhält, auf diese Weise verfabrend, die nachfolgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 \mathfrak{r}_1 + (-1)^{n-1} \varphi_1 \cdot r_1 &= \dots A'_k \mathfrak{R} \\
 \varphi_2 \mathfrak{r}_2 + (-1)^{n-1} \varphi_2 \cdot r_2 &= \frac{1}{\varphi_1} [A''_k \mathfrak{R} - A''_1 r_1] \\
 (70) \quad \varphi_3 \mathfrak{r}_3 + (-1)^{n-1} \varphi_3 \cdot r_3 &= \frac{1}{\varphi_1 \varphi_2} [A'''_k \mathfrak{R} - A'''_1 r_1 - A'''_2 r_2] \\
 &\dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

$$\varphi_{m-n} x_{m-n} + (-1)^{n-1} \psi_{m-n} \cdot x_{m-n} = \frac{1}{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{m-n-1}} \left[A_k \mathfrak{N} - A_1 x_1 - A_2 x_2 - \dots - A_{m-n+1} x_{m-n+1} \right].$$

$$x_{m-n+1} = \frac{1}{[1_{m-n+1} 2_{m-n+2} \dots n_m]} \{ [1_k 2_{m-n+2} \dots n_m] \mathfrak{N} - [1_1 2_{m-n+2} \dots n_m] x_1 - \dots - [1_{m-n} 2_{m-n+2} \dots n_m] x_{m-n} \}$$

$$(71) \quad x_{m-n+2} = \frac{-1}{[1_{m-n+1} 2_{m-n+2} \dots n_m]} \{ [1_k 2_{m-n+1} 3_{m-n+3} \dots n_m] \mathfrak{N} - [1_1 2_{m-n+1} 3_{m-n+3} \dots n_m] x_1 - \dots - [1_{m-n} 2_{m-n+1} 3_{m-n+3} \dots n_m] x_{m-n} \}$$

.

$$x_m = \frac{(-1)^{n-1}}{[1_{m-n+1} 2_{m-n+2} \dots n_m]} \{ [1_k 2_{m-n+1} \dots n_{m-1}] \mathfrak{N} - [1_1 2_{m-n+1} \dots n_{m-1}] x_1 - \dots - [1_{m-n} 2_{m-n+1} \dots n_{m-1}] x_{m-n} \}.$$

In dieser Gestalt sind die Formeln geeignet, die in der (69) erscheinenden Grössen $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$ u. s. w. zu bestimmen. Man erhält jede Verticalreihe von Coëfficienten oder Constanten in der (69) für sich durch eine gesonderte Auflösung dieser Congruenzen und Gleichungen. Die in der ersten Verticalreihe erscheinenden Grössen $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$ stellen eine specielle Auflösung des vorgelegten unbestimmten Systemes in ganzen Zahlen vor. Man erhält sie aus den Congruenzen (70) und Gleichungen (71), wenn man $\mathfrak{N} = 1$ setzt. Dabei thut man gut, die numerisch kleinsten Werthe von $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m-n}^0$ zu suchen, um die Rechnungen nicht unnützer Weise zu compliciren. Die zweite Verticalreihe von Grössen in (69) nämlich: $x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_m^1$ erhält man vermittelst der Annahme $\mathfrak{N} = 0$, wenn man noch überdies dem x_1^1 den numerisch kleinsten und von Null verschiedenen Werth φ_1 ertheilt, dessen diese Grösse für $\mathfrak{N} = 0$ fähig ist, zufolge der ersten Congruenz in (70).

Die dritte Verticalreihe von Grössen: $x_1^2, x_3^2, \dots, x_m^2$ geht gleichfalls aus (70) und (71) hervor, wenn man von der Anfangssubstitution $\mathfrak{N} = 0, x = 0$ ausgeht und $x_2 = \varphi_2$ setzt, wodurch die zwei ersten Congruenzen in (70) sich in identische verwandeln. Allgemein findet man die Grössen $x_r^r, x_{r+1}^r, x_{r+2}^r, \dots, x_m^r$, wenn man von den Anfangssubstitutionen $\mathfrak{N} = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, \dots, x_{r-1} = 0$ ausgeht, wodurch mehrere Congruenzen (70) am Anfange stehend, identisch erfüllt werden. Aus den übrigen folgen die Werthe der gesuchten Grössen, wenn man für x_r^r den numerisch kleinsten von Null verschiedenen Werth φ_r annimmt.

Hat man alle in der Formel (69) erscheinenden Grössen ermittelt, so unterliegt ihre Aufstellung keiner weiteren Schwierigkeit mehr.

Hiemit ist also das Problem der Auflösung eines Systemes von mehreren unbestimmten Gleichungen mit einer beliebig grossen (selbst einer unendlichen) Anzahl von Unbekannten, sowohl in ganzen Zahlen als in gebrochenen Werthen mit einem bestimmten Nenner N vollständig erledigt. Die auseinandergesetzte Methode ist auch anwendbar, um ein System von mehreren Congruenzen des ersten Grades mit einer beliebig grossen Anzahl von Unbekannten und völlig beliebigen Modulis aufzulösen, und somit ist das von Gauss behandelte Problem (Disquisitiones arithmeticae pag. 26—30) hier in einer viel allgemeineren und vollkommeneren Weise erledigt.

Anhang.

Es wäre hier noch ein Ausnahmefall zu besprechen, der sich bisweilen darbieten kann, nämlich derjenige, wo einzelne oder eine Gruppe von mehreren Determinanten gleich Null werden. Die Behandlung eines solchen Systemes ist verschieden, je nachdem alle Determinanten gleich Null werden, oder einige derselben noch von Null differiren. Sind alle Determinanten Null, so ist das System entweder widersprechend oder enthält eine oder mehrere Gleichungen, die von den übrigen nicht verschieden sind. Diese Frage entscheiden die Werthe der Grössen K in bekannter Weise. Ist unter diesen Grössen K nur eine einzige von Null verschieden, so enthalten die Gleichungen einen Widerspruch; sind sie aber alle gleich Null, so erscheint im Systeme eine Gleichung wiederholt. Man wird daher diese eine Gleichung wegstreichen und die übrigen $n - 1$ Gleichungen zur Auflösung bringen.

Sind nicht alle, sondern nur einige Determinanten gleich Null, so folgt hieraus meistens gar keine Störung der Rechnung, nur wenn $[1_{m-n+1}, 2_{m-n+2} \dots n_m]$ verschwindet, ist dies als ein Beweis anzusehen, dass die Unbekannte x_m durch das System nicht bestimmt sei und daher auch die Rolle der abhängigen Veränderlichen nicht übernehmen könne. Man wird daher genöthigt sein x_m als eine der überschüssigen Unbekannten gelten zu lassen, welche gewissermassen die Rolle der unabhängigen Veränderlichen spielen. Hat man diese Änderung in der Reihenfolge der Unbekannten getroffen, so unterliegt die weitere Rechnung keiner Störung mehr.