ANWENDUNG

DES

SOGENANNTEN VARIATIONSCALCUL'S

AUF ZWEIFACHE UND DREIFACHE INTEGRALE.

VON

DR. G. W. STRAUCH.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 24. JULI 1856.

Einleitung.

§. 1.

Der Zustand, in welchem vor ungefähr zwanzig Jahren die Anwendung des (sogenannten) Variationscalcul's auf zweifache, dreifache etc. Integrale sich befand, hat die Pariser Akademie der Wissenschaften bewogen, diesen Gegenstand zu einer Preisfrage für das Jahr 1842 zu machen[1], damit endlich auch die letzte Partie des höchsten Zweiges der Analysis zu einer gewissen Stufe der Vollendung erhoben werde. Die Forderung, welche gestellt wurde, war: „Man soll die Gränzgleichungen herstellen, die mit den Hauptgleichungen verbunden werden müssen, um die Maxima und Minima der vielfachen Integrale vollständig zu bestimmen, und nebstdem soll man praktische Anwendungen geben, die sich auf dreifache Integrale beziehen". In dieser Forderung besteht jedoch nur die erste Hälfte dessen, was der Gegenstand eigentlich erheischt; denn die zweite, eben so wichtige und bei weitem schwierigere, Hälfte ist die Herstellung des Prüfungsmittels, d. h. jenes Ausdruckes, welcher die Merkmale abgibt, ob ein Maximum oder Minimum oder keines von beiden stattfindet. Der Grund aber, warum die genannte Akademie nicht die vollständige Erledigung des Gegenstandes verlangt hat, scheint wohl der gewesen zu sein, dass man fürchtete, es möge bei Anhäufung von so viel feinen Untersuchungen keine Abhandlung eingesendet werden.

Aus dem in der Sitzung vom 31. Juli 1843 erstatteten Berichte geht hervor, dass vor Ablauf des Termins vier Abhandlungen eingetroffen waren, von denen aber nur zwei einer

[1] „Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences" Band XIII, Seite 1176. Auch Band XV, S. 1142 u. 1143

besonderen Auszeichnung würdig gefunden worden sind[1]. Die eine derselben war von Sarrus, und wurde gekrönt[2]; die andere war von Delaunay, und wurde einer Ehrenmeldung theilhaftig[3].

Herr Delaunay machte seine Abhandlung sofort bekannt; denn er liess sie aufnehmen in den mit der Jahreszahl 1843 versehenen Band XVII des „Journal de l'école royale polytechnique" (Seite 37—120) unter dem Titel „Mémoire sur le calcul des variations". Dagegen die Veröffentlichung der, obgleich gekrönten, Abhandlung des Herrn Sarrus wurde lange hinausgeschoben; und sie erschien erst in dem mit der Jahreszahl 1848 versehenen Bande X der „Mémoires présentes par divers savants à l' académie des sciences" (Seite 1 bis 128) unter dem Titel „Recherches sur le calcul des variations".

Indessen hatte Herr Cauchy, welchem die Sarrus'sche Abhandlung im Manuscript bekannt geworden war[4], schon in dem mit der Jahreszahl 1844 versehenen Bande III seiner „Exercices d' analyse et de physique mathématique" (Seite 50—130) unter dem Titel „Mémoire sur le calcul des variations" eine Abhandlung bekannt gemacht, in welcher er bezweckte, die Theorie des (sogenannten) Variationscalcul's an seine bereits mit so grossem Beifalle aufgenommene Theorie des Differentialcalcul's anzureihen, zugleich aber auch die von Sarrus mitgetheilten Formeln auf concisere Weise darzustellen.

Nun aber sind die Resultate der genannten drei Abhandlungen nicht einmal im Stande, der von der Pariser Akademie gestellten einfachen Forderung zu genügen[5]; und so habe ich mich entschlossen, diesem so wichtigen Zweige der Analysis eine neue Bearbeitung zu widmen.

§. 2.

Es wäre überflüssig, hier, in der letzten Partie des (sogenannten) Variationscalcul's, die Grundlage desselben noch einmal vorzutragen, weil diese bereits in den vorhergehenden Partien abgefertigt sein muss. Desshalb sollen hier auch nur Resultate mitgetheilt werden, und dabei genügt es vollständig, wenn man sich auf die zweifachen und dreifachen Integrale beschränkt. Hat man nämlich die zweifachen Integrale gründlich abgehandelt, so kann man das dabei angewendete Verfahren sofort auch auf die dreifachen Integrale ausdehnen; und von da an hat die weitere Ausdehnung auf vierfache, fünffache etc. Integrale keinen Anstand mehr.

Im ersten Bande (Seite 70 und 71) meines Werkes „Theorie und Anwendung des sogenannten Variationscalcul's. Zürich 1849" habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass die Worte „Variation, variabler Bestandtheil, etc." in den früheren Zweigen der Analysis schon auf andere Weise verwendet seien, und dass, um Begriffsverwirrungen zu vermeiden, die durch die neuen Bezeichnungen δy, $\delta^2 y$, etc. dargestellten Begriffe mit einem noch nicht verwendeten Worte benannt werden müssten, eine Neuerung, die um so eher angehe, als sie sich ja auf den höchsten Zweig der Analysis beschränke, und die früheren Zweige unberührt lasse. Ich habe dafür die Worte „Mutation, mutabler Bestandtheil, etc." vorgeschlagen, und dieser mein Vorschlag hat seither vielen Beifall gefunden.

---

[1] „Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences" Band XVII. Seite 201 und 202.

[2] Ebendaselbst Seite 202.

[3] Nach bekannter Übung durfte der Verfasser dieser zweiten Abhandlung, weil sie nicht gekrönt wurde, auch nicht genannt werden. Er hat sich später aber selbst genannt, wie man in dem so eben citirten Bande XVII. Seite 296 ersehen kann.

[4] Herr Cauchy war einer der von der Akademie ernannten Berichterstatter.

[5] Wird in einem Nachtrage (§. 91—104) noch besonders nachgewiesen werden.

Auch hat schon Euler das Wort „Mutation" ganz in meinem Sinne gebraucht; z. B. in seiner „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Lausannae et Genevae 1744". Man sehe daselbst Seite 21 unten, und Nr. 58, 59 und 60 auf Seite 27 und 28. Namentlich in Nr. 61 auf Seite 29 kommt das Wort häufig vor; und gerade hier wird Euler's Methode vollständig erklärt.

Wir begegnen diesem Worte aber auch neuerer Zeit in einer Schrift von Gauss, welche den Titel führt „Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii. Göttingae 1830". Man sehe daselbst §. 20 und §. 21.

Damit jedoch meine hier vorliegende Abhandlung auch nicht im Entferntesten den Anschein habe, als wolle sie im Kleinen gross sein; so habe ich mich, wiewohl sehr ungern — ich gestehe es — entschlossen, für dieses Mal wieder das bisher übliche Wort „Variation" zu gebrauchen. Bei späteren Anlässen, die geeigneter sein werden, werde ich mich nicht abhalten lassen, verschiedene Begriffe auch mit unterscheidenden Namen zu benennen.

§. 3.

Ehe ich zu meinem Gegenstande selbst übergehe, will ich noch einige eigenthümliche Bezeichnungen erklären, ohne deren Kenntniss das Folgende unverständlich wäre. Die oft sehr zusammengesetzten Ausdrücke und mannigfaltig verbundenen Operationen, welche im (sogenannten) Variationscalcul vorkommen, machen vielerlei Bezeichnungen nöthig, während sich bei den einfacheren Zuständen und Beziehungen des Differential- und Integralcalcul's ein solches Bedürfniss weniger fühlbar macht.

Euler und seine Nachfolger haben die totalen und partiellen Differentialquotienten dadurch unterschieden, dass sie letztere in Klammern einschlossen; dagegen andere Analytiker liessen die Klammern weg, und überliessen es so der Fertigkeit des Lesers, zu unterscheiden, ob von totalen oder partiellen Differentialquotienten die Rede sei. Bei den Fortschritten der Wissenschaft konnten aber auch die Klammern nicht mehr genügen; und man sah sich nach einer anderen Bezeichnungsweise um, welche mehr leiste, und um so willkommener sein musste, als die Klammern noch zu sehr vielen anderen Zwecken im Differentialcalcul nöthig sind. Eine zweckmässige[1] Bezeichnung der partiellen Differentiale besteht darin, dass man hinter d den Veränderlichen setzt, nach welchem differentiirt werden soll. Ist z. B.

$$\text{I)}\quad w = \varphi(x, y)$$

gegeben, so folgt daraus

$$\text{II)}\quad dw = d_x w + d_y w$$

$$\text{III)}\quad d^2 w = d_x^2 w + 2 . d_x d_y w + d_y^2 w$$

etc. etc.

Hier bedeuten also $d_x w$ und $d_y w$ dasselbe, was bei Euler bezüglich durch $\left(\frac{dw}{dx}\right) . dx$ und $\left(\frac{dw}{dy}\right) . dy$ dargestellt wird, etc. Ist ferner gegeben

---

[1] Die in dieser Abhandlung durchweg angewendete Bezeichnung der partiellen Differentiale hat schon Lacroix vorgeschlagen in seinem „Traité du calcul différentiel et intégral. Paris. 3 Bd., 1810, 1814, 1819". Der Vorschlag zu besagter Bezeichnung findet sich im 2ten Bande, Seite 527, und zwar in Nr. 728, woselbst namentlich die Gleichung $\frac{d^{m+n} z}{dx^m . dy^n} . dx^m . dy^n = d_x^m d_y^n z$ nicht zu übersehen ist.

$$\text{IV)}\quad w=\varphi(x\,,y\,,z)$$

so bezeichnet man durch $d_x^m d_y^n d_z^p w$ dasselbe, was Euler durch $\left(\frac{d^{m+n+p}w}{dx^m \,.\, dy^n \,.\, dz^p}\right) . dx^m \,.\, dy^n \,.\, dz^p$ darstellt. Ebenso ist der Quotient $\frac{d_x^m d_y^n d_z^p w}{dx^m \,.\, dy^n \,.\, dz^p}$ dasselbe, was bei Euler durch $\left(\frac{d^{m+n+p}w}{dx^m \,.\, dy^n \,.\, dz^p}\right)$ bezeichnet wird.

§. 4.

A) Hat man die beiden gleichzeitig bestehenden Functionen

$$\text{V)}\quad w=\varphi(x\,,y) \qquad \text{und} \qquad \text{VI)}\quad y=\chi(x)$$

so ist w nur von x abhängig, was dadurch erreicht wird, dass man y aus $\varphi(x\,,y)$ eliminirt. Hat man aber die totalen Differentialquotienten nach x zu nehmen, und will man y nicht aus $\varphi(x\,,y)$ eliminiren; so differentiirt man w bekanntlich in der Weise, dass man die Differentiale des y als veränderlich behandelt. So verfahrend bekommt man

$$\frac{dw}{dx}=\frac{d_x w}{dx}+\frac{d_y w}{dy}\,.\,\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{d_x^2 w}{dx^2}+2\,.\,\frac{d_x d_y w}{dx\,.\,dy}\,.\,\frac{dy}{dx}+\frac{d_y^2 w}{dy^2}\,.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{d_y w}{dy}\,.\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

etc. etc.

Wenn man aber für den Verlauf der Untersuchung bemerkbar machen will, dass in den totalen Differentialquotienten $\frac{dw}{dx}$, $\frac{d^2w}{dx^2}$, etc. das x auch implicit enthalten ist; so mag dieser Umstand durch einen doppelten Bruchstrich angedeutet werden, und sonach bekommt man

$$\text{VII)}\quad \frac{dw}{dx}=\frac{d_x w}{dx}+\frac{d_y w}{dy}\,.\,\frac{dy}{dx}$$

$$\text{VIII)}\quad \frac{d^2w}{dx^2}=\frac{d_x^2 w}{dx^2}+2\,.\,\frac{d_x d_y w}{dx\,.\,dy}\,.\,\frac{dy}{dx}+\frac{d_y^2 w}{dy^2}\,.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{d_y w}{dy}\,.\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

etc. etc.

B) Hat man ebenso die drei gleichzeitig bestehenden Functionen

$$\text{IX)}\quad w=\varphi(x\,,y\,,z) \quad , \quad \text{X)}\quad y=\chi(x) \qquad \text{und} \qquad \text{XI)}\quad z=\pi(x)$$

so ist auch jetzt das w nur von x abhängig, was dadurch erreicht wird, dass man y und z aus $\varphi(x\,,y\,,z)$ eliminirt. Will man aber den Umstand, dass das x auch implicit vorkommt, bei den totalen Differentialquotienten durch einen doppelten Bruchstrich bemerkbar machen; so bekommt man diesmal die Gleichungen

$$\text{XII)}\quad \frac{dw}{dx}=\frac{d_x w}{dx}+\frac{d_y w}{dy}\,.\,\frac{dy}{dx}+\frac{d_z w}{dz}\,.\,\frac{dz}{dx}$$

$$\begin{aligned}\text{XIII)}\quad \frac{d^2w}{dx^2}=&\frac{d_x^2 w}{dx^2}+2\,.\,\frac{d_x d_y w}{dx\,.\,dy}\,.\,\frac{dy}{dx}+2\,.\,\frac{d_x d_z w}{dx\,.\,dz}\,.\,\frac{dz}{dx}+\frac{d_y^2 w}{dy^2}\,.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\\ &+2\,.\,\frac{d_y d_z w}{dy\,.\,dz}\,.\,\frac{dy}{dx}\,.\,\frac{dz}{dx}+\frac{d_z^2 w}{dz^2}\,.\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{d_y w}{dy}\,.\,\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d_z w}{dz}\,.\,\frac{d^2z}{dx^2}\end{aligned}$$

etc. etc.

Der doppelte Bruchstrich ist als zusammengesetztes Zeichen sehr passend, eben weil er einen zusammengesetzten Ausdruck darstellen hilft. Übrigens ist hier, wo es sich nur um totale Differentialquotienten handelt, zwischen $\frac{dw}{dx}$ und $\frac{\underline{dw}}{dx}$, ebenso zwischen $\frac{d^2 w}{dx^2}$ und $\frac{\underline{d^2 w}}{dx^2}$, etc. kein Unterschied.

§. 5.

Hat man die beiden gleichzeitig bestehenden Functionen

$$\text{XIV)}\quad w = \varphi(x, y, z) \quad \text{und} \quad \text{XV)}\quad z = \chi(x, y),$$

so sind diesmal die beiden Veränderlichen x und y absolut unabhängig, und w ist nur von x und y abhängig, was dadurch erreicht wird, dass man z aus $\varphi(x, y, z)$ eliminirt. Hat man aber die vollständigen partiellen Differentialquotienten nach x und nach y zu nehmen, und will man z selbst nicht eliminiren; so differentiirt man w bekanntlich in der Weise, dass man die Differentiale des z als veränderlich behandelt. Will man ferner für den Verlauf der Untersuchung bemerkbar machen, dass das x und das y auch implicit vorkommen; so gebe man den vollständigen partiellen Differentialquotienten auch diesmal einen doppelten Bruchstrich. So verfahrend bekommt man

$$\text{XVI)}\quad \frac{\underline{d_x w}}{d x} = \frac{d_x w}{d x} + \frac{d_z w}{d z} \cdot \frac{d_x z}{d x}$$

$$\text{XVII)}\quad \frac{\underline{d_y w}}{d y} = \frac{d_y w}{d y} + \frac{d_z w}{d z} \cdot \frac{d_y z}{d y}$$

$$\text{XVIII)}\quad \frac{\underline{d_x^2 w}}{d x^2} = \frac{d_x^2 w}{d x^2} + 2 \cdot \frac{d_x d_z w}{d x \,.\, d z} \cdot \frac{d_x z}{d x} + \frac{d_z^2 w}{d z^2} \cdot \left(\frac{d_x z}{d x}\right)^2 + \frac{d_z w}{d z} \cdot \frac{d_x^2 z}{d x^2}$$

$$\text{XIX)}\quad \frac{\underline{d_x d_y w}}{d x \,.\, d y} = \frac{d_x d_y w}{d x \,.\, d y} + \frac{d_x d_z w}{d x \,.\, d z} \cdot \frac{d_y z}{d y} + \frac{d_y d_z w}{d y \,.\, d z} \cdot \frac{d_x z}{d x} + \frac{d_z^2 w}{d z^2} \cdot \frac{d_x z}{d x} \cdot \frac{d_y z}{d y}$$

$$\text{XX)}\quad \frac{\underline{d_y^2 w}}{d y^2} = \frac{d_y^2 w}{d y^2} + 2 \cdot \frac{d_y d_z w}{d y \,.\, d z} \cdot \frac{d_y z}{d y} + \frac{d_z^2 w}{d z^2} \cdot \left(\frac{d_y z}{d y}\right)^2 + \frac{d_z w}{d z} \cdot \frac{d_y^2 z}{d y^2}$$

etc. etc.

In diesen Gleichungen sind aber die doppelten Bruchstriche nicht mehr unnöthig, sondern wesentliches Bedürfniss; denn sowohl $\frac{d_x w}{d x}$ als $\frac{\underline{d_x w}}{d x}$ sind Zeichen für partielle Differentialquotienten, aber das erste ist der einfache und das zweite ist der zusammengesetzte Begriff, d. h. durch das Zeichen $\frac{d_x w}{d x}$ ist ein nur nach dem explicit vorhandenen x genommener, dagegen durch das Zeichen $\frac{\underline{d_x w}}{d x}$ ist ein sowohl nach dem explicit als nach dem implicit vorhandenen x genommener partieller Differentialquotient dargestellt.

§. 6.

Wenn $y = \varphi(x)$ ist, so ist $y_{\mathrm{a}} = \varphi(\mathrm{a})$, d. h. das unten an y angehängte a zeigt an, dass a an die Stelle des x getreten sei. Ebenso wird durch $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{\mathrm{a}}$ angezeigt, dass man zuerst die innerhalb der Klammern angedeutete Operation ausgeführt, und zuletzt a an die Stelle des zurückgebliebenen x gesetzt habe.

Wenn $z = \varphi(x, y)$ ist, so ist $z_{\mathrm{a}, y} = \varphi(\mathrm{a}, y)$, $z_{x, b} = \varphi(x, b)$ und $z_{\mathrm{a}, b} = \varphi(\mathrm{a}, b)$, d. h. durch die unten an z gehängten Buchstaben erkennt man, ob entweder x allein oder y allein, oder ob x und y zugleich einen besonderen Werth angenommen haben. Eben so wird durch $\left(\frac{d_x^n z}{dx^n}\right)_{\mathrm{a}, y}$, $\left(\frac{d_x^n z}{dx^n}\right)_{x, b}$, $\left(\frac{d_x^n d_y^p z}{dx^n \,.\, dy^p}\right)_{\mathrm{a}, b}$, etc. angezeigt, dass man zuerst die innerhalb der

Klammern angedeutete Operation ausgeführt, und zuletzt die unten angehängten besonderen Werthe an die Stelle des x oder des y gesetzt habe.

Und so fort bei Functionen mit drei und noch mehr absolut unabhängigen Veränderlichen.

§. 7.

Um jetzt die vorliegende Abhandlung systematisch durchzuführen, mag dieselbe in zwei Abtheilungen gebracht werden, deren erste sich mit den zweifachen, und deren zweite sich mit den dreifachen Integralen befasst.

Nun kann ein zweifaches Integral in einer von folgenden zwei Formen

$$\int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b}^{\beta} W \, . \, dy \, . \, dx \quad \text{und} \quad \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)} W \, . \, dy \, . \, dx$$

erscheinen. Bei der ersten Form sind die Integrationsgränzen b und β unabhängig von x, aber bei der zweiten Form sind die Integrationsgränzen $b(x)$ und $\beta(x)$ Functionen von x.

Unter den verschiedenen Formen, die ein dreifaches Integral annehmen kann, mögen besonders folgende zwei

$$\int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b}^{\beta}\int_{c}^{\gamma} W \, . \, dz \, . \, dy \, . \, dx \quad \text{und} \quad \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,\,y)}^{\gamma(x,\,y)} W \, . \, dz \, . \, dy \, . \, dx$$

hervorgehoben werden. Bei der ersten Form sind c und γ unabhängig von x und y, und b und β sind unabhängig von x. Bei der zweiten Form aber sind $c\,(x,y)$ und $\gamma\,(x,y)$ Functionen von x und y, und $b\,(x)$ und $\beta\,(x)$ sind Functionen von x.

Sonach kann man jede der oben genannten zwei Abtheilungen wieder in zwei Abschnitte zerlegen.

ERSTE ABTHEILUNG.

Anwendung des (sogenannten) Variationscalcul's auf zweifache Integrale.

Erster Abschnitt,

wo solche Integrale vorkommen, bei denen die Gränzen der ersten Integration unabhängig sind von jenem Veränderlichen, nach welchem die zweite Integration durchgeführt werden soll.

Untersuchung 1.

§. 8.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen x . y . z , $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$ versehener Ausdruck; und man sucht für z eine solche Function von x und y, dass folgendes Integral

$$1)\quad U = \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b}^{\beta} W \, . \, dy \, . \, dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum oder Minimum wird.

Die Werthe von a , α , b , β sind hier als constant zu betrachten, mit der steten Rücksicht, dass $\alpha >$ a und $\beta > b$.

Man setze zur Abkürzung p und q bezüglich statt $\frac{d_x z}{dx}$ und $\frac{d_y z}{dy}$; so bekommt man vorerst

$$\partial U = \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b}^{\beta}\left(\frac{d_z W}{dz} \cdot \partial z + \frac{d_p W}{dp} \cdot \frac{d_x \partial z}{dx} + \frac{d_q W}{dq} \cdot \frac{d_y \partial z}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx$$

Man bezeichne, um noch mehr abzukürzen, die zu den zwei Differentialquotienten der ersten Ordnung

$$\frac{d_x \partial z}{dx} \text{ und } \frac{d_y \partial z}{dy}$$

gehörigen Factoren bezüglich mit

$$(\mathrm{I}x) \text{ und } (\mathrm{I}y)\,;$$

so gestaltet sich letztere Gleichung auf folgende Weise:

$$\text{II)} \quad \partial U = \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b}^{\beta}\left(\frac{d_z W}{dz} \cdot \partial z + (\mathrm{I}x) \cdot \frac{d_x \partial z}{dx} + (\mathrm{I}y) \cdot \frac{d_y \partial z}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx$$

Die Zweckmässigkeit dieser Abkürzungszeichen wird in den folgenden zwei Untersuchungen, wo höhere Differentialquotienten vorkommen, noch mehr vor die Anschauung treten.

Man beachte, dass die durch $(\mathrm{I}x)$ und $(\mathrm{I}y)$ repräsentirten Ausdrücke das x und das y sowohl explicit als auch implicit in z, p. q enthalten, und dass durch

$$\partial z\,, \frac{d_x \partial z}{dx}\,, \frac{d_y \partial z}{dy}\,, \quad \partial^2 z\,. \frac{d_x \partial^2 z}{dx}\,, \frac{d_y \partial^2 z}{dy}\,, \text{ etc. etc.}$$

Functionen dargestellt sind, wo das x und das y nur explicit vorkommt; und desshalb kann man der Gleichung II auch folgende Form geben:

$$\text{III)} \quad \partial U = \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b}^{\beta}\left[\frac{d_x[(\mathrm{I}x) \cdot \partial z]}{dx} + \frac{d_y[(\mathrm{I}y) \cdot \partial z]}{dy} + \left(\frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy}\right) \cdot \partial z\right] dy \cdot dx$$

Führt man bei den durchlaufenden Differentialen die betreffenden Integrationen aus, so gibt sich weiter

$$\text{IV)} \quad \partial U = \int_{b}^{\beta}\left[(\mathrm{I}x)_{a,y} \cdot \partial z_{a,y} - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} \cdot \partial z_{\mathrm{a},y}\right] \cdot dy$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a}\left[(\mathrm{I}y)_{x,\beta} \cdot \partial z_{x,\beta} - (\mathrm{I}y)_{x,b} \cdot \partial z_{x,b}\right] \cdot dx$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b}^{\beta}\left(\frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy}\right) \cdot \partial z \cdot dy \cdot dx$$

Hieraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{V)} \quad \frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{VI)} \quad \int_{b}^{\beta}\left[(\mathrm{I}x)_{a,y} \cdot \partial z_{a,y} - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} \cdot \partial z_{\mathrm{a},y}\right] \cdot dy$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a}\left[(\mathrm{I}y)_{x,\beta} \cdot \partial z_{x,\beta} - (\mathrm{I}y)_{x,b} \cdot \partial z_{x,b}\right] \cdot dx = 0$$

Die Hauptgleichung wird in der Regel eine Partialdifferentialgleichung der zweiten Ordnung sein; und dann nimmt ihr allgemeines Integral zwei willkürliche Functionen in sich auf.

Die Gränzengleichung hat bereits die Werthe a, α, b, β in sich aufgenommen, und dient dazu, die in der gesuchten Function $z = \varphi(x, y)$ befindlichen willkürlichen Stücke zu specialisiren, welche sich aber bald so bald so modificiren werden, je nach den verschiedenen Gränzbedingungen.

§. 9.

Jetzt ist das Prüfungsmittel herzustellen, welches, wenn man die Hauptgleichung V beachtet, zunächst folgende Form annimmt:

$$\text{VII)}\quad \delta^2 U = \int_b^\beta \left[(\mathrm{I}x)_{\alpha, y} \cdot \delta^2 z_{\alpha, y} - (\mathrm{I}x)_{a, y} \cdot \delta^2 z_{a, y} \right] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \left[(\mathrm{I}y)_{x, \beta} \cdot \delta^2 z_{x, \beta} - (\mathrm{I}y)_{x, b} \cdot \delta^2 z_{x, b} \right] \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[\mathrm{F} \cdot \delta z^2 + 2\,\mathrm{E} \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + 2\,\mathrm{D} \cdot \delta z \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$

$$+ \mathrm{C} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 2\,\mathrm{B} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \mathrm{A} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 \Big] \cdot dy \cdot dx$$

wo man sich aber zu denken hat, dass die durch die Gränzbedingungen bereits specialisirte Function $z = \varphi(x, y)$ eingeführt sei in die durch A, B, C, D, E, F repräsentirten Ausdrücke.

Man hat nun die Bedingungen aufzusuchen, bei denen $\delta^2 U$, während man sich unter δz jede beliebige Function von x und y denken kann, beständig positiv oder negativ bleibt. Zu diesem Zwecke versuche man, ob man dem unter dem zweifachen Integralzeichen stehenden Aggregate folgende Form geben kann:

$$\text{VIII)}\quad \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[\frac{d_x(\eta \cdot \delta z^2)}{dx} + \frac{d_y(\omega \cdot \delta z^2)}{dy} + \mathfrak{A} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{B} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \delta z \right)^2$$

$$+ \mathfrak{D} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{E} \cdot \delta z \right)^2 + \mathfrak{F} \cdot \delta z^2 \Big] \cdot dy \cdot dx$$

und wenn man diese Form mit dem in Gleichung VII unter dem doppelten Integralzeichen befindlichen Aggregate vergleicht, so bekommt man

$$\text{IX)}\ \mathfrak{A} = \mathrm{A} \quad , \quad \text{X)}\ \mathfrak{B} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} \quad , \quad \text{XI)}\ \mathfrak{C} = \frac{\mathrm{D} - \omega}{\mathrm{A}} ,$$

$$\text{XII)}\ \mathfrak{D} = \frac{\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} \quad , \quad \text{XIII)}\ \mathfrak{E} = \frac{\mathrm{A} \cdot (\mathrm{E} - \eta) - \mathrm{B} \cdot (\mathrm{D} - \omega)}{\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2}$$

und

$$\text{XIV)}\quad \left(\mathrm{F} - \mathfrak{F} - \frac{d_x \eta}{dx} - \frac{d_y \omega}{dy} \right) \cdot (\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2) = \mathrm{A}(\mathrm{E} - \eta)^2 - 2\,\mathrm{B}(\mathrm{E} - \eta)(\mathrm{D} - \omega) + \mathrm{C} \cdot (\mathrm{D} - \omega)^2$$

Man hat also nur sechs Bestimmungsgleichungen, während doch die acht Stücke $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \eta, \omega$ zu bestimmen wären, so dass zwei derselben willkürlich sind.

Weil aber diese sechs Bestimmungsgleichungen nichts Widersprechendes enthalten, so ist die in VIII aufgestellte Form in der That möglich. Führt man jetzt bei den durchlaufenden Differentialen $\frac{d_x(\eta \cdot \delta z^2)}{dx}$ und $\frac{d_y(\omega \cdot \delta z^2)}{dy}$ die betreffenden Integrationen aus, so geht Gleichung VII über in

$$\text{XV)}\quad \delta^2 U = \int_b^\beta [(\mathrm{I}x)_{a,y} \cdot \delta^2 z_{a,y} + \eta_{a,y} \cdot \delta z^2_{a,y} - (\mathrm{I}x)_{\mathfrak{a},y} \cdot \delta^2 z_{\mathfrak{a},y} - \eta_{\mathfrak{a},y} \cdot \delta z^2_{\mathfrak{a},y}] \cdot dy$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^a [(\mathrm{I}y)_{x,\beta} \cdot \delta^2 z_{x,\beta} + \omega_{x,\beta} \cdot \delta z^2_{x,\beta} - (\mathrm{I}y)_{x,b} \cdot \delta^2 z_{x,b} - \omega_{x,b} \cdot \delta z^2_{x,b}] \cdot dx$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^a \int_b^\beta \left[\mathfrak{A}\left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{B}\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C}.\delta z\right)^2 + \mathfrak{D}\left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{E}.\delta z\right)^2 + \mathfrak{F}.\delta z^2 \right] . dy . dx$$

Schaut man wieder auf die sechs Gleichungen IX — XIV zurück; so sieht man, dass die in der neuen Form befindlichen drei Stücke

$$\mathfrak{A} \quad , \quad \mathfrak{B} \quad , \quad \mathfrak{D}$$

vollständig durch Stücke bestimmt sind, welche sich schon in der ursprünglichen Form VII befinden; und somit darf man die oben besprochene Willkürlichkeit auf diese drei nicht anwenden, sondern nur auf zwei der folgenden fünf:

$$\mathfrak{C} \quad , \quad \mathfrak{E} \quad , \quad \mathfrak{F} \quad , \quad \eta \quad , \quad \omega .$$

Man benütze nun diese Willkürlichkeit vorerst dazu, dass man $\mathfrak{F}$ zu Null werden lässt; so reduciren sich die Gleichungen XIV und XV bezüglich auf

$$\text{XVI)}\quad \left(\mathrm{F} - \frac{d_x \eta}{dx} - \frac{d_y \omega}{dy}\right) . (\mathrm{A\,C} - \mathrm{B}^2) = \mathrm{A} . (\mathrm{E} - \eta)^2 - 2\,\mathrm{B}(\mathrm{E} - \eta)(\mathrm{D} - \omega) + \mathrm{C} . (\mathrm{D} - \omega)^2$$

und

$$\text{XVII)}\quad \delta^2 U = \int_b^\beta [(\mathrm{I}x)_{a,y} \cdot \delta^2 z_{a,y} + \eta_{a,y} \cdot \delta z^2_{a,y} - (\mathrm{I}x)_{\mathfrak{a},y} \cdot \delta^2 z_{\mathfrak{a},y} - \eta_{\mathfrak{a},y} \cdot \delta z^2_{\mathfrak{a},y}] . dy$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^a [(\mathrm{I}y)_{x,\beta} \cdot \delta^2 z_{x,\beta} + \omega_{x,\beta} \cdot \delta z^2_{x,\beta} - (\mathrm{I}y)_{x,b} \cdot \delta^2 z_{x,b} - \omega_{x,b} \cdot \delta z^2_{x,b}] \cdot dx$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^a \int_b^\beta \left[\mathfrak{A}\left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{B}\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C}.\delta z\right)^2 + \mathfrak{D}\left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{E}.\delta z\right)^2 \right] . dy . dx$$

In den beiden letzten Gleichungen befindet sich aber immer noch ein willkürliches Stück. Nimmt man nun η als willkürlich, so kann man η eine solche Function von y sein lassen, dass die nach y identische Gleichung

$$(\mathrm{I}x)_{a,y} \cdot \delta^2 z_{a,y} + \eta_{a,y} \cdot \delta z^2_{a,y} - (\mathrm{I}x)_{\mathfrak{a},y} \cdot \delta^2 z_{\mathfrak{a},y} - \eta_{\mathfrak{a},y} \cdot \delta z^2_{\mathfrak{a},y} = 0$$

stattfindet. Weil also für η eine Function von nur y gesetzt worden ist, so ist $\frac{d_x \eta}{dx} = 0$; und Gleichung XVI reducirt sich auf

$$\left(\mathrm{F} - \frac{d_y \omega}{dy}\right) . (\mathrm{A\,C} - \mathrm{B}^2) = \mathrm{A} . (\mathrm{E} - \eta)^2 - 2\,\mathrm{B}(\mathrm{E} - \eta)(\mathrm{D} - \omega) + \mathrm{C} . (\mathrm{D} - \omega)^2$$

Wenn man jetzt diese Partialdifferentialgleichung, welche nur noch den einzigen Differentialquotient $\frac{d_y \omega}{dy}$ enthält, integrirt; so bekommt man für ω einen mit x, y, $\pi(x)$ versehenen Ausdruck, wo $\pi(x)$ eine willkürliche Function von x ist. Kann man sodann $\pi(x)$ so verwenden, dass die nach x identische Gleichung

$$(\mathrm{I}y)_{x,\beta} \cdot \delta^2 z_{x,\beta} + \omega_{x,\beta} \cdot \delta z^2_{x,\beta} - (\mathrm{I}y)_{x,b} \cdot \delta^2 z_{x,b} - \omega_{x,b} \cdot \delta z^2_{x,b} = 0$$

stattfindet; so reducirt sich Gleichung XVII auf das Doppelintegral, welches. wenn man für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ die Ausdrücke einsetzt, nunmehr folgende Form annimmt:

$$\text{XVIII)}\quad \partial^2 U = \int_a^\alpha\!\!\int_b^\beta \Big[A \cdot \Big(\frac{d_y \partial z}{dy} + \frac{A}{B} \cdot \frac{d_x \partial z}{dx} + \frac{D-\omega}{A} \cdot \partial z\Big)^2$$

$$+ \frac{AC-B^2}{A} \cdot \Big(\frac{d_x \partial z}{dx} + \frac{A(E-\eta)-B(D-\omega)}{AC-B^2} \cdot \partial z\Big)^2\Big] \cdot dy \cdot dx$$

Aus dieser Form erkennt man, dass der Zeichenstand des $\partial^2 U$ nur von A und $\frac{AC-B^2}{A}$ abhangt, d. h. wenn man dem y alle von b bis β stetig nebeneinander liegenden Werthe, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch dem x alle von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthe beilegt; und wenn dabei

1) die beiden Ausdrücke A und $\frac{AC-B^2}{A}$ beständig positiv bleiben, so ist auch $\partial^2 U$ positiv; wenn aber dabei

2) die beiden Ausdrücke A und $\frac{AC-B^2}{A}$ beständig negativ bleiben, so ist auch $\partial^2 U$ negativ.

Nun kann man das Aggregat

$$\odot \qquad C \cdot \Big(\frac{d_x \partial z}{dx}\Big)^2 + 2B \cdot \frac{d_x \partial z}{dx} \cdot \frac{d_y \partial z}{dy} + A \cdot \Big(\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)^2$$

ohneweiters auf die Form

$$A \cdot \Big(\frac{d_y \partial z}{dy} + \frac{B}{A} \cdot \frac{d_x \partial z}{dx}\Big)^2 + \frac{AC-B^2}{A} \cdot \Big(\frac{d_x \partial z}{dx}\Big)^2$$

bringen; und so ist man zu folgender höchst beachtenswerthen Regel gelangt:

„Wenn der für $\partial^2 U$ sich ergebende Ausdruck positiv oder negativ sein soll bei jeder „beliebigen für ∂z zu wählenden Function; so muss das Aggregat $\odot$ positiv oder negativ „bleiben, während man dem y alle von b bis β stetig nebeneinander liegenden Werthe, und „bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch dem x alle von a bis α stetig nebeneinander „liegenden Werthe beilegt".

Dabei beachte man noch folgenden Ausnahmsfall: Wenn $\mathfrak{D}$, d. h. wenn $(AC-B^2)$ bei einigen oder gar bei allen von a bis α und von b bis β liegenden Werthen des x und des y zu Null wird, so bleibt die eben ausgesprochene Regel noch immer anwendbar; sie verliert jedoch alle Anwendbarkeit, sobald ein einziger der sechs Ausdrücke

$$F, E, D, C, B, A$$

bei irgend einem der genannten Werthe des x und des y Null in den Nenner bekommt.

Jetzt ist man auf dem Punkte, der Gränzengleichung zu genügen; und zu diesem Ende sollen folgende vier Fälle vorgenommen werden.

§. 10.

Erster Gränzfall. Wenn für die Gränzen keine Vorschriften gemacht sind, so haben auch die Ausdrücke:

$$☿ \qquad \partial z_{a,y}\,, \quad \partial z_{\alpha,y}\,, \quad \partial z_{x,b}\,, \quad \partial z_{x,\beta}\,,$$

und

$$♀ \qquad \partial^2 z_{a,y}\,, \quad \partial^2 z_{\alpha,y}\,, \quad \partial^2 z_{x,b}\,, \quad \partial^2 z_{x,\beta}$$

etc. etc.

durchaus keiner Bedingung zu genügen. Hier sind die bei ☿ aufgestellten vier Ausdrücke dem Werthe nach ganz unabhängig von einander, obgleich sie alle aus einer und derselben Form $\delta z_{x,y}$ herstammen. Ebenso sind die bei ♀ aufgestellten vier Ausdrücke dem Werthe nach ganz unabhängig von einander, obgleich sie alle aus einer und derselben Form $\delta^2 z_{x,y}$ herstammen. Und so fort.

Die Gränzengleichung muss also, damit ihr genügt werde, in folgende vier einzelne zerfallen:

$$1)\ (\mathrm{I}x)_{\alpha,y} = 0\,, \quad 2)\ (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} = 0\,, \quad 3)\ (\mathrm{I}y)_{x,\beta} = 0\,, \quad 4)\ (\mathrm{I}y)_{x,b} = 0.$$

In den Gleichungen 1) und 2) ist x constant; sie sind aber nach y identisch, und müssen, wenn sie Differentialgleichungen sind, als totale Differentialgleichungen nach y behandelt werden.

In den Gleichungen 3) und 4) ist y constant; sie sind aber nach x identisch, und müssen, wenn sie Differentialgleichungen sind, als totale Differentialgleichungen nach x behandelt werden.

Erst wenn man die für z gefundene allgemeine Function in letztere vier Gleichungen substituirt und hierauf integrirt hat, können die sich ergebenden vier Integralgleichungen bei Specialisirung der (in z eingegangenen) willkürlichen Stücke benützt werden.

Der in XVII für das Prüfungsmittel aufgestellte Ausdruck reducirt sich jetzt auf

$$\delta^2 U = \int_b^\beta (\eta_{\alpha,y}\cdot\delta z^2_{\alpha,y} - \eta_{\mathrm{a},y}\cdot\delta z^2_{\mathrm{a},y})\cdot dy + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} (\omega_{x,\beta}\cdot\delta z^2_{x,\beta} - \omega_{x,b}\cdot\delta z^2_{x,b})\cdot dx$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_b^{\beta} \left[\mathfrak{A}\left(\frac{d_y\,\delta z}{dy} + \mathfrak{B}\frac{d_x\,\delta z}{dx} + \mathfrak{C}\cdot\delta z\right)^2 + \mathfrak{D}\left(\frac{d_x\,\delta z}{dx} + \mathfrak{E}\cdot\delta z\right)^2\right]\cdot dy\cdot dx$$

Nun ist von den zwei Stücken η und ω eines willkürlich. Lässt man also η kurzweg zu Null werden, so ist auch

$$\eta_{\alpha,y}\cdot\delta z^2_{\alpha,y} - \eta_{\mathrm{a},y}\cdot\delta z^2_{\mathrm{a},y} = 0\,, \quad \text{und} \quad \frac{d_x\eta}{dx} = 0$$

und Gleichung XVI reducirt sich auf:

$$\left(\mathrm{F} - \frac{d_y\omega}{dy}\right)\cdot(\mathrm{A\,C} - \mathrm{B}^2) = \mathrm{A}\cdot\mathrm{E}^2 - 2\,\mathrm{B}\cdot\mathrm{E}\cdot(\mathrm{D}-\omega) + \mathrm{C}\cdot(\mathrm{D}-\omega)^2$$

Wenn man jetzt diese Partialdifferentialgleichung integrirt, so bekommt man

$$\omega = \xi\,[x\,,\,y\,,\,\pi\,(x)]$$

wo $\xi[x,y,\pi(x)]$ eine ganz bestimmte Zusammensetzung der drei Bestandtheile x,y und $\pi(x)$ ist, während $\pi(x)$ eine willkürliche Function von x bedeutet. Damit aber bei letzterem, für $\delta^2 U$ hergestellten, Ausdrucke nur das zweifache Integral zurückbleibe, muss noch die nach x identische Gleichung

$$\omega_{x,\beta}\cdot\delta z^2_{x,\beta} - \omega_{x,b}\cdot\delta z^2_{x,b} = 0$$

oder vielmehr

$$\text{✱}\qquad \xi\,[x\,,\,\beta\,,\,\pi\,(x)]\cdot\delta z^2_{x,\beta} - \xi\,[x\,,\,b\,,\,\pi\,(x)]\cdot\delta z^2_{x,b} = 0$$

stattfinden, und dieser Gleichung kann man auf zweierlei Weise zu genügen suchen. Man sehe nämlich zu, ob

1. für $\pi(x)$ eine solche Function des einzigen Veränderlichen x möglich ist, dass $\xi[x,y,\pi(x)]$ schon identisch zu Null wird. Wenn aber dieses nicht angeht, so sehe man zu, ob

2. aus der Gleichung ✻ sich $\pi(x)$ absondern lässt, so dass man für $\pi(x)$ eine ganz bestimmte und mit den fünf Bestandtheilen $b, \beta, x, \partial z^2_{x,b}, \partial z^2_{x,\beta}$ versehene Zusammensetzung

$$\pi(x) = \zeta(b, \beta, x, \partial z^2_{x,b}, \partial z^2_{x,\beta})$$

bekommt, und ω jetzt übergeht in

$$\omega = \xi[x, y, \zeta(b, \beta, x, \partial z^2_{x,b}, \partial z^2_{x,\beta})]$$

Dabei bleibt nur

$$\partial^2 U = \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b}^{\beta}\Big[\mathrm{A}.\Big(\frac{d_y \partial z}{dy} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}.\frac{d_x \partial z}{dx} + \frac{\mathrm{D}-\omega}{\mathrm{A}}.\partial z\Big)^2 + \frac{\mathrm{A.C}-\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}.\Big(\frac{d_x \partial z}{dx} + \frac{\mathrm{A.E}-\mathrm{B.}(\mathrm{D}-\omega)}{\mathrm{A.C}-\mathrm{B}^2}.\partial z\Big)^2\Big].dy.dx$$

wo man aber noch für ω seinen Ausdruck einsetzen muss. Was aber auch immer das Ergebniss von ω sein mag, so hängt es doch, wie schon im vorigen §. bemerkt wurde, nur von A und $\frac{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$ ab, ob $\partial^2 U$ beständig negativ oder positiv bleibt.

§. 11.

Zweiter Gränzfall[1]. Die gesuchte Function soll nur aus jenen Functionen herausgewählt werden, welche alle bei $x = \mathrm{a}, x = \alpha, y = b, y = \beta$ sich bezüglich auf folgende vier Ausdrücke

$$\mathfrak{f}'(y) \quad , \quad \mathfrak{f}''(y) \quad , \quad \mathfrak{f}'''(x) \quad , \quad \mathfrak{f}''''(x) \quad ,$$

specialisiren. Bei dieser Vorschrift müssen folgende zwei Systeme von Gleichungen

$$♁ \qquad \partial z_{\mathrm{a},y} = 0 \quad , \quad \partial z_{\alpha,y} = 0 \quad , \quad \partial^2 z_{\mathrm{a},y} = 0 \quad , \quad \partial^2 z_{\alpha,y} = 0 \quad , \text{ etc.}$$

und

$$♂ \qquad \partial z_{x,b} = 0 \quad , \quad \partial z_{x,\beta} = 0 \quad , \quad \partial^2 z_{x,b} = 0 \quad , \quad \partial^2 z_{x,\beta} = 0 \quad , \text{ etc.}$$

stattfinden. Die Gleichungen ♁ sind nach y. und die Gleichungen ♂ sind nach x identisch. Die Gränzengleichung VI fällt also diesmal von selbst hinweg; und wenn die obigen vier Ausdrücke bestimmt vorgeschrieben sind, so müssen auch die vier Gleichungen

$$5)\ z_{\mathrm{a},y} = \mathfrak{f}'(y) \quad , \quad 6)\ z_{\alpha,y} = \mathfrak{f}''(y) \quad , \quad 7)\ z_{x,b} = \mathfrak{f}'''(x) \quad , \quad 8)\ z_{x,\beta} = \mathfrak{f}''''(x)$$

bei Specialisirung der durch Integration der Hauptgleichung eingegangenen willkürlichen Stücke mitbenützt werden.

Man setze zuerst b und dann β statt y in 5) und 6) ein. Man setze ebenso zuerst a und dann α statt x in 7) und 8) ein. Auf diese Weise gelangt man zu folgenden vier neuen Gleichungen[2]:

$$9)\ z_{\mathrm{a},b} = \mathfrak{f}'(b) = \mathfrak{f}'''(\mathrm{a}) \quad , \quad 10)\ z_{\mathrm{a},\beta} = \mathfrak{f}'(\beta) = \mathfrak{f}''''(\mathrm{a})$$

$$11)\ z_{\alpha,b} = \mathfrak{f}''(b) = \mathfrak{f}'''(\alpha) \quad , \quad 12)\ z_{\alpha,\beta} = \mathfrak{f}''(\beta) = \mathfrak{f}''''(\alpha)$$

[1] Eine auf diesen zweiten Gränzfall bezügliche geometrische Aufgabe ist folgende: „Man sucht zwischen zwei Paar parallelen und aufeinander senkrechten Ebenen die kleinste Fläche unter allen jenen Flächen heraus, welche durch vier feste Curven, die in den genannten vier Ebenen liegen, begränzt werden."

[2] Bei der, in voriger Anmerkung gestellten, geometrischen Aufgabe lässt sich die Nothwendigkeit, dass die vier Gleichungen 9 — 12 stattfinden müssen, sehr leicht veranschaulichen. Die vier, in den Endpunkten der Abscissen a, α, b, β senkrechten, Ebenen schneiden sich nämlich nach vier graden Linien; und in jeder dieser vier Graden liegt ein Punkt, welcher zweien der gegebenen vier Gränzcurven gemein sein muss, weil man sonst durch sie (diese vier Gränzcurven) keine Fläche begränzen könnte.

Sobald eine einzige dieser vier Gleichungen einen Widerspruch in sich trägt, ist unser zweiter Fall, wie er hier gestellt ist, unmöglich. Sollten aber die vier vorgeschriebenen Ausdrücke

$$\mathfrak{f}'(y) \quad , \quad \mathfrak{f}''(y) \quad , \quad \mathfrak{f}'''(x) \quad , \quad \mathfrak{f}''''(x)$$

Stücke in sich enthalten, die noch willkürlich sind; so müssen letztere sich so specialisiren lassen, dass die genannten vier Gleichungen (Nr. 9 — 12) erfüllt werden.

Der für das Prüfungsmittel aufgestellte allgemeine Ausdruck XVII reducirt sich jetzt von selbst auf das zweifache Integral, so dass es diesmal gar nicht nöthig ist, sich um die Functionen η und ω zu bekümmern, und dass es ohneweiters von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ abhängt, ob ein Maximum oder Minimum stattfindet.

§. 12.

Dritter Gränzfall. Wenn für die Gränzen die zwei Gleichungen

$$13)\ f'(z_{\mathrm{a},y} \cdot z_{a,y}) = 0 \quad , \quad \text{und} \quad 14)\ f''(z_{x,b}, z_{x,\beta}) = 0$$

vorgeschrieben sind; so findet zwischen $\partial z_{\mathrm{a},y}$ und $\partial z_{a,y}$, und ebenso zwischen $\partial z_{x,b}$ und $\partial z_{x,\beta}$ eine Abhängigkeit Statt. Man behandle $\partial z_{\mathrm{a},y}$, $\partial z_{x,b}$, $\partial^2 z_{\mathrm{a},y}$ und $\partial^2 z_{x,b}$ als abhängig, und sondere sie ab; so bekommt man Gleichungen von folgender Form:

$$15)\ \partial z_{\mathrm{a},y} = \mathfrak{P}' \cdot \partial z_{a,y} \quad , \quad 16)\ \partial^2 z_{\mathrm{a},y} = \mathfrak{P}' \cdot \partial^2 z_{a,y} + \mathfrak{Q}' \cdot \partial z^2_{a,y}$$

$$17)\ \partial z_{x,b} = \mathfrak{P}'' \cdot \partial z_{x,\beta} \quad , \quad 18)\ \partial^2 z_{x,b} = \mathfrak{P}'' \cdot \partial^2 z_{x,\beta} + \mathfrak{Q}'' \cdot \partial z_{x,\beta}.$$

Eliminirt man jetzt $\partial z_{\mathrm{a},y}$ und $\partial z_{x,b}$, so nimmt die Gränzengleichung VI folgende Form an:

$$\int_b^\beta [(\mathrm{I}x)_{a,y} - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} \cdot \mathfrak{P}'] \cdot \partial z_{a,y} \cdot dy + \int_{\mathrm{a}}^a [(\mathrm{I}y)_{x,\beta} - (\mathrm{I}y)_{x,b} \cdot \mathfrak{P}''] \cdot \partial z_{x,\beta} \cdot dx = 0$$

Diese Gleichung zerfällt aber ohneweiters in folgende zwei:

$$19)\ (\mathrm{I}x)_{a,y} - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} \cdot \mathfrak{P}' = 0 \quad , \quad 20)\ (\mathrm{I}y)_{x,\beta} - (\mathrm{I}y)_{x,b} \cdot \mathfrak{P}'' = 0.$$

Man hat also abermals vier Gleichungen (13, 14, 19, 20), welche bei Specialisirung der durch Integration der Hauptgleichung eingegangenen willkürlichen Stücke mitbenützt werden müssen.

Eliminirt man jetzt die abhängigen Stücke auch aus XVII, und beachtet man die Gleichungen 19) und 20); so bleibt nur

$$\text{XIX)}\ \partial^2 U = \int_b^\beta (\eta_{a,y} - \eta_{\mathrm{a},y} \cdot \mathfrak{P}'^2 - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} \cdot \mathfrak{Q}') \cdot \partial z^2_{a,y} \cdot dy$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^a (\omega_{x,\beta} - \omega_{x,b} \cdot \mathfrak{P}''^2 - (\mathrm{I}y)_{x,b} \cdot \mathfrak{Q}'') \cdot \partial z^2_{x,\beta} \cdot dx$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^a \int_b^\beta \left[\mathfrak{A} \left(\frac{d_y \partial z}{dy} + \mathfrak{B} \frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \partial z \right)^2 + \mathfrak{D} \left(\frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{E} \cdot \partial z \right)^2 \right] dy \cdot dx$$

Um nun diesen Ausdruck so einzurichten, dass nur das zweifache Integral zurückbleibt, lasse man vorerst folgende Gleichung

$$\eta_{a,y} - \eta_{\mathrm{a},y} \cdot \mathfrak{P}'^2 - (\mathrm{I}\,x)_{\mathrm{a},y} \cdot \mathfrak{Q}' = 0$$

stattfinden. Dadurch bestimmt sich η als Function des einzigen Veränderlichen y, und somit ist $\frac{d_x \eta}{dx} = 0$. Gleichung XVI reducirt sich also auf

$$\left(\mathrm{F} - \frac{d_y \omega}{dy}\right) . (\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2) = \mathrm{A} . (\mathrm{E} - \eta)^2 - 2\,\mathrm{B}(\mathrm{E} - \eta)(\mathrm{D} - \omega) + \mathrm{C} . (\mathrm{D} - \omega)^2$$

Durch Integration dieser Partialdifferentialgleichung ergibt sich für ω ein mit x, y. $\pi(x)$ versehener Ausdruck, wo $\pi(x)$ eine willkürliche Function von x ist, die man so benützen kann, dass die nach x identische Gleichung

$$\omega_{x,\beta} - \omega_{x,} \cdot \mathfrak{P}''^2 - (\mathrm{I}\,y)_{x,b} \cdot \mathfrak{Q}'' = 0$$

stattfindet. Der für das Prüfungsmittel aufgestellte Ausdruck XIX reducirt sich also auf das doppelte Integral, und es hangt abermals von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ ab. ob ein Maximum oder Minimum oder keines von beiden stattfindet.

§. 13.

Vierter Gränzfall. Wenn für die Gränzen vier Gleichungen, z. B.

$$f'(z_{\mathrm{a},y}, z_{a,y}) = 0 \quad , \quad f''(z_{\mathrm{a},y}, z_{a,y}) = 0 \quad , \quad f'''(z_{x,b}, z_{x,\beta}) = 0 \quad . \quad f''''(z_{x,b}, z_{x,\beta}) = 0$$

vorgeschrieben sind; so hat man eigentlich wieder den zweiten Fall, d. h. es finden wieder die in §. 11 aufgestellten Gleichungen ♀ und ♂ Statt. Dabei fällt die Gränzengleichung wieder von selbst weg, und das Prüfungsmittel reducirt sich ohneweiters auf das zweifache Integral, so dass man sich diesmal ebenso, wie in §. 11, um die Bedeutung von η und ω nicht zu bekümmern braucht.

§. 14.

Zusatz. Nicht immer müssen in dem Ausdrucke W die beiden Differentialquotienten $\frac{d_x z}{dx}$ und $\frac{d_y z}{dy}$ zugleich vorkommen, sondern es kann auch einer derselben fehlen. Z. B.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen $x, y, z, \frac{d_x z}{dx}$ versehener, Ausdruck; und man sucht für z eine solche Function von x und y, dass das Integral

$$\text{XX)} \quad U = \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b}^{\beta} W . dy . dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum oder Minimum wird.

Hier bekommt man die Hauptgleichung

$$\text{XXI)} \quad \frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}\,x)}{dx} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XXII)} \quad \int_b^{\beta} [(\mathrm{I}\,x)_{a,y} \, . \, \partial z_{a,y} - (\mathrm{I}\,x)_{\mathrm{a},y} \, . \, \partial z_{\mathrm{a},y})] \, . \, dy = 0$$

Für das Prüfungsmittel bekommt man zunächst

$$\text{XXIII)} \quad \delta^2 U = \int_b^\beta \left[(\mathrm{I}x)_{a\,.\,y} \,.\, \delta^2 z_{a\,,\,y} - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a}\,,\,y} \,.\, \delta^2 z_{\mathrm{a}\,,\,y} \right] . \, dy$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a} \int_b^\beta \left[\mathrm{F} \,.\, \delta z^2 + 2\,\mathrm{E} \,.\, \delta z \,.\, \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathrm{C} \,.\, \left(\frac{d_x \delta z}{dx} \right)^2 \right] . \, dy \,.\, dx$$

wo man sich aber zu denken hat, dass die durch die Gränzbedingungen bereits specialisirte Function $z = \varphi(x,y)$ eingeführt sei in die durch C, E, F repräsentirten Ausdrücke.

Letzterer Gleichung kann man aber, nach dem Vorgange des §. 9 verfahrend, auch folgende Form geben:

$$\text{XXIV)} \quad \delta^2 U = \int_b^\beta \left[(\mathrm{I}x)_{a\,,\,y} \,.\, \delta^2 z_{a\,,\,y} + \eta_{a\,,\,y} \,.\, \delta z^2_{a\,,\,y} - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a}\,,\,y} \,.\, \delta^2 z_{\mathrm{a}\,,\,y} - \eta_{\mathrm{a}\,,\,y} \,.\, \delta z^2_{\mathrm{a}\,,\,y} \right] . \, dy$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a} \int_b^\beta \left[\mathfrak{D} \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{E} \,.\, \delta z \right)^2 + \mathfrak{F} \,.\, \delta z^2 \right] . \, dy \,.\, dx$$

Vergleicht man XXIII mit XXIV, so bekommt man

$$\text{XXV)} \quad \mathfrak{D} = \mathrm{C} \quad , \qquad \text{XXVI)} \quad \mathfrak{E} = \frac{\mathrm{E} - \eta}{\mathrm{C}}$$

und

$$\text{XXVII)} \quad \left(\mathrm{F} - \mathfrak{F} - \frac{d_x \eta}{dx} \right) . \, C = (\mathrm{E} - \eta)^2$$

Man hat also diesmal nur drei Bestimmungsgleichungen, während doch die vier Stücke

$$\mathfrak{D} \quad , \quad \mathfrak{E} \quad , \quad \mathfrak{F} \quad , \quad \eta$$

zu bestimmen wären, so dass eines derselben willkürlich ist. Schaut man aber wieder auf Gleichung XXIV zurück, so sieht man, dass es auch diesmal am zweckmässigsten ist, das Stück $\mathfrak{F}$ als willkürlich zu behandeln, und zu Null werden zu lassen. Dabei reduciren sich die Gleichungen XXIV und XXVII auf

$$\text{XXVIII)} \quad \delta^2 U = \int_b^\beta \left[(\mathrm{I}x)_{a\,,\,y} \,.\, \delta^2 z_{a\,,\,y} + \eta_{a\,,\,y} \,.\, \delta z^2_{a\,,\,y} - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a}\,,\,y} \,.\, \delta^2 z_{\mathrm{a}\,,\,y} - \eta_{\mathrm{a}\,,\,y} \,.\, \delta z^2_{\mathrm{a}\,,\,y} \right] . \, dy$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a} \int_b^\beta \left[\mathfrak{D} \,.\, \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{E} \,.\, \delta z \right)^2 \right] . \, dy \,.\, dx$$

und

$$\text{XXIX)} \quad \left(\mathrm{F} - \frac{d_x \eta}{dx} \right) . \, \mathrm{C} = (\mathrm{E} - \eta)^2.$$

Wenn man nun diese Partialdifferentialgleichung integrirt, so bekommt man für η einen mit $x, y, \pi(y)$ versehenen Ausdruck, wo $\pi(y)$ eine willkürliche Function von y ist, die noch so verwendet werden kann, dass sich Gleichung XXVIII auf das zweifache Integral zurückzieht. Man erkennt also, dass es diesmal von $\mathfrak{D} = \mathrm{C}$ allein abhangt, ob ein Maximum oder Minimum oder keines von beiden stattfindet.

Untersuchung 2.

§. 15.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen $x, y, z, \frac{d_x z}{dx}, \frac{d_y z}{dy}, \frac{d_x^2 z}{dx^2}, \frac{d_x d_y z}{dx \cdot dy}, \frac{d_y^2 z}{dy^2}$ versehener, Ausdruck; und man sucht für z eine solche Function von x und y, dass folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta W \, . \, dy \, . \, dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum oder Minimum wird.

Man setze zur Abkürzung

$$p \quad , \quad q \quad , \quad r \quad , \quad s \quad , \quad t$$

bezüglich statt

$$\frac{d_x z}{dx} \quad , \quad \frac{d_y z}{dy} \quad , \quad \frac{d_x^2 z}{dx^2} \quad , \quad \frac{d_x d_y z}{dx \, . \, dy} \quad , \quad \frac{d_y^2 z}{dy^2}$$

so bekommt man vorerst

$$\delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[\frac{d_z W}{dz} \, . \, \delta z + \frac{d_p W}{dp} \, . \, \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_q W}{dq} \, . \, \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{d_r W}{dr} \, . \, \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}$$
$$+ \frac{d_s W}{ds} \, . \, \frac{d_x d_y \delta z}{dx \, . \, dy} + \frac{d_t W}{dt} \, . \, \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \Big] \, . \, dy \, . \, dx$$

Man bezeichne, um noch mehr abzukürzen, die zu den zwei Differentialquotienten der ersten Ordnung

$$\frac{d_x \delta z}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{d_y \delta z}{dy}$$

gehörigen Factoren bezüglich mit

$$(\text{I}x) \quad \text{und} \quad (\text{I}y)$$

Auf analoge Weise bezeichne man die zu den Differentialquotienten der zweiten Ordnung

$$\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} \quad , \quad \frac{d_x d_y \delta z}{dx \, . \, dy} \quad , \quad \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2}$$

gehörigen Factoren bezüglich mit

$$(\text{II}x^2) \quad , \quad (\text{II}xy) \quad , \quad (\text{II}y^2)$$

Dadurch gestaltet sich letztere Gleichung auf folgende Weise:

$$\text{II)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[\frac{d_z W}{dz} \, . \, \delta z + (\text{I}x) \, . \, \frac{d_x \delta z}{dx} + (\text{I}y) \, . \, \frac{d_y \delta z}{dy} + (\text{II}x^2) \, . \, \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}$$
$$+ (\text{II}xy) \, . \, \frac{d_x d_y \delta z}{dx \, . \, dy} + (\text{II}y^2) \, . \, \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \Big] \, . \, dy \, . \, dx$$

Man beachte, dass die durch $(\text{I}x)$, $(\text{I}y)$, $(\text{II}x^2)$, $(\text{II}xy)$, $(\text{II}y^2)$ dargestellten Ausdrücke das x und das y nicht allein explicit, sondern auch implicit in z, p, q, r, s, t enthalten, und dass die Ausdrücke

$$\delta z\,,\ \frac{d_x\delta z}{dx}\,,\ \ldots\ldots,\ \frac{d_y^2\delta z}{dy^2}\,,\qquad \delta^2 z\,,\ \frac{d_x\delta^2 z}{dx}\,,\ \ldots\ldots,\ \frac{d_y^2\delta^2 z}{dy^2}\,,\quad \text{etc.}$$

als Functionen, wo das x und das y nur explicit vorkommt, zu betrachten sind; und desshalb kann man die Gleichung II auch auf folgende Weise darstellen:

$$\text{III)}\ \delta U=\int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b}^{\beta}\Bigg\{\frac{d_x d_y[(\mathrm{II}\,xy).\delta z]}{dx\,.\,dy}$$
$$+\frac{d_x\left[\left((\mathrm{I}\,x)-\frac{d_x(\mathrm{II}\,x^2)}{dx}-\frac{d_y(\mathrm{II}\,xy)}{dy}\right).\delta z+(\mathrm{II}\,x^2)\,.\,\frac{d_x\delta z}{dx}\right]}{dx}$$
$$+\frac{d_y\left[\left((\mathrm{I}\,y)-\frac{d_y(\mathrm{II}\,y^2)}{dy}-\frac{d_x(\mathrm{II}\,xy)}{dx}\right).\delta z+(\mathrm{II}\,y^2).\frac{d_y\delta z}{dy}\right]}{dy}$$
$$+\left(\frac{d_z W}{dz}-\frac{d_x(\mathrm{I}\,x)}{dx}-\frac{d_y(\mathrm{I}\,y)}{dy}+\frac{d_x^2(\mathrm{II}\,x^2)}{dx^2}+\frac{d_x d_y(\mathrm{II}\,xy)}{dx\,.\,dy}+\frac{d_y^2(\mathrm{II}\,y^2)}{dy^2}\right).\delta z\Bigg\}.dy\,.\,dx$$

Führt man jetzt bei den durchlaufenden Differentialen die betreffenden Integrationen aus, so gibt sich weiter

$$\text{IV)}\ \delta U=(\mathrm{II}\,xy)_{a,\beta}\,.\,\delta z_{a,\beta}-(\mathrm{II}\,xy)_{a,b}\,.\,\delta z_{a,b}-(\mathrm{II}\,xy)_{\mathrm{a},\beta}\,.\,\delta z_{\mathrm{a},\beta}+(\mathrm{II}\,xy)_{\mathrm{a},b}\,.\,\delta z_{\mathrm{a},b}$$
$$+\int_b^\beta\Bigg[\left((\mathrm{I}\,x)-\frac{d_x(\mathrm{II}\,x^2)}{dx}-\frac{d_y(\mathrm{II}\,xy)}{dy}\right)_{a,y}.\,\delta z_{a,y}+(\mathrm{II}\,x^2)_{a,y}\,.\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{a,y}$$
$$-\left((\mathrm{I}\,x)-\frac{d_x(\mathrm{II}\,x^2)}{dx}-\frac{d_y(\mathrm{II}\,xy)}{dy}\right)_{\mathrm{a},y}.\,\delta z_{\mathrm{a},y}-(\mathrm{II}\,x^2)_{\mathrm{a},y}\,.\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{\mathrm{a},y}\Bigg].dy$$
$$+\int_{\mathrm{a}}^{a}\Bigg[\left((\mathrm{I}\,y)-\frac{d_y(\mathrm{II}\,y^2)}{dy}-\frac{d_x(\mathrm{II}\,xy)}{dx}\right)_{x,\beta}.\,\delta z_{x,\beta}+(\mathrm{II}\,y^2)_{x,\beta}\,.\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\beta}$$
$$-\left((\mathrm{I}\,y)-\frac{d_y(\mathrm{II}\,y^2)}{dy}-\frac{d_x(\mathrm{II}\,xy)}{dx}\right)_{x,b}.\,\delta z_{x,b}-(\mathrm{II}\,y^2)_{x,b}\,.\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,b}\Bigg].dx$$
$$+\int_{\mathrm{a}}^{a}\int_b^\beta\left[\frac{d_z W}{dz}-\frac{d_x(\mathrm{I}\,x)}{dx}-\frac{d_y(\mathrm{I}\,y)}{dy}+\frac{d_x^2(\mathrm{II}\,x^2)}{dx^2}+\frac{d_x d_y(\mathrm{II}\,xy)}{dx\,.\,dy}+\frac{d_y^2(\mathrm{II}\,y^2)}{dy^2}\right].\delta z\,.\,dy\,.\,dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{V)}\ \frac{d_z W}{dz}-\frac{d_x(\mathrm{I}\,x)}{dx}-\frac{d_y(\mathrm{I}\,y)}{dy}+\frac{d_x^2(\mathrm{II}\,x^2)}{dx^2}+\frac{d_x d_y(\mathrm{II}\,xy)}{dx\,.\,dy}+\frac{d_y^2(\mathrm{II}\,y^2)}{dy^2}=0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{VI)}\ (\mathrm{II}\,xy)_{a,\beta}\,.\,\delta z_{a,\beta}-(\mathrm{II}\,xy)_{a,b}\,.\,\delta z_{a,b}-(\mathrm{II}\,xy)_{\mathrm{a},\beta}\,.\,\delta z_{\mathrm{a},\beta}+(\mathrm{II}\,xy)_{\mathrm{a},b}\,.\,\delta z_{\mathrm{a},b}$$
$$+\int_b^\beta\Bigg[\left((\mathrm{I}\,x)-\frac{d_x(\mathrm{II}\,x^2)}{dx}-\frac{d_y(\mathrm{II}\,xy)}{dy}\right)_{a,y}.\,\delta z_{a,y}+(\mathrm{II}\,x^2)_{a,y}\,.\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{a,y}$$
$$-\left((\mathrm{I}\,x)-\frac{d_x(\mathrm{II}\,x^2)}{dx}-\frac{d_y(\mathrm{II}\,xy)}{dy}\right)_{\mathrm{a},y}.\,\delta z_{\mathrm{a},y}-(\mathrm{II}\,x^2)_{\mathrm{a},y}\,.\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{\mathrm{a},y}\Bigg].dy$$
$$+\int_{\mathrm{a}}^{a}\Bigg[\left((\mathrm{I}\,y)-\frac{d_y(\mathrm{II}\,y^2)}{dy}-\frac{d_x(\mathrm{II}\,xy)}{dx}\right)_{x,\beta}.\,\delta z_{x,\beta}+(\mathrm{II}\,y^2)_{x,\beta}\,.\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\beta}$$
$$-\left((\mathrm{I}\,y)-\frac{d_y(\mathrm{II}\,y^2)}{dy}-\frac{d_x(\mathrm{II}\,xy)}{dx}\right)_{x,b}.\,\delta z_{x,b}-(\mathrm{II}\,y^2)_{x,b}\,.\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,b}\Bigg].dx=0$$

Die Hauptgleichung wird in der Regel eine Partialdifferentialgleichung der vierten Ordnung sein; und dann nimmt ihr allgemeines Integral vier willkürliche Functionen in sich auf.

Die Gränzengleichung hat bereits die Werthe a , α , b , β in sich aufgenommen, und dient dazu, die in der gesuchten Function $z=\varphi(x\,,\,y)$ befindlichen willkürlichen Stücke zu specialisiren, welche sich aber bald so bald so modificiren werden, je nach den verschiedenen Gränzbedingungen.

§. 16.

Nun ist das Prüfungsmittel herzustellen. Der für $\delta^2 U$ sich ergebende Ausdruck wird aber aus viererlei Aggregaten bestehen:

1. aus einem solchen, das von jedem Integralzeichen frei ist; ferner
2. aus einem solchen, das unter dem einfachen Integralzeichen $\int_b^\beta$ und
3. aus einem solchen, das unter dem einfachen Integralzeichen $\int_a^\alpha$ steht: zuletzt
4. aus einem solchen, das unter dem zweifachen Integralzeichen $\int_a^\alpha\int_b^\beta$ steht.

Das mit dem doppelten Integralzeichen versehene Aggregat ist aber folgendes:

$$\begin{aligned}
\text{VII)} \int_a^\alpha\!\!\int_b^\beta \Big\{ & A_1 . \delta z^2 + 2\,A_2 . \delta z \frac{d_x \delta z}{dx} + 2\,A_3 . \delta z \frac{d_y \delta z}{dy} + 2\,A_4 . \delta z \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + 2\,A_5 . \delta z \frac{d_x d_y \delta z}{dx\,.\,dy} \\
& + 2\,A_6 . \delta z \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \\
& + B_1 . \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 2\,B_2 \frac{d_x \delta z}{dx} . \frac{d_y \delta z}{dy} + 2\,B_3 \frac{d_x \delta z}{dx} . \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + 2\,B_4 \frac{d_x \delta z}{dx} . \frac{d_x d_y \delta z}{dx.dy} + 2\,B_5 \frac{d_x \delta z}{dx} . \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \\
& + C_1 . \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 + 2\,C_2 \frac{d_y \delta z}{dy} . \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + 2\,C_3 \frac{d_y \delta x}{dy} . \frac{d_x d_y \delta z}{dx\,dy} + 2\,C_4 \frac{d_y \delta z}{dy} . \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \\
& + D_1 . \left(\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}\right)^2 + 2\,D_2 \frac{d_x^2 \delta x}{dx^2} . \frac{d_x d_y \delta z}{dx.dy} + 2\,D_3 \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} . \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \\
& + E_1 . \left(\frac{d_x d_y \delta z}{dx.dy}\right)^2 + 2\,E_2 \frac{d_x d_y \delta z}{dx.dy} . \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \\
& + F_1 . \left(\frac{d_y^2 \delta z}{dy^2}\right)^2 \Big\} . dy . dx
\end{aligned}$$

wo man sich aber zu denken hat, dass die durch die Gränzbedingungen bereits specialisirte Function $z=\varphi(x,y)$ eingeführt sei in die durch

A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 , B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5 ,
C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , D_1 , D_2 , D_3 , E_1 , E_2 , F_1

repräsentirten e i n u n d z w a n z i g A u s d r ü c k e.

Man versuche nun, ob man letzteres Aggregat auf folgende Form bringen kann:

$$\begin{aligned}
\text{VIII)} \int_a^\alpha\!\!\int_b^\beta \Big\{ & \frac{d_x d_y (\lambda . \delta z^2)}{dx.dy} \\
& + \frac{1}{dx} . d_x \left[\eta . \delta z^2 + 2\eta' . \delta z \frac{d_x \delta z}{dx} + \eta'' . \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 2\,\varepsilon . \delta z \frac{d_y \delta z}{dy} + 2\,\varepsilon' \frac{d_x \delta z}{dx} . \frac{d_y \delta z}{dy} + \varepsilon'' . \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{dy} . d_y \Big[\omega . \delta z^2 + 2\omega' . \delta z \frac{d_x \delta z}{dx} + \omega'' . \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} \Big)^2 + 2\mu . \delta z \frac{d_y \delta z}{dy} + 2\mu' \frac{d_x \delta z}{dx} . \frac{d_y \delta z}{dy} + \mu'' . \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} \Big)^2 \Big]$$

$$+ \mathfrak{A} . \Big(\frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} + \mathfrak{A}' \frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} + \mathfrak{A}'' \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + \mathfrak{A}''' \frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A}'''' \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{A}''''' . \delta z \Big)^2$$

$$+ \mathfrak{B} . \Big(\frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} + \mathfrak{B}' \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + \mathfrak{B}'' \frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{B}''' \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B}'''' . \delta z \Big)^2$$

$$+ \mathfrak{C} . \Big(\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + \mathfrak{C}' \frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{C}'' . \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C}''' . \delta z \Big)^2$$

$$+ \mathfrak{D} . \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{D}' \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{D}'' . \delta z \Big)^2$$

$$+ \mathfrak{E} . \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{E}' . \delta z \Big)^2$$

$$+ \mathfrak{F} . \delta z^2 \Big\} . dy . dx$$

Setzt man jetzt die beiden Aggregate VII und VIII einander gleich, so bekommt man e i n u n d z w a n z i g Bestimmungsgleichungen, während v i e r u n d d r e i s s i g unbestimmte Stücke, nämlich

$$\lambda , \qquad \eta , \eta' , \eta'' , \varepsilon , \varepsilon' , \varepsilon'' , \qquad \omega , \omega' , \omega'' , \mu , \mu' , \mu''$$

und

$$\mathfrak{A} , \mathfrak{A}' , \mathfrak{A}'' , \mathfrak{A}''' , \mathfrak{A}'''' , \mathfrak{A}''''' , \qquad \mathfrak{B} , \mathfrak{B}' , \mathfrak{B}'' , \mathfrak{B}''' , \mathfrak{B}'''' , \qquad \mathfrak{C} , \mathfrak{C}' , \mathfrak{C}'' , \mathfrak{C}'''$$

$$\mathfrak{D} , \mathfrak{D}' , \mathfrak{D}'' , \qquad \mathfrak{E} , \mathfrak{E}' , \qquad \mathfrak{F}$$

vorhanden sind, so dass d r e i z e h n derselben willkürlich bleiben.

Weil aber unsere e i n u n d z w a n z i g Bestimmungsgleichungen nichts Widersprechendes enthalten, so ist es in der That möglich, dem Aggregate VII die Form VIII zu geben.

Es können aber die in der neuen Form VIII enthaltenen s e c h s Stücke

$$\mathfrak{A} , \mathfrak{A}' , \mathfrak{A}'' , \qquad \mathfrak{B} , \mathfrak{B}' , \qquad \mathfrak{C}$$

vollständig bestimmt werden durch solche Stücke, welche sich in der ursprünglichen Form VII befinden; und desshalb darf man die oben besprochene Willkürlichkeit auf diese sechs Stücke nicht anwenden.

Man benütze aber diese Willkürlichkeit dazu, dass man vorerst folgende sechs Stücke

$$\mathfrak{D} , \mathfrak{D}' , \mathfrak{D}'' , \qquad \mathfrak{E} , \mathfrak{E}' , \qquad \mathfrak{F}$$

zu Null werden lässt. Dann hat man immer noch die zweiundzwanzig

$$\lambda , \qquad \eta , \eta' , \eta'' , \varepsilon , \varepsilon' , \varepsilon'' , \qquad \omega , \omega' , \omega'' , \mu , \mu' , \mu''$$

und

$$\mathfrak{A}''' , \mathfrak{A}'''' , \mathfrak{A}''''' , \qquad \mathfrak{B}'' , \mathfrak{B}''' , \mathfrak{B}'''' , \qquad \mathfrak{C}' , \mathfrak{C}'' , \mathfrak{C}'''$$

von welchen noch s i e b e n willkürlich sind; und wenn man jetzt bei den durchlaufenden Differentialen die betreffenden Integrationen ausführt, so bekommt man für das Prüfungsmittel im Allgemeinen folgenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
\text{IX)}\quad \delta^2 U = {} & (\mathrm{II}\,xy)_{a,\beta} \cdot \delta^2 z_{a,\beta} + \lambda_{a,\beta} \cdot \delta z^2_{a,\beta} - (\mathrm{II}\,xy)_{a,b} \cdot \delta^2 z_{a,b} - \lambda_{a,b} \cdot \delta z^2_{a,b} \\
& - (\mathrm{II}\,xy)_{\mathfrak{a},\beta} \cdot \delta^2 z_{\mathfrak{a},\beta} - \lambda_{\mathfrak{a},\beta} \cdot \delta z^2_{\mathfrak{a},\beta} + (\mathrm{II}\,xy)_{\mathfrak{a},b} \cdot \delta^2 z_{\mathfrak{a},b} + \lambda_{\mathfrak{a},b} \cdot \delta z^2_{\mathfrak{a},b} \\
& + \int_b^\beta \Big[\Big((\mathrm{I}\,x) - \frac{d_x (\mathrm{II}\,x^2)}{dx} - \frac{d_y (\mathrm{II}\,xy)}{dy} \Big)_{a,y} \cdot \delta^2 z_{a,y} + (\mathrm{II}\,x^2)_{a,y} \cdot \Big(\frac{d_x \delta^2 z}{dx} \Big)_{a,y} \\
& + \eta_{a,y} \cdot \delta z^2_{a,y} + 2 \eta'_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} \cdot \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} \Big)_{a,y} + \eta''_{a,y} \cdot \Big(\frac{d_x dz}{dx} \Big)^2_{a,y} \\
& + 2 \varepsilon_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} \Big)_{a,y} + 2 \varepsilon'_{a,y} \cdot \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} \Big)_{a,y} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} \Big)_{a,y} + \varepsilon''_{a,y} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} \Big)^2_{a,y} \\
& - \Big((\mathrm{I}\,x) - \frac{d_x (\mathrm{II}\,x^2)}{dx} - \frac{d_y (\mathrm{II}\,xy)}{dy} \Big)_{\mathfrak{a},y} \cdot \delta^2 z_{\mathfrak{a},y} - (\mathrm{II}\,x^2)_{\mathfrak{a},y} \cdot \Big(\frac{d_x \delta^2 z}{dx} \Big)_{\mathfrak{a},y} \\
& - \eta_{\mathfrak{a},y} \cdot \delta z^2_{\mathfrak{a},y} - 2 \eta'_{\mathfrak{a},y} \cdot \delta z_{\mathfrak{a},y} \cdot \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} \Big)_{\mathfrak{a},y} - \eta''_{\mathfrak{a},y} \cdot \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} \Big)^2_{\mathfrak{a},y} \\
& - 2 \varepsilon_{\mathfrak{a},y} \cdot \delta z_{\mathfrak{a},y} \cdot \Big(\frac{d_y dz}{dy} \Big)_{\mathfrak{a},y} - 2 \varepsilon'_{\mathfrak{a},y} \cdot \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} \Big)_{\mathfrak{a},y} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} \Big)_{\mathfrak{a},y} - \varepsilon''_{\mathfrak{a},y} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} \Big)^2_{\mathfrak{a},y} \Big] . dy \\
& + \int_{\mathfrak{a}}^a \Big[\Big((\mathrm{I}\,y) - \frac{d_y (\mathrm{II}\,y^2)}{dy} - \frac{d_x (\mathrm{II}\,xy)}{dx} \Big)_{x,\beta} \cdot \delta^2 z_{x,\beta} + (\mathrm{II}\,y^2)_{x,\beta} \cdot \Big(\frac{d_y \delta^2 z}{dy} \Big)_{x,\beta} \\
& + \omega_{x,\beta} \cdot \delta z^2_{x,\beta} + 2 \omega'_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} \cdot \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} \Big)_{x,\beta} + \omega''_{x,\beta} \cdot \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} \Big)^2_{x,\beta} \\
& + 2 \mu_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} \Big)_{x,\beta} + 2 \mu'_{x,\beta} \cdot \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} \Big)_{x,\beta} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} \Big)_{x,\beta} + \mu''_{x,\beta} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} \Big)^2_{x,\beta} \\
& - \Big((\mathrm{I}\,y - \frac{d_y (\mathrm{II}\,y^2)}{dy} - \frac{d_x (\mathrm{II}\,xy)}{dx} \Big)_{x,b} \cdot \delta^2 z_{x,b} - (\mathrm{II}\,y^2)_{x,b} \cdot \Big(\frac{d_y \delta^2 z}{dy} \Big)_{x,b} \\
& - \omega_{x,b} \cdot \delta z^2_{x,b} - 2 \omega'_{x,b} \cdot \delta z_{x,b} \cdot \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} \Big)_{x,b} - \omega''_{x,b} \cdot \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} \Big)^2_{x,b} \\
& - 2 \mu_{x,b} \cdot \delta z_{x,\beta} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} \Big)_{x,b} - 2 \mu'_{x,b} \cdot \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} \Big)_{x,b} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} \Big)_{x,b} - \mu''_{x,b} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} \Big)^2_{x,b} \Big] . dx \\
& + \int_{\mathfrak{a}}^a \int_b^\beta \Big[\mathfrak{A} \cdot \Big(\frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} + \mathfrak{A}' \frac{d_x d_y \delta z}{dx \,. dy} + \mathfrak{A}'' \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + \mathfrak{A}''' \frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A}'''' \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{A}''''' . \delta z \Big)^2 \\
& + \mathfrak{B} . \Big(\frac{d_x d_y \delta z}{dx \,. dy} + \mathfrak{B}' \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + \mathfrak{B}'' \frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{B}''' \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B}'''' . \delta z \Big)^2 \\
& + \mathfrak{C} . \Big(\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + \mathfrak{C}' \frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{C}'' \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C}''' . \delta z \Big)^2 \Big] . dy \,. dx
\end{aligned}
$$

An dieser Form erkennt man, dass es am zweckmässigsten ist, die noch willkürlichen sieben Stücke unter folgenden dreizehn

$$\lambda \quad , \quad \eta , \eta' , \eta'' , \varepsilon , \varepsilon' , \varepsilon'' \quad , \quad \omega , \omega' , \omega'' , \mu , \mu' , \mu''$$

herauszuwählen, und so zu verwenden, dass sich $\delta^2 U$ jetzt ebenso, wie in der vorigen Untersuchung, auf das zweifache Integral zurückzieht. Dann aber ist der Zeichenstand des $\delta^2 U$ abhängig von den drei Ausdrücken

$$\mathfrak{A} \quad , \quad \mathfrak{B} \quad , \quad \mathfrak{C}$$

d. h. wenn man dem y alle von b bis β stetig nebeneinander liegenden Werthe, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch dem x alle von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthe beilegt; und wenn dabei:

1. jedes der drei Stücke $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ positiv bleibt, so ist auch $\delta^2 U$ positiv; wenn aber dabei
2. jedes der drei Stücke $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ negativ bleibt, so ist auch $\delta^2 U$ negativ.

Bestimmt man $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ wirklich, so bekommt man

$$\text{X)}\quad \mathfrak{A} = \mathrm{F}_1 \quad , \quad \text{XI)}\quad \mathfrak{B} = \frac{\mathrm{E}_1 . \mathrm{F}_1 - \mathrm{E}_2^2}{\mathrm{F}_1}$$

und

$$\text{XII)}\quad \mathfrak{C} = \frac{\mathrm{D}_1 . \mathrm{E}_1 . \mathrm{F}_1 + 2\mathrm{D}_2 . \mathrm{D}_3 . \mathrm{E}_2 - \mathrm{D}_1 . \mathrm{E}_2^2 - \mathrm{E}_1 . \mathrm{D}_3^2 - \mathrm{F}_1 . \mathrm{D}_2^2}{\mathrm{E}_1 . \mathrm{F}_1 - \mathrm{E}_2^2}.$$

Diese drei Ausdrücke sind aber ganz die nemlichen, welche sich ergeben, wenn man das Aggregat

$$\odot \qquad \begin{aligned} &\mathrm{D}_1 . \left(\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}\right)^2 + 2\mathrm{D}_2 . \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} . \frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} + 2\mathrm{D}_3 . \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} . \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \\ &+ \mathrm{E}_1 . \left(\frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy}\right)^2 + 2\mathrm{E}_2 . \frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} . \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} + \mathrm{F}_1 . \left(\frac{d_y^2 \delta z}{dy^2}\right)^2 \end{aligned}$$

auf folgende Form

$$\mathfrak{A} . \left(\frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} + \mathfrak{A}' \frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} + \mathfrak{A}'' \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}\right)^2 + \mathfrak{B} . \left(\frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} + \mathfrak{B}' \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}\right)^2 + \mathfrak{C} . \left(\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}\right)^2$$

bringt; und daraus folgt die höchst beachtenswerthe Regel:

„Wenn der für $\delta^2 U$ sich ergebende Ausdruck positiv oder negativ sein soll, so muss das „Aggregat $\odot$ positiv oder negativ bleiben, während man dem y alle von b bis β stetig neben„einander liegenden Werthe, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch dem x alle „von a bis α stetig neben einander liegenden Werthe beilegt."

Dabei beachte man noch den Ausnahmsfall: Wenn von den zwei Ausdrücken $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ entweder einer oder auch beide zugleich bei einigen oder auch bei allen den genannten Werthen des x und des y zu Null werden, so ist vorstehende Regel noch immer anwendbar; sie verliert jedoch alle Anwendbarkeit, sobald ein einziger der einundzwanzig Ausdrücke

$$\begin{gathered} \mathrm{A}_1 , \mathrm{A}_2 , \mathrm{A}_3 , \mathrm{A}_4 , \mathrm{A}_5 , \mathrm{A}_6 \quad , \quad \mathrm{B}_1 , \mathrm{B}_2 . \mathrm{B}_3 , \mathrm{B}_4 , \mathrm{B}_5 \\ \mathrm{C}_1 , \mathrm{C}_2 , \mathrm{C}_3 , \mathrm{C}_4 \quad , \quad \mathrm{D}_1 , \mathrm{D}_2 , \mathrm{D}_3 \quad , \quad \mathrm{E}_1 , \mathrm{E}_2 \quad , \quad \mathrm{F}_1 \end{gathered}$$

bei irgend einem der genannten Werthe des x und des y Null in den Nenner bekommt.

Nun ist man auf dem Punkte, der Gränzengleichung zu genügen; und zu diesem Ende sollen folgende drei Fälle vorgenommen werden.

§. 17.

Erster Gränzfall. Wenn für die Gränzen keine Vorschriften gemacht sind, so haben auch die Ausdrücke

$$☿ \qquad \begin{gathered} \delta z_{\alpha,\beta} \;,\; \delta z_{\alpha,b} \;,\; \delta z_{\mathrm{a},\beta} \;,\; \delta z_{\mathrm{a},b} \;,\; \delta z_{\alpha,y} \;,\; \delta z_{\mathrm{a},y} \;.\; \delta z_{x,\beta} \;.\; \delta z_{x,b} \\ \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\alpha,y} \;,\; \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\mathrm{a},y} \;,\; \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,\beta} \;,\; \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,b} \end{gathered}$$

und

$$\delta^2 z_{a,\beta} \;,\; \delta^2 z_{a,b} \;,\; \delta^2 z_{\mathrm{a},\beta} \;,\; \delta^2 z_{\mathrm{a},b} \;,\; \delta^2 z_{a,y} \;,\; \delta^2 z_{\mathrm{a},y} \;,\; \delta^2 z_{x,\beta} \;,\; \delta^2 z_{x,b}$$

♀ $$\left(\frac{d_x \delta^2 z}{dx}\right)_{a,y} \;,\; \left(\frac{d_x \delta^2 z}{dx}\right)_{\mathrm{a},y} \;,\; \left(\frac{d_y \delta^2 z}{dy}\right)_{x,\beta} \;,\; \left(\frac{d_y \delta^2 z}{dy}\right)_{x,b}$$

durchaus keiner Bedingung zu genügen. Hier sind also die bei ☿ aufgestellten zwölf Ausdrücke dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, obgleich sie alle aus einer und derselben Form $\delta z_{x,y}$ herstammen. Das nemliche gilt von den bei ♀ aufgestellten zwölf Ausdrücken, obgleich auch sie alle aus einer und derselben Form $\delta^2 z_{x,y}$ herstammen.

Die Gränzengleichung muss also diesmal, damit ihr genügt werde, in folgende zwölf einzelne zerfallen

$$1)\;\left((\mathrm{I}x) - \frac{d_x(\mathrm{II}x^2)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{II}xy)}{dy}\right)_{a,y} = 0 \quad,\quad 2)\;(\mathrm{II}x^2)_{a,y} = 0$$

$$3)\;\left((\mathrm{I}x) - \frac{d_x(\mathrm{II}x^2)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{II}xy)}{dy}\right)_{\mathrm{a},y} = 0 \quad,\quad 4)\;(\mathrm{II}x^2)_{\mathrm{a},y} = 0$$

$$5)\;\left((\mathrm{I}y) - \frac{d_y(\mathrm{II}y^2)}{dy} - \frac{d_x(\mathrm{II}xy)}{dx}\right)_{x,\beta} = 0 \quad,\quad 6)\;(\mathrm{II}y^2)_{x,\beta} = 0$$

$$7)\;\left((\mathrm{I}y) - \frac{d_y(\mathrm{II}y^2)}{dy} - \frac{d_x(\mathrm{II}xy)}{dx}\right)_{x,b} = 0 \quad,\quad 8)\;(\mathrm{II}y^2)_{x,b} = 0$$

$$9)\;(\mathrm{II}xy)_{a,\beta} = 0 \quad,\quad 10)\;(\mathrm{II}xy)_{a,b} = 0 \quad,\quad 11)\;(\mathrm{II}xy)_{\mathrm{a},\beta} = 0 \quad,\quad 12)\;(\mathrm{II}xy)_{\mathrm{a},b} = 0$$

In den vier Gleichungen 1), 2), 3), 4) ist x constant; sie sind aber nach y identisch, und müssen, wenn sie Differentialgleichungen sind, als totale Differentialgleichungen nach y behandelt werden.

In den vier Gleichungen 5), 6), 7), 8) ist y constant; sie sind aber nach x identisch, und müssen, wenn sie Differentialgleichungen sind, als totale Differentialgleichungen nach x behandelt werden.

Erst wenn man die für z gefundene allgemeine Function in diese acht Gleichungen substituirt und hierauf integrirt hat, können die sich ergebenden acht Integralgleichungen bei Specialisirung der (in z eingegangenen) willkürlichen Stücke benützt werden.

Die vier Gleichungen 9), 10), 11), 12) sind weder nach x noch nach y identisch, sondern gelten nur bei den bestimmten Werthen a, b, a, β; und diese vier Gleichungen müssen bei Specialisirung derjenigen Constanten benützt werden, welche durch Integration der so eben betrachteten acht totalen Differentialgleichungen eingegangen sind.

Wenn man jetzt die letzten zwölf Gleichungen (Nr. 1 — Nr. 12) beachtet, so zieht sich Gleichung IX) zurück auf

$$\mathrm{XIII)}\quad \delta^2 U = \lambda_{a,\beta}\cdot\delta z^2_{a,\beta} - \lambda_{a,b}\cdot\delta z^2_{a,b} - \lambda_{\mathrm{a},\beta}\cdot\delta z^2_{\mathrm{a},\beta} + \lambda_{\mathrm{a},b}\cdot\delta z^2_{\mathrm{a},b}$$
$$+\int_b^\beta\Big[\eta_{a,y}\cdot\delta z^2_{a,y} + 2\eta'_{a,y}\cdot\delta z_{a,y}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{a,y} + \eta''_{a,y}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2_{a,y}$$
$$+ 2\varepsilon_{a,y}\cdot\delta z_{a,y}\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{a,y} + 2\varepsilon'_{a,y}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{a,y}\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{a,y} + \varepsilon''_{a,y}\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2_{a,y}$$
$$-\eta_{\mathrm{a},y}\cdot\delta z^2_{\mathrm{a},y} - 2\eta'_{\mathrm{a},y}\cdot\delta z_{\mathrm{a},y}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{\mathrm{a},y} - \eta''_{\mathrm{a},y}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2_{\mathrm{a},y}$$

$$-2\varepsilon_{a,y}\cdot\partial z_{a,y}\cdot\left(\frac{d_y\partial z}{dy}\right)_{a,y}-2\varepsilon'_{a,y}\cdot\left(\frac{d_x\partial z}{dx}\right)_{a,y}\cdot\left(\frac{d_y\partial z}{dy}\right)_{a,y}-\varepsilon''_{a,y}\cdot\left(\frac{d_y\partial z}{dy}\right)^2_{a,y}\Bigg]\cdot dy$$

$$+\int_a^\alpha\Bigg[\omega_{x,\beta}\cdot\partial z^2_{x,\beta}+2\omega'_{x,\beta}\cdot\partial z_{x,\beta}\cdot\left(\frac{d_x\partial z}{dx}\right)_{x,\beta}+\omega''_{x,\beta}\cdot\left(\frac{d_x\partial z}{dx}\right)^2_{x,\beta}$$

$$+2\mu_{x,\beta}\cdot\partial z_{x,\beta}\cdot\left(\frac{d_y\partial z}{dy}\right)_{x,\beta}+2\mu'_{x,\beta}\cdot\left(\frac{d_x\partial z}{dx}\right)_{x,\beta}\cdot\left(\frac{d_y\partial z}{dy}\right)_{x,\beta}+\mu''_{x,\beta}\cdot\left(\frac{d_y\partial z}{dy}\right)^2_{x,\beta}$$

$$-\omega_{x,b}\cdot\partial z^2_{x,b}-2\omega'_{x,b}\cdot\partial z_{x,b}\cdot\left(\frac{d_x\partial z}{dx}\right)_{x,b}-\omega''_{x,b}\cdot\left(\frac{d_x\partial z}{dx}\right)^2_{x,b}$$

$$-2\mu_{x,b}\cdot\partial z_{x,b}\cdot\left(\frac{d_y\partial z}{dy}\right)_{x,b}-2\mu'_{x,b}\cdot\left(\frac{d_x dz}{dx}\right)_{x,b}\cdot\left(\frac{d_y\partial z}{dy}\right)_{x,b}-\mu''_{x,b}\cdot\left(\frac{d_y\partial z}{dy}\right)^2_{x,b}\Bigg]\cdot dx$$

$$+\int_a^\alpha\int_b^\beta\Bigg[\mathfrak{A}\cdot\left(\frac{d_y^2\partial z}{dy^2}+\mathfrak{A}'\frac{d_x d_y\partial z}{dx\,dy}+\mathfrak{A}''\frac{d_x^2\partial z}{dx^2}+\mathfrak{A}'''\frac{d_y\partial z}{dy}+\mathfrak{A}''''\frac{d_x\partial z}{dx}+\mathfrak{A}'''''\cdot\partial z\right)^2$$

$$+\mathfrak{B}\cdot\left(\frac{d_x d_y\partial z}{dx.dy}+\mathfrak{B}'\frac{d_x^2\partial z}{dx^2}+\mathfrak{B}''\frac{d_y\partial z}{dy}+\mathfrak{B}'''\frac{d_x\partial z}{dx}+\mathfrak{B}''''\cdot\partial z\right)^2$$

$$+\mathfrak{C}\cdot\left(\frac{d_x^2\partial z}{dx^2}+\mathfrak{C}'\frac{d_y\partial z}{dy}+\mathfrak{C}''\frac{d_x\partial z}{dx}+\mathfrak{C}'''\cdot\partial z\right)^2\Bigg]\cdot dy\cdot dx$$

Nun sind, wie bereits (in §. 16) auseinandergesetzt wurde, unter den dreizehn Stücken

$$\lambda\ ,\ \eta\ ,\eta'\ ,\eta''\ ,\varepsilon\ ,\varepsilon'\ ,\varepsilon''\quad,\quad\omega\ ,\omega'\ ,\omega''\ ,\mu\ ,\mu'\ ,\mu''$$

noch sieben willkürlich. Man kann also sieben dieser dreizehn Stücke, weil es im hiesigen ersten Falle gerade geschehen darf, zu Null werden lassen. Hierauf wird man, nach Analogie des §. 10 verfahrend, alle vorhandenen Partialdifferentialgleichungen integriren, und die dadurch eingehenden willkürlichen Functionen in der Weise benützen, dass Alles, was in Gleichung XIII noch ausserhalb des doppelten Integrals zurückgeblieben ist, vollständig hinwegfällt, d. h. dass sich der in XIII aufgestellte Ausdruck des $\partial^2 U$ auf das Doppelintegral zurückzieht.

§. 18.

Zweiter Gränzfall. Für die Gränzen seien acht derartige Bedingungen vorgeschrieben, dass man jedes der Gränzelemente

$$z_{a,y}\ ,\ z_{\alpha,y}\ ,\ z_{x,b}\ ,\ z_{x,\beta}\quad,\quad\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y}\ ,\ \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y}\ ,\ \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,b}\ ,\ \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\beta}$$

auf folgende Weise

13) $z_{a,y}=\mathfrak{f}'(y)$, 14) $z_{\alpha,y}=\mathfrak{f}''(y)$, 15) $z_{x,b}=\mathfrak{f}'''(x)$, 16) $z_{x,\beta}=\mathfrak{f}''''(x)$

17) $\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y}=\mathfrak{F}'(y)$, 18) $\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y}=\mathfrak{F}''(y)$, 19) $\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,b}=\mathfrak{F}'''(x)$, 20) $\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\beta}=\mathfrak{F}''''(x)$

in einem bestimmten Ausdrucke entweder wirklich darstellen oder wenigstens als dargestellt denken kann.

Hierbei müssen folgende nach y identische Gleichungen

$$\partial z_{a,y}=0\quad,\quad\partial z_{\alpha,y}=0\quad,\quad\partial^2 z_{a,y}=0\quad,\quad\partial^2 z_{\alpha,y}=0\quad,\ \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d_x\partial z}{dx}\right)_{a,y}=0\quad,\quad\left(\frac{d_x\partial z}{dx}\right)_{\alpha,y}=0\quad,\quad\left(\frac{d_x\partial^2 z}{dx}\right)_{a,y}=0\quad,\quad\left(\frac{d_x\partial^2 z}{dx}\right)_{\alpha,y}=0\ ,\ \text{etc.}$$

und ebenso folgende nach x identische Gleichungen

$$♂ \quad \begin{array}{l} \partial z_{x,b}=0 \quad , \quad \partial z_{x,\beta}=0 \quad , \quad \partial^2 z_{x,b}=0 \quad , \quad \partial^2 z_{x,\beta}=0 \quad , \text{ etc.} \\ \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,b}=0 \quad , \quad \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,\beta}=0 \quad , \quad \left(\frac{d_y \delta^2 z}{dy}\right)_{x,b}=0 \quad , \quad \left(\frac{d_y \delta^2 z}{dy}\right)_{x,\beta}=0 \quad , \text{ etc.} \end{array}$$

stattfinden.

Weil die Gleichungen ♁ nach y identisch sind, so gelten sie auch bei $y=b$ und bei $y=\beta$; und so hat man auch

$$♃ \quad \begin{array}{l} \partial z_{\mathrm{a},b}=0 \quad , \quad \partial z_{\alpha,b}=0 \quad , \quad \partial^2 z_{\mathrm{a},b}=0 \quad , \quad \partial^2 z_{\alpha,b}=0 \quad , \text{ etc.} \\ \partial z_{\mathrm{a},\beta}=0 \quad , \quad \partial z_{\alpha,\beta}=0 \quad , \quad \partial^2 z_{\mathrm{a},\beta}=0 \quad , \quad \partial^2 z_{\alpha,\beta}=0 \quad , \text{ etc.} \end{array}$$

Weil ferner die Gleichungen ♂ nach x identisch sind, so gelten sie auch bei $x=\mathrm{a}$ und bei $x=\alpha$; und somit bekommt man abermals das System der Gleichungen ♃.

Die ganze Gränzengleichung VI fällt also diesmal von selbst weg, und der in IX aufgestellte allgemeine Ausdruck des Prüfungsmittels reducirt sich ohneweiters auf das zweifache Integral, so dass es jetzt gar nicht nöthig ist, sich um die dreizehn unbestimmten Stücke $\lambda, \eta, \eta', \eta'', \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \omega, \omega', \omega'', \mu, \mu', \mu''$ zu bekümmern, und der Zeichenstand des $\partial^2 U$ kurzweg von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ abhangt.

Die acht Gleichungen (Nr. 13 — Nr. 20) dienen dazu, die durch Integration der Hauptgleichung eingegangenen willkürlichen Stücke zu specialisiren.

§. 19.

Dritter Gränzfall. Für die Gränzen seien vier derartige Bedingungen vorgeschrieben, dass man jedes der Gränzelemente

$$z_{\mathrm{a},b} \quad , \quad z_{\alpha,b} \quad , \quad z_{\mathrm{a},\beta} \quad ; \quad z_{\alpha,\beta}$$

in einem bestimmten, von x und y unabhängigen, Ausdrucke entweder wirklich darstellen, oder doch wenigstens dargestellt denken kann.

Hierbei müssen folgende, aber nur bei den Werthen a, α, b, β giltige, Gleichungen

$$\begin{array}{l} \partial z_{\mathrm{a},b}=0 \quad , \quad \partial z_{\alpha,b}=0 \quad , \quad \partial z_{\mathrm{a},\beta}=0 \quad , \quad \partial z_{\alpha,\beta}=0 \; , \\ \partial^2 z_{\mathrm{a},b}=0 \quad , \quad \partial^2 z_{\alpha,b}=0 \quad , \quad \partial^2 z_{\mathrm{a},\beta}=0 \quad , \quad \partial^2 z_{\alpha,\beta}=0 \; , \\ \text{etc. etc.} \end{array}$$

stattfinden. Diese Gleichungen haben aber keine Rückwirkung auf die Ausdrücke

$$\partial z_{\mathrm{a},y} \; , \; \partial z_{\alpha,y} \; , \; \partial z_{x,b} \; ; \; \partial z_{x,\beta} \; , \; \partial^2 z_{\mathrm{a},y} \; , \; \partial^2 z_{\alpha,y} \; , \; \partial^2 z_{x,b} \; , \; \partial^2 z_{x,\beta} \; , \; \text{etc.}$$

wo entweder das x oder das y noch allgemein geblieben ist; und so müssen, damit die Gränzengleichung vollständig wegfällt, noch die acht Gleichungen (Nr. 1 — Nr. 8) zu Hilfe genommen werden. Diese aber muss man zuerst als totale Differentialgleichungen integriren, und dann kann man sie bei Specialisirung der in z eingegangenen willkürlichen Functionen benützen. Und so fort.

Andere specielle Fälle hinsichtlich der Befriedigung der Gränzengleichung, besonders solche Fälle, wo zwischen $\partial z_{\mathrm{a},y}$ und $\partial z_{\alpha,y}$, zwischen $\partial z_{x,b}$ und $\partial z_{x,\beta}$, oder auch zwischen $\partial z_{\mathrm{a},b}$, $\partial z_{\alpha,b}$, $\partial z_{\mathrm{a},\beta}$, $\partial z_{\alpha,\beta}$ Abhängigkeiten stattfinden, kann man sich nach Belieben bilden.

§. 20.

Zusatz. Nicht immer müssen in dem Ausdrucke W die fünf Differentialquotienten $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$, $\frac{d_x d_y z}{dx . dy}$, $\frac{d_y^2 z}{dy^2}$ zugleich enthalten sein, sondern es kann auch einer oder mehrere derselben fehlen. Das Verfahren, besonders das bei Herstellung des Prüfungsmittels, ändert sich alsdann ein wenig, wie an folgenden zwei Beispielen gezeigt werden mag.

Erstes Beispiel. Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen x, y, z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$ versehener Ausdruck, und man sucht für z eine solche Function von x und y, dass das Integral

$$U = \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b}^{\beta} W . dy . dx$$

ein Maximum oder Minimum wird. Hier hat man bei Herstellung des Prüfungsmittels statt des Doppelintegrals VII diesmal nur folgendes

$$\begin{aligned}\text{XIV)} \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b}^{\beta} \Big\{ & \mathrm{A}_1 . \partial z^2 + 2\,\mathrm{A}_2 . \partial z . \frac{d_x \partial z}{dx} + 2\,\mathrm{A}_3 . \partial z . \frac{d_y \partial z}{dy} + 2\,\mathrm{A}_4 . \partial z . \frac{d_x^2 \partial z}{dx^2} \\ & + \mathrm{B}_1 . \Big(\frac{d_x \partial z}{dx}\Big)^2 + 2\,\mathrm{B}_2 . \frac{d_x \partial z}{dx} . \frac{d_y \partial z}{dy} + 2\,\mathrm{B}_3 . \frac{d_x \partial z}{dx} . \frac{d_x^2 \partial z}{dx^2} \\ & + \mathrm{C}_1 . \Big(\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)^2 + 2\,\mathrm{C}_2 . \frac{d_y \partial z}{dy} . \frac{d_x^2 \partial z}{dx^2} + \mathrm{D}_1 . \Big(\frac{d_x^2 \partial z}{dx^2}\Big)^2 \Big\} . dy . dx\end{aligned}$$

und dieses muss man auf die Form

$$\begin{aligned}\text{XV)} \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b}^{\beta} \Big\{ & \frac{1}{dx} . d_x \Big[\eta . \partial z^2 + 2\,\eta' . \partial z . \frac{d_x \partial z}{dx} + \eta'' . \Big(\frac{d_x^2 \partial z}{dx^2}\Big)^2 \Big] + \frac{1}{dy} . d_y\, (\omega . \partial z^2) \\ & + \mathfrak{C} . \Big(\frac{d_x^2 \partial z}{dx^2} + \mathfrak{C}' \frac{d_y \partial z}{dy} + \mathfrak{C}'' \frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{C}''' . \partial z \Big)^2 \\ & + \mathfrak{D} . \Big(\frac{d_y \partial z}{dy} + \mathfrak{D}' \frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{D}'' . \partial z \Big)^2 \\ & + \mathfrak{E} . \Big(\frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{E}' . \partial z \Big)^2 + \mathfrak{F} . \partial z^2 \Big\} . dy . dx\end{aligned}$$

bringen. Wenn man aber XIV mit XV vergleicht, so bekommt man nur zehn Bestimmungsgleichungen, während vierzehn unbestimmte Stücke, nämlich

$$\eta\,,\ \eta'\,,\ \eta'' \quad , \quad \omega$$

und

$$\mathfrak{C}\,,\ \mathfrak{C}'\,,\ \mathfrak{C}''\,,\ \mathfrak{C}''' \quad , \quad \mathfrak{D}\,,\ \mathfrak{D}'\,,\ \mathfrak{D}'' \quad , \quad \mathfrak{E}\,,\ \mathfrak{E}' \quad , \quad \mathfrak{F}$$

vorhanden sind, so dass vier derselben willkürlich bleiben.

Es können aber die in der neuen Form XV befindlichen drei Stücke

$$\mathfrak{C} \ , \ \mathfrak{C}' \ , \ \mathfrak{D}$$

vollständig bestimmt werden durch solche Stücke, welche in der ursprünglichen Form XIV vorkommen; und somit darf man die oben besprochene Willkürlichkeit auf diese drei Stücke nicht anwenden.

Man benütze nun diese Willkürlichkeit dazu, dass man vorerst folgende drei Stücke

$$\mathfrak{E} \;,\; \mathfrak{E}' \;,\; \mathfrak{F}$$

zu Null werden lässt. Dann hat man immer noch die acht

$$\eta \,,\, \eta' \,,\, \eta'' \,,\, \omega \quad,\quad \mathfrak{C}' \,,\, \mathfrak{C}'' \quad,\quad \mathfrak{D}' \,,\, \mathfrak{D}''$$

von welchen noch eines willkürlich ist. Verfährt man jetzt weiter, wie in §. 16; so kommt man zu der Erkenntniss, dass der Zeichenstand des $\delta^2 U$ von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ abhängig ist. Nun ist

$$\mathfrak{C} = D_1 \quad,\quad \text{und } \mathfrak{D} = \frac{C_1 \,.\, D_1 - C_2^2}{D_1}$$

und diese zwei Ausdrücke sind ganz die nämlichen welche sich ergeben, wenn man das Aggregat

$$\mathfrak{h} \qquad C_1 \,.\, \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 + 2\,C_2 \,.\, \frac{d_y \delta z}{dy} \,.\, \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + D_1 \,.\, \left(\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}\right)^2$$

auf die Form

$$\mathfrak{C} \,.\, \left(\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + \mathfrak{G}\, \frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 + \mathfrak{D} \,.\, \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2$$

bringt, d. h. der Zeichenstand des $\delta^2 U$ ist der nämliche, wie der des Aggregates $\mathfrak{h}$.

Zweites Beispiel. Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen x, y, z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x d_y z}{dx \,.\, dy}$ versehener Ausdruck; und man sucht für z eine solche Function von x und y, dass das Integral

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta W \,.\, dy \,.\, dx$$

ein Maximum oder Minimum wird. Hier hat man bei Herstellung des Prüfungsmittels statt des Doppelintegrals VII diesmal nur folgendes

$$\begin{aligned} \text{XVI)} \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big\{ & A_1 \,.\, \delta z^2 + 2\,A_2 \,.\, \delta z \,.\, \frac{d_x \delta z}{dx} + 2\,A_3 \,.\, \delta z \,.\, \frac{d_y \delta z}{dy} + 2\,A_5 \,.\, \delta z \,.\, \frac{d_x d_y \delta z}{dx \,.\, dy} \\ & + B_1 \,.\, \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 2\,B_2 \,.\, \frac{d_x \delta z}{dx} \,.\, \frac{d_y \delta z}{dy} + 2\,B_4 \,.\, \frac{d_x \delta z}{dx} \,.\, \frac{d_x d_y \delta z}{dx \,.\, dy} \\ & + C_1 \,.\, \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 + 2\,C_3 \,.\, \frac{d_y \delta z}{dy} \,.\, \frac{d_x d_y \delta z}{dx\, dy} + E_1 \,.\, \left(\frac{d_x d_y \delta z}{dx \,.\, dy}\right)^2 \Big\} \,.\, dy \,.\, dx \end{aligned}$$

und dieses muss man auf die Form

$$\begin{aligned} \text{XVII)} \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big\{ & \frac{d_x d_y (\lambda \,.\, \delta z^2)}{dx \,.\, dy} - \\ & + \frac{1}{dx} \,.\, d_x \left[\eta \,.\, \delta z^2 + 2\,\varepsilon \,.\, \delta z \,.\, \frac{d_y \delta z}{dy} + \varepsilon'' \,.\, \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{dy} \cdot d_y \Big[\omega \cdot \delta z^2 + 2\omega' \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \omega'' \cdot \Big(\frac{d_x \delta z}{dx}\Big)^2\Big]$$

$$+ \mathfrak{B} \cdot \Big(\frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} + \mathfrak{B}'' \frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{B}''' \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B}'''' \cdot \delta z\Big)^2$$

$$+ \mathfrak{D} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{D}' \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{D}'' \cdot \delta z\Big)^2$$

$$+ \mathfrak{E} \cdot \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{E}' \cdot \delta z\Big)^2 + \mathfrak{F} \cdot \delta z^2\Big\} \cdot dy \cdot dx$$

bringen. Wenn man aber XVII mit XVI vergleicht, so bekommt man nur zehn Bestimmungsgleichungen, während siebzehn unbestimmte Stücke, nämlich

$$\lambda \quad , \quad \eta \, , \, \varepsilon \, , \, \varepsilon'' \quad , \quad \omega \, , \, \omega' \, , \, \omega''$$

und

$$\mathfrak{B} \, , \, \mathfrak{B}'' \, , \, \mathfrak{B}''' \, , \, \mathfrak{B}'''' \quad , \quad \mathfrak{D} \, , \, \mathfrak{D}' \, , \, \mathfrak{D}'' \quad , \quad \mathfrak{E} \, , \, \mathfrak{E}' \quad , \quad \mathfrak{F}$$

vorhanden sind, so dass sieben derselben willkürlich bleiben.

Nun ist $\mathfrak{B} = E_1$, d. h. das in der neuen Form XVII befindliche Stück $\mathfrak{B}$ ist durch das in der ursprünglichen Form XVI enthaltene Stück E_1 vollständig bestimmt; und somit darf man die oben besprochene Willkürlichkeit auf $\mathfrak{B}$ nicht anwenden. Man benütze dieselbe aber dazu, dass man vorerst folgende sechs Stücke

$$\mathfrak{D} \, , \, \mathfrak{D}' \, , \, \mathfrak{D}'' \quad , \quad \mathfrak{E} \, , \, \mathfrak{E}' \quad , \quad \mathfrak{F}$$

zu Null werden lässt. Dann hat man immer noch die zehn Stücke

$$\lambda \quad , \quad \eta \, , \, \varepsilon \, , \, \varepsilon'' \quad , \quad \omega \, , \, \omega' \, , \, \omega'' \quad , \quad \mathfrak{B}'' \, , \, \mathfrak{B}''' \, , \, \mathfrak{B}''''$$

von welchen noch eines willkürlich ist. Verfährt man weiter wie in §. 16, so kommt man zu der Erkenntniss, dass der Zeichenstand des $\delta^2 U$ jetzt von $\mathfrak{B} = E_1$ allein abhängig ist.

Untersuchung 3.

§. 21.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen

$$x \, , \, y \, , \, z \, , \, \frac{d_x z}{dx} \, , \, \frac{d_y z}{dy} \, , \, \frac{d_x^2 z}{dx^2} \, , \, \frac{d_x d_y z}{dx . dy} \, , \, \frac{d_y^2 z}{dy^2} \, , \, w \, , \, \frac{d_x w}{dx} \, , \, \frac{d_y w}{dy}$$

versehener, Ausdruck; und man sucht für z und für w solche Functionen von x und y, dass dabei folgendes Integral

$$\text{I)} \quad U \doteq \int_a^\alpha \int_b^\beta W . dy . dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum oder Minimum wird.

Man bezeichne zur Abkürzung die zu den Differentialquotienten

$$\frac{d_x \delta z}{dx} \, , \, \frac{d_y \delta z}{dy} \, , \, \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} \, , \, \frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} \, , \, \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \, , \quad \text{und} \quad \frac{d_x \delta w}{dx} \, , \, \frac{d_y \delta w}{dy}$$

gehörigen Factoren bezüglich mit

$$(\mathrm{I}'x)\ ,\ (\mathrm{I}'y)\ ,\ (\mathrm{II}'x^2)\ ,\ (\mathrm{II}'xy)\ ,\ (\mathrm{II}'y^2)\ . \quad \text{und}\ (\mathrm{I}''x)\ ,\ (\mathrm{I}''y)$$

so bekommt man zunächst

$$\partial U = \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b}^{\beta}\Big[\frac{d_z W}{dz}\partial z + (\mathrm{I}'x)\frac{d_x \partial z}{dx} + (\mathrm{I}'y)\frac{d_y\partial z}{dy} + (\mathrm{II}'x^2)\frac{d_x^2\partial z}{dx^2}$$
$$+ (\mathrm{II}'xy)\frac{d_x d_y \partial z}{dx\,.\,dy} + (\mathrm{II}'y^2)\frac{d_y^2\partial z}{dy^2} + \frac{d_w W}{dw}\partial w + (\mathrm{I}''x)\frac{d_x\partial w}{dx} + (\mathrm{I}''y)\frac{d_y\partial w}{dy}\Big]\,.\,dy\,.\,dx$$

Diesem Ausdrucke kann man auch folgende Form geben:

$$\text{II)}\quad \partial U = \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b}^{\beta}\Big\{\frac{d_x d_y[(\mathrm{II}'xy)\,.\,\delta z]}{dx\,.\,dy}$$
$$+ \frac{d_x\Big[\Big((\mathrm{I}'x) - \frac{d_x(\mathrm{II}'x^2)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{II}'xy)}{dy}\Big)\,.\,\delta z + (\mathrm{II}'x^2)\frac{d_x\delta z}{dx} + (\mathrm{I}''x)\,.\,\delta w\Big]}{dx}$$
$$+ \frac{d_y\Big[\Big((\mathrm{I}'y) - \frac{d_y(\mathrm{II}'y^2)}{dy} - \frac{d_x(\mathrm{II}'xy)}{dx}\Big)\,.\,\delta z + (\mathrm{II}'y^2)\frac{d_y\delta z}{dy} + (\mathrm{I}''y)\,.\,\delta w\Big]}{dy}$$
$$+ \Big(\frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}'x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}'y)}{dy} + \frac{d_x^2(\mathrm{II}'x^2)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(\mathrm{II}'xy)}{dx\,.\,dy} + \frac{d_y^2(\mathrm{II}'y^2)}{dy^2}\Big)\,.\,\partial z$$
$$+ \Big(\frac{d_w W}{dw} - \frac{d_x(\mathrm{I}''x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}''y)}{dy}\Big)\,.\,\partial w\Big\}\,.\,dy\,.\,dx\,.$$

Führt man bei den durchlaufenden Differentialen die betreffenden Integrationen aus, so gibt sich weiter

$$\text{III)}\quad \partial U = (\mathrm{II}'xy)_{a,\beta}\,.\,\partial z_{a,\beta} - (\mathrm{II}'xy)_{a,b}\,.\,\partial z_{a,b} - (\mathrm{II}'xy)_{\mathrm{a},\beta}\,.\,\partial z_{\mathrm{a},\beta} + (\mathrm{II}'xy)_{\mathrm{a},b}\,.\,\partial z_{\mathrm{a},b}$$
$$+\int_{b}^{\beta}\Big[\Big((\mathrm{I}'x) - \frac{d_x(\mathrm{II}'x^2)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{II}'xy)}{dy}\Big)_{a,y}\,.\,\partial z_{a,y} + (\mathrm{II}'x^2)_{a,y}\,.\Big(\frac{d_x\partial z}{dx}\Big)_{a,y} + (\mathrm{I}''x)_{a,y}\,.\,\partial w_{a,y}$$
$$-\Big((\mathrm{I}'x) - \frac{d_x(\mathrm{II}'x^2)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{II}'xy)}{dy}\Big)_{\mathrm{a},y}\,.\,\partial z_{\mathrm{a},y} - (\mathrm{II}'x^2)_{\mathrm{a},y}\,.\Big(\frac{d_x\partial z}{dx}\Big)_{\mathrm{a},y} - (\mathrm{I}''x)_{\mathrm{a},y}\,.\,\partial w_{\mathrm{a},y}\Big]\,.\,dy$$
$$+\int_{\mathrm{a}}^{a}\Big[\Big((\mathrm{I}'y) - \frac{d_y(\mathrm{II}'y^2)}{dy} - \frac{d_x(\mathrm{II}'xy)}{dx}\Big)_{x,\beta}\,.\,\partial z_{x,\beta} + (\mathrm{II}'y^2)_{x,\beta}\,.\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}\Big)_{x,\beta} + (\mathrm{I}''y)_{x,\beta}\,.\,\partial w_{x,\beta}$$
$$-\Big((\mathrm{I}'y) - \frac{d_y(\mathrm{II}'y^2)}{dy} - \frac{d_x(\mathrm{II}'xy)}{dx}\Big)_{x,b}\,.\,\partial z_{x,b} - (\mathrm{II}'y^2)_{x,b}\,.\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}\Big)_{x,b} - (\mathrm{I}''y)_{x,b}\,.\,\partial w_{x,b}\Big]\,.\,dx$$
$$+\int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b}^{\beta}\Big[\Big(\frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}'x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}'y)}{dy} + \frac{d_x^2(\mathrm{II}'x^2)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(\mathrm{II}'xy)}{dx\,.\,dy} + \frac{d_y^2(\mathrm{II}'y^2)}{dy^2}\Big)\,.\,\partial z$$
$$+\Big(\frac{d_w W}{dw} - \frac{d_x(\mathrm{I}''x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}''y)}{dy}\Big)\,.\,\partial w\Big]\,.\,dy\,.\,dx\,.$$

§. 22.

Bei Herstellung des Prüfungsmittels muss man folgendes Doppelintegral

$$\text{IV)} \int_a^\alpha\!\!\int_b^\beta \Big\{ A_1 . \partial z^2 + 2A_2 . \partial z \frac{d_x \partial z}{dx} + 2A_3 . \partial z \frac{d_y \partial z}{dy} + 2A_4 . \partial z \frac{d_x^2 \partial z}{dx^2} + 2A_5 . \partial z \frac{d_x d_y \partial z}{dx . dy}$$

$$+ 2A_6 . \partial z \frac{d_y^2 \partial z}{dy^2} + 2A_7 . \partial z . \partial w + 2A_8 . \partial z \frac{d_x \partial w}{dx} + 2A_9 . \partial z \frac{d_y \partial w}{dy}$$

$$+ B_1 . \Big(\frac{d_x \partial z}{dx}\Big)^2 + 2B_2 \frac{d_x \partial z}{dx} . \frac{d_y \partial z}{dy} + 2B_3 \frac{d_x \partial z}{dx} . \frac{d_x^2 \partial z}{dx^2} + 2B_4 \frac{d_x \partial z}{dx} . \frac{d_x d_y \partial z}{dx . dy} + 2B_5 \frac{d_x \partial z}{dx} . \frac{d_y^2 \partial z}{dy^2}$$

$$+ 2B_6 \frac{d_x \partial z}{dx} \partial w + 2B_7 \frac{d_x \partial z}{dx} . \frac{d_x \partial w}{dx} + 2B_8 \frac{d_x \partial z}{dx} . \frac{d_y \partial w}{dy}$$

$$+ C_1 . \Big(\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)^2 + 2C_2 \frac{d_y \partial z}{dy} . \frac{d_x^2 \partial z}{dx^2} + 2C_3 \frac{d_y \partial z}{dy} . \frac{d_x d_y \partial z}{dx . dy} + 2C_4 \frac{d_y \partial z}{dy} . \frac{d_y^2 \partial z}{dy^2} + 2C_5 \frac{d_y \partial z}{dy} dw$$

$$+ 2C_6 \frac{d_y \partial z}{dy} . \frac{d_x \partial w}{dx} + 2C_7 \frac{d_y \partial z}{dy} . \frac{d_y \partial w}{dy}$$

$$+ D_1 . \Big(\frac{d_x^2 \partial z}{dx^2}\Big)^2 + 2D_2 \frac{d_x^2 \partial z}{dx^2} . \frac{d_x d_y \partial z}{dx . dy} + 2D_3 \frac{d_x^2 \partial z}{dx^2} . \frac{d_y^2 \partial z}{dy^2} + 2D_4 \frac{d_x^2 \partial z}{dx^2} \partial w + 2D_5 \frac{d_x^2 \partial z}{dx^2} . \frac{d_x \partial w}{dx} + 2D_6 \frac{d_x^2 \partial z}{dx^2} . \frac{d_y \partial w}{dy}$$

$$+ E_1 . \Big(\frac{d_x d_y \partial z}{dx . dy}\Big)^2 + 2E_2 \frac{d_x d_y \partial z}{dx . dy} . \frac{d_y^2 \partial z}{dy^2} + 2E_3 \frac{d_x d_y \partial z}{dx . dy} \partial w + 2E_4 \frac{d_x d_y \partial z}{dx . dy} . \frac{d_x \partial w}{dx} + 2E_5 \frac{d_x d_y \partial z}{dx . dy} . \frac{d_y \partial w}{dy}$$

$$+ F_1 . \Big(\frac{d_y^2 \partial z}{dy^2}\Big)^2 + 2F_2 \frac{d_y^2 \partial z}{dy^2} \partial w + 2F_3 \frac{d_y^2 \partial z}{dy^2} . \frac{d_x \partial w}{dx} + 2F_4 \frac{d_y^2 \partial z}{dy^2} . \frac{d_y \partial w}{dy}$$

$$+ C_1 . \partial w^2 + 2C_2 . \partial w \frac{d_x \partial w}{dx} + 2C_3 . \partial w \frac{d_y \partial w}{dy}$$

$$+ H_1 . \Big(\frac{d_x \partial w}{dx}\Big)^2 + 2H_2 \frac{d_x \partial w}{dx} . \frac{d_y \partial w}{dy}$$

$$+ J_1 . \Big(\frac{d_y \partial w}{dy}\Big)^2 \Big\} . dy . dx$$

auf die Form

$$\text{V)} \int_a^\alpha\!\!\int_b^\beta \Big\{ \frac{d_x d_y (\lambda . \partial z^2)}{dx . dy}$$

$$+ \frac{1}{dx} . d_x \Big[\eta_1 . \partial z^2 + 2\eta_2 . \partial z \frac{d_x \partial z}{dx} + 2\eta_3 . \partial z \frac{d_y \partial z}{dy} + 2\eta_4 . \partial z . \partial w + \eta_5 \Big(\frac{d_x \partial z}{dx}\Big)^2 + 2\eta_6 \frac{d_x \partial z}{dx} . \frac{d_y \partial z}{dy}$$

$$+ 2\eta_7 \frac{d_x \partial z}{dx} \partial w + \eta_8 . \Big(\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)^2 + 2\eta_9 \frac{d_y \partial z}{dy} \partial w + \eta_{10} . \partial w^2 \Big]$$

$$+ \frac{1}{dy} . d_y \Big[\omega_1 . \partial z^2 + 2\omega_2 . \partial z \frac{d_x \partial z}{dx} + 2\omega_3 . \partial z \frac{d_y \partial z}{dy} + 2\omega_4 . \partial z . \partial w + \omega_5 . \Big(\frac{d_x \partial z}{dx}\Big)^2 + 2\omega_6 \frac{d_x \partial z}{dx} . \frac{d_y \partial z}{dy}$$

$$+ 2\omega_7 \frac{d_x \partial z}{dx} \partial w + \omega_8 . \Big(\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)^2 + 2\omega_9 \frac{d_y \partial z}{dy} \partial w + \omega_{10} . \partial w^2 \Big]$$

$$+ \mathfrak{A}_1 . \Big(\frac{d_y^2 \partial z}{dy^2} + \mathfrak{A}_2 \frac{d_x d_y \partial z}{dx . dy} + \mathfrak{A}_3 \frac{d_x^2 \partial z}{dx^2} + \mathfrak{A}_4 \frac{d_y \partial z}{dy} + \mathfrak{A}_5 \frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{A}_6 . \partial z + \mathfrak{A}_7 \frac{d_y \partial w}{dy}$$

$$+ \mathfrak{A}_8 \frac{d_x \partial w}{dx} + \mathfrak{A}_9 . \partial w \Big)^2$$

$$+ \mathfrak{B}_1 . \Big(\frac{d_x d_y \partial z}{dx . dy} + \mathfrak{B}_2 \frac{d_x^2 \partial z}{dx^2} + \mathfrak{B}_3 \frac{d_y \partial z}{dy} + \mathfrak{B}_4 \frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{B}_5 . \partial z + \mathfrak{B}_6 \frac{d_y \partial w}{dy} + \mathfrak{B}_7 \frac{d_x \partial w}{dx} + \mathfrak{B}_8 . \partial w \Big)^2$$

$$+ \mathfrak{C}_1 \,.\, \Big(\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + \mathfrak{C}_2 \frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{C}_3 \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C}_4 \,.\, \delta z + \mathfrak{C}_5 \frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{C}_6 \frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{C}_7 \,.\, \delta w\Big)^2$$

$$+ \mathfrak{D}_1 \,.\, \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{D}_2 \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{D}_3 \,.\, \delta z + \mathfrak{D}_4 \frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{D}_5 \frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{D}_6 \,.\, \delta w\Big)^2$$

$$+ \mathfrak{E}_1 \,.\, \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{E}_2 \,.\, \delta z + \mathfrak{E}_3 \frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{E}_4 \frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{E}_5 \,.\, \delta w\Big)^2$$

$$+ \mathfrak{F}_1 \,.\, \Big(\delta z + \mathfrak{F}_2 \frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{F}_3 \frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{F}_4 \,.\, \delta w\Big)^2$$

$$+ \mathfrak{G}_1 \,.\, \Big(\frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{G}_2 \frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{G}_3 \,.\, \delta w\Big)^2$$

$$+ \mathfrak{H}_1 \,.\, \Big(\frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{H}_2 \,.\, \delta w\Big)^2$$

$$+ \mathfrak{J}_1 \,.\, \delta w^2\Big\} \,.\, dy \,.\, dx$$

bringen. Wenn man jetzt IV und V mit einander vergleicht, so bekommt man fünfundvierzig Bestimmungsgleichungen, während sechsundsechszig unbestimmte Stücke, nämlich

$$\lambda \;,\; \eta_1 , \eta_2 , \eta_3 , \eta_4 , \eta_5 , \eta_6 , \eta_7 , \eta_8 , \eta_9 , \eta_{10} \;,\; \omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \omega_4 , \omega_5 , \omega_6 , \omega_7 , \omega_8 , \omega_9\, \omega_{10}$$

und

$$\mathfrak{A}_1 , \mathfrak{A}_2 , \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{A}_5 , \mathfrak{A}_6 , \mathfrak{A}_7 , \mathfrak{A}_8 , \mathfrak{A}_9 \;,\; \mathfrak{B}_1 , \mathfrak{B}_2 , \mathfrak{B}_3 , \mathfrak{B}_4 , \mathfrak{B}_5 , \mathfrak{B}_6 , \mathfrak{B}_7 , \mathfrak{B}_8$$

$$\mathfrak{C}_1 , \mathfrak{C}_2 , \mathfrak{C}_3 , \mathfrak{C}_4 , \mathfrak{C}_5 , \mathfrak{C}_6 , \mathfrak{C}_7 \;,\; \mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2 , \mathfrak{D}_3 , \mathfrak{D}_4 , \mathfrak{D}_5 , \mathfrak{D}_6$$

$$\mathfrak{E}_1 , \mathfrak{E}_2 , \mathfrak{E}_3 , \mathfrak{E}_4 , \mathfrak{E}_5 \;,\; \mathfrak{F}_1 , \mathfrak{F}_2 , \mathfrak{F}_3 , \mathfrak{F}_4 \;,\; \mathfrak{G}_1 , \mathfrak{G}_2 , \mathfrak{G}_3 \;,\; \mathfrak{H}_1 , \mathfrak{H}_2 \;,\; \mathfrak{J}_1$$

vorhanden sind, so dass einundzwanzig derselben willkürlich bleiben.

Weil aber unsere fünfundvierzig Bestimmungsgleichungen nichts Widersprechendes enthalten, so ist es in der That möglich, dem Doppelintegral IV die Form V zu geben.

Es können aber folgende, in der neuen Form befindliche fünfzehn Stücke

$$\mathfrak{A}_1 , \mathfrak{A}_2 , \mathfrak{A}_3 , \mathfrak{A}_7 , \mathfrak{A}_8 \;,\; \mathfrak{B}_1 , \mathfrak{B}_2 , \mathfrak{B}_6 , \mathfrak{B}_7$$

$$\mathfrak{C}_1 , \mathfrak{C}_5 , \mathfrak{C}_6 \;,\; \mathfrak{G}_1 , \mathfrak{G}_2 \;,\; \mathfrak{H}_1$$

vollständig durch Stücke bestimmt werden, welche sich in der ursprünglichen Form IV befinden, und somit darf man die oben besprochene Willkürlichkeit auf diese fünfzehn Stücke nicht anwenden.

Man benütze aber diese Willkürlichkeit dazu, dass man vorerst folgende sechszehn Stücke

$$\mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2 , \mathfrak{D}_3 , \mathfrak{D}_4 , \mathfrak{D}_5 , \mathfrak{D}_6 \;,\; \mathfrak{E}_1 , \mathfrak{E}_2 , \mathfrak{E}_3 , \mathfrak{E}_4 , \mathfrak{E}_5 \;,\; \mathfrak{F}_1 , \mathfrak{F}_2 , \mathfrak{F}_3 , \mathfrak{F}_4 \;,\; \mathfrak{J}_1$$

zu Null werden lässt. Dann hat man immer noch die fünfunddreissig

$$\lambda \;,\; \eta_1 , \eta_2 , \eta_3 , \eta_4 , \eta_5 , \eta_6 , \eta_7 , \eta_8 , \eta_9 , \eta_{10} \;,\; \omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \omega_4 , \omega_5 , \omega_6 , \omega_7 , \omega_8 , \omega_9\, \omega_{10}$$

und

$$\mathfrak{A}_4 , \mathfrak{A}_5 , \mathfrak{A}_6 , \mathfrak{A}_9 \;,\; \mathfrak{B}_3 , \mathfrak{B}_4 , \mathfrak{B}_5 , \mathfrak{B}_8 \;,\; \mathfrak{C}_2 , \mathfrak{C}_3 , \mathfrak{C}_4 , \mathfrak{C}_7 \;,\; \mathfrak{G}_3 \;,\; \mathfrak{H}_2$$

von welchen noch fünf willkürlich sind; und wenn man jetzt ebenso, wie im §. 9 und §. 16, bei den durchlaufenden Differentialen die betreffenden Integrationen ausführt, so wird man auch jetzt erkennen, dass es am zweckmässigsten ist, die noch willkürlichen fünf Stücke aus folgenden einundzwanzig

$$\lambda\ ,\ \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7, \eta_8, \eta_9, \eta_{10}\ ,\ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}$$

herauszuwählen, und, wie bei den zwei vorigen Untersuchungen, in der Weise zu verfahren, dass zuletzt nur bleibt

$$\begin{aligned}
\text{VI)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha\!\!\int_b^\beta \Big[\, & \mathfrak{A}_1 \cdot \Big(\frac{d_y^2\,\delta z}{dy^2} + \mathfrak{A}_2 \frac{d_x d_y \delta z}{dx.dy} + \mathfrak{A}_3 \frac{d_x^2\,\delta z}{dx^2} + \mathfrak{A}_4 \frac{d_y\,\delta z}{dy} + \mathfrak{A}_5 \frac{d_x\,\delta z}{dx} + \mathfrak{A}_6 \,.\, \delta z \\
& \qquad + \mathfrak{A}_7 \frac{d_y\,\delta w}{dy} + \mathfrak{A}_8 \frac{d_x\,\delta w}{dx} + \mathfrak{A}_9 \,.\, \delta w\Big)^2 \\
& + \mathfrak{B}_1 \cdot \Big(\frac{d_x d_y \delta z}{dx.dy} + \mathfrak{B}_2 \frac{d_x^2\,\delta z}{dx^2} + \mathfrak{B}_3 \frac{d_y\,\delta z}{dy} + \mathfrak{B}_4 \frac{d_x\,\delta z}{dx} + \mathfrak{B}_5 \,.\, \delta z \\
& \qquad + \mathfrak{B}_6 \frac{d_y\,\delta w}{dy} + \mathfrak{B}_7 \frac{d_x\,\delta w}{dx} + \mathfrak{B}_8 \,.\, \delta w\Big)^2 \\
& + \mathfrak{C}_1 \cdot \Big(\frac{d_x^2\,\delta z}{dx^2} + \mathfrak{C}_2 \frac{d_y\,\delta z}{dy} + \mathfrak{C}_3 \frac{d_x\,\delta z}{dx} + \mathfrak{C}_4 \,.\, \delta z + \mathfrak{C}_5 \frac{d_y\,\delta w}{dy} \\
& \qquad + \mathfrak{C}_6 \frac{d_x\,\delta w}{dx} + \mathfrak{C}_7 \,.\, \delta w\Big)^2 \\
& + \mathfrak{G}_1 \cdot \Big(\frac{d_y\,\delta w}{dy} + \mathfrak{G}_2 \frac{d_x\,\delta w}{dx} + \mathfrak{G}_3 \,.\, \delta w\Big)^2 \\
& + \mathfrak{H}_1 \cdot \Big(\frac{d_x\,\delta w}{dx} + \mathfrak{H}_2 \,.\, \delta w\Big)^2 \Big] \,.\, dy \,.\, dx
\end{aligned}$$

An diesem Aggregate aber erkennt man, dass $\delta^2 U$ positiv oder negativ ist, je nachdem die fünf Bestandtheile

$$\mathfrak{A}_1 \quad , \quad \mathfrak{B}_1 \quad , \quad \mathfrak{C}_1 \quad , \quad \mathfrak{G}_1 \quad , \quad \mathfrak{H}_1$$

entweder gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ sind. Diese fünf Stücke lassen sich aber geradezu bestimmen, wenn man aus dem Ausdrucke IV das Aggregat

$$\begin{aligned}
& \mathrm{D}_1 \cdot \Big(\frac{d_x^2\,\delta z}{dx^2}\Big)^2 + 2\,\mathrm{D}_2 \frac{d_x^2\,\delta z}{dx^2} \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx.dy} + 2\,\mathrm{D}_3 \frac{d_x^2\,\delta z}{dx^2} \cdot \frac{d_y^2\,\delta z}{dy^2} + 2\,\mathrm{D}_5 \frac{d_x^2\,\delta z}{dx^2} \cdot \frac{d_x\,\delta w}{dx} + 2\,\mathrm{D}_6 \frac{d_x^2\,\delta z}{dx^2} \cdot \frac{d_y\,\delta w}{dy} \\
& + \mathrm{E}_1 \cdot \Big(\frac{d_x d_y \delta z}{dx.dy}\Big)^2 + 2\,\mathrm{E}_2 \frac{d_x d_y \delta z}{dx.dy} \cdot \frac{d_y^2\,\delta z}{dy^2} + 2\,\mathrm{E}_4 \frac{d_x d_y \delta z}{dx.dy} \cdot \frac{d_x\,\delta w}{dx} + 2\,\mathrm{E}_5 \frac{d_x d_y \delta z}{dx.dy} \cdot \frac{d_y\,\delta w}{dy} \\
& + \mathrm{F}_1 \cdot \Big(\frac{d_y^2\,\delta z}{dy^2}\Big)^2 + 2\,\mathrm{F}_3 \frac{d_y^2\,\delta z}{dy^2} \cdot \frac{d_x\,\delta w}{dx} + 2\,\mathrm{F}_4 \frac{d_y^2\,\delta z}{dy^2} \cdot \frac{d_y\,\delta w}{dy} \\
& + \mathrm{H}_1 \cdot \Big(\frac{d_x\,\delta w}{dx}\Big)^2 + 2\,\mathrm{H}_2 \frac{d_x\,\delta w}{dx} \cdot \frac{d_y\,\delta w}{dy} \\
& + \mathrm{J}_1 \cdot \Big(\frac{d_y\,\delta w}{dy}\Big)^2
\end{aligned}$$

herausnimmt, und auf folgende Form

$$\mathfrak{A}_1 \cdot \left(\frac{d_y^2 \,\delta z}{d y^2} + \mathfrak{A}_2 \frac{d_x d_y \,\delta z}{d x . d y} + \mathfrak{A}_3 \frac{d_x^2 \,\delta z}{d x^2} + \mathfrak{A}_7 \frac{d_y \,\delta w}{d y} + \mathfrak{A}_8 \frac{d_x \,\delta w}{d x} \right)^2$$

$$+ \mathfrak{B}_1 \cdot \left(\frac{d_x d_y \,\delta z}{d x . d y} + \mathfrak{B}_2 \frac{d_x^2 \,\delta z}{d x^2} + \mathfrak{B}_6 \frac{d_y \,\delta w}{d y} + \mathfrak{B}_7 \frac{d_x \,\delta w}{d x} \right)^2$$

$$+ \mathfrak{C}_1 \cdot \left(\frac{d_x^2 \,\delta z}{d x^2} + \mathfrak{C}_5 \frac{d_y \,\delta w}{d y} + \mathfrak{C}_6 \frac{d_x \,\delta w}{d x} \right)^2$$

$$+ \mathfrak{G}_1 \cdot \left(\frac{d_y \,\delta w}{d y} + \mathfrak{G}_2 \frac{d_x \,\delta w}{d x} \right)^2$$

$$+ \mathfrak{H}_1 \cdot \left(\frac{d_x \,\delta w}{d x} \right)^2$$

bringt.

Man hat also auch jetzt wieder eine Regel, welche denen in den zwei vorigen Untersuchungen analog ist; nemlich:

„Wenn der für $\delta^2 U$ sich ergebende Ausdruck positiv oder negativ sein soll, muss das „Aggregat ⊙ positiv oder negativ bleiben, während man dem y alle von b bis β stetig neben-„einander liegenden Werthe, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch dem x alle „von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthe beilegt.“

Dabei beachte man noch den Ausnahmsfall: Wenn von den vier Ausdrücken $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ entweder einer oder mehrere oder gar alle bei einigen oder bei allen den genannten Werthen des x und y zu Null werden, so bleibt die eben ausgesprochene Regel noch immer anwendbar; sie verliert aber alle Anwendbarkeit, sobald, wie schon öfters angedeutet wurde, ein einziger der in IV befindlichen Theilsätze bei irgend einem der genannten Werthe des x und des y einmal Null in den Nenner bekommt.

Nun wären noch einzelne Gränzfälle aufzustellen und durchzuführen. Dieses kann aber in Folge der zwei vorhergehenden Untersuchungen unterbleiben.

Untersuchung 4.

§. 23.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen

$$x \,,\, y \,,\, z \,,\, \frac{d_x z}{dx} \,,\, \frac{d_y z}{dy} \,,\, \frac{d_x^2 z}{d x^2} \,,\, \frac{d_x d_y z}{d x . d y} \,;\, \frac{d_y^2 z}{d y^2} \,,\, \frac{d_x^3 z}{d x^3} \,; \; \ldots\ldots\ldots$$

versehener Ausdruck; und man sucht für z eine solche Function von x und y, und zugleich für a, α, b, β solche Werthe, dass dabei folgendes Integral

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta W . dy . dx$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Die mit dem griechischen Buchstaben δ versehenen Ausdrücke, z. B.

$$\delta y \quad , \quad \delta^2 y \quad , \quad \delta^3 y \quad , \quad \delta^4 y \;, \text{ etc.}$$

sind bereits in dem Sinne verbraucht, dass man sich Functionen darunter denken muss. Desshalb sollen, um Begriffsverwirrung zu vermeiden, die blossen Werthänderungen auf andere

Weise angezeigt werden. Dazu mag der griechische Buchstabe ϑ dienen; und man wird die den verschiedenen Ordnungen entsprechenden Werthänderungen eines Veränderlichen a durch

$$\vartheta \mathrm{a} \quad , \quad \vartheta^2 \mathrm{a} \quad , \quad \vartheta^3 \mathrm{a} \quad , \quad \vartheta^4 \mathrm{a}\,, \text{ etc.}$$

darstellen. Auf diese Weise bekommt man

$$\text{II)}\ \partial U = \int_b^\beta (W_{\alpha, y} \,.\, \vartheta\alpha - W_{\mathrm{a}, y}\, \vartheta \mathrm{a}) \,.\, dy + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} (W_{x, \beta} \,.\, \vartheta\beta - W_{x, b} \,.\, \vartheta b) \,.\, dx$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_b^{\beta} \partial W \,.\, dy \,.\, dx$$

$$\text{III)}\ \partial^2 U = 2\, W_{\alpha, \beta} \,.\, \vartheta\alpha . \vartheta\beta - 2\, W_{\alpha, b} \,.\, \vartheta\alpha \,.\, \vartheta b - 2\, W_{\mathrm{a}, \beta} \,.\, \vartheta \mathrm{a} \,.\, \vartheta\beta + 2\, W_{\mathrm{a}, b} \,.\, \vartheta \mathrm{a} \,.\, \vartheta b$$

$$+ \int_b^\beta \Big[W_{\alpha, y} . \vartheta^2\alpha + 2 . \partial W_{\alpha, y} . \vartheta\alpha + \left(\frac{d_x W}{dx}\right)_{\alpha, y} . \vartheta\alpha^2$$

$$- W_{\mathrm{a}, y} . \vartheta^2 \mathrm{a} - 2 . \partial W_{\mathrm{a}, y} . \vartheta \mathrm{a} - \left(\frac{d_x W}{dx}\right)_{\mathrm{a}, y} . \vartheta \mathrm{a}^2 \Big] . dy$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \Big[W_{x, \beta} . \vartheta^2\beta + 2 . \partial W_{x, \beta} . \vartheta\beta + \left(\frac{d_y W}{dy}\right)_{x, \beta} . \vartheta\beta^2$$

$$- W_{x, b} . \vartheta^2 b - 2 . \partial W_{x, b} . \vartheta b - \left(\frac{d_y W}{dy}\right)_{x, b} . \vartheta b^2 \Big] . dx$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_b^{\beta} \partial^2 W . dy . dx$$

Hier ist

$$\text{IV)}\ \partial W = \frac{d_z W}{dz} \,.\, \partial z + \frac{d_p W}{dp} \,.\, \frac{d_x \partial z}{dx} + \frac{d_q W}{dq} \,.\, \frac{d_y \partial z}{dy} + \frac{d_r W}{dr} \,.\, \frac{d_x^2 \partial z}{dx^2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{V)}\ \partial^2 W = \frac{d_z W}{dz} \,.\, \partial^2 z + \frac{d_p W}{dp} \,.\, \frac{d_x \partial^2 z}{dx} + \frac{d_q W}{dq} \,.\, \frac{d_y \partial^2 z}{dy} + \frac{d_r W}{dr} \,.\, \frac{d_x^2 \partial^2 z}{dx^2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{d_z^2 W}{dz^2} \,.\, \partial z^2 + 2 \,.\, \frac{d_z d_p W}{dz . dp} \,.\, \partial z \,.\, \frac{d_x \partial z}{dx} + 2 \,.\, \frac{d_z d_q W}{dz . dq} \,.\, \partial z \,.\, \frac{d_y \partial z}{dy} + \ldots$$

$$\text{VI)}\ \frac{d_x W}{dx} = \frac{d_x W}{dx} + \frac{d_z W}{dz} \,.\, \frac{d_x z}{dx} + \frac{d_p W}{dp} \,.\, \frac{d_x^2 z}{dx^2} + \frac{d_q W}{dq} \,.\, \frac{d_x d_y z}{dx . dy} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{VII)}\ \frac{d_y W}{dy} = \frac{d_y W}{dy} + \frac{d_z W}{dz} \,.\, \frac{d_y z}{dy} + \frac{d_p W}{dp} \,.\, \frac{d_x d_y z}{dx . dy} + \frac{d_q W}{dq} \,.\, \frac{d_y^2 z}{dy^2} + \ldots\ldots\ldots$$

In den Gleichungen II und III müssen die mit den zweifachen Integralzeichen versehenen Theilsätze noch so umgeformt werden, wie bereits bei den drei vorigen Untersuchungen geschehen ist.

Dabei beachte man, dass die nach y auszuführenden Integrationen ganz unabhängig sind von $\vartheta \mathrm{a}$, $\vartheta\alpha$, $\vartheta^2 \mathrm{a}$, $\vartheta^2\alpha$, etc., und dass eben so die nach x auszuführenden Integrationen ganz unabhängig sind von ϑb, $\vartheta\beta$, $\vartheta^2 b$, $\vartheta^2\beta$, etc. Man kann also diese Werthänderungen, so oft es zweckmässig ist, auch ausserhalb der Integralzeichen setzen.

Um jedoch von den mancherlei Eigenthümlichkeiten, die dabei vorkommen können, einige zu erledigen, mögen noch zwei specielle Untersuchungen nachfolgen.

Untersuchung 5.

§. 24.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen $x, y . z, \frac{d_x z}{dx}, \frac{d_y z}{dy}$ versehener Ausdruck; und man sucht, während die Werthe von b und β bestimmt sind, für z eine solche Function von x und y, und zugleich für a und α solche Werthe, dass folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b}^{\beta} W . dy . dx$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Weil diesmal die Werthe von b und β bestimmt sind, so ist $\vartheta b = 0$, $\vartheta\beta = 0$, $\vartheta^2 b = 0$, $\vartheta^2\beta = 0$, etc.; und desshalb fallen alle mit ϑb, $\vartheta\beta$, $\vartheta^2 b$, $\vartheta^2\beta$ etc. behafteten Theilsätze der in voriger Untersuchung befindlichen allgemeinen Formeln hinweg, d. h. man bekommt diesmal nur

$$\text{II)}\quad \partial U = \int_{b}^{\beta}[W_{\alpha, y} . \vartheta\alpha + (\mathrm{I}x)_{\alpha, y} . \partial z_{\alpha, y} - W_{\mathrm{a}, y} . \vartheta\mathrm{a} - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a}, y} . \partial z_{\mathrm{a}, y}] . dy$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}[(\mathrm{I}y)_{x, \beta} . \partial z_{x, \beta} - (\mathrm{I}y)_{x, b} . \partial z_{x, b}] . dx$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b}^{\beta}\Big(\frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy}\Big) . \partial z . dy . dx$$

Daraus folgt zunächst die Hauptgleichung

$$\text{III)}\quad \frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy} = 0$$

welche in der Regel eine Partialdifferentialgleichung der zweiten Ordnung sein wird, so dass in ihr allgemeines Integral zwei willkürliche Functionen eingehen.

Man hat also diesmal wieder dieselbe Hauptgleichung, wie in der ersten Untersuchung, wo alle Integrationsgränzen constant waren.

Mit Berücksichtigung der Hauptgleichung bekommt man ferner

$$\text{IV)}\quad \partial^2 U = \int_{b}^{\beta}\Big[W_{\alpha, y} . \vartheta^2\alpha + 2 . \Big[\frac{d_z W}{dz}\partial z + (\mathrm{I}x)\frac{d_x\partial z}{dx} + (\mathrm{I}y)\frac{d_y\partial z}{dy}\Big]_{\alpha, y} . \vartheta\alpha$$
$$+ \Big(\frac{d_x W}{dx}\Big)_{\alpha, y} . \vartheta\alpha^2 + (\mathrm{I}x)_{\alpha, y} . \partial^2 z_{\alpha, y} + \eta_{\alpha, y} . \partial z^2_{\alpha, y}$$
$$- W_{\mathrm{a}, y} . \vartheta^2\mathrm{a} - 2 . \Big[\frac{d_z W}{dz}\partial z + (\mathrm{I}x)\frac{d_x\partial z}{dx} + (\mathrm{I}y)\frac{d_y\partial z}{dy}\Big]_{\mathrm{a}, y} . \vartheta\mathrm{a}$$
$$- \Big(\frac{d_x W}{dx}\Big)_{\mathrm{a}, y} . \vartheta\mathrm{a}^2 - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a}, y} . \partial^2 z_{\mathrm{a}, y} - \eta_{\mathrm{a}, y} . \partial z^2_{\mathrm{a}, y}\Big] . dy$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}[(\mathrm{I}x)_{x, \beta} . \partial^2 z_{x, \beta} + \omega_{x, \beta} . \partial z^2_{x, \beta} - (\mathrm{I}y)_{x, b} . \partial^2 z_{x, b} - \omega_{x, b} . \partial z^2_{x, b}] . dx$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b}^{\beta}\Big[\mathfrak{A}\Big(\frac{d_y\partial z}{dy} + \mathfrak{B}\frac{d_x\partial z}{dx} + \mathfrak{C} . \partial z\Big)^2 + \mathfrak{D}\Big(\frac{d_x\partial z}{dx} + \mathfrak{E} . \partial z\Big)^2\Big] . dy . dx$$

während, wie man aus der 1ten Untersuchung weiss, zwischen η und ω der durch folgende Partialdifferentialgleichung

$$\text{V)}\quad \left(\mathrm{F} - \frac{d_x \eta}{dx} - \frac{d_y \omega}{dy}\right) . (\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2) = \mathrm{A} . (\mathrm{E} - \eta)^2 - 2\mathrm{B} . (\mathrm{E} - \eta) . (\mathrm{D} - \omega) + \mathrm{C} . (\mathrm{D} - \omega)^2$$

ausgesprochene Zusammenhang stattfinden muss.

Nun ist man auf dem Punkte, der Gränzengleichung zu genügen: und zu diesem Ende mögen folgende zwei Fälle vorgenommen werden.

§. 25.

E r s t e r G r ä n z f a l l. Wenn für die Gränzen durchaus keine Vorschriften gemacht sind, so ist es zweckmässig, der Gränzengleichung folgende Form

$$\text{VI)}\quad \left(\int_b^\beta W_{\alpha,y} . dy\right) . \vartheta \alpha - \left(\int_b^\beta W_{\mathrm{a},y} . dy\right) . \vartheta \mathrm{a}$$

$$+ \int_b^\beta [(\mathrm{I}x)_{\alpha,y} . \partial z_{\alpha,y} - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} . \partial z_{\mathrm{a},y}] . dy + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} [(\mathrm{I}y)_{x,\beta} . \partial z_{x,\beta} - (\mathrm{I}y)_{x,b} . \partial z_{x,b}] . dx = 0$$

zu geben. Aber eben, weil für die Gränzen keine Vorschriften gemacht sind, so sind auch die sechs Bestandtheile

$$\vartheta \alpha \quad , \quad \vartheta \mathrm{a} \quad , \quad \partial z_{\alpha,y} \quad , \quad \partial z_{\mathrm{a},y} \quad , \quad \partial z_{x,\beta} \quad , \quad \partial z_{x,b}$$

ganz unabhängig von einander, und Gleichung VI zerlegt sich in folgende einzelne:

$$\text{VII)}\ (\mathrm{I}x)_{\alpha,y} = 0 \quad , \quad \text{VIII)}\ (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} = 0 \quad , \quad \text{IX)}\ (\mathrm{I}y)_{x,\beta} = 0 \quad , \quad \text{X)}\ (\mathrm{I}y)_{x,b} = 0$$

und

$$\text{XI)}\ \int_b^\beta W_{\alpha,y} . dy = 0 \quad , \quad \text{XII)}\ \int_b^\beta W_{\mathrm{a},y} . dy = 0.$$

In den Gleichungen VII und VIII ist x constant; sie sind aber nach y identisch, und müssen, wenn sie Differentialgleichungen sind, als totale Differentialgleichungen nach y behandelt werden.

In den Gleichungen IX und X ist y constant; sie sind aber nach x identisch, und müssen, wenn sie Differentialgleichungen sind, als totale Differentialgleichungen nach x behandelt werden.

Man substituire jetzt die für z gefundene a l l g e m e i n e Function in die Gleichungen VII, VIII, IX, X, und integrire dieselben als totale Differentialgleichungen. Erst die so erlangten v i e r Integralgleichungen können benützt werden zur Specialisirung der in z eingegangenen z w e i willkürlichen Functionen.

Hierauf substituire man die so specialisirte Function z in die Gleichungen XI und XII, und benütze diese Ergebnisse zur Bestimmung der festen Werthe, welche man den Bestandtheilen a und α beilegen muss. Man sieht aber, dass diese zwei Gleichungen einander einerlei sind; und so wird sich aus ihnen für a und α auch ganz der nemliche Ausdruck ergeben. d. h. man wird im Allgemeinen

$$\text{XIII)}\ \alpha = \zeta(b, \beta) \qquad \text{und} \qquad \text{XIV)}\ \mathrm{a} = \zeta(b, \beta)$$

bekommen. Ist nun $\zeta(b, \beta)$ vielförmig, so kann man die verschiedenen Formen so vertheilen, dass die der Untersuchung zu Grunde liegende Hauptbedingung $\alpha > \mathrm{a}$ erfüllt wird. Ist aber $\zeta(b, \beta)$ nur einförmig, so ist keine solche Vertheilung möglich, d. h. man bekommt $\alpha = \mathrm{a}$, was unzulässig ist.

In Folge der sechs Gleichungen VII — XII reducirt sich IV auf

$$\begin{aligned}\text{XV)}\ \partial^2 U = \int_b^\beta \Big[& \Big(\frac{d_x W}{dx}\Big)_{\alpha, y} . \vartheta\alpha^2 + 2 . \Big(\frac{d_z W}{dz}\partial z + (\mathrm{I}y)\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)_{\alpha, y} . \vartheta\alpha + \eta_{\alpha, y} . \partial z^2_{\alpha, y} \\ & - \Big(\frac{d_x W}{dx}\Big)_{\mathrm{a}, y} . \vartheta\mathrm{a}^2 - 2 . \Big(\frac{d_z W}{dz}\partial z + (\mathrm{I}y)\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)_{\mathrm{a}, y} . \vartheta\mathrm{a} - \eta_{\mathrm{a}, y} . \partial z^2_{\mathrm{a}, y}\Big] . dy \\ & + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} (\omega_{x, \beta} . \partial z^2_{x, \beta} - \omega_{x, b} . \partial z^2_{x, b}) . dx \\ & + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_b^\beta \Big[\mathfrak{A} . \Big(\frac{d_y \partial z}{dy} + \mathfrak{B}\frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{C} . \partial z\Big)^2 + \mathfrak{D}\Big(\frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{E} . \partial z\Big)^2\Big] . dy . dx\end{aligned}$$

während, wie gesagt, zwischen ω und η der durch Gleichung V ausgesprochene Zusammenhang stattfinden muss. Man lasse nun ω identisch zu Null werden, so findet nicht nur folgende Gleichung

$$\text{XVI)}\ \omega_{x, \beta} . \partial z^2_{x, \beta} - \omega_{x, b} . \partial z^2_{x, b} = 0$$

statt, sondern Gleichung V reducirt sich auch auf

$$\text{XVII)}\ \Big(\mathrm{F} - \frac{d_x \eta}{\partial x}\Big) . (\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2) = \mathrm{A} . (\mathrm{E} - \eta)^2 - 2\mathrm{B} . (\mathrm{E} - \eta) . \mathrm{D} + \mathrm{C} . \mathrm{D}^2$$

und wenn man nebstdem zur Bequemlichkeit

$$\mathfrak{V}_1 \quad , \quad \mathfrak{W}_1 \quad , \quad \mathfrak{V}_2 \quad , \quad \mathfrak{W}_2$$

bezüglich statt

$$\Big(\frac{d_x W}{dx}\Big)_{\mathrm{a}, y} \quad , \quad \Big(\frac{d_z W}{dz}\Big)_{\mathrm{a}, y} \quad , \quad \Big(\frac{d_x W}{dx}\Big)_{\alpha, y} \quad , \quad \Big(\frac{d_z W}{dz}\Big)_{\alpha, y}$$

setzt, so kann man der Gleichung XV folgende Form geben

$$\begin{aligned}\text{XVIII)}\ \partial^2 U = \int_b^\beta \Big\{ & \Big(\frac{d_x W}{dx}\Big)_{\alpha, y} . \Big[\vartheta\alpha + \frac{\mathfrak{W}_2}{\mathfrak{V}_2} . \partial z_{\alpha, y} + \frac{(\mathrm{I}y)_{\alpha, y}}{\mathfrak{V}_2} . \Big(\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)_{\alpha, y}\Big]^2 \\ & + \Big(-\frac{d_x W}{dx}\Big)_{\mathrm{a}, y} . \Big[\vartheta\mathrm{a} + \frac{\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{V}_1} . \partial z_{\mathrm{a}, y} + \frac{(\mathrm{I}y)_{\mathrm{a}, y}}{\mathfrak{V}_1} . \Big(\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)_{\mathrm{a}, y}\Big]^2\end{aligned}$$

$$- \frac{1}{\mathfrak{B}_2} \cdot \left[\mathfrak{W}_2 \,.\, \partial z_{a,y} + (\mathrm{I}y)_{a,y} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} \right)_{a,y} \right]^2 + \eta_{a,y} \,.\, \partial z^2_{a,y}$$

$$+ \frac{1}{\mathfrak{B}_1} \cdot \left[\mathfrak{W}_1 \,.\, \partial z_{\mathfrak{a},y} + (\mathrm{I}y)_{\mathfrak{a},y} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} \right)_{\mathfrak{a},y} \right]^2 - \eta_{\mathfrak{a},y} \,.\, \partial z^2_{\mathfrak{a},y} \Big\} \,.\, dy$$

$$+ \int_{\mathfrak{a}}^{a} \int_{b}^{\beta} \left[\mathfrak{A} \,.\, \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{B} \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \,.\, \partial z \right)^2 + \mathfrak{D} \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{E} \,.\, \partial z \right)^2 \right] . dy \,.\, dx$$

Nun fragt sich: unter welchen Umständen bleibt $\partial^2 U$ immer positiv oder negativ? Diese Frage beantwortet sich auf folgende Weise: Wäre in Gleichung XVIII das Aggregat

$$\text{XIX)} \quad - \frac{1}{\mathfrak{B}_2} \cdot \left[\mathfrak{W}_2 \,.\, \partial z_{a,y} + (\mathrm{I}y)_{a,y} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} \right)_{a,y} \right]^2 + \eta_{a,y} \cdot \partial z^2_{a,y}$$

$$+ \frac{1}{\mathfrak{B}_1} \cdot \left[\mathfrak{W}_1 \,.\, \partial z_{\mathfrak{a},y} + (\mathrm{I}y)_{\mathfrak{a},y} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} \right)_{\mathfrak{a},y} \right]^2 - \eta_{\mathfrak{a},y} \cdot \partial z^2_{\mathfrak{a},y}$$

nicht vorhanden, so würde man sofort erkennen, dass

1) das $\partial^2 U$ positiv ist, wenn die vier Ausdrücke $\left(\frac{d_x W}{dx} \right)_{a,y}$, $\left(- \frac{d_x W}{dx} \right)_{\mathfrak{a},y}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ zugleich positiv sind; dass dagegen

2) das $\partial^2 U$ negativ ist, wenn diese vier Ausdrücke zugleich negativ sind.

Weil nun die Gleichung XVII nur den einzigen Partialdifferentialquotienten $\frac{d_x \eta}{dx}$ enthält, so bekommt man durch deren Integration für η einen aus x, y, $\pi(y)$ zusammengesetzten Ausdruck, wobei $\pi(y)$ eine ganz willkürliche Function von y ist. Aber eben diese in η enthaltene willkürliche Function $\pi(y)$ kann man nach der bald so bald so beliebig genommenen Function ∂z auch jedesmal bald so bald so einrichten, dass das Aggregat XIX identisch zu Null wird.

Hiermit erkennt man, dass es in der That von den vier Ausdrücken

$$\left(\frac{d_x W}{dx} \right)_{a,y}, \quad \left(- \frac{d_x W}{dx} \right)_{\mathfrak{a},y}, \quad \mathfrak{A}; \quad \mathfrak{D}$$

abhangt, ob ein Maximum oder Minimum vorhanden ist.

§. 26.

Zweiter Gränzfall[1]. Man soll unter allen in Betracht zu ziehenden Functionen $z = \varphi(x, y)$ diejenige herauswählen, welche bei $x = \mathfrak{a}$ und bei $x = a$ bezüglich mit

$$\text{XX)} \quad c = f(x, y) \qquad \text{und} \qquad \text{XXI)} \quad \gamma = \mathfrak{f}(x, y)$$

zusammenfällt.

Dieses Zusammenfallen ist dargestellt durch die Gleichungen

[1] Eine, auf diesen Gränzfall bezügliche, geometrische Aufgabe ist folgende: „Man sucht zwischen zwei in festen Punkten der „Axe Y senkrechten Ebenen und zwischen zwei gegebenen Flächen die kleinste Oberfläche unter allen denen heraus, von „welchen die zwei gegebenen Flächen nach einfach gekrümmten Curven geschnitten werden, die so gelegen sind, dass „deren Ebenen auf der Axe X senkrecht stehen."

$$\text{XXII)}\ \varphi(\mathrm{a}, y) = f(\mathrm{a}, y) \quad \text{und} \quad \text{XXIII)}\ \varphi(\alpha, y) = \mathfrak{f}(\alpha, y)$$

oder kürzer durch

$$\text{XXIV)}\ z_{\mathrm{a}, y} = c_{\mathrm{a}, y} \quad \text{und} \quad \text{XXV)}\ z_{\alpha, y} = \gamma_{\alpha, y}$$

Für a und α werden bestimmte Werthe gesucht. Desshalb sind die beiden Gleichungen XXII und XXIII, oder XXIV und XXV, nur nach y identisch; und wenn man sie nach y differentiirt, so bekommt man

$$\text{XXVI)}\ \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{\mathrm{a}, y} = \left(\frac{d_y c}{dy}\right)_{\mathrm{a}, y} \quad . \quad \text{XXVII)}\ \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{\alpha, y} = \left(\frac{d_y \gamma}{dy}\right)_{\alpha, y} \quad .$$

$$\text{XXVIII)}\ \left(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{\mathrm{a}, y} = \left(\frac{d_y^2 c}{dy^2}\right)_{\mathrm{a}, y} \quad . \quad \text{XXIX)}\ \left(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{\alpha, y} = \left(\frac{d_y^2 \gamma}{dy^2}\right)_{\alpha, y} \quad .$$

und so fort.

Will man an die Stelle von a und α andere als die gesuchten Werthe in die Gleichungen XXIV und XXV substituiren; so muss man bei diesen zwei Gleichungen an die Stelle des z auch andere Functionen als die gesuchte $\varphi(x, y)$ setzen. Man bekommt also

$$\delta z_{\mathrm{a}, y} + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\mathrm{a}, y} . \vartheta \mathrm{a} = \left(\frac{d_x c}{dx}\right)_{\mathrm{a}, y} . \vartheta \mathrm{a}$$

$$\delta z_{\alpha, y} + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha, y} . \vartheta \alpha = \left(\frac{d_x \gamma}{dx}\right)_{\alpha, y} . \vartheta \alpha$$

$$\delta^2 z_{\mathrm{a}, y} + 2\left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\mathrm{a}, y} . \vartheta \mathrm{a} + \left(\frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{\mathrm{a}, y} . \vartheta \mathrm{a}^2 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\mathrm{a}, y} . \vartheta^2 \mathrm{a} = \left(\frac{d_x^2 c}{dx^2}\right)_{\mathrm{a}, y} . \vartheta \mathrm{a}^2 + \left(\frac{d_x c}{dx}\right)_{\mathrm{a}, y} . \vartheta^2 \mathrm{a}$$

$$\delta^2 z_{\alpha, y} + 2\left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\alpha, y} . \vartheta \alpha + \left(\frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{\alpha, y} . \vartheta \alpha^2 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha, y} . \vartheta^2 \alpha = \left(\frac{d_x^2 \gamma}{dx^2}\right)_{\alpha, y} . \vartheta \alpha^2 + \left(\frac{d_x \gamma}{dx}\right)_{\alpha, y} . \vartheta^2 \alpha$$

und so fort.

Man setze zur Bequemlichkeit

$$p \quad , \quad r \quad , \quad p' \quad , \quad r' \quad , \quad \mathfrak{p}' \quad , \quad \mathfrak{r}'$$

bezüglich statt

$$\frac{d_x z}{dx} \quad , \quad \frac{d_x^2 z}{dx^2} \quad , \quad \frac{d_x c}{dx} \quad , \quad \frac{d_x^2 c}{dx^2} \quad , \quad \frac{d_x \gamma}{dx} \quad , \quad \frac{d_x^2 \gamma}{dx^2}$$

so bekommt man aus den letzten vier Gleichungen für $\delta z_{\mathrm{a}, y}$, $\delta z_{\alpha, y}$, $\delta^2 z_{\mathrm{a}, y}$, $\delta^2 z_{\alpha, y}$ folgende Ausdrücke:

$$\text{XXX)}\ \delta z_{\mathrm{a}, y} = (p' - p)_{\mathrm{a}, y} . \vartheta \mathrm{a}$$

$$\text{XXXI)}\ \delta z_{\alpha, y} = (\mathfrak{p}' - p)_{\alpha, y} . \vartheta \alpha$$

$$\text{XXXII)}\ \delta^2 z_{\mathrm{a}, y} = (p' - p)_{\mathrm{a}, y} . \vartheta^2 \mathrm{a} + (r' - r)_{\mathrm{a}, y} . \vartheta \mathrm{a}^2 - 2 . \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\mathrm{a}, y} . \vartheta \mathrm{a}$$

$$\text{XXXIII)}\ \delta^2 z_{\alpha, y} = (\mathfrak{p}' - p)_{\alpha, y} . \vartheta^2 \alpha + (\mathfrak{r}' - r)_{\alpha, y} . \vartheta \alpha^2 - 2 . \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\alpha, y} . \vartheta \alpha$$

Jetzt aber muss man der Gränzengleichung ihre schon in II befindliche Form

$$\int_b^\beta [W_{\alpha,y}.\vartheta\alpha + (\mathrm{I}x)_{\alpha,y}.\partial z_{\alpha,y} - W_{\mathrm{a},y}.\vartheta\mathrm{a} - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y}.\partial z_{\mathrm{a},y}].dy$$
$$+\int_{\mathrm{a}}^{\alpha}[(\mathrm{I}y)_{x,\beta}.\partial z_{x,\beta} - (\mathrm{I}y)_{x,b}.\partial z_{x,b}].dx = 0$$

lassen: und wenn man $\partial z_{\alpha,y}$ und $\partial z_{\mathrm{a},y}$ eliminirt, so geht letztere Gleichung über in

$$\int_b^\beta \Big[[W+(\mathfrak{p}'-p).(\mathrm{I}x)]_{\alpha,y}.\vartheta\alpha - [W+(p'-p).(\mathrm{I}x)]_{\mathrm{a},y}.\vartheta\mathrm{a}\Big].dy$$
$$+\int_{\mathrm{a}}^{\alpha}[(\mathrm{I}y)_{x,\beta}.\partial z_{x,\beta} - (\mathrm{I}y)_{x,b}.\partial z_{x,b}].dx = 0$$

Diese Gleichung zerlegt sich aber ohne weiters in folgende vier:

XXXIV) $W_{\alpha,y} + (\mathfrak{p}'-p)_{\alpha,y}.(\mathrm{I}x)_{\alpha,y} = 0$, XXXV) $(\mathrm{I}y)_{x,\beta} = 0$

XXXVI) $W_{\mathrm{a},y} + (p'-p)_{\mathrm{a},y}.(\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} = 0$, XXXVII) $(\mathrm{I}y)_{x,b} = 0$

Man substituire jetzt die für z gefundene allgemeine Function in diese vier Gleichungen, und integrire sie als totale Differentialgleichungen. Erst die so erlangten vier Integralgleichungen können benützt werden zur Specialisirung der in z eingegangenen zwei willkürlichen Functionen.

Hierauf substituire man die so specialisirte Function $z=\varphi(x.y)$ in XXII und XXIII, und bestimme die Werthe von a und α. Das dabei anzuwendende Verfahren ergibt sich aus folgender Betrachtung:

1. Gleichung XXII ist eine nach y identische. Desshalb sind auch alle ihre Differentialgleichungen nach y identisch, und der Werth des a ist unabhängig von y. Man nehme daher die Gleichungen XXII und XXVI und eliminire y; so ergibt sich eine von y befreite Gleichung, wo aber noch der unbekannte Bestandtheil a vorkommt. Aus dieser neuen Gleichung kann man also a bestimmen.

2. Verbindet man ebenso die Gleichungen XXIII und XXVII, so gelangt man zur Bestimmung des α.

Sollten sich jedoch für a und α keine Werthe ergeben, die von y unabhängig sind, und gleichzeitig der Bedingung $\alpha > \mathrm{a}$ genügen; so ist dieser zweite Gränzfall unzulässig.

Mit Hilfe der Gleichungen XXVI und XXVII lassen sich die Gleichungen XXXIV und XXXVI öfters vereinfachen, was z. B. der Fall sein kann, wenn man statt der Potenzen

$$\left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2_{\mathrm{a},y} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2_{\alpha,y}$$

die bezüglich gleichgeltenden Producte

$$\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{\mathrm{a},y}.\left(\frac{d_y c}{dy}\right)_{\mathrm{a},y} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{\alpha,y}.\left(\frac{d_y \gamma}{dy}\right)_{\alpha,y}$$

setzt. Dadurch werden die Gleichungen XXXIV und XXXVI gewöhnlich eine symmetrische Gestalt annehmen, und sich, wenn die Aufgabe eine geometrische ist, auch auf einfache Weise geometrisch deuten lassen[1].

---

[1] Für die, in voriger Anmerkung gestellte, geometrische Aufgabe würden die auf besagte Weise umgestalteten zwei Gleichungen XXXIV und XXXVI die Bedeutung haben, dass die gesuchte Fläche auf den gegebenen Gränzflächen senkrecht steht.

Zur Herstellung des Prüfungsmittels eliminire man $\delta^2 z_{\mathrm{a},y}$ und $\delta^2 z_{\alpha,y}$ aus Gleichung IV, und beachte die vier Gleichungen XXXIV — XXXVII; und wenn man noch weiter zur Bequemlichkeit

$$\mathfrak{T}_1 \quad , \quad \mathfrak{W}_1 \quad , \quad \mathfrak{T}_2 \quad , \quad \mathfrak{W}_2$$

bezüglich statt

$$\left((\mathrm{I}x)\,.\,(r'-r)+\frac{d_x W}{dx}\right)_{\mathrm{a},y} \quad , \quad \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{\mathrm{a},y} \quad , \quad \left((\mathrm{I}x)\,.\,(r'-r)+\frac{d_x W}{dx}\right)_{\alpha,y} \quad , \quad \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{\alpha,y}$$

setzt, so kann man dem Prüfungsmittel folgende Form geben:

$$\begin{aligned}
\text{XXXVIII)}\quad \delta^2 U = \int_b^\beta \Big\{ & \left((\mathrm{I}x)\,.\,(r'-r)+\frac{d_x W}{dx}\right)_{\alpha,y} . \left[\vartheta\alpha + \frac{\mathfrak{W}_2}{\mathfrak{T}_2}\,\delta z_{\alpha,y} + \frac{(\mathrm{I}y)_{\alpha,y}}{\mathfrak{T}_2}\,.\left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{\alpha,y}\right]^2 \\
& - \left((\mathrm{I}x)\,.\,(r'-r)+\frac{d_x W}{dx}\right)_{\mathrm{a},y} . \left[\vartheta\mathrm{a} + \frac{\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{T}_1}\,\delta z_{\mathrm{a},y} + \frac{(\mathrm{I}y)_{\mathrm{a},y}}{\mathfrak{T}_1}\,.\left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{\mathrm{a},y}\right]^2 \\
& - \frac{1}{\mathfrak{T}_2}\,.\left[\mathfrak{W}_2\,.\,\delta z_{\alpha,y} + (\mathrm{I}y)_{\alpha,y}\,.\left(\frac{d_y dz}{dy}\right)_{\alpha,y}\right]^2 + \eta_{\alpha,y}\,.\,\delta z^2_{\alpha,y} \\
& + \frac{1}{\mathfrak{T}_1}\,.\left[\mathfrak{W}_1\,.\,\delta z_{\mathrm{a},y} + (\mathrm{I}y)_{\mathrm{a},y}\,.\left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{\mathrm{a},y}\right]^2 - \eta_{\mathrm{a},y}\,.\,\delta z^2_{\mathrm{a},y} \Big\}\,.\,dy \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \left(\omega_{x,\beta}\,.\,\delta z^2_{x,\beta} - \omega_{x,b}\,.\,\delta z^2_{x,b}\right).\,dx \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\!\int_b^\beta \left[\mathfrak{A}\left(\frac{d_y\delta z}{dy} + \mathfrak{B}\frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{C}\,.\,\delta z\right)^2 + \mathfrak{D}\left(\frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{E}\,.\,\delta z\right)^2\right].\,dy\,.\,dx
\end{aligned}$$

Man hätte nun noch die dem Werthe nach abhängigen Bestandtheile $\delta z_{\mathrm{a},y}$ und $\delta z_{\alpha,y}$, sowie auch deren Differentialquotienten zu eliminiren. Allein dieses Geschäft kann man diesmal unterlassen, und verfahren wie im vorigen §. Dann kommt man zu der Erkenntniss, dass es diesmal von den vier Ausdrücken

$$\left[\left((\mathrm{I}x)\,.\,(r'-r)+\frac{d_x W}{dx}\right)_{\alpha,y}\right] \quad , \quad \left[-\left((\mathrm{I}x)\,.\,(r'-r)+\frac{d_x W}{dx}\right)_{\mathrm{a},y}\right] \quad , \quad \mathfrak{A} \quad , \quad \mathfrak{D}$$

abhangt, ob ein Maximum oder Minimum stattfindet.

Zusatz. Man vergleiche das Prüfungsmittel in §. 29 und §. 47. Dort wird es nothwendig sein, die Bestandtheile $\delta z_{\mathrm{a},y}$ und $\delta z_{\alpha,y}$ sowie auch deren Differentialquotienten zu eliminiren, und durch $\vartheta\mathrm{a}$ und $\vartheta\alpha$ auszudrücken.

Untersuchung 6.

§. 27.

Es sei W ein **reeller**, mit den Bestandtheilen $x, y, z, \frac{d_x z}{dx}, \frac{d_y z}{dy}$ versehener Ausdruck, und man sucht für z eine solche Function von x und y, und für $\mathrm{a}, \alpha, b, \beta$ solche bestimmte Werthe, dass dabei folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\!\int_b^\beta W\,.\,dy\,.\,dx$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Weil diesmal für die vier Integrationsgränzen $\mathrm{a}, \alpha, b, \beta$ bestimmte Werthe gesucht werden, so kommen diesmal auch die Formeln des §. 23 vollständig zur Anwendung; und es mögen, wie in der vorigen Untersuchung, zwei verschiedene Gränzfälle aufgestellt und durchgeführt werden.

§. 28.

Erster Gränzfall. Wenn für die Gränzen durchaus keine Vorschriften gemacht sind, so ist es zweckmässig, der Gränzengleichung folgende Form

$$\text{II)}\ \left(\int_b^\beta W_{\alpha,y}\,.\,dy\right)\vartheta\alpha - \left(\int_b^\beta W_{\mathrm{a},y}\,.\,dy\right).\vartheta\mathrm{a} + \left(\int_{\mathrm{a}}^\alpha W_{x,\beta}\,.\,dx\right).\vartheta\beta - \left(\int_{\mathrm{a}}^\alpha W_{x,b}\,.\,dx\right).\,\vartheta b$$

$$+\int_b^\beta \left[(\mathrm{I}\,x)_{\alpha,y}\,.\,\partial z_{\alpha,y} - (\mathrm{I}\,x)_{\mathrm{a},y}\,.\,\partial z_{\mathrm{a},y}\right].\,dy + \int_{\mathrm{a}}^\alpha \left[(\mathrm{I}\,y)_{x,\beta}\,.\,\partial z_{x,\beta} - (\mathrm{I}\,x)_{x,b}\,.\,\partial z_{x,b}\right].\,dx = 0$$

zu geben. Diese zerlegt sich aber ohne weiters in folgende acht einzelne Gleichungen:

$$\text{III)}\ \int_b^\beta W_{\alpha,y}.dy = 0\ ,\quad \text{IV)}\ \int_b^\beta W_{\mathrm{a},y}.dy = 0\ ,\quad \text{V)}\ \int_{\mathrm{a}}^\alpha W_{x,\beta}.dx = 0\ ,\quad \text{VI)}\ \int_{\mathrm{a}}^\alpha W_{x,b}\ dx = 0$$

$$\text{VII)}\ (\mathrm{I}x)_{\alpha,y} = 0\ ,\qquad \text{VIII)}\ (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} = 0\ ,\qquad \text{IX)}\ (\mathrm{I}y)_{x,\beta} = 0\ ,\qquad \text{X)}\ (\mathrm{I}y)_{x,b} = 0.$$

Die vier Gleichungen VII — X dienen, wie man aus der vorigen Untersuchung weiss, dazu, um die durch Integration der Hauptgleichung eingegangenen zwei willkürlichen Functionen zu specialisiren. Sodann werden die vier Gleichungen III — VI dazu benützt, um die für $\mathrm{a}, \alpha, b, \beta$ gesuchten Werthe zu bestimmen, welche aber der Bedingung

$$\alpha > \mathrm{a} \quad \text{und} \quad \beta > \mathrm{b}$$

genügen müssen. Wenn man nun die bei III und IV angezeigten Integrationen ausführt, so nehmen diese zwei Gleichungen bezüglich folgende Form

$$\text{XI)}\ \mathrm{F}(\alpha,\beta) - \mathrm{F}(\alpha,b) = 0\ ,\quad \text{und}\quad \text{XII)}\ \mathrm{F}(\mathrm{a},\beta) - \mathrm{F}(\mathrm{a},b) = 0$$

an: und wenn man ebenso bei V und VI die angezeigten Integrationen ausführt, so nehmen diese zwei Gleichungen bezüglich folgende Form

$$\text{XIII)}\ \mathfrak{F}(\alpha,\beta) - \mathfrak{F}(\mathrm{a},\beta) = 0\ ,\quad \text{und}\quad \text{XIV)}\ \mathfrak{F}(\alpha,b) - \mathfrak{F}(\mathrm{a},b) = 0$$

an. Die Gleichungen XI und XII sind aber einander einerlei, d. h. sie unterscheiden sich nur dadurch, dass da, wo in der einen das α, in der andern das a steht. Ebenso sind die Gleichungen XIII und XIV einander einerlei, d. h. diese unterscheiden sich nur dadurch, dass da, wo in der einen das β, in der andern das b steht. Somit sind diese, durch Integration erzeugten, vier Gleichungen nicht geeignet, drei der vier Unbekannten $\mathrm{a}, \alpha, \mathrm{b}, \beta$ zu eliminiren, und eine nur mit einem einzigen Unbekannten versehene neue Gleichung herzustellen.

Man muss also, um für die vier Unbekannten $\mathrm{a}, \alpha, \mathrm{b}, \beta$ die geeigneten Werthe zu ermitteln, ein anderes Verfahren anwenden; und dieses besteht, wie man so eben erkannt hat, hauptsächlich darin, dass man nicht alle vier Gleichungen III — VI zugleich integrirt, sondern einen von folgenden zwei Wegen einschlägt:

A) Man mache den Versuch, ob folgende zwei nach y identische Gleichungen

$$\text{XV)}\ W_{\alpha,y} = 0 \quad , \quad \text{und XVI)}\ W_{a,y} = 0$$

möglich sind. Sind sie möglich, dann sind die Werthe des a und des α unabhängig von y. Dasselbe gilt auch von allen nach y genommenen Differentialquotienten; und somit sind auch

$$\text{XVII)}\ \frac{d(W_{\alpha,y})}{dy} = 0 \quad , \quad \text{und XVIII)}\ \frac{d(W_{a,y})}{dy} = 0$$

identische Gleichungen, und auch in ihnen sind die Werthe des a und des α unabhängig von y. Man nehme nun die Gleichungen XV und XVII, und eliminire y; so ergibt sich eine Gleichung

$$\text{XIX)}\ f(\alpha) = 0$$

aus welcher sich Werthe des α ermitteln lassen. Nimmt man hierauf auch die Gleichungen XVI und XVIII, und eliminirt man auch aus diesen das y: so bekommt man eine Gleichung, welche mit XIX einerlei ist, d. h. man bekommt jetzt

$$\text{XX)}\ f(\mathrm{a}) = 0$$

aus welcher für a ganz die nemlichen Werthe folgen, die man aus XIX bereits für α erhalten hat. Diese Werthe muss man aber zwischen a und α so vertheilen, dass die Bedingung $\alpha > \mathrm{a}$ erfüllt wird. Sollte jedoch aus XIX und XX für α und a nur ein einziger Werth folgen, so ist keine solche Vertheilung möglich, d. h. man bekommt $\alpha = \mathrm{a}$, was der Aufgabe widerspricht.

Wenn nun die Gleichungen XV und XVI wirklich nach y identische sind, so werden auch die Gleichungen III und IV erfüllt, die Integrationsgränzen b und β mögen sein, was sie wollen. Wenn man ferner für a und α solche Werthe ermittelt hat, welche der Bedingung $\alpha > \mathrm{a}$ genügen; so muss man dieselben in V und VI einsetzen und integriren. Die sich ergebenden Integralgleichungen werden aber einander einerlei sein, und so wird man für b und β auch einerlei Ausdrücke erhalten, d. h. man wird im Allgemeinen bekommen

$$\text{XXI)}\ \beta = \xi(\mathrm{a}, \alpha) \quad , \quad \text{und XXII)}\ b = \xi(\mathrm{a}, \alpha)$$

Ist nun $\xi(\mathrm{a}, \alpha)$ vielförmig, so kann man die einzelnen Formen so vertheilen, dass die Bedingung $\beta > b$ erfüllt wird. Ist aber $\xi(\mathrm{a}, \alpha)$ nur einförmig, dann ist keine solche Vertheilung möglich, d. h. man bekommt $\beta = \mathrm{b}$, was der Aufgabe widerspricht.

B) Man kann aber auch den Versuch machen, ob folgende zwei nach x identische Gleichungen

$$\text{XXIII)}\ W_{x,\beta} = 0 \quad , \quad \text{und XXIV)}\ W_{x,b} = 0$$

möglich sind. Sind sie möglich, dann sind die Werthe des b und des β unabhängig von x. Dasselbe gilt auch bei allen nach x genommenen Differentialquotienten; und somit sind auch

$$\text{XXV)}\ \frac{d(W_{x,\beta})}{dx} = 0 \quad , \quad \text{und XXVI)}\ \frac{d(W_{x,b})}{dx} = 0$$

identische Gleichungen, und auch in ihnen sind die Werthe des b und des β unabhängig von x.

Man sieht hiermit, dass diesmal die Werthe des b und des β ebenso ermittelt werden, wie vorhin die Werthe des a und des α. Wenn nun die Gleichungen XXIII und XXIV wirklich nach x identisch sind, so werden auch die Gleichungen V und VI erfüllt, die Integrationsgränzen a und α mögen sein, was sie wollen. Wenn man ferner für b und β solche Werthe ermittelt hat, die der Bedingung $\beta > b$ genügen; so muss man dieselben in III und IV einsetzen und integriren. Die sich ergebenden Integralgleichungen werden aber einander einerlei sein; und so wird man für a und α auch einerlei Ausdrücke erhalten, d. h. man wird im Allgemeinen bekommen

$$\text{XXVII)}\quad \alpha = \zeta(b, \beta) \qquad . \qquad \text{und XXVIII)}\quad \mathrm{a} = \zeta(b, \beta).$$

Ist nun $\zeta(b, \beta)$ vielförmig, so kann man die einzelnen Formen so vertheilen, dass der Bedingung $\alpha > \mathrm{a}$ genügt wird. Ist aber $\zeta(b, \beta)$ nur einförmig, so ist keine solche Vertheilung möglich, d. h. man bekommt $\alpha = \mathrm{a}$, was der Aufgabe widerspricht.

Wenn die zwei nach y identischen Gleichungen XV und XVI stattfinden, so gelten sie auch bei $y = b$ und $y = \beta$, d. h. es ist auch

$$\text{XXIX)}\quad W_{\mathrm{a},b} = 0\,, \quad \text{XXX)}\quad W_{\alpha,b} = 0\,, \quad \text{XXXI)}\quad W_{\mathrm{a},\beta} = 0\,, \quad \text{XXXII)}\quad W_{\alpha,\beta} = 0$$

wenn dagegen die zwei nach x identischen Gleichungen XXIII und XXIV stattfinden, so gelten sie auch bei $x = \mathrm{a}$ und $x = \alpha$, d. h. es finden abermals die vier Gleichungen XXIX bis XXXII statt. Berücksichtigt man jetzt alle Eigenthümlichkeiten dieses ersten Gränzfalles, und setzt man zur Bequemlichkeit

$$\mathfrak{B}_1' \quad , \quad \mathfrak{W}_1' \quad , \quad \mathfrak{B}_2' \quad , \quad \mathfrak{W}_2' \quad , \quad \mathfrak{B}_1'' \quad , \quad \mathfrak{W}_1'' \quad , \quad \mathfrak{B}_2'' \quad , \quad \mathfrak{W}_2''$$

bezüglich statt

$$\left(\frac{d_x W}{dx}\right)_{\mathrm{a},y}, \quad \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{\mathrm{a},y}, \quad \left(\frac{d_x W}{dx}\right)_{\alpha,y}, \quad \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{\alpha,y}, \quad \left(\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,b}, \quad \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,b}, \quad \left(\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,\beta}, \quad \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,\beta}$$

so nimmt das Prüfungsmittel folgende Form

$$\begin{aligned}
\text{XXXII)}\quad \delta^2 U = \int_b^\beta \Big\{ & \left(\frac{d_x W}{dx}\right)_{\alpha,y} \cdot \left[\vartheta\alpha + \frac{\mathfrak{W}_2'}{\mathfrak{B}_2'}\,\delta z_{\alpha,y} + \frac{(\mathrm{I}y)_{\alpha,y}}{\mathfrak{B}_2'} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{\alpha,y} \right]^2 \\
& + \left(-\frac{d_x W}{dx}\right)_{\mathrm{a},y} \cdot \left[\vartheta\mathrm{a} + \frac{\mathfrak{W}_1'}{\mathfrak{B}_1'}\,\delta z_{\mathrm{a},y} + \frac{(\mathrm{I}y)_{\mathrm{a},y}}{\mathfrak{B}_1'} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{\mathrm{a},y} \right]^2 \\
& - \frac{1}{\mathfrak{B}_2'} \cdot \left[\mathfrak{W}_2' \cdot \delta z_{\alpha,y} + (\mathrm{I}y)_{\alpha,y} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{\alpha,y} \right]^2 + \eta_{\alpha,y} \cdot \delta z^2_{\alpha,y} \\
& + \frac{1}{\mathfrak{B}_1'} \cdot \left[\mathfrak{W}_1' \cdot \delta z_{\mathrm{a},y} + (\mathrm{I}y)_{\mathrm{a},y} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{\mathrm{a},y} \right]^2 - \eta_{\mathrm{a},y} \cdot \delta z^2_{\mathrm{a},y} \Big\} \cdot dy \\
+ \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \Big\{ & \left(\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,\beta} \cdot \left[\vartheta\beta + \frac{\mathfrak{W}_2''}{\mathfrak{B}_2''}\,\delta z_{x,\beta} + \frac{(\mathrm{I}x)_{x,\beta}}{\mathfrak{B}_2''} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{x,\beta} \right]^2 \\
& + \left(-\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,b} \cdot \left[\vartheta b + \frac{\mathfrak{W}_1''}{\mathfrak{B}_1''}\,\delta z_{x,b} + \frac{(\mathrm{I}x)_{x,b}}{\mathfrak{B}_1''} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{x,b} \right]^2
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\mathfrak{B}_2''}\cdot\Big[\mathfrak{W}_2''\cdot\partial z_{x,\beta}+(\mathrm{I}x)_{x,\beta}\cdot\Big(\frac{d_x\partial z}{dx}\Big)_{x,\beta}\Big]^2+\omega_{x,\beta}\cdot\partial z^2_{x,\beta}$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{B}_1''}\cdot\Big[\mathfrak{W}_1''\cdot\partial z_{x,b}+(\mathrm{I}x)_{x,b}\cdot\Big(\frac{d_x\partial z}{dx}\Big)_{x,b}\Big]^2-\omega_{x,b}\cdot\partial z^2_{x,b}\Big\}\cdot dx$$

$$+\int_a^\alpha\!\!\int_b^\beta\Big[\mathfrak{A}\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}+\mathfrak{B}\frac{d_x\partial z}{dx}+\mathfrak{C}.\partial z\Big)^2+\mathfrak{D}\Big(\frac{d_x\partial z}{dx}+\mathfrak{E}.\partial z\Big)^2\Big].dy.dx$$

an, während der zwischen ω und η stattfindende Zusammenhang durch die Partialdifferentialgleichung

$$\text{XXXIII)}\quad\Big(\mathrm{F}-\frac{d_x\eta}{dx}-\frac{d_y\omega}{dy}\Big)(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)=\mathrm{A}.(\mathrm{E}-\eta)^2-2\,\mathrm{B}.(\mathrm{E}-\eta).(\mathrm{D}-\omega)+\mathrm{C}.(\mathrm{D}-\omega)^2$$

ausgesprochen ist. Man denke sich jetzt unter η eine solche Function $\chi(y)$ des einzigen y, dass folgende nach y identische Gleichung

$$\text{XXXIV)}\quad-\frac{1}{\mathfrak{B}_2'}\cdot\Big[\mathfrak{W}_2'\cdot\partial z_{\alpha,y}+(\mathrm{I}y)_{\alpha,y}\cdot\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}\Big)_{\alpha,y}\Big]^2+\chi(y)\cdot\partial z^2_{\alpha,y}$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{B}_1'}\cdot\Big[\mathfrak{W}_1'\cdot\partial z_{\mathrm{a},y}+(\mathrm{I}y)_{\mathrm{a},y}\cdot\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}\Big)_{\mathrm{a},y}\Big]^2-\chi(y)\cdot\partial z^2_{\mathrm{a},y}=0$$

stattfindet. Durch diese Gleichung wird es möglich, die noch unbekannte Function $\chi(y)$ in $\partial z_{\alpha,y}$, $\partial z_{\mathrm{a},y}$, $\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}\Big)_{\alpha,y}$ und $\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}\Big)_{\mathrm{a},y}$ auszudrücken. Diesen für $\chi(y)$ sich ergebenden Ausdruck muss man jetzt in Gleichung XXXIII einführen. Weil aber in $\eta=\chi(y)$ kein x vorkommt: so ist $\frac{d_x\eta}{dx}=0$, und Gleichung XXXIII reducirt sich auf

$$\text{XXXV)}\quad\Big(\mathrm{F}-\frac{d_y\omega}{dy}\Big)(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)=\mathrm{A}.(\mathrm{E}-\eta)^2-2\,\mathrm{B}.(\mathrm{E}-\eta).(\mathrm{D}-\omega)+\mathrm{C}.(\mathrm{D}-\omega)^2$$

Weil nun diese Gleichung nur den einzigen Partialdifferentialquotient $\frac{d_y\omega}{dy}$ enthält; so bekommt man durch deren Integration für ω einen aus x, y, $\pi(x)$ zusammengesetzten Ausdruck, wo $\pi(x)$ eine ganz willkürliche Function von x ist. Aber eben diese in ω enthaltene willkürliche Function $\pi(x)$ kann man noch so verwenden, dass auch noch die Gleichung

$$\text{XXXVI)}\quad-\frac{1}{\mathfrak{B}_2''}\cdot\Big[\mathfrak{W}_2''\cdot\partial z_{x,\beta}+(\mathrm{I}x)_{x,\beta}\cdot\Big(\frac{d_x\partial z}{dx}\Big)_{x,\beta}\Big]^2+\omega_{x,\beta}\cdot\partial z^2_{x,\beta}$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{B}_1''}\cdot\Big[\mathfrak{W}_1''\cdot\partial z_{x,b}+(\mathrm{I}x)_{x,b}\cdot\Big(\frac{d_x\partial z}{dx}\Big)_{x,b}\Big]^2-\omega_{x,b}\cdot\partial z^2_{x,b}=0$$

stattfindet. Hiermit erkennt man, dass es diesmal von den sechs Ausdrücken

$$\Big(\frac{d_x W}{dx}\Big)_{\alpha,y},\quad\Big(-\frac{d_x W}{dx}\Big)_{\mathrm{a},y},\quad\Big(\frac{d_y W}{dy}\Big)_{x,\beta},\quad\Big(-\frac{d_y W}{dy}\Big)_{x,b},\quad\mathfrak{A},\quad\mathfrak{D}$$

abhangt, ob ein Maximum oder Minimum vorhanden ist.

§. 29.

Zweiter Gränzfall[1]. Man soll unter allen in Betracht zu ziehenden Functionen $z=\varphi(x\,,y)$ diejenige herauswählen, welche bei $x=\mathrm{a}$, bei $x=\alpha$, bei $y=b$ und bei $y=\beta$ bezüglich mit

$$\text{XXXVII)}\quad c' = f'(x\,.\,y) \quad . \quad \text{XXXVIII)}\quad \gamma' = \mathfrak{f}'(x\,,y)$$
$$\text{XXXIX)}\quad c'' = f''(x\,.\,y) \quad , \quad \text{XL)}\quad \gamma'' = \mathfrak{f}''(x\,.\,y)$$

zusammenfällt.

Dieses Zusammenfallen ist dargestellt durch die vier Gleichungen

$$\text{XLI)}\quad \varphi(\mathrm{a}\,,y) = f'(\mathrm{a}\,,y) \quad . \quad \text{XLII)}\quad \varphi(\alpha\,,y) = \mathfrak{f}'(\alpha\,,y)$$
$$\text{XLIII)}\quad \varphi(x,b) = f''(x,b) \quad . \quad \text{XLIV)}\quad \varphi(x\,,\beta) = \mathfrak{f}''(x\,,\beta)$$

Die Gränzengleichung ist jetzt folgende:

$$\text{XLV)}\quad \int_b^\beta \left[(\mathrm{I}x)_{\alpha,y}.\delta z_{\alpha,y} + W_{\alpha,y}.\vartheta\alpha - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y}.\delta z_{\mathrm{a},y} - W_{\mathrm{a},y}.\vartheta\mathrm{a} \right].dy$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \left[(\mathrm{I}y)_{x,\beta}.\delta z_{x,\beta} + W_{x,\beta}.\vartheta\beta - (\mathrm{I}y)_{x,b}.\delta z_{x,b} - W_{x,b}.\vartheta b \right].dx = 0$$

Man setze zur Abkürzung

$$p \quad , \quad q \quad , \quad r \quad , \quad s \quad , \quad t$$

bezüglich statt

$$\frac{d_x z}{dx} \quad , \quad \frac{d_y z}{dy} \quad , \quad \frac{d_x^2 z}{dx^2} \quad , \quad \frac{d_x d_y z}{dx\,.\,dy} \quad , \quad \frac{d_y^2 z}{dy^2}$$

Ebenso setze man

$$p', q', r', s', t' \quad , \quad \mathfrak{p}', \mathfrak{q}', \mathfrak{r}', \mathfrak{s}', \mathfrak{t}' \quad , \quad p'', q'', r'', s'', t'' \quad . \quad \mathfrak{p}'', \mathfrak{q}'', \mathfrak{r}'', \mathfrak{s}''. \mathfrak{t}''$$

statt der betreffenden Partialdifferentialquotienten, welche sich bezüglich aus

$$c' = f'(x\,,y) \quad , \quad \gamma' = \mathfrak{f}'(x\,,y) \quad , \quad c'' = f''(x\,,y) \quad ; \quad \gamma'' = \mathfrak{f}''(x\,.\,y)$$

ergeben. Hierauf behandle man Gleichung XLV nach dem Vorgange des zweiten Gränzfalles der vorigen Untersuchung, so zerlegt sich die Gränzengleichung diesmal in folgende vier einzelne:

$$\text{XLVI)}\quad W_{\mathrm{a},y} - (p' - p)_{\mathrm{a},y}.(\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} = 0 \quad , \quad \text{XLVII)}\quad W_{\alpha,y} - (\mathfrak{p}' - p)_{\alpha,y}.(\mathrm{I}x)_{\alpha,y} = 0$$
$$\text{XLVIII)}\quad W_{x,b} - (q'' - q)_{x,b}.(\mathrm{I}y)_{x,b} = 0 \quad , \quad \text{XLIX)}\quad W_{x,\beta} - (\mathfrak{q}'' - q)_{x,\beta}.(\mathrm{I}y)_{x,\beta} = 0$$

[1] Eine, auf diesen Gränzfall bezügliche, geometrische Aufgabe ist folgende: „Man sucht zwischen vier gegebenen Flächen die „kleinste Oberfläche unter allen denen heraus, von welchen jene (die vier gegebenen nemlich) nach einfach gekrümmten Curven „geschnitten werden, die in zwei Paar parallelen Ebenen liegen, wovon das eine Paar auf der Axe X, das andere Paar auf „der Axe Y senkrecht steht“.

Man substituire nun die für z gefundene allgemeine Function in diese vier Gleichungen, und integrire sie als totale Differentialgleichungen. Erst die sich ergebenden vier Integralgleichungen können benützt werden zur Specialisirung der in z eingegangenen zwei willkürlichen Functionen.

Hierauf substituire man die so specialisirte Function z in die beiden Gleichungen XLI und XLII, und bestimme die Werthe von a und α. Das dabei anzuwendende Verfahren ist bereits (aus §. 26) bekannt.

Zuletzt substituire man die Function z in die beiden Gleichungen XLIII und XLIV, und bestimme die Werthe von b und β. Dabei wird aber dasselbe Verfahren angewendet, wie vorhin, wo es sich um die Bestimmung des a und des α handelte.

Die vier letzten Gleichungen (Nr. XLVI—XLIX) kann man öfters sehr vereinfachen, wenn man, wie in §. 26 näher begründet ist, statt der Potenzen

$$\left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2_{\mathrm{a},y} \quad , \quad \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2_{\alpha,y} \quad , \quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2_{x,b} \quad , \quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2_{x,\beta}$$

bezüglich die gleichgeltenden Producte

$$\left(\frac{d_y z}{dy} \times \frac{d_y c'}{dy}\right)_{\mathrm{a},y} \quad , \quad \left(\frac{d_y z}{dy} \times \frac{d_y \gamma'}{dy}\right)_{\alpha,y} \quad , \quad \left(\frac{d_x z}{dx} \times \frac{d_x c''}{dx}\right)_{x,b} \quad , \quad \left(\frac{d_x z}{dx} \times \frac{d_x \gamma''}{dx}\right)_{x,\beta}$$

setzt. Dadurch nehmen die eben genannten vier Gleichungen gewöhnlich eine symmetrische Gestalt an, und lassen, wenn die Aufgabe eine geometrische ist, sich auch auf einfache Weise geometrisch deuten[1].

Man setze zuerst b und dann β statt y in XLI und XLII ein. Man setze ebenso zuerst a und dann α in XLIII und XLIV ein. Auf diese Weise gelangt man zu folgenden vier neuen Gleichungen:

$$z_{\mathrm{a},b} = f'(\mathrm{a},b) = f''(\mathrm{a},b) \quad , \quad z_{\mathrm{a},\beta} = f'(\mathrm{a},\beta) = \mathfrak{f}''(\mathrm{a},\beta)$$
$$z_{\alpha,b} = \mathfrak{f}'(\alpha,b) = f''(\alpha,b) \quad , \quad z_{\alpha,\beta} = \mathfrak{f}'(\alpha,\beta) = \mathfrak{f}''(\alpha,\beta)$$

Sobald eine dieser vier Gleichungen[2] einen Widerspruch in sich trägt, ist dieser zweite Gränzfall so, wie er hier gestellt ist, unmöglich. Sollten aber die vorgeschriebenen Functionen

$$f'(x,y) \quad , \quad \mathfrak{f}'(x,y) \quad , \quad f''(x,y) \quad , \quad \mathfrak{f}''(x,y)$$

Stücke in sich enthalten, welche noch willkürlich sind; so müssen diese sich so specialisiren lassen, dass letztere vier Gleichungen stattfinden.

Bei Herstellung des Prüfungsmittels eliminire man zuerst $\partial^2 z_{\mathrm{a},y}$, $\partial^2 z_{\alpha,y}$, $\partial^2 z_{x,b}$, $\partial^2 z_{x,\beta}$ und hierauf setze man (nach §. 26 verfahrend) zur Abkürzung

[1] Für die, in voriger Anmerkung gestellte, geometrische Aufgabe würden die auf besagte Weise umgestalteten vier Gleichungen XLVI — XLIX die Bedeutung haben, dass die gesuchte Fläche auf den vier gegebenen Gränzflächen senkrecht steht.

[2] Besonders durch die (in der ersten Anmerkung dieses §. gestellte) geometrische Aufgabe lässt sich die Nothwendigkeit, dass diese vier Gleichungen stattfinden müssen, ganz leicht veranschaulichen. Man vergleiche in dieser Beziehung die zweite Anmerkung des §. 11.

$$\mathfrak{T}_1' \quad , \quad \mathfrak{W}_1' \quad , \quad \mathfrak{T}_2' \quad , \quad \mathfrak{W}_2'$$

bezüglich statt

$$\left((\mathrm{I}\,x).(r'-r)+\frac{d_x W}{dx}\right)_{\mathrm{a},y} \quad , \quad \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{\mathrm{a},y} \quad , \quad \left((\mathrm{I}\,x).(\mathfrak{r}'-r)+\frac{d_x W}{dx}\right)_{\alpha,y} \quad , \quad \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{\alpha,y}$$

ferner

$$\mathfrak{T}_1'' \quad , \quad \mathfrak{W}_1'' \quad , \quad \mathfrak{T}_2'' \quad , \quad \mathfrak{W}_2''$$

bezüglich statt

$$\left((\mathrm{I}\,y).(t''-t)+\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,b} \quad , \quad \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,b} \quad , \quad \left((\mathrm{I}\,y).(\mathfrak{t}''-t)+\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,\beta} \quad , \quad \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,\beta}$$

Zuletzt eliminire man auch noch $\partial z_{\mathrm{a},y}$, $\partial z_{\alpha,y}$, $\partial z_{x,b}$, $\partial z_{x,\beta}$, und die davon abgeleiteten Differentialquotienten; so bekommt man endlich für $\partial^2 U$ einen Ausdruck, welcher sich auf folgende Form zurück zieht:

$$\begin{aligned}
\text{L)}\quad \partial^2 U = {} & 2\,W_{\mathrm{a},b}\,.\,\vartheta\mathrm{a}\,.\,\vartheta b - 2\,W_{\alpha,b}\,.\,\vartheta\alpha\,.\,\vartheta b - 2\,W_{\mathrm{a},\beta}\,.\,\vartheta\mathrm{a}\,.\,\vartheta\beta + 2\,W_{\alpha,\beta}\,.\,\vartheta\alpha\,.\,\vartheta\beta \\
& + \left[-\int_b^\beta \left((\mathrm{I}\,x).(r'-r)+\frac{d_x W}{dx}\right)_{\mathrm{a},y} . \left\{1+(p'-p)_{\mathrm{a},y}.\frac{\mathfrak{W}_1'}{\mathfrak{T}_1'}+(s'-s)_{\mathrm{a},y}.\frac{(\mathrm{I}y)_{\mathrm{a},y}}{\mathfrak{T}_1'}\right\}^2 . dy\right] . \vartheta\mathrm{a}^2 \\
& + \left[\int_b^\beta \left((\mathrm{I}\,x).(\mathfrak{r}'-r)+\frac{d_x W}{dx}\right)_{\alpha,y} . \left\{1+(\mathfrak{p}'-p)_{\alpha,y}.\frac{\mathfrak{W}_2'}{\mathfrak{T}_2'}+(\mathfrak{s}'-s)_{\alpha,y}.\frac{(\mathrm{I}y)_{\alpha,y}}{\mathfrak{T}_2'}\right\}^2 . dy\right] . \vartheta\alpha^2 \\
& + \left[-\int_{\mathrm{a}}^\alpha \left((\mathrm{I}\,y).(t''-t)+\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,b} . \left\{1+(q''-q)_{x,b}.\frac{\mathfrak{W}_1''}{\mathfrak{T}_1''}+(s''-s)_{x,b}.\frac{(\mathrm{I}x)_{x,b}}{\mathfrak{T}_1''}\right\}^2 . dx\right] . \vartheta b^2 \\
& + \left[\int_{\mathrm{a}}^\alpha \left((\mathrm{I}\,y).(\mathfrak{t}''-t)+\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,\beta} . \left\{1+(\mathfrak{q}''-q)_{x,\beta}.\frac{\mathfrak{W}_2''}{\mathfrak{T}_2''}+(\mathfrak{s}''-s)_{x,\beta}.\frac{(\mathrm{I}x)_{x,\beta}}{\mathfrak{T}_2''}\right\}^2 . dx\right] . \vartheta\beta^2 \\
& + \int_{\mathrm{a}}^\alpha\int_b^\beta \left[\mathfrak{A}.\left(\frac{d_y\partial z}{dy}+\mathfrak{B}\frac{d_x\partial z}{dx}+\mathfrak{C}.\partial z\right)^2+\mathfrak{D}.\left(\frac{d_x\partial z}{dx}+\mathfrak{E}.\partial z\right)^2\right].dy\,.\,dx
\end{aligned}$$

Zu dieser abgekürzten Form des für $\partial^2 U$ hergestellten Ausdruckes konnte man aber nur dadurch gelangen, dass man folgende zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}
\text{LI)}\quad & +\frac{1}{\mathfrak{T}_1'}.\left[\mathfrak{W}_1'.(p'-p)_{\mathrm{a},y}+(\mathrm{I}y)_{\mathrm{a},y}.(s'-s)_{\mathrm{a},y}\right]^2.\vartheta\mathrm{a}^2-\eta_{\mathrm{a},y}.(p'-p)_{\mathrm{a},y}.\vartheta\mathrm{a}^2 \\
& -\frac{1}{\mathfrak{T}_2'}.\left[\mathfrak{W}_2'.(\mathfrak{p}'-p)_{\alpha,y}+(\mathrm{I}y)_{\alpha,y}.(\mathfrak{s}'-s)_{\alpha,y}\right]^2.\vartheta\alpha^2+\eta_{\alpha,y}.(\mathfrak{p}'-p)_{\alpha,y}.\vartheta\alpha^2=0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\text{LII)}\quad & +\frac{1}{\mathfrak{T}_1''}.\left[\mathfrak{W}_1''.(q''-q)_{x,b}+(\mathrm{I}x)_{x,b}.(s''-s)_{x,b}\right]^2.\vartheta b^2-\omega_{x,b}(q''-q)_{x,b}.\vartheta b^2 \\
& -\frac{1}{\mathfrak{T}_2''}.\left[\mathfrak{W}_2''.(\mathfrak{q}''-q)_{x,\beta}+(\mathrm{I}x)_{x,\beta}.(\mathfrak{s}''-s)_{x,\beta}\right]^2.\vartheta\beta^2+\omega_{x,\beta}.(\mathfrak{q}''-q)_{x,\beta}.\vartheta\beta^2=0
\end{aligned}$$

hat stattfinden lassen. Nun existirt zur Bestimmung von η und ω nur die einzige Partialdifferentialgleichung XXXIII, so dass entweder η oder ω willkürlich ist. Man lasse also η eine solche Function $\chi(y)$ des einzigen Veränderlichen y sein, welche mittelst Gleichung LI durch y, $\vartheta \mathrm{a}$ und $\vartheta \alpha$ ausgedrückt werden kann; und da jetzt in η kein x enthalten ist, so ist $\frac{d_x \eta}{dx} = 0$, und Gleichung XXXIII reducirt sich abermals auf XXXV, wo nur der einzige Partialdifferentialquotient $\frac{d_y \omega}{dy}$ vorkommt. Es ergibt sich also auch jetzt, wenn man XXXV integrirt, für ω ein aus $x, y, \pi(x)$ zusammengesetzter Ausdruck, wo $\pi(x)$ eine ganz willkürliche Function von x ist. Aber eben diese in ω enthaltene willkürliche Function $\pi(x)$ kann man noch so verwenden, dass auch der Gleichung LII genügt wird.

Um jedoch den Zeichenstand des $\delta^2 U$ vollständig untersuchen zu können, muss man der Gleichung L noch folgende Form

$$\text{LIII)} \quad \delta^2 U = \Gamma_1 . (\vartheta \mathrm{a} + \Gamma_1' . \vartheta \alpha + \Gamma_1'' . \vartheta b + \Gamma_1''' . \vartheta \beta)^2$$
$$+ \Gamma_2 . (\vartheta \alpha + \Gamma_2' . \vartheta b + \Gamma_2'' \vartheta \beta)^2 + \Gamma_3 . (\vartheta b + \Gamma_3' . \vartheta \beta)^2 + \Gamma_1 . \vartheta \beta^2$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\!\!\int_{b}^{\beta} \left[\mathfrak{A} . \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{B} \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{E} . \delta z \right)^2 + \mathfrak{D} \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{E} . \delta z \right)^2 \right] . dy . dx$$

geben. Vergleicht man jedoch L mit LIII, so erkennt man, dass

$$\Gamma_1' = 0$$

wird; und der Zeichenstand des $\delta^2 U$ hängt von dem Umstande ab, ob die sechs Ausdrücke

$$\Gamma_1 \quad , \quad \Gamma_2 \quad , \quad \Gamma_3 \quad , \quad \Gamma_4 \quad , \quad \mathfrak{A} \quad , \quad \mathfrak{D}$$

gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ sind. Damit aber namentlich die vier Ausdrücke

$$\Gamma_1 \quad , \quad \Gamma_2 \quad ; \quad \Gamma_3 \quad ; \quad \Gamma_4$$

gleichzeitig positiv oder negativ werden können, ist erforderlich, dass die beiden Ausdrücke

$$\left\{ - \left((\mathrm{I}x) . (r' - r) + \frac{d_x W}{dx} \right)_{\mathrm{a}, y} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ + \left((\mathrm{I}x) . (\mathrm{r}' - r) + \frac{d_x W}{dx} \right)_{\alpha, y} \right\}$$

bei allen von b bis β stetig nebeneinander liegenden Werthen des y, und dass ebenso die beiden Ausdrücke

$$\left\{ - \left((\mathrm{I}y) . (t'' - t) + \frac{d_y W}{dy} \right)_{x, b} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ + \left((\mathrm{I}y) . (\mathrm{t}'' - t) + \frac{d_y W}{dy} \right)_{x, \beta} \right\}$$

bei allen von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthen des x ihr Zeichen nicht ändern.

Zweiter Abschnitt,

wo solche Integrale vorkommen, bei denen die Gränzen der ersten Integration Functionen jenes Veränderlichen sind, nach welchem die zweite Integration ausgeführt werden soll.

Untersuchung 7.

§. 30.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen

$$x\,,\, y\,,\, z\,,\, \frac{d_x z}{dx}\,,\, \frac{d_y z}{dy}\,,\, \frac{d_x^2 z}{dx^2}\,,\, \frac{d_x d_y z}{dx.dy}\,,\, \frac{d_y^2 z}{dy^2}\,,\, \frac{d_x^3 z}{dx^3}\,,\, \ldots\, \text{ic.}$$

versehener Ausdruck, und man sucht für z eine solche Function von x und y, dass folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{y'}^{y''} W\,.\,dy\,.\,dx$$

wo y' und y'' Functionen von x sind, ein Maximum oder Minimum wird.

Die Werthe von a und α sind als constant zu betrachten, jedoch mit der Rücksicht, dass $\alpha > \mathrm{a}$.

So oft es zweckmässig ist, soll $b(x)$ statt y' und $\beta(x)$ statt y'' geschrieben werden, namentlich dann, wenn das x einen speciellen Werth annimmt. Auch müssen die beiden Functionen y' und y'' in solcher Beziehung zu einander stehen, dass bei keinem einzigen der von a bis α stetig neben einander liegenden Werthe des x die Differenz $y''-y'$ negativ wird: und dieses gilt namentlich auch für die beiden Differenzen

$$\beta(\mathrm{a}) - b(\mathrm{a}) \quad \text{und} \quad \beta(\alpha) - b(\alpha)$$

Man beachte durch die ganze Untersuchung, dass das vor dem Differential dy stehende y noch keine Function von x ist; sondern die Functionen y' und y'' treten erst an die Stelle des y, wenn nach y integrirt worden ist.

Wenn man auch hier die in der zweiten Untersuchung vorgeschlagenen Abkürzungszeichen anwendet, so bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U = \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{y'}^{y''}\Big[\frac{d_z W}{dz}\delta z + (\mathrm{I}x)\frac{d_x\delta z}{dx} + (\mathrm{I}y)\frac{d_y\delta z}{dy} + (\mathrm{II}x^2)\frac{d_x^2\delta z}{dx^2}$$
$$+ (\mathrm{II}xy)\frac{d_x d_y\delta z}{dx\,.\,dy} + (\mathrm{II}y^2)\frac{d_y^2\delta z}{dy^2} + (\mathrm{III}x^3)\frac{d_x^3\delta z}{dx^3} + \ldots\Big]\,.\,dy\,.\,dx$$

§. 31.

Um diesen Ausdruck weiter umformen zu können, muss man, wie auch in den drei ersten Untersuchungen[1] geschehen ist, vorerst das unter dem zweifachen Integralzeichen stehende Aggregat in folgende vier Theile umsetzen:

---

[1] Man sehe Gleichung III in §. 8, Gleichung III in §. 15 und Gleichung II in §. 21.

1) In einen solchen, wo die Differentiation nach den beiden Veränderlichen x und y zugleich durchläuft. Dieser mag durch das Abkürzungszeichen $\frac{d_x\, d_y(\Sigma xy)}{dx\,.\,dy}$ dargestellt werden.

2) In einen solchen, wo die Differentiation nur nach dem einzigen Veränderlichen x durchläuft. Dieser mag durch das Abkürzungszeichen $\frac{d_x(\Sigma x)}{dx}$ dargestellt werden.

3) In einen solchen, wo die Differentiation nur nach dem einzigen Veränderlichen y durchläuft. Dieser mag durch das Abkürzungszeichen $\frac{d_y(\Sigma y)}{dy}$ dargestellt werden.

4) In einen solchen, wo die Urfunction ∂z gemeinschaftlicher Factor ist, wo also weder eine nach x noch eine nach y durchlaufende Differentiation vorkommt. Er mag durch (Σ) dargestellt werden.

Der Ausdruck II geht also zunächst in folgenden über:

$$\text{III)}\quad \partial U = \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{y'}^{y''}\left[\frac{d_x\, d_y(\Sigma xy)}{dx\,.\,dy} + \frac{d_x(\Sigma x)}{dx} + \frac{d_y(\Sigma y)}{dy} + (\Sigma)\right].\, dy\,.\, dx$$

Die so eben gewählten Abkürzungszeichen müssen aber aus doppeltem Grunde als zweckmässig erscheinen; denn

1) sie sind mit Merkmalen versehen, welche es möglich machen, dass die Bedeutung und der Ursprung eines jeden dieser Abkürzungszeichen stetsfort erkennbar bleibt: und nebstdem lassen sie sich

2) gradezu auch auf die Untersuchungen ausdehnen, wo dreifache, vierfache, etc. Integrale vorkommen.

Nun beachte man, dass es, weil y' und y'' Functionen von x sind, nicht gleichgiltig ist, ob man zuerst nach y und dann nach x integrirt, oder umgekehrt; sondern man muss zuerst nach y integriren, das sich ergebende Integral von $y' = b(x)$ bis $y'' = \beta(x)$ erstrecken, und erst dann darf man nach x integriren.

𝔄) Der Theilsatz $\int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{y'}^{y''}\frac{d_y(\Sigma y)}{dy}\, dy\,.\,dx$ lässt sich ohneweiters nach y integriren und liefert die Gleichung

$$\text{IV)}\quad \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{y'}^{y''}\frac{d_y(\Sigma y)}{dy}\,.\, dy\,.\, dx = \int_{\mathrm{a}}^{a}\left[(\Sigma y)_{x,\,y''} - (\Sigma y)_{x,\,y'}\right].\, dx$$

𝔅) Um den Theilsatz $\int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{y'}^{y''}\frac{d_x(\Sigma x)}{dx}\,.\,dy\,.\,dx$ behandeln zu können, nehme man folgende aus dem Integralcalcul bekannte Gleichung

$$\text{V)}\quad \frac{d\left(\int_{y'}^{y''}(\Sigma x).dy\right)}{dx} = \int_{y'}^{y''}\frac{d_x(\Sigma x)}{dx}\,.\, dy + (\Sigma x)_{x,\,y''}\,.\,\frac{dy''}{dx} - (\Sigma x)_{x,\,y'}\,.\,\frac{dy'}{dx}$$

zu Hilfe. Daraus folgt durch Übertragung

$$\text{VI)}\quad \int_{y'}^{y''}\frac{d_x(\Sigma x)}{dx}\,.\, dy = \frac{d\left(\int_{y'}^{y''}(\Sigma x).dy\right)}{dx} - (\Sigma x)_{x,\,y''}\,.\,\frac{dy''}{dx} + (\Sigma x)_{x,\,y'}\,.\,\frac{dy'}{dx}$$

Der erste Theilsatz rechts des Gleichheitszeichens lässt eine Integration nach x zu, und so bekommt man

$$\text{VII)}\quad \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{y'}^{y''} \frac{d_x(\Sigma x)}{dx} . dy . dx = \int_{b(a)}^{\beta(a)} (\Sigma x)_{a,y} . dy - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} (\Sigma x)_{\mathrm{a},y} . dy$$
$$- \int_{\mathrm{a}}^{a} \left[(\Sigma x)_{x,y''} . \frac{dy''}{dx} - (\Sigma x)_{x,y'} . \frac{dy'}{dx} \right] . dx$$

𝔣) Wenn man in Gleichung VII den Quotienten $\frac{d_y(\Sigma x y)}{dy}$ statt (Σx) einsetzt: so bekommt man vorerst

$$\text{VIII)}\quad \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{y'}^{y''} \frac{d_x\, d_y(\Sigma x y)}{dx . dy} = \int_{b(a)}^{\beta(a)} \left(\frac{d_y(\Sigma x y)}{dy}\right)_{a,y} . dy - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} \left(\frac{d_y(\Sigma x y)}{dy}\right)_{\mathrm{a},y} . dy$$
$$- \int_{\mathrm{a}}^{a} \left[\left(\frac{d_y(\Sigma x y)}{dy}\right)_{x,y''} . \frac{dy''}{dx} - \left(\frac{d_y(\Sigma x y)}{dy}\right)_{x,y'} . \frac{dy'}{dx} \right] . dx$$

Die zwei ersten Theilsätze rechts des Gleichheitszeichens lassen sich geradezu nach y integriren: und dadurch nimmt letztere Gleichung folgende Form an:

$$\text{IX)}\quad \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{y'}^{y''} \frac{d_x\, d_y(\Sigma x y)}{dx . dy} . dy . dx = (\Sigma x y)_{a,\beta(a)} - (\Sigma x y)_{a,b(a)} - (\Sigma x y)_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a})} + (\Sigma x y)_{\mathrm{a},b(\mathrm{a})}$$
$$- \int_{\mathrm{a}}^{a} \left[\left(\frac{d_y(\Sigma x y)}{dy}\right)_{x,y''} . \frac{dy''}{dx} - \left(\frac{d_y(\Sigma x y)}{dy}\right)_{x,y'} . \frac{dy'}{dx} \right] . dx$$

In Folge der Gleichungen IV, VII und IX geht III jetzt über in

$$\text{X)}\quad \partial U = (\Sigma x y)_{a,\beta(a)} - (\Sigma x y)_{a,b(a)} - (\Sigma x y)_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a})} + (\Sigma x y)_{\mathrm{a},b(\mathrm{a})}$$
$$+ \int_{b(a)}^{\beta(a)} (\Sigma x)_{a,y} . dy - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} (\Sigma x)_{\mathrm{a},y} . dy$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a} \left[\left\{ (\Sigma y)_{x,y''} - \left((\Sigma x) + \frac{d_y(\Sigma x y)}{dy} \right)_{x,y''} . \frac{dy''}{dx} \right\} - \left\{ (\Sigma y)_{x,y'} - \left((\Sigma x) + \frac{d_y(\Sigma x y)}{dy} \right)_{x,y'} . \frac{dy'}{dx} \right\} \right] . dx$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{y'}^{y''} (\Sigma) . dy . dx.$$

§. 32.

In der hier aufgestellten Gleichung X sind aber noch nicht alle Transformationen ausgeführt. Wenn nämlich in den beiden Aggregaten

$$\left((\Sigma x) + \frac{d_y(\Sigma x y)}{dy} \right)_{x,y''} \quad \text{und} \quad \left((\Sigma x) + \frac{d_y(\Sigma x y)}{dy} \right)_{x,y'}$$

noch irgend ein nach x genommener Differentialquotient der Function ∂z, z. B.

$$\frac{d_x \delta z}{dx}\,,\quad \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}\,,\quad \frac{d_x\, d_y \delta z}{dx.dy}\,,\quad \frac{d_x^3 \delta z}{dx^3}\,,\qquad \text{etc. etc.}$$

vorkommt; so muss man noch weiter transformiren. Dabei hat man aber zu beachten, dass in hiesiger Untersuchung die nach x auszuführenden Integrationen nur möglich sind, wenn sie auf totale Differentialquotienten bezogen werden.

Ein Beispiel dieser Art wird man später (in §. 38) kennen lernen.

Die hiesige, ganz allgemein gehaltene, Untersuchung wird in den jetzt folgenden zwei näher specialisirt werden.

Untersuchung 8.

§. 33.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen $x, y, z, \frac{d_x z}{dx}, \frac{d_y z}{dy}$ versehener Ausdruck: und man sucht für z eine solche Function von x und y, dass folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \int_{y'}^{y''} W\,.\,dy\,.\,dx$$

wo y' und y'' Functionen von x sind, ein Maximum oder Minimum wird.

Hier bekommt man zunächst

$$\text{II)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_{y'}^{y''} \left[\frac{d_z W}{dz}\,\delta z + (\mathrm{I}x)\,\frac{d_x \delta z}{dx} + (\mathrm{I}y)\,\frac{d_y \delta z}{dy}\right].\,dy\,.\,dx$$

Daraus folgt weiter

$$\text{III)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_{y'}^{y''} \left[\frac{d_x[(\mathrm{I}x).\delta z]}{dx} + \frac{d_y[(\mathrm{I}y).\delta z]}{dy} + \left(\frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy}\right).\,\delta z\right].\,dy\,.\,dx$$

Wenn man diese Gleichung mit Gleichung III der vorigen Untersuchung vergleicht, so erkennt man, dass

$$(\Sigma xy) = 0\quad,\quad (\Sigma x) = (\mathrm{I}x)\,.\,\delta z\quad,\quad (\Sigma y) = (\mathrm{I}y)\,.\,\delta z\quad \text{und}\quad (\Sigma) = \left(\frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy}\right).\,\delta z$$

ist. Die allgemeine Formel X der vorigen Untersuchung geht also diesmal über in

$$\begin{aligned}\text{IV)}\quad \delta U = &\int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)} (\mathrm{I}x)_{\alpha,y}\,.\,\delta z_{\alpha,y}\,.\,dy - \int_{b(a)}^{\beta(a)} (\mathrm{I}x)_{a,y}\,.\,\delta z_{a,y}\,.\,dy\\ &+ \int_a^\alpha \left[\left((\mathrm{I}y)_{x,y''} - (\mathrm{I}x)_{x,y''}\,.\,\frac{dy''}{dx}\right).\,\delta z_{x,y''} - \left((\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'}\,.\,\frac{dy'}{dx}\right).\,\delta z_{x,y'}\right].\,dx\\ &+ \int_a^\alpha \int_{y'}^{y''} \left[\frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy}\right].\,\delta z\,.\,dy\,.\,dx\end{aligned}$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{V)}\quad \frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x (\text{I}x)}{dx} - \frac{d_y (\text{I}y)}{dy} = 0$$

welches dieselbe ist, wie in der ersten Untersuchung, wo alle vier Integrationsgränzen constant waren. Als Gränzengleichung aber hat man diesmal

$$\text{VI)}\quad \int_{b(a)}^{\beta(a)} (\text{I}x)_{a,y} \,.\, \partial z_{a,y} \,.\, dy - \int_{b(\mathfrak{a})}^{\beta(\mathfrak{a})} (\text{I}x)_{\mathfrak{a},y} \,.\, \partial z_{\mathfrak{a},y} \,.\, dy$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^{a} \Big[\Big((\text{I}y)_{x,y''} - (\text{I}x)_{x,y''} \,.\, \frac{dy''}{dx} \Big) \,.\, \partial z_{x,y''} - \Big((\text{I}y)_{x,y'} - (\text{I}x)_{x,y'} \,.\, \frac{dy'}{dx} \Big) \,.\, \partial z_{x,y'} \Big] \,.\, dx = 0$$

Auch hier hat man, wie in der vorigen Untersuchung, da, wo x die speciellen Werthe $\mathfrak{a}$ und a angenommen, $\beta(x)$ und $b(x)$ bezüglich statt y'' und y' gesetzt.

Berücksichtigt man die Hauptgleichung, so bekommt man für das Prüfungsmittel

$$\text{VII)}\quad \partial^2 U = \int_{b(a)}^{\beta(a)} \big[(\text{I}x)_{a,y} \,.\, \partial^2 z_{a,y} + \eta_{a,y} \,.\, \partial z^2_{a,y} \big] \,.\, dy$$
$$- \int_{b(\mathfrak{a})}^{\beta(\mathfrak{a})} \big[(\text{I}x)_{\mathfrak{a},y} \,.\, \partial^2 z_{\mathfrak{a},y} + \eta_{\mathfrak{a},y} \,.\, \partial z^2_{\mathfrak{a},y} \big] \,.\, dy$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^{a} \Big[\Big((\text{I}y)_{x,y''} - (\text{I}x)_{x,y''} \,.\, \frac{dy''}{dx} \Big) \,.\, \partial^2 z_{x,y''} + \Big(\omega_{x,y''} - \eta_{x,y''} \,.\, \frac{dy''}{dx} \Big) \,.\, \partial z^2_{x,y''}$$
$$- \Big((\text{I}y)_{x,y'} - (\text{I}x)_{x,y'} \,.\, \frac{dy'}{dx} \Big) \,.\, \partial^2 z_{x,y'} - \Big(\omega_{x,y'} - \eta_{x,y'} \,.\, \frac{dy'}{dx} \Big) \,.\, \partial z^2_{x,y'} \Big] \,.\, dx$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^{a} \int_{y'}^{y''} \Big[\mathfrak{A} \Big(\frac{d_y \partial z}{dy} + \mathfrak{B} \frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{C} \,.\, \partial z \Big)^2 + \mathfrak{D} \,.\, \Big(\frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{E} \,.\, \partial z \Big)^2 \Big] \,.\, dy \,.\, dx$$

Man ist nun auf dem Puncte, der Gränzengleichung zu genügen; und zu diesem Ende sollen folgende drei Fälle durchgeführt werden.

§. 34.

Erster Gränzfall. Es seien für die Gränzen durchaus keine Vorschriften gemacht. Hierbei haben auch die Ausdrücke

$$\text{VIII)}\quad \partial z_{\mathfrak{a},y} \quad , \quad \partial z_{a,y} \quad , \quad \partial z_{x,y'} \quad ; \quad \partial z_{x,y''} \quad .$$
$$\text{IX)}\quad \partial^2 z_{\mathfrak{a},y} \quad , \quad \partial^2 z_{a,y} \quad , \quad \partial^2 z_{x,y'} \quad ; \quad \partial^2 z_{x,y''} \quad .$$

durchaus keiner Bedingung zu genügen; und die Gränzengleichung zerlegt sich in folgende vier einzelne:

$$\text{X)}\quad (\text{I}x)_{a,y} = 0 \qquad , \qquad \text{XI)}\quad (\text{I}x)_{\mathfrak{a},y} = 0$$

$$\text{XII)}\quad (\text{I}y)_{x,y''} - (\text{I}x)_{x,y''} \frac{dy''}{dx} = 0 \quad , \quad \text{XIII)}\quad (\text{I}y)_{x,y'} - (\text{I}x)_{x,y'} \,.\, \frac{dy'}{dx} = 0$$

In den Gleichungen X und XI ist x constant; sie sind aber nach y identisch, und müssen, wenn sie Differentialgleichungen sind, als totale Differentialgleichungen nach y behandelt werden.

In den Gleichungen XII und XIII sind die Functionen y'' und y' an die Stelle des y getreten. Diese zwei Gleichungen sind also nach x identisch, und müssen, wenn sie Differentialgleichungen sind, als totale Differentialgleichungen nach x behandelt werden.

Erst wenn man das für z gefundene allgemeine Integral in letztere vier Gleichungen substituirt, und hierauf integrirt hat; können die sich ergebenden vier Integralgleichungen bei Specialisirung der (in z eingegangenen) willkürlichen Stücke benützt werden.

Wegen der vier letzten Gleichungen X — XIII reducirt sich der in VII aufgestellte Ausdruck des Prüfungsmittels auf

$$\text{XIV)} \quad \delta^2 U = \int_{b(a)}^{\beta(a)} \eta_{a,y} \,.\, \delta z^2_{a,y} \,.\, dy - \int_{b(\mathfrak{a})}^{\beta(\mathfrak{a})} \eta_{\mathfrak{a},y} \,.\, \delta z^2_{\mathfrak{a},y} \,.\, dy$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^{a} \Big[\Big(\omega_{x,y''} - \eta_{x,y''} \,.\, \frac{dy''}{dx}\Big) \,.\, \delta z^2_{x,y''} - \Big(\omega_{x,y'} - \eta_{x,y'} \,.\, \frac{dy'}{dx}\Big) \,.\, \delta z^2_{x,y'} \Big] \,.\, dx$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^{a}\int_{y'}^{y''} \Big[\mathfrak{A} \,.\, \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{B} \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \,.\, \delta z\Big)^2 + \mathfrak{D} \,.\, \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{E} \,.\, \delta z\Big)^2 \Big] \,.\, dy \,.\, dx$$

während, wie man schon aus der ersten Untersuchung weiss, der zwischen η und ω stattfindende Zusammenhang durch folgende Partialdifferentialgleichung

$$\text{XV)} \quad \Big(\mathrm{F} - \frac{d_x \eta}{dx} - \frac{d_y \omega}{dy}\Big)(\mathrm{A\,C} - \mathrm{B}^2) = \mathrm{A} \,.\, (\mathrm{E} - \eta)^2 - 2\,\mathrm{B}\,(\mathrm{E} - \eta)\,(\mathrm{D} - \omega) + \mathrm{C} \,.\, (\mathrm{D} - \omega)^2$$

ausgesprochen ist. Man setze nun $\eta = 0$, so reduciren sich die beiden letzten Gleichungen bezüglich auf

$$\text{XVI)} \quad \delta^2 U = \int_{\mathfrak{a}}^{a} (\omega_{x,y''} \,.\, \delta z^2_{x,y''} - \omega_{x,y'} \,.\, \delta z^2_{x,y'}) \,.\, dx$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^{a}\int_{y'}^{y''} \Big[\mathfrak{A} \Big(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{B} \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \,.\, \delta z\Big)^2 + \mathfrak{D} \,.\, \Big(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{E} \,.\, \delta z\Big)^2 \Big] \,.\, dy \,.\, dx$$

und

$$\text{XVII)} \quad \Big(\mathrm{F} - \frac{d_y \omega}{dy}\Big) \,.\, (\mathrm{A\,C} - \mathrm{B}^2) = \mathrm{A} \,.\, \mathrm{E}^2 - 2\,\mathrm{B\,E}\,(\mathrm{D} - \omega) + \mathrm{C} \,.\, (\mathrm{D} - \omega)^2$$

Indem man aber letztere Gleichung integrirt, ergibt sich für ω ein aus x . y , $\pi(x)$ zusammengesetzter Ausdruck, wo man (nach §. 10) die willkürliche Function $\pi(x)$ noch so benützen kann, dass die nach x identische Gleichung

$$\omega_{x,y''} \,.\, \delta z^2_{x,y''} - \omega_{x,y'} \,.\, \delta z^2_{x,y'} = 0$$

stattfindet. Dabei reducirt sich Gleichung XVI auf das Doppelintegral, und der Zeichenstand des $\delta^2 U$ ist auch jetzt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$, d. h. von dem Aggregate

$$\mathrm{C} \,.\, \Big(\frac{d_x \delta z}{dx}\Big)^2 + 2\,\mathrm{B} \,.\, \frac{d_x \delta z}{dx} \,.\, \frac{d_y \delta z}{dy} + \mathrm{A} \,.\, \Big(\frac{d_y \delta z}{dy}\Big)^2$$

abhängig.

§. 35.

Zweiter Gränzfall[1]. Die gesuchte Function soll nur aus jenen herausgewählt werden, welche alle bei $x=\mathrm{a}$, $x=\alpha$, $y=y'$ und $y=y''$ sich bezüglich in folgende vier Ausdrücke

$$\mathfrak{f}'(y) \quad , \quad \mathfrak{f}''(y) \quad , \quad \mathfrak{f}'''(x) \quad , \quad \mathfrak{f}''''(x)$$

specialisiren. Bei dieser Vorschrift müssen folgende zwei Systeme von Gleichungen

$$\partial z_{\mathrm{a},y}=0 \quad , \quad \partial z_{\alpha,y}=0 \quad , \quad \partial^2 z_{\mathrm{a},y}=0 \quad , \quad \partial^2 z_{\alpha,y}=0 \quad , \quad \text{etc.}$$

und

$$\partial z_{x,y'}=0 \quad , \quad \partial z_{x,y''}=0 \quad , \quad \partial^2 z_{x,y'}=0 \quad , \quad \partial^2 z_{x,y''}=0 \quad , \quad \text{etc.}$$

stattfinden, und die Gränzengleichung fällt von selbst weg. Die durch Integration der Hauptgleichung eingegangenen zwei willkürlichen Functionen specialisiren sich durch folgende vier Gleichungen:

$$z_{\mathrm{a},y}=\mathfrak{f}'(y) \quad , \quad z_{\alpha,y}=\mathfrak{f}''(y) \quad , \quad z_{x,y'}=\mathfrak{f}'''(x) \quad , \quad z_{x,y''}=\mathfrak{f}''''(x)$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich aber noch folgende vier weitere[2]:

$$\text{XVIII)} \quad z_{\mathrm{a},b(\mathrm{a})}=\mathfrak{f}'(b(\mathrm{a}))=\mathfrak{f}'''(\mathrm{a}) \quad , \quad \text{XIX)} \quad z_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a})}=\mathfrak{f}'(\beta(\mathrm{a}))=\mathfrak{f}''''(\mathrm{a})$$

$$\text{XX)} \quad z_{\alpha,b(\alpha)}=\mathfrak{f}''(b(\alpha))=\mathfrak{f}'''(\alpha) \quad , \quad \text{XXI)} \quad z_{\alpha,\beta(\alpha)}=\mathfrak{f}''(\beta(\alpha))=\mathfrak{f}''''(\alpha)$$

Sobald eine einzige dieser vier Gleichungen einen Widerspruch in sich trägt, ist dieser zweite Fall, wie er hier gestellt ist, unmöglich. Sollten aber die vier vorgeschriebenen Functionen

$$\mathfrak{f}'(y) \quad , \quad \mathfrak{f}''(y) \quad , \quad \mathfrak{f}'''(x) \quad , \quad \mathfrak{f}''''(x)$$

Stücke in sich enthalten, die noch willkürlich sind; so müssen diese sich so specialisiren lassen, dass letztere vier Gleichungen erfüllt werden.

Die in VII aufgestellte allgemeine Form des Prüfungsmittels reducirt sich jetzt ohneweiters auf das zweifache Integral, so dass es gar nicht nöthig ist, sich um η und ω zu bekümmern.

§. 36.

Dritter Gränzfall. Wenn für die Gränzen die Gleichung

$$\text{XXII)} \quad f(z_{x,y'}, z_{x,y''})=0$$

[1] Eine auf diesen Gränzfall bezügliche geometrische Aufgabe ist folgende: „Man sucht zwischen zwei in den Endpunkten der „Abscissen a und α senkrechten Ebenen und zwischen zwei auf der Coordinatenebene XY senkrechten Cylindermänteln „$y'=b(x)$ und $y''=\beta(x)$ die kleinste Fläche unter allen denen heraus, welche durch vier feste Curven begränzt werden, die „in den besagten zwei Ebenen und zwei Cylindermänteln liegen".

[2] Bei der in voriger Anmerkung gestellten geometrischen Aufgabe lässt sich die Nothwendigkeit, dass die vier Gleichungen XVIII — XXI stattfinden müssen, sehr leicht veranschaulichen. Die zwei in den Endpunkten der Abscissen a und α senkrechten Ebenen und die beiden gegebenen Cylindermäntel schneiden sich nemlich nach vier geraden Linien, und in jeder dieser vier Graden liegt ein Punkt, welcher zweien der gegebenen Gränzcurven gemeinschaftlich sein muss, weil man sonst durch sie (diese Gränzcurven) keine Fläche begränzen könnte.

gegeben ist; so findet zwischen $\partial z_{x,y'}$ und $\partial z_{x,y''}$, ebenso zwischen $\partial^2 z_{x,y'}$ und $\partial^2 z_{x,y''}$, etc. eine Abhängigkeit statt. Man nehme $\partial z_{x,y'}$ und $\partial^2 z_{x,y'}$ als abhängig; so bekommt man Gleichungen von folgender Form:

$$\text{XXIII)}\quad \partial z_{x,y'} = \mathfrak{P} . \partial z_{x,y''} \quad , \quad \text{XXIV)}\quad \partial^2 z_{x,y'} = \mathfrak{P} . \partial^2 z_{x,y''} + \mathfrak{Q} . \partial z^2_{x,y''}$$

Wenn man jetzt das abhängige Stück aus der Gränzengleichung VI eliminirt, so bekommt man

$$\text{XXV)}\quad \int_{b(a)}^{\beta(a)} (\mathrm{I}x)_{a,y} . \partial z_{a,y} . dy - \int_{b(\mathfrak{a})}^{\beta(\mathfrak{a})} (\mathrm{I}y)_{\mathfrak{a},y} . \partial z_{\mathfrak{a},y} . dy$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^{a} \Big[\Big((\mathrm{I}y)_{x,y''} - (\mathrm{I}x)_{x,y''} . \frac{dy''}{dx} \Big) - \Big((\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'} . \frac{dy'}{dx} \Big) . \mathfrak{P} \Big] . \partial z_{x,y''} . dx = 0$$

und diese Gleichung zerlegt sich in folgende drei:

$$\text{XXVI)}\quad (\mathrm{I}x)_{a,y} = 0 \quad . \quad \text{XXVII)}\quad (\mathrm{I}x)_{\mathfrak{a},y} = 0$$

$$\text{XXVIII)}\quad \Big((\mathrm{I}y)_{x,y''} - (\mathrm{I}x)_{x,y''} . \frac{dy''}{dx} \Big) - \Big((\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'} . \frac{dy'}{dx} \Big) . \mathfrak{P} = 0$$

Man hat also hier abermals vier Gleichungen XXII, XXVI, XXVII und XXVIII, welche bei Specialisirung der durch Integration der Hauptgleichung eingegangenen willkürlichen Stücke benützt werden müssen.

Man eliminire jetzt $\partial z_{x,y'}$ und $\partial^2 z_{x,y'}$ aus VII, und beachte die drei Gleichungen XXVI, XXVII und XXVIII; so bekommt man

$$\text{XXIX)}\quad \partial^2 U = \int_{b(a)}^{\beta(a)} \eta_{a,y} . \partial z^2_{a,y} . dy - \int_{b(\mathfrak{a})}^{\beta(\mathfrak{a})} \eta_{\mathfrak{a},y} . \partial z^2_{\mathfrak{a},y} . dy$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^{a} \Big[\Big(\omega_{x,y''} - \eta_{x,y''} . \frac{dy''}{dx} \Big) - \Big(\omega_{x,y'} - \eta_{x,y'} . \frac{dy'}{dx} \Big) . \mathfrak{P}^2 - \Big((\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'} . \frac{dy'}{dx} \Big) \mathfrak{Q} \Big] . \partial z^2_{x,y''} . dx$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^{a} \int_{y'}^{y''} \Big[\mathfrak{A} . \Big(\frac{d_y \partial z}{dy} + \mathfrak{B} \frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{C} . \partial z \Big)^2 + \mathfrak{D} . \Big(\frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{E} . \partial z \Big)^2 \Big] . dy . dx$$

während der zwischen η und ω stattfindende Zusammenhang durch Gleichung XV ausgesprochen ist. Nun lasse man η zu Null werden, so reduciren sich die Gleichungen XXIX und XV bezüglich auf

$$\text{XXX)}\quad \partial^2 U = \int_{\mathfrak{a}}^{a} \Big[\omega_{x,y''} - \omega_{x,y'} . \mathfrak{P}^2 - \Big((\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'} . \frac{dy'}{dx} \Big) . \mathfrak{Q} \Big] . \partial z^2_{x,y''} . dx$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^{a} \int_{y'}^{y''} \Big[\mathfrak{A} \Big(\frac{d_y \partial z}{dy} + \mathfrak{B} \frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{C} . \partial z \Big)^2 + \mathfrak{D} \Big(\frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{E} . \partial z \Big)^2 \Big] . dy . dx$$

und

$$\text{XXXI)}\quad \Big(\mathrm{F} - \frac{d_y \omega}{dy} \Big) . (\mathrm{A\,C} - \mathrm{B}^2) = \mathrm{A} . \mathrm{E}^2 - 2\,\mathrm{B\,E} . (\mathrm{D} - \omega) + \mathrm{C} . (\mathrm{D} - \omega)^2$$

Durch Integration dieser Partialdifferentialgleichung ergibt sich für ω ein aus x, y, $\pi(x)$ zusammengesetzter Ausdruck, wo man die willkürliche Function $\pi(x)$ so verwenden kann, dass die identische Gleichung

$$\text{XXXII)}\quad \omega_{x,y''} - \omega_{x,y'} \cdot \mathfrak{P}^2 - \Big((\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dx}\Big) \cdot \mathfrak{Q} = 0$$

stattfindet, und Gleichung XXX sich auf das Doppelintegral zurückzieht, so dass auch jetzt der Zeichenstand des $\delta^2 U$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ abhangt.

Untersuchung 9.

§. 37.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen $x, y, z, \frac{d_x z}{dx}, \frac{d_y z}{dy}, \frac{d_x^2 z}{dx^2}, \frac{d_x d_y z}{dx . dy}, \frac{d_y^2 z}{dy^2}$ versehener Ausdruck; und man sucht für z eine solche Function von x und y, dass folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^a \int_{y'}^{y''} W . dy . dx$$

wo y' und y'' Functionen von x sind, ein Maximum oder Minimum wird.

Hier bekommt man zunächst

$$\text{II)}\quad \delta U = \int_a^a \int_{y'}^{y''} \Big[\frac{d_z W}{dz} \delta z + (\mathrm{I}x) \frac{d_x \delta z}{dx} + (\mathrm{I}y) \frac{d_y \delta z}{dy} + (\mathrm{II}x^2) \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + (\mathrm{II}xy) \frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} + (\mathrm{II}y^2) \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \Big] . dy . dx$$

Das allgemeine Verfahren zur Umformung dieses Ausdruckes ist bereits in der 7ten Untersuchung mitgetheilt; und wenn man den dortigen Abkürzungszeichen die Bedeutung beilegt, welche ihnen in hiesiger Aufgabe zukommen, so gibt sich (nach Gleichung III in §. 15)

$$\text{III)}\quad (\Sigma xy) = (\mathrm{II}xy) . \delta z$$

$$\text{IV)}\quad (\Sigma x) = \Big((\mathrm{I}x) - \frac{d_x(\mathrm{II}x^2)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{II}xy)}{dy} \Big) . \delta z + (\mathrm{II}x^2) . \frac{d_x \delta z}{dx}$$

$$\text{V)}\quad (\Sigma y) = \Big((\mathrm{I}y) - \frac{d_y(\mathrm{II}y^2)}{dy} - \frac{d_x(\mathrm{II}xy)}{dx} \Big) . \delta z + (\mathrm{II}y^2) . \frac{d_y \delta z}{dy}$$

$$\text{VI)}\quad (\Sigma) = \Big(\frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy} + \frac{d_x^2(\mathrm{II}x^2)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(\mathrm{II}xy)}{dx . dy} + \frac{d_y^2(\mathrm{II}y^2)}{dy^2} \Big) . \delta z$$

und aus Gleichung III folgt weiter

$$\text{VII)}\quad \frac{d_y(\Sigma xy)}{dy} = \frac{d_y(\mathrm{II}xy)}{dy} . \delta z + (\mathrm{II}xy) . \frac{d_y \delta z}{dy}$$

Die allgemeine Gleichung X des §. 31 specialisirt sich also jetzt auf folgende Weise:

$$\text{VIII)}\ \delta U =$$

$$(\mathrm{II}\,xy)_{a,\beta(a)}\cdot\delta z_{a,\beta(a)} - (\mathrm{II}\,xy)_{a,b(a)}\cdot\delta z_{a,b(a)} - (\mathrm{II}\,xy)_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a})}\cdot\delta z_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a})} + (\mathrm{II}\,xy)_{\mathrm{a},b(\mathrm{a})}\cdot\delta z_{\mathrm{a},b(\mathrm{a})}$$

$$+\int_{b(a)}^{\beta(a)}\Big[\Big((\mathrm{I}\,x) - \frac{d_x(\mathrm{II}\,x^2)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{II}\,xy)}{dy}\Big)_{a,y}\cdot\delta z_{a,y} + (\mathrm{II}\,x^2)_{a,y}\cdot\Big(\frac{d_x\delta z}{dx}\Big)_{a,y}\Big]\cdot dy$$

$$-\int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}\Big[\Big((\mathrm{I}\,x) - \frac{d_x(\mathrm{II}\,x^2)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{II}\,xy)}{dy}\Big)_{\mathrm{a},y}\cdot\delta z_{\mathrm{a},y} + (\mathrm{II}\,x^2)_{\mathrm{a},y}\cdot\Big(\frac{d_x\delta z}{dx}\Big)_{\mathrm{a},y}\Big]\cdot dy$$

$$+\int_{\mathrm{a}}^{a}\Big[\Big\{\Big((\mathrm{I}\,y) - \frac{d_y(\mathrm{II}\,y^2)}{dy} - \frac{d_x(\mathrm{II}\,xy)}{dx}\Big)_{x,y''} - \Big((\mathrm{I}\,x) - \frac{d_x(\mathrm{II}\,x^2)}{dx}\Big)_{x,y''}\cdot\frac{dy''}{dx}\Big\}\cdot\delta z_{x,y''}$$

$$+\Big\{(\mathrm{II}\,y^2)_{x,y''} - (\mathrm{II}\,xy)_{x,y''}\cdot\frac{dy''}{dx}\Big\}\cdot\Big(\frac{d_y\delta z}{dy}\Big)_{x,y''} - (\mathrm{II}\,x^2)_{x,y''}\cdot\frac{dy''}{dx}\cdot\Big(\frac{d_x\delta z}{dx}\Big)_{x,y''}$$

$$-\Big\{\Big((\mathrm{I}\,y) - \frac{d_y(\mathrm{II}\,y^2)}{dy} - \frac{d_x(\mathrm{II}\,xy)}{dx}\Big)_{x,y'} - \Big((\mathrm{I}\,x) - \frac{d_x(\mathrm{II}\,x^2)}{dx}\Big)_{x,y'}\cdot\frac{dy'}{dx}\Big\}\cdot\delta z_{x,y'}$$

$$-\Big\{(\mathrm{II}\,y^2)_{x,y'} - (\mathrm{II}\,xy)_{x,y'}\cdot\frac{dy'}{dx}\Big\}\cdot\Big(\frac{d_y\delta z}{dy}\Big)_{x,y'} + (\mathrm{II}\,x^2)_{x,y'}\cdot\frac{dy'}{dx}\cdot\Big(\frac{d_x\delta z}{dx}\Big)_{x,y'}\Big]\cdot dx$$

$$+\int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{y'}^{y''}\Big[\frac{d_z V}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}\,x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}\,y)}{dy} + \frac{d_x^2(\mathrm{II}\,x^2)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(\mathrm{II}\,xy)}{dx\,.\,dy} + \frac{d_y^2(\mathrm{II}\,y^2)}{dy^2}\Big]\cdot\delta z\,.\,dy\,.\,dx$$

§. 38.

Da aber hier unter dem Integralzeichen $\int_{\mathrm{a}}^{a}$, durch welches eine einfache Integration nach x vorgeschrieben ist, immer noch der Differentialquotient $\frac{d_x\delta z}{dx}$ vorkommt; so sind, wie schon einmal (§. 32) angedeutet wurde, noch nicht alle möglichen Transformationen ausgeführt.

Nun können, weil y' und y'' Functionen von x sind, die nach x auszuführenden Integrationen nur auf totale Differentiale angewendet werden. Zu diesem Ende setze man

$$\frac{d\Big((\mathrm{II}\,x^2)_{x,y''}\cdot\frac{dy''}{dx}\cdot\delta z_{x,y''}\Big)}{dx} = \frac{d\Big((\mathrm{II}\,x^2)_{x,y''}\cdot\frac{dy''}{dx}\Big)}{dx}\cdot\delta z_{x,y''} + (\mathrm{II}\,x^2)_{x,y''}\cdot\frac{dy''}{dx}\cdot\Big[\Big(\frac{d_x\delta z}{dx}\Big)_{x,y''} + \Big(\frac{d_y\delta z}{dy}\Big)_{x,y''}\cdot\frac{dy''}{dx}\Big]$$

Daraus folgt durch Übertragen

$$\text{IX)}\ (\mathrm{II}\,x^2)_{x,y''}\cdot\frac{dy''}{dx}\cdot\Big(\frac{d_x\delta z}{dx}\Big)_{x,y''} = \frac{d\Big((\mathrm{II}\,x^2)_{x,y''}\cdot\frac{dy''}{dx}\cdot\delta z_{x,y''}\Big)}{dx} - \frac{d\Big((\mathrm{II}\,x^2)_{x,y''}\cdot\frac{dy''}{dx}\Big)}{dx}\cdot\delta z_{x,y''}$$
$$-(\mathrm{II}\,x^2)_{x,y''}\cdot\Big(\frac{dy''}{dx}\Big)^2\cdot\Big(\frac{d_y\delta z}{dy}\Big)_{x,y''}$$

Auf dieselbe Weise bekommt man

$$\text{X)}\ (\mathrm{II}\,x^2)_{x,y'}\cdot\frac{dy'}{dx}\cdot\Big(\frac{d_x\delta z}{dx}\Big)_{x,y'} = \frac{d\Big((\mathrm{II}\,x^2)_{x,y'}\cdot\frac{dy'}{dx}\cdot\delta z_{x,y'}\Big)}{dx} - \frac{d\Big((\mathrm{II}\,x^2)_{x,y'}\cdot\frac{dy'}{dx}\Big)}{dx}\cdot\delta z_{x,y'}$$
$$-(\mathrm{II}\,x^2)_{x,y'}\cdot\Big(\frac{dy'}{dx}\Big)^2\cdot\Big(\frac{d_y\delta z}{dy}\Big)_{x,y'}$$

Man führe die beiden letzten Ausdrücke in VIII ein, und integrire die nach x durchlaufenden totalen Differentialquotienten; so bekommt man

XI) $\partial U =$

$$\Big[(\mathrm{II}\,xy)_{a\,,\,\beta(a)} - (\mathrm{II}\,x^2)_{a\,,\,\beta(a)} \cdot \Big(\frac{dy''}{dx}\Big)_a\Big] \cdot \partial z_{a\,,\,\beta(a)} - \Big[(\mathrm{II}\,xy)_{a\,,\,b(a)} - (\mathrm{II}\,x^2)_{a\,,\,b(a)} \cdot \Big(\frac{dy'}{dx}\Big)_a\Big] \cdot \partial z_{a\,,\,b(a)}$$

$$-\Big[(\mathrm{II}\,xy)_{\mathfrak{a}\,,\,\beta(\mathfrak{a})} - (\mathrm{II}\,x^2)_{\mathfrak{a}\,,\,\beta(\mathfrak{a})} \cdot \Big(\frac{dy''}{dx}\Big)_{\mathfrak{a}}\Big] \cdot \partial z_{\mathfrak{a}\,,\,\beta(\mathfrak{a})} + \Big[(\mathrm{II}\,xy)_{\mathfrak{a}\,,\,b(\mathfrak{a})} - (\mathrm{II}\,x^2)_{\mathfrak{a}\,,\,b(\mathfrak{a})} \cdot \Big(\frac{dy'}{dx}\Big)_{\mathfrak{a}}\Big] \cdot \partial z_{\mathfrak{a}\,,\,b(\mathfrak{a})}$$

$$+\int_{b(a)}^{\beta(a)}\Big[\Big((\mathrm{I}\,x) - \frac{d_x(\mathrm{II}\,x^2)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{II}\,xy)}{dy}\Big)_{a\,,\,y} \cdot \partial z_{a\,,\,y} + (\mathrm{II}\,x^2)_{a\,,\,y} \cdot \Big(\frac{d_x \partial z}{dx}\Big)_{a\,,\,y}\Big] \cdot dy$$

$$-\int_{b(\mathfrak{a})}^{\beta(\mathfrak{a})}\Big[\Big((\mathrm{I}\,x) - \frac{d_x(\mathrm{II}\,x^2)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{II}\,xy)}{dy}\Big)_{\mathfrak{a}\,,\,y} \cdot \partial z_{\mathfrak{a}\,,\,y} + (\mathrm{II}\,x^2)_{\mathfrak{a}\,,\,y} \cdot \Big(\frac{d_x \partial z}{dx}\Big)_{\mathfrak{a}\,,\,y}\Big] \cdot dy$$

$$+\int_{\mathfrak{a}}^{a}\Big[\Big\{\Big((\mathrm{I}\,y) - \frac{d_y(\mathrm{II}\,y^2)}{dy} - \frac{d_x(\mathrm{II}\,xy)}{dx}\Big)_{x\,,\,y''} - \Big((\mathrm{I}\,x) - \frac{d_x(\mathrm{II}\,x^2)}{dx}\Big)_{x\,,\,y''} \cdot \frac{dy''}{dx} + \frac{d\Big((\mathrm{II}\,x^2)_{x\,,\,y''} \cdot \frac{dy''}{dx}\Big)}{dx}\Big\} \cdot \partial z_{x\,,\,y''}$$

$$+\Big\{(\mathrm{II}\,y^2)_{x\,,\,y''} - (\mathrm{II}\,xy)_{x\,,\,y''} \cdot \frac{dy''}{dx} + (\mathrm{II}\,x^2)_{x\,,\,y''} \cdot \Big(\frac{dy''}{dx}\Big)^2\Big\} \cdot \Big(\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)_{x\,,\,y''}$$

$$-\Big\{\Big((\mathrm{I}\,y) - \frac{d_y(\mathrm{II}\,y^2)}{dy} - \frac{d_x(\mathrm{II}\,xy)}{dx}\Big)_{x,y'} - \Big((\mathrm{I}\,x) - \frac{d_x(\mathrm{II}\,x^2)}{dx}\Big)_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dx} + \frac{d\Big((\mathrm{II}\,x^2)_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dx}\Big)}{dx}\Big\} \cdot \partial z_{x,y'}$$

$$-\Big\{(\mathrm{II}\,y^2)_{x,y'} - (\mathrm{II}\,xy)_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dx} + (\mathrm{II}\,x^2)_{x,y'}\Big(\frac{dy'}{dx}\Big)^2\Big\} \cdot \Big(\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)_{x,y'}\Big] \cdot dx$$

$$+\int_{\mathfrak{a}}^{a}\int_{y'}^{y''}\Big[\frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}\,x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}\,y)}{dy} + \frac{d_x^2(\mathrm{II}\,x^2)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(\mathrm{II}\,xy)}{dx\,.\,dy} + \frac{d_y^2(\mathrm{II}\,y^2)}{dy^2}\Big] \cdot \partial z \,.\, dy \,.\, dx$$

Die beiden **totalen** Differentialquotienten

$$\frac{d\Big((\mathrm{II}\,x^2)_{x\,,\,y''} \cdot \frac{dy''}{dx}\Big)}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{d\Big((\mathrm{II}\,x^2)_{x\,,\,y'} \cdot \frac{dy'}{dx}\Big)}{dx}$$

gehen, wenn man sie in ihre Bestandtheile zerlegt, bezüglich über in

$$\text{XII)} \quad \Big(\frac{d_x(\mathrm{II}\,x^2)}{dx}\Big)_{x\,,\,y''} \cdot \frac{dy''}{dx} + \Big(\frac{d_y(\mathrm{II}\,x^2)}{dy}\Big)_{x\,,\,y''} \cdot \Big(\frac{dy''}{dx}\Big)^2 + (\mathrm{II}\,x^2)_{x\,,\,y''} \cdot \frac{d^2y''}{dx^2}$$

und

$$\text{XIII)} \quad \Big(\frac{d_x(\mathrm{II}\,x^2)}{dx}\Big)_{x\,,\,y'} \cdot \frac{dy'}{dx} + \Big(\frac{d_y(\mathrm{II}\,x^2)}{dy}\Big)_{x\,,\,y'} \cdot \Big(\frac{dy'}{dx}\Big)^2 + (\mathrm{II}\,x^2)_{x\,,\,y'} \cdot \frac{d^2y'}{dx^2}$$

welche Aggregate, wenn man will, noch in Gleichung XI substituirt werden können.

§. 39.

Die Gleichung XI ist nun auf eine Form gebracht, wie sie der Gleichung IV in der zweiten Untersuchung entspricht.

Die Behandlung der Gränzengleichung und die Herstellung des Prüfungsmittels kann jetzt übergangen werden, weil durch die vorhergehenden Untersuchungen hinreichend Anleitung gegeben ist.

Untersuchung 10.

§. 40.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen

$$x\,,\; y\,,\; z\,,\; \frac{d_x z}{dx}\,,\; \frac{d_y z}{dy}\,,\; \frac{d_x^2 z}{dx^2}\,,\; \frac{d_x d_y z}{dx.dy}\,,\; \frac{d_y^2 z}{dy^2}\,,\; \frac{d_x^3 z}{dx^3}\,,\; \ldots$$

versehener Ausdruck; und man sucht

1. für z eine solche Function von x und y,
2. für y' und y'' solche Functionen $b(x)$ und $\beta(x)$ des einzigen Veränderlichen x, und
3. für a und α solche bestimmte Werthe,

dass dabei folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{y'}^{y''} W \,.\, dy \,.\, dx$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Wenn man, wie in §. 23, die Werthänderungen des a und des α mit

$$\vartheta\mathrm{a}\,,\; \vartheta\alpha\,,\; \vartheta^2\mathrm{a}\,,\; \vartheta^2\alpha\,,\; \vartheta^3\mathrm{a}\,,\; \vartheta^3\alpha\,,\; \text{etc.}$$

bezeichnet; und wenn man auch jetzt, so oft es zweckmässig ist, $b(x)$ statt y', und $\beta(x)$ statt y'' schreibt; so bekommt man

$$\text{II)}\quad \partial U = \int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)} W_{\alpha,y} \,.\, dy \,.\, \vartheta\alpha - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} W_{\mathrm{a},y} \,.\, dy \,.\, \vartheta\mathrm{a}$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} [W_{x,y''} \,.\, \partial y'' - W_{x,y'} \,.\, \partial y'] \,.\, dx$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{y'}^{y''} \partial W \,.\, dy \,.\, dx$$

und

$$\text{III)}\quad \partial^2 U =$$

$$\left(W_{x,y''} \,.\, \frac{dy''}{dx} - W_{x,y'} \,.\, \frac{dy'}{dx}\right)_{\alpha} \,.\, \vartheta\alpha^2 + 2\, W_{\alpha,\beta(\alpha)} \,.\, \partial\beta(\alpha) \,.\, \vartheta\alpha - 2\, W_{\alpha,b(\alpha)} \,.\, \partial b(\alpha) \,.\, \vartheta\alpha$$

$$-\left(W_{x,y''} \,.\, \frac{dy''}{dx} - W_{x,y'} \,.\, \frac{dy'}{dx}\right)_{\mathrm{a}} \,.\, \vartheta\mathrm{a}^2 - 2\, W_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a})} \,.\, \partial\beta(\mathrm{a}) \,.\, \vartheta\mathrm{a} + 2\, W_{\mathrm{a},b(\mathrm{a})} \,.\, \partial b(\mathrm{a}) \,.\, \vartheta\mathrm{a}$$

$$+ \int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)} \left[W_{\alpha,y} \,.\, \vartheta^2\alpha + 2\,\partial W_{\alpha,y} \,.\, \vartheta\alpha + \left(\frac{d_x W}{dx}\right)_{\alpha,y} \,.\, \vartheta\alpha^2 \right] . \, dy$$

$$- \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} \left[W_{\mathrm{a},y} \,.\, \vartheta^2\mathrm{a} + 2\,\partial W_{\mathrm{a},y} \,.\, \vartheta\mathrm{a} + \left(\frac{d_x W}{dx}\right)_{\mathrm{a},y} \,.\, \vartheta\mathrm{a}^2 \right] . \, dy$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \Bigg[W_{x,y''} \,.\, \partial^2 y'' + 2\,\partial W_{x,y''} \,.\, \partial y'' + \left(\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,y''} \,.\, \partial y''^2$$

$$- W_{x,y'} \,.\, \partial^2 y' - 2\,\partial W_{x,y'} \,.\, \partial y' - \left(\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,y'} \,.\, \partial y'^2 \Bigg] . \, dx$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{y'}^{y''} \partial^2 W \,.\, dy \,.\, dx$$

Die Bedeutung von δW, $\delta^2 W$, $\frac{d_x W}{dx}$ und $\frac{d_y W}{dy}$ ist bereits (aus §. 23) bekannt.

In den Gleichungen II und III müssen aber die mit den zweifachen Integralzeichen versehenen Theilsätze noch so umgeformt werden, wie in den drei vorigen Untersuchungen geschehen ist.

Dabei beachte man, dass die nach y auszuführenden Integrationen unabhängig sind von $\vartheta\mathrm{a}$, $\vartheta\alpha$, $\vartheta^2\mathrm{a}$, $\vartheta^2\alpha$, dass man also diese Werthänderungen, je nachdem es zweckmässig ist, bald ausserhalb, bald unterhalb des Integralzeichens stellen kann.

Um jedoch von den Eigenthümlichkeiten, die dabei vorkommen können, einige zu erledigen, mögen noch zwei specielle Untersuchungen nachfolgen.

Untersuchung 11.

§. 41.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen x, y, z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$ versehener Ausdruck; und man sucht, während die Werthe von a und α bestimmte sind, für z eine solche Function von x und y, und für y' und y'' solche Functionen $b(x)$ und $\beta(x)$ des einzigen Veränderlichen x, dass folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{y'}^{y''} W \,.\, dy \,.\, dx$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Weil diesmal die Werthe von a und α bestimmte sind, so ist $\vartheta\mathrm{a} = 0$, $\vartheta\alpha = 0$, $\vartheta^2\mathrm{a} = 0$, $\vartheta^2\alpha = 0$ etc.; und desshalb fallen alle mit $\vartheta\mathrm{a}$, $\vartheta\alpha$, $\vartheta^2\mathrm{a}$, $\vartheta^2\alpha$ etc. behafteten Theilsätze der in voriger Untersuchung befindlichen allgemeinen Formeln hinweg, d. h. man bekommt diesmal nur

$$\begin{aligned}\text{II)}\quad \delta U = & \int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)} (\mathrm{I}x)_{\alpha,y} \,.\, \delta z_{\alpha,y} \,.\, dy - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} \,.\, \delta z_{\mathrm{a},y} \,.\, dy \\ & + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \Big[W_{x,y''} \,.\, \delta y'' + \Big((\mathrm{I}y)_{x,y''} - (\mathrm{I}x)_{x,y''} \,.\, \frac{dy''}{dx}\Big) \,.\, \delta z_{x,y''} \\ & \quad - W_{x,y'} \,.\, \delta y' - \Big((\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'} \,.\, \frac{dy'}{dx}\Big) \,.\, \delta z_{x,y'} \Big] \,.\, dx \\ & + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{y'}^{y''} \Big[\frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy}\Big] \,.\, \delta z \,.\, dy \,.\, dx\end{aligned}$$

wo man der Zweckmässigkeit wegen

$$b(\alpha) \quad , \quad \beta(\alpha) \quad . \quad b(\mathrm{a}) \quad , \quad \beta(\mathrm{a})$$

bezüglich statt

$$y'_\alpha \quad , \quad y''_\alpha \quad , \quad y'_{\mathrm{a}} \quad , \quad y''_{\mathrm{a}}$$

gesetzt hat. Aus Gleichung II folgt zunächst die Hauptgleichung

$$\text{III)}\quad \frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}x)}{dy} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{IV)}\quad \int_{b(a)}^{\beta(a)} (\mathrm{I}x)_{a,y} \cdot \partial z_{a,y} \cdot dy - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} \cdot \partial z_{\mathrm{a},y} \cdot dy$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a} \Big[W_{x,y''} \cdot \partial y'' + \Big((\mathrm{I}y)_{x,y''} - (\mathrm{I}x)_{x,y''} \cdot \frac{dy''}{dx} \Big) \cdot \partial z_{x,y''}$$
$$- W_{x,y'} \cdot \partial y' - \Big((\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dx} \Big) \cdot \partial z_{x,y'} \Big] \cdot dx = 0$$

Man hat also abermals dieselbe Hauptgleichung, wie in der ersten Untersuchung, wo alle Integrationsgränzen constant waren.

Mit Berücksichtigung der Hauptgleichung bekommt man für das Prüfungsmittel zunächst

$$\text{V)}\quad \partial^2 U = \int_{b(a)}^{\beta(a)} \Big[(\mathrm{I}x)_{a,y} \cdot \partial^2 z_{a,y} + \eta_{a,y} \cdot \partial z_{a,y}^2 \Big] \cdot dy - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} \Big[(\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} \cdot \partial^2 z_{\mathrm{a},y} + \eta_{\mathrm{a},y} \cdot \partial z_{\mathrm{a},y}^2 \Big] \cdot dy$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a} \Big[W_{x,y''} \cdot \partial^2 y'' + 2 \cdot \partial W_{x,y''} \cdot \partial y'' + \Big(\frac{d_{,,} W}{dy}\Big)_{x,y''} \cdot \partial y''^2$$
$$+ \Big((\mathrm{I}y)_{x,y''} - (\mathrm{I}x)_{x,y''} \cdot \frac{dy''}{dx} \Big) \cdot \partial^2 z_{x,y''} + \Big(\omega_{x,y''} - \eta_{x,y''} \cdot \frac{dy''}{dx} \Big) \cdot \partial z_{x,y''}^2$$
$$- W_{x,y'} \cdot \partial^2 y' - 2 \cdot \partial W_{x,y'} \cdot \partial y' - \Big(\frac{d_y W}{dy}\Big)_{x,y'} \cdot \partial y'^2$$
$$- \Big((\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dx} \Big) \cdot \partial^2 z_{x,y'} - \Big(\omega_{x,y'} - \eta_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dx} \Big) \cdot \partial z_{x,y'}^2 \Big] \cdot dx$$
$$\int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{y'}^{y''} \Big[\mathfrak{A} \cdot \Big(\frac{d_y \partial z}{dy} + \mathfrak{B} \frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \partial z \Big)^2 + \mathfrak{D} \cdot \Big(\frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{E} \cdot \partial z \Big)^2 \Big] \cdot dy \cdot dx$$

während, wie man aus der ersten Untersuchung weiss, zwischen η und ω der durch folgende Partialdifferentialgleichung

$$\text{VI)}\quad \Big(\mathrm{F} - \frac{d_x \eta}{dx} - \frac{d_y \omega}{dy} \Big) \cdot (\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2) = \mathrm{A} \cdot (\mathrm{E} - \eta)^2 - 2\,\mathrm{B} \cdot (\mathrm{E} - \eta) \cdot (\mathrm{D} - \omega) + \mathrm{C} \cdot (\mathrm{D} - \omega)^2$$

ausgesprochene Zusammenhang stattfinden muss.

Nun ist man auf dem Punkte, der Gränzengleichung zu genügen: und zu diesem Ende sollen folgende drei Fälle durchgeführt werden.

§. 42.

Erster Gränzfall. Wenn für die Gränzen keine Vorschriften gemacht sind, so haben die Ausdrücke

$$\text{VII)}\quad \partial z_{\mathrm{a},y}\,,\quad \partial z_{a,y}\,,\quad \partial z_{x,y'}\,,\quad \partial z_{x,y''}\,,$$
$$\text{VIII)}\quad \partial^2 z_{\mathrm{a},y}\,,\quad \partial^2 z_{a,y}\,,\quad \partial^2 z_{x,y'}\,,\quad \partial^2 z_{x,y''}\,,$$
etc. etc.

und ebenso die Ausdrücke

$$\text{IX)} \quad \partial y' \quad , \quad \partial y'' \quad , \quad \partial^2 y' \quad , \quad \partial^2 y'' \quad , \quad \text{etc. etc.}$$

durchaus keiner Bedingung zu genügen. Hier sind also die bei VII aufgestellten vier Ausdrücke dem Werthe nach ganz unabhängig von einander, obgleich sie aus einer und derselben Form $\partial z_{x,y}$ herstammen. Das Nämliche gilt von den bei VIII aufgestellten vier Ausdrücken, obgleich sie aus einer und derselben Form $\partial^2 z_{x,y}$ herstammen. Und so fort.

Dabei zerlegt sich die Gränzengleichung in folgende sechs einzelne:

$$\text{X)}\ (\mathrm{I}x)_{a,y} = 0 \quad , \quad \text{XI)}\ (\mathrm{I}y)_{x,y''} - (\mathrm{I}x)_{x,y''} \cdot \frac{dy''}{dx} = 0 \quad , \quad \text{XII)}\ W_{x,y''} = 0$$

$$\text{XIII)}\ (\mathrm{I}x)_{\alpha,y} = 0 \quad , \quad \text{XIV)}\ (\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0 \quad , \quad \text{XV)}\ W_{x,y'} = 0$$

In den zwei Gleichungen X und XIII ist x constant; sie sind aber nach y identisch, und müssen, wenn sie Differentialgleichungen sind, als totale Differentialgleichungen nach y behandelt werden.

In den zwei Gleichungen XI und XIV sind an die Stelle des y die Functionen $y' = b(x)$ und $y'' = \beta(x)$ getreten; sie sind also nach x identisch, und müssen, wenn sie Differentialgleichungen sind, als totale Differentialgleichungen nach x behandelt werden. Schaut man jedoch noch einmal auf die Gleichungen XI und XIV, so sieht man, dass daselbst die Differentialquotienten der noch unbekannten Functionen y' und y'' vorkommen. Durch Elimination dieser Quotienten wird jedenfalls einige Bequemlichkeit gewonnen für den noch rückständigen Theil der Untersuchung. Nun sind aber auch die Gleichungen XII und XV nach x identische, und desshalb sind auch ihre totalen Differentialquotienten identisch Null, d. h. man hat auch

$$\left(\frac{d_x W}{dx}\right)_{x,y''} + \left(\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,y''} \cdot \frac{dy''}{dx} = 0 \,, \quad \text{und} \quad \left(\frac{d_x W}{dx}\right)_{x,y'} + \left(\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0$$

Eliminirt man $\frac{dy''}{dx}$ und $\frac{dy'}{dx}$, so gehen XI und XIV bezüglich über in

$$\text{XVI)}\ \left(\frac{d_x W}{dx} \cdot (\mathrm{I}x)\right)_{x,y''} + \left(\frac{d_y W}{dy} \cdot (\mathrm{I}y)\right)_{x,y''} = 0 \quad , \quad \text{XVII)}\ \left(\frac{d_x W}{dx} \cdot (\mathrm{I}x)\right)_{x,y'} + \left(\frac{d_y W}{dy} \cdot (\mathrm{I}y)\right)_{x,y'} = 0$$

Man substituire jetzt das für z gefundene allgemeine Integral in die Gleichungen X, XIII, XVI, XVII, und integrire dieselben als totale Differentialgleichungen. Erst die sich ergebenden vier Integralgleichungen können benützt werden zur Specialisirung der (in z eingegangenen) zwei willkürlichen Functionen[1].

Hierauf substituire man die so specialisirte Function z in die beiden Gleichungen XII und XV, und bestimme $y' = b(x)$ und $y'' = \beta(x)$. Weil aber die beiden Gleichungen XII und XV einander einerlei sind, so müssen sich für y' und y'' die nemlichen Ausdrücke ergeben. Sind diese vielförmig, so kann man die verschiedenen Formen so vertheilen, dass die der Aufgabe zu Grunde liegende Hauptbedingung

$$\beta(x) > b(x)$$

[1] Der einfachste Fall, welcher dem hiesigen Gränzfalle entspricht, ist (§. 10) derjenige, wo alle vier Integrationsgränzen constante Werthelemente sind; und auch dort sind zur Specialisirung der (in z eingegangenen) zwei willkürlichen Functionen vier mit Gränzelementen versehene Gleichungen vorhanden.

erfüllt wird. Ergeben sich aber für y' und y'' nur einförmige Ausdrücke, so ist keine solche Vertheilung möglich, d. h. man bekommt $b(x) = \beta(x)$; und dabei ist dieser erste Gränzfall unzulässig.

Beachtet man jetzt alles Vorhergehende, so zieht der in V für das Prüfungsmittel aufgestellte Ausdruck sich zurück auf

$$\text{XVIII)} \quad \partial^2 U = \int_{b(a)}^{\beta(a)} \eta_{a,y} \,.\, \partial z^2_{a,y} \,.\, dy - \int_{b(\mathfrak{a})}^{\beta(\mathfrak{a})} \eta_{\mathfrak{a},y} \,.\, \partial z^2_{\mathfrak{a},y} \,.\, dy$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^{a} \Big[2 \,.\, \Big\{ \Big(\frac{d_z W}{dz}\Big)_{x,y''} \,.\, \partial z_{x,y''} + (\mathrm{I}x)_{x,y''} \,.\, \Big(\frac{d_x \partial z}{dx}\Big)_{x,y''} + (\mathrm{I}y)_{x,y''} \,.\, \Big(\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)_{x,y''} \Big\} \,.\, \partial y''$$
$$+ \Big(\frac{d_y W}{dy}\Big)_{x,y''} \,.\, \partial y''^2 + \Big(\omega_{x,y''} - \eta_{x,y''} \,.\, \frac{dy''}{dx}\Big) \,.\, \partial z^2_{x,y''}$$
$$- 2 \,.\, \Big\{ \Big(\frac{d_z W}{dz}\Big)_{x,y'} \,.\, \partial z_{x,y'} + (\mathrm{I}x)_{x,y'} \,.\, \Big(\frac{d_x \partial z}{dx}\Big)_{x,y'} + (\mathrm{I}y)_{x,y'} \,.\, \Big(\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)_{x,y'} \Big\} \,.\, \partial y'$$
$$- \Big(\frac{d_y W}{dy}\Big)_{x,y'} \,.\, \partial y'^2 - \Big(\omega_{x,y'} - \eta_{x,y'} \,.\, \frac{dy'}{dx}\Big) \,.\, \partial z^2_{x,y'} \Big] \,.\, dx$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^{a} \int_{y'}^{y''} \Big[\mathfrak{A} \,.\, \Big(\frac{d_y \partial z}{dy} + \mathfrak{B} \frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{C} \,.\, \partial z\Big)^2 + \mathfrak{D} \,.\, \Big(\frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{E} \,.\, \partial z\Big)^2 \Big] \,.\, dy \,.\, dx$$

In Folge der Gleichung XI kann man $(\mathrm{I}x)_{x,y''} \,.\, \frac{dy''}{dx}$ statt $(\mathrm{I}y)_{x,y''}$ setzen: und dadurch bekommt man

$$(\mathrm{I}x)_{x,y''} \,.\, \Big(\frac{d_x \partial z}{dx}\Big)_{x,y''} + (\mathrm{I}y)_{x,y''} \,.\, \Big(\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)_{x,y''} = (\mathrm{I}x)_{x,y''} \,.\, \Big\{ \Big(\frac{d_x \partial z}{dx}\Big)_{x,y''} + \Big(\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)_{x,y''} \,.\, \frac{dy''}{dx} \Big\}$$
$$= (\mathrm{I}x)_{x,y''} \,.\, \frac{d(\partial z_{x,y''})}{dx}$$

In Folge der Gleichung XIV kann man $(\mathrm{I}x)_{x,y'} \,.\, \frac{dy'}{dx}$ statt $(\mathrm{I}y)_{x,y'}$ setzen; und dadurch bekommt man auf demselben Wege, wie vorhin

$$(\mathrm{I}x)_{x,y'} \,.\, \Big(\frac{d_x \partial z}{dx}\Big)_{x,y'} + (\mathrm{I}y)_{x,y'} \,.\, \Big(\frac{d_y \partial z}{dy}\Big)_{x,y'} = (\mathrm{I}x)_{x,y'} \,.\, \frac{d(\partial z_{x,y'})}{dx}$$

Nun lasse man η zu Null werden, und setze zur Abkürzung

$$W_1 \quad , \quad V_1 \quad , \quad W_2 \quad , \quad V_2$$

bezüglich statt

$$\Big(\frac{d_y W}{dy}\Big)_{x,y'} \quad , \quad \Big(\frac{d_z W}{dz}\Big)_{x,y'} \quad , \quad \Big(\frac{d_y W}{dy}\Big)_{x,y''} \quad , \quad \Big(\frac{d_z W}{dz}\Big)_{x,y''}$$

so kann man Gleichung XVIII auf folgende Form bringen:

$$\text{XIX)} \quad \partial^2 U = \int_{\mathfrak{a}}^{a} \Big[\Big(\frac{d_y W}{dy}\Big)_{x,y''} \,.\, \Big(\partial y'' + \frac{V_2}{W_2} \,.\, \partial z_{x,y''} + \frac{(\mathrm{I}x)_{x,y''}}{W_2} \,.\, \frac{d(\partial z_{x,y''})}{dx}\Big)^2$$
$$+ \Big(- \frac{d_y W}{dy}\Big)_{x,y'} \,.\, \Big(\partial y' + \frac{V_1}{W_1} \,.\, \partial z_{x,y'} + \frac{(\mathrm{I}x)_{x,y'}}{W_1} \,.\, \frac{d(\partial z_{x,y'})}{dx}\Big)^2$$

$$-\frac{1}{W_2}\cdot\Big(V_2\,.\,\partial z_{x,y''}+(\mathrm{I}x)_{x,y''}\,.\,\frac{d(\partial z_{x,y''})}{dx}\Big)^2+\omega_{x,y''}\,.\,\partial z^2_{x,y''}$$

$$+\frac{1}{W_1}\cdot\Big(V_1\,.\,\partial z_{x,y'}+(\mathrm{I}x)_{x,y'}\,.\,\frac{d(\partial z_{x,y'})}{dx}\Big)^2-\omega_{x,y'}\,.\,\partial z^2_{x,y'}\Big]\,.\,dx$$

$$+\int_{\mathfrak{a}}^{a}\int_{y'}^{y''}\Big[\mathfrak{A}\,.\,\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}+\mathfrak{B}\frac{d_x\partial z}{dx}+\mathfrak{C}\,.\,\partial z\Big)^2+\mathfrak{D}\,.\,\Big(\frac{d_x\partial z}{dx}+\mathfrak{E}\,.\,\partial z\Big)^2\Big]\,.\,dy\,.\,dx$$

und Gleichung VI reducirt sich auf

$$\text{XX)}\quad \Big(\mathrm{F}-\frac{d_y\omega}{dy}\Big)\,.\,(\mathrm{A\,C}-\mathrm{B}^2)=\mathrm{A}\,.\,\mathrm{E}^2-2\,\mathrm{B\,E}\,(\mathrm{D}-\omega)+\mathrm{C}\,.\,(\mathrm{D}-\omega)^2$$

Weil nun diese Gleichung nur den einzigen Partialdifferentialquotient $\frac{d_y\omega}{dy}$ enthält, so bekommt man durch deren Integration für ω einen aus x, y, $\pi(x)$ gebildeten Ausdruck, wobei $\pi(x)$ eine ganz willkürliche Function von x vorstellt. Aber eben diese in ω enthaltene willkürliche Function $\pi(x)$ kann man nach der bald so bald so genommenen Function ∂z auch jedesmal bald so bald so einrichten, dass die nach x identische Gleichung

$$-\frac{1}{W_2}\cdot\Big(V_2\,.\,\partial z_{x,y''}+(\mathrm{I}x)_{x,y''}\,.\,\frac{d(\partial z_{x,y''})}{dx}\Big)^2+\omega_{x,y''}\,.\,\partial z^2_{x,y''}$$

$$+\frac{1}{W_1}\cdot\Big(V_1\,.\,\partial z_{x,y'}+(\mathrm{I}x)_{x,y'}\,.\,\frac{d(\partial z_{x,y'})}{dx}\Big)^2-\omega_{x,y'}\,.\,\partial z^2_{x,y'}=0$$

stattfindet, wobei sich Gleichung XIX auf

$$\text{XXI)}\quad \partial^2 U=\int_{\mathfrak{a}}^{a}\Big[\Big(\frac{d_y W}{dy}\Big)_{x,y''}\,.\,\Big(\partial y''+\frac{V_2}{W_2}\,.\,\partial z_{x,y''}+\frac{(\mathrm{I}x)_{x,y''}}{W_2}\,.\,\frac{d(\partial z_{x,y''})}{dx}\Big)^2$$

$$+\Big(-\frac{d_y W}{dy}\Big)_{x,y'}\,.\,\Big(\partial y'+\frac{V_1}{W_1}\,.\,\partial z_{x,y'}+\frac{(\mathrm{I}x)_{x,y'}}{W_1}\,.\,\frac{d(\partial z_{x,y'})}{dx}\Big)^2\Big]\,.\,dx$$

$$+\int_{\mathfrak{a}}^{a}\int_{y'}^{y''}\Big[\mathfrak{A}\,.\,\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}+\mathfrak{B}\frac{d_x\partial z}{dx}+\mathfrak{C}\,.\,\partial z\Big)^2+\mathfrak{D}\,.\,\Big(\frac{d_x\partial z}{dx}+\mathfrak{E}\,.\,\partial z\Big)^2\Big]\,.\,dy\,.\,dx$$

zurückzieht. Man erkennt also, dass im Falle des Maximum's oder Minimum's die vier Ausdrücke

$$\Big(\frac{d_y W}{dy}\Big)_{x,y''}\quad,\quad\Big(-\frac{d_y W}{dy}\Big)_{x,y'}\quad,\quad\mathfrak{A}\quad,\quad\mathfrak{D}$$

bezüglich negativ oder positiv sein müssen.

§. 43.

Zweiter Gränzfall[1]. Man soll unter allen in Betracht zu ziehenden Functionen diejenige $z=\varphi(x,y)$ herauswählen, welche bei $y'=b(x)$ und bei $y''=\beta(x)$ bezüglich mit

[1] Eine auf diesen Gränzfall bezügliche geometrische Aufgabe ist folgende: „Man sucht die kleinste Oberfläche zwischen zwei „festen parallelen Ebenen und zwischen zwei gegebenen Flächen".

$$\text{XXII)}\quad c = f(x, y) \quad . \quad \text{und XXIII)}\quad \gamma = \mathfrak{f}(x, y)$$

zusammenfällt.

Dieses Zusammenfallen ist dargestellt durch die Gleichungen

$$\text{XXIV)}\quad \varphi[x, b(x)] = f[x, b(x)] \quad , \quad \text{und XXV)}\quad \varphi[x, \beta(x)] = \mathfrak{f}[x, \beta(x)]$$

oder kürzer durch

$$\text{XXVI)}\quad z_{x,y'} = c_{x,y'} \quad , \quad \text{und XXVII)}\quad z_{x,y''} = \gamma_{x,y''}$$

Will man an die Stelle von y' und y'' andere als die gesuchten Functionen $b(x)$ und $\beta(x)$ in die zwei letzten Gleichungen substituiren, so muss man ebendaselbst an die Stelle des z auch andere Functionen als die gesuchte $\varphi(x, y)$ setzen. Man bekommt also

$$\delta z_{x,y'} + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,y'} \cdot \delta y' = \left(\frac{d_y c}{dy}\right)_{x,y'} \cdot \delta y'$$

$$\delta z_{x,y''} + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,y''} \cdot \delta y'' = \left(\frac{d_y \gamma}{dy}\right)_{x,y''} \cdot \delta y''$$

$$\delta^2 z_{x,y'} + 2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,y'} \cdot \delta y' + \left(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{x,y'} \cdot \delta y'^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,y'} \cdot \delta^2 y' = \left(\frac{d_y^2 c}{dy^2}\right)_{x,y'} \cdot \delta y'^2 + \left(\frac{d_y c}{dy}\right)_{x,y'} \cdot \delta^2 y'$$

$$\delta^2 z_{x,y''} + 2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,y''} \cdot \delta y'' + \left(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{x,y''} \cdot \delta y''^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,y''} \cdot \delta^2 y'' = \left(\frac{d_y^2 \gamma}{dy^2}\right)_{x,y''} \cdot \delta y''^2 + \left(\frac{d_y \gamma}{dy}\right)_{x,y''} \cdot \delta^2 y''$$

Man setze zur Bequemlichkeit

$$p \quad , \quad q \quad , \quad t \quad , \quad p' \quad , \quad q' \quad , \quad t' \quad , \quad \mathfrak{p}' \quad , \quad \mathfrak{q}' \quad , \quad \mathfrak{t}'$$

bezüglich statt

$$\frac{d_x z}{dx} \quad , \quad \frac{d_y z}{dy} \quad , \quad \frac{d_y^2 z}{dy^2} \quad , \quad \frac{d_x c}{dx} \quad , \quad \frac{d_y c}{dy} \quad , \quad \frac{d_y^2 c}{dy^2} \quad , \quad \frac{d_x \gamma}{dx} \quad , \quad \frac{d_y \gamma}{dy} \quad , \quad \frac{d_y^2 \gamma}{dy^2}$$

und sondere $\delta z_{x,y'}$, $\delta z_{x,y''}$, $\delta^2 z_{x,y'}$, $\delta^2 z_{x,y''}$ ab; so bekommt man

$$\delta z_{x,y'} = (q' - q)_{x,y'} \cdot \delta y'$$

$$\delta z_{x,y''} = (\mathfrak{q}' - q)_{x,y''} \cdot \delta y''$$

$$\delta^2 z_{x,y'} = (q' - q)_{x,y'} \cdot \delta^2 y' + (t' - t)_{x,y'} \cdot \delta y'^2 - 2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,y'} \cdot \delta y'$$

$$\delta^2 z_{x,y''} = (\mathfrak{q}' - q)_{x,y''} \cdot \delta^2 y'' + (\mathfrak{t}' - t)_{x,y''} \cdot \delta y''^2 - 2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,y''} \cdot \delta y''$$

Eliminirt man $\delta z_{x,y'}$ und $\delta z_{x,y''}$ aus IV, so geht diese Gleichung über in

$$\int_{b(a)}^{\beta(a)} (\mathrm{I}x)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} \cdot dy - \int_{b(\mathfrak{a})}^{\beta(\mathfrak{a})} (\mathrm{I}x)_{\mathfrak{a},y} \cdot \delta z_{\mathfrak{a},y} \cdot dy$$

$$+ \int_{\mathfrak{a}}^{a} \Big[\Big\{ W_{x,y''} + (\mathfrak{q}' - q)_{x,y''} \cdot \Big((\mathrm{I}y)_{x,y''} - (\mathrm{I}x)_{x,y''} \cdot \frac{dy''}{dx}\Big) \Big\} \cdot \delta y''$$

$$- \Big\{ W_{x,y'} + (q' - q)_{x,y'} \cdot \Big((\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dx}\Big) \Big\} \cdot \delta y' \Big] \cdot dx = 0$$

Weil aber die vier Stücke $\partial z_{\mathrm{a},y}$, $\partial z_{a,y}$, $\partial y'$, $\partial y''$ ganz unabhängig von einander sind, so zerlegt sich letztere Gleichung in folgende vier einzelne

$$\text{XXVIII)}\ (\mathrm{I}x)_{a,y} = 0 \quad , \quad \text{XXIX)}\ W_{x,y''} + (\mathfrak{q}' - q)_{x,y''} \cdot \left((\mathrm{I}y)_{x,y''} - (\mathrm{I}x)_{x,y''} \cdot \frac{dy''}{dx}\right) = 0$$

$$\text{XXX)}\ (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} = 0 \quad , \quad \text{XXXI)}\ W_{x,y'} + (q' - q)_{x,y'} \cdot \left((\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dx}\right) = 0$$

Schaut man auf XXIX und XXXI zurück, so sieht man, dass daselbst die Differentialquotienten der noch unbekannten Functionen y'' und y' vorkommen. Durch Elimination dieser Quotienten wird jedenfalls einige Bequemlichkeit gewonnen für den noch rückständigen Theil der Untersuchung. Differentiirt man nun XXVI und XXVII nach allem x, so bekommt man bezüglich

$$p_{x,y'} + q_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dx} = p'_{x,y'} + q'_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dx}$$

$$p_{x,y''} + q_{x,y''} \cdot \frac{dy''}{dx} = \mathfrak{p}'_{x,y''} + \mathfrak{q}'_{x,y''} \cdot \frac{dy''}{dx}$$

und wenn man mittelst letzterer Gleichungen die Quotienten $\frac{dy'}{dx}$ und $\frac{dy''}{dx}$ aus XXIX und XXXI eliminirt, so bekommt man

$$\text{XXXII)}\ W_{x,y''} + (\mathfrak{p}' - p)_{x,y''} \cdot (\mathrm{I}x)_{x,y''} + (\mathfrak{q}' - q)_{x,y''} \cdot (\mathrm{I}y)_{x,y''} = 0$$

$$\text{XXXIII)}\ W_{x,y'} + (p' - p)_{x,y'} \cdot (\mathrm{I}x)_{x,y'} + (q' - q)_{x,y'} \cdot (\mathrm{I}y)_{x,y'} = 0$$

Die Symmetrie dieser beiden Gleichungen ist beachtenswerth, und sie lassen, wenn die Aufgabe eine geometrische ist, sich gewöhnlich auf einfache Weise geometrisch deuten[1].

Man substituire jetzt die für z gefundene allgemeine Function in die Gleichungen XXVIII, XXX, XXXII und XXXIII, und integrire sie als totale Differentialgleichungen. Erst die sich ergebenden vier Integralgleichungen können bei Specialisirung der zwei (in z eingegangenen) willkürlichen Functionen benützt werden[2].

Hierauf substituire man die so specialisirte Function z in die beiden Gleichungen XXIV und XXV, und bestimme die unbekannten Functionen $y' = b(x)$ und $y'' = \beta(x)$.

Zur Herstellung des Prüfungsmittels eliminire man vorerst $\partial^2 z_{x,y'}$ und $\partial^2 z_{x,y''}$ aus V, und beachte die vier Gleichungen XXVIII—XXXI; so bleibt nur

$$\text{XXXIV)}\ \partial^2 U = \int_{b(a)}^{\beta(a)} \eta_{a,y} \cdot \partial z^2_{a,y} \cdot dy - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} \eta_{\mathrm{a},y} \cdot \partial z^2_{\mathrm{a},y} \cdot dy$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a} \left[\left(\frac{d_y W}{dy} + (\mathfrak{t}' - t) \cdot \left\{(\mathrm{I}y) - (\mathrm{I}x)\frac{dy''}{dx}\right\}\right)_{x,y''} \cdot \partial y''^2 + 2\left(\frac{d_z W}{dz}\partial z + (\mathrm{I}x)\left\{\frac{d_x \partial z}{dx} + \frac{d_y \partial z}{dy} \cdot \frac{dy''}{dx}\right\}\right)_{x,y''} \cdot \partial y''\right.$$

---

[1] Sucht man z. B. die absolut kleinste Oberfläche zwischen zwei parallelen Ebenen und zwischen zwei Flächen, so ist die geometrische Bedeutung der zwei Gleichungen XXXII und XXXIII die, dass die gesuchte Fläche auf den gegebenen Gränzflächen senkrecht steht.

[2] Man erinnere sich, dass in jenen einfachen Fällen, wo alle vier Integrationsgränzen constant sind, auch jedesmal vier (mit Gränzelementen versehene) Gleichungen existiren, die bei Specialisirung der zwei (in z eingegangenen) willkürlichen Functionen erfüllt werden müssen.

$$-\left(\frac{d_y W}{dy} + (t' - t) \cdot \left\{ (\mathrm{I}y) - (\mathrm{I}x)\frac{dy'}{dx} \right\}\right)_{x,y'} \cdot \partial y'^2 - 2\left(\frac{d_z W}{dz}\partial z + (\mathrm{I}x)\left\{\frac{d_x \partial z}{dx} + \frac{d_y \partial z}{dy} \cdot \frac{dy'}{dx}\right\}\right)_{x,y'} \cdot \partial y'$$

$$+\left(\omega - \eta\frac{dy''}{dx}\right)_{x,y''} \cdot \partial z^2_{x,y''} - \left(\omega - \eta\frac{dy'}{dx}\right)_{x,y'} \cdot \partial z^2_{x,y'}\Big] \cdot dx$$

$$+\int_{a}^{a}\int_{y'}^{y''}\left[\mathfrak{A}\left(\frac{d_y \partial z}{dy} + \mathfrak{B}\frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \partial z\right)^2 + \mathfrak{D}\left(\frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{E} \cdot \partial z\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Aus den Gleichungen XXIX und XXXI folgt

$$(\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dx} = -\left(\frac{W}{q'-q}\right)_{x,y'} \quad , \quad \text{und } (\mathrm{I}y)_{x,y''} - (\mathrm{I}x)_{x,y''} \cdot \frac{dy''}{dx} = -\left(\frac{W}{q'-q}\right)_{x,y''}$$

Ferner ist

$$\left(\frac{d_x \partial z}{dx}\right)_{x,y'} + \left(\frac{d_y \partial z}{dy}\right)_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dx} = \frac{d(\partial z_{x,y'})}{dx} \quad , \quad \text{und } \left(\frac{d_x \partial z}{dx}\right)_{x,y''} + \left(\frac{d_y \partial z}{dy}\right)_{x,y''} \cdot \frac{dy''}{dx} = \frac{d(\partial z_{x,y''})}{dx}$$

Wenn man jetzt zur weiteren Bequemlichkeit

$$\mathrm{T}_1 \quad , \quad V_1 \quad , \quad \mathrm{T}_2 \quad , \quad V_2$$

bezüglich statt der Ausdrücke

$$\left(\frac{d_y W}{dy} - \frac{t'-t}{q'-q}W\right)_{x,y'} \quad , \quad \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,y'} \quad , \quad \left(\frac{d_y W}{dy} - \frac{t'-t}{q'-q}W\right)_{x,y''} \quad , \quad \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,y''}$$

setzt, und η zu Null werden lässt; so geht Gleichung XXXIV über in

$$\text{XXXV)} \quad \partial^2 U = \int_a^a \Big[\left(\frac{d_y W}{dy} - \frac{t'-t}{q'-q}W\right)_{x,y''} \cdot \left(\partial y'' + \frac{V_2}{\mathrm{T}_2}\partial z_{x,y''} + \frac{(\mathrm{I}x)_{x,y''}}{\mathrm{T}_2} \cdot \frac{d(\partial z_{x,y''})}{dx}\right)^2$$

$$-\left(\frac{d_y W}{dy} - \frac{t'-t}{q'-q}W\right)_{x,y'} \cdot \left(\partial y' + \frac{V_1}{\mathrm{T}_1}\partial z_{x,y'} + \frac{(\mathrm{I}x)_{x,y'}}{\mathrm{T}_1} \cdot \frac{d(\partial z_{x,y'})}{dx}\right)^2$$

$$-\frac{1}{\mathrm{T}_2} \cdot \left(V_2 \cdot \partial z_{x,y''} + (\mathrm{I}x)_{x,y''} \cdot \frac{d(\partial z_{x,y''})}{dx}\right)^2 + \omega_{x,y''} \cdot \partial z^2_{x,y''}$$

$$+\frac{1}{\mathrm{T}_1} \cdot \left(V_1 \cdot \partial z_{x,y'} + (\mathrm{I}x)_{x,y'} \cdot \frac{d(\partial z_{x,y'})}{dx}\right)^2 - \omega_{x,y'} \cdot \partial z^2_{x,y'}\Big] \cdot dx$$

$$+\int_{a}^{a}\int_{y'}^{y''}\left[\mathfrak{A}\left(\frac{d_y \partial z}{dy} + \mathfrak{B}\frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \partial z\right)^2 + \mathfrak{D} \cdot \left(\frac{d_x \partial z}{dx} + \mathfrak{E} \cdot \partial z\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

und weil man η zu Null hat werden lassen, so reducirt sich Gleichung VI auf

$$\left(\mathrm{F} - \frac{d_y \omega}{dy}\right) \cdot (\mathrm{A}\,\mathrm{C} - \mathrm{B}^2) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{E}^2 - 2\,\mathrm{B}\,\mathrm{E} \cdot (\mathrm{D} - \omega) + \mathrm{C} \cdot (\mathrm{D} - \omega)^2$$

Durch Integration dieser Gleichung ergibt sich für ω ein aus x, y, $\pi(x)$ gebildeter Ausdruck, wo $\pi(x)$ eine willkürliche Function von x ist.

Man hätte nun noch die Bestandtheile $\partial z_{x,y'}$ und $\partial z_{x,y''}$ sowie deren Differentialquotienten aus XXXV zu eliminiren. Allein dieses Geschäft kann man unterlassen, und verfahren wie im vorigen Gränzfalle. Man wird nemlich, was auch immer die Bedeutung der Bestandtheile

$\delta z_{x,y'}$ und $\delta z_{x,y''}$ sein mag, die in ω enthaltene willkürliche Function $\pi(x)$ so verwenden, dass das Aggregat

$$\text{XXXVI)}\quad -\frac{1}{\mathrm{T}_2}\cdot\Big(V_2\,.\,\delta z_{x,y''}+(\mathrm{I}x)_{x,y''}\,.\,\frac{d(\delta z_{x,y''})}{dx}\Big)^2+\omega_{x,y''}\,.\,\delta z^2_{x,y''}$$
$$+\frac{1}{\mathrm{T}_1}\cdot\Big(V_1\,.\,\delta z_{x,y'}+(\mathrm{I}x)_{x,y'}\,.\,\frac{d(\delta z_{x,y'})}{dx}\Big)^2-\omega_{x,y'}\,.\,\delta z^2_{x,y'}$$

zu Null wird. Hiermit erkennt man, dass es diesmal von den vier Ausdrücken

$$\Big\{+\Big(\frac{d_y W}{dy}-\frac{\mathfrak{t}'-\mathfrak{t}}{\mathfrak{q}'-\mathfrak{q}}\,W\Big)_{x,y''}\Big\}\quad,\quad\Big\{-\Big(\frac{d_y W}{dy}-\frac{t'-t}{q'-q}\,W\Big)_{x,y'}\Big\}\quad,\quad\mathfrak{A}\quad,\quad\mathfrak{D}$$

abhangt, ob ein Maximum oder Minimum stattfindet.

§. 44.

Dritter Gränzfall[1]. Man soll unter allen in Betracht zu ziehenden Functionen diejenige $z=\varphi(x,y)$ herauswählen, welche bei $y'=b(x)$ und bei $y''=\beta(x)$ bezüglich in die ganz bestimmten und nur mit dem einzigen Veränderlichen x versehenen Ausdrücke

$$\text{XXXVII)}\qquad c=f(x)\qquad,\qquad\text{und}\quad\text{XXXVIII)}\qquad\gamma=\mathfrak{f}(x)$$

übergehen.

Diese Bedingung ist ausgesprochen durch die Gleichungen

$$\text{XXXIX)}\quad\varphi[x\,,b(x)]=f(x)\quad,\qquad\text{und}\qquad\text{XL)}\quad\varphi[x\,,\beta(x)]=\mathfrak{f}(x)$$

oder kürzer durch

$$\text{XLI)}\qquad z_{x,y'}=c_x\qquad,\qquad\text{und}\qquad\text{XLII)}\qquad z_{x,y''}=\gamma_x$$

Will man an die Stelle des y' und y'' andere als die gesuchten Functionen $b(x)$ und $\beta(x)$ in die zwei letzten Gleichungen substituiren, so muss man ebendaselbst an die Stelle des z auch andere Functionen als die gesuchte $\varphi(x,y)$ setzen; und weil $f(x)$ und $\mathfrak{f}(x)$ bestimmt vorgeschriebene Functionen sind, so bekommt man diesmal

$$\delta z_{x,y'}+\Big(\frac{d_y z}{dy}\Big)_{x,y'}\,.\,\delta y'=0$$

$$\delta z_{x,y''}+\Big(\frac{d_y z}{dy}\Big)_{x,y''}\,.\,\delta y''=0$$

$$\delta^2 z_{x,y'}+2\,.\Big(\frac{d_y\delta z}{dy}\Big)_{x,y'}\,.\,\delta y'+\Big(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\Big)_{x,y'}\,.\,\delta y'^2+\Big(\frac{d_y z}{dy}\Big)_{x,y'}\,.\,\delta^2 y'=0$$

$$\delta^2 z_{x,y''}+2\,.\Big(\frac{d_y\delta z}{dy}\Big)_{x,y''}\,.\,\delta y'+\Big(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\Big)_{x,y''}\,.\,\delta y''^2+\Big(\frac{d_y z}{dy}\Big)_{x,y''}\,.\,\delta^2 y''=0$$

---

[1] Eine auf diesen Gränzfall bezügliche geometrische Aufgabe ist folgende: „Es sind zwei in den festen Endpunkten der Abscissen „a und α senkrechte Ebenen und zwei auf der Coordinatenebene $X\,Z$ senkrechte Cylindermäntel $c=f(x)$ und $\gamma=\mathfrak{f}(x)$ gegeben. Man sucht

1) zwei auf der Coordinatenebene $X\,Y$ senkrechte Cylindermäntel $y'=b(x)$ und $y''=\beta(x)$; ferner

2) eine Fläche $z=\varphi(x,y)$

„unter der Bedingung, dass zwischen den zwei zuerst genannten Ebenen und zwischen den beiden durch $\begin{Bmatrix}c=f(x)\\y'=b(x)\end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix}\gamma=\mathfrak{f}(x)\\y''=\beta(x)\end{Bmatrix}$ dargestellten Curven die Ausdehnung der gesuchten Fläche die kleinste sei."

Wenn man die schon im vorigen §. angewendeten Abkürzungszeichen p, q, t auch hier wieder beibehält; so bekommt man aus den letzten vier Gleichungen

$$\partial z_{x,y'} = -q_{x,y'} \,.\, \partial y'$$
$$\partial z_{x,y''} = -q_{x,y''} \,.\, \partial y''$$
$$\partial^2 z_{x,y'} = -q_{x,y'} \,.\, \partial^2 y' - t_{x,y'} \,.\, \partial y'^2 - 2 \,.\, \left(\frac{d_y \partial z}{dy}\right)_{x,y'} \,.\, \partial y'$$
$$\partial^2 z_{x,y''} = -q_{x,y''} \,.\, \partial^2 y'' - t_{x,y''} \,.\, \partial y''^2 - 2 \,.\, \left(\frac{d_y \partial z}{dy}\right)_{x,y''} \,.\, \partial y''$$

Man eliminire jetzt $\partial z_{x,y'}$ und $\partial z_{x,y''}$ aus der Gränzengleichung IV, setze zur weiteren Abkürzung p' und $\mathfrak{p}'$ bezüglich statt $\frac{df(x)}{dx}$ und $\frac{d\mathfrak{f}(x)}{dx}$; so gelangt man, wie im vorigen §. verfahrend, endlich zu folgenden vier einzelnen Gleichungen:

XLIII) $(\mathrm{I}x)_{a,y} = 0$, XLIV) $W_{x,y''} + (\mathfrak{p}' - p)_{x,y''} \,.\, (\mathrm{I}x)_{x,y''} - q_{x,y''} \,.\, (\mathrm{I}y)_{x,y''} = 0$

XLV) $(\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} = 0$, XLVI) $W_{x,y'} + (p' - p)_{x,y'} \,.\, (\mathrm{I}x)_{x,y'} - q_{x,y'} \,.\, (\mathrm{I}y)_{x,y'} = 0$

Die zwei Gleichungen XLIV und XLVI sind zwar nicht so symmetrisch, wie die beiden XXXII und XXXIII im vorigen Gränzfalle; allein ihre geometrische Bedeutung ist die nemliche.

Die vollständige Ausführung dieses Gränzfalles mag unterbleiben; denn man hätte dabei denselben Weg zu gehen, wie im vorigen Gränzfalle.

Untersuchung 12.

§. 45.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen x, y, z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$ versehener, Ausdruck: und man sucht für z eine solche Function $\varphi(x, y)$, ferner für y' und y'' zwei solche Functionen $b(x)$ und $\beta(x)$, und gleichzeitig für a und α solche feste Werthe, dass das Integral

$$U = \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{y'}^{y''} W \,.\, dy \,.\, dx$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Weil diesmal für die zwei Integrationsgränzen a und α bestimmte Werthe gesucht werden; so kommen auch die Formeln des §. 40 vollständig zur Anwendung. Als Hauptgleichung hat man

$$\text{II)} \quad \frac{d_z W}{dz} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy} = 0$$

welches dieselbe ist, wie in der ersten Untersuchung, wo alle Integrationsgränzen constant waren.

Nun mögen folgende zwei Gränzfälle aufgestellt und durchgeführt werden.

§. 46.

Erster Gränzfall. Wenn für die Gränzen durchaus keine Vorschriften gemacht sind, so ist es zweckmässig, der Gränzengleichung folgende Form zu geben:

$$\text{III)}\quad \left(\int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)} W_{\alpha,y}\,.\,dy\right).\,\vartheta\alpha - \left(\int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} W_{\mathrm{a},y}\,.\,dy\right).\,\vartheta\mathrm{a}$$

$$+\int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)} (\mathrm{I}x)_{\alpha,y}\,.\,\partial z_{\alpha,y}\,.\,dy - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y}\,.\,\partial z_{\mathrm{a},y}\,.\,dy$$

$$+\int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\Big[W_{x,y''}\,.\,\partial y'' + \Big((\mathrm{I}y)_{x,y''} - (\mathrm{I}x)_{x,y''}\,.\,\frac{dy''}{dx}\Big).\,\partial z_{x,y''}$$

$$- W_{x,y'}\,.\,\partial y' - \Big((\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'}\,.\,\frac{dy'}{dx}\Big).\,\partial z_{x,y'}\Big].\,dx = 0$$

Diese zerlegt sich ohneweiters in folgende acht einzelne:

$$\text{IV)}\quad (\mathrm{I}x)_{\alpha,y} = 0 \quad,\qquad \text{V)}\quad (\mathrm{I}y)_{x,y''} - (\mathrm{I}x)_{x,y''}\,.\,\frac{dy''}{dx} = 0$$

$$\text{VI)}\quad (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} = 0 \quad,\qquad \text{VII)}\quad (\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'}\,.\,\frac{dy'}{dx} = 0$$

$$\text{VIII)}\quad W_{x,y''} = 0 \quad,\qquad \text{IX)}\quad W_{x,y'} = 0$$

$$\text{X)}\quad \int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)} W_{\alpha,y}\,.\,dy = 0 \quad,\qquad \text{XI)}\quad \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} W_{\mathrm{a},y}\,.\,dy = 0$$

In die vier ersten (Nr. IV — VII) substituire man die für z gefundene allgemeine Function, und dann integrire man dieselben als totale Differentialgleichungen. Hierauf werden die sich ergebenden vier Integralgleichungen zur Specialisirung der in z eingegangenen willkürlichen Functionen benützt. Dass aber aus den Gleichungen V und VII, ehe man sie gebraucht, die Quotienten $\frac{dy''}{dx}$ und $\frac{dy'}{dx}$ eliminirt werden müssen, ist aus §. 42 bekannt.

Die zwei folgenden Gleichungen (Nr. VIII und IX) können eigentlich nur als eine einzige gelten. Wie man aber damit zu verfahren hat, dass man aus ihnen dennoch zwei verschiedene Functionen $y' = b(x)$ und $y'' = \beta(x)$ bekommt, ist gleichfalls aus §. 42 bekannt.

Die beiden letzten (Nr. X und XI) sind ebenfalls so gestaltet, dass sie im Allgemeinen nur für eine einzige gelten können; und man muss die für a und α sich ergebenden Werthe so vertheilen, dass die Bedingung $\alpha > \mathrm{a}$ erfüllt wird.

Weil die beiden Gleichungen VIII und IX nach x identisch sind, so ist auch

$$W_{\alpha,\beta(\alpha)} = 0 \quad,\quad W_{\alpha,b(\alpha)} = 0 \quad,\quad W_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a})} = 0 \quad,\quad W_{\mathrm{a},b(\mathrm{a})} = 0$$

Wenn man ferner die acht Gleichungen (Nr. IV—XI) beachtet, und zur Bequemlichkeit

$$\mathfrak{V}_1 \quad,\quad \mathfrak{W}_1 \quad,\quad \mathfrak{V}_2 \quad,\quad \mathfrak{W}_2 \quad,\quad V_1 \quad,\quad W_1 \quad,\quad V_2 \quad,\quad W_2$$

bezüglich statt

$$\Big(\frac{d_xW}{dx}\Big)_{\mathrm{a},y} ,\ \Big(\frac{d_zW}{dz}\Big)_{\mathrm{a},y} ,\ \Big(\frac{d_xW}{dx}\Big)_{\alpha,y} ,\ \Big(\frac{d_zW}{dz}\Big)_{\alpha,y} ,\ \Big(\frac{d_yW}{dy}\Big)_{x,y'} ,\ \Big(\frac{d_zW}{dz}\Big)_{x,y'} ,\ \Big(\frac{d_yW}{dy}\Big)_{x,y''} ,\ \Big(\frac{d_zW}{dz}\Big)_{x,y''}$$

setzt; so reducirt sich der in Gleichung III des §. 40 aufgestellte allgemeine Ausdruck des Prüfungsmittels auf

$$\text{XII)}\quad \partial^2 U = \int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)} \Big\{\Big(\frac{d_xW}{dx}\Big)_{\alpha,y}.\Big[\vartheta\alpha + \frac{\mathfrak{W}_2}{\mathfrak{V}_2}\,.\,\partial z_{\alpha,y} + \frac{(\mathrm{I}y)_{\alpha,y}}{\mathfrak{V}_2}.\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}\Big)_{\alpha,y}\Big]^2$$

$$-\frac{1}{\mathfrak{V}_2}.\Big[\mathfrak{W}_2\,.\,\partial z_{\alpha,y} + (\mathrm{I}y)_{\alpha,y}.\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}\Big)_{\alpha,y}\Big]^2 + \eta_{\alpha,y}.\,\partial z^2_{\alpha,y}\Big\}.\,dy$$

$$+\int_{\delta(a)}^{\beta(a)}\Big\{\Big(-\frac{d_x W}{dx}\Big)_{a,y}\cdot\Big[\vartheta a+\frac{\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{V}_1}\cdot\partial z_{a,y}+\frac{(\mathrm{I}y)_{a,y}}{\mathfrak{V}_1}\cdot\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}\Big)_{a,y}\Big]^2$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{V}_1}\cdot\Big[\mathfrak{W}_1\cdot\partial z_{a,y}+(\mathrm{I}y)_{a,y}\cdot\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}\Big)_{a,y}\Big]^2+\eta_{a,y}\cdot\partial z^2_{a,y}\Big\}\cdot dy$$

$$+\int_a^a\Big[\Big(\frac{d_y W}{dy}\Big)_{x,y''}\cdot\Big(\partial y''+\frac{W_2}{V_2}\cdot\partial z_{x,y''}+\frac{(\mathrm{I}x)_{x,y''}}{V_2}\cdot\frac{d(\partial z_{x,y''})}{dx}\Big)^2$$

$$+\Big(-\frac{d_y W}{dy}\Big)_{x,y'}\cdot\Big(\partial y'+\frac{W_1}{V_1}\cdot\partial z_{x,y'}+\frac{(\mathrm{I}x)_{x,y'}}{V_1}\cdot\frac{d(\partial z_{x,y'})}{dx}\Big)^2$$

$$-\frac{1}{V_2}\Big(W_2\cdot\partial z_{x,y''}+(\mathrm{I}x)_{x,y''}\cdot\frac{d(\partial z_{x,y''})}{dx}\Big)^2+\Big(\omega_{x,y''}-\eta_{x,y''}\cdot\frac{dy''}{dx}\Big)\cdot\partial z^2_{x,y''}$$

$$+\frac{1}{V_1}\Big(W_1\cdot\partial z_{x,y'}+(\mathrm{I}x)_{x,y'}\cdot\frac{d(\partial z_{x,y'})}{dx}\Big)^2-\Big(\omega_{x,y'}-\eta_{x,y'}\cdot\frac{dy'}{dx}\Big)\cdot\partial z^2_{x,y'}\Big]\cdot dx$$

$$+\int_a^a\int_{y'}^{y''}\Big[\mathfrak{A}\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}+\mathfrak{B}\frac{d_x\partial z}{dx}+\mathfrak{E}.\partial z\Big)^2+\mathfrak{D}\Big(\frac{d_x\partial z}{dx}+\mathfrak{E}.\partial z\Big)^2\Big]\cdot dy\cdot dx$$

Um den Zeichenstand dieses Ausdruckes beurtheilen zu können, reducire man ihn dadurch, dass man folgende drei Gleichungen

$$\text{XIII)}\quad -\frac{1}{\mathfrak{V}_2}\cdot\Big[\mathfrak{W}_2\cdot\partial z_{\alpha,y}+(\mathrm{I}y)_{\alpha,y}\cdot\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}\Big)_{\alpha,y}\Big]^2+\eta_{\alpha,y}\cdot\partial z^2_{\alpha,y}=0$$

$$\text{XIV)}\quad +\frac{1}{\mathfrak{V}_1}\cdot\Big[\mathfrak{W}_1\cdot\partial z_{a,y}+(\mathrm{I}y)_{a,y}\cdot\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}\Big)_{a,y}\Big]^2-\eta_{a,y}\cdot\partial z^2_{a,y}=0$$

und

$$\text{XV)}\quad -\frac{1}{V_2}\cdot\Big(W_2\cdot\partial z_{x,y''}+(\mathrm{I}x)_{x,y''}\cdot\frac{d(\partial z_{x,y''})}{dx}\Big)^2+\Big(\omega_{x,y''}-\eta_{x,y''}\cdot\frac{dy''}{dx}\Big)\cdot\partial z^2_{x,y''}$$

$$+\frac{1}{V_1}\cdot\Big(W_1\cdot\partial z_{x,y'}+(\mathrm{I}x)_{x,y'}\cdot\frac{d(\partial z_{x,y'})}{dx}\Big)^2-\Big(\omega_{x,y'}-\eta_{x,y'}\cdot\frac{dy'}{dx}\Big)\cdot\partial z^2_{x,y'}=0$$

gelten lässt. Es existirt aber (nach §. 9, Gleichung XVI) zur Bestimmung der beiden Stücke η und ω nur die einzige Partialdifferentialgleichung

$$\text{XVI)}\quad \Big(\mathrm{F}-\frac{d_x\eta}{dx}-\frac{d_y\omega}{dy}\Big)(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)=\mathrm{A}(\mathrm{E}-\eta)^2-2\mathrm{B}(\mathrm{E}-\eta)(\mathrm{D}-\omega)+\mathrm{C}.(\mathrm{D}-\omega)^2$$

so dass entweder η oder ω willkürlich ist.

Man nehme η als willkürlich, und setze z. B.

$$\text{XVII)}\quad \eta=(a-x)\cdot\phi(y)+(a-x)\cdot\chi(y)$$

wo durch $\phi(y)$ und $\chi(y)$ abermals willkürliche Functionen des einzigen Veränderlichen y dargestellt sind. Dabei gehen die zwei Gleichungen XIII und XIV bezüglich über in

$$\text{XVIII)}\quad -\frac{1}{\mathfrak{V}_2}\cdot\Big[\mathfrak{W}_2\cdot\partial z_{\alpha,y}+(\mathrm{I}y)_{\alpha,y}\cdot\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}\Big)_{\alpha,y}\Big]^2+(a-\alpha)\cdot\chi(y)\cdot\partial z^2_{\alpha,y}=0$$

und

$$\text{XIX)}\quad +\frac{1}{\mathfrak{V}_1}\Big[\mathfrak{W}_1\cdot\partial z_{a,y}+(\mathrm{I}y)_{a,y}\cdot\Big(\frac{d_y\partial z}{dy}\Big)_{a,y}\Big]^2-(\alpha-a)\cdot\phi(y)\cdot\partial z^2_{a,y}=0$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich $\psi(y)$ und $\chi(y)$ bestimmen, wodurch es möglich wird, η in $\partial z_{a,y}$, $\left(\frac{d_y \partial z}{dy}\right)_{a,y}$, $\partial z_{\mathrm{a},y}$, $\left(\frac{d_y \partial z}{dy}\right)_{\mathrm{a},y}$ auszudrücken. Diesen für η gefundenen Ausdruck führe man jetzt in XVI ein, und integrire. Dann wird sich, weil in XVI nur $\frac{d\,\omega}{dy}$ und nicht auch $\frac{d_x \omega}{dx}$ vorkommt, für ω ein aus x, y, $\pi(x)$ zusammengesetzter Ausdruck ergeben, wo $\pi(x)$ eine willkürliche Function des einzigen Veränderlichen x ist. Aber eben diese in ω enthaltene willkürliche Function $\pi(x)$ kann man noch so verwenden, dass auch der Gleichung XV genügt wird.

Hiermit erkennt man, dass es von den sechs Ausdrücken

$$\left(\frac{d_x W}{dx}\right)_{a,y},\quad \left(-\frac{d_x W}{dx}\right)_{\mathrm{a},y},\quad \left(\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,y''},\quad \left(-\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,y'},\quad \mathfrak{A},\quad \mathfrak{D}$$

abhangt, ob ein Maximum oder Minimum stattfindet.

§. 47.

Zweiter Gränzfall[1]. Man soll unter allen in Betracht zu ziehenden Functionen $z = \varphi(x, y)$ diejenigen herauswählen, welche nicht allein bei $x = \mathrm{a}$ und bei $x = \alpha$ bezüglich mit

$$\text{XX)}\quad c' = f'(x, y) \qquad , \quad \text{und} \quad \text{XXI)}\quad \gamma' = \mathfrak{f}'(x, y)$$

sondern auch noch bei $y' = b(x)$ und bei $y'' = \beta(x)$ bezüglich mit

$$\text{XXII)}\quad c'' = f''(x, y) \qquad , \quad \text{und} \quad \text{XXIII)}\quad \gamma'' = \mathfrak{f}''(x, y)$$

zusammenfällt.

Dieses Zusammenfallen ist dargestellt durch die vier Gleichungen

$$\text{XXIV)}\quad \varphi(\mathrm{a}, y) = f'(\mathrm{a}, y) \qquad \text{und} \qquad \text{XXV)}\quad \varphi(\alpha, y) = \mathfrak{f}'(\alpha, y)$$

$$\text{XXVI)}\quad \varphi[x, b(x)] = f''[x, b(x)] \quad , \quad \text{und} \quad \text{XXVII)}\quad \varphi[x, \beta(x)] = \mathfrak{f}''[x, \beta(x)]$$

oder kürzer durch

$$\text{XXVIII)}\quad z_{\mathrm{a},y} = c'_{\mathrm{a},y} \qquad , \quad \text{und} \quad \text{XXIX)}\quad z_{\alpha,y} = \gamma'_{\alpha,y}$$

$$\text{XXX)}\quad z_{x,y'} = c''_{x,y'} \qquad , \quad \text{und} \quad \text{XXXI)}\quad z_{x,y''} = \gamma''_{x,y''}$$

Wenn von jetzt an zur Bequemlichkeit die Abkürzungszeichen

$$p, q, r, s, t \quad , \quad p', q', r', s', t' \quad , \quad \mathfrak{p}', \mathfrak{q}', \mathfrak{r}', \mathfrak{s}', \mathfrak{t}' \quad , \quad p'', q'', r'', s'', t'' \quad ,$$
$$\mathfrak{p}'', \mathfrak{q}'', \mathfrak{r}'', \mathfrak{s}'', \mathfrak{t}''$$

und zwar in demselben Sinne wie in §. 29 gebraucht werden: so folgt (nach §. 26) aus den Gleichungen XXVIII und XXIX, dass

$$\text{XXXII)}\quad \partial z_{\mathrm{a},y} = (p' - p)_{\mathrm{a},y} \cdot \vartheta \mathrm{a}$$

$$\text{XXXIII)}\quad \partial z_{\alpha,y} = (\mathfrak{p}' - p)_{\alpha,y} \cdot \vartheta \alpha$$

---

[1] Eine auf diesen Gränzfall bezügliche geometrische Aufgabe ist folgende: „Man sucht zwischen vier gegebenen Flächen die „kleinste Oberfläche unter allen denen heraus, von welchen zwei der gegebenen Flächen nach einfach gekrümmten Cur-„ven geschnitten werden, die so gelegen sind, dass deren Ebenen mit einander parallel laufen und auf der Axe X senkrecht „stehen."

ist. Ebenso folgt (nach §. 43) aus XXX und XXXI, dass

$$\text{XXXIV)} \quad \partial z_{x,y'} = (q'' - q)_{x,y'} \cdot \partial y'$$

$$\text{XXXV)} \quad \partial z_{x,y''} = (\mathfrak{q}'' - q)_{x,y''} \cdot \partial y''$$

ist. Der Gränzengleichung aber muss man diesmal folgende Form geben:

$$\text{XXXVI)} \int_{b(a)}^{\beta(a)} (W_{a,y} \cdot \vartheta\alpha + (\mathrm{I}x)_{a,y} \cdot \partial z_{a,y}) \cdot dy - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} (W_{\mathrm{a},y} \cdot \vartheta\mathrm{a} + (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} \cdot \partial z_{\mathrm{a},y}) \cdot dy$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a} \Big[W_{x,y''} \cdot \partial y'' + \Big((\mathrm{I}y)_{x,y''} - (\mathrm{I}x)_{x,y''} \cdot \frac{dy''}{dx}\Big) \cdot \partial z_{x,y''}$$

$$- W_{x,y'} \cdot \partial y' - \Big((\mathrm{I}y)_{x,y'} - (\mathrm{I}x)_{x,y'} \cdot \frac{dy'}{dc}\Big) \cdot \partial z_{x,y'} \Big] \cdot dx = 0$$

Wenn man hieraus die vier Bestandtheile $\partial z_{\mathrm{a},y}$, $\partial z_{a,y}$, $\partial z_{x,y'}$ und $\partial z_{x,y''}$ eliminirt: so gelangt man zu folgenden vier einzelnen Gleichungen:

$$\text{XXXVII)} \quad W_{\mathrm{a},y} + (p' - p)_{\mathrm{a},y} \cdot (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y} = 0$$

$$\text{XXXVIII)} \quad W_{a,y} + (\mathfrak{p}' - p)_{a,y} \cdot (\mathrm{I}x)_{a,y} = 0$$

$$\text{XXXIX)} \quad W_{x,y'} + (p'' - p)_{x,y'} \cdot (\mathrm{I}x)_{x,y'} + (q'' - q)_{x,y'} \cdot (\mathrm{I}y)_{x,y'} = 0$$

$$\text{XL)} \quad W_{x,y''} + (\mathfrak{p}'' - p)_{x,y''} \cdot (\mathrm{I}x)_{x,y''} + (\mathfrak{q}'' - q)_{x,y''} \cdot (\mathrm{I}y)_{x,y''} = 0$$

welche, wenn die Aufgabe eine geometrische ist, sich auch jedesmal auf einfache Weise geometrisch deuten lassen[1]. Es ist jedoch zu bemerken, dass die Gleichungen XXXVII und XXXVIII öfters eine schöne symmetrische Gestalt annehmen, wenn man (nach §. 26) statt der Potenzen

$$\left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2_{\mathrm{a},y} \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2_{a,y}$$

die bezüglich gleichgeltenden Producte

$$\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{\mathrm{a},y} \cdot \left(\frac{d_y c'}{dy}\right)_{\mathrm{a},y} \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{a,y} \cdot \left(\frac{d_y \gamma'}{dy}\right)_{a,y}$$

setzt; und dann ist die geometrische Deutung desto leichter.

Man substituire nun die für z gefundene allgemeine Function in die vier letzten Gleichungen (Nr. XXXVII — XL), und integrire sie als totale Differentialgleichungen. Erst die sich ergebenden vier Integralgleichungen können benützt werden zur Specialisirung der in z eingegangenen willkürlichen Functionen.

Hierauf benütze man die beiden Gleichungen XXVI und XXVII zur Bestimmung der beiden Functionen $y' = b(x)$ und $y'' = \beta(x)$.

Zuletzt dienen die beiden Gleichungen XXIV und XXV zur Bestimmung der für a und α gesuchten Werthe. Das dabei anzuwendende Verfahren ist bereits (aus §. 26) bekannt.

Setzt man $b(\mathrm{a})$ und $\beta(\mathrm{a})$ statt y in XXIV und XXXII ein, so bekommt man bezüglich

---

[1] Für die in der letzten Anmerkung gestellte geometrische Aufgabe werden diese vier Gleichungen (Nr. XXXVII — XL) die Bedeutung haben, dass die gesuchte Fläche auf den vier gegebenen Gränzflächen zugleich senkrecht steht.

$$\text{XLI)}\quad \varphi[\mathrm{a}, b(\mathrm{a})] = f'[\mathrm{a}, b(\mathrm{a})] \quad , \quad \text{und} \quad \text{XLII)}\quad \varphi[\mathrm{a}, \beta(\mathrm{a})] = f'[\mathrm{a}, \beta(\mathrm{a})]$$

und

$$\text{XLIII)}\quad \partial z_{\mathrm{a}, b(\mathrm{a})} = (p' - p)_{\mathrm{a}, b(\mathrm{a})} \cdot \vartheta \mathrm{a}\,, \quad \text{und} \quad \text{XLIV)}\quad \partial z_{\mathrm{a}, \beta(\mathrm{a})} = (p' - p)_{\mathrm{a}, \beta(\mathrm{a})} \cdot \vartheta \mathrm{a}$$

Setzt man $b(\alpha)$ und $\beta(\alpha)$ statt y in XXV und XXXIII ein, so bekommt man bezüglich

$$\text{XLV)}\quad \varphi[\alpha, b(\alpha)] = \mathfrak{f}'[\alpha, b(\alpha)] \quad , \quad \text{und} \quad \text{XLVI)}\quad \varphi[\alpha, \beta(\alpha)] = \mathfrak{f}'[\alpha, \beta(\alpha)]$$

und

$$\text{XLVII)}\quad \partial z_{\alpha, b(\alpha)} = (\mathfrak{p}' - p)_{\alpha, b(\alpha)} \cdot \vartheta \alpha\,, \quad \text{und} \quad \text{XLVIII)}\quad \partial z_{\alpha, \beta(\alpha)} = (\mathfrak{p}' - p)_{\alpha, \beta(\alpha)} \cdot \vartheta \alpha$$

Setzt man a statt x in XXVI, XXVII, XXXIV und XXXV ein, so bekommt man bezüglich

$$\text{XLIX)}\quad \varphi[\mathrm{a}, b(\mathrm{a})] = f''[\mathrm{a}, b(\mathrm{a})] \quad , \quad \text{und} \quad \text{L)}\quad \varphi[\mathrm{a}, \beta(\mathrm{a})] = \mathfrak{f}''[\mathrm{a}, \beta(\mathrm{a})]$$

und

$$\text{LI)}\quad \partial z_{\mathrm{a}, b(\mathrm{a})} = (q'' - q)_{\mathrm{a}, b(\mathrm{a})} \cdot \partial b(\mathrm{a})\,, \quad \text{und} \quad \text{LII)}\quad \partial z_{\mathrm{a}, \beta(\mathrm{a})} = (\mathfrak{q}'' - q)_{\mathrm{a}, \beta(\mathrm{a})} \cdot \partial \beta(\mathrm{a})$$

Setzt man aber α statt x in XXVI, XXVII, XXXIV und XXXV ein, so bekommt man bezüglich

$$\text{LIII)}\quad \varphi[\alpha, b(\alpha)] = f''[\alpha, b(\alpha)] \quad , \quad \text{und} \quad \text{LIV)}\quad \varphi[(\alpha, \beta(\alpha)] = \mathfrak{f}''[\alpha, \beta(\alpha)]$$

und

$$\text{LV)}\quad \partial z_{\alpha, b(\alpha)} = (q'' - q)_{\alpha, b(\alpha)} \cdot \partial b(\alpha)\,, \quad \text{und} \quad \text{LVI)}\quad \partial z_{\alpha, \beta(\alpha)} = (\mathfrak{q}'' - q)_{\alpha, \beta(\alpha)} \cdot \partial \beta(\alpha)$$

durch Verbindung von XLI mit XLIX, von XLII mit L, von XLV mit LIII, und von XLVI mit LIV wird man zu folgenden vier neuen Gleichungen

$$\text{LVII)}\quad z_{\mathrm{a}, b(\mathrm{a})} = f'[\mathrm{a}, b(\mathrm{a})] = f''[\mathrm{a}, b(\mathrm{a})] \quad . \quad \text{LVIII)}\quad z_{\mathrm{a}, \beta(\mathrm{a})} = f'[\mathrm{a}, \beta(\mathrm{a})] = \mathfrak{f}''[\mathrm{a}, \beta(\mathrm{a})]$$

$$\text{LIX)}\quad z_{\alpha, b(\alpha)} = \mathfrak{f}'[\alpha, b(\alpha)] = f''[\alpha, b(\alpha)] \quad , \quad \text{LX)}\quad z_{\alpha, \beta(\alpha)} = \mathfrak{f}'[\alpha, \beta(\alpha)] = \mathfrak{f}''[\alpha, \beta(\alpha)]$$

gelangen; und sobald eine einzige[1] derselben einen Widerspruch in sich trägt, ist unser zweiter Fall, so wie er hier gestellt ist, unmöglich. Sollten aber die vier vorgeschriebenen Functionen

$$f'(x, y) \quad , \quad \mathfrak{f}'(x, y) \quad , \quad f''(x, y) \quad , \quad \mathfrak{f}''(x, y)$$

Stücke in sich enthalten, die noch willkürlich sind, so müssen letztere sich so specialisiren lassen, dass jene vier Gleichungen (LVII — LX) erfüllt werden.

Durch die Verbindung von XLIII mit LI, von XLIV mit LII, von XLVII mit LV, und von XLVIII mit LVI wird man noch zu folgenden vier Gleichungen

---

[1] Besonders durch die (in der ersten Anmerkung dieses Paragraph's gestellte) geometrische Aufgabe lässt sich die Nothwendigkeit, dass diese vier Gleichungen stattfinden müssen, ganz leicht veranschaulichen. Die gesuchte Oberfläche wird nämlich von vier Curven begränzt, von denen jede auch in einer Gränzfläche liegt. Es befinden sich aber je zwei dieser Gränzcurven einander gegenüber und werden von den beiden anderen geschnitten, weil man sonst keine Fläche mit ihnen begränzen könnte; und jeder dieser vier Durchschnittspunkte ist zweien der Gränzflächen gemeinschaftlich.

$$\text{LXI)}\quad \delta b(\mathrm{a}) = \left(\frac{p'-p}{q''-q}\right)_{\mathrm{a},\,b(\mathrm{a})} . \vartheta\mathrm{a} \quad . \quad \text{LXII)}\quad \delta\beta(\mathrm{a}) = \left(\frac{\mathfrak{p}'-p}{\mathfrak{q}''-q}\right)_{\mathrm{a},\,\beta(\mathrm{a})} . \vartheta\mathrm{a}$$

$$\text{LXIII)}\quad \delta b(\alpha) = \left(\frac{\mathfrak{p}'-p}{q''-q}\right)_{\alpha,\,b(\alpha)} . \vartheta\alpha \quad . \quad \text{LXIV)}\quad \delta\beta(\alpha) = \left(\frac{\mathfrak{p}'-p}{\mathfrak{q}''-q}\right)_{\alpha,\,\beta(\alpha)} . \vartheta\alpha$$

geführt, und hieraus erkennt man, dass zwischen $\delta b(\mathrm{a})$ und $\vartheta\mathrm{a}$, zwischen $\delta\beta(\mathrm{a})$ und $\vartheta\mathrm{a}$, zwischen $\delta b(\alpha)$ und $\vartheta\alpha$, zwischen $\delta\beta(\alpha)$ und $\vartheta\alpha$ Abhängigkeiten stattfinden, während $\delta b\,(x)$ und $\delta\beta(x)$, so lange x noch allgemein ist, ganz willkürlich sind.

Jetzt hat man noch das Prüfungsmittel herzustellen. Dazu mögen jedoch folgende Andeutungen genügen.

1. Man eliminire die ausserhalb der Integralzeichen stehenden Bestandtheile

$$\delta b(\mathrm{a}) \quad , \quad \delta b(\alpha) \quad , \quad \delta\beta(\mathrm{a}) \quad , \quad \delta\beta(\alpha) \quad , \quad \left(\frac{dy'}{dx}\right)_{\mathrm{a}} \quad , \quad \left(\frac{dy'}{dx}\right)_{\alpha} \quad , \quad \left(\frac{dy''}{dx}\right)_{\mathrm{a}} \quad , \quad \left(\frac{dy''}{dx}\right)_{\alpha}$$

und reducire hierauf so viel als möglich.

2. Die beiden, mit den Integralzeichen $\int\limits_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}$ und $\int\limits_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)}$ versehenen Theilsätze richte man so ein, dass die Potenzen $\vartheta\mathrm{a}^2$ und $\vartheta\alpha^2$ aus dem Integralzeichen heraustreten. Dieses geschieht auf dieselbe Weise, wie in §. 29; allein statt der dortigen Gleichung LI bekommt man hier folgende zwei:

$$\text{LXV)}\quad \frac{1}{\mathfrak{T}_1'} \cdot [\mathfrak{W}_1' \cdot (p'-p)_{\mathrm{a},y} + (\mathrm{I}y)_{\mathrm{a},y} \cdot (s'-s)_{\mathrm{a},y}]^2 \cdot \vartheta\mathrm{a}^2 - \eta_{\mathrm{a},y} \cdot (p'-p)_{\mathrm{a},y} \cdot \vartheta\mathrm{a}^2 = 0$$

und

$$\text{LXVI)}\quad \frac{1}{\mathfrak{T}_2'} \cdot [\mathfrak{W}_2' \cdot (\mathfrak{p}'-p)_{\alpha,y} + (\mathrm{I}y)_{\alpha,y} \cdot (\mathfrak{s}'-s)_{\alpha,y}]^2 \cdot \vartheta\alpha^2 - \eta_{\alpha,y} \cdot (\mathfrak{p}'-p)_{\alpha,y} \cdot \vartheta\alpha^2 = 0$$

Weil aber η eine willkürliche Function ist, so kann man, wie im vorigen §., setzen

$$\eta = (\alpha - x) \cdot \psi(y) + (\mathrm{a} - x) \cdot \chi(y)$$

Wenn man jetzt bei LXV den gemeinschaftlichen Factor $\vartheta\mathrm{a}^2$ weglässt, so bekommt man

$$\text{LXVII)}\quad \frac{1}{\mathfrak{T}_1'} \cdot [\mathfrak{W}_1' \cdot (p'-p)_{\mathrm{a},y} + (\mathrm{I}y)_{\mathrm{a},y} \cdot (s'-s)_{\mathrm{a},y}]^2 - (\alpha - \mathrm{a}) \cdot (p'-p)_{\mathrm{a},y} \cdot \psi(y) = 0$$

Wenn man ebenso bei LXVI den gemeinschaftlichen Eactor $\vartheta\alpha^2$ weglässt, so bekommt man

$$\text{LXVIII)}\quad \frac{1}{\mathfrak{T}_2'} \cdot [\mathfrak{W}_2' \cdot (\mathfrak{p}'-p)_{\alpha,y} + (\mathrm{I}y)_{\alpha,y} \cdot (\mathfrak{s}'-s)_{\alpha,y}]^2 - (\mathrm{a} - \alpha) \cdot (\mathfrak{p}'-p)_{\alpha,y} \cdot \chi(y) = 0$$

Diese beiden Gleichungen liefern aber die Mittel, η als eine ganz bestimmte Function darzustellen.

3. Zuletzt befreie man den mit dem Integralzeichen $\int\limits_{\mathrm{a}}^{\alpha}$ versehenen Theilsatz von den zwei Bestandtheilen $\delta^2 z_{x,y'}$ und $\delta^2 z_{x,y''}$, und benütze die mit $x, y, \pi(x)$ versehene Function ω so, wie von früheren Anlässen hinlänglich bekannt ist.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Anwendung des (sogenannten) Variationscalcul's auf dreifache Integrale.

Erster Abschnitt,

wo solche Integrale vorkommen, bei denen die Gränzen sowohl der ersten als auch der zweiten Integration unabhängig sind von jenen Veränderlichen, nach welchen die folgenden Integrationen durchgeführt werden sollen.

Untersuchung 13.

§. 48.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen $x, y, z, w, \frac{d_x w}{dx}, \frac{d_y w}{dy}, \frac{d_z w}{dz}$ versehener, Ausdruck; und man sucht für w eine solche reelle Function der drei Veränderlichen x, y, z, dass folgendes Integral

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \int_c^\gamma W \, . \, dz \, . \, dy \, . \, dx$$

wo c und γ keine Functionen von x und y, und wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum oder Minimum wird.

Die Werthe von $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ sind hier als constant zu betrachten, jedoch mit steter Rücksicht, dass $\alpha > a$, $\beta > b$ und $\gamma > c$ ist.

Man setze zur Abkürzung p, q, r bezüglich statt $\frac{d_x w}{dx}, \frac{d_y w}{dy}, \frac{d_z w}{dz}$; so bekommt man vorerst

$$\text{II)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \int_c^\gamma \left[\frac{d_w W}{dw} \delta w + \frac{d_p W}{dp} . \frac{d_x \delta w}{dx} + \frac{d_q W}{dq} . \frac{d_y \delta w}{dy} + \frac{d_r W}{dr} . \frac{d_z \delta w}{dz} \right] . \, dz \, . \, dy \, . \, dx$$

Man bezeichne, um noch mehr abzukürzen, die zu den drei Differentialquotienten der ersten Ordnung

$$\frac{d_x \delta w}{dx} \quad , \quad \frac{d_y \delta w}{dy} \quad , \quad \frac{d_z \delta w}{dz}$$

gehörigen Factoren bezüglich mit

$$(\mathrm{I}x) \quad , \quad (\mathrm{I}y) \quad , \quad (\mathrm{I}z)$$

so gestaltet sich letztere Gleichung auf folgende Weise:

$$\text{III)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \int_c^\gamma \left[\frac{d_w W}{dw} \delta w + (\mathrm{I}x) \frac{d_x \delta w}{dx} + (\mathrm{I}y) \frac{d_y \delta w}{dy} + (\mathrm{I}z) \frac{d_z \delta w}{dz} \right] . \, dz \, . \, dy \, . \, dx$$

Die Zweckmässigkeit dieser drei Abkürzungszeichen wird man am besten erkennen, wenn man auf frühere Anlässe (§. 8, §. 15 und §. 21) zurückschaut.

Man beachte, dass die durch $(\mathrm{I}x), (\mathrm{I}y), (\mathrm{I}z)$ repräsentirten Ausdrücke das x, das y und das z sowohl unmittelbar als auch mittelbar in w, p, q, r enthalten, und dass die durch δw

$\frac{d_x \partial w}{dx}, \frac{d_y \partial w}{dy}, \frac{d_z \partial w}{dz}, \partial^2 w, \frac{d_x \partial^2 w}{dx}, \frac{d_y \partial^2 w}{dy}, \frac{d_z \partial^2 w}{dz}$, etc., vorgestellten Ausdrücke nur als unmittelbare Functionen von x, y, z zu betrachten sind. Dieses berücksichtigend kann man der Gleichung III auch folgende Form geben:

$$\text{IV)} \quad \partial U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \int_c^\gamma \Big[\frac{d_x((\mathrm{I}x).\partial w)}{dx} + \frac{d_y((\mathrm{I}y).\partial w)}{dy} + \frac{d_z((\mathrm{I}z).\partial w)}{dz} + \Big(\frac{d_w W}{dw} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy} - \frac{d_z(\mathrm{I}z)}{dz}\Big).\partial w \Big].dz.dy.dx$$

Führt man bei den durchlaufenden Differentialen die betreffenden Integrationen aus, so gibt sich weiter

$$\begin{aligned} \text{V)} \quad \partial U = & \int_b^\beta \int_c^\gamma [(\mathrm{I}x)_{\alpha,y,z}.\partial w_{\alpha,y,z} - (\mathrm{I}x)_{a,y,z}.\partial w_{a,y,z}].dz.dy \\ & + \int_a^\alpha \int_c^\gamma [(\mathrm{I}y)_{x,\beta,z}.\partial w_{x,\beta,z} - (\mathrm{I}y)_{x,b,z}.\partial w_{x,b,z}].dz.dx \\ & + \int_a^\alpha \int_b^\beta [(\mathrm{I}z)_{x,y,\gamma}.\partial w_{x,y,\gamma} - (\mathrm{I}z)_{x,y,c}.\partial w_{x,y,c}].dy.dx \\ & + \int_a^\alpha \int_b^\beta \int_c^\gamma \Big[\Big(\frac{d_w W}{dw} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy} - \frac{d\,(\mathrm{I}z)}{dz}\Big).\partial w\Big].dz.dy.dx \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{VI)} \quad \frac{d_w W}{dw} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy} - \frac{d_z(\mathrm{I}z)}{dz} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\begin{aligned} \text{VII)} \quad & \int_b^\beta \int_c^\gamma [(\mathrm{I}x)_{\alpha,y,z}.\partial w_{\alpha,y,z} - (\mathrm{I}x)_{a,y,z}.\partial w_{a,y,z}].dz.dy \\ & + \int_a^\alpha \int_c^\gamma [(\mathrm{I}y)_{x,\beta,z}.\partial w_{x,\beta,z} - (\mathrm{I}y)_{x,b,z}.\partial w_{x,b,z}].dz.dx \\ & + \int_a^\alpha \int_b^\beta [(\mathrm{I}z)_{x,y,\gamma}.\partial w_{x,y,\gamma} - (\mathrm{I}z)_{x,y,c}.\partial w_{x,y,c}].dy.dx = 0 \end{aligned}$$

Die Hauptgleichung wird in der Regel eine Partialdifferentialgleichung der zweiten Ordnung sein; und dann nimmt ihr allgemeines Integral zwei willkürliche Functionen in sich auf.

Die Gränzengleichung hat bereits die Werthe $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ in sich aufgenommen, und dient dazu, die in der gesuchten Function $w = \varphi(x, y, z)$ befindlichen willkürlichen Stücke zu specialisiren, welche sich aber bald so bald so modificiren werden, je nach den verschiedenen Gränzbedingungen.

§. 49.

Nun ist das Prüfungsmittel herzustellen, welches, wenn man die Hauptgleichung VI beachtet, zunächst folgende Form annimmt:

$$\text{VIII)}\quad \delta^2 U = \int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma \left[(\mathrm{I}x)_{\alpha,y,z} \,.\, \delta^2 w_{\alpha,y,z} - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y,z} \,.\, \delta^2 w_{\mathrm{a},y,z} \right] . dz \,.\, dy$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^\alpha\!\!\int_c^\gamma \left[(\mathrm{I}y)_{x,\beta,z} \,.\, \delta^2 w_{x,\beta,z} - (\mathrm{I}y)_{x,b,z} \,.\, \delta^2 w_{x,b,z} \right] . dz \,.\, dx$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^\alpha\!\!\int_b^\beta \left[(\mathrm{I}z)_{x,y,\gamma} \,.\, \delta^2 w_{x,y,\gamma} - (\mathrm{I}z)_{x,y,c} \,.\, \delta^2 w_{x,y,c} \right] . dy \,.\, dx$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^\alpha\!\!\int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma \Big[\mathrm{L} \,.\, \delta w^2 + 2K \,.\, \delta w \,.\, \frac{d_x \delta w}{dx} + 2H \,.\, \delta w \,.\, \frac{d_y \delta w}{dy} + 2G \,.\, \delta w \,.\, \frac{d_z \delta w}{dz}$$

$$+ F \,.\, \left(\frac{d_x \delta w}{dx}\right)^2 + 2\mathrm{E} \,.\, \frac{d_x \delta w}{dx} \,.\, \frac{d_y \delta w}{dy} + 2\mathrm{D} \,.\, \frac{d_x \delta w}{dx} \,.\, \frac{d_z \delta w}{dz}$$

$$+ \mathrm{C} \,.\, \left(\frac{d_y \delta w}{dy}\right)^2 + 2\mathrm{B} \,.\, \frac{d_y \delta w}{dy} \,.\, \frac{d_z \delta w}{dz} + \mathrm{A} \,.\, \left(\frac{d_z \delta w}{dz}\right)^2 \Big] . dz \,.\, dy \,.\, dx$$

wo man sich aber zu denken hat, dass die durch die Gränzbedingungen bereits specialisirte Function $w = \varphi(x, y, z)$ eingeführt sei in die durch A, B, C, D, E, F, G, H, K, L repräsentirten Ausdrücke.

Man hat nun die Bedingungen aufzusuchen, unter denen $\delta^2 U$, während man sich unter δw jede beliebige Function von x, y, z vorstellen kann, beständig positiv oder negativ bleibt. Zu diesem Zwecke versuche man, ob man dem unter dem dreifachen Integralzeichen stehenden Aggregate folgende Form geben kann:

$$\text{IX)}\quad \int_{\mathrm{a}}^\alpha\!\!\int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma \Big[\frac{d_x(\eta \,.\, \delta w^2)}{dx} + \frac{d_y(\omega \,.\, \delta w^2)}{dy} + \frac{d_z(\lambda \,.\, \delta w^2)}{dz}$$

$$+ \mathfrak{A} \,.\, \left(\frac{d_z \delta w}{dz} + \mathfrak{B} \,.\, \frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{C} \,.\, \frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{D} \,.\, \delta w\right)^2$$

$$+ \mathfrak{E} \,.\, \left(\frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{F} \,.\, \frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{G} \,.\, \delta w\right)^2$$

$$+ \mathfrak{H} \,.\, \left(\frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{J} \,.\, \delta w\right)^2 + \mathfrak{K} \,.\, \delta w^2 \Big] . dz \,.\, dy \,.\, dx$$

und wenn man letztere Form mit dem in Gleichung VIII unter dem dreifachen Integralzeichen befindlichen Aggregate vergleicht, so bekommt man

$$\text{X)}\ \mathfrak{A} = \mathrm{A} \quad , \quad \text{XI)}\ \mathfrak{B} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} \quad , \quad \text{XII)}\ \mathfrak{C} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}} \quad ,$$

$$\text{XIII)}\ \mathfrak{D} = \frac{G - \lambda}{\mathrm{A}} \quad , \quad \text{XIV)}\ \mathfrak{E} = \frac{\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$$

$$\text{XV)}\ \mathfrak{F} = \frac{\mathrm{AE} - \mathrm{BD}}{\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2} \quad , \quad \text{XVI)}\ \mathfrak{G} = \frac{\mathrm{A} \,.\, (H - \omega) - \mathrm{B} \,.\, (G - \lambda)}{\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2}$$

$$\text{XVII)}\quad \mathfrak{H} = \frac{\mathrm{A\,C}\,F + 2\,\mathrm{BDE} - \mathrm{A}\,.\,\mathrm{E}^2 - \mathrm{C}\,.\,\mathrm{D}^2 - \mathrm{F}\,.\,\mathrm{B}^2}{\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2}$$

$$\text{XVIII)}\quad \mathfrak{J} = \frac{(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)\,.\,(K-\eta) + (\mathrm{BD}-\mathrm{AE})\,.\,(H-\omega) + (\mathrm{BE}-\mathrm{CD})\,.\,(G-\lambda)}{(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)\,.\,F \qquad + (\mathrm{BD}-\mathrm{AE})\,.\,\mathrm{E} \qquad + (\mathrm{BE}-\mathrm{CD})\,.\,\mathrm{D}}$$

und

$$\text{XIX)}\quad \mathrm{L} - \mathfrak{K} - \frac{d_x \eta}{dx} - \frac{d_y \omega}{dy} - \frac{d_z \lambda}{dz} - \mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{E}\,.\,\mathfrak{G}^2 - \mathfrak{H}\,.\,\mathfrak{J}^2 = 0$$

Man hat also nur zehn Bestimmungsgleichungen, während doch die dreizehn Stücke

$$\mathfrak{A}\,,\ \mathfrak{B}\,,\ \mathfrak{C}\,,\ \mathfrak{D}\,,\ \mathfrak{E}\,,\ \mathfrak{F}\,,\ \mathfrak{G}\,,\ \mathfrak{H}\,,\ \mathfrak{J}\,,\ \mathfrak{K}\quad,\ \eta\,,\ \omega\,,\ \lambda$$

zu bestimmen wären, so dass drei derselben willkürlich sind.

Weil aber diese zehn Bestimmungsgleichungen nichts einander Widersprechendes enthalten, so ist die in IX aufgestellte Form in der That möglich. Führt man jetzt bei den durchlaufenden Differentialen

$$\frac{d_x(\eta\,.\,\delta w^2)}{dx}\quad,\quad \frac{d_y(\omega\,.\,\delta w^2)}{dy}\quad,\quad \frac{d_z(\lambda\,.\,\delta w^2)}{dz}$$

die betreffenden Integrationen aus, so geht VIII über in

$$\begin{aligned}
\text{XX)}\quad \delta^2 U = \int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma & \big[(\mathrm{I}x)_{a,y,z}\,.\,\delta^2 w_{a,y,z} + \eta_{a,y,z}\,.\,\delta w^2_{a,y,z} \\
& - (\mathrm{I}x)_{\mathfrak{a},y,z}\,.\,\delta^2 w_{\mathfrak{a},y,z} - \eta_{\mathfrak{a},y,z}\,.\,\delta w^2_{\mathfrak{a},y,z} \big]\,.\,dz\,.\,dy \\
+ \int_{\mathfrak{a}}^{a}\!\!\int_c^\gamma & \big[(\mathrm{I}y)_{x,\beta,z}\,.\,\delta^2 w_{x,\beta,z} + \omega_{x,\beta,z}\,.\,\delta w^2_{x,\beta,z} \\
& - (\mathrm{I}y)_{x,b,z}\,.\,\delta^2 w_{x,b,z} - \omega_{x,b,z}\,.\,\delta w^2_{x,b,z} \big]\,.\,dz\,.\,dx \\
+ \int_{\mathfrak{a}}^{a}\!\!\int_b^\beta & \big[(\mathrm{I}z)_{x,y,\gamma}\,.\,\delta^2 w_{x,y,\gamma} + \lambda_{x,y,\gamma}\,.\,\delta w^2_{x,y,\gamma} \\
& - (\mathrm{I}z)_{x,y,c}\,.\,\delta^2 w_{x,y,c} - \lambda_{x,y,c}\,.\,\delta w^2_{x,y,c} \big]\,.\,dy\,.\,dx \\
+ \int_{\mathfrak{a}}^{a}\!\!\int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma & \Big[\mathfrak{A}\,.\,\Big(\frac{d_z \delta w}{dz} + \mathfrak{B}\,.\,\frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{C}\,.\,\frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{D}\,.\,\delta w\Big)^2 \\
& + \mathfrak{E}\,.\,\Big(\frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{F}\,.\,\frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{G}\,.\,\delta w\Big)^2 \\
& + \mathfrak{H}\,.\,\Big(\frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{J}\,.\,\delta w\Big)^2 + \mathfrak{K}\,.\,\delta w^2 \Big]\,.\,dz\,.\,dy\,.\,dx
\end{aligned}$$

Schaut man wieder auf die zehn Gleichungen Nr. X—XIX zurück; so sieht man, dass die in der neuen Form XX befindlichen sechs Stücke

$$\mathfrak{A}\ ,\ \mathfrak{B}\ ,\ \mathfrak{C}\ ,\ \mathfrak{E}\ ,\ \mathfrak{F}\ ,\ \mathfrak{H}$$

vollständig durch Stücke bestimmt sind, welche sich in der ursprünglichen Form VIII befinden; und somit darf man die oben besprochene Willkürlichkeit auf diese sechs Stücke nicht anwenden. Man benütze aber diese Willkürlichkeit vorerst dazu, dass man $\mathfrak{K}$ zu Null werden lässt. Dabei reduciren sich die beiden letzten Gleichungen auf

$$\text{XXI)}\quad \mathrm{L} - \frac{d_x\eta}{dx} - \frac{d_y\omega}{dy} - \frac{d_z\lambda}{dz} - \mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{E}\,.\,\mathfrak{G}^2 - \mathfrak{H}\,.\,\mathfrak{J}^2 = 0$$

und

$$\begin{aligned}\text{XXII)}\quad \delta^2 U = & \int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma \big[(\mathrm{I}\,x)_{\alpha,y,z} \,.\, \delta^2 w_{\alpha,y,z} + \eta_{\alpha,y,z} \,.\, \delta w^2_{\alpha,y,z} \\ & \quad - (\mathrm{I}\,x)_{a,y,z} \,.\, \delta^2 w_{a,y,z} - \eta_{a,y,z} \,.\, \delta w^2_{a,y,z} \big] \,.\, dz \,.\, dy \\ & + \int_a^\alpha\!\!\int_c^\gamma \big[(\mathrm{I}\,y)_{x,\beta,z} \,.\, \delta^2 w_{x,\beta,z} + \omega_{x,\beta,z} \,.\, \delta w^2_{x,\beta,z} \\ & \quad - (\mathrm{I}\,y)_{x,b,z} \,.\, \delta^2 w_{x,b,z} - \omega_{x,b,z} \,.\, \delta w^2_{x,b,z} \big] \,.\, dz \,.\, dx \\ & + \int_a^\alpha\!\!\int_b^\beta \big[(\mathrm{I}\,z)_{x,y,\gamma} \,.\, \delta^2 w_{x,y,\gamma} + \lambda_{x,y,\gamma} \,.\, \delta w^2_{x,y,\gamma} \\ & \quad - (\mathrm{I}\,z)_{x,y,c} \,.\, \delta^2 w_{x,y,c} - \lambda_{x,y,c} \,.\, \delta w^2_{x,y,c} \big] \,.\, dy \,.\, dx \\ & + \int_a^\alpha\!\!\int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma \Big[\mathfrak{A} \,.\, \Big(\frac{d_z \delta w}{dz} + \mathfrak{B} \,.\, \frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{C} \,.\, \frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{D} \,.\, \delta w \Big)^2 \\ & \quad + \mathfrak{E} \,.\, \Big(\frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{F} \,.\, \frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{G} \,.\, \delta w \Big)^2 + \mathfrak{H} \,.\, \Big(\frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{J} \,.\, \delta w \Big)^2 \Big] \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx\end{aligned}$$

In den beiden letzten Gleichungen befinden sich aber immer noch zwei willkürliche Stücke. Nimmt man η und ω als willkürlich, so kann man η eine solche Function von y und z sein lassen, dass die nach y und nach z identische Gleichung

$$(\mathrm{I}\,x)_{\alpha,y,z} \,.\, \delta^2 w_{\alpha,y,z} + \eta_{\alpha,y,z} \,.\, \delta w^2_{\alpha,y,z} - (\mathrm{I}\,x)_{a,y,z} \,.\, \delta^2 w_{a,y,z} - \eta_{a,y,z} \,.\, \delta w^2_{a,y,z} = 0$$

stattfindet; und ω kann man eine solche Function von x und z sein lassen, dass die nach x und nach z identische Gleichung

$$(\mathrm{I}\,y)_{x,\beta,z} \,.\, \delta^2 w_{x,\beta,z} + \omega_{x,\beta,z} \,.\, \delta w^2_{x,\beta,z} - (\mathrm{I}\,y)_{x,b,z} \,.\, \delta^2 w_{x,b,z} - \omega_{x,b,z} \,.\, \delta w^2_{x,b,z} = 0$$

stattfindet. Weil aber für η eine Function von y und z gesetzt worden ist, so ist $\frac{d_x\eta}{dx} = 0$; und weil für ω eine Function von x und z gesetzt worden ist, so ist $\frac{d_y\omega}{dy} = 0$. Gleichung XXI reducirt sich also auf

$$\text{XXIII)}\quad \mathrm{L} - \frac{d_z\lambda}{dz} - \mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{E}\,.\,\mathfrak{G}^2 - \mathfrak{H}\,.\,\mathfrak{J}^2 = 0$$

Wenn man jetzt diese Partialdifferentialgleichung, welche nur noch den einzigen Differentialquotient $\frac{d_z\lambda}{dz}$ enthält, integrirt; so bekommt man für λ einen mit x, y, z, $\pi(x, y)$ versehenen Ausdruck, wo $\pi(x, y)$ eine willkürliche Function von x und y ist. Kann man sodann $\pi(x, y)$ so verwenden, dass die nach x und y identische Gleichung

$$(\mathrm{I}\,z)_{x,y,\gamma} \,.\, \delta^2 w_{x,y,\gamma} + \lambda_{x,y,\gamma} \,.\, \delta w^2_{x,y,\gamma} - (\mathrm{I}\,z)_{x,y,c} \,.\, \delta^2 w_{x,y,c} - \lambda_{x,y,c} \,.\, \delta w^2_{x,y,c} = 0$$

stattfindet; so reducirt Gleichung XXII sich auf das dreifache Integral, d. h. man bekommt

n*

$$\text{XXIV)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \int_c^\gamma \Big[\mathfrak{A} . \Big(\frac{d_z \delta w}{dz} + \mathfrak{B} . \frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{C} . \frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{D} . \delta w \Big)^2$$

$$+ \mathfrak{E} . \Big(\frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{F} . \frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{G} . \delta w \Big)^2 + \mathfrak{H} . \Big(\frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{J} . \delta w \Big)^2 \Big] . dz . dy . dx$$

Aus dieser Form erkennt man, dass, wenn λ sich als **reell** bestimmt, der Zeichenstand des $\delta^2 U$ nur von den drei Stücken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ abhangt; d. h. wenn man dem z alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von c bis γ, sodann bei jedem einzelnen dieser Werthe des z dem y alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von b bis β, und endlich bei jedem einzelnen dieser Werthe des z und des y auch dem x alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von a bis α beilegt; und wenn dabei

1. jeder der drei Ausdrücke $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ positiv bleibt, so ist auch $\delta^2 U$ positiv: wenn aber dabei

2. jeder der drei Ausdrücke $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ negativ bleibt, so ist auch $\delta^2 U$ negativ.

Schaut man jedoch auf die Ausdrücke X, XIV und XVII zurück, so erkennt man, dass $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ganz dieselbe Bedeutung haben, welche sich ergibt, wenn man das Aggregat

$$\odot \quad \begin{aligned} & \mathrm{F} . \Big(\frac{d_x \delta w}{dx} \Big)^2 + 2\,\mathrm{E} . \frac{d_x \delta w}{dx} . \frac{d_y \delta w}{dy} + \mathrm{D} . \Big(\frac{d_y \delta w}{dy} \Big)^2 \\ & + 2\,\mathrm{C} . \frac{d_x \delta w}{dx} . \frac{d_z \delta w}{dz} + 2\,\mathrm{B} . \frac{d_y \delta w}{dy} . \frac{d_z \delta w}{dz} + \mathrm{A} . \Big(\frac{d_z \delta w}{dz} \Big)^2 \end{aligned}$$

auf die Form

$$\mathfrak{A} . \Big(\frac{d_z \delta w}{dz} + \mathfrak{B} \frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{C} \frac{d_x \delta w}{dx} \Big)^2 + \mathfrak{E} . \Big(\frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{F} . \frac{d_x \delta w}{dx} \Big)^2 + \mathfrak{H} . \Big(\frac{d_x \delta w}{dx} \Big)^2$$

bringt; und so ist man zu folgender höchst beachtenswerthen Regel gelangt:

„Wenn der für $\delta^2 U$ sich ergebende Ausdruck positiv oder negativ sein soll, so muss das „Aggregat $\odot$ positiv oder negativ bleiben, während man dem z alle stetig nebeneinander „liegenden Werthe von c bis γ, sodann bei jedem einzelnen dieser Werthe des z dem y alle „stetig nebeneinander liegenden Werthe von b bis β, und endlich bei jedem einzelnen dieser „Werthe des z und des y auch dem x alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von a bis α „beilegt“.

Dabei beachte man noch den Ausnahmsfall: Wenn von den zwei Ausdrücken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ entweder einer oder auch beide zugleich bei einigen oder bei allen den genannten Werthen des x, des y und des z zu Null werden, so bleibt die oben ausgesprochene Regel noch immer anwendbar; sie verliert jedoch alle Anwendbarkeit, sobald auch nur ein einziger der zehn Ausdrücke

$$\mathrm{L} \;,\; K \;,\; H \;,\; G \;,\; \mathrm{F} \;,\; \mathrm{E} \;.\; \mathrm{D} \;.\; \mathrm{C} \;.\; \mathrm{B} \;.\; \mathrm{A}$$

bei irgend einem der genannten Werthe des x. des y und des z Null in den Nenner bekommt.

Nun ist man auf dem Punkte, der Gränzengleichung zu genügen; und zu diesem Ende mögen folgende **vier** Fälle vorgenommen werden.

§. 50.

Erster Gränzfall[1]. Wenn für die Gränzen keine Vorschriften gemacht sind, so haben auch die Ausdrücke

$$
\begin{array}{lllllll}
☿ & \partial w_{a,y,z} \;, & \partial w_{\alpha,y,z} \;, & \partial w_{x,b,z} \;, & \partial w_{x,\beta,z} \;, & \partial w_{x,y,c} \;, & \partial w_{x,y,\gamma} \\
♀ & \partial^2 w_{a,y,z} \;, & \partial^2 w_{\alpha,y,z} \;, & \partial^2 w_{x,b,z} \;, & \partial^2 w_{x,\beta,z} \;, & \partial^2 w_{x,y,c} \;, & \partial^2 w_{x,y,\gamma} \\
 & \text{etc. etc.} & & & & &
\end{array}
$$

durchaus keiner Bedingung zu genügen. Hier sind die bei ☿ aufgestellten sechs Ausdrücke dem Werthe nach ganz unabhängig von einander, obgleich alle aus einer und derselben Form $\partial w_{x,y,z}$ herstammen. Ebenso sind die bei ♀ aufgestellten sechs Ausdrücke dem Werthe nach ganz unabhängig von einander, obgleich sie alle aus einer und derselben Form $\partial^2 w_{x,y,z}$ herstammen. Und so fort.

Der Gränzengleichung VII wird also nur genügt, wenn folgende sechs einzelne Gleichungen stattfinden:

$$
\begin{array}{lll}
1)\;\; (\mathrm{I}x)_{a,y,z} = 0 \;, & 2)\;\; (\mathrm{I}y)_{x,b,z} = 0 \;, & 3)\;\; (\mathrm{I}z)_{x,y,c} = 0 \\
4)\;\; (\mathrm{I}x)_{\alpha,y,z} = 0 \;, & 5)\;\; (\mathrm{I}y)_{x,\beta,z} = 0 \;, & 6)\;\; (\mathrm{I}z)_{x,y,\gamma} = 0
\end{array}
$$

In den Gleichungen 1) und 4) ist x constant; dieselben werden aber in der Regel Partialdifferentialgleichungen nach y und z sein. Dieser Umstand muss beachtet werden, wenn man dieselben integrirt.

In den Gleichungen 2) und 5) ist y constant; dieselben werden aber in der Regel Partialdifferentialgleichungen nach x und z sein.

In den Gleichungen 3) und 6) ist z constant; sie werden aber in der Regel Partialdifferentialgleichungen nach x und y sein.

Erst wenn man das für w gefundene allgemeine Integral in letztere sechs Gleichungen substituirt, und hierauf integrirt hat, können die sich ergebenden Integralgleichungen bei Specialisirung der in w eingegangenen willkürlichen Functionen benützt werden.

Der in XXII aufgestellte allgemeine Ausdruck des Prüfungsmittels reducirt sich jetzt auf

$$
\begin{aligned}
\text{XXV)}\quad \partial^2 U = & \int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma \left[\eta_{\alpha,y,z} \cdot \partial w^2_{\alpha,y,z} - \eta_{a,y,z} \cdot \partial w^2_{a,y,z}\right] . dz . dy \\
& + \int_a^\alpha\!\!\int_c^\gamma \left[\omega_{x,\beta,z} \cdot \partial w^2_{x,\beta,z} - \omega_{x,b,z} \cdot \partial w^2_{x,b,z}\right] . dz . dx \\
& + \int_a^\alpha\!\!\int_b^\beta \left[\lambda_{x,y,\gamma} \cdot \partial w^2_{x,y,\gamma} - \lambda_{x,y,c} \cdot \partial w^2_{x,y,c}\right] . dy . dx \\
& + \int_a^\alpha\!\!\int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma \Big[\mathfrak{A} . \Big(\frac{d_z \partial w}{dz} + \mathfrak{B}\frac{d_y \partial w}{dy} + \mathfrak{C}\frac{d_x \partial w}{dx} + \mathfrak{D} . \partial w\Big)^2 \\
& + \mathfrak{E} . \Big(\frac{d_y \partial w}{dy} + \mathfrak{F}\frac{d_x \partial w}{dx} + \mathfrak{G} . \partial w\Big)^2 + \mathfrak{H} . \Big(\frac{d_x \partial w}{dx} + \mathfrak{J} . \partial w\Big)^2\Big] . dz . dy . dx
\end{aligned}
$$

[1] Dieser erste Gränzfall ist dem ersten in der ersten Untersuchung (§. 10) analog.

Hier kann man die beiden Ausdrücke η und ω kurzweg zu Null werden lassen; dann ist auch

$$\eta_{a,y,z} \cdot \partial w^2_{a,y,z} - \eta_{\mathrm{a},y,z} \cdot \partial w^2_{\mathrm{a},y,z} = 0 \quad , \quad \text{und} \quad \frac{d_x \eta}{dx} = 0$$

sowie

$$\omega_{x,\beta,z} \cdot \partial w^2_{x,\beta,z} - \omega_{x,b,z} \cdot \partial w^2_{x,b,z} = 0 \quad , \quad \text{und} \quad \frac{d_y \omega}{dy} = 0$$

und Gleichung XXI reducirt sich auf

$$\mathrm{L} - \frac{d_z \lambda}{dz} - \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D}^2 - \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{G}^2 - \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{J}^2 = 0$$

Wenn man jetzt diese Partialdifferentialgleichung integrirt, so gibt sich für λ ein mit x, y, z, $\pi(x, y)$ versehener Ausdruck, wo $\pi(x, y)$ eine ganz willkürliche Function von x und y ist. Aber eben diese in λ enthaltene willkürliche Function $\pi(x, y)$ kann man noch so benützen, dass auch die nach x und y identische Gleichung

$$\lambda_{x,y,\gamma} \cdot \partial w^2_{x,y,\gamma} - \lambda_{x,y,c} \cdot \partial w^2_{x,y,c} = 0$$

stattfindet. Dabei reducirt sich Gleichung XXV auf das dreifache Integral; und es hangt, wie schon im vorigen §. näher auseinander gesetzt wurde, von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ab, ob ein Maximum oder Minimum stattfinde.

§. 51.

Zweiter Gränzfall[1]. Die gesuchte Function soll nur aus jenen herausgewählt werden, welche alle bei $x = \mathrm{a}$, $x = \alpha$, $y = b$, $y = \beta$, $z = c$, $z = \gamma$ sich bezüglich in folgende sechs Ausdrücke

$$\mathfrak{F}_1(y, z) \quad , \quad \mathfrak{F}_2(y, z) \quad , \quad \mathfrak{F}_3(x, z) \quad , \quad \mathfrak{F}_4(x, z) \quad , \quad \mathfrak{F}_5(x, y) \quad , \quad \mathfrak{F}_6(x, y)$$

specialisiren. Bei dieser Vorschrift müssen folgende drei Systeme von Gleichungen

$$\begin{array}{lllll}
♁ & \partial w_{\mathrm{a},y,z} = 0 \;, & \partial w_{\alpha,y,z} = 0 \;, & \partial^2 w_{\mathrm{a},y,z} = 0 \;, & \partial^2 w_{\alpha,y,z} = 0 \;, \text{ etc.} \\
♂ & \partial w_{x,b,z} = 0 \;, & \partial w_{x,\beta,z} = 0 \;, & \partial^2 w_{x,b,z} = 0 \;, & \partial^2 w_{x,\beta,z} = 0 \;, \text{ etc.} \\
♀ & \partial w_{x,y,c} = 0 \;, & \partial w_{x,y,\gamma} = 0 \;, & \partial^2 w_{x,y,c} = 0 \;, & \partial^2 w_{x,y,\gamma} = 0 \;, \text{ etc.}
\end{array}$$

stattfinden. Jetzt fällt die Gränzengleichung VII von selbst hinweg: und wenn die obigen sechs Ausdrücke bestimmt vorgeschrieben sind, so müssen auch die sechs Gleichungen

$$\begin{array}{lll}
7)\;\; \varphi(\mathrm{a}, y, z) = \mathfrak{F}_1(y, z) \;, & 8)\;\; \varphi(\alpha, y, z) = \mathfrak{F}_2(y, z) \;, & 9)\;\; \varphi(x, b, z) = \mathfrak{F}_3(x, z) \\
10)\;\; \varphi(x, \beta, z) = \mathfrak{F}_4(x, z) \;, & 11)\;\; \varphi(x, y, c) = \mathfrak{F}_5(x, y) \;, & 12)\;\; \varphi(x, y, \gamma) = \mathfrak{F}_6(x, y)
\end{array}$$

bei Specialisirung der durch Integration der Hauptgleichung eingegangenen willkürlichen Stücke mitbenützt werden.

Der, in XXII aufgestellte, allgemeine Ausdruck des Prüfungsmittels reducirt sich jetzt ohneweiters auf das dreifache Integral, so dass es diesmal gar nicht nöthig ist, sich um die drei Stücke η, ω, λ zu bekümmern.

[1] Dieser zweite Gränzfall ist dem zweiten in der ersten Untersuchung (§. 11) analog.

§. 52.

Dritter Gränzfall[1]. Wenn für die Gränzen die drei Gleichungen

13) $f'(w_{\mathfrak{a},y,z}, w_{a,y,z})=0$, 14) $f''(w_{x,b,z}, w_{x,\beta,z})=0$, 15) $f'''(w_{x,y,c}, w_{x,y,\gamma})=0$

vorgeschrieben sind; so besteht

zwischen $\partial w_{\mathfrak{a},y,z}$ und $\partial w_{a,y,z}$
zwischen $\partial w_{x,b,z}$ und $\partial w_{x,\beta,z}$
zwischen $\partial w_{x,y,c}$ und $\partial w_{x,y,\gamma}$

eine Abhängigkeit. Man behandle $\partial w_{\mathfrak{a},y,z}$, $\partial w_{x,b,z}$. $\partial w_{x,y,c}$ als abhängig, und eliminire diese Bestandtheile; so nimmt, wenn man nach dem Vorgange des §. 12 verfährt, die Gränzengleichung VII folgende Form an:

$$\text{XXV)} \quad \int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma \left[(\mathrm{I}x)_{a,y,z} - (\mathrm{I}x)_{\mathfrak{a},y,z} . \mathfrak{P}'\right] . \partial w_{a,y,z} . dz . dy$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^a\!\!\int_c^\gamma \left[(\mathrm{I}y)_{x,\beta,z} - (\mathrm{I}y)_{x,b,z} . \mathfrak{P}''\right] . \partial w_{x,\beta,z} . dz . dx$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^a\!\!\int_b^\beta \left[(\mathrm{I}z)_{x,y,\gamma} - (\mathrm{I}z)_{x,y,c} . \mathfrak{P}'''\right] . \partial w_{x,y,\gamma} . dy . dx = 0$$

Diese Gleichung zerfällt nun in folgende drei einzelne:

$$16)\quad (\mathrm{I}x)_{a,y,z} - (\mathrm{I}x)_{\mathfrak{a},y,z} . \mathfrak{P}' = 0$$
$$17)\quad (\mathrm{I}y)_{x,\beta,z} - (\mathrm{I}y)_{x,b,z} . \mathfrak{P}'' = 0$$
$$18)\quad (\mathrm{I}z)_{x,y,\gamma} - (\mathrm{I}z)_{x,y,c} . \mathfrak{P}''' = 0$$

Man hat also hier abermals sechs Gleichungen (Nr. 13—18), welche bei Specialisirung der in w eingegangenen willkürlichen Stücke mitbenützt werden müssen.

Eliminirt man jetzt auch $\partial^2 w_{\mathfrak{a},y,z}$ $\partial^2 w_{x,b,z}$ und $\partial^2 w_{x,y,c}$, so nimmt, wenn man abermals nach dem Vorgange des §. 12 verfährt, Gleichung XXII folgende Form an:

$$\text{XXVI)} \quad \partial^2 U = \int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma \left[\eta_{a,y,z} - \eta_{\mathfrak{a},y,z} . \mathfrak{P}'^2 - (\mathrm{I}x)_{\mathfrak{a},y,z} . \mathfrak{Q}'\right] . \partial w^2_{a,y,z} . dz . dy$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^a\!\!\int_c^\gamma \left[\omega_{x,\beta,z} - \omega_{x,b,z} . \mathfrak{P}''^2 - (\mathrm{I}y)_{x,b,z} . \mathfrak{Q}''\right] . \partial w^2_{x,\beta,z} . dz . dx$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^a\!\!\int_b^\beta \left[\lambda_{x,y,\gamma} - \lambda_{x,y,c} . \mathfrak{P}'''^2 - (\mathrm{I}z)_{x,y,c} . \mathfrak{Q}'''\right] . \partial w^2_{x,y,\gamma} . dy . dx$$
$$+ \int_{\mathfrak{a}}^a\!\!\int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma \Big[\mathfrak{A} . \Big(\frac{d_z \partial w}{dz} + \mathfrak{B}\frac{d_y \partial w}{dy} + \mathfrak{C}\frac{d_x \partial w}{dx} + \mathfrak{D} . \partial w\Big)^2$$
$$+ \mathfrak{E} . \Big(\frac{d_y \partial w}{dy} + \mathfrak{F}\frac{d_x \partial w}{dx} + \mathfrak{G} . \partial w\Big)^2 + \mathfrak{H} . \Big(\frac{d_y \partial w}{dx} + \mathfrak{J} . \partial w\Big)^2\Big] . dz . dy . dx$$

[1] Dieser dritte Gränzfall ist dem dritten in der ersten Untersuchung (§. 12) analog.

Nun erinnere man sich, dass von den drei Stücken η , ω , λ zwei willkürlich sind, weil man zur Bestimmung derselben nur die einzige Gleichung XXI hat. Um daher den Ausdruck XXVI so einzurichten, dass nur das dreifache Integral zurück bleibt; lasse man vorerst folgende zwei Gleichungen

$$19)\quad \lambda_{x,y,\gamma} - \lambda_{x,y,c}\cdot\mathfrak{P}'''^2 - (\mathrm{I}z)_{x,y,c}\cdot\mathfrak{Q}''' = 0$$

$$20)\quad \omega_{x,\beta,z} - \omega_{x,b,z}\cdot\mathfrak{P}''^2 - (\mathrm{I}y)_{x,b,z}\cdot\mathfrak{Q}'' = 0$$

stattfinden.

Aus Gleichung 19) bestimmt sich λ als Function von x und y; und deshalb ist $\frac{d_z\lambda}{dz} = 0$.

Aus Gleichung 20) bestimmt sich ω als Function von x und z; und deshalb ist $\frac{d_y\omega}{dy} = 0$.

Wenn man jetzt für λ und ω die aus 19) und 20) sich ergebenden Ausdrücke in XXI einsetzt, so bekommt man

$$21)\quad \mathrm{L} - \frac{d_x\eta}{dx} - \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{E}\cdot\mathfrak{G}^2 - \mathfrak{H}\cdot\mathfrak{J}^2 = 0.$$

Diese Gleichung, wo die für λ und ω gefundenen Ausdrücke als bereits eingeführt gedacht werden, enthält nur den einzigen Partialdifferentialquotient $\frac{d_x\eta}{dx}$. Man bekommt also, wenn man integrirt, für η einen mit $x, y, z, \pi(y, z)$ versehenen Ausdruck, wo $\pi(y, z)$ eine ganz willkürliche Function von y und z ist. Aber eben diese in η enthaltene willkürliche Function $\pi(y, z)$ kann man noch so bestimmen, dass die Gleichung

$$22)\quad \eta_{\alpha,y,z} - \eta_{\mathrm{a},y,z}\cdot\mathfrak{P}'^2 - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y,z}\cdot\mathfrak{Q}' = 0$$

erfüllt wird.

Wegen der drei Gleichungen 19), 20), 22) zieht sich XXVI auf das dreifache Integral zurück; und die Kennzeichen, ob $\delta^2 U$ positiv oder negativ sei, sind abermals abhängig von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$.

§. 53.

Vierter Gränzfall. Wenn für die Gränzen sechs Gleichungen, z. B.

$$F_1(w_{\mathrm{a},y,z},\, w_{\alpha,y,z}) = 0\ ,\quad F_2(w_{x,b,z},\, w_{x,\beta,z}) = 0\ ,\quad F_3(w_{x,y,c},\, w_{x,y,\gamma}) = 0$$

$$F_4(w_{\mathrm{a},y,z},\, w_{\alpha,y,z}) = 0\ ,\quad F_5(w_{x,b,z},\, w_{x,\beta,z}) = 0\ ,\quad F_6(w_{x,y,c},\, w_{x,y,\gamma}) = 0$$

vorgeschrieben sind; so hat man eigentlich wieder den zweiten Fall, d. h. es finden wieder die (in §. 51 aufgestellten) Gleichungen ♁ , ♂ , 🜍 statt. Dabei fällt die Gränzengleichung von selbst hinweg, und das Prüfungsmittel zieht sich ohneweiters auf das dreifache Integral zurück, so dass man auch diesmal sich um die drei Stücke η, ω, λ nicht weiter zu bekümmern hat. Und so fort.

§. 54.

Erster Zusatz. Nicht immer müssen in dem Ausdrucke V die drei Differentialquotienten $\frac{d_x w}{dx}, \frac{d_y w}{dy}, \frac{d_z w}{dz}$ zugleich enthalten sein, sondern es kann auch einer oder zwei derselben fehlen. Das Verfahren, besonders das bei Herstellung des Prüfungsmittels, ändert sich alsdann ein wenig, wie in folgenden zwei Beispielen gezeigt werden mag.

Erstes Beispiel. Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen $x, y, z, w, \frac{d_x w}{dx}, \frac{d_y w}{dy}$ versehener Ausdruck, und man sucht für w eine solche Function von x, y, z, dass das Integral

$$\text{XXVII)}\quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \int_c^\gamma W \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Hier bekommt man die Hauptgleichung

$$\text{XXVIII)}\quad \frac{d_w W}{dw} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XXIX)}\quad \int_b^\beta \int_c^\gamma \left[(\mathrm{I}x)_{\alpha,y,z} \,.\, \partial w_{\alpha,y,z} - (\mathrm{I}x)_{a,y,z} \,.\, \partial w_{a,y,z}\right] .\, dz \,.\, dy$$

$$+ \int_a^\alpha \int_c^\gamma \left[(\mathrm{I}y)_{x,\beta,z} \,.\, \partial w_{x,\beta,z} - (\mathrm{I}y)_{x,b,z} \,.\, \partial w_{x,b,z}\right] .\, dz \,.\, dx = 0$$

Bei Herstellung des Prüfungsmittels hat man diesmal dem dreifachen Integral

$$\text{XXX)}\quad \int_a^\alpha \int_b^\beta \int_c^\gamma \Big[\mathrm{L} \,.\, \partial w^2 + 2K \,.\, \partial w \,.\, \frac{d_x \partial w}{dx} + 2H \,.\, \partial w \,.\, \frac{d_y \partial w}{dy} + F \,.\, \left(\frac{d_x \partial w}{dx}\right)^2$$

$$+ 2E \,.\, \frac{d_x \partial w}{dx} \,.\, \frac{d_y \partial w}{dy} + C \,.\, \left(\frac{d_y \partial w}{dy}\right)^2 \Big] .\, dz \,.\, dy \,.\, dx$$

die Form

$$\text{XXXI)}\quad \int_a^\alpha \int_b^\beta \int_c^\gamma \Big[\frac{d_x(\eta \,.\, \partial w^2)}{dx} + \frac{d_y(\omega \,.\, \partial w^2)}{dy} + \mathfrak{E} \,.\, \left(\frac{d_y \partial w}{dy} + \mathfrak{F}\frac{d_x \partial w}{dx} + \mathfrak{G} \,.\, \partial w\right)^2$$

$$+ \mathfrak{H} \,.\, \left(\frac{d_x \partial w}{dx} + \mathfrak{J} \,.\, \partial w\right)^2 + \mathfrak{K} \,.\, \partial w^2\Big] .\, dz \,.\, dy \,.\, dx$$

zu geben. Hierbei gelangt man zu folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{E} = C \quad , \quad \mathfrak{F} = \frac{\mathrm{E}}{C} \quad , \quad \mathfrak{G} = \frac{H - \omega}{C}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathrm{C.F - E^2}}{\mathrm{C}} \quad , \quad \mathfrak{J} = \frac{\mathrm{C}.(K - \eta) - \mathrm{E}.(H - \omega)}{\mathrm{C.F - E^2}}$$

und

$$\text{XXXII)}\quad \mathrm{L} - \mathfrak{K} - \frac{d_x \eta}{dx} - \frac{d_y \omega}{dy} - \mathfrak{E} \,.\, \mathfrak{G}^2 - \mathfrak{H} \,.\, \mathfrak{J}^2 = 0$$

Man hat also diesmal nur sechs Bestimmungsgleichungen, während doch die acht Stücke

$$\mathfrak{E}\,,\ \mathfrak{F}\,,\ \mathfrak{G}\,,\ \mathfrak{H}\,,\ \mathfrak{J}\,,\ \mathfrak{K} \quad , \quad \eta\,,\ \omega$$

zu bestimmen wären, so dass zwei derselben willkürlich sind. Weil aber unsere sechs Bestimmungsgleichungen nichts einander Widersprechendes enthalten, so ist es in der That möglich, dem Integral XXX die Form XXXI zu geben.

Es sind aber die in der neuen Form XXXI befindlichen drei Stücke

$$\mathfrak{E}\ ,\ \mathfrak{F}\ ,\ \mathfrak{H}$$

vollständig durch Stücke bestimmt, welche sich in der ursprünglichen Form XXX befinden; und somit darf man die oben besprochene Willkürlichkeit auf diese drei Ausdrücke nicht anwenden. Man benütze aber diese Willkürlichkeit vorerst dazu, dass man $\mathfrak{K}$ zu Null werden lässt. Dabei reducirt Gleichung XXXII sich auf

$$\text{XXXIII)}\quad \mathrm{L} - \frac{d_x \eta}{dx} - \frac{d_y \omega}{dy} - \mathfrak{E}\,.\,\mathfrak{G}^2 - \mathfrak{H}\,.\,\mathfrak{J}^2 = 0$$

und für das Prüfungsmittel selbst bekommt man im Allgemeinen

$$\begin{aligned}\text{XXXIV)}\quad \delta^2 U = & \int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma [(\mathrm{I}x)_{a,y,z}\,.\,\delta^2 w_{a,y,z} + \eta_{a,y,z}\,.\,\delta w^2_{a,y,z} \\ & \quad - (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y,z}\,.\,\delta^2 w_{\mathrm{a},y,z} - \eta_{\mathrm{a},y,z}\,.\,\delta w^2_{\mathrm{a},y,z}]\,.\,dz\,.\,dy \\ & + \int_{\mathrm{a}}^a\!\!\int_c^\gamma [(\mathrm{I}y)_{x,\beta,z}\,.\,\delta^2 w_{x,\beta,z} + \omega_{x,\beta,z}\,.\,\delta w^2_{x,\beta,z} \\ & \quad - (\mathrm{I}y)_{x,b,z}\,.\,\delta^2 w_{x,b,z} - \omega_{x,b,z}\,.\,\delta w^2_{x,b,z}]\,.\,dz\,.\,dx \\ & + \int_{\mathrm{a}}^a\!\!\int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma \Big[\mathfrak{E}\,.\Big(\frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{F}\frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{G}\,.\,\delta w\Big)^2 + \mathfrak{H}\,.\Big(\frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{J}\,.\,\delta w\Big)^2\Big]\,.\,dz\,.\,dy\,.\,dx\end{aligned}$$

Verfährt man jetzt mit XXXIII und mit XXXIV ebenso, wie man früher (in §. 49 bis 53) mit XXI und XXII verfahren ist; so wird sich auch jetzt das Prüfungsmittel jedesmal auf

$$\text{XXXV)}\quad \delta^2 U = \int_{\mathrm{a}}^a\!\!\int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma \Big[\mathfrak{E}\,.\Big(\frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{F}\frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{G}\,.\,\delta w\Big)^2 + \mathfrak{H}\,.\Big(\frac{d_x \delta w}{dx} + \mathfrak{J}\,.\,\delta w\Big)^2\Big]\,.\,dz\,.\,dy\,.\,dx$$

zurückziehen, und man erkennt, dass der Zeichenstand des $\delta^2 U$ von den beiden Ausdrücken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ abhangt. Diese sind aber ganz die nämlichen, welche sich ergeben, wenn man das Aggregat

$$\mathfrak{D}\quad \mathrm{F}\,.\Big(\frac{d_x \delta w}{dx}\Big)^2 + 2\,\mathrm{E}\,.\frac{d_x \delta w}{dx}\,.\,\frac{d_y \delta w}{dy} + \mathrm{C}\,.\Big(\frac{d_y \delta w}{dy}\Big)^2$$

auf die Form

$$\mathfrak{E}\,.\Big(\frac{d_y \delta w}{dy} + \mathfrak{F}\frac{d_x \delta w}{dx}\Big)^2 + \mathfrak{H}\,.\Big(\frac{d_x \delta w}{dx}\Big)^2$$

bringt.

Der Zeichenstand des $\delta^2 U$ ist also diesmal vom Aggregate $\mathfrak{D}$ abhängig.

Zweites Beispiel. Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen $x, y, z, w, \frac{d_x w}{dx}$ versehener Ausdruck; und man sucht für w eine solche Function von x, y, z, dass das Integral

$$\text{XXXVI)}\quad U = \int_{\mathrm{a}}^a\!\!\int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma W\,.\,dz\,.\,dy\,.\,dx$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Hier bekommt man die Hauptgleichung

$$\text{XXXVII)} \quad \frac{d_w W}{dw} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XXXVIII)} \quad \int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma [(\mathrm{I}\,x)_{\alpha,y,z}\,.\,\partial w_{\alpha,y,z} - (\mathrm{I}\,x)_{\mathrm{a},y,z}\,.\,\partial w_{\mathrm{a},y,z}\,]\,.\,dz\,.\,dy = 0$$

Für das Prüfungsmittel bekommt man zunächst

$$\partial^2 U = \int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma [(\mathrm{I}\,x)_{\alpha,y,z}\,.\,\partial^2 w_{\alpha,y,z} - (\mathrm{I}\,x)_{\mathrm{a},y,z}\,.\,\partial^2 w_{\mathrm{a},y,z}]\,.\,dz\,.\,dy$$

$$+\int_{\mathrm{a}}^\alpha\!\!\int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma \Big[\mathrm{L}\,.\,\partial w^2 + 2K\,.\,\partial w\,.\,\frac{d_x \partial w}{dx} + \mathrm{F}\,.\Big(\frac{d_x \partial w}{dx}\Big)^2\Big]\,.\,dz\,.\,dy\,.\,dx$$

Wenn man jetzt, wie in §. 49 und §. 54, den Ausdruck $\mathfrak{K}$ zu Null werden lässt. so kann man dem Prüfungsmittel diesmal folgende Form

$$\text{XXXIX)} \quad \partial^2 U = \int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma [(\mathrm{I}\,x)_{\alpha,y,z}\,.\,\partial^2 w_{\alpha,y,z} + \eta_{\alpha,y,z}\,.\,\partial w^2_{\alpha,y,z}$$

$$- (\mathrm{I}\,x)_{\mathrm{a},y,z}\,.\,\partial^2 w_{\mathrm{a},y,z} - \eta_{\mathrm{a},y,z}\,.\,\partial w^2_{\mathrm{a},y,z}\,]\,.\,dz\,.\,dy$$

$$+\int_{\mathrm{a}}^\alpha\!\!\int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma \Big[\mathrm{F}\,.\Big(\frac{d_x \partial w}{dx} + \frac{K-\eta}{\mathrm{F}}\,.\,\partial w\Big)^2\Big]\,.\,dz\,.\,dy\,.\,dx$$

geben, während zur Bestimmung von η die Partialdifferentialgleichung

$$\Big(\mathrm{L} - \frac{d_x \eta}{dx}\Big)\,.\,\mathrm{F} = (K - \eta)^2$$

integrirt werden muss. Dadurch ergibt sich für η ein mit $x, y, z, \pi(y,z)$ versehener Ausdruck, wo $\pi\,(y,z)$ eine willkürliche Function von y und z ist, welche jedesmal so benützt werden kann, dass sich Gleichung XXXIX auf das dreifache Integral zurückzieht.

§. 55.

Zweiter Zusatz. Schauen wir auf die erste Abtheilung, welche sich mit zweifachen Integralen befasst, zurück; so erkennen wir, dass die in der ersten Untersuchung (§. 8 bis §. 14), wo nur Differentiale der ersten Ordnung vorkommen, abgehandelte Theorie ohneweiters auf Fälle mit höheren Differentialen (§. 15 — 22) ausgedehnt werden konnte. Ebenso verhält es sich hier in dieser zweiten Abtheilung, welche sich mit dreifachen Integralen befasst, d. h. auch die in dieser Untersuchung (§. 48 — §. 54) abgehandelte Theorie könnte ohneweiters auf solche Fälle ausgedehnt werden, wo Differentiale der zweiten, dritten etc. Ordnung vorkommen. Desshalb mag es genügen, hier nur eine einfache Aufgabe dieser Art folgen zu lassen.

Aufgabe 1.

§. 56.

Man hat in den Endpunkten der sechs Coordinaten $\mathrm{a}, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ senkrechte Ebenen errichtet. Diese begränzen also ein Parallelepiped von bekannter Grösse und Lage. Wenn nun dasselbe mit einem Stoffe angefüllt ist, dessen Dichtigkeit sich nicht überall gleich bleibt, sondern sich von Punkt zu Punkt nach einem von den Coordinaten x, y, z abhängigen Gesetze w ändert; welches muss dieses Gesetz sein, damit das über die ganze Ausdehnung unseres Parallelepiped's erstreckte Integral

$$\text{I)} \quad U = \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b}^{\beta}\int_{c}^{\gamma}\left[\mathrm{A}^2 - \left(\frac{d_x d_y d_z w}{dx \, . \, dy \, . \, dz}\right)^2\right] . \, dz \, . \, dy \, . \, dx$$

ein Maximum oder Minimum wird?

Hier bekommt man die Hauptgleichung

$$\text{II)} \quad \frac{d_x^2 d_y^2 d_z^2 w}{dx^2 \, . \, dy^2 \, . \, dz^2} = 0$$

und wenn man zur Bequemlichkeit noch R statt $\frac{d_x d_y d_z w}{dx . dy . dz}$ setzt, so bekommt man die Gränzengleichung

$$\begin{aligned}
\text{III)} \quad & - R_{\alpha,\beta,\gamma} . \partial w_{\alpha,\beta,\gamma} + R_{\alpha,\beta,c} . \partial w_{\alpha,\beta,c} + R_{\alpha,b,\gamma} . \partial w_{\alpha,b,\gamma} - R_{\alpha,b,c} . \partial w_{\alpha,b,c} \\
& + R_{\mathrm{a},\beta,\gamma} . \partial w_{\mathrm{a},\beta,\gamma} - R_{\mathrm{a},\beta,c} . \partial w_{\mathrm{a},\beta,c} - R_{\mathrm{a},b,\gamma} . \partial w_{\mathrm{a},b,\gamma} + R_{\mathrm{a},b,c} . \partial w_{\mathrm{a},b,c} \\
& + \int_c^\gamma \left[\left(\frac{d_z R}{dz}\right)_{\alpha,\beta,z} . \partial w_{\alpha,\beta,z} - \left(\frac{d_z R}{dz}\right)_{\alpha,b,z} . \partial w_{\alpha,b,z} - \left(\frac{d_z R}{dz}\right)_{\mathrm{a},\beta,z} . \partial w_{\mathrm{a},\beta,z} + \left(\frac{d_z R}{dz}\right)_{\mathrm{a},b,z} . \partial w_{\mathrm{a},b,z}\right] . \, dz \\
& + \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{\alpha,y,\gamma} . \partial w_{\alpha,y,\gamma} - \left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{\alpha,y,c} . \partial w_{\alpha,y,c} - \left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{\mathrm{a},y,\gamma} . \partial w_{\mathrm{a},y,\gamma} + \left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{\mathrm{a},y,c} . \partial w_{\mathrm{a},y,c}\right] . \, dy \\
& + \int_{\mathrm{a}}^\alpha \left[\left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,\beta,\gamma} . \partial w_{x,\beta,\gamma} - \left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,\beta,c} . \partial w_{x,\beta,c} - \left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,b,\gamma} . \partial w_{x,b,\gamma} + \left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,b,c} . \partial w_{x,b,c}\right] . \, dx \\
& - \int_b^\beta\int_c^\gamma \left[\left(\frac{d_y d_z R}{dy \, . \, dz}\right)_{\alpha,y,z} . \partial w_{\alpha,y,z} - \left(\frac{d_y d_z R}{dy \, . \, dz}\right)_{\mathrm{a},y,z} . \partial w_{\mathrm{a},y,z}\right] . \, dz \, . \, dy \\
& - \int_{\mathrm{a}}^\alpha\int_c^\gamma \left[\left(\frac{d_x d_z R}{dx \, . \, dz}\right)_{x,\beta,z} . \partial w_{x,\beta,z} - \left(\frac{d_x d_z R}{dx \, . \, dz}\right)_{x,b,z} . \partial w_{x,b,z}\right] . \, dz \, . \, dx \\
& - \int_{\mathrm{a}}^\alpha\int_b^\beta \left[\left(\frac{d_x d_y R}{dx \, . \, dy}\right)_{x,y,\gamma} . \partial w_{x,y,\gamma} - \left(\frac{d_x d_y R}{dx \, . \, dy}\right)_{x,y,c} . \partial w_{x,y,c}\right] . \, dy \, . \, dx = 0
\end{aligned}$$

Das allgemeine Integral der Gleichung II ist

$$\text{IV)} \quad w = x . \varphi_1(y, z) + y . \varphi_2(x, z) + z . \varphi_3(x, y) + \varphi_4(y, z) + \varphi_5(x, z) + \varphi_6(x, y)$$

Durch die sechs Functionalzeichen φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6 sind ganz willkürliche Functionen der betreffenden Veränderlichen dargestellt. Diese willkürlichen Functionen müssen aber durch Gränzbedingungen noch so modificirt werden, dass dabei die Gränzengleichung hinwegfällt.

Wenn man die Hauptgleichung beachtet, so bekommt man für das Prüfungsmittel im Allgemeinen folgenden Ausdruck

V) $\delta^2 U =$

$$
\begin{aligned}
&-2\,.\,[R_{a,\beta,\gamma}\,.\,\delta^2 w_{a,\beta,\gamma} - R_{a,\beta,c}\,.\,\delta^2 w_{a,\beta,c} - R_{a,b,\gamma}\,.\,\delta^2 w_{a,b,\gamma} + R_{a,b,c}\,.\,\delta^2 w_{a,b,c} \\
&- R_{\mathfrak{a},\beta,\gamma}\,.\,\delta^2 w_{\mathfrak{a},\beta,\gamma} + R_{\mathfrak{a},\beta,c}\,.\,\delta^2 w_{\mathfrak{a},\beta,c} + R_{\mathfrak{a},b,\gamma}\,.\,\delta^2 w_{\mathfrak{a},b,\gamma} - R_{\mathfrak{a},b,c}\,.\,\delta^2 w_{\mathfrak{a},b,c}\,] \\
&+ 2\int_c^{\gamma}\Big[\Big(\frac{d_z R}{dz}\Big)_{a,\beta,z}.\,\delta^2 w_{a,\beta,z} - \Big(\frac{d_z R}{dz}\Big)_{a,b,z}.\,\delta^2 w_{a,b,z} - \Big(\frac{d_z R}{dz}\Big)_{\mathfrak{a},\beta,z}.\,\delta^2 w_{\mathfrak{a},\beta,z} + \Big(\frac{d_z R}{dz}\Big)_{\mathfrak{a},b,z}.\,\delta^2 w_{\mathfrak{a},b,z}\Big].\,dz \\
&+ 2\int_b^{\beta}\Big[\Big(\frac{d_y R}{dy}\Big)_{a,y,\gamma}.\,\delta^2 w_{a,y,\gamma} - \Big(\frac{d_y R}{dy}\Big)_{a,y,c}.\,\delta^2 w_{a,y,c} - \Big(\frac{d_y R}{dy}\Big)_{\mathfrak{a},y,\gamma}.\,\delta^2 w_{\mathfrak{a},y,\gamma} + \Big(\frac{d_y R}{dy}\Big)_{\mathfrak{a},y,c}.\,\delta^2 w_{\mathfrak{a},y,c}\Big].\,dy \\
&+ 2\int_{\mathfrak{a}}^{a}\Big[\Big(\frac{d_x R}{dx}\Big)_{x,\beta,\gamma}.\,\delta^2 w_{x,\beta,\gamma} - \Big(\frac{d_x R}{dx}\Big)_{x,\beta,c}.\,\delta^2 w_{x,\beta,c} - \Big(\frac{d_x R}{dx}\Big)_{x,b,\gamma}.\,\delta^2 w_{x,b,\gamma} + \Big(\frac{d_x R}{dx}\Big)_{x,b,c}.\,\delta^2 w_{x,b,c}\Big].\,dx \\
&- 2\int_b^{\beta}\!\!\int_c^{\gamma}\Big[\Big(\frac{d_y d_z R}{dy\,.\,dz}\Big)_{a,y,z}.\,\delta^2 w_{a,y,z} - \Big(\frac{d_y d_z R}{dy\,.\,dz}\Big)_{\mathfrak{a},y,z}.\,\delta^2 w_{\mathfrak{a},y,z}\Big].\,dz\,.\,dy \\
&- 2\int_{\mathfrak{a}}^{a}\!\!\int_c^{\gamma}\Big[\Big(\frac{d_x d_z R}{dx\,.\,dz}\Big)_{x,\beta,z}.\,\delta^2 w_{x,\beta,z} - \Big(\frac{d_x d_z R}{dx\,.\,dz}\Big)_{x,b,z}.\,\delta^2 w_{x,b,z}\Big].\,dz\,.\,dx \\
&- 2\int_{\mathfrak{a}}^{a}\!\!\int_b^{\beta}\Big[\Big(\frac{d_x d_y R}{dx\,.\,dy}\Big)_{x,y,\gamma}.\,\delta^2 w_{x,y,\gamma} - \Big(\frac{d_x d_y R}{dx\,.\,dy}\Big)_{x,y,c}.\,\delta^2 w_{x,y,c}\Big].\,dy\,.\,dx \\
&- 2\,.\int_{\mathfrak{a}}^{a}\!\!\int_b^{\beta}\!\!\int_c^{\gamma}\Big(\frac{d_x d_y d_z \delta w}{dx.dy.dz}\Big)^2.\,dz\,.\,dy\,.\,dx
\end{aligned}
$$

Diesen Ausdruck hätte man (etwa nach Analogie des zweiten Beispieles in §. 20) noch umzuformen, damit man ihn, was auch immer für Gränzfälle gestellt werden mögen, jedesmal so reduciren kann, dass nur ein dreifaches Integral zurückbleibt. Die betreffende allgemeine Formel würde aber sehr weitläufig ausfallen; und desshalb mag sie wegbleiben, was um so eher angeht, als man an der Negativität des hier oben stehenden dreifachen Integrals das Vorhandensein eines Maximum's bereits erkennt.

Nun ist man auf dem Punkte, der Gränzengleichung auch wirklich zu genügen; und zu diesem Ende mögen folgende fünf verschiedene Fälle aufgestellt werden.

§. 57.

Erster Gränzfall. Es seien für das, an den Gränzen herrschende, Dichtigkeitsgesetz keine Vorschriften gemacht, d. h. man sucht für die Dichtigkeit ein solches von den Coordinaten x, y, z abhängige Gesetz w, dass dabei das Integral I seinen absolut grössten Werth bekommt.

Hier muss man das gesuchte Gesetz w aus allen möglichen, in Gleichung IV enthaltenen, Dichtigkeitsgesetzen herauswählen; und so zerfällt (nach Analogie des §. 17) die Gränzengleichung III in folgende einzelne:

𝔄) in folgende sechs nach zwei Veränderlichen identische Gleichungen:

$$1)\ \left(\frac{d_x d_y R}{dx \,.\, dy}\right)_{x,y,\gamma} = 0 \quad , \quad 2)\ \left(\frac{d_x d_z R}{dx \,.\, dz}\right)_{x,\beta,z} = 0 \quad , \quad 3)\ \left(\frac{d_y d_z R}{dy \,.\, dz}\right)_{a,y,z} = 0$$

$$4)\ \left(\frac{d_x d_y R}{dx \,.\, dy}\right)_{x,y,c} = 0 \quad , \quad 5)\ \left(\frac{d_x d_z R}{dx \,.\, dz}\right)_{x,b,z} = 0 \quad , \quad 6)\ \left(\frac{d_y d_z R}{dy \,.\, dz}\right)_{\mathfrak{a},y,z} = 0$$

𝔅) ferner in folgende zwölf nach einem Veränderlichen identische:

$$7)\ \left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,\beta,\gamma} = 0 \quad , \quad 8)\ \left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{a,y,\gamma} = 0 \quad , \quad 9)\ \left(\frac{d_z R}{dz}\right)_{a,\beta,z} = 0$$

$$10)\ \left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,\beta,c} = 0 \quad , \quad 11)\ \left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{a,y,c} = 0 \quad , \quad 12)\ \left(\frac{d_z R}{dz}\right)_{a,b,z} = 0$$

$$13)\ \left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,b,\gamma} = 0 \quad , \quad 14)\ \left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{\mathfrak{a},y,\gamma} = 0 \quad , \quad 15)\ \left(\frac{d_z R}{dz}\right)_{\mathfrak{a},\beta,z} = 0$$

$$16)\ \left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,b,c} = 0 \quad , \quad 17)\ \left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{\mathfrak{a},y,c} = 0 \quad , \quad 18)\ \left(\frac{d_z R}{dz}\right)_{\mathfrak{a},b,z} = 0$$

ℭ) und endlich in folgende acht nichtidentische:

$$19)\ R_{a,\beta,\gamma} = 0 \quad , \quad 20)\ R_{a,\beta,c} = 0 \quad , \quad 21)\ R_{a,b,\gamma} = 0 \quad , \quad 22)\ R_{a,b,c} = 0$$

$$23)\ R_{\mathfrak{a},\beta,\gamma} = 0 \quad , \quad 24)\ R_{\mathfrak{a},\beta,c} = 0 \quad , \quad 25)\ R_{\mathfrak{a},b,\gamma} = 0 \quad , \quad 26)\ R_{\mathfrak{a},b,c} = 0$$

Die Gleichungen 1) und 4) reduciren sich auf die einzige

$$27)\ \frac{d_x^2 d_y^2 \varphi_3(x,y)}{dx^2 \,.\, dy^2} = 0$$

und daraus folgt durch Integration

$$\text{VI)}\quad \varphi_3(x,y) = y \,.\, f_1(x) + x \,.\, f_2(y) + f_3(x) + f_4(y)$$

Die Gleichungen 2) und 5) reduciren sich auf die einzige

$$28)\ \frac{d_x^2 d_z^2 \varphi_2(x,z)}{dx^2 \,.\, dz^2} = 0$$

und daraus folgt durch Integration

$$\text{VII)}\quad \varphi_2(x,z) = z \,.\, \mathfrak{f}_1(x) + x \,.\, \mathfrak{f}_2(z) + \mathfrak{f}_3(x) + \mathfrak{f}_4(z)$$

Die Gleichungen 3) und 6) reduciren sich auf die einzige

$$29)\ \frac{d_y^2 d_z^2 \varphi_1(y,z)}{dy^2 \,.\, dz^2} = 0$$

und daraus folgt

$$\text{VIII)}\quad \varphi_1(y,z) = z \,.\, \mathrm{F}_1(y) + y \,.\, \mathrm{F}_2(z) + \mathrm{F}_3(y) + \mathrm{F}_4(z)$$

Gleichung IV specialisirt sich also jetzt auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}\text{IX)}\quad w = {} & x \,.\, y \,.\, [\mathrm{F}_2(z) + \mathfrak{f}_2(z)] + x \,.\, z \,.\, [\mathrm{F}_1(y) + f_2(y)] + y \,.\, z \,.\, [f_1(x) + \mathfrak{f}_1(x)] \\ & + x \,.\, [\mathrm{F}_3(y) + \mathrm{F}_4(z)] + y \,.\, [\mathfrak{f}_3(x) + \mathfrak{f}_4(z)] + z \,.\, [f_3(x) + f_4(y)] \\ & + \varphi_4(y,z) + \varphi_5(x,z) + \varphi_6(x,y)\end{aligned}$$

Dieser Gleichung kann man aber noch folgende etwas kürzere Form geben:

$$\text{X)} \quad w = x \cdot y \cdot \zeta_1(z) + x \cdot z \cdot \zeta_2(y) + y \cdot z \cdot \zeta_3(x)$$
$$+ x \cdot [\mathrm{F}_3(y) + \mathrm{F}_4(z)] + y \cdot [\mathfrak{f}_3(x) + \mathfrak{f}_4(z)] + z \cdot [f_3(x) + f_4(y)]$$
$$+ \varphi_4(y, z)] + \varphi_5(x, z) + \varphi_6(x, y)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich jetzt

$$30) \quad R = \frac{d_x d_y d_z w}{dx \cdot dy \cdot dz} = \frac{d\zeta_1(z)}{dz} + \frac{d\zeta_2(y)}{dy} + \frac{d\zeta_3(x)}{dx}$$

und dabei reduciren sich die zwölf Gleichungen (Nr. 7 — 18) auf folgende drei:

$$31) \quad \frac{d^2\zeta_1(z)}{dz^2} = 0 \quad . \quad 32) \quad \frac{d^2\zeta_2(y)}{dy^2} = 0 \quad . \quad 33) \quad \frac{d^2\zeta_3(x)}{dx^2} = 0$$

Daraus folgt durch Integration

$$\text{XI)} \quad \zeta_1(z) = h_1 \cdot z + K_1$$
$$\text{XII)} \quad \zeta_2(y) = h_2 \cdot y + K_2$$
$$\text{XIII)} \quad \zeta_3(x) = h_3 \cdot x + K_3$$

Gleichung X specialisirt sich also noch weiter auf folgende Weise:

$$\text{XIV)} \quad w = (h_1 + h_2 + h_3) \cdot xyz + K_1 \cdot xy + K_2 \cdot xz + K_3 \cdot yz$$
$$+ x \cdot [\mathrm{F}_3(y) + \mathrm{F}_4(z)] + y \cdot [\mathfrak{f}_3(x) + \mathfrak{f}_4(z)] + z \cdot [f_3(x) + f_4(y)]$$
$$+ \varphi_4(y, z) + \varphi_5(x, z) + \varphi_6(x, y)$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$34) \quad \frac{d_x d_y d_z w}{dx \cdot dy \cdot dz} = h_1 + h_2 + h_3$$

Die acht Gleichungen (Nr. 19 — 26) reduciren sich also jetzt auf die einzige

$$35) \quad h_1 + h_2 + h_3 = 0$$

und somit specialisirt sich Gleichung XIV in folgende:

$$\text{XV)} \quad w = K_1 \cdot xy + K_2 \cdot xz + K_3 \cdot yz$$
$$+ x \cdot [\mathrm{F}_3(y) + \mathrm{F}_4(z)] + y \cdot [\mathfrak{f}_3(x) + \mathfrak{f}_4(z)] + z \cdot [f_3(x) + f_4(y)]$$
$$+ \varphi_4(y, z) + \varphi_5(x, z) + \varphi_6(x, y)$$

Die Gränzengleichung ist nun weggefallen, während die drei Constanten

$$K_1 \quad , \quad K_2 \quad ; \quad K_3$$

und die neun Functionen

$$\mathrm{F}_3(y) \;,\; \mathrm{F}_4(z) \;,\; \mathfrak{f}_3(x) \;,\; \mathfrak{f}_4(z) \;,\; f_3(x) \;,\; f_4(y) \;,\; \varphi_4(y, z) \;,\; \varphi_5(x, z) \;,\; \varphi_6(x, y)$$

keine Bestimmung gefunden haben. Man kann dieselben also allgemein lassen. Will man sie aber dennoch specialisiren, so können die betreffenden Bedingungen sich über alle sowohl im Innern als auch an der Oberfläche gelegenen Punkte des nach Vorschrift der Aufgabe begränzten Parallelepiped's erstrecken; und bei allen dergleichen Bedingungen bleibt der Werth des Integrals U immer gleich gross.

Hinsichtlich des Prüfungsmittels gilt die am Schlusse des §. 56 gemachte Bemerkung, d. h. es findet ein Maximum statt.

§. 58.

Zweiter Gränzfall. Das gesuchte Gesetz der Dichtigkeit soll nur aus jenen Gesetzen herausgewählt werden, welche alle im Bereiche der sechs, den Coordinaten a, α, b, β, c, γ entsprechenden, Gränzebenen bezüglich in die bestimmt vorgeschriebenen Functionen

$$\mathfrak{F}_1(y,z)\ ,\ \mathfrak{F}_2(y,z)\ ,\ \mathfrak{F}_3(x,z)\ ,\ \mathfrak{F}_4(x,z)\ ,\ \mathfrak{F}_5(x,y)\ ,\ \mathfrak{F}_6(x,y)$$

übergehen.

Dieser Übergang ist dargestellt durch die sechs Gleichungen

$$36)\ w_{\mathrm{a},y,z}=\mathfrak{F}_1(y,z)\ ,\quad 37)\ w_{\alpha,y,z}=\mathfrak{F}_2(y,z)\ ,\quad 38)\ w_{x,b,z}=\mathfrak{F}_3(x,z)$$

$$39)\ w_{x,\beta,z}=\mathfrak{F}_4(x,z)\ ,\quad 40)\ w_{x,y,c}=\mathfrak{F}_5(x,y)\ ,\quad 41)\ w_{x,y,\gamma}=\mathfrak{F}_6(x,y)$$

Bei dieser Vorschrift müssen folgende drei Systeme von Gleichungen stattfinden:

$$♀\quad \delta w_{\mathrm{a},y,z}=0\ ,\quad \delta w_{\alpha,y,z}=0\ ,\quad \delta^2 w_{\mathrm{a},y,z}=0\ ,\quad \delta^2 w_{\alpha,y,z}=0\ ,\ \text{etc.}$$

$$♁\quad \delta w_{x,b,z}=0\ ,\quad \delta w_{x,\beta,z}=0\ ,\quad \delta^2 w_{x,b,z}=0\ ,\quad \delta^2 w_{x,\beta,z}=0\ ,\ \text{etc.}$$

$$♂\quad \delta w_{x,y,c}=0\ ,\quad \delta w_{x,y,\gamma}=0\ ,\quad \delta^2 w_{x,y,c}=0\ ,\quad \delta^2 w_{x,y,\gamma}=0\ ,\ \text{etc.}$$

Die Gleichungen ♀ sind nach y und z identisch; sie gelten also auch bei $y=b$, $y=\beta$, $z=c$, $z=\gamma$.

Die Gleichungen ♁ sind nach x und z identisch; sie gelten also auch bei $x=\mathrm{a}$, $x=\alpha$, $z=c$, $z=\gamma$.

Die Gleichungen ♂ sind nach x und y identisch; sie gelten also auch bei $x=\mathrm{a}$, $x=\alpha$, $y=b$, $y=\beta$.

Somit erkennt man, dass die ganze Gränzengleichung III diesmal von selbst wegfällt; und das in Gleichung IV dargestellte allgemeine Gesetz specialisirt sich jetzt durch die sechs Gleichungen (Nr. 36—41).

Man setze zuerst a und dann α statt x in den vier Gleichungen 38), 39), 40), 41); ferner zuerst b und dann β statt y in die vier Gleichungen 36), 37), 40), 41); ebenso setze man zuerst c und dann γ statt z in die vier Gleichungen 36), 37), 38), 39). Dadurch bekommt man 24 neue Ausdrücke, von welchen aber je zwei einander gleich sind, d. h. es ergeben sich folgende zwölf neue Gleichungen:

$$42)\ w_{\mathrm{a},b,z}=\mathfrak{F}_1(b,z)=\mathfrak{F}_3(\mathrm{a},z)\ ,\quad 43)\ w_{\mathrm{a},\beta,z}=\mathfrak{F}_1(\beta,z)=\mathfrak{F}_4(\mathrm{a},z)$$

$$44)\ w_{\mathrm{a},y,c}=\mathfrak{F}_1(y,c)=\mathfrak{F}_5(\mathrm{a},y)\ ,\quad 45)\ w_{\mathrm{a},y,\gamma}=\mathfrak{F}_1(y,\gamma)=\mathfrak{F}_6(\mathrm{a},y)$$

$$46)\ w_{\alpha,b,z}=\mathfrak{F}_2(b,z)=\mathfrak{F}_3(\alpha,z)\ ,\quad 47)\ w_{\alpha,\beta,z}=\mathfrak{F}_2(\beta,z)=\mathfrak{F}_4(\alpha,z)$$

$$48)\ w_{\alpha,y,c}=\mathfrak{F}_2(y,c)=\mathfrak{F}_5(\alpha,y)\ ,\quad 49)\ w_{\alpha,y,\gamma}=\mathfrak{F}_2(y,\gamma)=\mathfrak{F}_6(\alpha,y)$$

$$50)\ w_{x,b,c}=\mathfrak{F}_3(x,c)=\mathfrak{F}_5(x,b)\ ,\quad 51)\ w_{x,b,\gamma}=\mathfrak{F}_3(x,\gamma)=\mathfrak{F}_6(x,b)$$

$$52)\ w_{x,\beta,c}=\mathfrak{F}_4(x,c)=\mathfrak{F}_5(x,\beta)\ ,\quad 53)\ w_{x,\beta,\gamma}=\mathfrak{F}_4(x,\gamma)=\mathfrak{F}_6(x,\beta)$$

Setzt man in den letzten zwölf Gleichungen zuerst a, b, c, und hierauf α, β, γ bezüglich statt x, y, z ein; so ergeben sich abermals vierundzwanzig neue Ausdrücke, aus welchen aber diesmal nur acht verschiedene Gleichungen hervorgehen, nämlich

$$54)\quad w_{\mathrm{a},b,c} = \mathfrak{F}_1(b,c) = \mathfrak{F}_3(\mathrm{a},c) = \mathfrak{F}_5(\mathrm{a},b)$$
$$55)\quad w_{\mathrm{a},b,\gamma} = \mathfrak{F}_1(b,\gamma) = \mathfrak{F}_3(\mathrm{a},\gamma) = \mathfrak{F}_6(\mathrm{a},b)$$
$$56)\quad w_{\mathrm{a},\beta,c} = \mathfrak{F}_1(\beta,c) = \mathfrak{F}_4(\mathrm{a},c) = \mathfrak{F}_5(\mathrm{a},\beta)$$
$$57)\quad w_{\mathrm{a},\beta,\gamma} = \mathfrak{F}_1(\beta,\gamma) = \mathfrak{F}_4(\mathrm{a},\gamma) = \mathfrak{F}_6(\mathrm{a},\beta)$$
$$58)\quad w_{\alpha,b,c} = \mathfrak{F}_2(b,c) = \mathfrak{F}_3(\alpha,c) = \mathfrak{F}_5(\alpha,b)$$
$$59)\quad w_{\alpha,b,\gamma} = \mathfrak{F}_2(b,\gamma) = \mathfrak{F}_3(\alpha,\gamma) = \mathfrak{F}_6(\alpha,b)$$
$$60)\quad w_{\alpha,\beta,c} = \mathfrak{F}_2(\beta,c) = \mathfrak{F}_4(\alpha,c) = \mathfrak{F}_5(\alpha,\beta)$$
$$61)\quad w_{\alpha,\beta,\gamma} = \mathfrak{F}_2(\beta,\gamma) = \mathfrak{F}_4(\alpha,\gamma) = \mathfrak{F}_6(\alpha,\beta)$$

Dass aber die letzten zwanzig Gleichungen (Nr. 42 — 61) stattfinden, ist ein Ergebniss, welches ganz der Natur des hier vorgelegten besonderen Falles entspricht; denn

a) die sechs in den Endpunkten der Coordinaten $\mathrm{a}, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ senkrechten Ebenen schneiden sich in zwölf Kanten; und in jeder dieser Kanten kann nur ein und dasselbe Dichtigkeitsgesetz herrschen, d. h. ein Gesetz, welches (im Bereiche der betreffenden Kante nämlich) je zweien der sich schneidenden Gränzebenen gemeinschaftlich ist. Dieses ist die Bedeutung der zwölf ersten Gleichungen (Nr. 42 — 53). Es treffen aber auch

b) die zwölf genannten Kanten in acht Ecken zusammen, und in jeder einzelnen dieser Ecken kann nur eine und dieselbe Dichtigkeit herrschen, d. h. eine Dichtigkeit, welche je dreien der sich treffenden Kanten gemein ist. Dieses ist die Bedeutung der acht letzten Gleichungen (Nr. 54 — 61).

Hiermit hat man abermals ein Beispiel, wie die Erscheinungen des Calcul's jedesmal mit den Eigenthümlichkeiten des ihm unterworfenen Gegenstandes übereinstimmen.

Sollten die sechs vorgeschriebenen Functionen

$$\mathfrak{F}_1(y,z)\quad,\quad \mathfrak{F}_2(y,z)\quad,\quad \mathfrak{F}_3(x,z)\quad,\quad \mathfrak{F}_4(x,z)\quad,\quad \mathfrak{F}_5(x,y)\quad,\quad \mathfrak{F}_6(x,y)$$

Stücke in sich enthalten, welche noch willkürlich sind; so müssen sie sich so specialisiren lassen, dass die letzten zwanzig Gleichungen erfüllt werden.

Hinsichtlich des Prüfungsmittels gilt wiederum die am Schlusse des §. 56 gemachte Bemerkung, d. h. es findet ein Maximum statt.

§. 59.

Dritter Gränzfall. Das gesuchte Gesetz der Dichtigkeit soll nur aus jenen Gesetzen herausgewählt werden, welche alle im Bereiche der zwölf, den Coordinatenpaaren

$$(\mathrm{a},b)\,,\,(\mathrm{a},\beta)\,,\,(\alpha,b)\,,\,(\alpha,\beta)\,,\,(\mathrm{a},c)\,,\,(\mathrm{a},\gamma)\,,\,(\alpha,c)\,,\,(\alpha,\gamma)\,,\,(b,c)\,,\,(b,\gamma)\,,\,(\beta,c)\,,\,(\beta,\gamma)$$

entsprechenden, Kanten bezüglich in die bestimmt vorgeschriebenen Functionen

$$\mathfrak{F}_1(z)\,,\,\mathfrak{F}_2(z)\,,\,\mathfrak{F}_3(z)\,,\,\mathfrak{F}_4(z)\,,\,\mathfrak{F}_5(y)\,,\,\mathfrak{F}_6(y)\,,\,\mathfrak{F}_7(y)\,,\,\mathfrak{F}_8(y)\,,\,\mathfrak{F}_9(x)\,,\,\mathfrak{F}_{10}(x)\,,\,\mathfrak{F}_{11}(x)\,,\,\mathfrak{F}_{12}(x)$$

übergehen.

Dieser Übergang ist dargestellt durch die zwölf Gleichungen

62) $w_{\mathrm{a},b,z} = \mathfrak{F}_1(z)$, 63) $w_{\mathrm{a},\beta,z} = \mathfrak{F}_2(z)$, 64) $w_{\alpha,b,z} = \mathfrak{F}_3(z)$, 65) $w_{\alpha,\beta,z} = \mathfrak{F}_4(z)$
66) $w_{\mathrm{a},y,c} = \mathfrak{F}_5(y)$, 67) $w_{\mathrm{a},y,\gamma} = \mathfrak{F}_6(y)$, 68) $w_{\alpha,y,c} = \mathfrak{F}_7(y)$, 69) $w_{\alpha,y,\gamma} = \mathfrak{F}_8(y)$
70) $w_{x,b,c} = \mathfrak{F}_9(x)$, 71) $w_{x,b,\gamma} = \mathfrak{F}_{10}(x)$, 72) $w_{x,\beta,c} = \mathfrak{F}_{11}(x)$, 73) $w_{x,\beta,\gamma} = \mathfrak{F}_{12}(x)$

Bei dieser Vorschrift müssen folgende drei Systeme von Gleichungen stattfinden:

$\partial w_{\mathrm{a},b,z} = 0$, $\partial w_{\mathrm{a},\beta,z} = 0$, $\partial w_{\alpha,b,z} = 0$, $\partial w_{\alpha,\beta,z} = 0$
⊙ $\partial^2 w_{\mathrm{a},b,z} = 0$, $\partial^2 w_{\mathrm{a},\beta,z} = 0$, $\partial^2 w_{\alpha,b,z} = 0$, $\partial^2 w_{\alpha,\beta,z} = 0$
und so fort

$\partial w_{\mathrm{a},y,c} = 0$, $\partial w_{\mathrm{a},y,\gamma} = 0$, $\partial w_{\alpha,y,c} = 0$, $\partial w_{\alpha,y,\gamma} = 0$
☽ $\partial^2 w_{\mathrm{a},y,c} = 0$, $\partial^2 w_{\mathrm{a},y,\gamma} = 0$, $\partial^2 w_{\alpha,y,c} = 0$, $\partial^2 w_{\alpha,y,\gamma} = 0$
und so fort

$\partial w_{x,b,c} = 0$, $\partial w_{x,b,\gamma} = 0$, $\partial w_{x,\beta,c} = 0$, $\partial w_{x,\beta,\gamma} = 0$
☿ $\partial^2 w_{x,b,c} = 0$, $\partial^2 w_{x,b,\gamma} = 0$, $\partial^2 w_{x,\beta,c} = 0$, $\partial^2 w_{x,\beta,\gamma} = 0$
und so fort

Die Gleichungen ⊙ sind nach z identisch; sie gelten also auch bei $z = c$ und bei $z = \gamma$.
Die Gleichungen ☽ sind nach y identisch; sie gelten also auch bei $y = b$ und bei $y = \beta$.
Die Gleichungen ☿ sind nach x identisch; sie gelten also auch bei $x = \mathrm{a}$ und bei $x = \alpha$.
Die drei Systeme ⊙ ☽ ☿ schliessen also noch folgendes vierte in sich:

$\partial w_{\mathrm{a},b,c} = 0$, $\partial w_{\mathrm{a},b,\gamma} = 0$, $\partial w_{\mathrm{a},\beta,c} = 0$, $\partial w_{\mathrm{a},\beta,\gamma} = 0$
$\partial w_{\alpha,b,c} = 0$, $\partial w_{\alpha,b,\gamma} = 0$, $\partial w_{\alpha,\beta,c} = 0$, $\partial w_{\alpha,\beta,\gamma} = 0$
🜍 $\partial^2 w_{\mathrm{a},b,c} = 0$, $\partial^2 w_{\mathrm{a},b,\gamma} = 0$, $\partial^2 w_{\mathrm{a},\beta,c} = 0$, $\partial^2 w_{\mathrm{a},\beta,\gamma} = 0$
$\partial^2 w_{\alpha,b,c} = 0$, $\partial^2 w_{\alpha,b,\gamma} = 0$, $\partial^2 w_{\alpha,\beta,c} = 0$, $\partial^2 w_{\alpha,\beta,\gamma} = 0$
und so fort

Dagegen haben die drei Systeme ⊙ ☽ ☿ keine Rückwirkung auf die Ausdrücke

$\partial w_{\mathrm{a},y,z}$, $\partial w_{\alpha,y,z}$, $\partial w_{x,b,z}$, $\partial w_{x,\beta,z}$, $\partial w_{x,y,c}$, $\partial w_{x,y,\gamma}$
$\partial^2 w_{\mathrm{a},y,z}$, $\partial^2 w_{\alpha,y,z}$, $\partial^2 w_{x,b,z}$, $\partial^2 w_{x,\beta,z}$, $\partial^2 w_{x,y,c}$, $\partial^2 w_{x,y,\gamma}$
und so fort

in welchen von den drei Veränderlichen x, y, z noch zwei allgemein sind.

Damit also die Gränzengleichung III auch diesmal vollständig wegfalle, müssen noch die sechs Gleichungen Nr. 1 — 6 stattfinden, und dabei specialisirt sich das in IV aufgestellte allgemeine Gesetz wieder auf X, d. h. auf

$$\text{XVI)}\quad \begin{aligned} w = {} & xy \cdot \zeta_1(z) + xz \cdot \zeta_2(y) + yz \cdot \zeta_3(x) \\ & + x \cdot [\mathrm{F}_3(y) + \mathrm{F}_4(z)] + y \cdot [\mathfrak{f}_3(x) + \mathfrak{f}_4(z)] + z \cdot [f_3(x) + f_4(y)] \\ & + \psi_4(y, z) + \psi_5(x, z) + \psi_6(x, y) \end{aligned}$$

Wenn man in den zwölf Gleichungen Nr. 62 — 73 zuerst a, b, c, und hierauf α, β, γ bezüglich statt x, y, z einsetzt; so ergeben sich vierundzwanzig neue Ausdrücke, aus welchen jedoch nur acht verschiedene Gleichungen hervorgehen, nämlich

$$74)\ w_{\mathrm{a},b,c} = \mathfrak{F}_1(c) = \mathfrak{F}_5(b) = \mathfrak{F}_9(\mathrm{a}) \quad , \quad 75)\ w_{\mathrm{a},b,\gamma} = \mathfrak{F}_1(\gamma) = \mathfrak{F}_6(b) = \mathfrak{F}_{10}(\mathrm{a})$$
$$76)\ w_{\mathrm{a},\beta,c} = \mathfrak{F}_2(c) = \mathfrak{F}_5(\beta) = \mathfrak{F}_{11}(\mathrm{a}) \quad , \quad 77)\ w_{\mathrm{a},\beta,\gamma} = \mathfrak{F}_2(\gamma) = \mathfrak{F}_6(\beta) = \mathfrak{F}_{12}(\mathrm{a})$$
$$78)\ w_{\alpha,b,c} = \mathfrak{F}_3(c) = \mathfrak{F}_7(b) = \mathfrak{F}_9(\alpha) \quad , \quad 79)\ w_{\alpha,b,\gamma} = \mathfrak{F}_3(\gamma) = \mathfrak{F}_8(b) = \mathfrak{F}_{10}(\alpha)$$
$$80)\ w_{\alpha,\beta,c} = \mathfrak{F}_1(c) = \mathfrak{F}_7(\beta) = \mathfrak{F}_{11}(\alpha) \quad , \quad 81)\ w_{\alpha,\beta,\gamma} = \mathfrak{F}_4(\gamma) = \mathfrak{F}_8(\beta) = \mathfrak{F}_{12}(\alpha)$$

Um nun das in XVI aufgestellte Gesetz noch weiter zu specialisiren, muss man es in die zwanzig Gleichungen Nr. 62 — 81 einsetzen.

Dass aber die letzten acht Gleichungen Nr. 74 — 81 stattfinden, ist ein Ergebniss, welches ganz der Natur des hier vorgelegten speciellen Falles entspricht; denn

die zwölf Kanten treffen in acht Ecken zusammen, und in jeder einzelnen dieser Ecken kann nur eine und dieselbe Dichtigkeit herrschen, d. h. eine Dichtigkeit, welche je dreien der sich treffenden Kanten gemein ist.

Sollten die zwölf vorgeschriebenen Functionen

$$\mathfrak{F}_1(z)\ ,\ \mathfrak{F}_2(z)\ ,\ \mathfrak{F}_3(z)\ ,\ \mathfrak{F}_1(z)\ ,\ \mathfrak{F}_5(y)\ ,\ \mathfrak{F}_6(y)\ ,\ \mathfrak{F}_7(y)\ ,\ \mathfrak{F}_8(y)\ ,\ \mathfrak{F}_9(x)\ ,\ \mathfrak{F}_{10}(x)\ ,\ \mathfrak{F}_{11}(x)\ ,\ \mathfrak{F}_{12}(x)$$

mit willkürlichen Constanten versehen sein, so müssen diese sich so specialisiren lassen, dass die letzten acht Gleichungen erfüllt werden.

Hinsichtlich des Prüfungsmittels gilt abermals die am Schlusse des §. 56 gemachte Bemerkung, d. h. es findet ein Maximum statt.

§. 60.

Vierter Gränzfall. Das gesuchte Gesetz der Dichtigkeit soll nur aus jenen Gesetzen herausgewählt werden, die alle in den acht, zu den Coordinaten

$$(\mathrm{a}, b, c)\ ,\ (\mathrm{a}, b, \gamma)\ ,\ (\mathrm{a}, \beta, c)\ ,\ (\mathrm{a}, \beta, \gamma)\ ,\ (\alpha, b, c)\ ,\ (\alpha, b, \gamma)\ ,\ (\alpha, \beta, c)\ ,\ (\alpha, \beta, \gamma)$$

gehörigen, Ecken bezüglich folgende bestimmt vorgeschriebenen Werthe

$$k_1\ ,\ k_2\ ,\ k_3\ ,\ k_4\ ,\ k_5\ ,\ k_6\ ,\ k_7\ ,\ k_8$$

annehmen.

Diese Bedingung ist dargestellt durch die acht Gleichungen

$$82)\ w_{\mathrm{a},b,c} = k_1\ ,\ 83)\ w_{\mathrm{a},b,\gamma} = k_2\ ,\ 84)\ w_{\mathrm{a},\beta,c} = k_3\ ,\ 85)\ w_{\mathrm{a},\beta,\gamma} = k_4$$
$$86)\ w_{\alpha,b,c} = k_5\ ,\ 87)\ w_{\alpha,b,\gamma} = k_6\ ,\ 88)\ w_{\alpha,\beta,c} = k_7\ ,\ 89)\ w_{\alpha,\beta,\gamma} = k_8$$

Bei dieser Vorschrift muss folgendes System von Gleichungen stattfinden:

$$\delta w_{\mathrm{a},b,c} = 0\ ,\ \delta w_{\mathrm{a},b,\gamma} = 0\ ,\ \delta w_{\mathrm{a},\beta,c} = 0\ ,\ \delta w_{\mathrm{a},\beta,\gamma} = 0\ ,$$
$$\delta w_{\alpha,b,c} = 0\ ,\ \delta w_{\alpha,b,\gamma} = 0\ ,\ \delta w_{\alpha,\beta,c} = 0\ ,\ \delta w_{\alpha,\beta,\gamma} = 0\ ,$$
$$\delta^2 w_{\mathrm{a},b,c} = 0\ ,\ \delta^2 w_{\mathrm{a},b,\gamma} = 0\ ,\ \delta^2 w_{\mathrm{a},\beta,c} = 0\ ,\ \delta^2 w_{\mathrm{a},\beta,\gamma} = 0\ ,$$
$$\delta^2 w_{\alpha,b,c} = 0\ ,\ \delta^2 w_{\alpha,b,\gamma} = 0\ ,\ \delta^2 w_{\alpha,\beta,c} = 0\ ,\ \delta^2 w_{\alpha,\beta,\gamma} = 0\ ,$$

und so fort

Diese Gleichungen haben aber keine Rückwirkung auf $\delta w_{x,y,z}$, $\delta^2 w_{x,y,z}$, etc., wenn von den drei Veränderlichen x, y, z entweder einer oder zwei noch allgemein sind; und so müssen, damit die Gränzengleichung III vollständig wegfällt, noch die achtzehn Gleichungen Nr. 1 — 18 stattfinden. Dabei specialisirt sich das in IV aufgestellte allgemeine Gesetz wieder auf Gleichung XIV, welche, wenn man zur Abkürzung nach H statt $(h_1 + h_2 + h_3)$ setzt, nun folgende Form annimmt:

$$\text{XVII)} \quad \begin{aligned} w = {} & H \,.\, xyz + K_1 \,.\, xy + K_2 \,.\, xz + K_3 \,.\, yz \\ & + x \,.\, [\mathrm{F}_3(y) + \mathrm{F}_4(z)] + y \,.\, [\mathfrak{f}_3(x) + \mathfrak{f}_4(z)] + z \,.\, [f_3(x) + f_4(y)] \\ & + \varphi_4(x, z) + \varphi_5(x, y) + \varphi_6(x, y) \end{aligned}$$

Um jedoch dieses Gesetz noch weiter zu specialisiren, hat man es in die acht Gleichungen Nr. 82 — 89 einzusetzen.

Hinsichtlich des Prüfungsmittels gilt die am Schlusse des §. 56 gemachte Bemerkung, d. h. es findet ein Maximum statt.

§. 61.

Fünfter Gränzfall. Das gesuchte Gesetz der Dichtigkeit soll nur aus jenen Gesetzen herausgewählt werden, welche alle für den Unterschied der in je zwei gegenüberliegenden Gränzebenen herrschenden Dichtigkeiten einen und denselben constanten Werth B liefern.

Diese Bedingung ist ausgesprochen durch die drei Gleichungen

$$90)\ w_{a,y,z} - w_{\mathrm{a},y,z} = \mathrm{B} \quad , \quad 91)\ w_{x,\beta,z} - w_{x,b,z} = \mathrm{B} \quad , \quad 92)\ w_{x,y,\gamma} - w_{x,y,c} = \mathrm{B}$$

Bei dieser Vorschrift muss folgendes System von Gleichungen bestehen:

$$93)\ \partial w_{a,y,z} - \partial w_{\mathrm{a},y,z} = 0 \,,\ 94)\ \partial w_{x,\beta,z} - \partial w_{x,b,z} = 0 \,,\ 95)\ \partial w_{x,y,\gamma} - \partial w_{x,y,c} = 0 \,,$$
$$96)\ \partial^2 w_{a,y,z} - \partial^2 w_{\mathrm{a},y,z} = 0 \,,\ 97)\ \partial^2 w_{x,\beta,z} - \partial^2 w_{x,b,z} = 0 \,,\ 98)\ \partial^2 w_{x,y,\gamma} - \partial^2 w_{x,y,c} = 0 \,,$$

und so fort

Setzt man in den Gleichungen 93) und 94) statt x und y die Gränzwerthe ein, so bekommt man

$$99)\quad \partial w_{\mathrm{a},b,z} = \partial w_{\mathrm{a},\beta,z} = \partial w_{a,b,z} = \partial w_{a,\beta,z}$$

Setzt man in den Gleichungen 93) und 95) statt x und z die Gränzwerthe ein, so bekommt man

$$100)\quad \partial w_{\mathrm{a},y,c} = \partial w_{\mathrm{a},y,\gamma} = \partial w_{a,y,c} = \partial w_{a,y,\gamma}$$

Setzt man in den Gleichungen 94) und 95) statt y und z die Gränzwerthe ein, so bekommt man

$$101)\quad \partial w_{x,b,c} = \partial w_{x,b,\gamma} = \partial w_{x,\beta,c} = \partial w_{x,\beta,\gamma}$$

Setzt man endlich in den drei letzten Gleichungen statt x, y, z die Gränzwerthe ein, so bekommt man

$$102)\quad \begin{aligned} & \partial w_{\mathrm{a},b,c} = \partial w_{\mathrm{a},b,\gamma} = \partial w_{\mathrm{a},\beta,c} = \partial w_{\mathrm{a},\beta,\gamma} \\ & = \partial w_{a,b,c} = \partial w_{a,b,\gamma} = \partial w_{a,\beta,c} = \partial w_{a,\beta,\gamma} \end{aligned}$$

Die Gränzengleichung III zerlegt sich also jetzt in folgende einzelne:

$$103)\qquad \left(\frac{d_x d_y R}{dx.dy}\right)_{x,y,\gamma} - \left(\frac{d_x d_y R}{dx.dy}\right)_{x,y,c} = 0$$

$$104)\qquad \left(\frac{d_x d_z R}{dx.dz}\right)_{x,\beta,z} - \left(\frac{d_x d_z R}{dx.dz}\right)_{x,b,z} = 0$$

$$105)\qquad \left(\frac{d_y d_z R}{dy.dz}\right)_{a,y,z} - \left(\frac{d_y d_z R}{dy.dz}\right)_{\mathrm{a},y,z} = 0$$

$$106)\qquad \left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,\beta,\gamma} - \left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,\beta,c} - \left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,b,\gamma} + \left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,b,c} = 0$$

$$107)\qquad \left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{a,y,\gamma} - \left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{a,y,c} - \left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{\mathrm{a},y,\gamma} + \left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{\mathrm{a},y,c} = 0$$

$$108)\qquad \left(\frac{d_z R}{dz}\right)_{a,\beta,z} - \left(\frac{d_z R}{dz}\right)_{a,b,z} - \left(\frac{d_z R}{dz}\right)_{\mathrm{a},\beta,z} + \left(\frac{d_z R}{dz}\right)_{\mathrm{a},b,z} = 0$$

$$109)\qquad R_{a,\beta,\gamma} - R_{a,\beta,c} - R_{a,b,\gamma} + R_{a,b,c}$$
$$- R_{\mathrm{a},\beta,\gamma} + R_{\mathrm{a},\beta,c} + R_{\mathrm{a},b,\gamma} - R_{\mathrm{a},b,c} = 0$$

Weil aber $\frac{d_x d_y R}{dx.dy} = \frac{d_x^2 d_y^2 \psi_3 (x,y)}{dx^2 . dy^2}$, $\frac{d_x d_z R}{dx.dz} = \frac{d_x^2 d_z^2 \psi_2 (x,z)}{dx^2 . dz^2}$, und $\frac{d_y d_z R}{dy.dz} = \frac{d_y^2 d_z^2 \psi_1 (y,z)}{dy^2 . dz^2}$ ist; so fallen die drei Gleichungen 103), 104) und 105) hinweg, ohne dass sie zur Specialisirung des durch Gleichung IV dargestellten allgemeinen Gesetzes etwas beitragen. Dagegen die sieben Gleichungen 90), 91), 92), 106), 107), 108) und 109) müssen als Bestimmungsgleichungen benützt werden.

Hinsichtlich des Prüfungsmittels gilt, wie in allen vorigen Gränzfällen gemeldet, die am Schlusse des §. 56 gemachte Bemerkung, d. h. es findet ein Maximum statt.

§. 62.

Andere Gränzfälle, bei denen ebenfalls für die, den Gränzen angehörigen, Bestandtheile

$$w_{\mathrm{a},y,z}\ ,\ w_{a,y,z}\ ,\ w_{x,b,z}\ ,\ w_{x,\beta,z}\ ,\ w_{x,y,c}\ ,\ w_{x,y,\gamma}$$

oder

$$w_{\mathrm{a},b,z}\ ,\ w_{\mathrm{a},\beta,z}\ ,\ w_{a,b,z}\ ,\ w_{a,\beta,z}\ ,$$
$$w_{\mathrm{a},y,c}\ ,\ w_{\mathrm{a},y,\gamma}\ ,\ w_{a,y,c}\ ,\ w_{a,y,\gamma}\ ,$$
$$w_{x,b,c}\ ,\ w_{x,b,\gamma}\ ,\ w_{x,\beta,c}\ ,\ w_{x,\beta,\gamma}$$

oder

$$w_{\mathrm{a},b,c}\ ,\ w_{\mathrm{a},b,\gamma}\ ,\ w_{\mathrm{a},\beta,c}\ ,\ w_{\mathrm{a},\beta,\gamma}\ ,\ w_{a,b,c}\ ,\ w_{a,b,\gamma}\ ,\ w_{a,\beta,c}\ ,\ w_{a,\beta,\gamma}$$

Bedingungen vorgeschrieben sind, kann man sich nach Belieben bilden.

Untersuchung 14.

§. 63.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen

$$x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ w\ ,\ \frac{d_x w}{dx}\ ,\ \frac{d_y w}{dy}\ ,\ \frac{d_z w}{dz}\ ,\ \frac{d_x^2 w}{dx^2}\ ,\ \frac{d_x d_y w}{dx.dy}\ .\ \frac{d_x d_z w}{dx.dz}\ ,\ \frac{d_y^2 w}{dy^2}\ ,\ \text{etc.}$$

gebildeter Ausdruck; und man sucht für w eine solche Function von x, y, z, und zugleich für a, α, b, β, c, γ solche Werthe, dass dabei folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b}^{\beta}\int_{c}^{\gamma} W \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Auch hier sollen, wie in §. 23, die Werthänderungen der Bestandtheile

$$\mathrm{a} \;,\; \alpha \;,\; b \;,\; \beta \;,\; c \;,\; \gamma$$

bezüglich mit

$$\vartheta \mathrm{a} \;,\; \vartheta\alpha \;,\; \vartheta b \;,\; \vartheta\beta \;,\; \vartheta c \;,\; \vartheta\gamma$$
$$\vartheta^2 \mathrm{a} \;,\; \vartheta^2\alpha \;,\; \vartheta^2 b \;,\; \vartheta^2\beta \;,\; \vartheta^2 c \;,\; \vartheta^2\gamma$$

und so fort

dargestellt werden. Auf diese Weise bekommt man

$$\begin{aligned}\text{II)}\quad \delta U = & \int_{b}^{\beta}\int_{c}^{\gamma} (W_{\alpha,y,z} \,.\, \vartheta\alpha - W_{\mathrm{a},y,z} \,.\, \vartheta \mathrm{a}) \,.\, dz \,.\, dy \\ & + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{c}^{\gamma} (W_{x,\beta,z} \,.\, \vartheta\beta - W_{x,b,z} \,.\, \vartheta b) \,.\, dz \,.\, dx \\ & + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b}^{\beta} (W_{x,y,\gamma} \,.\, \vartheta\gamma - W_{x,y,c} \,.\, \vartheta c) \,.\, dy \,.\, dx \\ & + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b}^{\beta}\int_{c}^{\gamma} \delta W \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx\end{aligned}$$

Hier ist bekanntlich

$$\begin{aligned}\text{III)}\quad \delta W = & \frac{d_w W}{dw} \,.\, \delta w + (\mathrm{I}\, x) \,.\, \frac{d_x \delta w}{dx} + (\mathrm{I}\, y) \,.\, \frac{d_y \delta w}{dy} + (\mathrm{I}\, z) \,.\, \frac{d_z \delta w}{dz} \\ & + (\mathrm{II}\, x^2) \,.\, \frac{d_x^2 \delta w}{dx^2} + (\mathrm{II}\, xy) \,.\, \frac{d_x d_y \delta w}{dx \,.\, dy} + (\mathrm{II}\, xz) \,.\, \frac{d_x d_z \delta w}{dx \,.\, dz} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

In Gleichung II muss der mit dem dreifachen Integralzeichen versehene Theilsatz noch so umgeformt werden, dass nur δw und kein Differentialquotient des δw unter dem dreifachen Integralzeichen zurückbleibt. Nebstdem darf unter den drei zweifachen Integralzeichen das δw nach keinem Veränderlichen differentiirt sein, nach welchem auch noch integrirt werden muss.

Hat man aber diese Transformation ausgeführt, so beachte man, dass alle angezeigten Integrationen unabhängig sind von

$$\vartheta \mathrm{a} \;,\; \vartheta\alpha \;,\; \vartheta b \;,\; \vartheta\beta \;,\; \vartheta c \;,\; \vartheta\gamma$$
$$\vartheta^2 \mathrm{a} \;,\; \vartheta^2\alpha \;,\; \vartheta^2 b \;,\; \vartheta^2\beta \;,\; \vartheta^2 c \;,\; \vartheta^2\gamma$$

und so fort

Man kann also diese Bestandtheile, so oft es zweckmässig ist, auch ausserhalb der Integralzeichen setzen. Es hat aber nicht die geringste Schwierigkeit, dergleichen Untersuchungen weiter durchzuführen, und in jedem Einzelfalle das betreffende Prüfungsmittel herzustellen. Das Verfahren ist dem analog, welches bei den zweifachen Integralen (§. 23 — 29) bereits zur Anwendung gebracht worden ist.

§. 64.

Um jedoch einigermassen in das Verfahren einzuleiten, mag der Fall betrachtet werden, wo für die Gränzen durchaus keine Vorschriften gemacht sind.

Hier muss man zur Bestimmung der Werthe der sechs Bestandtheile $\mathrm{a}, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ folgende sechs Gleichungen zu Hilfe nehmen:

$$\text{IV)} \quad \int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma W_{\alpha, y, z} \,.\, dz \,.\, dy = 0 \quad , \qquad \text{V)} \quad \int_b^\beta\!\!\int_c^\gamma W_{\mathrm{a}, y, z} \,.\, dz \,.\, dy = 0 \;,$$

$$\text{VI)} \quad \int_{\mathrm{a}}^\alpha\!\!\int_c^\gamma W_{x, \beta, z} \,.\, dz \,.\, dx = 0 \quad , \qquad \text{VII)} \quad \int_{\mathrm{a}}^\alpha\!\!\int_c^\gamma W_{x, b, z} \,.\, dz \,.\, dx = 0 \;,$$

$$\text{VIII)} \quad \int_{\mathrm{a}}^\alpha\!\!\int_b^\beta W_{x, y, \gamma} \,.\, dy \,.\, dx = 0 \quad , \qquad \text{IX)} \quad \int_{\mathrm{a}}^\alpha\!\!\int_b^\beta W_{x, y, c} \,.\, dy \,.\, dx = 0$$

Die für $\mathrm{a}, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ gesuchten Werthe müssen aber der Bedingung

$$\alpha > \mathrm{a} \quad , \quad \beta > b \quad , \quad \gamma > c$$

genügen. Wenn man bei IV und V die doppelte Integration wirklich ausführt, so nehmen diese zwei Gleichungen bezüglich folgende Form

$$\text{X)} \quad F'(\alpha, \beta, \gamma) - F'(\alpha, \beta, c) - F'(\alpha, b, \gamma) + F'(\alpha, b, c) = 0$$

und

$$\text{XI)} \quad F'(\mathrm{a}, \beta, \gamma) - F'(\mathrm{a}, \beta, c) - F'(\mathrm{a}, b, \gamma) + F'(\mathrm{a}, b, c) = 0$$

an. Wenn man ebenso bei VI und VII die doppelte Integration ausführt, so nehmen die zwei Gleichungen bezüglich folgende Form

$$\text{XII)} \quad F''(\alpha, \beta, \gamma) - F''(\alpha, \beta, c) - F''(\mathrm{a}, \beta, \gamma) + F''(\mathrm{a}, \beta, c) = 0$$

und

$$\text{XIII)} \quad F''(\alpha, b, \gamma) - F''(\alpha, b, c) - F''(\mathrm{a}, b, \gamma) + F''(\mathrm{a}, b, c) = 0$$

an. Wenn man endlich auch bei VIII und IX die doppelte Integration ausführt, so nehmen diese zwei Gleichungen bezüglich folgende Form

$$\text{XIV)} \quad F'''(\alpha, \beta, \gamma) - F'''(\alpha, b, \gamma) - F'''(\mathrm{a}, \beta, \gamma) + F'''(\mathrm{a}, b, \gamma) = 0$$

und

$$\text{XV)} \quad F'''(\alpha, \beta, c) - F'''(\alpha, b, c) - F'''(\mathrm{a}, \beta, c) + F'''(\mathrm{a}, b, c) = 0$$

an. Die Gleichungen X und XI sind aber einander einerlei, d. h. sie unterscheiden sich nur dadurch, dass da, wo in der einen das α, in der andern das a steht. Ebenso sind die

Gleichungen XII und XIII einander einerlei, d. h. diese unterscheiden sich nur dadurch, dass da, wo in der einen das β, in der andern das b steht. Es sind aber auch die Gleichungen XIV und XV einander einerlei, indem auch sie sich nur dadurch unterscheiden, dass da, wo in der einen das γ, in der andern das c steht. Somit sind diese, durch zweifache Integration erzeugten, sechs Gleichungen nicht geeignet, fünf der sechs Unbekannten $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ zu eliminiren und eine mit nur einem Unbekannten versehene neue Gleichung herzustellen.

Man muss also, um für die sechs Unbekannten $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ die geeigneten Werthe zu ermitteln, ein anderes Verfahren anwenden; und dieses besteht, wie man so eben erkannt hat, hauptsächlich darin, dass man nicht alle sechs Gleichungen IV — IX zugleich zweimal integrirt, sondern einen von folgenden drei Wegen einschlägt:

Erstens. Man nehme die Gleichungen IV und V vor, und mache

A) den Versuch, ob folgende zwei nach y und z identische Gleichungen

$$\text{XVI)}\quad W_{\alpha,y,z}=0 \quad , \quad \text{und XVII)}\quad W_{a,y,z}=0$$

möglich sind. Sind sie möglich, dann sind die Werthe des a und des α unabhängig von y und z. Dasselbe gilt auch von den nach y und z genommenen Differentialquotienten, und somit sind auch

$$\text{XVIII)}\quad \frac{d_y(W_{\alpha,y,z})}{dy}=0 \quad , \quad \text{XIX)}\quad \frac{d_z(W_{\alpha,y,z})}{dz}=0$$

$$\text{XX)}\quad \frac{d_y(W_{a,y,z})}{dy}=0 \quad , \quad \text{XXI)}\quad \frac{d_z(W_{a,y,z})}{dz}=0$$

identische Gleichungen, und auch in ihnen sind die Werthe des a und des α unabhängig von y und z. Man verbinde nun die Gleichungen XVI, XVIII und XIX, und eliminire aus ihnen y und z; so ergibt sich eine Gleichung

$$\text{XXII)}\quad f(\alpha)=0$$

aus welcher sich Werthe des α ermitteln lassen. Verbindet man hierauf auch die Gleichungen XVII, XX und XXI, und eliminirt man auch aus ihnen das y und das z; so bekommt man eine Gleichung, welche mit XXII einerlei ist, d. h. man bekommt

$$\text{XXIII)}\quad f(\text{a})=0$$

aus welcher für a ganz die nämlichen Werthe folgen, die man aus XXII bereits für α erhalten hat. Diese Werthe muss man aber zwischen a und α so vertheilen, dass die Bedingung $\alpha > \text{a}$ erfüllt wird. Sollte jedoch aus XXII und XXIII für a und α nur ein einziger Werth folgen, so ist keine solche Vertheilung möglich, d. h. man bekommt $\text{a} = \alpha$, was der Aufgabe widerspricht.

Wenn nun die Gleichungen XVI und XVII wirklich nach y und z identisch sind, so werden auch die Gleichungen IV und V erfüllt, die vier Integrationsgränzen b, β, c, γ mögen sein, was sie wollen.

B) Nachdem man für a und α geeignete Werthe hat ausmitteln können, gehe man weiter zu den Gleichungen VI und VII, und versuche, ob folgende zwei nach z identische Gleichungen

$$\text{XXIV)} \int_{\mathrm{a}}^{a} W_{x,\beta,z} \,.\, dx = 0 \quad , \quad \text{und XXV)} \int_{\mathrm{a}}^{a} W_{x,b,z} \,.\, dx = 0$$

möglich sind. Hier hat man die für a und α gefundenen Werthe als bereits eingeführt zu denken. Sind aber diese beiden nach z identischen Gleichungen möglich, dann sind die Werthe des b und des β unabhängig von z. Dasselbe gilt auch von den nach z genommenen Differentialquotienten, und somit sind auch die Gleichungen

$$\text{XXVI)} \int_{\mathrm{a}}^{a} \frac{d_z(W_{x,\beta,z})}{dz} \,.\, dx = 0 \quad , \quad \text{XXVII)} \int_{\mathrm{a}}^{a} \frac{d_z(W_{x,b,z})}{dz} \,.\, dx = 0$$

nach z identisch, und auch in ihnen sind die Werthe des b und des β unabhängig von z. Man verbinde nun XXIV mit XXVI, und eliminire aus ihnen das z: so ergibt sich eine Gleichung

$$\text{XXVIII)} \quad \beta = \zeta(\mathrm{a}\,,\alpha)$$

in welcher das β durch die bereits bestimmten Werthe des a und des α ausgedrückt ist. Eliminirt man ebenso das z aus XXV und XXVII, so bekommt man

$$\text{XXIX)} \quad b = \zeta(\mathrm{a}\,,\alpha)$$

wo auch das b durch die bereits bestimmten Werthe des a und des α ausgedrückt ist. Ist nun $\zeta(\mathrm{a},\alpha)$ vielförmig, so kann man die einzelnen Formen in der Weise vertheilen, dass die Bedingung $\beta > b$ erfüllt wird. Ist aber $\zeta(\mathrm{a},\alpha)$ nur einförmig, dann ist keine solche Vertheilung möglich. d. h. man bekommt $b = \beta$, was der Aufgabe widerspricht.

Wenn nun die Gleichungen XXIV und XXV wirklich nach z identisch sind, so werden auch die Gleichungen VI und VII erfüllt, die zwei Integrationsgränzen c und γ mögen sein, was sie wollen.

Endlich, nachdem man für a, α, b, β geeignete Werthe hat ausmitteln können, gehe man zu den Gleichungen VIII und IX, und führe bei ihnen die zweifache Integration aus. Die sich ergebenden Integralgleichungen werden aber einander einerlei sein, und so wird man für c und γ auch zwei gleichförmige Ausdrücke erhalten, d. h. man wird im Allgemeinen bekommen

$$\text{XXX)} \quad \gamma = \xi(\mathrm{a}, \alpha, b, \beta) \quad , \quad \text{und} \quad \text{XXXI)} \quad c = \xi(\mathrm{a}\,.\,\alpha\,,b\,,\beta)$$

wo c und γ durch die bereits ermittelten Werthe a, α, b, β ausgedrückt sind. Ist nun $\xi(\mathrm{a},\alpha, b,\beta)$ vielförmig, so kann man die einzelnen Formen in der Weise vertheilen, dass die Bedingung $\gamma > c$ erfüllt wird. Ist aber $\xi(\mathrm{a},\alpha,b,\beta)$ nur einförmig, so ist keine solche Vertheilung möglich, d. h. man bekommt $c = \gamma$. was der Aufgabe widerspricht.

C) Man hätte aber, nachdem die geeigneten Werthe des a und des α ausgemittelt waren, nicht gerade von den zwei Gleichungen IV und V zu den zwei nächsten VI und VII übergehen müssen, sondern man hätte auch einen Sprung machen können zu den Gleichungen VIII und IX. Dabei hätte man versuchen müssen, ob die zwei nach y identischen Gleichungen

$$\text{XXXII)} \int_{\mathrm{a}}^{a} W_{x,y,\gamma} \,.\, dx = 0 \quad , \quad \text{und} \quad \text{XXXIII)} \int_{\mathrm{a}}^{a} W_{x,y,c} \,.\, dx = 0$$

möglich seien. Hier hat man die für a und α gefundenen Werthe als bereits eingeführt zu denken. Sind aber diese beiden nach y identischen Gleichungen möglich, dann sind die Werthe des c und des γ unabhängig von y. Dasselbe gilt auch von den nach y genommenen Differentialquotienten; und somit sind auch die Gleichungen

$$\text{XXXIV)} \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \frac{d_y(W_{x,y,\gamma})}{dy} \,.\, dx = 0 \quad , \quad \text{und XXXV)} \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \frac{d_y(W_{x,y,c})}{dy} \,.\, dx = 0$$

nach y identisch. Man verbinde jetzt XXXII mit XXXIV und ebenso XXXIII mit XXXV, und eliminire y; so bekommt man

$$\text{XXXVI)} \quad \gamma = \varphi(\mathrm{a}\,,\,\alpha) \quad , \quad \text{und} \quad \text{XXXVII)} \quad c = \varphi(\mathrm{a}\,,\,\alpha)$$

mit welchen zwei Gleichungen man ebenso zu verfahren hat, wie vorhin mit XXVIII und XXIX.

Wenn nun die Gleichungen XXXII und XXXIII wirklich nach y identisch sind, so werden auch die Gleichungen VIII und IX erfüllt, die zwei Integrationsgränzen b und β mögen sein, was sie wollen.

Endlich, nachdem man für a, α, c, γ geeignete Werthe hat ausmitteln können, kehre man zurück zu den Gleichungen VI und VII, und führe bei ihnen die zweifache Integration aus. Die sich ergebenden Integralgleichungen werden aber einander einerlei sein, und man wird auch für b und β zwei gleichförmige Ausdrücke

$$\text{XXXVIII)} \quad \beta = \chi(\mathrm{a}\,,\,\alpha\,,\,c\,,\,\gamma) \quad , \quad \text{und} \quad \text{XXXIX)} \quad b = \chi(\mathrm{a}\,,\,\alpha\,,\,c\,,\,\gamma)$$

bekommen. Mit diesen Gleichungen hat man aber zu verfahren, wie vorhin mit XXX und XXXI.

Auf diese Weise ist den sechs Gleichungen IV — IX genügt. Man kann aber auch

Zweitens folgenden Weg einschlagen. Man nehme zuerst die Gleichungen VI und VII vor, und mache den Versuch, ob

A) folgende zwei nach x und z identische Gleichungen möglich sind:

$$W_{x,\beta,z} = 0 \qquad \text{und} \qquad W_{x,b,z} = 0$$

Daraus bestimme man β und b, wie man aus XVI und XVII die Werthe von α und a bestimmt hat. Hierauf kann man

B) zu den Gleichungen IV und V zurückkehren und versuchen, ob folgende zwei nach z identische Gleichungen

$$\int_b^\beta W_{\alpha,y,z} \,.\, dy = 0 \quad , \quad \text{und} \quad \int_b^\beta W_{\mathrm{a},y,z} \,.\, dy = 0$$

möglich sind. Aus diesen, wo man die für b und β gefundenen Werthe als bereits eingeführt zu denken hat, bestimme man die Werthe des a und des α, wie man aus XXIV und XXV die Werthe des β und des b bestimmt hat. Endlich führe man bei VIII und IX die zweifache Integration aus, und bestimme c und γ.

C) Man hätte aber, nachdem die geeigneten Werthe des b und des β ausgemittelt waren, nicht gerade zu den Gleichungen IV und V zurückkehren müssen, sondern man hätte auch zu den Gleichungen VIII und IX vorwärts gehen, und den Versuch machen können, ob folgende zwei nach x identische Gleichungen möglich sind:

$$\int_b^\beta W_{x,y,\gamma} \cdot dy = 0 \quad , \quad \text{und} \quad \int_b^\beta W_{x,y,c} \cdot dy \doteq 0$$

Aus diesen Gleichungen, wo man die für b und β gefundenen Werthe als bereits eingeführt zu denken hat, bestimme man die Werthe des γ und des c. Endlich führe man bei IV und V die zweifache Integration aus, und bestimme α und a.

Auf diese Weise ist abermals den sechs Gleichungen IV — IX genügt. Man kann aber auch

Drittens noch folgenden Weg einschlagen. Man nehme zuerst die Gleichungen VIII und IX vor, und versuche, ob folgende zwei nach x und y identische Gleichungen möglich seien:

$$W_{x,y,\gamma} = 0 \quad , \quad \text{und} \quad W_{x,y,c} = 0$$

Daraus bestimme man γ und c, wie man aus XVI und XVII die Werthe von a und α bestimmt hat. Hierauf dienen die vier Gleichungen IV — VII zur Bestimmung von a , α , b , β. Das betreffende Verfahren ist bereits mitgetheilt.

Zweiter Abschnitt,

wo solche Integrale vorkommen, bei denen die Gränzen der ersten und zweiten Integration Functionen jener Veränderlichen sind, nach welchen die folgenden Integrationen durchgeführt werden sollen.

Untersuchung 15.

§. 65.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen

$$x \,,\, y \,,\, z \,,\, w \,,\, \frac{d_x w}{dx} \,,\, \frac{d_y w}{dy} \,,\, \frac{d_z w}{dz} \,,\, \frac{d_x^2 w}{dx^2} \,,\, \frac{d_x d_y w}{dx \,.\, dy} \,,\, \frac{d_x d_z w}{dx \,.\, dz} \,,\, \ldots\ldots$$

versehener Ausdruck; und man sucht für w eine solche Function der Veränderlichen x, y, z, dass folgendes Integral

$$\text{I)} \quad U = \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \int_{b(x)}^{\beta(x)} \int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} W \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx$$

wo $c(x, y)$ und $\gamma(x, y)$ bekannte Functionen von x und y zugleich, dagegen $b(x)$ und $\beta(x)$ bekannte Functionen von x sind, ein Maximum oder Minimum wird.

Die Werthe von a und α sind als constant zu betrachten, jedoch mit steter Rücksicht, dass $\alpha >$ a.

Die Functionen $\beta(x)$ und $b(x)$ müssen in solcher Beziehung zusammenstehen, dass bei keinem einzigen der von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthe des x die Differenz $\beta(x) - b(x)$ negativ wird. Dieses gilt namentlich auch für die beiden Differenzen

$$\beta(\mathrm{a}) - b(\mathrm{a}) \quad , \quad \text{und } \beta(\alpha) - b(\alpha)$$

Ebenso müssen die Functionen $\gamma(x, y)$ und $c(x, y)$ in solcher Beziehung zusammen stehen, dass bei keinem einzigen der von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthe des

x die Differenz $\gamma(x \,.\, y) - c(x\,,y)$ negativ wird. Dieses gilt auch namentlich für die vier Differenzen

$$\gamma[\mathrm{a}\,,b(\mathrm{a})] - c[\mathrm{a}\,,b(\mathrm{a})] \quad , \quad \gamma[\mathrm{a}\,,\beta(\mathrm{a})] - c[\mathrm{a}\,,\beta(\mathrm{a})]$$
$$\gamma[\alpha\,,b(\alpha)] - c[\alpha\,,b(\alpha)] \quad , \quad \gamma[\alpha\,,\beta(\alpha)] - c[\alpha\,,\beta(\alpha)]$$

Man beachte durch die ganze Untersuchung, dass das vor dem Differential dz stehende z noch keine Function von x und y ist; sondern die Functionen $c(x\,,y)$ und $\gamma(x\,,y)$ treten erst dann an die Stelle des z, wenn nach z integrirt worden ist. Ebenso ist das vor dem Differential dy stehende y noch keine Function von x, sondern die Functionen $b(x)$ und $\beta(x)$ treten erst dann an die Stelle des y, wenn nach y integrirt worden ist.

So lange die beiden Veränderlichen x und y noch allgemein sind, schadet es der Anschaulichkeit nicht, wenn man kurzweg $b\,,\beta\,,c\,,\gamma$ bezüglich statt $b(x)\,,\,\beta(x)\,,\,c(x\,,y)\,,\gamma(x,y)$ setzt. Diese Abkürzungen sind aber unerlaubt, sobald einer der Veränderlichen x oder y specialisirt wird.

Wenn man auch hier die in der 13ten Untersuchung (§. 48) vorgeschlagenen Abkürzungszeichen anwendet, so bekommt man

$$\text{II)}\quad \partial U = \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \Big[\frac{d_w W}{dw} \,.\, \partial w + (\mathrm{I}x)\,\frac{d_x \partial w}{dx} + (\mathrm{I}y)\,\frac{d_y \partial w}{dy} + (\mathrm{I}z)\,\frac{d_z \partial w}{dz}$$
$$+ (\mathrm{II}x^2) \,.\, \frac{d_x^2 \partial w}{dx^2} + (\mathrm{II}xy) \,.\, \frac{d_x d_y \partial w}{dx\,.\,dy} + (\mathrm{II}xz) \,.\, \frac{d_x d_z \partial w}{dx\,.\,dz} + \ldots\ldots \Big] \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx$$

§. 66.

Um letzteren Ausdruck umformen zu können, muss man (man vergleiche das bei zweifachen Integralen angewendete Verfahren §. 30 — 39) vorerst das unter dem dreifachen Integralzeichen stehende Aggregat in folgende acht Theile umsetzen:

1. In einen solchen, wo die Differentiation nach den drei Elementen $x\,,y\,,z$ zugleich durchläuft. Dieser mag durch das Abkürzungszeichen $\dfrac{d_x d_y d_z(\Sigma xyz)}{dx\,.dy\,.dz}$ dargestellt werden.

2. In einen solchen, wo die Differentiation nach den zwei Elementen x und y durchläuft. Dieser mag durch $\dfrac{d_x d_y(\Sigma xy)}{dx\,.\,dy}$ dargestellt werden; und er darf keinen nach z genommenen Differentialquotienten des ∂w enthalten.

3. In einen solchen, wo die Differentiation nach den zwei Elementen x und z durchläuft. Dieser mag durch $\dfrac{d_x d_z(\Sigma xz)}{dx\,.\,dz}$ dargestellt werden; und er darf keinen nach y genommenen Differentialquotienten des ∂w enthalten.

4. In einen solchen, wo die Differentiation nach den zwei Elementen y und z durchläuft. Dieser mag durch $\dfrac{d_y d_z(\Sigma yz)}{dy\,.\,dz}$ dargestellt werden; und er darf keinen nach x genommenen Differentialquotienten des ∂w enthalten.

5. In einen solchen, wo die Differentiation nach dem einzigen Elemente x durchläuft. Dieser mag durch $\dfrac{d_x(\Sigma x)}{dx}$ dargestellt werden; und er darf keinen nach y und keinen nach z genommenen Differentialquotienten des ∂w enthalten.

6. In einen solchen, wo die Differentiation nach dem einzigen Elemente y durchläuft. Dieser mag durch $\frac{d_y(\Sigma y)}{dy}$ dargestellt werden; und er darf keinen nach x und keinen nach z genommenen Differentialquotienten des ∂w enthalten.

7. In einen solchen, wo die Differentiation nach dem einzigen Elemente z durchläuft. Dieser mag durch $\frac{d_z(\Sigma z)}{dz}$ dargestellt werden; und er darf keinen nach x und keinen nach y genommenen Differentialquotienten des ∂w enthalten.

8. In einen solchen, wo die Urfunction ∂w gemeinschaftlicher Factor ist, wo also weder eine nach x, noch eine nach y, noch eine nach z durchlaufende Differentiation vorkommt. Dieser Theil mag durch (Σ) dargestellt werden.

Der Ausdruck II geht also zunächst über in:

$$\text{III)}\quad \partial U = \int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \left[\frac{d_x d_y d_z(\Sigma xyz)}{dx\,.\,dy\,.\,dz} + \frac{d_x d_y(\Sigma xy)}{dx\,.\,dy} + \frac{d_x d_z(\Sigma xz)}{dx\,.\,dz} + \frac{d_y d_z(\Sigma yz)}{dy\,.\,dz}\right.$$
$$\left. + \frac{d_x(\Sigma x)}{dx} + \frac{d_y(\Sigma y)}{dy} + \frac{d_z(\Sigma z)}{dz} + (\Sigma)\right].\,dz\,.\,dy\,.\,dx$$

Auch diese Abkürzungszeichen müssen, wie die bei früheren Anlässen gewählten, aus doppeltem Grunde als zweckmässig erscheinen; denn

1. sie sind mit Merkmalen versehen, welche es möglich machen, dass die Bedeutung und der Ursprung eines jeden dieser Abkürzungszeichen stetsfort erkennbar bleibt; und ausserdem lassen sie sich

2. geradezu auch auf die Untersuchungen ausdehnen, wo vierfache, fünffache etc. Integrale vorkommen.

Man beachte noch, dass, weil c und γ Functionen von x und y, und weil b und β Functionen von x sind, es nicht gleichgiltig ist, in welcher Ordnung man integrirt; sondern man muss zuerst nach z, hierauf nach y, und zuletzt nach x integriren.

§. 67.

Nun muss man den Ausdruck III noch so umgestalten, dass ∂w nach keinem Veränderlichen differentiirt ist, nach welchem auch noch integrirt werden soll; und, wie schon einmal bemerkt, es soll, so lange x und y noch allgemein sind, kurzweg c und γ statt $c(x,y)$ und $\gamma(x,y)$, und ebenso b und β statt $b(x)$ und $\beta(x)$ gesetzt werden.

𝔄) Der Theilsatz $\int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \frac{d_z(\Sigma z)}{dz}.\,dz\,.\,dy\,.\,dx$ lässt sich ohneweiters nach z integriren, und liefert die Gleichung

$$\text{IV)}\quad \int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \frac{d_z(\Sigma z)}{dz}.\,dz\,.\,dy\,.\,dx = \int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)} \left[(\Sigma z)_{x,y,\gamma} - (\Sigma z)_{x,y,c}\right].\,dy\,.\,dx$$

𝔅) Für den Theilsatz $\int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \frac{d_y(\Sigma y)}{dy}.\,dz\,.\,dy\,.\,dx$ bediene man sich des folgenden aus dem Integralcalcul bekannten Satzes:

$$\int_c^\gamma \frac{d_y(\Sigma y)}{dy}.dz = \frac{d_y\left(\int_c^\gamma (\Sigma y).dz\right)}{dy} - \left((\Sigma y)_{x,y,\gamma}.\frac{d_y\gamma}{dy} - (\Sigma y)_{x,y,c}.\frac{d_y c}{dy}\right)$$

Der erste Theilsatz rechts des Gleichheitszeichens lässt eine Integration nach y zu: und so bekommt man

$$\text{V)}.\quad \int_a^\alpha\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \frac{d_y(\Sigma y)}{dy}.dz.dy.dx = \int_a^\alpha\Big[\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)}(\Sigma y)_{x,\beta,z}.dz - \int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)}(\Sigma y)_{x,b,z}.dz\Big].dx$$
$$- \int_a^\alpha\int_{b(x)}^{\beta(x)}\Big[(\Sigma y)_{x,y,\gamma}.\frac{d_y\gamma}{dy} - (\Sigma y)_{x,y,c}.\frac{d_y c}{dy}\Big].dy.dx$$

(𝔖) Etwas weitläufiger ist die Behandlung des Theilsatzes $\int_a^\alpha\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)}\frac{d_x(\Sigma x)}{dx}.dz.dy.dx$

Man nehme zuerst folgenden aus dem Integralcalcul bekannten Satz:

$$\int_{b(x)}^{\beta(x)} \frac{d_x\left(\int_c^\gamma(\Sigma x).dz\right)}{dx}.dy = \frac{d\left(\int_b^\beta\int_c^\gamma(\Sigma x).dz.dy\right)}{dx} - \Big(\int_c^\gamma(\Sigma x).dz\Big)_\beta.\frac{d\beta}{dx} + \Big(\int_c^\gamma(\Sigma x).dz\Big)_b.\frac{db}{dx}$$

Weil die Quotienten $\frac{d\beta}{dx}$ und $\frac{db}{dx}$ nur Functionen von x sind, und kein z enthalten; so kann man sie da, wo nur nach z integrirt wird, auch unter das Integralzeichen setzen. Letztere Gleichung nimmt also folgende Form an

$$\int_{b(x)}^{\beta(x)} \frac{d_x\left(\int_c^\gamma(\Sigma x).dz\right)}{dx}.dy = \frac{d\left(\int_b^\beta\int_c^\gamma(\Sigma x).dz.dy\right)}{dx} - \int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)}(\Sigma x)_{x,\beta,z}.\frac{d\beta}{dx}.dz + \int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)}(\Sigma x)_{x,b,z}.\frac{db}{dx}.dz$$

In dieser Gleichung kommt aber der Ausdruck, um dessen Umgestaltung es sich handelt, nicht vor; und um ihn hineinzubringen, muss man noch folgenden aus dem Integralcalcul bekannten Satz

$$\int_{b(x)}^{\beta(x)} \frac{d_x\left(\int_c^\gamma(\Sigma x).dz\right)}{dx}.dy = \int_b^\beta\int_c^\gamma \frac{d_x(\Sigma x)}{dx}.dz.dy + \int_b^\beta\Big[(\Sigma x)_{x,y,\gamma}.\frac{d_x\gamma}{dx} - (\Sigma x)_{x,y,c}.\frac{d_x c}{dx}\Big].dx$$

zu Hilfe nehmen. Man eliminire jetzt $\int_b^\beta \frac{d_x\left(\int_c^\gamma(\Sigma x).dz\right)}{dx}.dy$ aus den beiden letzten Gleichungen, führe die gehörigen Übertragungen aus, und integrire beiderseits nach x: so bekommt man

$$\text{VI)}\quad \int_a^\alpha\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)}\frac{d_x(\Sigma x)}{dx}.dz.dy.dx = \int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)}\int_{c(\alpha,y)}^{\gamma(\alpha,y)}(\Sigma x)_{\alpha,y,z}.dz.dy - \int_{b(a)}^{\beta(a)}\int_{c(a,y)}^{\gamma(a,y)}(\Sigma x)_{a,y,z}.dz.dy$$
$$- \int_a^\alpha\Big[\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)}(\Sigma x)_{x,\beta,z}.\frac{d\beta}{dx}.dz - \int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)}(\Sigma x)_{x,b,z}.\frac{db}{dx}.dz\Big].dx$$
$$- \int_a^\alpha\int_{b(x)}^{\beta(x)}\Big[(\Sigma x)_{x,y,\gamma}.\frac{d_x\gamma}{dx} - (\Sigma x)_{x,y,c}.\frac{d_x c}{dx}\Big].dy.dx$$

D) Wenn man in der Gleichung V den Quotienten $\frac{d_z(\Sigma yz)}{dz}$ statt (Σy) einsetzt, und dann noch überall, wo es möglich ist, nach z integrirt: so bekommt man

$$\text{VII)}\quad \int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \frac{d_y d_z(\Sigma yz)}{dy.dz} . dz . dy . dx =$$

$$\int_a^{\alpha}\left[(\Sigma yz)_{x,\beta,\gamma(x,\beta)} - (\Sigma yz)_{x,\beta,c(x,\beta)} - (\Sigma yz)_{x,b,\gamma(x,b)} + (\Sigma yz)_{x,b,c(x,b)}\right] . dx$$

$$-\int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\left[\left(\frac{d_z(\Sigma yz)}{dz}\right)_{x,y,\gamma} . \frac{d_y\gamma}{dy} - \left(\frac{d_z(\Sigma yz)}{dz}\right)_{x,y,c} . \frac{d_y c}{dy}\right] . dy . dx$$

E) Wenn man in der Gleichung VI den Quotienten $\frac{d_z(\Sigma xz)}{dz}$ statt (Σx) einsetzt, und auch dann überall, wo es möglich ist, nach z integrirt: so bekommt man

$$\text{VIII)}\quad \int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \frac{d_x d_z(\Sigma xz)}{dx.dz} . dz . dy . dx =$$

$$\int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)}\left[(\Sigma xz)_{\alpha,y,\gamma(\alpha,y)} - (\Sigma xz)_{\alpha,y,c(\alpha,y)}\right] . dy - \int_{b(a)}^{\beta(a)}\left[(\Sigma xz)_{a,y,\gamma(a,y)} - (\Sigma xz)_{a,y,c(a,y)}\right] . dy$$

$$-\int_a^{\alpha}\left[\left[(\Sigma xz)_{x,\beta,\gamma(x,\beta)} - (\Sigma xz)_{x,\beta,c(x,\beta)}\right]\frac{d\beta}{dx} - \left[(\Sigma xz)_{x,b,\gamma(x,b)} - (\Sigma xz)_{x,b,c(x,b)}\right]\frac{db}{dx}\right] . dx$$

$$-\int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\left[\left(\frac{d_z(\Sigma xz)}{dz}\right)_{x,y,\gamma} . \frac{d_x\gamma}{dx} - \left(\frac{d_z(\Sigma xz)}{dz}\right)_{x,y,c} . \frac{d_x c}{dx}\right] . dx$$

F) Die Behandlung von $\int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \frac{d_x d_y(\Sigma xy)}{dx.dy} . dz . dy . dx$ ist jedoch etwas weitläufiger, als die der beiden vorigen Ausdrücke. Man setze den Quotienten $\frac{d_y(\Sigma xy)}{dy}$ statt (Σx) in VI ein, so bekommt man vorerst

$$\text{IX)}\quad \int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \frac{d_x d_y(\Sigma xy)}{dx.dy} . dz . dy . dx =$$

$$\int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)}\int_{c(\alpha,y)}^{\gamma(\alpha,y)}\left(\frac{d_y(\Sigma xy)}{dy}\right)_{\alpha,y,z} . dz . dy - \int_{b(a)}^{\beta(a)}\int_{c(a,y)}^{\gamma(a,y)}\left(\frac{d_y(\Sigma xy)}{dy}\right)_{a,y,z} . dz . dy$$

$$-\int_a^{\alpha}\left[\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)}\left(\frac{d_y(\Sigma xy)}{dy}\right)_{x,\beta,z} . \frac{d\beta}{dx} . dz - \int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)}\left(\frac{d_y(\Sigma xy)}{dy}\right)_{x,b,z} . \frac{db}{dx} . dz\right] . dx$$

$$-\int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\left[\left(\frac{d_y(\Sigma xy)}{dy}\right)_{x,y,\gamma} . \frac{d_x\gamma}{dx} - \left(\frac{d_y(\Sigma xy)}{dy}\right)_{x,y,c} . \frac{d_x c}{dx}\right] . dy . dx$$

Nun ist

$$\frac{d_y\left(\int_{c(\alpha,y)}^{\gamma(\alpha,y)}(\Sigma xy)_{\alpha,y,z} . dz\right)}{dy} = \int_{c(\alpha,y)}^{\gamma(\alpha,y)}\left(\frac{d_y(\Sigma xy)}{dy}\right)_{\alpha,y,z} . dz + (\Sigma xy)_{\alpha,y,\gamma(\alpha,y)} . \frac{d_y\gamma(\alpha,y)}{dy} - (\Sigma xy)_{\alpha,y,c(\alpha,y)} . \frac{d_y c(\alpha,y)}{dy}$$

und

$$\frac{d_y\left(\int_{c(\mathfrak{a},y)}^{\gamma(\mathfrak{a},y)}(\Sigma xy)_{\mathfrak{a},y,z}\,.\,dz\right)}{dy}=\int_{c(\mathfrak{a},y)}^{\gamma(\mathfrak{a},y)}\left(\frac{d_y(\Sigma xy)}{dy}\right)_{\mathfrak{a},y,z}.\,dz+(\Sigma xy)_{\mathfrak{a},y,\gamma(\mathfrak{a},y)}\,.\,\frac{d_y\gamma(\mathfrak{a},y)}{dy}-(\Sigma xy)_{\mathfrak{a},y,c(\mathfrak{a},y)}\,.\,\frac{d_yc(\mathfrak{a},y)}{dy}$$

Ferner ist

$$\frac{d_y\left((\Sigma xy)_{x,y,\gamma}\,.\,\frac{d_x\gamma}{dx}\right)}{dy}=\left(\frac{d_y(\Sigma xy)}{dy}\,.\,\frac{d_x\gamma}{dx}+\frac{d_z(\Sigma xy)}{dz}\,.\,\frac{d_x\gamma}{dx}\,.\,\frac{d_y\gamma}{dy}+(\Sigma xy)\,.\,\frac{d_xd_y\gamma}{dx\,.\,dy}\right)_{x,y,\gamma}$$

und

$$\frac{d_y\left((\Sigma xy)_{x,y,c}\,.\,\frac{d_xc}{dx}\right)}{dy}=\left(\frac{d_y(\Sigma xy)}{dy}\,.\,\frac{d_xc}{dx}+\frac{d_z(\Sigma xy)}{dz}\,.\,\frac{d_xc}{dx}\,.\,\frac{d_yc}{dy}+(\Sigma xy)\,.\,\frac{d_xd_yc}{dx\,.\,dy}\right)_{x,y,c}$$

Jetzt trage man mittelst der vier letzten Gleichungen die gehörigen Substitutionen in IX ein, und integrire an den geeigneten Stellen nach y: so bekommt man

$$\text{X)}\quad\int_{\mathfrak{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)}\frac{d_xd_y(\Sigma xy)}{dx\,.\,dy}\,.\,dz\,.\,dy\,.\,dx=$$

$$\int_{c(a,\beta[a])}^{\gamma(a,\beta[a])}(\Sigma xy)_{a,\beta(a),z}\,.\,dz-\int_{c(a,b[a])}^{\gamma(a,b[a])}(\Sigma xy)_{a,b(a),z}\,.\,dz-\int_{c(\mathfrak{a},\beta[\mathfrak{a}])}^{\gamma(\mathfrak{a},\beta[\mathfrak{a}])}(\Sigma xy)_{\mathfrak{a},\beta(\mathfrak{a}),z}\,.\,dz+\int_{c(\mathfrak{a},b[\mathfrak{a}])}^{\gamma(\mathfrak{a},b[\mathfrak{a}])}(\Sigma xy)_{\mathfrak{a},b(\mathfrak{a}),z}\,.\,dz$$

$$-\int_{b(a)}^{\beta(a)}\left[(\Sigma xy)_{a,y,\gamma(a,y)}\,.\,\frac{d_y\gamma(a,y)}{dy}-(\Sigma xy)_{a,y,c(a,y)}\,.\,\frac{d_yc(a,y)}{dy}\right].\,dy$$

$$+\int_{b(\mathfrak{a})}^{\beta(\mathfrak{a})}\left[(\Sigma xy)_{\mathfrak{a},y,\gamma(\mathfrak{a},y)}\,.\,\frac{d_y\gamma(\mathfrak{a},y)}{dy}-(\Sigma xy)_{\mathfrak{a},y,c(\mathfrak{a},y)}\,.\,\frac{d_yc(\mathfrak{a},y)}{dy}\right].\,dy$$

$$-\int_{\mathfrak{a}}^{a}\Bigg[(\Sigma xy)_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}\,.\left(\frac{d_x\gamma}{dx}\right)_{x,\beta}-(\Sigma xy)_{x,\beta,c(x,\beta)}\,.\left(\frac{d_xc}{dx}\right)_{x,\beta}-(\Sigma xy)_{x,b,\gamma(x,b)}\,.\left(\frac{d_x\gamma}{dx}\right)_{x,b}$$
$$+(\Sigma xy)_{x,b,c(x,b)}\,.\left(\frac{d_xc}{dx}\right)_{x,b}\Bigg].\,dx$$

$$-\int_{\mathfrak{a}}^{a}\left[\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)}\left(\frac{d_y(\Sigma xy)}{dy}\right)_{x,\beta,z}.\,\frac{d\beta}{dx}\,.\,dz-\int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)}\left(\frac{d_y(\Sigma xy)}{dy}\right)_{x,b,z}.\,\frac{db}{dx}\,.\,dz\right].\,dx$$

$$+\int_{\mathfrak{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\left[\left(\frac{d_z(\Sigma xy)}{dz}\,.\,\frac{d_x\gamma}{dx}\,.\,\frac{d_y\gamma}{dy}+(\Sigma xy)\,.\,\frac{d_xd_y\gamma}{dx\,.\,dy}\right)_{x,y,\gamma}-\left(\frac{d_z(\Sigma xy)}{dz}\,.\,\frac{d_xc}{dx}\,.\,\frac{d_yc}{dy}+(\Sigma xy)\,.\,\frac{d_xd_yc}{dx\,.\,dy}\right)_{x,y,c}\right].\,dy\,.\,dx$$

(G) Wenn man in dieser Gleichung den Quotienten $\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}$ statt (Σxy) einsetzt, und dann noch überall, wo es möglich ist, nach z integrirt; so bekommt man

$$\text{XI)}\quad\int_{\mathfrak{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)}\frac{d_xd_yd_z(\Sigma xyz)}{dx\,.\,dy\,.\,dz}\,.\,dz\,.\,dy\,.\,dx=$$

$$(\Sigma xyz)_{a,\beta(a),\gamma(a,\beta[a])}-(\Sigma xyz)_{a,\beta(a),c(a,\beta[a])}-(\Sigma xyz)_{a,b(a),\gamma(a,b[a])}+(\Sigma xyz)_{a,b(a),c(a,b[a])}$$
$$-(\Sigma xyz)_{\mathfrak{a},\beta(\mathfrak{a}),\gamma(\mathfrak{a},\beta[\mathfrak{a}])}+(\Sigma xyz)_{\mathfrak{a},\beta(\mathfrak{a}),c(\mathfrak{a},\beta[\mathfrak{a}])}+(\Sigma xyz)_{\mathfrak{a},b(\mathfrak{a}),\gamma(\mathfrak{a},b[\mathfrak{a}])}-(\Sigma xyz)_{\mathfrak{a},b(\mathfrak{a}),c(\mathfrak{a},b[\mathfrak{a}])}$$

$$-\int_{b(a)}^{\beta(a)} \Big[\Big(\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\Big)_{a,y,\gamma(a,y)} \cdot \frac{d_y\gamma(a,y)}{dy} - \Big(\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\Big)_{a,y,c(a,y)} \cdot \frac{d_y c(a,y)}{dy}\Big] . dy$$

$$+\int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} \Big[\Big(\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\Big)_{\mathrm{a},y,\gamma(\mathrm{a},y)} \cdot \frac{d_y\gamma(\mathrm{a}.y)}{dy} - \Big(\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\Big)_{\mathrm{a},y,c(\mathrm{a},y)} \cdot \frac{d_y c(\mathrm{a}.y)}{dy}\Big] . dy$$

$$-\int_{\mathrm{a}}^{a}\Big[\Big(\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\cdot\frac{d_x\gamma}{dx}+\frac{d_y(\Sigma xyz)}{dy}\cdot\frac{d\beta}{dx}\Big)_{x,\beta,\gamma(x,\beta)} - \Big(\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\cdot\frac{d_x c}{dy}+\frac{d_y(\Sigma xyz)}{dy}\cdot\frac{d\beta}{dx}\Big)_{x,\beta,c(x,\beta)}$$

$$-\Big(\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\cdot\frac{d_x\gamma}{dx}+\frac{d_y(\Sigma xyz)}{dy}\cdot\frac{db}{dx}\Big)_{x,b,\gamma(x,b)}+\Big(\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\cdot\frac{d_xc}{dx}+\frac{d_y(\Sigma xyz)}{dy}\cdot\frac{db}{dx}\Big)_{x,b,c(x,b)}\Big].dx$$

$$+\int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\Big[\Big(\frac{d_z^2(\Sigma xyz)}{dz^2}\cdot\frac{d_x\gamma}{dx}\cdot\frac{d_y\gamma}{dy}+\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\cdot\frac{d_xd_y\gamma}{dx.dy}\Big)_{x,y,\gamma}-\Big(\frac{d_z^2(\Sigma xyz)}{dz^2}\cdot\frac{d_xc}{dx}\cdot\frac{d_yc}{dy}+\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\cdot\frac{d_xd_yc}{dx.dy}\Big)_{x,y,c}\Big].dy.dx$$

§. 68.

Wenn man jetzt die Resultate des vorigen Paragraph's zusammenstellt; so ergibt sich endlich

XII) $\partial U =$

$$(\Sigma xyz)_{a,\beta(a),\gamma(a,\beta[a])} - (\Sigma xyz)_{a,\beta(a),c(a,\beta[a])} - (\Sigma xyz)_{a,b(a),\gamma(a,b[a])} + (\Sigma xyz)_{a,b(a),c(a,b[a])}$$

$$-(\Sigma xyz)_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),\gamma(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}+(\Sigma xyz)_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),c(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}+(\Sigma xyz)_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),\gamma(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}-(\Sigma xyz)_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),c(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}$$

$$+\int_{c(a,\beta[a])}^{\gamma(a,\beta[a])}(\Sigma xy)_{a,\beta(a),z}.dz - \int_{c(a,b[a])}^{\gamma(a,b[a])}(\Sigma xy)_{a,b(a),z}.dz - \int_{c(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}^{\gamma(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}(\Sigma xy)_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),z}.dz + \int_{c(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}^{\gamma(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}(\Sigma xy)_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),z}.dz$$

$$+\int_{b(a)}^{\beta(a)}\Big[\Big\{(\Sigma xz)-\Big((\Sigma xy)+\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\Big)\frac{d_y\gamma}{dy}\Big\}_{a,y,\gamma(a,y)}-\Big\{(\Sigma xz)-\Big((\Sigma xy)+\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\Big)\frac{d_yc}{dy}\Big\}_{a,y,c(a,y)}\Big].dy$$

$$-\int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}\Big[\Big\{(\Sigma xz)-\Big((\Sigma xy)+\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\Big)\frac{d_y\gamma}{dy}\Big\}_{\mathrm{a},y,\gamma(\mathrm{a},y)}-\Big\{(\Sigma xz)-\Big((\Sigma xy)+\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\Big)\frac{d_yc}{dy}\Big\}_{\mathrm{a},y,c(\mathrm{a},y)}\Big].dy$$

$$+\int_{\mathrm{a}}^{a}\Big[\Big\{(\Sigma yz)-\Big((\Sigma xz)+\frac{d_y(\Sigma xyz)}{dy}\Big)\frac{d\beta}{dx}-\Big((\Sigma xy)+\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\Big)\frac{d_x\gamma}{dx}\Big\}_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}$$

$$-\Big\{(\Sigma yz)-\Big((\Sigma xz)+\frac{d_y(\Sigma xyz)}{dy}\Big)\frac{d\beta}{dx}-\Big((\Sigma xy)+\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\Big)\frac{d_xc}{dx}\Big\}_{x,\beta,c(x,\beta)}$$

$$-\Big\{(\Sigma yz)-\Big((\Sigma xz)+\frac{d_y(\Sigma xyz)}{dy}\Big)\frac{db}{dx}-\Big((\Sigma xy)+\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\Big)\frac{d_x\gamma}{dx}\Big\}_{x,b,\gamma(x,b)}$$

$$+\Big\{(\Sigma yz)-\Big((\Sigma xz)+\frac{d_y(\Sigma xyz)}{dy}\Big)\frac{db}{dx}-\Big((\Sigma xy)+\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\Big)\frac{d_xc}{dx}\Big\}_{x,b,c(x,b)}\Big].dx$$

$$+\int_{b(a)}^{\beta(a)}\int_{c(a,y)}^{\gamma(a,y)}(\Sigma x)_{a,y,z}.dz.dy-\int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}\int_{c(\mathrm{a},y)}^{\gamma(\mathrm{a},y)}(\Sigma x)_{\mathrm{a},y,z}.dz.dy$$

$$+\int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)}\Big[\Big\{(\Sigma y)-\Big((\Sigma x)+\frac{d_y(\Sigma xy)}{dy}\Big)\frac{d\beta}{dx}\Big\}_{x,\beta,z}\Big].dz.dx$$

$$-\int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)}\Big[\Big\{(\Sigma y)-\Big((\Sigma x)+\frac{d_y(\Sigma xy)}{dy}\Big)\frac{db}{dx}\Big\}_{x,b,z}\Big].dz.dx$$

$$+\int\limits_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int\limits_{b(x)}^{\beta(x)}\Bigg[\Big\{(\Sigma z)-\Big((\Sigma y)+\frac{d_z(\Sigma yz)}{dz}\Big)\frac{d_y\gamma}{dy}-\Big((\Sigma x)+\frac{d_z(\Sigma xz)}{dz}\Big)\frac{d_x\gamma}{dx}$$

$$+\Big((\Sigma xy+\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\Big)\frac{d_x d_y\gamma}{dx.dy}+\Big(\frac{d_z(\Sigma xy)}{dz}+\frac{d_z^2(\Sigma xyz)}{dz^2}\Big)\frac{d_x\gamma}{dx}\cdot\frac{d_y\gamma}{dy}\Big\}_{x,y,\gamma}$$

$$-\Big\{(\Sigma z)-\Big((\Sigma y)+\frac{d_z(\Sigma yz)}{dz}\Big)\frac{d_y c}{dy}-\Big((\Sigma x)+\frac{d_z(\Sigma xz)}{dz}\Big)\frac{d_x c}{dx}$$

$$+\Big((\Sigma xy)+\frac{d_z(\Sigma xyz)}{dz}\Big)\frac{d_x d_y c}{dx.dy}+\Big(\frac{d_z(\Sigma xy)}{dz}+\frac{d_z^2(\Sigma xyz)}{dz^2}\Big)\frac{d_x c}{dx}\cdot\frac{d_y c}{dy}\Big\}_{x,y,c}\Bigg].dy.dx$$

$$+\int\limits_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int\limits_{b(x)}^{\beta(x)}\int\limits_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)}(\Sigma).dz.dy.dx$$

§. 69.

Nun darf das ∂w nach keinem Veränderlichen differentiirt sein, nach welchem auch noch integrirt werden muss. Man weiss aber (aus §. 66):

1. Bei den, unter den beiden einfachen Integralzeichen $\int\limits_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)}$ und $\int\limits_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}$ stehenden Ausdrücken (Σxy) und (Σxyz) können Differentialquotienten des ∂w vorkommen, welche nach y genommen sind.

2. Bei den, unter dem einfachen Integralzeichen $\int\limits_{\mathrm{a}}^{\alpha}$ stehenden Ausdrücken (Σxy), (Σxz), (Σxyz) können Differentialquotienten des ∂w vorkommen, welche nach x genommen sind.

3. Bei den, unter den beiden doppelten Integralzeichen $\int\limits_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int\limits_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)}$ und $\int\limits_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int\limits_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)}$ stehenden, Ausdrücken (Σx) und (Σxy) können solche Differentialquotienten des ∂w vorkommen, welche nach x, aber keine solche, welche nach z genommen sind.

4. Bei den, unter dem doppelten Integralzeichen $\int\limits_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int\limits_{b(x)}^{\beta(x)}$ stehenden Ausdrücken (Σx), (Σy), (Σxy), (Σxz), (Σyz) und (Σxyz) können solche Differentialquotienten des ∂w vorkommen, welche nur nach x, oder solche, welche nur nach y, oder solche, welche nach x und y zugleich genommen sind.

In dergleichen Fällen muss man die betreffenden Theilsätze (nach Anleitung des §. 67) abermals umformen, bis kein ∂w mehr nach einem Veränderlichen differentiirt ist, nach welchem auch noch integrirt werden soll. (Man vergleiche §. 38.)

Die hiesige ganz allgemein gehaltene Untersuchung wird in der nun folgenden (§. 70 und 71) und im Nachtrage (§. 91 und 94) noch näher specialisirt werden.

Untersuchung 16.

§. 70.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen x, y, z, w, $\frac{d_x w}{dx}$, $\frac{d_y w}{dy}$, $\frac{d_z w}{dz}$ versehener Ausdruck; und man sucht für w eine solche Function von x, y, z, dass folgendes Integral

$$\text{I)} \quad U = \int_{a}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} W \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx$$

wo $b(x)$, $\beta(x)$, $c(x, y)$, $\gamma(x, y)$ bestimmt vorgeschriebene Functionen der betreffenden Veränderlichen sind, ein Maximum oder Minimum wird.

Hier bekommt man zunächst

$$\text{II)} \quad \partial U = \int_{a}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \left[\frac{d_w W}{dw} dw + (\mathrm{I}x)\frac{d_x \partial w}{dx} + (\mathrm{I}y)\frac{d_y \partial w}{dy} + (\mathrm{I}z)\frac{d_z \partial w}{dz}\right] . dz \,.\, dy \,.\, dx$$

Daraus folgt weiter

$$\text{III)} \quad \partial U = \int_{a}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \left[\frac{d_x[(\mathrm{I}x) . \partial w]}{dx} + \frac{d_y[(\mathrm{I}y) . \partial w]}{dy} + \frac{d_z[(\mathrm{I}z) . \partial w]}{dz}\right.$$
$$\left.\left(\frac{d_w W}{dw} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy} - \frac{d_z(\mathrm{I}z)}{dz}\right) . \partial w\right] . dz \,.\, dy \,.\, dx$$

Wenn man diese Gleichung mit Gleichung III der vorigen Untersuchung vergleicht, so erkennt man, dass

$$(\Sigma xyz) = 0 \quad , \quad (\Sigma xy) = 0 \quad , \quad (\Sigma xz) = 0 \quad , \quad (\Sigma yz) = 0 \; ,$$
$$(\Sigma x) = (\mathrm{I}x) \,.\, \partial w \quad , \quad (\Sigma y) = (\mathrm{I}y) \,.\, \partial w \quad , \quad (\Sigma z) = (\mathrm{I}z) \,.\, \partial w$$

und

$$(\Sigma) = \left(\frac{d_w W}{dw} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy} - \frac{d_z(\mathrm{I}z)}{dz}\right) . \partial w$$

ist. Die allgemeine Formel XII der vorigen Untersuchung geht also diesmal über in

$$\text{IV)} \quad \partial U = \int_{b(a)}^{\beta(a)}\int_{c(a,y)}^{\gamma(a,y)} (\mathrm{I}x)_{a,y,z} \,.\, \partial w_{a,y,z} \,.\, dz \,.\, dy - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}\int_{c(\mathrm{a},y)}^{\gamma(\mathrm{a},y)} (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y,z} \,.\, \partial w_{\mathrm{a},y,z} \,.\, dz \,.\, dy$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)} \left((\mathrm{I}y) - (\mathrm{I}x)\frac{d\beta}{dx}\right)_{x,\beta,z} . \partial w_{x,\beta,z} \,.\, dz \,.\, dx - \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)} \left((\mathrm{I}y) - (\mathrm{I}x)\frac{db}{dx}\right)_{x,b,z} . \partial w_{x,b,z} \,.\, dz \,.\, dx$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)} \left[\left((\mathrm{I}z) - (\mathrm{I}y)\frac{d_y\gamma}{dy} - (\mathrm{I}x)\frac{d_x\gamma}{dx}\right)_{x,y,\gamma} . \partial w_{x,y,\gamma} - \left((\mathrm{I}z) - (\mathrm{I}y)\frac{d_y c}{dy} - (\mathrm{I}x)\frac{d_x c}{dx}\right)_{x,y,c} . \partial w_{x,y,c}\right] . dy \,.\, dx$$
$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \left[\frac{d_w W}{dw} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy} - \frac{d_z(\mathrm{I}z)}{dz}\right] . \partial w \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx$$

Das unter dem dreifachen Integralzeichen stehende Aggregat liefert die Hauptgleichung

$$\text{V)} \quad \frac{d_w W}{dw} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy} - \frac{d_z(\mathrm{I}z)}{dz} = 0$$

welches dieselbe ist, wie in der 13ten Untersuchung, wo alle sechs Integrationsgränzen constant waren.

Alle mit den zweifachen Integralzeichen versehenen Theilsätze der Gleichung IV bilden zusammen die Gränzengleichung.

§. 71.

Berücksichtigt man die Hauptgleichung, so bekommt man für das Prüfungsmittel im Allgemeinen folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\text{VI)}\quad \delta^2 U = & \int_{b(a)}^{\beta(a)}\int_{c(a,y)}^{\gamma(a,y)} [(\mathrm{I}x)_{a,y,z} \,.\, \delta^2 w_{a,y,z} + \eta_{a,y,z} \,.\, \delta w^2_{a,y,z}] \,.\, dz \,.\, dy \\
& - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}\int_{c(\mathrm{a},y)}^{\gamma(\mathrm{a},y)} [(\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y,z} \,.\, \delta^2 w_{\mathrm{a},y,z} + \eta_{\mathrm{a},y,z} \,.\, \delta w^2_{\mathrm{a},y,z}] \,.\, dz \,.\, dy \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)} \Big[\Big((\mathrm{I}y) - (\mathrm{I}x)\frac{d\beta}{dx}\Big)_{x,\beta,z} \,.\, \delta^2 w_{x,\beta,z} + \Big(\omega - \eta\frac{d\beta}{dx}\Big)_{x,\beta,z} \,.\, \delta w^2_{x,\beta,z} \Big] \,.\, dz \,.\, dx \\
& - \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)} \Big[\Big((\mathrm{I}y) - (\mathrm{I}x)\frac{db}{dx}\Big)_{x,b,z} \,.\, \delta^2 w_{x,b,z} + \Big(\omega - \eta\frac{db}{dx}\Big)_{x,b,z} \,.\, \delta w^2_{x,b,z} \Big] \,.\, dz \,.\, dx \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)} \Big[\Big((\mathrm{I}z) - (\mathrm{I}y)\frac{d_y\gamma}{dy} - (\mathrm{I}x)\frac{d_x\gamma}{dx}\Big)_{x,y,\gamma} \,.\, \delta^2 w_{x,y,\gamma} + \Big(\lambda - \omega\frac{d_y\gamma}{dy} - \eta\frac{d_x\gamma}{dx}\Big)_{x,y,\gamma} \,.\, \delta w^2_{x,y,\gamma} \\
& - \Big((\mathrm{I}z) - (\mathrm{I}y)\frac{d_y c}{dy} - (\mathrm{I}x)\frac{d_x c}{dx}\Big)_{x,y,c} \,.\, \delta^2 w_{x,y,c} - \Big(\lambda - \omega\frac{d_y c}{dy} - \eta\frac{d_x c}{dx}\Big)_{x,y,c} \,.\, \delta w^2_{x,y,c} \Big] \,.\, dy \,.\, dx \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \Big[\mathfrak{A} \,.\, \Big(\frac{d_z\delta w}{dz} + \mathfrak{B}\frac{d_y\delta w}{dy} + \mathfrak{C}\frac{d_x\delta w}{dx} + \mathfrak{D} \,.\, \delta w\Big)^2 \\
& + \mathfrak{E} \,.\, \Big(\frac{d_y\delta w}{dy} + \mathfrak{F}\frac{d_x\delta w}{dx} + \mathfrak{G} \,.\, \delta w\Big)^2 + \mathfrak{H} \,.\, \Big(\frac{d_x\delta w}{dx} + \mathfrak{J} \,.\, \delta w\Big)^2 \Big] \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx
\end{aligned}$$

Mit diesem Ausdrucke ist aber noch folgende Gleichung

$$\text{VII)}\quad \mathrm{L} - \frac{d_x\eta}{dx} - \frac{d_y\omega}{dy} - \frac{d_z\lambda}{dz} - \mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{D}^2 - \mathfrak{E} \,.\, \mathfrak{G}^2 - \mathfrak{H} \,.\, \mathfrak{J}^2 = 0$$

zu verbinden; und man erkennt, dass, wie in der 13ten Untersuchung (§. 49 — 53), so auch hier, zwei der drei Stücke η, ω, λ willkürlich sind.

Die Bedeutung von L, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{J}$ ist bereits (aus §. 49) bekannt.

Es wären nun noch einzelne Gränzfälle aufzustellen und durchzuführen, was jedoch in Folge alles Vorhergehenden unterbleiben kann.

Untersuchung 17.

§. 72.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen

$$x\,,\ y\,,\ z\,;\ w\,,\ \frac{d_x w}{dx}\,,\ \frac{d_y w}{dy}\,;\ \frac{d_z w}{dz}\,,\ \frac{d_x^2 w}{dx^2}\,.\ \frac{d_x d_y w}{dx \,.\, dy}\,,\ \frac{d_x d_z w}{dx \,.\, dz}\,,\ \ldots\ldots$$

versehener Ausdruck; und man sucht für w eine solche Function der drei Veränderlichen x, y, z, und zugleich für $c(x, y)$ und $\gamma(x, y)$ solche Functionen von x und y, dass folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_{a}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} W \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Man setze, so lange x und y noch allgemein sind, kurzweg b, β, c, γ bezüglich statt $b(x)$, $\beta(x)$, $c(x,y)$, $\gamma(x,y)$: so bekommt man

$$\text{II)}\quad \partial U = \int_{a}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)} [W_{x,y,\gamma} \,.\, \partial\gamma - W_{x,y,c} \,.\, \partial c] \,.\, dy \,.\, dx + \int_{a}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \partial W \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx$$

und

$$\text{III)}\quad \partial^2 U = \int_{a}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)} \Big[W_{x,y,\gamma} \,.\, \partial^2\gamma + 2 \,.\, \partial W_{x,y,\gamma} \,.\, \partial\gamma + \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,y,\gamma} \,.\, \partial\gamma^2$$
$$- W_{x,y,c} \,.\, \partial^2 c - 2 \,.\, \partial W_{x,y,c} \,.\, \partial c - \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,y,c} \,.\, \partial c^2 \Big] \,.\, dy \,.\, dx$$
$$+ \int_{a}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \partial^2 W \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx$$

Hier ist bekanntlich

$$\text{IV)}\quad \partial W = \frac{d_w W}{dw}\partial w + (\mathrm{I}x)\frac{d_x \partial w}{dx} + (\mathrm{I}y)\frac{d_y \partial w}{dy} + (\mathrm{I}z)\frac{d_z \partial w}{dz} + (\mathrm{II}x^2)\frac{d_x^2 \partial w}{dx^2}$$
$$+ (\mathrm{II}xy)\frac{d_x d_y \partial w}{dx \,.\, dy} + (\mathrm{II}xz)\frac{d_x d_z \partial w}{dx \,.\, dz} + (\mathrm{II}y^2)\frac{d_y^2 \partial w}{dy^2} + (\mathrm{II}yz)\frac{d_y d_z \partial w}{dy \,.\, dz}$$
$$+ (\mathrm{II}z^2)\frac{d_z^2 \partial w}{dz^2} + (\mathrm{III}x^3)\frac{d_x^3 \partial w}{dx^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

und

$$\text{V)}\quad \partial^2 W = \frac{d_w W}{dw} \,.\, \partial^2 w + (\mathrm{I}x)\frac{d_x \partial^2 w}{dx} + (\mathrm{I}y)\frac{d_y \partial^2 w}{dy} + (\mathrm{I}z)\frac{d_z \partial^2 w}{dz} + (\mathrm{II}x^2)\frac{d_x^2 \partial^2 w}{dx^2}$$
$$+ (\mathrm{II}xy)\frac{d_x d_y \partial^2 w}{dx \,.\, dy} + (\mathrm{II}xz)\frac{d_x d_z \partial^2 w}{dx \,.\, dz} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \mathrm{M}_1 \,.\, \partial w^2 + 2\,\mathrm{M}_2 \,.\, \partial w \,.\, \frac{d_x \partial w}{dx} + 2\,\mathrm{M}_3 \,.\, \partial w \,.\, \frac{d_y \partial w}{dy} + \ldots\ldots$$

Weil ferner im Ausdrucke W das z nicht nur unmittelbar, sondern auch mittelbar, nämlich mittelst w, $\frac{d_x w}{dx}$, $\frac{d_y w}{dy}$, $\frac{d_z w}{dz}$, $\frac{d_x^2 w}{dx^2}$, ..., enthalten ist; so ist

$$\text{VI)}\quad \frac{d_z W}{dz} = \frac{d_z W}{dz} + \frac{d_w W}{dw} \,.\, \frac{d_z w}{dz} + (\mathrm{I}x)\frac{d_x d_z w}{dx \,.\, dz} + (\mathrm{I}y)\frac{d_y d_z w}{dy \,.\, dz} + (\mathrm{I}z)\frac{d_z^2 w}{dz^2}$$
$$+ (\mathrm{II}x^2)\frac{d_x^2 d_z w}{dx^2 \,.\, dz} + (\mathrm{II}xy)\frac{d_x d_y d_z w}{dx \,.\, dy \,.\, dz} + \ldots\ldots\ldots$$

Bei den zwei Gleichungen II und III sind aber noch solche Transformationen nöthig, wie sie im Vorhergehenden bereits ausgeführt worden sind. Folgende specielle Untersuchung mag etwas näher in das Verfahren einleiten.

Untersuchung 18.

§. 73.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen x, y, z, w, $\frac{d_x w}{dx}$, $\frac{d_y w}{dy}$, $\frac{d_z w}{dz}$ versehener Ausdruck; und man sucht für w eine solche Function von x, y, z, und zugleich für $c(x\,,y)$ und $\gamma(x\,,y)$ solche Functionen von x und y, dass das Intgral

$$\text{I)}\quad U = \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x\,,\,y)}^{\gamma(x\,,\,y)} W\,.\,dz\,.\,dy\,.\,dx$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Hier bekommt man die Hauptgleichung

$$\text{II)}\quad \frac{d_w W}{dw} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy} - \frac{d_z(\mathrm{I}z)}{dz} = 0$$

welches dieselbe ist, wie in der 13ten Untersuchung, wo alle sechs Integrationsgränzen constant waren. Als Gränzengleichung aber hat man diesmal

$$\begin{aligned}
\text{III)}\quad & \int_{b(a)}^{\beta(a)}\int_{c(a\,,\,y)}^{\gamma(a\,,\,y)} (\mathrm{I}x)_{a,y,z}\,.\,\partial w_{a,y,z}\,.\,dz\,.\,dy - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}\int_{c(\mathrm{a}\,,\,y)}^{\gamma(\mathrm{a}\,,\,y)} (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y,z}\,.\,\partial w_{\mathrm{a},y,z}\,.\,dz\,.\,dy \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{c(x\,,\,\beta)}^{\gamma(x\,,\,\beta)} \Big((\mathrm{I}y) - (\mathrm{I}x)\frac{d\beta}{dx}\Big)_{x,\beta,z}\,.\,dw_{x,\beta,z}\,.\,dz\,.\,dx - \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{c(x\,,\,b)}^{\gamma(x\,,\,b)} \Big((\mathrm{I}y) - (\mathrm{I}x)\frac{db}{dx}\Big)_{x,b,z}\,.\,\partial w_{x,b,z}\,.\,dz\,.\,dx \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)} \Big[W_{x,y,\gamma}\,.\,\partial\gamma + \Big((\mathrm{I}z) - (\mathrm{I}y)\frac{d_y\gamma}{dy} - (\mathrm{I}x)\frac{d_x\gamma}{dx}\Big)_{x,y,\gamma}\,.\,\partial w_{x,y,\gamma} \\
& \qquad - W_{x,y,c}\,.\,\partial c - \Big((\mathrm{I}z) - (\mathrm{I}y)\frac{d_y c}{dy} - (\mathrm{I}x)\frac{d_x c}{dx}\Big)_{x,y,c}\,.\,\partial w_{x,y,c} \Big]\,.\,dy\,.\,dx = 0
\end{aligned}$$

Um aber der Gränzengleichung zu genügen, mag es hinreichen, wenn folgende zwei besondere Fälle aufgestellt werden.

§. 74.

Erster Gränzfall. Wenn für die Gränzen keine Vorschriften gemacht sind, so haben die Ausdrücke

$$\text{IV)}\quad \partial w_{a,y,z}\;,\quad \partial w_{\mathrm{a},y,z}\;,\quad \partial w_{x,\beta,z}\;,\quad \partial w_{x,b,z}\;,\quad \partial w_{x,y,\gamma}\;,\quad \partial w_{x,y,c}\,.$$

$$\text{V)}\quad \partial^2 w_{a,y,z}\;,\quad \partial^2 w_{\mathrm{a},y,z}\;,\quad \partial^2 w_{x,\beta,z}\;,\quad \partial^2 w_{x,b,z}\;,\quad \partial^2 w_{x,y,\gamma}\;,\quad \partial^2 w_{x,y,c}\,,$$

etc. etc.

und

$$\text{VI)}\quad \delta\gamma(x.y)\quad .\quad \delta c(x,y)\quad .\quad \delta^2\gamma(x.y)\quad ,\quad \delta^2 c(x,y)\,,\quad \text{etc. etc.}$$

durchaus keiner Bedingung zu genügen. Hier sind die in IV aufgestellten sechs Ausdrücke dem Werthe nach ganz unabhängig von einander, obgleich sie aus einer und derselben Function $\delta w_{x,y,z}$ herstammen. Das Nämliche gilt auch von den sechs in V aufgestellten Ausdrücken, obgleich auch sie alle aus einer und derselben Form $\delta^2 w_{x,y,z}$ herstammen. Und so fort.

Dabei wird der Gränzengleichung nur genügt, wenn folgende acht Gleichungen

$$1)\quad (\mathrm{I}x)_{a,y,z} = 0\quad ,\quad 2)\quad (\mathrm{I}y)_{x,\beta,z} - (\mathrm{I}x)_{x,\beta,z}\cdot\frac{d\beta}{dx} = 0\quad ,\quad 3)\quad W_{x,y,\gamma} = 0\,,$$

$$4)\quad (\mathrm{I}x)_{\mathfrak{a},y,z} = 0\quad ,\quad 5)\quad (\mathrm{I}y)_{x,b,z} - (\mathrm{I}x)_{x,b,z}\cdot\frac{db}{dx} = 0\quad ,\quad 6)\quad W_{x,y,c} = 0\,,$$

$$7)\quad (\mathrm{I}z)_{x,y,\gamma} - (\mathrm{I}y)_{x,y,\gamma}\cdot\frac{d_y\gamma}{dy} - (\mathrm{I}x)_{x,y,\gamma}\cdot\frac{d_x\gamma}{dx} = 0$$

$$8)\quad (\mathrm{I}z)_{x,y,c} - (\mathrm{I}y)_{x,y,c}\cdot\frac{d_y c}{dy} - (\mathrm{I}x)_{x,y,c}\cdot\frac{d_x c}{dx} = 0$$

stattfinden.

In den zwei Gleichungen 1) und 4) ist x constant; sie sind aber nach y und z identisch und müssen, wenn sie Differentialgleichungen sind, als partielle Differentialgleichungen nach y und z behandelt werden.

In den zwei Gleichungen 2) und 5) ist $\beta(x)$ und $b(x)$ an die Stelle des y getreten; sie sind aber nach x und z identisch, und müssen, wenn sie Differentialgleichungen sind, als partielle Differentialgleichungen nach x und z behandelt werden.

In den zwei Gleichungen 7) und 8) sind $c(x,y)$ und $\gamma(x,y)$ an die Stelle des z getreten; sie sind aber nach x und y identisch, und müssen, wenn sie Differentialgleichungen sind, als partielle Differentialgleichungen nach x und y behandelt werden.

Schaut man jedoch noch einmal auf die Gleichungen 7) und 8), so sieht man, dass daselbst die Differentialquotienten der noch unbekannten Functionen $c(x,y)$ und $\gamma(x,y)$ vorkommen. Durch Elimination dieser Quotienten wird jedenfalls einige Bequemlichkeit gewonnen für den noch rückständigen Theil der Untersuchung. Nun sind aber auch die Gleichungen 3) und 6) nach x und y identisch; und desshalb sind auch ihre nach x und y genommenen partiellen Differentialgleichungen identisch Null, d. h. man hat auch

$$9)\quad \left(\frac{d_x W}{dx}\right)_{x,y,\gamma} + \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,y,\gamma}\cdot\frac{d_x\gamma}{dx} = 0\quad .\quad 10)\quad \left(\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,y,\gamma} + \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,y,\gamma}\cdot\frac{d_y\gamma}{dy} = 0\,,$$

$$11)\quad \left(\frac{d_x W}{dx}\right)_{x,y,c} + \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,y,c}\cdot\frac{d_x c}{dx} = 0\quad .\quad 12)\quad \left(\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,y,c} + \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,y,c}\cdot\frac{d_y c}{dy} = 0$$

Eliminirt man jetzt $\frac{d_x\gamma}{dx}$, $\frac{d_y\gamma}{dy}$, $\frac{d_x c}{dx}$, $\frac{d_y c}{dy}$; so gehen 7) und 8) bezüglich über in

$$13)\quad \left((\mathrm{I}x)\cdot\frac{d_x W}{dx}\right)_{x,y,\gamma} + \left((\mathrm{I}y)\cdot\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,y,\gamma} + \left((\mathrm{I}z)\cdot\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,y,\gamma} = 0$$

$$14)\quad \left((\mathrm{I}x)\cdot\frac{d_x W}{dx}\right)_{x,y,c} + \left((\mathrm{I}y)\cdot\frac{d_y W}{dy}\right)_{x,y,c} + \left((\mathrm{I}z)\cdot\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,y,c} = 0$$

Die Symmetrie der beiden letzten Gleichungen ist beachtenswerth.

Man substituire jetzt das für w gefundene allgemeine Integral in die Gleichungen 1), 2), 4), 5), 13), 14), und integrire dieselben. Erst die sich ergebenden sechs Integralgleichungen können benützt werden zur Specialisirung der (in w eingegangenen) willkürlichen Functionen[1].

Hierauf substituire man die so specialisirte Function w in die beiden Gleichungen 3) und 6), und bestimme die unbekannten Functionen $c(x,y)$ und $\gamma(x,y)$. Weil aber die beiden Gleichungen 3) und 6) einander einerlei sind, so müssen sich für $c\,(x,y)$ und $\gamma\,(x,y)$ auch zwei ebenförmige Ausdrücke ergeben. Sind diese vielförmig, so kann man die verschiedenen Formen so vertheilen, dass die der Aufgabe zu Grunde liegende Hauptbedingung $\gamma\,(x,y) > c\,(x,y)$ erfüllt wird. Ergeben sich aber für $c\,(x,y)$ und $\gamma\,(x,y)$ nur einförmige Ausdrücke, so ist keine solche Vertheilung möglich, d. h. es ist $c\,(x,y) = \gamma\,(x,y)$, was der Aufgabe widerspricht.

Um das Prüfungsmittel herzustellen, hat man in die allgemeine Formel III der vorigen Untersuchung für δW und $\delta^2 W$ vorerst die Ausdrücke einzusetzen, dann das dreifache Integral gehörig umzuformen und hierauf so viel als möglich zu reduciren. Mit Hilfe der Gleichungen 7) und 8 kann man aus den beiden Aggregraten

$$15)\quad (\mathrm{I}x)_{x,y,\gamma}\cdot\left(\frac{d_x\delta w}{dx}\right)_{x,y,\gamma} + (\mathrm{I}y)_{x,y,\gamma}\cdot\left(\frac{d_y\delta w}{dy}\right)_{x,y,\gamma} + (\mathrm{I}z)_{x,y,\gamma}\cdot\left(\frac{d_z\delta w}{dz}\right)_{x,y,\gamma}$$

und

$$16)\quad (\mathrm{I}x)_{x,y,c}\cdot\left(\frac{d_x\delta w}{dx}\right)_{x,y,c} + (\mathrm{I}y)_{x,y,c}\cdot\left(\frac{d_y\delta w}{dy}\right)_{x,y,c} + (\mathrm{I}z)_{x,y,c}\cdot\left(\frac{d_z\delta w}{dz}\right)_{x,y,c}$$

die beiden Factoren $(\mathrm{I}z)_{x,y,\gamma}$ und $(\mathrm{I}z)_{x,y,c}$ eliminiren; und so bekommt man bezüglich

$$17)\quad (\mathrm{I}x)_{x,y,\gamma}\cdot\left(\frac{d_x\delta w}{dx} + \frac{d_z\delta w}{dz}\cdot\frac{d_x\gamma}{dx}\right)_{x,y,\gamma} + (\mathrm{I}y)_{x,y,\gamma}\cdot\left(\frac{d_y\delta w}{dy} + \frac{d_z\delta w}{dz}\cdot\frac{d_y\gamma}{dy}\right)_{x,y,\gamma}$$

und

$$18)\quad (\mathrm{I}x)_{x,y,c}\cdot\left(\frac{d_x\delta w}{dx} + \frac{d_z\delta w}{dz}\cdot\frac{d_x c}{dx}\right)_{x,y,c} + (\mathrm{I}y)_{x,y,c}\cdot\left(\frac{d_y\delta w}{dy} + \frac{d_z\delta w}{dz}\cdot\frac{d_y c}{dy}\right)_{x,y,c}$$

Die zwei letzten Aggregate lassen sich aber noch auf folgende Weise abkürzen:

$$19)\quad (\mathrm{I}x)_{x,y,\gamma}\cdot\frac{d_x(\delta w_{x,y,\gamma})}{dx} + (\mathrm{I}y)_{x,y,\gamma}\cdot\frac{d_y(\delta w_{x,y,\gamma})}{dy}$$

und

$$20)\quad (\mathrm{I}x)_{x,y,c}\cdot\frac{d_x(\delta w_{x,y,c})}{dx} + (\mathrm{I}y)_{x,y,c}\cdot\frac{d_y(\delta w_{x,y,c})}{dy}$$

Wenn man ferner die Hauptgleichung II und die acht Gleichungen Nr. 1 — Nr. 8 berücksichtigt, und zur weiteren Abkürzung

$$W' \quad , \quad V' \quad , \quad W'' \quad , \quad V''$$

---

[1] Der einfachste Fall, welcher dem hiesigen Gränzfalle entspricht, ist (§. 50) derjenige, wo alle sechs Integrationsgränzen constante Werthelemente sind; und auch dort sind zur Specialisirung der (in w eingegangenen) willkürlichen Functionen sechs mit Gränzelementen versehene Gleichungen vorhanden.

bezüglich statt

$$\left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,y,c}, \quad \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_{x,y,c}, \quad \left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,y,\gamma}, \quad \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_{x,y,\gamma}$$

setzt; so nimmt das für diesen ersten Gränzfall sich ergebende Prüfungsmittel endlich folgende Form an:

$$\begin{aligned}
\text{VII)}\quad \delta^2 U = & \int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)}\int_{c(\alpha,y)}^{\gamma(\alpha,y)} \eta_{\alpha,y,z}\,.\,\delta w^2_{\alpha,y,z}\,.\,dz\,.\,dy - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}\int_{c(\mathrm{a},y)}^{\gamma(\mathrm{a},y)} \eta_{\mathrm{a},y,z}\,.\,\delta w^2_{\mathrm{a},y,z}\,.\,dz\,.\,dy \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)} \left(\omega - \eta\frac{d\beta}{dx}\right)_{x,\beta,z}\,.\,\delta w^2_{x,\beta,z}\,.\,dz\,.\,dx - \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)} \left(\omega - \eta\frac{db}{dx}\right)_{x,b,z}\,.\,\delta w^2_{x,b,z}\,.\,dz\,.\,dx \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)} \Bigg[\left(\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,y,\gamma}\,.\left(\delta\gamma + \frac{V''}{W''}\delta w_{x,y,\gamma} + \frac{(\mathrm{I}x)_{x,y,\gamma}}{W''}\,.\,\frac{d_x(\delta w_{x,y,\gamma})}{dx} + \frac{(\mathrm{I}y)_{x,y,\gamma}}{W''}\,.\,\frac{d_y(\delta w_{x,y,\gamma})}{dy}\right)^2 \\
& \qquad + \left(-\frac{d_z W}{dz}\right)_{x,y,c}\,.\left(\delta c + \frac{V'}{W'}\delta w_{x,y,c} + \frac{(\mathrm{I}x)_{x,y,c}}{W'}\,.\,\frac{d_x(\delta w_{x,y,c})}{dx} + \frac{(\mathrm{I}y)_{x,y,c}}{W'}\,.\,\frac{d_y(\delta w_{x,y,c})}{dy}\right)^2 \\
& \qquad - \frac{1}{W''}\,.\left(V''\,.\,\delta w_{x,y,\gamma} + (\mathrm{I}x)_{x,y,\gamma}\,.\,\frac{d_x(\delta w_{x,y,\gamma})}{dx} + (\mathrm{I}y)_{x,y,\gamma}\,.\,\frac{d_y(\delta w_{x,y,\gamma})}{dy}\right)^2 \\
& \qquad + \frac{1}{W'}\,.\left(V'\,.\,\delta w_{x,y,c} + (\mathrm{I}x)_{x,y,c}\,.\,\frac{d_x(\delta w_{x,y,c})}{dx} + (\mathrm{I}y)_{x,y,c}\,.\,\frac{d_y(\delta w_{x,y,c})}{dy}\right)^2 \\
& \qquad + \left(\lambda - \omega\frac{d_y\gamma}{dy} - \eta\frac{d_x\gamma}{dx}\right)_{x,y,\gamma}\,.\,\delta w^2_{x,y,\gamma} - \left(\lambda - \omega\frac{d_y c}{dy} - \eta\frac{d_x c}{dx}\right)_{x,y,c}\,.\,\delta w^2_{x,y,c}\Bigg]\,.\,dy\,.\,dx \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \Bigg[\mathfrak{A}\,.\left(\frac{d_z\delta w}{dz} + \mathfrak{B}\frac{d_y\delta w}{dy} + \mathfrak{C}\frac{d_x\delta w}{dx} + \mathfrak{D}\,.\,\delta w\right)^2 \\
& \qquad + \mathfrak{E}\,.\left(\frac{d_y\delta w}{dy} + \mathfrak{F}\frac{d_x\delta w}{dx} + \mathfrak{G}\,.\,\delta w\right)^2 + \mathfrak{H}\,.\left(\frac{d_x\delta w}{dx} + \mathfrak{J}\,.\,\delta w\right)^2\Bigg]\,.\,dz\,.\,dy\,.\,dx
\end{aligned}$$

Mit diesem Ausdrucke muss aber bekanntlich noch folgende Gleichung

$$\text{VIII)}\quad \mathrm{L} - \frac{d_x\eta}{dx} - \frac{d_y\omega}{dy} - \frac{d_z\lambda}{dz} - \mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{E}\,.\,\mathfrak{G}^2 - \mathfrak{H}\,.\,\mathfrak{J}^2 = 0,$$

verbunden werden; und man erkennt, dass, wie in der 13ten Untersuchung (§. 49—53), so auch hier, zwei der drei Stücke η, ω, λ willkürlich sind.

Die Bedeutung von L, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{J}$ ist bereits (aus §. 49) bekannt.

Weil nun von den drei Stücken η, ω, λ zwei willkürlich sind: so lasse man η und ω kurzweg zu Null werden. Dabei reducirt Gleichung VIII sich auf

$$\text{IX)}\quad \mathrm{L} - \frac{d_z\lambda}{dz} - \mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{E}\,.\,\mathfrak{G}^2 - \mathfrak{H}\,.\,\mathfrak{J}^2 = 0$$

und wenn man diese Partialdifferentialgleichung integrirt, so ergibt sich für λ ein aus x, y, z, $\pi(x, y)$ zusammengesetzter Ausdruck, wo $\pi(x, y)$ eine ganz willkürliche Function von x und y ist. Aber eben diese in λ enthaltene willkürliche Function $\pi(x, y)$ kann man nach der bald so bald so genommenen Function δw auch jedesmal bald so bald so einrichten, dass die nach x und nach y identische Gleichung

$$\text{X)} \quad -\frac{1}{W''}\cdot\Big(V''\cdot\delta w_{x,y,\gamma}+(\mathrm{I}x)_{x,y,\gamma}\cdot\frac{d_x(\delta w_{x,y,\gamma})}{dx}+(\mathrm{I}y)_{x,y,\gamma}\cdot\frac{d_y(\delta w_{x,y,\gamma})}{dy}\Big)^2$$
$$+\frac{1}{W'}\cdot\Big(V'\cdot\delta w_{x,y,c}+(\mathrm{I}x)_{x,y,c}\cdot\frac{d_x(\delta w_{x,y,c})}{dx}+(\mathrm{I}y)_{x,y,c}\cdot\frac{d_y(\delta w_{x,y,c})}{dy}\Big)^2$$
$$+\lambda_{x,y,\gamma}\cdot\delta w^2_{x,y,\gamma}-\lambda_{x,y,c}\cdot\delta w^2_{x,y,c}=0$$

stattfindet. Sonach bleibt von VII nur übrig

$$\text{XI)} \quad \delta^2 U =$$
$$\int_a^\alpha\int_{b(x)}^{\beta(x)}\Big[\Big(\frac{d_z W}{dz}\Big)_{x,y,\gamma}\cdot\Big(\delta\gamma+\frac{V''}{W''}\,\delta w_{x,y,\gamma}+\frac{(\mathrm{I}x)_{x,y,\gamma}}{W''}\cdot\frac{d_x(\delta w_{x,y,\gamma})}{dx}+\frac{(\mathrm{I}y)_{x,y,\gamma}}{W''}\cdot\frac{d_y(\delta w_{x,y,\gamma})}{dy}\Big)^2$$
$$+\Big(-\frac{d_z W}{dz}\Big)_{x,y,c}\cdot\Big(\delta c+\frac{V'}{W'}\,\delta w_{x,y,c}+\frac{(\mathrm{I}x)_{x,y,c}}{W'}\cdot\frac{d_x(\delta w_{x,y,c})}{dx}+\frac{(\mathrm{I}y)_{x,y,c}}{W'}\cdot\frac{d_y(\delta w_{x,y,c})}{dy}\Big)^2\Big]\cdot dy\cdot dx$$
$$+\int_a^\alpha\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)}\Big[\mathfrak{A}\cdot\Big(\frac{d_z\delta w}{dz}+\mathfrak{B}\frac{d_y\delta w}{dy}+\mathfrak{C}\frac{d_x\delta w}{dx}+\mathfrak{D}\cdot\delta w\Big)^2$$
$$+\mathfrak{E}\cdot\Big(\frac{d_y\delta w}{dy}+\mathfrak{F}\frac{d_x\delta w}{dx}+\mathfrak{G}\cdot\delta w\Big)^2+\mathfrak{H}\cdot\Big(\frac{d_x\delta w}{dx}+\mathfrak{J}\cdot\delta w\Big)^2\Big]\cdot dz\cdot dy\cdot dx$$

Es hangt also von den fünf Ausdrücken

$$\Big(\frac{d_z W}{dz}\Big)_{x,y,\gamma}\;,\quad\Big(-\frac{d_z W}{dz}\Big)_{x,y,c}\;,\quad\mathfrak{A}\;,\quad\mathfrak{E}\;,\quad\mathfrak{H}$$

ab, ob ein Maximum oder Minimum oder keines von beiden stattfindet.

§. 75.

Zweiter Gränzfall. Man soll unter allen in Betracht zu ziehenden Functionen $w = \varphi(x, y, z)$ diejenige herauswählen, welche bei $z = c\,(x, y)$ und bei $z = \gamma\,(x, y)$ bezüglich mit

$$21)\quad e = f'(x, y, z) \qquad \text{und} \qquad 22)\quad \varepsilon = f''(x, y, z)$$

zusammenfallen.

Dieses Zusammenfallen ist dargestellt durch die Gleichungen

$$23)\quad \varphi[x,y,c(x,y)] = f'[x,y,c(x,y)] \quad,\quad \text{und}\quad 24)\quad \varphi[x,y,\gamma(x,y)] = f''[x,y,\gamma(x,y)]$$

oder kürzer durch

$$25)\quad w_{x,y,c} = e_{x,y,c} \quad,\quad \text{und}\quad 26)\quad w_{x,y,\gamma} = \varepsilon_{x,y,\gamma}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$27)\quad \delta w_{x,y,c}+\Big(\frac{d_z w}{dz}\Big)_{x,y,c}\cdot\delta c = \Big(\frac{d_z e}{dz}\Big)_{x,y,c}\cdot\delta c$$

$$28)\quad \delta w_{x,y,\gamma}+\Big(\frac{d_z w}{dz}\Big)_{x,y,\gamma}\cdot\delta\gamma = \Big(\frac{d_z \varepsilon}{dz}\Big)_{x,y,\gamma}\cdot\delta\gamma$$

und so fort.

Sowie aber der vorhin durchgeführte erste Gränzfall ganz analog ist dem ersten der 11ten Untersuchung (§. 42): so wird auch der hiesige zweite Gränzfall ganz analog sein dem dortigen zweiten (§. 43). Desshalb mag die weitere Durchführung unterbleiben, und zwar um so mehr, als grade die beiden nächsten Aufgaben sich mit Anwendungen des hiesigen zweiten Gränzfalles befassen.

Aufgabe 2.

§. 76.

Man hat einen Körper, der von zwei in den Endpunkten der Abscissen a und α senkrechten Ebenen, ferner von zwei auf der Coordinatenebene XY senkrechten Cylindermänteln $y = b(x)$ und $y = \beta(x)$, und endlich von zwei vorerst noch unbekannten Flächen $z = c(x, y)$ und $z = \gamma(x, y)$ begränzt wird. Welches ist nun das Dichtigkeitsgesetz $w = \varphi(x, y, z)$, dem der unsern Körper ausfüllende Stoff unterworfen sein muss, wenn sich dasselbe im Bereiche der beiden noch unbekannten Gränzflächen auf folgende bestimmt vorgeschriebenen Functionen

$$\text{I)}\quad e = f'(x, y, z) \qquad , \qquad \text{und II)}\quad \varepsilon = f''(x, y, z)$$

specialisirt, und dabei das über die ganze Ausdehnung unseres Körpers erstreckte Integral

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha \int_{b(x)}^{\beta(x)} \int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{d_x w}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y w}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_z w}{dz}\right)^2}\,\right] . dz . dy . dx$$

ein Minimum wird?

Die Bedingung, dass das gesuchte Dichtigkeitsgesetz $w = \varphi(x, y, z)$ im Bereiche der beiden Gränzflächen sich auf die beiden vorgeschriebenen Gesetze specialisiren soll, ist ausgesprochen durch folgende zwei Gleichungen

$$\text{IV)}\quad \varphi(x, y, c) = f'(x, y, c) \qquad , \qquad \text{und V)}\quad \varphi(x, y, \gamma) = f'(x, y, \gamma)$$

oder kürzer durch

$$\text{VI)}\quad w_{x,y,c} = e_{x,y,c} \qquad , \qquad \text{und VII)}\quad w_{x,y,\gamma} = \varepsilon_{x,y,\gamma}$$

§. 77.

Wenn man zur Bequemlichkeit jetzt p, q, r bezüglich statt $\frac{d_x w}{dx}$, $\frac{d_y w}{dy}$, $\frac{d_z w}{dz}$ setzt; so nimmt die sich ergebende Hauptgleichung folgende Form an:

$$\begin{aligned}\text{VIII)}\quad & (1 + q^2 + r^2) . \frac{d_x^2 w}{dx^2} - 2pq . \frac{d_x d_y w}{dx . dy} - 2pr . \frac{d_x d_z w}{dx . dz} \\ & + (1 + p^2 + r^2) . \frac{d_y^2 w}{dy^2} - 2qr . \frac{d_y d_z w}{dy . dz} + (1 + p^2 + q^2) . \frac{d_z^2 w}{dz^2} = 0\end{aligned}$$

Unter den verschiedenen besonderen Integralen, welche dieser Partialdifferentialgleichung genügen, befindet sich auch folgende Urgleichung

$$\text{IX)}\quad w = k' . x + k'' . y + k''' . z + k''''$$

Es muss jedoch das allgemeine Integral mit seinen willkürlichen Functionen noch aufgesucht, und an die Stelle dieses besonderen gesetzt werden.

Aus den Gleichungen VI und VII folgt weiter

$$\text{X)} \quad \partial w_{x,y,c} = \left(\frac{d_z e}{dz} - \frac{d_z w}{dz}\right)_{x,y,c} . \partial c$$

$$\text{XI)} \quad \partial w_{x,y,\gamma} = \left(\frac{d_z \varepsilon}{dz} - \frac{d_z w}{dz}\right)_{x,y,\gamma} . \partial \gamma$$

$$\text{XII)} \quad \partial^2 w_{x,y,c} = \left(\frac{d_z e}{dz} - \frac{d_z w}{dz}\right)_{x,y,c} . \partial^2 c + \left(\frac{d_z^2 e}{dz^2} - \frac{d_z^2 w}{dz^2}\right)_{x,y,c} . \partial c^2 - 2 . \left(\frac{d_z \partial w}{dz}\right)_{x,y,c} . \partial c$$

$$\text{XIII)} \quad \partial^2 w_{x,y,\gamma} = \left(\frac{d_z \varepsilon}{dz} - \frac{d_z w}{dz}\right)_{x,y,\gamma} . \partial^2 \gamma + \left(\frac{d_z^2 \varepsilon}{dz^2} - \frac{d_z^2 w}{dz^2}\right)_{x,y,\gamma} . \partial \gamma^2 - 2 . \left(\frac{d_z \partial w}{dz}\right)_{x,y,\gamma} . \partial \gamma$$

und so fort

Diese letzteren vier Gleichungen bilden aber die Grundlage der ganzen Aufgabe, und müssen beständig angewendet werden.

Nun ist man auf dem Punkte, der Gränzengleichung zu genügen; und zu diesem Ende sollen folgende drei Gränzfälle aufgestellt werden.

§. 78.

Erster Gränzfall. Das gesuchte Dichtigkeitsgesetz $w = \varphi\,(x, y, z)$ soll aus allen möglichen herausgewählt werden, welche fähig sind, den zwei Gleichungen IV und V zu genügen. Hierbei zerlegt sich die Gränzengleichung in folgende sechs einzelne:

$$1)\quad \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{a,y,z} = 0 \quad , \quad 2)\quad \left(\frac{d_y w}{dy}\right)_{x,\beta,z} - \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{x,\beta,z} . \frac{d\beta}{dx} = 0$$

$$3)\quad \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{\mathfrak{a},y,z} = 0 \quad , \quad 4)\quad \left(\frac{d_y w}{dy}\right)_{x,b,z} - \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{x,b,z} . \frac{db}{dx} = 0$$

$$5)\quad 1 + \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{x,y,\gamma} . \left(\frac{d_x \varepsilon}{dx}\right)_{x,y,\gamma} + \left(\frac{d_y w}{dy}\right)_{x,y,\gamma} . \left(\frac{d_y \varepsilon}{dy}\right)_{x,y,\gamma} + \left(\frac{d_z w}{dz}\right)_{x,y,\gamma} . \left(\frac{d_z \varepsilon}{dz}\right)_{x,y,\gamma} = 0$$

$$6)\quad 1 + \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{x,y,c} . \left(\frac{d_x e}{dx}\right)_{x,y,c} + \left(\frac{d_y w}{dy}\right)_{x,y,c} . \left(\frac{d_y e}{dy}\right)_{x,y,c} + \left(\frac{d_z w}{dz}\right)_{x,y,c} . \left(\frac{d_z e}{dz}\right)_{x,y,c} = 0$$

Die beiden letzten dieser Gleichungen sind jenen analog, welche sich ergeben, wenn man diejenige Fläche sucht, die zwischen andern Flächen die kleinste Ausdehnung hat.

Die sechs Gleichungen Nr. 1 — 6 werden verbraucht, um die in w eingegangenen willkürlichen Stücke zu specialisiren. Sodann dienen die beiden Gleichungen IV und V zur Bestimmung der Functionen $c\,(x, y)$ und $\gamma\,(x, y)$.

Die Herstellung des Prüfungsmittels ist dem in §. 43 angewendeten Verfahren analog, und kann unterbleiben.

§. 79.

Zweiter Gränzfall. Das gesuchte Dichtigkeitsgesetz $w = \varphi\,(x, y, z)$ soll nur aus jenen herausgewählt werden, welche alle sowohl den für die ganze Aufgabe geltenden zwei Hauptbedingungen IV und V genügen, als auch noch in den zwei festen Gränzebenen und in den zwei festen Cylindermänteln sich bezüglich in die bestimmt vorgeschriebenen Functionen

$$\mathfrak{F}_1(y\,,z) \quad , \quad \mathfrak{F}_2(y\,,z) \quad , \quad \mathfrak{F}_3(x\,,z) \quad , \quad \mathfrak{F}_4(x\,,z)$$

specialisiren.

Hier hat man ausser den zwei Gleichungen IV und V noch folgende vier:

$$7) \qquad \varphi(\mathrm{a}\,,y\,,z) = \mathfrak{F}_1(y\,,z) \quad , \qquad 8) \qquad \varphi(\alpha\,,y\,,z) = \mathfrak{F}_2(y\,,z)$$

$$9) \quad \varphi(x\,,b[x]\,,z) = \mathfrak{F}_3(x\,,z) \quad , \quad 10) \quad \varphi(x\,,\beta[x]\,,z) = \mathfrak{F}_4(x\,,z)$$

Aus diesen vier Gleichungen, wo das z noch ganz allgemein ist, folgt:

$$♀ \quad \delta w_{\mathrm{a}\,,y\,,z} = 0 \quad , \quad \delta w_{\alpha\,,y\,,z} = 0 \quad , \quad \delta^2 w_{\mathrm{a}\,,y\,,z} = 0 \quad , \quad \delta^2 w_{\alpha\,,y\,,z} = 0 \;, \quad \text{etc.}$$

$$♁ \quad \delta w_{x\,,b\,,z} = 0 \quad , \quad \delta w_{x\,,\beta\,,z} = 0 \quad , \quad \delta^2 w_{x\,,b\,,z} = 0 \quad , \quad \delta^2 w_{x\,,\beta\,,z} = 0 \;, \quad \text{etc.}$$

Mat hat also diesmal die vier Gleichungen Nr. 7 — 10 mit den beiden Nr. 5 und Nr. 6 zu verbinden, um die in w eingegangenen willkürlichen Stücke zu specialisiren. Sodann dienen wieder die beiden Gleichungen IV und V, um die Functionen $c(x\,,y)$ und $\gamma(x\,,y)$ zu bestimmen.

Und so fort.

§. 80.

Dritter Gränzfall. Es soll zu den im vorigen Falle gestellten Gränzbedingungen noch diejenige hinzukommen, dass der Unterschied der durch $c(x\,,y)$ und $\gamma(x\,,y)$ dargestellten Ordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K behalte.

Letztere Vorschrift führt zu der Gleichung

$$11) \quad \gamma(x\,,y) - c(x\,,y) = K$$

und daraus folgt

$$12) \quad \delta\gamma(x\,,y) - \delta c(x\,,y) = 0$$

$$13) \quad \delta^2\gamma(x\,,y) - \delta^2 c(x\,,y) = 0$$

und so fort

Man gelangt also hier wieder zu den Gleichungen ♀ und ♁, und statt der beiden Gleichungen 5 und 6 hat man jetzt nur folgende einzige Proportion

$$14) \quad \left(1 + \frac{d_x w}{dx}\cdot\frac{d_x\varepsilon}{dx} + \frac{d_y w}{dy}\cdot\frac{d_y\varepsilon}{dy} + \frac{d_z w}{dz}\cdot\frac{d_z\varepsilon}{dz}\right)_{x\,,y\,,\gamma} : \left(\sqrt{1+p^2+q^2+r^2}\right)_{x\,,y\,,\gamma}$$

$$= \left(1 + \frac{d_x w}{dx}\cdot\frac{d_x e}{dx} + \frac{d_y w}{dy}\cdot\frac{d_y e}{dy} + \frac{d_z w}{dz}\cdot\frac{d_z e}{dz}\right)_{x\,,y\,,c} : \left(\sqrt{1+p^2+q^2+r^2}\right)_{x\,,y\,,c}$$

welche mit den fünf Gleichungen Nr. 7 — 11 verbunden werden muss, um die in w eingegangenen willkürlichen Stücke zu specialisiren. Sodann dienen die beiden Gleichungen IV und V zur Bestimmung von $c(x\,,y)$ und $\gamma(x\,,y)$.

Aufgabe 3.

§. 81.

Man hat einen Körper, der von zwei in den Endpunkten der Abscissen a und α senkrechten Ebenen, ferner von zwei auf der Coordinatenebene XY senkrechten Cylindermänteln

$y = b(x)$ und $y = \beta(x)$, und endlich von zwei vorerst noch unbekannten Flächen $z = c(x, y)$ und $z = \gamma(x, y)$ begränzt wird. Welches unter allen jenen Dichtigkeitsgesetzen, die nicht nur im Bereiche der beiden noch unbekannten Gränzflächen sich auf folgende bestimmt vorgeschriebenen Functionen

$$\text{I)}\quad e = f'(x, y, z) \quad , \quad \text{und II)}\quad \varepsilon = f''(x, y, z)$$

specialisiren, sondern auch zwischen den fraglichen Gränzen einerlei Masse liefern, ist es nun, bei welchem das über die ganze Ausdehnung unseres Körpers erstreckte Integral

$$\text{III)}\quad U = \int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{d_x w}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y w}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_z w}{dz}\right)^2}\right] . dz . dy . dx$$

ein Minimum wird?

Unseres Körpers Masse wird geliefert durch das Integral

$$\text{IV)}\quad \int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} w . dz . dy . dx$$

wo $w = \varphi(x, y, z)$ das gesuchte Dichtigkeitsgesetz ist.

Die Bedingung, dass das gesuchte Dichtigkeitsgesetz im Bereiche der beiden Gränzflächen sich auf die beiden vorgeschriebenen Functionen I und II specialisire, ist ausgesprochen durch folgende zwei Gleichungen

$$\text{V)}\quad \varphi(x, y, c) = f'(x, y, c) \quad , \quad \text{und VI)}\quad \varphi(x, y, \gamma) = f''(x, y, \gamma)$$

oder kürzer durch

$$\text{VII)}\quad w_{x,y,c} = e_{x,y,c} \quad , \quad \text{und VIII)}\quad w_{x,y,\gamma} = \varepsilon_{x,y,\gamma}$$

§. 82.

Wenn man jetzt die Bedingung, dass das Integral IV unter allen Umständen einerlei Werth behalte, durch die sogenannte Multiplicatorenmethode in Rechnung bringt: so gelangt man zu folgender Hauptgleichung

$$\text{IX)}\quad \frac{1}{m}\cdot\sqrt{(1+p^2+q^2+r^2)^3} = (1+q^2+r^2)\cdot\frac{d_x^2 w}{dx^2} - 2pq\cdot\frac{d_x d_y w}{dx.dy} - 2pr\cdot\frac{d_x d_z w}{dx.dz}$$
$$+ (1+p^2+r^2)\cdot\frac{d_y^2 w}{dy^2} - 2qr\cdot\frac{d_y d_z w}{dy.dz} + (1+p^2+q^2)\cdot\frac{d_z^2 w}{dz^2}$$

wo p, q, r zur Bequemlichkeit statt $\frac{d_x w}{dx}$, $\frac{d_y w}{dy}$, $\frac{d_z w}{dz}$ geschrieben worden ist.

Unter den verschiedenen *besonderen* Integralen, welche dieser Partialdifferentialgleichung genügen, befindet sich auch folgende Urgleichung

$$\text{X)}\quad (x - k')^2 + (y - k'')^2 + (z - k''')^2 + (w - k'''')^2 = 9 . m^2$$

Es muss jedoch das *allgemeine* Integral mit seinen willkürlichen Functionen noch aufgesucht, und an die Stelle dieses besonderen gesetzt werden.

Nun sind wir auf dem Punkte, hier ebenso, wie in der vorigen Aufgabe, verschiedene Gränzfälle aufzustellen; es mag aber an folgendem einzigen genügen.

§. 83.

Specieller Gränzfall. Das gesuchte Dichtigkeitsgesetz soll aus allen möglichen herausgewählt werden, welche fähig sind, den drei, durch die Gleichungen IV, V, VI ausgesprochenen und für die ganze Aufgabe geltenden Hauptbedingungen zu genügen.

Wenn man hier $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{q}''$, $\mathfrak{r}''$ bezüglich statt $\frac{d_x e}{dx}$, $\frac{d_y e}{dy}$, $\frac{d_z e}{dz}$, $\frac{d_x \varepsilon}{dx}$, $\frac{d_y \varepsilon}{dy}$, $\frac{d_z \varepsilon}{dz}$ setzt; so zerlegt sich die Gränzengleichung jetzt in folgende einzelne:

$$\text{XI)}\quad \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{\alpha,y,z} = 0 \quad , \quad \text{XII)}\quad \left(\frac{d_y w}{dy}\right)_{x,\beta,z} - \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{x,\beta,z} \cdot \frac{d\beta}{dx} = 0$$

$$\text{XIII)}\quad \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{a,y,z} = 0 \quad , \quad \text{XIV)}\quad \left(\frac{d_y w}{dy}\right)_{x,b,z} - \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{x,b,z} \cdot \frac{db}{dx} = 0$$

$$\text{XV)}\quad w_{x,y,\gamma} + \left(\frac{m}{\sqrt{1+\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2+\mathfrak{r}^2}} \cdot (1 + p\cdot\mathfrak{p}'' + q\cdot\mathfrak{q}'' + r\cdot\mathfrak{r}'')\right)_{x,y,\gamma} = 0$$

$$\text{XVI)}\quad w_{x,y,c} + \left(\frac{m}{\sqrt{1+\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2+\mathfrak{r}^2}} \cdot (1 + p\cdot\mathfrak{p}' + q\cdot\mathfrak{q}' + r\cdot\mathfrak{r}')\right)_{x,y,c} = 0$$

Die Symmetrie der beiden letzten Gleichungen ist beachtenswerth; und sie sind jenen analog, die sich ergeben, wenn man unter allen Flächen, welche zwischen andern Flächen einen gleichgrossen Körperinhalt begränzen, diejenige heraussucht, die die kleinste Ausdehnung hat.

Die sechs Gleichungen XI — XVI dienen dazu, um die in w eingegangenen willkürlichen Functionen zu specialisiren; und hierauf bestimmen sich die Functionen $c(x, y)$ und $\gamma(x, y)$ aus den Gleichungen V und VI.

Aufgabe 4.

§. 84.

Man hat einen Körper, der von zwei in den Endpunkten der Abscissen a und α senkrechten Ebenen, ferner von zwei auf der Coordinatenebene XY senkrechten Cylindermänteln $y = b(x)$ und $y = \beta(x)$, und endlich von zwei vorerst noch unbekannten Flächen $z' = c(x, y)$ und $z'' = \gamma(x, y)$ begränzt wird. Wenn nun für letztere zwei Flächen vorgeschrieben ist, dass ihre Ausdehnungen zusammen den bestimmten Werth K haben sollen; welchem Dichtigkeitsgesetze muss der unsern Körper ausfüllende Stoff unterworfen sein, damit folgendes über die ganze Ausdehnung unseres Körpers erstreckte Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \int_{b(x)}^{\beta(x)} \int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{d_x w}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y w}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_z w}{dz}\right)^2}\right] . dz . dy . dx$$

ein Minimum wird?

Der Umstand, dass die Ausdehnungen der beiden Gränzflächen zusammen den bestimmten Werth K haben sollen, führt auf die Gleichung

$$\text{II)}\quad \int_a^\alpha \int_{b(x)}^{\beta(x)} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{d_x c}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y c}{dy}\right)^2}\right] . dy . dx + \int_a^\alpha \int_{b(x)}^{\beta(x)} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{d_x \gamma}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y \gamma}{dy}\right)^2}\right] . dy . dx = K$$

§. 85.

Wenn man hier zur Bequemlichkeit wieder p, q, r bezüglich statt $\frac{d_x w}{dx}$, $\frac{d_y w}{dy}$, $\frac{d_z w}{dz}$ setzt; so bekommt man die Hauptgleichung

$$\text{III)}\quad (1+q^2+r^2)\cdot\frac{d_x^2 w}{dx^2} - 2pq\cdot\frac{d_x d_y w}{dx\,.\,dy} - 2pr\cdot\frac{d_x d_z w}{dx\,.\,dz}$$
$$+ (1+p^2+r^2)\cdot\frac{d_y^2 w}{dy^2} - 2qr\cdot\frac{d_y d_z w}{dy\,.\,dz} + (1+p^2+q^2)\cdot\frac{d_z^2 w}{dz^2} = 0$$

Dieses ist wieder die Gleichung VIII der 2ten Aufgabe (§. 77): und unter den verschiedenen besonderen Integralen, welche dieser Partialdifferentialgleichung genügen, befindet sich auch folgende Urgleichung

$$\text{IV)}\quad w = k'\,.\,x + k''\,.\,y + k'''\,.\,z + k''''$$

Es muss jedoch das allgemeine Integral mit seinen willkürlichen Functionen noch aufgesucht, und an die Stelle dieses besonderen gesetzt werden.

Nun sind wir auf dem Punkte, verschiedene Gränzfälle aufzustellen. Es mag aber an folgendem einzigen genügen.

§. 86.

Specieller Gränzfall. Es soll keine andere Vorschrift, als die durch Gleichung II ausgesprochene Hauptbedingung, gemacht werden.

Man setze zunächst

$$\mathfrak{p}'\ ,\quad \mathfrak{q}'\ ,\quad \mathfrak{p}''\ ,\quad \mathfrak{q}''$$

bezüglich statt

$$\frac{d_x c}{dx}\ ,\quad \frac{d_y c}{dy}\ ,\quad \frac{d_x \gamma}{dx}\ ,\quad \frac{d_y \gamma}{dy}$$

und hierauf setze man zur weiteren Abkürzung

$$\mathfrak{P}'\ ,\quad \mathfrak{Q}'\ ,\quad \mathfrak{P}''\ ,\quad \mathfrak{Q}''$$

bezüglich statt

$$\frac{\mathfrak{p}'}{\sqrt{1+\mathfrak{p}'^2+\mathfrak{q}'^2}}\ ,\quad \frac{\mathfrak{q}'}{\sqrt{1+\mathfrak{p}'^2+\mathfrak{q}'^2}}\ ,\quad \frac{\mathfrak{p}''}{\sqrt{1+\mathfrak{p}''^2+\mathfrak{q}''^2}}\ ,\quad \frac{\mathfrak{q}''}{\sqrt{1+\mathfrak{p}''^2+\mathfrak{q}''^2}}$$

Wenn man jetzt die durch Gleichung II ausgesprochene Bedingung mittelst der sogenannten Multiplicatorenmethode in Rechnung bringt; so zerlegt sich die Gränzengleichung in folgende sechzehn einzelne:

$$\text{V)}\quad \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{a,y,z} = 0\ .\qquad \text{VI)}\quad \left(\frac{d_y w}{dy}\right)_{x,\beta,z} - \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{x,\beta,z}\cdot\frac{d\beta}{dx} = 0\ .$$

$$\text{VII)}\quad \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{\mathfrak{a},y,z} = 0\ .\qquad \text{VIII)}\quad \left(\frac{d_y w}{dy}\right)_{x,b,z} - \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{x,b,z}\cdot\frac{db}{dx} = 0\ .$$

$$\text{IX)}\quad \left(\frac{d_z w}{dz}\right)_{x,y,\gamma} - \left(\frac{d_y w}{dy}\right)_{x,y,\gamma} \cdot \frac{d_y \gamma}{dy} - \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{x,y,\gamma} \cdot \frac{d_x \gamma}{dx} = 0 \quad .$$

$$\text{X)}\quad \left(\frac{d_z w}{dz}\right)_{x,y,c} - \left(\frac{d_y w}{dy}\right)_{x,y,c} \cdot \frac{d_y c}{dy} - \left(\frac{d_x w}{dx}\right)_{x,y,c} \cdot \frac{d_x c}{dx} = 0 \quad .$$

$$\text{XI)}\quad (\sqrt{1+p^2+q^2+r^2})_{x,y,\gamma} - \mathfrak{N} \cdot \left(\frac{d_x \mathfrak{P}''}{dx} + \frac{d_y \mathfrak{Q}''}{dy}\right) = 0 \quad .$$

$$\text{XII)}\quad (\sqrt{1+p^2+q^2+r^2})_{x,y,c} + \mathfrak{N} \cdot \left(\frac{d_x \mathfrak{P}'}{dx} + \frac{d_y \mathfrak{Q}'}{dy}\right) = 0 \quad .$$

$$\text{XIII)}\quad \left(\frac{d_x \gamma}{dx}\right)_{a,y} = 0 \quad . \qquad \text{XIV)}\quad \left(\frac{d_y \gamma}{dy}\right)_{x,\beta} - \left(\frac{d_x \gamma}{dx}\right)_{x,\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx} = 0 \quad .$$

$$\text{XV)}\quad \left(\frac{d_x \gamma}{dx}\right)_{a,y} = 0 \quad . \qquad \text{XVI)}\quad \left(\frac{d_y \gamma}{dy}\right)_{x,b} - \left(\frac{d_x \gamma}{dx}\right)_{x,b} \cdot \frac{db}{dx} = 0 \quad .$$

$$\text{XVII)}\quad \left(\frac{d_x c}{dx}\right)_{a,y} = 0 \quad , \qquad \text{XVIII)}\quad \left(\frac{d_y c}{dy}\right)_{x,\beta} - \left(\frac{d_x c}{dx}\right)_{x,\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx} = 0 \quad .$$

$$\text{XIX)}\quad \left(\frac{d_x c}{dx}\right)_{a,y} = 0 \quad . \qquad \text{XX)}\quad \left(\frac{d_y c}{dy}\right)_{x,b} - \left(\frac{d_x c}{dx}\right)_{x,b} \cdot \frac{db}{dx} = 0$$

Die sechs Gleichungen Nr. V—X werden dazu verwendet, um die in $w = \varphi(x \,.\, y \,,\, z)$ eingegangenen willkürlichen Stücke zu specialisiren.

Durch Integration der Gleichung XI ergibt sich $z'' = \gamma(x, y)$ mit zwei willkürlichen Functionen, zu deren Specialisirung die vier Gleichungen Nr. XIII—XVI benützt werden.

Durch Integration der Gleichung XII ergibt sich $z' = c(x, y)$ mit zwei willkürlichen Functionen, zu deren Specialisirung die vier Gleichungen Nr. XVII—XX benützt werden.

Bezeichnet man durch R'' und $\mathfrak{R}''$ zwei zusammengehörige Krümmungshalbmesser irgend einer Fläche, die der Gleichung XI genügt; so geht diese Gleichung über in

$$\text{XXI)}\quad \frac{1}{R''} + \frac{1}{\mathfrak{R}''} = +\frac{1}{\mathfrak{N}} \cdot (\sqrt{1+p^2+q^2+r^2})_{x,y,\gamma}$$

Bezeichnet man ebenso durch R' und $\mathfrak{R}'$ zwei zusammengehörige Krümmungshalbmesser irgend einer Fläche, welche der Gleichung XII genügt; so geht diese Gleichung über in

$$\text{XXII)}\quad \frac{1}{R'} + \frac{1}{\mathfrak{R}'} = -\frac{1}{\mathfrak{N}} \cdot (\sqrt{1+p^2+q^2+r^2})_{x,y,c}$$

Durch die beiden Gleichungen XXI und XXII ist aber die Beziehung ausgesprochen, welche zwischen der Krümmung einer der Gränzflächen und zwischen dem in ihr herrschenden Dichtigkeitsgesetze stattfindet.

§. 86.

Würde man das, durch Gleichung IV dargestellte, Dichtigkeitsgesetz gelten lassen: so würde sich dieses, weil es den sechs Gleichungen Nr. V—X genügen muss, auf

$$\text{XXIII)}\quad w = k''''$$

reduciren, d. h. die Dichtigkeit wäre durch den ganzen Körper hindurch gleichförmig. Dabei ist der Werth des Integrals I unabhängig von dem Dichtigkeitsgesetze $w = k''''$; und die Gleichungen XI und XII reduciren sich bezüglich auf

$$1 - \mathfrak{R} \cdot \left(\frac{d_x \mathfrak{P}''}{dx} + \frac{d_y \mathfrak{Q}''}{dy}\right) = 0 \quad . \quad \text{und} \quad 1 + \mathfrak{R} \cdot \left(\frac{d_x \mathfrak{P}'}{dx} + \frac{d_y \mathfrak{Q}'}{dy}\right) = 0$$

und daraus folgt weiter

$$\text{XXIV)} \quad \frac{1}{R''} + \frac{1}{\mathfrak{R}''} = + \frac{1}{\mathfrak{R}} \quad . \quad \text{und XXV)} \quad \frac{1}{R'} + \frac{1}{\mathfrak{R}'} = - \frac{1}{\mathfrak{R}}$$

Die zwei letzten Gleichungen aber zeigen an:

„Bei gleichförmiger Dichtigkeit gehören die beiden gesuchten Gränzflächen in die „Classe derjenigen, welche unter allen denen, die eine gleich grosse Oberfläche „haben, den grössten oder kleinsten Körperinhalt einschliessen."

Andere Gränzfälle kann man sich nach Belieben bilden.

Untersuchung 19.

§. 87.

Es sei W ein reeller, mit den Bestandtheilen

$$x \,,\, y \,,\, z \,,\, w \,,\, \frac{d_x w}{dx} \,,\, \frac{d_y w}{dy} \,,\, \frac{d_z w}{dz} \,,\, \frac{d_x^2 w}{dx^2} \,,\, \frac{d_x d_y w}{dx \,.\, dy} \,,\, \frac{d_x d_z w}{dx \,.\, dz} \,,\, \frac{d_y^2 w}{dy^2} \,\ldots\ldots$$

versehener Ausdruck; und man sucht

1. für w eine solche Function von x, y, z
2. für $c(x \,.\, y)$ und $\gamma(x \,.\, y)$ solche Functionen von x und y.
3. für $b(x)$ und $\beta(x)$ solche Functionen von x. und
4. für a und α solche bestimmte Werthe,

dass dabei folgendes Integral

$$\text{I)} \quad U = \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \int_{b(x)}^{\beta(x)} \int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} W \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Wenn man, wie in §. 63, die Werthänderungen des a und des α mit

$$\vartheta \mathrm{a} \,,\, \vartheta \alpha \,,\, \vartheta^2 \mathrm{a} \,,\, \vartheta^2 \alpha \,,\, \vartheta^3 \mathrm{a} \,,\, \vartheta^3 \alpha \,,\quad \text{etc. etc.}$$

bezeichnet, und wenn man ferner, so lange x und y noch allgemein sind, kurzweg b, β, c, γ, bezüglich statt $b(x)$, $\beta(x)$, $c(x, y)$, $\gamma(x, y)$ setzt; so bekommt man

$$\begin{aligned}
\text{II)} \quad \delta U = {} & \left(\int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)} \int_{c(\alpha,y)}^{\gamma(\alpha,y)} W_{\alpha,y,z} \,.\, dz \,.\, dy\right) . \vartheta\alpha - \left(\int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} \int_{c(\mathrm{a},y)}^{\gamma(\mathrm{a},y)} W_{\mathrm{a},y,z} \,.\, dz \,.\, dy\right) . \vartheta\mathrm{a} \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \left[\left(\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)} W_{x,\beta,z} \,.\, dz\right) . \delta\beta - \left(\int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)} W_{x,b,z} \,.\, dz\right) . \delta b\right] . dx \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \int_{b(x)}^{\beta(x)} \left[W_{x,y,\gamma} \,.\, \delta\gamma(x, y) - W_{x,y,c} \,.\, \delta c(x, y)\right] . dy \,.\, dx \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \int_{b(x)}^{\beta(x)} \int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \delta W \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx
\end{aligned}$$

Die Bedeutung von ∂W ist aus Gleichung III der 14ten Untersuchung (§. 63) bekannt.

Weil die nach y und z auszuführenden Integrationen unabhängig sind von $\vartheta \mathrm{a}$, $\vartheta \alpha$, $\vartheta^2 \mathrm{a}$, $\vartheta^2 \alpha$, etc.; so kann man diese Bestandtheile auch vor die Differentiale dy und dz setzen. Weil ferner die nach z auszuführenden Integrationen unabhängig sind von $\partial b(x)$, $\partial \beta(x)$, $\partial^2 b(x)$, $\partial^2 \beta(x)$, etc.; so kann man diese Bestandtheile auch vor das Differential dz setzen. Gleichung II gestaltet sich also jetzt auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}
\text{III)}\quad \partial U = & \int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)} \int_{c(\alpha,y)}^{\gamma(\alpha,y)} W_{\alpha,y,z} \,.\, \vartheta\alpha \,.\, dz \,.\, dy - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})} \int_{c(\mathrm{a},y)}^{\gamma(\mathrm{a},y)} W_{\mathrm{a},y,z} \,.\, \vartheta \mathrm{a} \,.\, dz \,.\, dy \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)} W_{x,\beta,z} \,.\, \partial\beta \,.\, dz \,.\, dx - \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)} W_{x,b,z} \,.\, \partial b \,.\, dz \,.\, dx \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \int_{b(x)}^{\beta(x)} \left[W_{x,y,\gamma} \,.\, \partial\gamma - W_{x,y,c} \,.\, \partial c \right] . \, dy \,.\, dx \\
& + \int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \int_{b(x)}^{\beta(x)} \int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \partial W \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx
\end{aligned}$$

§. 88.

Die Bedingungen der jedesmaligen Aufgabe werden anzeigen, ob man von der Formel II oder III Gebrauch zu machen habe.

Die ferneren Umformungen, welche man mit dem dreifachen Integral

$$\int_{\mathrm{a}}^{\alpha} \int_{b(x)}^{\beta(x)} \int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \partial W \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx$$

noch vorzunehmen hat, sind bereits in der 15ten Untersuchung (§. 65 — 69) ausgeführt. Man beachte dabei besonders den Inhalt des §. 69.

Untersuchung 20.

§. 89.

Um jedoch die vorige Untersuchung einigermassen zu specialisiren, mag W ein reeller, mit den Bestandtheilen x, y, z, w, $\frac{d_x w}{dx}$, $\frac{d_y w}{dy}$, $\frac{d_z w}{dz}$ versehener Ausdruck sein.

Bezeichnet man, wie gewöhnlich, so auch diesmal die zu

$$\frac{d_x \partial w}{dx} \quad , \quad \frac{d_y \partial w}{dy} \quad , \quad \frac{d_z \partial w}{dz}$$

gehörigen Factoren bezüglich mit

$$(\mathrm{I}x) \quad , \quad (\mathrm{I}y) \quad , \quad (\mathrm{I}z)$$

und führt man die gehörigen Transformationen aus; so bekommt man zunächst

$$\text{I)}\quad \delta U = \Big(\int_{b(a)}^{\beta(a)}\int_{c(a,y)}^{\gamma(a,y)} W_{a,y,z} \,.\, dz \,.\, dy\Big) \,.\, \vartheta a - \Big(\int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}\int_{c(\mathrm{a},y)}^{\gamma(\mathrm{a},y)} W_{\mathrm{a},y,z} \,.\, dz \,.\, dy\Big) \,.\, \vartheta \mathrm{a}$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a}\Big[\Big(\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)} W_{x,\beta,z} \,.\, dz\Big) \,.\, \delta\beta - \Big(\int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)} W_{x,b,z} \,.\, dz\Big) \,.\, \delta b\Big] \,.\, dx$$

$$+ \int_{b(a)}^{\beta(a)}\int_{c(a,y)}^{\gamma(a,y)} (\mathrm{I}x)_{a,y,z} \,.\, \delta w_{a,y,z} \,.\, dz \,.\, dy - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}\int_{c(\mathrm{a},y)}^{\gamma(\mathrm{a},y)} (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y,z} \,.\, \delta w_{\mathrm{a},y,z} \,.\, dz \,.\, dy$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)} \Big((\mathrm{I}y)_{x,\beta,z} - (\mathrm{I}x)_{x,\beta,z} \,.\, \frac{d\beta}{dx}\Big) \,.\, \delta w_{x,\beta,z} \,.\, dz \,.\, dx$$

$$- \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)} \Big((\mathrm{I}y)_{x,b,z} - (\mathrm{I}x)_{x,b,z} \,.\, \frac{db}{dx}\Big) \,.\, \delta w_{x,b,z} \,.\, dz \,.\, dx$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)} \Big[W_{x,y,\gamma} \,.\, \delta\gamma + \Big((\mathrm{I}z)_{x,y,\gamma} - (\mathrm{I}y)_{x,y,\gamma} \,.\, \frac{d_y\gamma}{dy} - (\mathrm{I}x)_{x,y,\gamma} \,.\, \frac{d_x\gamma}{dx}\Big) \,.\, \delta w_{x,y,\gamma}$$

$$- W_{x,y,c} \,.\, \delta c - \Big((\mathrm{I}z)_{x,y,c} - (\mathrm{I}y)_{x,y,c} \,.\, \frac{d_y c}{dy} - (\mathrm{I}x)_{x,y,c} \,.\, \frac{d_x c}{dx}\Big) \,.\, \delta w_{x,y,c}\Big] \,.\, dy \,.\, dx$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \Big[\frac{d_w W}{dw} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy} - \frac{d_z(\mathrm{I}z)}{dz}\Big] \,.\, \delta w \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx$$

Weil man aber, wie bereits (in §. 87) näher begründet ist, die Bestandtheile $\vartheta \mathrm{a}$ und ϑa vor die Differentiale dz und dy, und weil man ebenso die Bestandtheile $\delta\beta$ und δb vor das Differential dz setzen darf; so kann man letztere Gleichung auch auf folgende Weise schreiben:

$$\text{II)}\quad \delta U = \int_{b(a)}^{\beta(a)}\int_{c(a,y)}^{\gamma(a,y)} (W_{a,y,z} \,.\, \vartheta a + (\mathrm{I}x)_{a,y,z} \,.\, \delta w_{a,y,z}) \,.\, dz \,.\, dy$$

$$- \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}\int_{c(\mathrm{a},y)}^{\gamma(\mathrm{a},y)} (W_{\mathrm{a},y,z} \,.\, \vartheta \mathrm{a} + (\mathrm{I}x)_{\mathrm{a},y,z} \,.\, \vartheta w_{\mathrm{a},y,z}) \,.\, dz \,.\, dy$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)} \Big[W_{x,\beta,z} \,.\, \delta\beta + \Big((\mathrm{I}y)_{x,\beta,z} - (\mathrm{I}x)_{x,\beta,z} \,.\, \frac{d\beta}{dx}\Big) \,.\, \delta w_{x,\beta,z}\Big] \,.\, dz \,.\, dx$$

$$- \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)} \Big[W_{x,b,z} \,.\, \delta b + \Big((\mathrm{I}y)_{x,b,z} - (\mathrm{I}x)_{x,b,z} \,.\, \frac{db}{dx}\Big) \,.\, \delta w_{x,b,z}\Big] \,.\, dz \,.\, dx$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)} \Big[W_{x,y,\gamma} \,.\, \delta\gamma + \Big((\mathrm{I}z)_{x,y,\gamma} - (\mathrm{I}y)_{x,y,\gamma} \,.\, \frac{d_y\gamma}{dy} - (\mathrm{I}x)_{x,y,\gamma} \,.\, \frac{d_x\gamma}{dx}\Big) \,.\, \delta w_{x,y,\gamma}$$

$$- W_{x,y,c} \,.\, \delta c - \Big((\mathrm{I}z)_{x,y,c} - (\mathrm{I}y)_{x,y,c} \,.\, \frac{d_y c}{dy} - (\mathrm{I}x)_{x,y,c} \,.\, \frac{d_x c}{dx}\Big) \,.\, \delta w_{x,y,c}\Big] \,.\, dy \,.\, dx$$

$$+ \int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \Big[\frac{d_w W}{dw} - \frac{d_x(\mathrm{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{I}y)}{dy} - \frac{d_z(\mathrm{I}z)}{dz}\Big] \,.\, \delta w \,.\, dz \,.\, dy \,.\, dx$$

Es hat jetzt keine Schwierigkeit, die Gleichungen I und II noch weiter zu behandeln, und in jedem Einzelfalle das betreffende Prüfungsmittel herzustellen. Das Verfahren ist dem analog, welches ich in der 12ten Untersuchung (§. 45 — 47) bei zweifachen Integralen angewendet habe.

§. 90.

Hiermit mag nun auch die Reihe der Untersuchungen, welche auf dreifache Integrale führen, und welche sich noch sehr vermehren lassen, geschlossen werden; denn alle dabei vorkommenden Eigenthümlichkeiten sind, wie man zur Genüge erkannt hat, denen analog, welche bei den auf zweifache Integrale führenden Untersuchungen bereits erledigt sind.

Ebenso hat der Übergang zu solchen Untersuchungen, welche auf vierfache, fünffache etc. Integrale führen, jetzt nicht den mindesten Anstand mehr; und auch für solche ist durch das Vorhergehende jede erforderliche Anleitung gegeben. Dass aber dergleichen Untersuchungen, namentlich wenn nicht alle Integrationsgränzen constant sind, einen sehr grossen Raum einnehmen, das bedarf kaum der Erwähnung.

Nachtrag.

§. 91.

Ich habe jetzt, wie schon im Anfange dieser Abhandlung (§. 1) angedeutet wurde, noch nachzuweisen, dass die von Sarrus, Cauchy und Delaunay mitgetheilten Resultate ihrem Gegenstande nicht genügen.

I. Abhandlung von Sarrus.

Diese führt den Titel: „Recherches sur le calcul des variations", und befindet sich in dem mit der Jahreszahl 1848 versehenen Bande X der Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences. Seite 1 — 128.

Sarrus gründet seine Resultate darauf, dass er ein eigenthümliches Substitutionszeichen einführt. Nemlich:

1. Wenn u eine Function von x ist, und dem x der feste Werth a beigelegt wird; so schreibe ich u_a. Sarrus aber schreibt $\urcorner_x^a u$.

2. Wenn u eine Function von x und y ist, und diesen beiden Veränderlichen bezüglich die festen Werthe a und b beigelegt werden; so schreibe ich $u_{a,b}$. Sarrus aber schreibt $\urcorner_x^a \urcorner_y^b u$.

3. Wenn u eine Function von x, y, z ist, und diesen drei Veränderlichen bezüglich die festen Werthe a, b, c beigelegt werden; so schreibe ich $u_{a,b,c}$. Sarrus aber schreibt $\urcorner_x^a \urcorner_y^b \urcorner_z^c u$.

Und so fort.

Die nächste Folge dieser Bezeichnungsweise ist, dass Sarrus viele Theilsätze, welche ich unter ein und dasselbe Integralzeichen bringe, von einander trennen, und unter abgesonderte Integralzeichen setzen muss. Davon ist die weitere Folge, dass die Sarrus'schen Formeln unfähig sind, jene Probleme zu lösen, wo verschiedene Gränzbedingungen in Rechnung gebracht werden sollen; und so kann man mit diesen Formeln nicht einmal jenes einfache Problem lösen, wo die „kleinste Oberfläche zwischen veränderlichen Gränzen" gesucht wird. (Man vergleiche die Anmerkungen, welche ich zu §. 26, 29, 43, 44 und 47 gemacht habe.)

Das Prüfungsmittel, an welchem man das Vorhandensein eines Grössten oder Kleinsten erkennt, hat Sarrus nirgendswo hergestellt, ja er hat desselben nicht einmal erwähnt. Auch sind seine Formeln unfähig, das Prüfungsmittel zu liefern, und zwar schon in jenem allereinfachsten Falle, welchen ich in der ersten Untersuchung (§. 10) erledigt habe.

Um die Wahrheit dieser Aussagen vor die Anschauung zu bringen, will ich die von Sarrus in seiner Abhandlung (Seite 119 — 128) aufgestellte Aufgabe auch nach meiner Weise durchführen, und alsdann die beiderlei Resultate miteinander vergleichen. Diese von Sarrus aufgestellte Aufgabe ist folgende:

„Quelle doit être la loi des densités des molécules d'un corps dont on connaît la „forme et la position, pour que, en désignant par v la densité de la molécule ayant „$x\ x_1\ x_2$ pour coordonnées et par w une fonction quelconque donnée de $x\ x_1\ x_2\ v$, „l'intégrale

$$\text{I)}\quad \int dx \int dx_1 \int dx_2\, w \,.\, \frac{d^3 v}{dx\ dx_1\ dx_2}$$

„soit un maximum ou un minimum, en supposant, d'ailleurs, cette intégrale prise dans „toute l'étendue du corps?"

Der Umstand, dass man es hier mit einem Körper von bestimmter Lage und Gestalt zu thun hat, verlangt ein bestimmtes Integral, wofür man die betreffende Bezeichnungsweise allerdings von Herrn Sarrus hätte erwarten dürfen.

In obigem Integral ist, wie aus der Aufgabe hervorgeht, durch v eine vorerst noch unbekannte Function der drei Coordinaten $x\,x_1\,x_2$ dargestellt, während w eine ganz bestimmte Zusammensetzung der vier Bestandtheile $x\,x_1\,x_2\,v$ bedeutet. Dieses berücksichtigend gelangt Sarrus (in Nr. 155, Seite 119 — 123) zu folgender Variationsgleichung der ersten Ordnung:

$$(1)\quad 0 = \int dx \int dx_1 \int dx_2 \left(\frac{dw}{dv} \,.\, \frac{d^3 v}{dx\, dx_1\, dx_2} - \frac{d^3 w}{dx\, dx_1\, dx_2} \right) . \,\delta v$$

$$(2)\quad + \int dx \int dx_1 \cap_{x_2}^{x_2''} \left(\frac{d^2 w}{dx\, dx_1} \right) . \,\delta v$$

$$(3)\quad + \int dx \int dx_1 \cap_{x_2}^{x_2''} \left(w \,.\, \frac{d^2 x_2''}{dx\, dx_1} + \frac{dw}{dv} \,.\, \frac{dx_2''}{dx_1} + \frac{dw}{dx_1} \,.\, \frac{dx_2''}{dx} + \frac{dw}{dx_2} \,.\, \frac{dx_2''}{dx} \,.\, \frac{dx_2''}{dx_1} \right) \frac{d\,\delta v}{dx_2}$$

$$(4)\quad + \int dx \int dx_1 \cap_{x_2}^{x_2''} \left(w \,.\, \frac{dx_2''}{dx} \,.\, \frac{dx_2''}{dx_1} \right) . \,\frac{d^2\,\delta v}{(dx_2)^2}$$

$$(5)\quad - \int dx \int dx_1 \cap_{x_2}^{x_2'} \left(\frac{d^2 w}{dx \,.\, dx_1} \right) . \,\delta v$$

$$(6)\quad - \int dx \int dx_1 \cap_{x_2}^{x_2'} \left(w \,.\, \frac{d^2 x_2'}{dx \,.\, dx_1} + \frac{dw}{dv} \,.\, \frac{dx_2'}{dx_1} + \frac{dw}{dx_1} \,.\, \frac{dx_2'}{dx} + \frac{dw}{dx_2} \,.\, \frac{dx_2'}{dx} \,.\, \frac{dx_2'}{dx_1} \right) . \,\frac{d\,\delta v}{dx_2}$$

$$(7)\quad - \int dx \int dx_1 \cap_{x_2}^{x_2'} \left(w \,.\, \frac{dx_2'}{dx} \,.\, \frac{dx_2'}{dx_1} \right) . \,\frac{d^2\,\delta v}{(dx_2)^2}$$

$$(8)\quad + \int dx \cap_{x_1}^{x_1''} \int dx_2 \left(\frac{d^2 w}{dx \,.\, dx_2} \right) . \,\delta v$$

$$(9)\quad + \int dx \cap_{x_1}^{x_1''} \int dx_2 \left(\frac{dw}{dx_2} \right) . \,\frac{d\,\delta v}{dx_1}$$

$$(10)\quad - \int dx \cap_{x_1}^{x_1'} \int dx_2 \left(\frac{d^2 w}{dx\, dx_2} \right) . \,\delta v$$

$$-\int dx \bigcap_{x_1}^{x_1'} \int dx_2 \left(\frac{dw}{dx_2}\right) \cdot \frac{d\,\delta v}{dx_1} \tag{11}$$

$$+\bigcap_{x}^{x''} \int dx_1 \int dx_2 \left(\frac{d^2 w}{dx_1\, dx_2}\right) \,.\, \delta v \tag{12}$$

$$-\bigcap_{x}^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \left(\frac{d^2 w}{dx_1\, dx_2}\right) \,.\, \delta v \tag{13}$$

$$-\int dx \bigcap_{x_1}^{x_1''} \bigcap_{x_2}^{x_2''} \left(\frac{dw}{dx}\right) \,.\, \delta v \tag{14}$$

$$-\int dx \bigcap_{x_1}^{x_1''} \bigcap_{x_2}^{x_2''} (w) \,.\, \frac{d\,\delta v}{dx_1} \tag{15}$$

$$-\int dx \bigcap_{x_1}^{x_1''} \bigcap_{x_2}^{x_2''} \left(w \,.\, \frac{dx_2''}{dx}\right) \cdot \frac{d\,\delta v}{dx_2} \tag{16}$$

$$+\int dx \bigcap_{x_1}^{x_1''} \bigcap_{x_2}^{x_2'} \left(\frac{dw}{dx}\right) \,.\, \delta v \tag{17}$$

$$+\int dx \bigcap_{x_1}^{x_1''} \bigcap_{x_2}^{x_2'} (w) \,.\, \frac{d\,\delta v}{dx_1} \tag{18}$$

$$+\int dx \bigcap_{x_1}^{x_1''} \bigcap_{x_2}^{x_2'} \left(w \,.\, \frac{dx_2'}{dx}\right) \cdot \frac{d\,\delta v}{dx_2} \tag{19}$$

$$+\int dx \bigcap_{x_1}^{x_1'} \bigcap_{x_2}^{x_2''} \left(\frac{dw}{dx}\right) \,.\, \delta v \tag{20}$$

$$+\int dx \bigcap_{x_1}^{x_1'} \bigcap_{x_2}^{x_2''} (w) \,.\, \frac{d\,\delta v}{dx_1} \tag{21}$$

$$+\int dx \bigcap_{x_1}^{x_1'} \bigcap_{x_2}^{x_2''} \left(w \,.\, \frac{dx_2''}{dx}\right) \cdot \frac{d\,\delta v}{dx_2} \tag{22}$$

$$-\int dx \bigcap_{x_1}^{x_1'} \bigcap_{x_2}^{x_2'} \left(\frac{dw}{dx}\right) \,.\, \delta v \tag{23}$$

$$-\int dx \bigcap_{x_1}^{x_1'} \bigcap_{x_2}^{x_2'} (w) \,.\, \frac{d\,\delta v}{dx_1} \tag{24}$$

$$-\int dx \bigcap_{x_1}^{x_1'} \bigcap_{x_2}^{x_2'} \left(w \,.\, \frac{dx_2'}{dx}\right) \cdot \frac{d\,\delta v}{dx_2} \tag{25}$$

$$-\bigcap_{x}^{x''} \int dx_1 \bigcap_{x_2}^{x_2''} \left(\frac{dw}{dx_1}\right) \,.\, \delta v \tag{26}$$

$$-\bigcap_{x}^{x''} \int dx_1 \bigcap_{x_2}^{x_2''} \left(w \,.\, \frac{dx_2''}{dx_1}\right) \cdot \frac{d\,\delta v}{dx_2} \tag{27}$$

$$+\bigcap_{x}^{x''} \int dx_1 \bigcap_{x_2}^{x_2'} \left(\frac{dw}{dx_1}\right) \,.\, \delta v \tag{28}$$

$$+\bigcap_{x}^{x''} \int dx_1 \bigcap_{x_2}^{x_2'} \left(w \,.\, \frac{dx_2'}{dx_1}\right) \cdot \frac{d\,\delta v}{dx_2} \tag{29}$$

$$+\bigcap_{x}^{x'} \int dx_1 \bigcap_{x_2}^{x_2''} \left(\frac{dw}{dx_1}\right) \,.\, \delta v \tag{30}$$

$$+\bigcap_{x}^{x'} \int dx_1 \bigcap_{x_2}^{x_2''} \left(w \,.\, \frac{dx_2''}{dx_1}\right) \cdot \frac{d\,\delta v}{dx_2} \tag{31}$$

$$-\bigcap_{x}^{x'} \int dx_1 \bigcap_{x_2}^{x_2'} \left(\frac{dw}{dx_1}\right) \,.\, \delta v \tag{32}$$

$$(33)\qquad -\Upsilon_x^{x'}\int dx_1\,\Upsilon_{c_2}^{x_2'}\left(w\cdot\frac{dx_2'}{dx_1}\right)\cdot\frac{d\delta v}{dx_2}$$

$$(34)\qquad -\Upsilon_x^{x''}\Upsilon_{x_1}^{x_1''}\int dx_2\left(\frac{dw}{dx_2}\right)\cdot\delta v$$

$$(35)\qquad +\Upsilon_x^{x''}\Upsilon_{x_1}^{x_1'}\int dx_2\left(\frac{dw}{dx_2}\right)\cdot\delta v$$

$$(36)\qquad +\Upsilon_x^{x'}\Upsilon_{x_1}^{x_1''}\int dx_2\left(\frac{dw}{dx_2}\right)\cdot\delta v$$

$$(37)\qquad -\Upsilon_x^{x'}\Upsilon_{x_1}^{x_1'}\int dx_2\left(\frac{dw}{dx_2}\right)\cdot\delta v$$

$$(38)\qquad +\Upsilon_x^{x''}\Upsilon_{x_1}^{x_1''}\Upsilon_{x_2}^{x_2''}(w)\cdot\delta v$$

$$(39)\qquad -\Upsilon_x^{x''}\Upsilon_{x_1}^{x_1''}\Upsilon_{x_2}^{x_2'}(w)\cdot\delta v$$

$$(40)\qquad -\Upsilon_x^{x''}\Upsilon_{x_1}^{x_1'}\Upsilon_{x_2}^{x_2''}(w)\cdot\delta v$$

$$(41)\qquad +\Upsilon_x^{x''}\Upsilon_{x_1}^{x_1'}\Upsilon_{x_2}^{x_2'}(w)\cdot\delta v$$

$$(42)\qquad -\Upsilon_x^{x'}\Upsilon_{x_1}^{x_1''}\Upsilon_{x_2}^{x_2''}(w)\cdot\delta v$$

$$(43)\qquad +\Upsilon_x^{x'}\Upsilon_{x_1}^{x_1''}\Upsilon_{x_2}^{x_2'}(w)\cdot\delta v$$

$$(44)\qquad +\Upsilon_x^{x'}\Upsilon_{x_1}^{x_1'}\Upsilon_{x_2}^{x_2''}(w)\cdot\delta v$$

$$(45)\qquad -\Upsilon_x^{x'}\Upsilon_{x_1}^{x_1'}\Upsilon_{x_2}^{x_2'}(w)\cdot\delta v$$

Nun will ich diese von Sarrus aufgestellte Variationsgleichung nach meiner Methode entwickeln. Dabei werde ich, zur Bequemlichkeit, die drei Coordinaten mit x, y, z darstellen, und auch hier meine für die partiellen Differentiale angenommenen Bezeichnungen gebrauchen. Das Integral I nimmt also jetzt folgende Form an:

$$\text{II)}\quad U=\int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)}\left(w\cdot\frac{d_xd_yd_z v}{dx\,.\,dy\,.\,dz}\right).\,dz\,.\,dy\,.\,dx$$

Hier ist, wie aus der Aufgabe hervorgeht, v eine vorerst noch unbekannte Function von x, y, z, während w eine ganz bestimmte Zusammensetzung der vier Bestandtheile x, y, z, v bedeutet; und weil der Körper eine bestimmte Gestalt und Lage haben soll, so sind nicht allein die Werthe von a und α constant, sondern auch die Functionen $b(x)$, $\beta(x)$, $c(x, y)$, $\gamma(x, y)$ sind bestimmt. Desshalb bekommt man aus letzterer Gleichung zunächst nur

$$\text{III)}\quad \delta U=\int_a^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)}\left(\frac{d_v w}{dv}\cdot\frac{d_xd_yd_z v}{dx\,.\,dy\,.\,dz}\,\delta v+w\,\frac{d_xd_yd_z\,\delta v}{dx\,.\,dy\,.\,dz}\right)dz\,.\,dy\,.\,dx$$

Um diesen Ausdruck gehörig umformen zu können, gestalte man ihn zuerst auf folgende Weise:

$$\text{IV)}\quad \delta U = \int_{a}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \Bigg[\left(\frac{d_v w}{dv} \cdot \frac{d_x d_y d_z v}{dx . dy . dz} - \frac{d_x d_y d_z w}{dx . dy . dz} \right) . \delta v$$

$$+ \frac{d_x\left(\frac{d_y d_z w}{dy . dz} . \delta v\right)}{dx} + \frac{d_y\left(\frac{d_x d_z w}{dx . dz} . \delta v\right)}{dy} + \frac{d_z\left(\frac{d_x d_y w}{dx . dy} . \delta v\right)}{dz}$$

$$- \frac{d_x d_y\left(\frac{d_z w}{dz}\, \delta v\right)}{dx . dy} - \frac{d_x d_z\left(\frac{d_y w}{dy}\, \delta v\right)}{dx . dz} - \frac{d_y d_z\left(\frac{d_x w}{dx}\, \delta v\right)}{dy . dx} + \frac{d_x d_y d_z (w . \delta v)}{dx . dy . dz} \Bigg] . dz . dy . dx$$

Wenn man letztere Form mit Gleichung III der 15ten Untersuchung (§. 66) vergleicht: so erkennt man, dass diesmal

$$(\Sigma xyz) = w . \delta v \quad , \quad (\Sigma xy) = -\frac{d_z w}{dz}\delta v \quad , \quad (\Sigma xz) = -\frac{d_y w}{dy}\delta v \quad , \quad (\Sigma yz) = -\frac{d_x w}{dx}\delta v \quad ,$$

$$(\Sigma x) = \frac{d_y d_z w}{dy . dz}\delta v \quad , \quad (\Sigma y) = \frac{d_x d_z w}{dx . dz}\delta v \quad , \quad (\Sigma z) = \frac{d_x d_y w}{dx . dy}\delta v \quad , \quad (\Sigma) = \left(\frac{d_v w}{dv} \cdot \frac{d_x d_y d_z v}{dx . dy . dz} - \frac{d_x d_y d_z w}{dx . dy . dz} \right)\delta v$$

ist. Diese acht Ausdrücke substituire man jetzt in die allgemeine Form XII der 15ten Untersuchung (§. 68), und reducire soviel als möglich. Zugleich setze man, so lange x und y noch allgemein sind, b , β , c , γ bezüglich statt $b(x)$, $\beta(x)$, $c(x, y)$, $\gamma(x, y)$, welche Abkürzungen natürlich nicht mehr angewendet werden dürfen, sobald von den zwei Veränderlichen x und y einer oder alle beide specialisirt sind. So verfahrend bekommt man

$$\text{V)}\quad \delta U = \int_{a}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \left(\frac{d_v w}{dv} \cdot \frac{d_x d_y d_z v}{dx . dy . dz} - \frac{d_x d_y d_z w}{dx . dy . dz} \right) . \delta v . dz . dy . dx$$

$$+ \int_{a}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)} \Bigg[\left(\frac{d_x d_y w}{dx . dy}\right)_{x,y,\gamma} . \delta v_{x,y,\gamma} + \left(w \frac{d_x d_y \gamma}{dx . dy} + \frac{d_x w}{dx} \cdot \frac{d_y \gamma}{dy} + \frac{d_y w}{dy} \cdot \frac{d_x \gamma}{dx} \right.$$

$$\left. + \frac{d_z w}{dz} \cdot \frac{d_x \gamma}{dx} \cdot \frac{d_y \gamma}{dy} \right)_{x,y,\gamma} . \left(\frac{d_z \delta v}{dz}\right)_{x,y,\gamma} + w_{x,y,\gamma} \frac{d_x \gamma}{dx} \cdot \frac{d_y \gamma}{dy} \cdot \left(\frac{d_z^2 \delta v}{dz^2}\right)_{x,y,\gamma}$$

$$- \left(\frac{d_x d_y w}{dx . dy}\right)_{x,y,c} . \delta v_{x,y,c} - \left(w \frac{d_x d_y c}{dx . dy} + \frac{d_x w}{dx} \cdot \frac{d_y c}{dy} + \frac{d_y w}{dy} \cdot \frac{d_x c}{dx} \right.$$

$$\left. + \frac{d_z w}{dz} \cdot \frac{d_x c}{dx} \cdot \frac{d_y c}{dy} \right)_{x,y,c} . \left(\frac{d_z \delta v}{dz}\right)_{x,y,c} - w_{x,y,c} \frac{d_x c}{dx} \cdot \frac{d_y c}{dy} \cdot \left(\frac{d_z^2 \delta v}{dz^2}\right)_{x,y,c} \Bigg] . dy . dx$$

$$+ \int_{a}^{\alpha}\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)} \left[\left(\frac{d_x d_z w}{dx . dz}\right)_{x,\beta,z} . \delta v_{x,\beta,z} + \left(\frac{d_z w}{dz}\right)_{x,\beta,z} . \frac{d\beta}{dx} . \left(\frac{d_y \delta v}{dy}\right)_{x,\beta,z} \right] . dz . dx$$

$$- \int_{a}^{\alpha}\int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)} \left[\left(\frac{d_x d_z w}{dx . dz}\right)_{x,b,z} . \delta v_{x,b,z} + \left(\frac{d_z w}{dz}\right)_{x,b,z} . \frac{db}{dx} . \left(\frac{d_y \delta v}{dy}\right)_{x,b,z} \right] . dz . dx$$

$$+ \int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)}\int_{c(\alpha,y)}^{\gamma(\alpha,y)} \left(\frac{d_y d_z w}{dy . dz}\right)_{\alpha,y,z} . \delta v_{\alpha,y,z} . dz . dy$$

$$- \int_{b(a)}^{\beta(a)}\int_{c(a,y)}^{\gamma(a,y)} \left(\frac{d_y d_z w}{dy . dz}\right)_{a,y,z} . \delta v_{a,y,z} . dz . dy$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\mathrm{a}}^{a}\Big[-\Big(\frac{d_x w}{dx}\Big)_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}\,.\,\delta v_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}-w_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}\frac{d\beta}{dx}\,.\Big(\frac{d_y\delta v}{dy}\Big)_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}\\
&\qquad\qquad -\Big(w\frac{d_x\gamma}{dx}\Big)_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}\,.\Big(\frac{d_z\delta v}{dz}\Big)_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}\\
&\qquad +\Big(\frac{d_x w}{dx}\Big)_{x,b,\gamma(x,b)}\,.\,\delta v_{x,b,\gamma(x,b)}+w_{x,b,\gamma(x,b)}\frac{db}{dx}\,.\Big(\frac{d_y\delta v}{dy}\Big)_{x,b,\gamma(x,b)}\\
&\qquad\qquad +\Big(w\frac{d_x\gamma}{dx}\Big)_{x,b,\gamma(x,b)}\,.\Big(\frac{d_z\delta v}{dz}\Big)_{x,b,\gamma(x,b)}\\
&\qquad +\Big(\frac{d_x w}{dx}\Big)_{x,\beta,c(x,\beta)}\,.\,\delta v_{x,\beta,c(x,\beta)}+w_{x,\beta,c(x,\beta)}\frac{d\beta}{dx}\,.\Big(\frac{d_y\delta v}{dy}\Big)_{x,\beta,c(x,\beta)}\\
&\qquad\qquad +\Big(w\frac{d_x c}{dx}\Big)_{x,\beta,c(x,\beta)}\,.\Big(\frac{d_z\delta v}{dz}\Big)_{x,\beta,c(x,\beta)}\\
&\qquad -\Big(\frac{d_x w}{dx}\Big)_{x,b,c(x,b)}\,.\,\delta v_{x,b,c(x,b)}-w_{x,b,c(x,b)}\frac{db}{dx}\,.\Big(\frac{d_y\delta v}{dy}\Big)_{x,b,c(x,b)}\\
&\qquad\qquad -\Big(w\frac{d_x c}{dx}\Big)_{x,b,c(x,b)}\,.\Big(\frac{d_z\delta v}{dz}\Big)_{x,b,c(x,b)}\Big]\,.\,dx\\
&+\int_{b(a)}^{\beta(a)}\Big[-\Big(\frac{d_y w}{dy}\Big)_{a,y,\gamma(a,y)}\,.\,\delta v_{a,y,\gamma(a,y)}-\Big(w\frac{d_y\gamma}{dy}\Big)_{a,y,\gamma(a,y)}\,.\Big(\frac{d_z\delta v}{dz}\Big)_{a,y,\gamma(a,y)}\\
&\qquad +\Big(\frac{d_y w}{dy}\Big)_{a,y,c(a,y)}\,.\,\delta v_{a,y,c(a,y)}+\Big(w\frac{d_y c}{dy}\Big)_{a,y,c(a,y)}\,.\Big(\frac{d_z\delta v}{dz}\Big)_{a,y,c(a,y)}\Big]\,.\,dy\\
&-\int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}\Big[-\Big(\frac{d_y w}{dy}\Big)_{\mathrm{a},y,\gamma(\mathrm{a},y)}\,.\,\delta v_{\mathrm{a},y,\gamma(\mathrm{a},y)}-\Big(w\frac{d_y\gamma}{dy}\Big)_{\mathrm{a},y,\gamma(\mathrm{a},y)}\,.\Big(\frac{d_z\delta v}{dz}\Big)_{\mathrm{a},y,\gamma(\mathrm{a},y)}\\
&\qquad +\Big(\frac{d_y w}{dy}\Big)_{\mathrm{a},y,c(\mathrm{a},y)}\,.\,\delta v_{\mathrm{a},y,c(\mathrm{a},y)}+\Big(w\frac{d_y c}{dy}\Big)_{\mathrm{a},y,c(\mathrm{a},y)}\,.\Big(\frac{d_z\delta v}{dz}\Big)_{\mathrm{a},y,c(\mathrm{a},y)}\Big]\,.\,dy\\
&+\int_{c(a,\beta[a])}^{\gamma(a,\beta[a])}\Big(-\frac{d_z w}{dz}\Big)_{a,\beta(a),z}\,.\,\delta v_{a,\beta(a),z}\,.\,dz-\int_{c(a,b[a])}^{\gamma(a,b[a])}\Big(-\frac{d_z w}{dz}\Big)_{a,b(a),z}\,.\,\delta v_{a,b(a),z}\,.\,dz\\
&-\int_{c(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}^{\gamma(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}\Big(-\frac{d_z w}{dz}\Big)_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),z}\,.\,\delta v_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),z}\,.\,dz+\int_{c(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}^{\gamma(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}\Big(-\frac{d_z w}{dz}\Big)_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),z}\,.\,\delta v_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),z}\,.\,dz\\
&+w_{a,\beta(a),\gamma(a,\beta[a])}\,.\,\delta v_{a,\beta(a),\gamma(a,\beta[a])}-w_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),\gamma(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}\,.\,\delta v_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),\gamma(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}\\
&-w_{a,b(a),\gamma(a,b[a])}\,.\,\delta v_{a,b(a),\gamma(a,b[a])}+w_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),\gamma(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}\,.\,\delta v_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),\gamma(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}\\
&-w_{a,\beta(a),c(a,\beta[a])}\,.\,\delta v_{a,\beta(a),c(a,\beta[a])}+w_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),c(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}\,.\,\delta v_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),c(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}\\
&+w_{a,b(a),c(a,b[a])}\,.\,\delta v_{a,b(a),c(a,b[a])}-w_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),c(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}\,.\,\delta v_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),c(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}
\end{aligned}
$$

§. 92.

Wenn man jetzt diese meine Formel mit der von Sarrus aufgestellten vergleicht; so gewahrt man sogleich, dass bei Sarrus jede der sechsunddreisig, mit Nr. 2 — 37 bezeichneten, Zeilen auch mit besonderen Integralzeichen versehen, und dass somit alle darunter befindlichen Variationen von einander abgesperrt sind, wesshalb auch letztere in keine Abhängigkeit unter einander gebracht werden können.

1. Die sechs, bei Sarrus mit Nr. 2 — 7 bezeichneten, Zeilen habe ich unter das einzige Integralzeichen $\int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)}$ gebracht; und erst so ist es möglich, die sechs Ausdrücke

$$\partial v_{x,y,\gamma}\quad,\quad \partial v_{x,y,c}\quad;\quad \left(\frac{d_z\partial v}{dz}\right)_{x,y,\gamma}\quad,\quad \left(\frac{d_z\partial v}{dz}\right)_{x,y,c}\quad,\quad \left(\frac{d_z^2\partial v}{dz^2}\right)_{x,y,\gamma}\quad,\quad \left(\frac{d_z^2\partial v}{dz^2}\right)_{x,y,c}$$

von einander abhängig zu machen.

2. Die zwei, bei Sarrus mit Nr. 8 und Nr. 9 bezeichneten, Zeilen habe ich unter das einzige Integralzeichen $\int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)}$ gebracht; und erst so ist es möglich, zwischen $\partial v_{x,\beta,z}$ und $\left(\frac{d_y\partial v}{dy}\right)_{x,\beta,z}$ irgend eine Abhängigkeit aufzustellen.

3. Ebenso habe ich die zwei, bei Sarrus mit Nr. 10 und Nr. 11 bezeichneten, Zeilen unter das einzige Integralzeichen $\int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)}$ gebracht; und somit habe ich auch zwischen $\partial v_{x,b,z}$ $\left(\frac{d_y\partial v}{dy}\right)_{x,b,z}$ die nöthige Verbindung hergestellt.

4. Dagegen musste eine jede der zwei, bei Sarrus mit Nr. 12 und Nr. 13 bezeichneten, Zeilen auch in meiner Formel mit einem besonderen Integralzeichen versehen werden: und so bleiben auch hier die beiden Ausdrücke $\partial v_{a,y,z}$ und $\partial v_{\mathrm{a},y,z}$ von einander abgesperrt.

5. Die zwölf, bei Sarrus mit Nr. 14 — 25 bezeichneten, Zeilen habe ich unter das einzige Integralzeichen $\int_{\mathrm{a}}^{a}$ gebracht; und so ist es möglich, die zwölf Ausdrücke

$$\begin{array}{llll}
\partial v_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}\quad, & \partial v_{x,b,\gamma(x,b)}\quad, & \partial v_{x,\beta,c(x,\beta)}\quad, & \partial v_{x,b,c(x,b)} \\
\left(\frac{d_y\partial v}{dy}\right)_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}\quad, & \left(\frac{d_y\partial v}{dy}\right)_{x,b,\gamma(x,b)}\quad, & \left(\frac{d_y\partial v}{dy}\right)_{x,\beta,c(x,\beta)}\quad, & \left(\frac{d_y\partial v}{dy}\right)_{x,b,c(x,b)} \\
\left(\frac{d_z\partial v}{dz}\right)_{z,\beta,\gamma(x,\beta)}\quad, & \left(\frac{d_z\partial v}{dz}\right)_{x,b,\gamma(x,b)}\quad, & \left(\frac{d_z\partial v}{dz}\right)_{x,\beta,c(x,\beta)}\quad, & \left(\frac{d_z\partial v}{dz}\right)_{x,b,c(x,b)}
\end{array}$$

von einander abhängig zu machen.

6. Die vier, bei Sarrus mit Nr. 26 — 29 bezeichneten, Zeilen habe ich unter das einzige Integralzeichen $\int_{b(a)}^{\beta(a)}$ gebracht; und erst so ist es möglich, die vier Ausdrücke

$$\partial v_{a,y,\gamma(a,y)}\quad,\quad \partial v_{a,y,c(a,y)}\quad,\quad \left(\frac{d_z\partial v}{dz}\right)_{a,y,\gamma(a,y)}\quad,\quad \left(\frac{d_z\partial v}{dz}\right)_{a,y,c(a,y)}$$

von einander abhängig zu machen.

7. Ebenso habe ich die vier, bei Sarrus mit Nr. 30 — 33 bezeichneten, Zeilen unter das einzige Integralzeichen $\int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}$ gebracht, so dass auch zwischen den vier Ausdrücken

$$\partial v_{\mathrm{a},y,\gamma(\mathrm{a},y)}\quad,\quad \partial v_{\mathrm{a},y,c(\mathrm{a},y)}\quad,\quad \left(\frac{d_z\partial v}{dz}\right)_{\mathrm{a},y,\gamma(\mathrm{a},y)}\quad,\quad \left(\frac{d_z\partial v}{dz}\right)_{\mathrm{a},y,c(\mathrm{a},y)}$$

die gehörige Verbindung hergestellt ist.

8. Dagegen musste eine jede der vier, bei Sarrus mit Nr. 34 — 37 bezeichneten, Zeilen auch in meiner Formel mit einem besonderen Integralzeichen versehen werden: und so blieben auch hier die vier Ausdrücke

$$\delta r_{\alpha,\beta(\alpha),z} \;\cdot\; \delta r_{\alpha,b(\alpha),z} \;\cdot\; \delta r_{a,\beta(a),z} \;\cdot\; \delta r_{a,b(a),z}$$

von einander abgesperrt.

§. 93.

Hiermit hat man in der That ersehen, dass, wie schon im Anfange des §. 91 vorbemerkt wurde, die Sarrus'schen Formeln unfähig sind, die auf die Gränzen sich beziehenden Variationen voneinander abhängig zu machen, dass man also mit diesen Formeln z. B. nicht einmal das einfache Problem lösen kann, wo die „kleinste Oberfläche zwischen gegebenen Flächen" gesucht wird. (Man vergleiche die Anmerkungen, welche ich zu §. 26, §. 29, §. 43, §. 44 und §. 47 gemacht habe.)

So wie sich ferner von Herstellung des Prüfungsmittels in der Sarrus'schen Abhandlung keine Spur vorfindet; ebenso würden, wenn er dasselbe herzustellen versucht hätte, ihm seine Formeln die geeigneten Dienste versagt haben, und zwar schon in jenem allereinfachsten Falle, welchen ich in der ersten Untersuchung (§. 10) erledigt habe. (Man vergleiche §. 96.)

II. Abhandlung von Cauchy.

§. 94. Diese führt den Titel: „Mémoire sur le calcul des variations", und befindet sich (Seite 50 – 130) in dem dritten Bande der Exercices d'analyse et de physique mathématique, par A. Cauchy. Paris 1844. Mit diesem Mémoire bezweckte Cauchy, die Theorie des sogenannten Variationscalcul's an seine bereits mit so grossem Beifalle aufgenommene Theorie des Differentialcalcul's anzureihen; und zugleich spricht er sich aus, dass er die von Sarrus mitgetheilten Formeln auf concisere Weise darstellen wolle.

Cauchy gründet seine Resultate ebenfalls auf die Einführung eines eigenthümlichen Substitutionszeichens. Wenn nämlich durch u eine Function von x dargestellt ist, und die besonderen Werthe x' und x'' an die Stelle des allgemeinen x gesetzt werden; so bezeichnet Cauchy diese beiden Substitutionen durch

$$\overset{x=x'}{\Big|}\, u, \quad \text{und} \quad \overset{x=x''}{\Big|}\, u$$

und die Differenz $\overset{x=x''}{\Big|}\, u - \overset{x=x'}{\Big|}\, u$ stellt er dar durch

$$\overset{x=x''}{\underset{x=x'}{\Big|}}\, u$$

Von letzterem Zeichen spricht er alsdann (Seite 100 in der Anmerkung), dass es demjenigen analog sei, dessen sich die Mathematiker zur Darstellung der bestimmten Integrale bedienen, und dass man durch dasselbe auch eine grosse Anzahl von Formeln in der Algebra und im Infinitesimalcalcul viel einfacher und conciser machen könne. So z. B. könne man durch dasselbe die Formel

$$\int_{x'}^{x''} \frac{du}{dx} \cdot dx = f(x'') - f(x')$$

in welcher $u = f(x)$ genommen ist, reduciren auf

$$\int_{x'}^{x''} \frac{du}{dx} \cdot dx = \overset{x = x''}{\underset{x = x'}{|}} u$$

Ebenso könne man die Formel

$$\int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} \frac{d_x d_y u}{dx \cdot dy} \cdot dy \cdot dx = f(x'', y'') - f(x'', y') - f(x', y'') + f(x', y')$$

wo $u = f(x, y)$ genommen ist, reduciren auf

$$\int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} \frac{d_x d_y u}{dx \cdot dy} \cdot dy \cdot dx = \overset{x = x''}{\underset{x = x'}{|}} \; \overset{y = y''}{\underset{y = y'}{|}} u$$

Auf gleiche Weise könne man die Formel

$$\int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \frac{d_x d_y d_z u}{dx \cdot dy \cdot dz} \cdot dz \cdot dy \cdot dx = + f(x'', y'', z'') - f(x'', y'', z') - f(x'', y', z'') + f(x'', y', z')$$

$$- f(x', y'', z'') + f(x', y'', z') + f(x', y', z'') - f(x', y', z')$$

wo $u = f(x, y, z)$ genommen ist, reduciren auf

$$\int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \frac{d_x d_y d_z u}{dx \cdot dy \cdot dz} dz \cdot dy \cdot dx = \overset{x = x''}{\underset{x = x'}{|}} \; \overset{y = y''}{\underset{y = y'}{|}} \; \overset{z = z''}{\underset{z = z'}{|}} u$$

Und so fort.

Diese Bezeichnungsweise mag sich allerdings in manchen Fällen als zweckmässig erweisen; allein wenn man sie im Variationscalcul anwendet, dann leistet sie nicht die nöthigen Dienste. Der erforderliche Nachweis mag an folgender Gleichung

$$\mathfrak{D} \qquad \delta s = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} R \cdot \mathrm{D}_x \mathrm{D}_y \mathrm{D}_z \delta u \cdot dz \cdot dy \cdot dx$$

geliefert werden. Hier ist u eine noch unbekannte Function von x, y, z; dagegen R ist eine ganz bestimmte Zusammensetzung der vier Bestandtheile x, y, z, u. Unter z' und z'' sind Functionen der beiden Veränderlichen x und y, dagegen unter y' und y'' sind nur Functionen des einzigen Veränderlichen x zu verstehen. Durch $\mathrm{D}_x \mathrm{D}_y \mathrm{D}_z \delta u$ bezeichnet Cauchy den Differentialquotient $\frac{d_x d_y d_z \delta u}{dx \cdot dy \cdot dz}$. Nach Ausführung aller nöthigen Transformationen gelangt derselbe (auf Seite 128 und 129 seiner Abhandlung) zu einer Gleichung, welche aus folgenden Theilsätzen besteht:

$$\mathfrak{E} \quad \delta s = + \overset{x = x''}{\underset{x = x'}{|}} \; \overset{y = y''}{\underset{y = y'}{|}} \; \overset{z = z''}{\underset{z = z'}{|}} R \cdot \delta u$$

$$- \int_{x'}^{x''} \overset{y = y''}{\underset{y = y'}{|}} \; \overset{z = z''}{\underset{z = z'}{|}} \mathrm{D}_x \mathrm{R} \cdot \delta u \cdot dx$$

$$- \int_{x'}^{x''} \overset{y = y''}{|} \; \overset{z = z''}{\underset{z = z'}{|}} R \cdot \mathrm{D}_x y'' \cdot \mathrm{D}_y \delta u \cdot \delta x + \int_{x'}^{x''} \overset{y = y'}{|} \; \overset{z = z''}{\underset{z = z'}{|}} R \cdot \mathrm{D}_x y' \cdot \mathrm{D}_y \delta u \cdot dx$$

$$-\int_{x'}^{x''} \overset{y=y''}{\underset{y=y'}{|}} \overset{z=z''}{|} R . D_x z'' . D_z \partial u . dx + \int_{x'}^{x''} \overset{y=y''}{\underset{y=y'}{|}} \overset{z=z'}{|} R . D_x z' . D_z \partial u . dx$$

$$-\overset{x=x''}{\underset{x=x'}{|}} \int_{y'}^{y''} \overset{z=z''}{\underset{z=z'}{|}} D_y R . \partial u . dy$$

$$-\overset{x=x''}{\underset{x=x'}{|}} \int_{y'}^{y''} \overset{z=z''}{|} R . D_y z'' . D_z \partial u . dy + \overset{x=x''}{\underset{x=x'}{|}} \int_{y'}^{y''} \overset{z=z'}{|} R . D z' . D_z \partial u . dy$$

$$-\overset{x=x''}{\underset{x=x'}{|}} \overset{y=y''}{\underset{y=y'}{|}} \int_{z'}^{z''} D_z R . \partial u . dz$$

$$+\int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} [\overset{z=z''}{|} D_x R . D_y z'' + D_y(\overset{z=z''}{|} R . D_x z'')] \overset{z=z''}{|} D_z \partial u . dy . dx$$

$$-\int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} [\overset{z=z'}{|} D_x R . D_y z' + D_y(\overset{z=z'}{|} R . D_x z')] \overset{z=z'}{|} D_z \partial u . dy . dx$$

$$+\int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} \overset{z=z''}{|} R . D_x z'' . D_y z'' . D_z^2 \partial u . dy . dx - \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} \overset{z=z'}{|} R . D_x z' . D_y z' . D_z^2 \partial u . dy . dx$$

$$+\int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} \overset{z=z''}{\underset{z=z'}{|}} D_x D_y R . \partial u . dy . dx$$

$$+\int_{x'}^{x''} \overset{y=y''}{|} \int_{z'}^{z''} D_z R . D_x y'' . D_y \partial u . dz . dx - \int_{x'}^{x''} \overset{y=y'}{|} \int_{z'}^{z''} D_z R . D_x y' . D_y \partial u . dz . dx$$

$$+\int_{x'}^{x''} \overset{y=y''}{\underset{y=y'}{|}} \int_{z'}^{z''} D_x D_y R . \partial u . dz . dx$$

$$+\overset{x=x''}{\underset{x=x'}{|}} \int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} D_y D_z R . \partial u . dz . dy$$

$$-\int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} D_x D_y D_z . \partial u . \partial z . dy . dx$$

Nun will ich diese von Cauchy aufgestellte Variationsgleichung nach meiner Methode entwickeln, und dabei meine (in §. 3, §. 4 und §. 5 erklärten) Bezeichnungen der Differentialquotienten gebrauchen. Ferner will ich, wie gewöhnlich, a, α, $b(x)$, $\beta(x)$, $c(x, y)$, $\gamma(x, y)$ bezüglich statt x', x'', y', y'', z', z'' setzen. Auf diese Weise nimmt das Integral ☽ folgende Form an

$$☽ \int_{a}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x, y)}^{\gamma(x, y)} \left(R . \frac{d_x d_y d_z \partial u}{dx . dy . dz}\right) . dz . dy . dx$$

Wenn man noch die bei Cauchy Seite 129 befindlichen zwei Ausdrücke

$$D_y(\overset{z=z''}{|} R . D_x z'') \qquad \text{und} \qquad D_y(\overset{z=z'}{|} R . D_x z')$$

in ihre Bestandtheile zerlegt, und letztere in meine Bezeichnungsweise überträgt; so bekommt man bezüglich

$$\left(\frac{d_y R}{dy}\cdot\frac{d_x\gamma}{dx}+\frac{d_z R}{dz}\cdot\frac{d_y\gamma}{dy}\cdot\frac{d_x\gamma}{dx}+R\cdot\frac{d_x d_y\gamma}{dx\cdot dy}\right)_{x,y,\gamma(x,y)}$$

und

$$\left(\frac{d_y R}{dy}\cdot\frac{d_x c}{dx}+\frac{d_z R}{dz}\cdot\frac{d_y c}{dy}\cdot\frac{d_x c}{dx}+R\cdot\frac{d_x d_y c}{dx\cdot dy}\right)_{x,y,c(x,y)}$$

Ferner setze man, so lange x und y noch ganz allgemein sind, b, β, c, γ bezüglich statt $b(x)$, $\beta(x)$, $c(x,y)$, $\gamma(x,y)$. Diese Abkürzungen sind natürlich nicht mehr erlaubt, sobald einer oder zwei der Veränderlichen x und y specialisirt sind.

Hiernach stellt sich Cauchy's Formel ♁ auf folgende Weise dar:

$$
\begin{aligned}
\delta s = \; & + R_{a,\beta(a),\gamma(a,\beta[a])}\cdot\delta u_{a,\beta(a),\gamma(a,\beta[a])} - R_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),\gamma(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}\cdot\delta u_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),\gamma(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}\\
& - R_{a,b(a),\gamma(a,b[a])}\cdot\delta u_{a,b(a),\gamma(a,b[a])} + R_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),\gamma(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}\cdot\delta u_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),\gamma(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}\\
& - R_{a,\beta(a),c(a,\beta[a])}\cdot\delta u_{a,\beta(a),c(a,\beta[a])} + R_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),c(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}\cdot\delta u_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),c(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}\\
& + R_{a,b(a),c(a,b[a])}\cdot\delta u_{a,b(a),c(a,b[a])} - R_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),c(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}\cdot\delta u_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),c(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}\\
& + \int_{\mathrm{a}}^{a}\Bigg[-\left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}\cdot\delta u_{x,\beta,\gamma(x,\beta)} + \left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,b,\gamma(x,b)}\cdot\delta u_{x,b,\gamma(x,b)}\\
& \qquad + \left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,\beta,c(x,\beta)}\cdot\delta u_{x,\beta,c(x,\beta)} - \left(\frac{d_x R}{dx}\right)_{x,b,c(x,b)}\cdot\delta u_{x,b,c(x,b)}\\
& \qquad - R_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}\cdot\frac{d\beta}{dx}\cdot\left(\frac{d_y\delta u}{dy}\right)_{x,\beta,\gamma(x,\beta)} + R_{x,b,\gamma(x,b)}\cdot\frac{db}{dx}\cdot\left(\frac{d_y\delta u}{dy}\right)_{x,b,\gamma(x,b)}\\
& \qquad + R_{x,\beta,c(x,\beta)}\cdot\frac{d\beta}{dx}\cdot\left(\frac{d_y\delta u}{dy}\right)_{x,\beta,c(x,\beta)} - R_{x,b,c(x,b)}\cdot\frac{db}{dx}\cdot\left(\frac{d_y\delta u}{dy}\right)_{x,b,c(x,b)}\\
& \qquad - \left(R\frac{d_x\gamma}{dx}\right)_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}\cdot\left(\frac{d_z\delta u}{dz}\right)_{x,\beta,\gamma(x,\beta)} + \left(R\frac{d_x\gamma}{dx}\right)_{x,b,\gamma(x,b)}\cdot\left(\frac{d_z\delta u}{dz}\right)_{x,b,\gamma(x,b)}\\
& \qquad + \left(R\frac{d_x c}{dx}\right)_{x,\beta,c(x,\beta)}\cdot\left(\frac{d_z\delta u}{dz}\right)_{x,\beta,c(x,\beta)} - \left(R\frac{d_x c}{dx}\right)_{x,b,c(x,b)}\cdot\left(\frac{d_z\delta u}{dz}\right)_{x,b,c(x,b)}\Bigg]\cdot dx\\
& + \int_{b(a)}^{\beta(a)}\Bigg[-\left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{a,y,\gamma(a,y)}\cdot\delta u_{a,y,\gamma(a,y)} + \left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{a,y,c(a,y)}\cdot\delta u_{a,y,c(a,y)}\\
& \qquad - \left(R\frac{d_y\gamma}{dy}\right)_{a,y,\gamma(a,y)}\cdot\left(\frac{d_z\delta u}{dz}\right)_{a,y,\gamma(a,y)} + \left(R\frac{d_y c}{dy}\right)_{a,y,c(a,y)}\cdot\left(\frac{d_z\delta u}{dz}\right)_{a,y,c(a,y)}\Bigg]\cdot dy\\
& - \int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}\Bigg[-\left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{\mathrm{a},y,\gamma(\mathrm{a},y)}\cdot\delta u_{\mathrm{a},y,\gamma(\mathrm{a},y)} + \left(\frac{d_y R}{dy}\right)_{\mathrm{a},y,c(\mathrm{a},y)}\cdot\delta u_{\mathrm{a},y,c(\mathrm{a},y)}\\
& \qquad - \left(R\frac{d_y\gamma}{dy}\right)_{\mathrm{a},y,\gamma(\mathrm{a},y)}\cdot\left(\frac{d_z\delta u}{dz}\right)_{\mathrm{a},y,\gamma(\mathrm{a},y)} + \left(R\frac{d_y c}{dy}\right)_{\mathrm{a},y,c(\mathrm{a},y)}\cdot\left(\frac{d_z\delta u}{dz}\right)_{\mathrm{a},y,c(\mathrm{a},y)}\Bigg]\cdot dy\\
& + \int_{c(a,\beta[a])}^{\gamma(a,\beta[a])}\left(-\frac{d_z R}{dz}\right)_{a,\beta(a),z}\cdot\delta u_{a,\beta(a),z}\cdot dz - \int_{c(a,b[a])}^{\gamma(a,b[a])}\left(-\frac{d_z R}{dz}\right)_{a,b(a),z}\cdot\delta u_{a,b(a),z}\cdot dz\\
& - \int_{c(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}^{\gamma(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}\left(-\frac{d_z R}{dz}\right)_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),z}\cdot\delta u_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),z}\cdot dz + \int_{c(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}^{\gamma(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}\left(-\frac{d_z R}{dz}\right)_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),z}\cdot\delta u_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),z}\cdot dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)} \Big[\Big(\frac{d_x R}{dx} . \frac{d_y \gamma}{dy} + \frac{d_y R}{dy} . \frac{d_x \gamma}{dx} + \frac{d_z R}{dz} . \frac{d_x \gamma}{dx} . \frac{d_y \gamma}{dy} + R \frac{d_y d_y \gamma}{dx . dy} \Big)_{x,y,\gamma} . \Big(\frac{d_z \partial u}{dz} \Big)_{x,y,\gamma} \\
&\qquad - \Big(\frac{d_x R}{dx} . \frac{d_y c}{dy} + \frac{d_y R}{dy} . \frac{d_x c}{dx} + \frac{d_z R}{dz} . \frac{d_x c}{dx} . \frac{d_y c}{dy} + R \frac{d_x d_y c}{dx . dy} \Big)_{x,y,c} . \Big(\frac{d_z \partial u}{dz} \Big)_{x,y,c} \\
&\qquad + R_{x,y,\gamma} . \frac{d_x \gamma}{dx} . \frac{d_y \gamma}{dy} . \Big(\frac{d_z^2 \partial u}{dz^2} \Big)_{x,y,\gamma} - R_{x,y,c} . \frac{d_x c}{dx} . \frac{d_y c}{dy} . \Big(\frac{d_z^2 \partial u}{dz^2} \Big)_{x,y,c} \\
&\qquad + \Big(\frac{d_x d_y R}{dx . dy} \Big)_{x,y,\gamma} . \partial u_{x,y,\gamma} - \Big(\frac{d_x d_y R}{dx . dy} \Big)_{x,y,c} . \partial u_{x,y,c} \Big] . dy . dx \\
&+\int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)} \Big[\Big(\frac{d_z R}{dz} \Big)_{x,\beta,z} . \frac{d\beta}{dz} . \Big(\frac{d_y \partial u}{dy} \Big)_{x,\beta,z} + \Big(\frac{d_x d_z R}{dx . dz} \Big)_{x,\beta,z} . \partial u_{x,\beta,z} \Big] . dz . dx \\
&-\int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)} \Big[\Big(\frac{d_z R}{dz} \Big)_{x,b,z} . \frac{db}{dx} . \Big(\frac{d_y \partial u}{dy} \Big)_{x,b,z} + \Big(\frac{d_x d_z R}{dx . dz} \Big)_{x,b,z} . \partial u_{x,b,z} \Big] . dz . dx \\
&+\int_{b(\alpha)}^{\beta(\alpha)}\int_{c(\alpha,y)}^{\gamma(\alpha,y)} \Big(\frac{d_y d_z R}{dy . dz} \Big)_{\alpha,y,z} . \partial u_{\alpha,y,z} . dz . dy \\
&-\int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}\int_{c(\mathrm{a},y)}^{\gamma(\mathrm{a},y)} \Big(\frac{d_y d_z R}{dy . dz} \Big)_{\mathrm{a},y,z} . \partial u_{\mathrm{a},y,z} . dz . dy \\
&-\int_{\mathrm{a}}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)}\int_{c(x,y)}^{\gamma(x,y)} \frac{d_x d_y d_z R}{dx . dy . dz} . \partial u . dz . dy . dx
\end{aligned}
$$

§. 95.

Wenn man jetzt diese meine Formel mit der von Cauchy aufgestellten vergleicht; so gewahrt man:

1. Der erste Theilsatz, welchen Cauchy durch das Abkürzungszeichen

$$\overset{x = x''}{\underset{x = x'}{|}} \;\; \overset{y = y''}{\underset{y = y'}{|}} \;\; \overset{z = z''}{\underset{z = z'}{|}} R . \partial u$$

darstellt, repräsentirt acht verschiedene Theile. Diese habe ich in den vier ersten Zeilen meiner, im vorigen §. mitgetheilten, Formel vollständig vor die Anschauung gebracht, was in allen den Fällen nöthig ist, wo zwischen den acht Ausdrücken .

$$
\begin{array}{llll}
\partial u_{\alpha,\beta(\alpha),\gamma(\alpha,\beta[\alpha])} , & \partial u_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),\gamma(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])} . & \partial u_{\alpha,b(\alpha),\gamma(\alpha,b[\alpha])} , & \partial u_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),\gamma(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])} \\
\partial u_{\alpha,\beta(\alpha),c(\alpha,\beta[\alpha])} , & \partial u_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),c(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])} . & \partial u_{\alpha,b(\alpha),c(\alpha,\beta[\alpha])} . & \partial u_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),c(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}
\end{array}
$$

irgend eine Abhängigkeit stattfindet.

2. Die fünf Theilsätze, welche bei Cauchy durch

$$-\int_{x'}^{x''} \overset{y = y''}{\underset{y = y'}{|}} \;\; \overset{z = z''}{\underset{z = z'}{|}} \mathrm{D}_x R . \partial u . dx \quad ,$$

$$-\int_{x'}^{x''} \overset{y = y''}{|} \;\; \overset{z = z''}{\underset{z = z'}{|}} R . \mathrm{D}_y y'' . \mathrm{D}_y \partial u . dx \quad , \qquad +\int_{x'}^{x''} \overset{y = y'}{|} \;\; \overset{z = z''}{\underset{z = z'}{|}} R . \mathrm{D}_x y' . \mathrm{D}_y \partial u . dx \quad ,$$

$$-\int_{x'}^{x''} \overset{y = y''}{\underset{y = y'}{|}} \;\; \overset{z = z''}{|} R . \mathrm{D}_x z'' . \mathrm{D}_z \partial u . dx \quad . \qquad +\int_{x'}^{x''} \overset{y = y''}{\underset{y = y'}{|}} \;\; \overset{z = z'}{|} R . \mathrm{D}_x z' . \mathrm{D}_z \partial u . dx \quad .$$

dargestellt sind, habe ich in zwölf verschiedenen Theilen unter das einzige Integralzeichen $\int_{\mathrm{a}}^{a}$ gesetzt; und erst so ist es möglich, die zwölf verschiedenen Ausdrücke

$$\begin{array}{cccc}
\partial u_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}\;, & \partial u_{x,b,\gamma(x,b)}\;, & \partial u_{x,\beta,c(x,\beta)}\;, & \partial u_{x,b,c(x,b)} \\
\left(\frac{d_y\partial u}{dy}\right)_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}, & \left(\frac{d_y\partial u}{dy}\right)_{x,b,\gamma(x,b)}, & \left(\frac{d_y\partial u}{dy}\right)_{x,\beta,c(x,\beta)}, & \left(\frac{d_y\partial u}{dy}\right)_{x,b,c(x,b)} \\
\left(\frac{d_z\partial u}{dz}\right)_{x,\beta,\gamma(x,\beta)}, & \left(\frac{d_z\partial u}{dz}\right)_{x,b,\gamma(x,b)}, & \left(\frac{d_z\partial u}{dz}\right)_{x,\beta,c(x,\beta)}, & \left(\frac{d_z\partial u}{dz}\right)_{x,b,c(x,b)}
\end{array}$$

von einander abhängig zu machen.

3. Die drei Theilsätze, welche bei Cauchy durch

$$-\Big|_{x=x'}^{x=x''}\int_{y'}^{y''}\Big|_{z=z'}^{z=z''}\mathrm{D}_y R\,.\,\partial u\,.\,dy$$

$$-\Big|_{x=x'}^{x=x''}\int_{y'}^{y''}\Big|^{z=z''} R\,.\,\mathrm{D}_y z''\,.\,\mathrm{D}_z\partial u\,.\,dy\quad,\quad +\Big|_{x=x'}^{x=x''}\int_{y'}^{y''}\Big|^{z=z'} R\,.\,\mathrm{D}_y z'\,.\,\mathrm{D}_z\partial u\,.\,dy$$

dargestellt sind, habe ich in acht verschiedenen Theilen unter die beiden Integralzeichen $\int_{b(a)}^{\beta(a)}$ und $\int_{b(\mathrm{a})}^{\beta(\mathrm{a})}$ gesetzt; und erst so war es möglich, zu erkennen, welche der betreffenden Gränzvariationen voneinander abhängig gemacht werden können, und welche voneinander abgesperrt sind.

4. Der Theilsatz, welcher bei Cauchy durch

$$-\Big|_{x=x'}^{x=x''}\Big|_{y=y'}^{y=y''}\int_{z'}^{z''}\mathrm{D}_z R\,.\,\partial u\,.\,dz$$

dargestellt ist, repräsentirt jene vier Theile, welche ich mit den vier verschiedenen Integralzeichen

$$\int_{c(a,\beta[a])}^{\gamma(a,\beta[a])}\quad,\quad\int_{c(a,b[a])}^{\gamma(a,b[a])}\quad,\quad\int_{c(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}^{\gamma(\mathrm{a},\beta[\mathrm{a}])}\quad,\quad\int_{c(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}^{\gamma(\mathrm{a},b[\mathrm{a}])}$$

versehen habe; und erst so ist vor die Anschauung gebracht, dass die vier Ausdrücke

$$\partial u_{a,\beta(a),z}\quad,\quad\partial u_{a,b(a),z}\quad,\quad\partial u_{\mathrm{a},\beta(\mathrm{a}),z}\quad,\quad\partial u_{\mathrm{a},b(\mathrm{a}),z}$$

durchaus von einander abgesperrt sein müssen, also keinerlei Abhängigkeit unter ihnen vorgeschrieben werden kann.

5. Die fünf Theilsätze, welche bei Cauchy alle mit dem doppelten Integralzeichen $\int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}$ anfangen, habe ich in sechs verschiedenen Theilen unter das einzige doppelte Integralzeichen $\int_{\mathrm{a}}^{a}\int_{b(x)}^{\beta(x)}$ gebracht; und erst so ist es möglich, die sechs verschiedenen Ausdrücke

$$\partial u_{x,y,\gamma}\;,\;\partial u_{x,y,c}\;,\;\left(\frac{d_z\partial u}{dz}\right)_{x,y,\gamma}\;,\;\left(\frac{d_z\partial u}{dz}\right)_{x,y,c}\;,\;\left(\frac{d_z^2\partial u}{dz^2}\right)_{x,y,\gamma}\;,\;\left(\frac{d_z^2\partial u}{dz^2}\right)_{x,y,c}$$

voneinander abhängig zu machen.

6. Die drei Theilsätze, welche bei Cauchy durch

$$+\int_{x'}^{x''} \Big|^{y=y''} \int_{z'}^{z''} \mathrm{D}_z R \,.\, \mathrm{D}_x y'' \,.\, \mathrm{D}_y \partial u \,.\, dz \,.\, dx \;, \quad -\int_{x'}^{x''} \Big|^{y=y'} \int_{z'}^{z''} \mathrm{D}_z R \,.\, \mathrm{D}_x y' \,.\, \mathrm{D}_y \partial u \,.\, dz \,.\, dx \;,$$

$$+\int_{x'}^{x''} \Big|_{y=y'}^{y=y''} \int_{z'}^{z''} \mathrm{D}_x \mathrm{D}_z R \,.\, \partial u \,.\, dz \,.\, dx$$

dargestellt sind, habe ich in vier Theilen unter die beiden doppelten Integralzeichen $\int_{a}^{\alpha}\int_{c(x,\beta)}^{\gamma(x,\beta)}$ und $\int_{\mathfrak{a}}^{a}\int_{c(x,b)}^{\gamma(x,b)}$ gebracht; und erst so war es möglich, zu erkennen, welche der betreffenden Gränzvariationen voneinander abhängig gemacht werden können, und welche voneinander abgesperrt sind.

7. Der Theilsatz, welcher bei Cauchy durch

$$\Big|_{x=x'}^{x=x''} \int_{y'}^{y''} \int_{z'}^{z''} \mathrm{D}_y \mathrm{D}_z R \,.\, \partial u \,.\, dz \,.\, dy$$

dargestellt ist, repräsentirt jene zwei Theile, welche ich mit den zwei verschiedenen doppelten Integralzeichen $\int_{b(a)}^{\beta(a)}\int_{c(a,y)}^{\gamma(a,y)}$ und $\int_{b(\mathfrak{a})}^{\beta(\mathfrak{a})}\int_{c(\mathfrak{a},y)}^{\gamma(\mathfrak{a},y)}$ versehen habe; und erst so ist es vor die Anschauung gebracht, dass die beiden Ausdrücke $\partial u_{a,y,z}$ und $\partial u_{\mathfrak{a},y,z}$ durchaus von einander abgesperrt sein müssen, also keinerlei Abhängigkeit unter ihnen aufgestellt werden kann.

§. 96.

Wir haben nun gesehen, dass es bei der Gestalt, welche Cauchy seinen Formeln gibt, unmöglich ist, die auf die Gränzen sich beziehenden Variationen in irgend eine Abhängigkeit zu bringen; und man kann bei seinen Formeln ebenso, wie bei denen des Herrn Sarrus, nicht einmal unterscheiden, welche Variationen voneinander abhängig gemacht werden können, und welche voneinander abgesperrt sein müssen.

Das Prüfungsmittel, welches man bekanntlich an der Variation der zweiten Ordnung gewinnt, hat auch Cauchy nirgendswo herzustellen versucht; und gerade bei solchem Versuche würden ihm seine Formeln jeden, sogar den allergeringsten, Dienst versagt haben.

Hat nun die concisere Form, in welcher Cauchy seine Resultate darstellt, Vortheile oder Nachtheile gegen jene Formeln, die sich in der bereits (§. 91 — 93) besprochenen Sarrus'schen Abhandlung befinden? Die Beantwortung dieser Frage liegt jetzt sehr nahe. (Man vergleiche §. 93.)

III. Abhandlung von Delaunay.

§. 97.

Diese führt den Titel „Mémoire sur le calcul des variations“, und befindet sich (Seite 37 — 120) in dem mit der Jahreszahl 1843 versehenen Band XVII des Journal de l'école royale polytechnique.

In sehr vielen Formeln (namentlich von Seite 50 an) hat Delaunay die beiden Theilsätze

$$\text{I)} \quad \int_x^X K_1 \,.\, \partial Y \,.\, dx - \int_x^X K_0 \,.\, \partial y \,.\, dx$$

auf folgende Weise in einen einzigen

$$\text{II)} \quad \int_{(x)}^{(x)} K \,.\, \partial y \,.\, dx$$

zusammengezogen, wo für die obere und untere Integrationsgränze dasselbe Zeichen (x) gewählt ist. Durch diese Sonderbarkeit werden viele Stücke unsichtbar, während doch alle unverkümmert vor die Anschauung gebracht werden sollten, damit man erkenne, wie sie in jedem einzelnen Falle behandelt werden müssen.

So hat Herr Delaunay (Seite 75) die Variation der ersten Ordnung für das bestimmte Integral

$$\text{III)} \quad Z = \int_x^X \int_y^Y K \,.\, dy \,.\, dx$$

nach seiner Weise hergestellt, wo K ein mit den Bestandtheilen

$$x \,,\; y \,,\; z \,,\; \frac{d_x z}{dx} \,,\; \frac{d_y z}{dy} \,,\; \frac{d_x^2 z}{dx^2} \,,\; \frac{d_x d_y z}{dx . dy} \,,\; \frac{d_y^2 z}{dy^2}$$

versehener Ausdruck ist. Schaut man aber auf die dortige Formel, so sieht man:

a) Nur der mit dem zweifachen Integralzeichen versehene Theilsatz ist richtig.

b) Es fehlen alle Theilsätze, die von jedem Integralzeichen frei sind.

c) Es kommt nur ein einziger mit einem einfachen Integralzeichen versehener Theilsatz vor, während drei mit verschiedenen einfachen Integralzeichen versehene Theilsätze vorhanden sein sollten.

Hinsichtlich dieser drei Punkte verweise ich auf die betreffende Formel XI, welche ich in der 9ten Untersuchung (§. 38) hergestellt habe.

Ebenso hat er (Seite 76) die Variation der ersten Ordnung für das dreifache Integral

$$\text{IV)} \quad Z = \int_v^V \int_x^X \int_y^Y K \,.\, dy \,.\, dx \,.\, dv$$

nach seiner Weise hergestellt, wo K ein mit den Bestandtheilen

$$v \,,\; x \,,\; y \,,\; z \,,\; \frac{d_v z}{dv} \,,\; \frac{d_x z}{dx} \,,\; \frac{d_y z}{dy} \,,\; \frac{d_v^2 z}{dv^2} \,,\; \frac{d_v d_x z}{dv . dx} \,,\; \frac{d_v d_y z}{dv . dy} \,,\; \frac{d_x^2 z}{dx^2} \,,\; \frac{d_x d_y z}{dx . dy} \,,\; \frac{d_y^2 z}{dy^2}$$

versehener Ausdruck ist. Hierbei ist aber Zweierlei zu erinnern:

1. In K hätten auch noch die Differentialquotienten der dritten Ordnung mit aufgenommen werden sollen; denn erst dann können in der Variation Theilsätze erscheinen, welche von jedem Integralzeichen frei sind. Was jedoch

2. die daselbst wirklich hergestellten Theilsätze betrifft, so sieht man:

a) Nur der mit dem dreifachen Integralzeichen versehene Theilsatz ist richtig.

b) Es fehlen alle Theilsätze mit einfachen Integralzeichen, dergleichen sieben verschiedene Arten vorhanden sein sollten.

c) Es kommt nur ein einziger mit einem zweifachen Integralzeichen versehener Theilsatz vor, während fünf mit verschiedenen zweifachen Integralzeichen versehene Theilsätze vorhanden sein sollten.

Hinsichtlich dieser Punkte verweise ich auf die betreffende Formel XII, welche ich in der 15ten Untersuchung (§. 68) mitgetheilt habe.

§. 98.

Eine unmittelbare Folge der (im Anfange des vorigen §'s) von mir besprochenen Sonderbarkeit der Form, unter welcher Herr Delaunay seine Variationen darstellt, ist nun die, dass er nicht genug Gränzgleichungen bekommt; und desshalb bleibt die Lösung seiner Probleme jedesmal unvollständig. Um aber diesen Ausspruch noch näher zu begründen, soll die Aufgabe vorgenommen werden, welche er (Seite 103) mit folgenden Worten aufstellt:

„Surface minimum terminée à une courbe qui est assujettie à rester sur une surface „donnée.“

Das hier zu variirende Integral stellt er unter folgender Form

$$\text{V)} \quad \int\int dx \,.\, dy \,.\, \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

dar. Dabei drängt sich sofort der Gedanke auf: Warum hat Herr Delaunay keine Integrationsgränzen angehängt, und sein Integral etwa auf folgende Weise

$$\text{VI)} \quad \int_{a}^{\alpha}\int_{b(x)}^{\beta(x)} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,\right] . \, dy \,.\, dx$$

dargestellt?

Weil jetzt die Gränzen $b(x)$ und $\beta(x)$ noch unbekannt sind, so müssen sie als variabel behandelt werden; und so etwas thut auch Herr Delaunay, indem er (Seite 104) das y variiren lässt.

Als Hauptgleichung, welche zur gesuchten Fläche führt, erscheint die bekannte Partialdifferentialgleichung der zweiten Ordnung

$$\text{VII)} \quad (1 + q^2) \,.\, r - 2pq \,.\, s + (1 + p^2) \,.\, t = 0$$

durch deren Integration sich für die gesuchte Fläche die Gleichung

$$\text{VIII)} \quad z = \varphi(x\,,\,y)$$

ergibt, in welche zwei willkürliche Functionen von x und y eingehen.

Nun weiss man, dass zur Bestimmung einer willkürlichen Function mit einem einzigen Veränderlichen auch nur eine Gleichung, dagegen zur Specialisirung einer willkürlichen Function mit zwei Veränderlichen jedesmal zwei Gleichungen nöthig sind[1]. Schauen wir uns

[1] Zur Specialisirung der in $z = \varphi(x, y)$ eingegangenen zwei willkürlichen Functionen habe ich in §. 13 die vier Gleichungen XXVIII, XXX, XXXII und XXXIII; und zur Bestimmung der beiden Integrationsgränzen $y = b(x)$ und $y = \beta(x)$ habe ich ebendaselbst die beiden Gleichungen XXIV und XXV.

aber bei Herrn Delaunay um, so finden wir, dass er (Seite 104) für die gegebene Fläche die bestimmte Gleichung

$$\text{IX)} \quad z = f(x\,,\,y)$$

aufstellt, und ausserdem noch als Gränzergebniss die Gleichung

$$\text{X)} \quad \left(\frac{d_y \varphi}{dy} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d_x \varphi}{dx}\right) \cdot \left(\frac{d_y f}{dy} - \frac{d_y \varphi}{dy}\right) + 1 + \left(\frac{d_x \varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y \varphi}{dy}\right)^2 = 0$$

findet[1]. Von letzterer spricht er (Seite 105) namentlich: „Diese Gleichung ist die einzige, welcher an den Gränzen genügt werden muss". Er formt sie aber noch um in

$$\text{XI)} \quad \frac{d_y \varphi}{dy} \cdot \frac{d_y f}{dy} + \frac{d_x \varphi}{dx} \cdot \frac{d_x f}{dx} + 1 = 0$$

und an dieser Gleichungsform erkennt man, dass die gegebene und die gesuchte Fläche aufeinander senkrecht stehen.

Weil sich hier die beiden Gleichungen X und XI ihrem eigentlichen Wesen nach nicht voneinander unterscheiden[2], so hat Herr Delaunay auch nur zwei Bestimmungsgleichungen, nämlich IX und XI; und diese genügen nicht, um

a) die beiden durch Integration der Hauptgleichung in $z = \varphi(x\,,\,y)$ eingegangenen zwei willkürlichen Functionen zu specialisiren, und

b) die beiden Integrationsgränzen $y = b\,(x)$ und $y = \beta\,(x)$ zu bestimmen.

§. 99.

In Herrn Delaunay's Abhandlung begegnen wir (Seite 90 — 97) endlich einmal einer Stelle, wo der Versuch gemacht wird, auch für Doppelintegrale das Prüfungsmittel herzustellen. Zu diesem Ende kehrt der Verfasser (Seite 91) zu dem Integral

$$\iint K \,.\, dy \,.\, dx$$

zurück, wo dem K dieselbe Bedeutung zukommt, wie in Gleichung III des §. 97; und dabei legt er sich

𝔄) vorerst folgende zwei Beschränkungen auf:

a) Er lässt z sich um eine Grösse δz ändern, welche nur innerhalb aller Integrationsgränzen (d. h. unter dem doppelten Integralzeichen) von Null verschieden ist, dagegen bei den Gränzen selbst (d. h. ausserhalb des doppelten Integralzeichens) wirklich zu Null wird (man sehe dessen Mémoire, Seite 91, ganz unten). Zugleich nimmt er auch

b) alle Integrationsgränzen als constant an (Seite 90, unten).

---

[1] Diese Gleichung X hat bei Delaunay folgende Form:

$$\left(\frac{dz}{dy} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx}\right) \cdot \left(\frac{df}{dy} - \frac{dz}{dy}\right) + 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = 0.$$

Es ist also auch bei ihm der Fall, dass er die partiellen Differentialquotienten ebenso bezeichnet, wie die totalen; und nebstdem beachte man, dass die Quotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ aus der Gleichung $z = \varphi\,(x\,,\,y)$ und nicht aus der Gleichung $z = f\,(x\,,\,y)$ zu entnehmen sind.

[2] Dass sich die hier mit X und XI bezeichneten Gleichungen in der That nicht von einander unterscheiden, und wie die eine in die andere umgewandelt wird; darüber vergleiche man mein in §. 43 angewendetes Verfahren, wo ich die Gleichung XXIX in XXXII. und ebenso die Gleichung XXXI in XXXIII umgewandelt habe.

Diese zwei Beschränkungen legt er sich desshalb auf, weil ihm scheint, dass sonst die Untersuchung zu verwickelt werden könnte (ebenfalls Seite 90, unten).

𝔅) Hierauf bringt er (Seite 92) die Variation der zweiten Ordnung, wo aber sowohl $\delta^2 z$ als auch alle von $\delta^2 z$ abgeleiteten Differentialquotienten fehlen, d. h. er bekommt nur einen Ausdruck von folgender Form

$$
\begin{aligned}
\text{XII)} \int\!\!\int \Big[& A_1 \cdot \left(\frac{d_y^2 \delta z}{dy^2}\right)^2 + 2A_2 \cdot \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx \,.\, dy} \,. + 2A_3 \cdot \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \cdot \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} \\
& + 2A_4 \cdot \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 2A_5 \cdot \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + 2A_6 \cdot \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \cdot \delta z \\
& + B_1 \cdot \left(\frac{d_x d_y \delta z}{dx \,.\, dy}\right)^2 + 2B_2 \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx \,.\, dy} \cdot \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + 2B_3 \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx \,.\, dy} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} \\
& + 2B_4 \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx \,.\, dy} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + 2B_5 \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx \,.\, dy} \cdot \delta z \\
& + C_1 \cdot \left(\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}\right)^2 + 2C_2 \cdot \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 2C_3 \cdot \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + 2C_4 \cdot \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} \cdot \delta z \\
& + D_1 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 + 2D_2 \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + 2D_3 \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} \cdot \delta z \\
& + E_1 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 2E_2 \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \delta z + F_1 \cdot \delta z^2 \Big] \,.\, dy \,.\, dx
\end{aligned}
$$

und nun spricht er:

„Wenn dieser Ausdruck sein Zeichen nicht ändert, während das δz was immer für eine „Function sein mag; und wenn er zwischen den Integrationsgränzen nicht unendlich wird; „so weiss man, dass ein Maximum oder Minimum stattfindet. Wenn aber dieser Ausdruck „nicht immer einerlei Zeichen behält, so muss man ihn in mehrere Partien zerlegen, deren „eine immer das nemliche Zeichen behält, während die anderen Partien integrabel sind. Die „Integrale dieser letzteren Partien, zwischen den gehörigen Gränzen genommen, werden Null „sein, weil sie in allen Theilsätzen von den Bestandtheilen

$$\delta z \,,\; \frac{d_x \delta z}{dx} \,,\; \frac{d_y \delta z}{dy} \,,\; \text{etc. etc.}$$

„einen als Factor enthalten müssen. Bei den Gränzen selbst sind aber diese Bestandtheile „Null. Und so (Seite 93) wird man die Variation der zweiten Ordnung auf ein bestimmtes „Doppelintegral reducirt haben, welches bei jedem beliebigen δz immer das nemliche Zeichen „behält.“

ℭ) Nun zerlegt der Verfasser (Seite 93 und 94) den Ausdruck XII in drei Partien, nemlich in zwei integrable und in eine nichtintegrable.

Als erste integrable Partie nimmt er ein nach y vollständiges Differential; und dessen nach y hergestelltem Integral gibt er folgende Form:

$$\text{XIII)} \quad \alpha \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 + \beta \frac{d_y \delta z}{dy} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \gamma \frac{d_y \delta z}{dy} \delta z + \varepsilon \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + \zeta \frac{d_x \delta z}{dx} \delta z + \eta \,.\, \delta z^2$$

Als zweite integrable Partie bringt er ein nach x vollständiges Differential; und dessen nach x hergestelltem Integral gibt er folgende Form:

$$\text{XIV)}\quad \alpha'\left(\frac{d_y\partial z}{dy}\right)^2+\beta'\frac{d_y\partial z}{dy}\cdot\frac{d_x\partial z}{dx}+\gamma'\frac{d_y\partial z}{dy}\partial z+\varepsilon'\left(\frac{d_x\partial z}{dx}\right)^2+\zeta'\frac{d_x\partial z}{dx}\partial z+\eta'\,.\,\partial z^2$$

Und indem er jetzt diese beiden Partien mit der nichtintegrablen Partie verbindet, so geht ihm der Ausdruck XII über in

$$\begin{aligned}
\text{XV)}\quad &\int\left[\alpha\left(\frac{d_y\partial z}{dy}\right)^2+\beta\frac{d_y\partial z}{dy}\cdot\frac{d_x\partial z}{dx}+\gamma\frac{d_y\partial z}{dy}\partial z+\varepsilon\left(\frac{d_x\partial z}{dx}\right)^2+\zeta\frac{d_x\partial z}{dx}\,.\,\partial z+\eta\,.\,\partial z^2\right].\,dx\\
&+\int\left[\alpha'\left(\frac{d_y\partial z}{dy}\right)^2+\beta'\frac{d_y\partial z}{dy}\cdot\frac{d_x\partial z}{dx}+\gamma'\frac{d_y\partial z}{dy}\partial z+\varepsilon'\left(\frac{d_x\partial z}{dx}\right)^2+\zeta'\frac{d_x\partial z}{dx}\,.\,\partial z+\eta'\,.\,\partial z^2\right].\,dy\\
&+\iint\Bigg[\mathrm{A}\,.\left(\frac{d_y^2\,\partial z}{dy^2}+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\cdot\frac{d_xd_y\partial z}{dx.dy}+\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\cdot\frac{d_x^2 dz}{dx^2}+\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}}\cdot\frac{d_y\partial z}{dy}+\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{A}}\cdot\frac{d_x\partial z}{dx}+\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}\,.\,\partial z\right)^2\\
&\qquad+G'\,.\left(\frac{d_xd_y\partial z}{dx.dy}+\frac{H'}{G'}\cdot\frac{d_x^2\partial z}{dx^2}+\frac{\mathrm{I}'}{G'}\cdot\frac{d_y\partial z}{dy}+\frac{J'}{G'}\cdot\frac{d_x\partial z}{dx}+\frac{\mathrm{L}'}{G'}\partial z\right)^2\\
&\qquad+\mathrm{M}''\,.\left(\frac{d_x^2\,\partial z}{dx^2}+\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{M}''}\cdot\frac{d_y\partial z}{dy}+\frac{O''}{\mathrm{M}''}\cdot\frac{d_x\partial z}{dx}+\frac{P''}{\mathrm{M}''}\partial z\right)^2\\
&\qquad+Q'''\,.\left(\frac{d_y\partial z}{dy}+\frac{R'''}{Q'''}\cdot\frac{d_x\partial z}{dx}+\frac{S'''}{Q'''}\partial z\right)^2\\
&\qquad+\mathrm{T}''''\,.\left(\frac{d_x\partial z}{dx}+\frac{U''''}{\mathrm{T}''''}\partial z\right)^2\\
&\qquad+W'''''\,.\,\partial z^2\Bigg].\,dy\,.\,dx
\end{aligned}$$

Vergleicht man aber die beiden Aggregate XII und XV mit einander, so findet man, dass in XII nur 21, dagegen in XV sogar 33 verschiedene Theilsätze vorkommen, dass somit 12 von den, in XV enthaltenen unbestimmten Stücken, etwa

$$♀\qquad \alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma\,,\,\varepsilon\,,\,\zeta\,,\,\eta\quad,\quad\alpha'\,,\,\beta'\,,\,\gamma'\,,\,\varepsilon'\,,\,\zeta'\,,\,\eta'$$

vorläufig noch keine Bestimmung finden können.

Weil aber Herr Delaunay die Variationen

$$\partial z\;,\;\frac{d_x\partial z}{dx}\;,\;\frac{d_y\,\partial z}{dy}\;,\;\text{etc.}$$

an den Gränzen zu Null werden lässt, so zieht sich ihm der Ausdruck XV ohneweiters auf das Doppelintegral zurück; und dieses behält beständig dasselbe Zeichen, wenn die sechs Coëfficienten

$$A\;,\;G'\;,\;\mathrm{M}''\;,\;Q'''\;,\;\mathrm{T}''''\;,\;W'''''$$

einerlei (entweder lauter positive oder lauter negative) Vorzeichen haben.

Nun sind die drei Coëfficienten A, G' und M'' unabhängig, dagegen die drei Q''', T'''' und V''''' sind abhängig von den zwölf Stücken ♀; und diesen Umstand benützt der Verfasser (Seite 96) dazu, dass er die drei Gleichungen

$$\text{XVI)}\quad Q'''=0\quad,\quad\text{XVII)}\quad\mathrm{T}''''=0\quad,\quad\text{XVIII)}\quad W'''''=0$$

stattfinden lässt. Hierdurch kann er drei der zwölf Stücke ♀ durch die übrigen neun bestimmen, während ihm diese neun noch völlig willkürlich bleiben. Durch solches Verfahren hat er jetzt den Ausdruck XV reducirt auf

$$\text{XIX)} \quad \iint \Big[A \cdot \left(\frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} + \frac{B}{A} \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} + \frac{C}{A} \cdot \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + \frac{D}{A} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{E}{A} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{F}{A} \delta z \right)^2$$
$$+ G' \cdot \left(\frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} + \frac{H'}{G'} \cdot \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + \frac{I'}{G'} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{J'}{G'} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{L'}{G'} \delta z \right)^2$$
$$+ M'' \cdot \left(\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + \frac{N''}{M''} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{O''}{M''} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{P''}{M''} \delta z \right)^2 \Big] . dy . dx$$

und dieses Doppelintegral behält beständig dasselbe Zeichen, wenn die drei Coëfficienten

$$A \; , \; G' \; , \; M''$$

einerlei (entweder lauter positive oder lauter negative) Vorzeichen haben. Somit ist der Verfasser bei der Regel angelangt, dass ein Maximum oder Minimum stattfindet, wenn der Ausdruck

$$\text{XX)} \quad A_1 . \left(\frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \right)^2 + 2 A_2 . \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} . \frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} + 2 A_3 . \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} . \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}$$
$$+ B_1 . \left(\frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} \right)^2 + 2 B_2 . \frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} . \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + C_1 . \left(\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} \right)^2$$

beständig negativ oder beständig positiv bleibt, während man für δz was immer für eine Function von x und y setzen mag.

§. 100.

Wir haben nun gesehen, dass Herr Delaunay sich nur mit dem speciellen Falle befasst, welcher von mir in §. 18 durchgeführt worden ist. Dort habe ich die Erfordernisse mitgetheilt, bei denen es erlaubt ist, die aus dem doppelten Integralzeichen heraustretenden Variationen

$$\delta z \; , \; \frac{d_x \delta z}{dx} \; , \; \frac{d_y \delta z}{dy} \; , \; \text{etc.}$$

zu Null werden zu lassen.

Es entsteht also die Frage: Was ist zu thun in allen den Fällen, wo die aus dem doppelten Integralzeichen heraustretenden Variationen nicht zu Null werden?

Wie man in solchen Fällen zu verfahren hat, das habe ich in den §§. 10, 12, 14, 17, 19, 20, 34, 36 etc. etc. gezeigt.

§. 101.

Die Bestandtheile des von Herrn Delaunay gewählten Integrals $\iint dx . dy . K$ bringen mit sich, dass schon bei der Variation der ersten Ordnung sich hätten Theilsätze vorfinden sollen, welche unter keinem Integralzeichen stehen. Diese Theilsätze liess er aber gänzlich weg, wie ich bereits (§. 97) ausgesprochen habe. Dieselbe Mangelhaftigkeit hat er auch bei seinen, für die Variation der zweiten Ordnung aufgestellten, Ausdrücken sich zu Schulden kommen lassen. Namentlich hätte er (Seite 93) zu seinen beiden integrablen Partien noch eine dritte von folgender Form

$$\frac{d_x d_y (\lambda . \delta z^2)}{dx . dy}$$

hinzufügen müssen, welche ein nach x und y zugleich durchlaufendes Differential ist, und nach vollzogener Integration ebenfalls ganz aus allen Integralzeichen hinausgetreten wäre. Dann hätte er nicht zwölf, sondern dreizehn willkürliche Stücke gehabt, wie ich dieselben (in §. 16) aufgestellt habe.

Schaut man z. B. auf Gleichung IX, welche ich in §. 16 aufgestellt habe, zurück; so wird man bei jenen Gränzbedingungen, bei denen die Ausdrücke

$$\delta z_{a,\beta}\,,\ \delta z_{a,b}\,,\ \delta z_{\alpha,\beta}\,,\ \delta z_{\alpha,b}\,,\ \delta^2 z_{a,\beta}\,,\ \delta^2 z_{a,b}\,,\ \delta^2 z_{\alpha,\beta}\,,\ \delta^2 z_{\alpha,b}$$

nicht schon von selbst hinwegfallen, die in λ enthaltenen willkürlichen Stücke so verwenden, dass die ganze ausserhalb der Integralzeichen befindliche Partie zusammen zu Null wird.

§. 102.

Nun kann man in allen Fällen, wo die Integrationsgränzen weder einer Werthänderung noch einer Variation unterliegen, die willkürlichen Stücke so verbrauchen, dass sich das Prüfungsmittel kurzweg auf das Doppelintegral zurückzieht; und dabei gelangt man zu dem Satze, dass der Umstand, ob ein Maximum oder Minimum stattfinde, von der Negativität oder Positivität des Aggregates XX abhangt. Weil aber dieser Satz in allen Fällen, wo die Integrationsgränzen unveränderlich sind, allgemein giltig ist; so muss er natürlich in dem, von Herrn Delaunay behandelten, besonderen Falle, wo die auf die Gränzen bezogenen Variationen $\delta z\,,\ \frac{d_x \delta z}{dx}\,,\ \frac{d_y \delta z}{dy}\,,$ etc. zu Null werden, auch noch seine Giltigkeit behalten.

Sobald jedoch die Integrationsgränzen entweder einer Werthänderung oder einer Variation unterworfen werden; dann kann man die besagten willkürlichen Stücke nicht mehr so verwenden, dass das Prüfungsmittel sich auf das Doppelintegral zurückzieht. Wie man aber in solchen Fällen verfahren muss, mag man in den betreffenden Untersuchungen (z. B. in §. 25, 26, 28, und besonders in §. 29; sodann auch in §. 42, 43, 46, 47, etc. etc.) nachsehen. Das dabei nöthige Verfahren ist allerdings von eigenthümlicher Art, hat aber mit keinen solchen Hindernissen zu kämpfen, dass man, wie Herr Delaunay (Seite 90 unten) glaubt, sich davor zu fürchten hätte.

§. 103.

Was das Prüfungsmittel bei dreifachen etc. Integralen betrifft, so hat Herr Delaunay weiter nichts gethan, als (Seite 97) eine in Worten abgefasste Regel aufgestellt, welche aber gleichfalls nur so lange giltig ist, als die Integrationsgränzen constant sind. Man könnte also zu dieser Regel ganz die nemlichen Bemerkungen wiederholen, welche ich bereits (in §. 99 — 102) gemacht habe.

§. 104.

Ehe ich jedoch die Abhandlung des Herrn Delaunay gänzlich verlasse, will ich hier noch einmal (man vergleiche §. 99, 𝔅) hervorheben, dass derselbe versäumt hat, bei den von ihm aufgestellten Variationen der zweiten Ordnung auch den Ausdruck $\delta^2 z$ und die von $\delta^2 z$ abgeleiteten Differentialquotienten mit aufzunehmen. Dieses Versäumniss ist aber ein theoretischer Grundfehler, welcher von Herrn Delaunay sofort hätte entdeckt werden müssen, wenn er es versucht hätte, zu irgend einer speciellen Aufgabe

1. verschiedene Gränzfälle beizufügen, und

2. bei allen diesen Gränzfällen, namentlich bei solchen, wo die auf die Gränzen sich beziehenden Variationen in irgend einer Abhängigkeit stehen, das Prüfungsmittel herzustellen.

Schluss.

§. 105.

Es wäre unnöthig, den Nachtrag noch weiter auszudehnen. In demselben sollte ja nur nachgewiesen werden, dass die besprochenen drei Abhandlungen ihrem Gegenstande nicht genügen; und dieser Zweck ist erreicht.

Gerne hätte ich den Untersuchungen, welche auf die Variation zweifacher Integrale führen, auch praktische Anwendungen beigefügt, wenigstens hätte ich gerne die in den Noten (zu §. 11, 26, 29, 35, 43, 44 und 47) angedeuteten geometrischen Aufgaben durchgeführt; allein bei solcher Zugabe hätte ich die Gränzen nicht einhalten können, welche durch die Bestimmung dieser meiner Abhandlung vorgezeichnet sind. Dagegen bei den Untersuchungen, welche auf die Variation dreifacher Integrale führen, durften praktische Aufgaben nicht fehlen; und zwar schon desshalb, weil, wie (§. 1) gesagt, dergleichen auch seiner Zeit von der Pariser Akademie verlangt worden sind.

Über die Gründe, warum es überflüssig war, in diese Abhandlung auch die Variationen vierfacher, fünffacher, etc. Integrale aufzunehmen, habe ich mich bereits (in §. 90) ausgesprochen. Mein stetes Bestreben, den mir vorgelegten schwierigen Gegenstand mit Einfachheit, Klarheit und Gründlichkeit zu erledigen, wird man, ich hoffe es, nicht verkennen.

INHALT.