Ueber

# den geraden, centralen Stoss zweier fester Körper.

**Von Adam Burg,**

k. k. Regierungsrath und Professor am polytechnischen Institute.

(Vorgetragen in der Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe am 17. Februar 1848.)

1. Um die Geschwindigkeiten zu bestimmen, mit welchen zwei gerade und central aufeinander stossende feste Körper, z. B. zwei Kugeln, nach dem Stosse fortgehen, nimmt man bekanntlich entweder vollkommen unelastische oder vollkommen elastische Körper an, und betrachtet auf diese Weise eigentlich nur die beiden äussersten Glieder oder Gränzen jener Reihe von Körpern, welche bezüglich ihrer grösseren oder geringeren Elasticität zwischen diesen Gränzen liegen und sich, so weit die Erfahrung hierüber reicht, wohl diesen Gränzen mehr oder weniger nähern, diese jedoch nach keiner Seite hin vollkommen erreichen.

Eben so bekannt ist es auch, dass man, um die Erscheinungen des Stosses erklären und der Rechnung unterwerfen zu können, genöthiget ist, anzunehmen, dass alle und selbst die härtesten Körper bis auf einen gewissen Grad zusammendrückbar sind, und dass der Stoss, wodurch eben eine solche Zusammendrückung zwischen den beiden betreffenden Körpern stattfindet, nicht in einem untheilbaren Augenblicke vollendet sein kann, sondern dazu immer eine gewisse, wenn auch noch so kleine endliche Zeit erforderlich sei, eine Annahme übrigens, welche keineswegs mit der Erfahrung im Widerspruche steht, indem uns bis jetzt wenigstens keine absolut harten Körper bekannt sind, folglich eine auf solche imaginäre Körper angewandte Rechnung ohnehin nur eine fruchtlose Bemühung sein würde.

Was nun aber die verschiedenen Methoden betrifft, deren man sich in den Lehrbüchern zu bedienen pflegt, um auf eine schulgerechte Weise die Geschwindigkeiten der beiden zusammenstossenden Körper oder Kugeln nach dem Stosse, und zwar als Function ihrer Geschwindigkeiten vor dem Stosse zu bestimmen, so sucht man entweder mit gänzlicher Ausserachtlassung der während des Stosses in beiden Körpern stattfindenden Formänderungen, indem man sich diese Körper als blosse materielle Puncte vorstellt, den D'Alembert'schen Satz darauf anzuwenden, oder man denkt sich, um auf diese Formänderung, so weit es dabei nöthig, Rücksicht zu nehmen, die Zeit, welche auf diese Aenderung, namentlich auf die Zusammendrückung während des Stosses verwendet wird, in unendlich viele gleiche Theile getheilt, bestimmt die Geschwindigkeitsänderung, welche die beiden Kugeln in diesen aufeinander folgenden unendlich kleinen Zeit-Intervallen, durch Annahme von eben so vielen zwischen beiden Körpern wirkenden unendlich kleinen Druck- oder Spannkräften hervorbringen, und findet endlich durch Summirung dieser unendlichen Reihen die gesuchten Endgeschwindigkeiten der als vollkommen unelastisch angenommenen beiden Körper. Die erste dieser Methoden, welche sofort von der Annahme ausgeht, dass die Grösse der Bewegung beider Körper nach dem Stosse eben so gross als vor dem Stosse, oder dass der Verlust an Grösse der Bewegung des einen Körpers dem Gewinnste an Grösse der Bewegung des andern Körpers gleich sein müsse, lässt bei Anfängern den ohne weitläufige Deductionen nicht leicht zu hebenden Zweifel über die absolute Nothwendigkeit dieses Gesetzes bestehen, während die letztere Methode den mit der Differenzial- und Integralrechnung vertrauten Schüler mindestens hinsichtlich der Eleganz und Präcision nicht vollkommen befriedigen kann.

Es scheint uns daher, dass sich die nachfolgende Entwickelungsart, welche wir von diesen beiden Mängeln frei glauben, und nur auf den einfachsten Bewegungsgesetzen beruht, für den Vortrag am besten eignen dürfte.

2. Es seien nämlich $m$ und $m'$ die Massen zweier homogener Kugeln, deren Mittelpuncte sich auf ein und derselben geraden Linie nach einerlei Richtung mit den Geschwindigkeiten $v$ und $v'$ so bewegen sollen, dass alle Puncte der Kugeln mit dieser Geraden parallele Linien beschreiben (die Kugeln also keine rotirende Bewegung dabei annehmen), und zwar sei, wenn $m$ die nachfolgende oder anstossende und $m'$ die vorausgehende oder gestossene Kugel bezeichnet, $v > v'$, so dass im Augenblicke des Einholens oder Begegnens der beiden Kugeln ein Stoss der Kugel $m$ gegen jene $m'$ ausgeübt wird, welcher so lange dauert, bis die vorausgehende Kugel $m'$ der nachfolgenden $m$ kein weiteres Hinderniss mehr darbiethet. Durch die Wirkung und eben so grosse Gegenwirkung zwischen den beiden Kugeln werden die zunächst am Berührungspuncte liegenden materiellen Theilchen verschoben oder die äussersten Schichten der beiden Kugeln an dieser Stelle so lange zusammengedrückt und dabei die vorausgehende Kugel $m'$ beschleuniget und die nachfolgende $m$ verzögert, bis die erstere an ihrer Geschwindigkeit so viel gewonnen und die letztere an ihrer Geschwindigkeit so viel verloren hat, dass nunmehr beide Kugeln eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit $u$ besitzen.

Sind nun beide Kugeln vollkommen unelastisch, so hört von nun an jede weitere Reaction zwischen denselben auf, und damit ist dann auch der Stoss selbst vollendet, so, dass sich hierauf beide Kugeln, an welchen die durch den Stoss entstandenen Eindrücke haften bleiben, wie eine einzige Masse $m+m'$ mit dieser gemeinschaftlichen Geschwindigkeit $u$ und zwar nach derselben Richtung fortbewegen.

Sind dagegen die Kugeln vollkommen oder auch nur zum Theile elastisch, so entsteht, nachdem die grösste Zusammendrückung und dadurch die Ausgleichung in den Geschwindigkeiten eingetreten, durch das Bestreben, ihre ursprüngliche Form entweder vollkommen oder zum Theile wieder herzustellen, eine weitere Reaction zwischen den beiden Kugeln, in Folge welcher die vorausgehende $m'$ noch weiter beschleunigt und die nachfolgende $m$ noch weiter und zwar so lange verzögert wird, bis diese Formherstellung, so weit diess nach ihrem Elasticitätsgrade möglich, vollendet ist, und die Kugeln sich von einander zu trennen oder zu entfernen beginnen, in welchem Augenblicke dann auch der Stoss selbst in diesem zweiten Falle zu Ende ist. Es treten daher bei allen Körpern, welche nicht absolut unelastisch sind, während des Stosses zwei bestimmt von einander zu unterscheidende Perioden ein, in deren erster die Körper so lange zusammengedrückt werden, bis sie einerlei Geschwindigkeit angenommen haben, und in deren zweiter eine eben so grosse oder geringere Ausdehnung zwischen den zusammengedrückten Theilchen oder Schichten beider Körper stattfindet, bis sie sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten von einander entfernen.

3. Betrachtet man nun während der ersten Periode die beiden genannten Kugeln (diese mögen vor der Hand als elastisch oder unelastisch angesehen werden), nachdem die Zusammendrückung bereits durch die unbestimmte Zeit $t$ gedauert hat, und bezeichnet die Grösse der Kraft, welche man sich zwischen den beiden Kugeln in Folge des Zusammenstosses als wirksam denken kann, in diesem Augenblicke durch $p$, so wie die Geschwindigkeiten beider Kugeln $m$ und $m'$ mit $x$ und $x'$, so erscheint die variable Kraft $p$, welche im Momente des Beginnens des Stosses am grössten und am Ende der ersten Periode Null ist, während der darauf folgenden unendlich kleinen Zeit d$t$ als constant, und es nimmt während dieser Zeit die Geschwindigkeit $x'$ um d$x'$ zu, dagegen jene $x$ um d$x$ ab, so dass nach bekannten Gesetzen

$$\mathrm{d}x' = \frac{p}{m'} g\,\mathrm{d}t \text{ und } \mathrm{d}x = -\frac{p}{m} g\,\mathrm{d}t,$$

oder da $p$ eine gewisse (wenn auch unbekannte) Function der von $o$ bis $t'$ wachsenden Zeit $t$ ist, wenn man nämlich die (uns durchaus unbekannte) Zeit, welche der ersten Periode des Stosses zukömmt, mit $t'$ bezeichnet, also $p = \varphi\,(t)$ gesetzt werden kann, auch

$$dx' = \frac{g}{m'}\varphi\,(t)\,dt \text{ und } dx = -\frac{g}{m}\varphi\,(t)\,dt$$

hat, wobei $g$ die Beschleunigung der Schwere ist.

Durch die Integration dieser beiden Gleichungen erhält man, wenn man sich erinnert, dass, ohne die Natur der Function $\varphi\,(t)$ näher kennen zu müssen, das allgemeine Integrale von $\varphi\,(t)\,dt$ irgend eine neue Function $\varphi'\,(t)$ von $t$ sein müsse, sofort:

$$x' = \frac{g}{m'}\varphi'\,(t) + C' \text{ und } x = C - \frac{g}{m}\varphi'\,(t)$$

wobei $C$ und $C'$ die Constanten der Integration sind; um diese zu bestimmen, gehen für $t=o$, was wir durch $t_0$ anzeigen wollen, die Geschwindigkeiten $x$ und $x'$ in ihre ursprünglichen $v$ und $v'$ über, und man erhält sonach aus diesen beiden Relationen

$$C' = v' - \frac{g}{m'}\varphi'\,(t_0) \text{ und } C = v + \frac{g}{m}\varphi'\,(t_0)$$

so dass, wenn man diese Werthe für $C$ und $C'$ substituirt, auch

$$x' = v' + \frac{g}{m'}[\varphi'\,(t) - \varphi'\,(t_0)]$$

$$\text{und } x = v + \frac{g}{m}[\varphi'\,(t_0) - \varphi'\,(t)] \text{ wird.}$$

Um die vollständigen Integrale zu erhalten, darf man nur bemerken, dass für $t=t'$ beide Geschwindigkeiten $x$ und $x'$ in jene $u$ übergehen, wenn $t'$ und $u$ die angegebene Bedeutung haben; man erhält sonach aus diesen beiden letzteren Relationen:

$$u = v' + \frac{g}{m'}[\varphi'\,(t') - \varphi'\,(t_0)] \;\ldots\; (\alpha$$

$$\text{und } u = v + \frac{g}{m}[\varphi'\,(t_0) - \varphi'\,(t')] \;\ldots\; (\beta$$

woraus sofort auch, wenn man die erste dieser beiden Gleichungen mit $m'$, die letztere mit $m$ multiplicirt und diese dann summirt

$$(m+m')\,u = mv + m'v' \text{ oder } u = \frac{mv+m'v'}{m+m'} \;\ldots\; (1 \text{ folgt.}$$

4. Um ferner auf den zweiten Theil oder die zweite Periode des Stosses überzugehen, wollen wir der grösseren Allgemeinheit wegen die beiden Kugeln nicht als vollkommen elastisch voraussetzen — in welchem Falle die ausdehnende Kraft $p$ genau wieder der vorigen Function $\varphi\,(t)$ in allen ihren Werthen von $t=o$ bis $t=t'$ gleich wäre — sondern annehmen, dass die zwischen den beiden Kugeln als wirksam auftretende ausdehnende Kraft durch $np$, d. i. durch $n\varphi(t)$ ausgedrückt werde, wobei $n < 1$, immer so bestimmt werden soll, dass auch hierbei die Zeit $t$ von Null bis $t'$ wachsen muss, um die Ausdehnung oder zweite Periode des Stosses zu vollenden, was z. B. für den Fall der vollkommenen Elasticität für $n=1$ stattfindet.

Diess vorausgesetzt betrachten wir wieder die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln $m$ und $m'$ in einem Augenblicke, in welchem die Ausdehnung bereits durch die unbestimmte Zeit $t$ gedauert hat, und nehmen an, dass diese beziehungsweise $u'$ und $u''$ sind, wobei $u'<u$ und $u''>u$ ist; so werden diese im nächstfolgenden Zeit-Elemente $dt$, erstere um $du'$ verzögert, letztere um $du''$ beschleunigt, so dass man genau wieder wie in 3. erhält:

$$du'' = \frac{ng}{m'}\varphi(t)\,dt \text{ und } du' = \frac{ng}{m}\varphi(t)\,dt$$

folglich wenn man integrirt:

$$u'' = \frac{ng}{m'}\varphi'(t) + C \text{ und } u' = C' - \frac{ng}{m}\varphi'(t).$$

Um die Constanten der Integrationen zu bestimmen, hat man für $t=o$ sofort $u''=u'=u$, folglich

$$C = u - \frac{ng}{m'}\varphi'(t_0) \text{ und } C' = u + \frac{ng}{m}\varphi'(t_0),$$

also wenn man diese Werthe substituirt, und um die Integrationen vollständig zu machen, auch gleich $t=t'$ setzt, wodurch $u'$ und $u''$ in jene Geschwindigkeiten $V$ und $V'$ übergehen, welche die Kugeln $m$ und $m'$ am Ende dieser zweiten Periode, also auch nach gänzlich vollendetem Stosse annehmen, sofort:

$$V' = u + \frac{ng}{m'}[\varphi'(t') - \varphi'(t_0)] \ldots (\alpha'$$

$$\text{und } V = u + \frac{ng}{m}[\varphi'(t_0) - \varphi'(t')] \ldots (\beta'$$

oder wenn man die eingeklammerten Binome aus den 4 Gleichungen $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$ eliminirt, auch

$$V' = (n+1)\,u - nv \text{ und } V = (n+1)\,u - nv \ldots (2$$

Für den Fall, dass die Kugeln vollkommen unelastisch sind, hat man, wegen $n=o$, $V'=V=u$; dagegen bei Voraussetzung einer vollkommenen Elasticität, wofür $n=1$ wird:

$$V' = 2\,u - v' \text{ und } V = 2\,u - v$$

wobei $u$ in der obigen Relation (1 bestimmt ist.

Für unvollkommen elastische Körper kann der zwischen Null und der Einheit liegende Werth $n$ leicht aus den Gleichungen (2 bestimmt werden, wenn die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stosse durch Beobachtung gegeben sind.

Schlüsslich folgen noch ganz einfach aus den Relationen $\alpha'$ und $\beta'$:

$$m'\,V' = m'\,u \text{ und } m\,V = mu, \text{ also } (m+m')\,u = m\,V + m'\,V'$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (1:

$$mv + m'v' = m\,V + m'\,V';$$

ferner eben so einfach

$$m\,V^2 + m'\,V'^2 = mv^2 + m'v'^2$$

$$\text{und } mu^2 + m'u^2 = mv^2 + m'v'^2 - \frac{mm'\,(v-v')^2}{m+m'}$$

woraus ganz ungezwungen folgt, dass durch den Stoss vollkommen elastischer Körper kein Verlust an lebendiger Kraft eintritt, während durch den Stoss von unelastischen Körpern immer ein solcher Verlust stattfindet, welcher mit der Grösse der Massen $m$, $m'$ und der Differenz der Geschwindigkeiten $v$ und $v'$ zunimmt. Für unvollkommen elastische Körper ist dieser Verlust an lebendiger Kraft

$$= \frac{(1-n^2)\,mm'\,(v-v')^2}{m+m'}.$$

---