

DIE
ABWEICHUNG DER LOTHLINIE
 BEI
 ASTRONOMISCHEN BEOBACHTUNGSSTATIONEN
 UND
 IHRE BERECHNUNG ALS ERFORDERNISSE EINER GRADMESSUNG.
 VON

EDUARD PECHMANN,

K. K. OBERSTEN UND VERMESSUNGSREFERENTEN DES GRUNDSTEUERKATASTERS, PRÄSIDENTEN DER K. K. GEOGRAPHISCHEN GESELLSCHAFT FÜR DAS VEREINSJAHR 1863.

Mit 4 Karten.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCHE-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 12. FEBRUAR 1863.

Der Inhalt dieser Denkschrift fußt in der Überzeugung, dass die redliche Absicht nicht verkannt werden wird im Streben unserer Zeit, über die Grösse und Figur der Erde endlich vollkommenen Aufschluss zu erhalten, einen bisher viel zu wenig gewürdigten Gegenstand zu besprechen, der sich jetzt um so mehr der Würdigung dieser kaiserlichen Akademie erfreuen dürfte, als auf Anregung Seiner Excellenz des königlich preussischen Herrn Generallieutenants J. J. Baeyer die Ausführung der mitteleuropäischen Gradmessung keinem Zweifel mehr unterworfen ist.

Die Denkschrift zur Begründung dieser Gradmessung¹⁾) gibt Seite 33 und 71 mehrere Abweichungen zwischen den geodätischen und astronomischen Resultaten verschiedener Gradmessungen an, welche bei dem französisch-englischen Meridianbogen in Eveaux 7", 6, in Cowhythe 10"; zwischen Mailand und Parma 20", 4; endlich zwischen Andrate und Mondovi bei der Verification der Gradmessung von Beccaria sogar 47", 84 in der Breite betragen. Solche Abweichungen sollen auch bei dem grossen russischen Meridianbogen vorkommen. Sie sind aber noch anderwärts gefunden worden, und wie uns bekannt auch in Indien zwischen

¹⁾ Über die Grösse und Figur der Erde von J. J. Baeyer. Berlin 1861.

den äussersten Stationen des nördlichen Bogentheiles südlich vom Himalaya zwischen Kalianpur und Kaliana¹⁾). Die erwähnte Denkschrift zählt auch Seite 72 zur Erklärung der Ursachen solcher Ablenkungen der Lothlinie drei Hypothesen auf, nämlich: 1. die Anziehung von Bergmassen; 2. die ungleichen Dichtigkeitsverhältnisse unter der Erdoberfläche und 3. die geognostischen Lagerungsverhältnisse, und meint, dass die Fragen: ob diese drei Hypothesen neben einander bestehen, ob sie nur einzeln oder auch in Verbindung mit einander vorkommen, und sich gegenseitig aufheben können oder nicht, künftigen Gradmessungen vorbehalten bleiben.

Wir müssen gestehen, dass wir dieser Meinung nicht beipflichten könnten, weil es auch schon der Gegenwart obliegt zur Lösung dieser Fragen nach Kräften beizutragen, und weil uns die sichtbaren Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche für sich schon Grund genug geben, vorerst ihren Einfluss auf die Ablenkung der Lothlinie zu untersuchen, wodurch es wenigstens da, wo das Ergebniss dieser Untersuchung ausreicht, die Ablenkung vollständig zu erklären, jedenfalls unnütz wird, Hypothesen überhaupt in Anspruch zu nehmen.

Aber selbst in den Fällen, wo eine derartige Untersuchung die vorhandene Abweichung nicht gänzlich aufzuklären vermöchte, bleibt sie doch immer von grosser Wichtigkeit, weil sie die Ergebnisse der Beobachtungen zum Zwecke der Vergleichung mit andern in derselben Art behandelten Grössen, und zur Ausgleichung unter sich weit geeigneter, dadurch aber auch eine Gradmessung weit sicherer machen wird.

Nur was in solchen Fällen noch zur vollständigen Lösung der Fragen erübriget, das allein, meinen wir, mag der Zukunft vorbehalten bleiben.

Sind wir daher im Stande die Einflüsse der erwähnten Unregelmässigkeiten auf die Richtung der Lothlinie, oder was dasselbe ist, die auf was immer für einen Beobachtungsort ausgeübte Attraction zu berechnen, so dürfen wir auch keine Mühe scheuen, diese Berechnung für jede astronomische Station einer Gradmessung vorzunehmen, weil die besten astronomischen Bestimmungen nur so die grösstmögliche Gewähr für eine zuverlässige Gradmessung haben können.

An Versuchen und selbst ausgeführten Attractionsberechnungen fehlt es bereits nicht, und wir verweisen in dieser Hinsicht auf die Abhandlung J. H. Pratt's²⁾ bezüglich der Anziehung der Gebirgsmassen des Himalaya bei der Gradmessung in Indien zwischen Kalianpur und Kaliana, und auf die Abhandlung vom Oberstlieutenant James³⁾ bezüglich der astronomischen Beobachtungen auf dem Hügel Arthur-Seat in Schottland.

Die Resultate des Ersteren sind wohl nicht zur Aufmunterung geeignet, da er selbst mit weiterer Zulassung von Hypothesen die berechnete Attraction durchaus nicht auf das Resultat zurückzuführen vermag, welches durch den Vergleich der astronomischen mit den geodätischen Bestimmungen sich herausstellt.

Dagegen sind die Berechnungen von James schon werthvoller und bieten genug Stoff zum weiteren Studium dieser Frage.

Wir werden es nun versuchen, hierüber unsere Anschauungen, nicht nur in der Theorie, sondern auch in der Anwendung, klar zu machen und die Mittel zur Berechnung der Attraction als Correctiv für astronomische Beobachtungen nachzuweisen.

¹⁾ Siehe „L'institut année 23^e No. 117.“ Sitzung der königl. Akademie der Wissenschaften zu London im December 1854.

²⁾ L'institut année 23^e No. 117.

³⁾ London. Philosophical transactions, 1856. 2. Theil.

I.

Auf dem Erdsphäroide ist die Richtung der Schwere gleichbedeutend mit jener der Normale. Da aber die Erdoberfläche bedeutende Unregelmässigkeiten der Massen aufzuweisen hat, so werden diese Unregelmässigkeiten naeh dem bekannten allgemeinen Grundsatze: dass sich die Materien proportionirt zur Masse und verkehrt zum Quadrate der Entfernung anziehen, offenbar auch in der Richtung der Schwere Ablenkungen verursachen müssen, wodurch diese Richtung nicht mehr mit jener der regelmässigen Gestalt der Erde entsprechenden Normale übereinfällt.

Bei der Aufstellung irgend eines mathematischen Instrumentes kann dessen verticale Achse nicht anders als in der wirklich stattfindenden Richtung der Schwere liegen; so dass sie also bei einer Ablenkung dieser letzteren ebenfalls von der Normale abweichen wird, und die mit einem solchen Instrumente gewonnenen astronomischen Bestimmungen natürlich nicht genau sein können.

Da die hier verstandene Anziehung oder Attraction von der Lage des Ortes, auf den sie wirkt, und von dem umgebenden Terrain abhängig ist; so kann sie füglich mit dem Ausdrucke Local-Attraction bezeichnet werden. Wir wollen sie jedoch schlechtweg Attraction nennen und nur in Folge einer näheren Angabe diesem Worte einen andern Sinn unterlegen.

Bei der näheren Untersuchung dieses Gegenstandes wird es am bequemsten sein, ein rechtwinkeliges Coordinatensystem so anzunehmen, dass sein Nullpunkt mit dem betreffenden Observationsorte, die Ebene der xy mit seinem Horizonte und überdies die Achse der x mit seiner Meridianebene zusammenfalle.

Die Richtung der x sei gegen Süden, die der y gegen Westen, und die der z nach unten positiv; entgegengesetzt negativ. Die auf dem Observationsorte gezählten Azimuthe erhalten hiemit ihren Nullpunkt im Süden, und ihre positive Richtung gegen Westen.

Die von den Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche hervorgebrachte Attraction in der Richtung der z wird gegenüber der in derselben Richtung stattfindenden Attraction oder Anziehung der gesammten Erde so gering sein, dass wir die letztere, die wir mit E bezeichnen wollen, für die Summe beider annehmen, mithin die erstere vernachlässigen können. Wir werden es daher nur mit der Attraction in der Richtung der x und y zu thun haben. Bezeichnet man die erstere mit M , die letztere mit W , ihre Resultirende mit Q und das Azimuth der Richtung dieser mit a ; so hat man:

$$Q = \sqrt{M^2 + W^2};$$

$$\tan a = \frac{W}{M};$$

$$\sin a = \frac{W}{\sqrt{M^2 + W^2}} = \frac{W}{Q}$$

$$\cos a = \frac{M}{\sqrt{M^2 + W^2}} = \frac{M}{Q}.$$

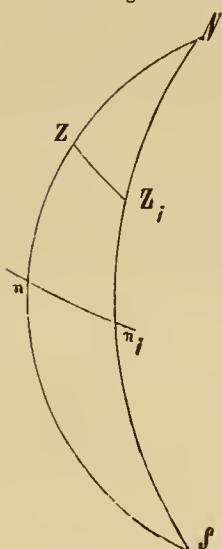
Wird der Winkel, um welchen die Richtung der verticalen Achse des Instrumentes von seiner Normale abgelenkt wird, mit ζ bezeichnet, so ist:

$$\tan \zeta = \frac{Q}{E} \text{ und da } \zeta \text{ sehr spitzig}$$

$$\zeta = \frac{Q}{E}$$

wo ζ stets einen positiven Werth hat.

Fig. I.



Stellen N und S (Fig. I) den Nord- und Südpol, nn_1 den nach beiden Seiten beliebig verlängerten Äquator, endlich Z und Z_1 die zwei Punkte auf dem Himmelsgewölbe vor, in welchem dasselbe getroffen wird, wenn die Normale und die Achse des attrahirten Instrumentes verlängert werden; so ist ζ der früher bemerkte dem grössten Kreisbogen ZZ_1 entsprechende Winkel der Ablenkung, NZS der richtige der Normale, und NZ_1S der falsche dem attrahirten Instrumente entsprechende Meridian; ferner ist das Azimuth des grössten Kreisbogens ZZ_1 , da Z_1 und Q in entgegengesetzten Richtungen gelegen sind, offenbar $= a + 180^\circ$, und man hat, wenn φ die der Normale, und φ_1 die dem attrahirten Instrumente entsprechende Polhöhe anzeigt:

$$\varphi = nZ \text{ und } \varphi_1 = n_1Z_1.$$

Nun ist sehr nahe

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi - \zeta \cos(a + 180) \\ \varphi &= \varphi_1 - \zeta \cos a\end{aligned}$$

und wenn für ζ und $\cos a$ die früher angegebenen Werthe substituirt werden,

$$1) \quad \begin{cases} \varphi = \varphi_1 - \frac{M}{E} \text{ und in Secunden} \\ \varphi = \varphi_1 - \frac{M}{E \sin 1''}. \end{cases}$$

Man muss daher zu der, nach dem attrahirten Instrumente sich ergebenden Polhöhe noch $-\frac{M}{E \sin 1''}$ hinzuthun, um die der Normale entsprechende Polhöhe zu erhalten.

Lassen wir $\tau = NZ_{1''}$ als Stundenwinkel des falschen Zenithes Z_1 und t als Stundenwinkel irgend eines Gestirnes gelten, wenn nämlich die Zählung im richtigen Meridiane $NZnS$ beginnt, und ist t_1 der Stundenwinkel desselben Gestirnes, wenn die Zählung im falschen Meridiane NZ_1n_1S beginnt; so ist offenbar:

$$2) \quad t = t_1 + \tau.$$

Es ist aber, wenn die positive Richtung gegen Westen angenommen wird:

$$\sin \tau \sin NZ_1 = \sin \zeta \sin(a + 180)$$

und da τ und ζ sehr spitzig, dann $NZ_1 = (90 - \varphi_1)$ ist:

$$\tau = -\zeta \frac{\sin a}{\cos \varphi_1}$$

und durch Substitution der früheren Werthe von ζ und $\sin a$

$$3) \quad \tau = -\sec \varphi_1 \left(\frac{W}{E} \right)$$

Wird dieser Werth in 2) substituirt, so hat man:

$$4) \quad \begin{cases} t = t_1 - \sec \varphi_1 \left(\frac{W}{E} \right) \text{ und in Zeit-Seeunden} \\ t = t_1 - \sec \varphi_1 \left(\frac{W}{15E \sin 1''} \right). \end{cases}$$

Man muss daher zu dem nach einem attrahirten Instrumente sich ergebenden Stundenwinkel noch $-\sec \varphi_1 \left(\frac{W}{15E \sin 1''} \right)$ hinzuthun, um den richtigen der Normale entsprechenden Werth desselben zu erhalten, und bei der Culmination des Gestirnes, wo $t_1 = 0$ wird, bleibt in Bezug auf den richtigen Meridian noch immer der Stundenwinkel

$$t = -\sec \varphi_1 \frac{W}{15E \sin 1''},$$

was besonders bei Längenbestimmungen Anlass zur Berücksichtigung gibt.

Verlängert man eine durch den Observationsort und ein irdisches Object gelegte Gerade, bis sie irgend einen Punkt G am Himmelsgewölbe trifft, so kann man G für ein Gestirn ansehen, welches mit dem irdischen Objecte dasselbe Azimuth und dieselbe Höhe hat. Sind nun die richtigen Werthe der Letzteren A und h hingegen die nach dem attrahirten Instrumente sich ergebenden A_1 und h_1 ; so werden dieselben Werthe auch dem irdischen Objecte entsprechen. Setzt man dem zufolge

$$5) \quad A = A_1 + \alpha$$

$$6) \quad h = h_1 + \gamma,$$

so sind α und γ erst zu bestimmende Unterschiede, von denen wir voraussetzen, dass ihnen nur kleine Werthe zukommen.

Setzt man der Kürze halber

$$7) \quad -\frac{M}{E} = v$$

so hat man auch

$$8) \quad \varphi = \varphi_1 + v.$$

Nach den Formeln der sphärischen Astronomie hat man:

$$A) \quad \sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A,$$

$$B) \quad \cos \delta \sin t = \cos h \sin A,$$

$$C) \quad \cos \delta \cos t = \sin h \cos \varphi + \cos h \sin \varphi \cos A,$$

wo δ die Deelination von G anzeigt. Es werden aber diesen Gleichungen, da δ keiner Änderung unterliegt, auch die Grössen φ_1 , t_1 , A_1 , h_1 und δ entsprechen. Setzt man in die Gleichungen $A)$ und $B)$ für t , A , h und φ die Werthe nach 2), 5), 6) und 8), und nimmt die Entwicklung nur bis auf die erste Potenz der kleinen Grössen τ , α , γ und v vor; so erhält man zwei Gleichungen, aus denen sich mit Rücksicht auf die Gleichung $C)$ dann auf die Werthe von τ und

nach 3) und 7), endlich unter der Voraussetzung, dass die Höhe des irdischen Objectes so gering ist, dass man füglich 0 für $\sin h_1 =$ und 1 für $\cos h_1$ annehmen kann:

$$\alpha = -\tan \varphi_1 \left(\frac{W}{E} \right),$$

$$\gamma = \cos A_1 \left(\frac{M}{E} \right) + \sin A_1 \left(\frac{W}{E} \right)$$

ergibt. Daher hat man mit Rücksicht auf 5) und 6) in Bogenseunden:

$$9) \quad A = A_1 - \tan \varphi_1 \left(\frac{W}{E \sin 1''} \right)$$

$$10) \quad h = h_1 + \cos A_1 \left(\frac{M}{E \sin 1''} \right) + \sin A_1 \left(\frac{W}{E \sin 1''} \right)$$

Befindet sich der Observationsort im Äquator, so ist $\varphi_1 = 0$, mithin $A = A_1$; so dass also die Attraction in diesem Falle keinen Einfluss auf die Bestimmung eines Azimuthes hat, während sie sonst sowohl auf Azimuth- als Höhenbestimmungen nachtheilig einwirken kann, wenn sie nicht berücksichtigt wird.

II.

Um die von den Unregelmässigkeiten des Erdballs herrührende Attraction zu bestimmen, muss die regelmässige oder theoretische Oberfläche desselben gegeben sein, für welche bekanntlich diejenige Fläche angenommen wird, deren sämmtliche Punkte im Niveau des Meeresspiegels gelegen sind. Sie wird deshalb auch als die natürliche Normalfläche angesehen werden können.

Bei der geringen Abweichung des Erdballs von der Kugelform wird es erlaubt sein, sie als Kugeloberfläche zu betrachten, wo dann selbstverständlich auch alle Höhen und Tiefen auf diese bezogen werden müssen. Aber man kann auch eine zu ihr concentrische Kugeloberfläche von grösserem Halbmesser als Normalfläche annehmen, wo dann der Unterschied der Halbmesser von den Höhen abzuziehen und den Tiefen zuzulegen ist. Man erlangt dadurch den Vortheil, dass — wie es später klarer hervortreten wird — bei der Berechnung grosse Zahlen vermieden werden. Am Bequemsten wird es sein, die Normalfläche durch den Observationsort, und wenn mehrere Observationsorte vorhanden sind, durch denjenigen anzunehmen, welcher in Folge der näheren Umstände als der wichtigste oder als der Hauptort anzusehen ist.

Wenn über der einmal angenommenen Normalfläche keine, hingegen unter derselben nur solche Schichten vorkämen, welche eine gleiche Dichtigkeit ρ hätten, wo also ρ als Normaldichtigkeit für die zunächst der Oberfläche befindlichen Schichten zu betrachten wäre, so könnte wohl von einer Abweichung der Richtung der Schwere von der Normale nicht die Rede sein. Da dies aber nicht der Fall ist, so kommt es darauf an, bei der Bestimmung der auf einen Erdort ausgeübten Attraction das zweckmässigste Verfahren anzuwenden, wofür wir Folgendes halten:

Das Terrain wird in Untertheilungen zerlegt, und die Attraction einer jeden solchen Untertheilung berechnet. Die Summe der so erlangten Werthe gibt dann die Gesammatraction. Dabei wird die Berechnung vorerst durchgehends für die Dichtigkeit = 1 durchgeführt und dann die Summen der aus gleich dichten Gruppen sich ergebenden Resultate mit der wirklich stattfindenden Dichtigkeit multipliziert.

Bezüglich der Letzteren ist noch Folgendes zu beachten: Kommen unterhalb der Normalfläche Untertheilungen vor, die eine von der Normaldichtigkeit ρ abweichende Dichtigkeit r haben; so stelle man sich vor, dass Untertheilungen von der ersten Dichtigkeit abgehen, dafür aber Untertheilungen von der letzteren eingesetzt sind, und man wird leicht einsehen, dass die für die Dichtigkeit = 1 berechnete Attraction solcher unter der Normalfläche befindlicher Untertheilungen, allgemein genommen, mit $(r - \rho)$ multiplicirt werden muss, um den richtigen Effect zu erhalten.

Bei den Erdschichten dieser Untertheilungen werden jedoeh solche, welche von einer durchschnittlichen Dichtigkeit bedeutend abweichen, nur in geringer Menge vorhanden sein, und es wird der hier möglichen Genauigkeit unbeschadet, und in den meisten Fällen für sie durchgehends eine Normaldichtigkeit ρ angenommen werden können, wo dann ihre für die Dichtigkeit = 1 berechnete Attraction mit $(\rho - \rho) = 0$ zu multipliciren wäre; daher diese Berechnung gänzlich entfällt.

Aus dem eben angeführten Grunde wird man auch für die oberhalb der Normalfläche gelegenen Schichten die Normaldichtigkeit ρ annehmen können. Dagegen muss die auf obige Art berechnete Attraction des Meerwassers noch mit $(1,026 - \rho)$, und jene des unter der Normalfläche befindlichen Binnenwassers mit $(1 - \rho)$ multiplicirt werden.

Kommt aber unter der angenommenen Normalfläche ein leerer Raum vor, wie z. B. ein Thal oder der vom Meeresspiegel und der Normalfläche eingeschlossene Raum, so sind, da hier die Dichtigkeit = 0 angenommen werden kann¹⁾, die im obigen Sinne berechneten Resultate mit $(0 - \rho) = -\rho$ zu multipliciren, wo demnach der Effect derselbe ist, als wenn in entgegengesetzter Lage attrahirende Massen vorhanden wären.

Endlich bleibt die für Binnenwässer oberhalb der Normalfläche berechnete Attraction für die Dichtigkeit = 1 unverändert, da diese Dichtigkeit ihnen wirklich zukommt.

Bezeichnet man daher die Summen der für die Dichtigkeit = 1 berechneten Attraction, in den beiden Richtungen der x und y für die oberhalb der Normalfläche befindlichen Erdschichten mit ΣX und ΣY ; für das Meerwasser mit ΣX^m und ΣY^m ; für die Binnenwässer unter der Normalfläche mit ΣX^u und ΣY^u ; für die Binnenwässer oberhalb der Normalfläche mit ΣX^o und ΣY^o ; endlich für die unterhalb der Normalfläche befindlichen leeren Räume mit ΣX^l und ΣY^l , und setzt $\frac{1}{E \sin 1''} = D$; so erhält man leicht, wenn die Größen von gemeinschaftlichen Factoren zusammengezogen werden:

$$11) \quad \begin{cases} \frac{M}{E \sin 1''} = D\rho \left\{ \Sigma X - \Sigma X^m - \Sigma X^u - \Sigma X^l \right\} + D \left\{ 1,026 \Sigma X^m + \Sigma X^u + \Sigma X^o \right\}; \\ \frac{W}{E \sin 1''} = D\rho \left\{ \Sigma Y - \Sigma Y^m - \Sigma Y^u - \Sigma Y^l \right\} + D \left\{ 1,026 \Sigma Y^m + \Sigma Y^u + \Sigma Y^o \right\}, \end{cases}$$

wo $\frac{M}{E \sin 1''}$ und $\frac{W}{E \sin 1''}$, wie es von selbst einleuchtet, die in der Richtung der x und y auf den betreffenden Observationsort ausgeübte, in Secunden ausgedrückte Gesammt-Attraction oder vielmehr stattfindende Ablenkung der Lothlinie anzeigen und dieselbe Bedeutung haben, wie im Vorhergehenden.

Zur Berechnung der Attraction oder Anziehung E der Erde, mithin auch der Constante D ist es ebenfalls hinreichend, die Erde als eine Kugel zu betrachten. Nun ist aber bekanntlich

¹⁾ Strenge wäre, da die Dichtigkeit der Luft = 0,0013, der Coefficient = $(0,0013 - \rho)$.

die von einer Kugel auf einen auf ihrer Oberfläche oder ausserhalb derselben gelegenen Punkt ausgeübte Attraction — selbst wenn man annimmt, dass sie aus mehreren concentrischen dicht an einander anliegenden Hohlkugeln von verschiedener Dichtigkeit besteht, — dieselbe, als wenn ihre Masse im Mittelpunkte concentrirt wäre. Nimmt man daher für ihre mittlere Dichtigkeit Δ , für den Halbmesser a , an und setzt die Entfernung des angèzogenen Punktes vom Mittelpunkte = A , so ist:

$$E = \frac{4}{3} \pi \Delta \frac{a^3}{A^2},$$

wo π die halbe Peripherie für den Halbmesser = 1 anzeigt. In den hier vorkommenden Fällen wird es auch gestattet sein $A = a$ zu setzen und es ergibt sich dann:

$$E = \frac{4}{3} \pi \Delta a$$

und

$$D = \frac{1}{\frac{4}{3} \pi \Delta a \sin 1''}.$$

Legen wir die vom königlich englischen Oberstlieutenant James in der früher bezeichneten Abhandlung bekannt gegebenen Daten zu Grunde, nämlich: $\rho = 2,75$; $\Delta = 5,316$ und $a = 3956,1$ englische Meilen; so erhalten wir, da wir bei unseren Berechnungen zur Vermeidung grosser Zahlen durchgehends 1000 österreichische Klafter als Einheit annehmen, und eine österreichische Meile = 4000 österreichische Klafter 4,7138 englische Meilen ausmacht, wo dann

$$\begin{aligned} a &= 3956,1 \times \frac{4}{4,7138} = 3357,04 \text{ ist,} \\ D &= 2,75928 \text{ und} \\ D\rho &= 7,5880. \end{aligned}$$

Sind nun die X und Y berechnet, so wird man auch die Werthe von $\frac{M}{E \sin 1''}$ und $\frac{W}{E \sin 1''}$ nach 11) berechnen und nach 1), 4), 9) und 10) im vorigen Artikel anwenden können.

Setzt man jedoch D und $D\rho$ als unbekannt voraus, so können diese Grössen in der Art bestimmt werden, dass die mit denselben berechnete Ablenkung der Lothlinie von der Normale, den auf mehreren Orten vorgenommenen, auf Grund terrestrischer Messungen mit einander vergleichbaren astronomischen Bestimmungen am meisten entspricht; ein wichtiger Umstand, der später noch in nähere Erwägung gezogen werden soll.

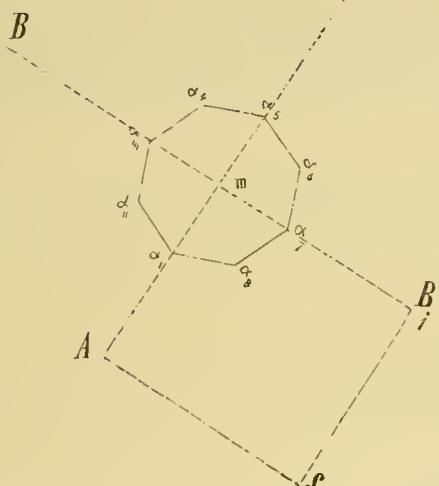
Wir übergehen nun zur Berechnung der Attraction der verschiedenen Körperformen, wie sie die Terrainuntertheilungen meistens erhalten dürfen, wobei wir uns zur Vereinfachung erlauben, die angenommene Normalfläche, sobald die Entfernung zwischen den attrahirenden Untertheilungen und dem attrahirten Orte 2 Grade des Meridianbogens nicht überschreitet, als eine an dem betreffenden Observationsorte sie tangirende Ebene zu betrachten, wo also natürlich die Höhen und Tiefen auf diese letztere zu beziehen sind.

Die Berechnung geschieht, wie es unserem Vorgange am zweckdienlichsten und bereits angedeutet ist, durchgehends für die Dichtigkeit = 1.

III.

Berechnung der Attraction eines von verticalen und horizontalen Ebenen so abgegrenzten Körpers, dass seine horizontale Querschnittsflächen, in Bezug auf zwei auf einander senkrechte Richtungen symmetrische Figuren bilden.

Fig. II.



$$+x, +y; \quad +x, -y; \quad -x, +y; \quad -x, -y.$$

Das eben Gesagte gilt natürlich auch von den Volumenelementen.

Nimmt man den Observationsort S , dessen Höhe über der angenommenen Normalfläche wir = H setzen wollen, als Anfangspunkt an, und sind in Bezug auf denselben $\alpha = SB$, und $\beta = SA$ die horizontalen Coordinaten von m ; so können die Coordinaten eines beliebigen Volumenelementes des attrahirenden Körpers durch $\alpha + x, \beta + y, H + z$ dargestellt werden. Da nun ein Volumenelement = $dx \cdot dy \cdot dz$ ist, so ist die von diesem Körper auf S in der Richtung der x und y ausgeübte Attraction, wenn sie den Achsen analog mit X und Y bezeichnet wird:

$$X = \iiint \frac{(\alpha+x) \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\{(\alpha+x)^2 + (\beta+y)^2 + (H+z)^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y = \iiint \frac{(\beta+y) \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\{(\alpha+x)^2 + (\beta+y)^2 + (H+z)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man

$$\frac{\alpha + x}{\{(\alpha+x)^2 + (\beta+y)^2 + (H+z)^2\}^{\frac{3}{2}}} = \varphi,$$

wo also φ als eine Funktion von den Veränderlichen x, y und z anzusehen ist, so hat man:

$$X = \iiint \varphi \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

Denkt man sich φ blos nach x und y differenzirt, und die Differentialquotienten für die Werthe $x=0$ und $y=0$ genommen, so erhält man leicht, da für diese Werthe von x und y

$$\varphi = \frac{\alpha}{\{\alpha^2 + \beta^2 + (H+z)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

wird:

$$X = \iiint \left\{ \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2 + (H+z)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{d\varphi}{dx} \cdot x + \frac{d\varphi}{dy} \cdot y + \frac{d^2\varphi}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{d^2\varphi}{dx \cdot dy} \cdot xy + \frac{d^3\varphi}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{2.3} + \frac{d^3\varphi}{dy^3} \cdot \frac{y^3}{2.3} + \dots \right\} dx \cdot dy \cdot dz.$$

Wenn anstatt der Werthe der Attraction der einzelnen oben erwähnten vier Volumenelemente, das Mittel aus allen vier genommen wird, so werden sich die mit ungeraden Potenzen von x und y multiplizirten Glieder heben, ohne dass der Werth des Integrals geändert wird.

Da man die Grundfläche der Untertheilungen beliebig klein construiren kann, so unterliegt es keinem Anstande x und y , gegenüber α und β so klein anzunehmen, dass die mit x^2 und y^2 und den noch höheren Potenzen dieser Grössen multiplizirten Glieder als unerheblich weggesehen können, und man erhält ganz einfach:

$$X = \iiint \frac{\alpha \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\{\alpha^2 + \beta^2 + (H+z)^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

und durch ähnliche Schlüsse

$$Y = \iiint \frac{\beta \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\{\alpha^2 + \beta^2 + (H+z)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Da nun $\iint dx \cdot dy = F$ ist, wo F die constante Querschnittsfläche anzeigt, so erhält man, wenn noch die Integration nach z in den Grenzen von $z = -h$ bis $z = 0$ durchgeführt wird:

$$X = \frac{\alpha F}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ \frac{h-H}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + (h-H)^2}} + \frac{H}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + H^2}} \right\},$$

$$Y = \frac{\beta F}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ \frac{h-H}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + (h-H)^2}} + \frac{H}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + H^2}} \right\},$$

welche Resultate noch auf das zu Anfang des Artikels I angeführte, unserem Zwecke entsprechende Coordinatensystem zu transformiren sind.

Bezeichnet man zu diesem Zwecke die in der Richtung der Achsen der x und y des letzteren Systems stattfindende Attraction mit X' und Y' , die zu diesen Achsen parallelen Coordinaten des Punktes m mit a und b , und setzt das Azimuth der Achse der x des ersten Systems in Bezug auf dieses $= u$; so hat man:

$$X' = X \cos u - Y \sin u,$$

$$Y' = Y \cos u + X \sin u, \text{ und}$$

$$a = \alpha \cos u - \beta \sin u,$$

$$b = \beta \cos u + \alpha \sin u.$$

Aus diesen vier und den vorhergehenden zwei Gleichungen ergibt sich nun:

$$12) \quad \begin{cases} X' = \frac{aF}{a^2+b^2} \left\{ \frac{h-H}{\sqrt{a^2+b^2+(h-H)^2}} + \frac{H}{\sqrt{a^2+b^2+H^2}} \right\}, \\ Y' = \frac{bF}{a^2+b^2} \left\{ \frac{h-H}{\sqrt{a^2+b^2+(h-H)^2}} + \frac{H}{\sqrt{a^2+b^2+H^2}} \right\}. \end{cases}$$

Unter Beobachtung des früher Gesagten bezüglich der Grundflächen, sind diese Gleichungen nur dann anzuwenden, wenn h und H bedeutende Werthe haben, z. B. wenn der Observationsort in der Nähe hoher und steiler Felswände gelegen ist.

Können jedoch diese Grössen gegenüber $\sqrt{a^2+b^2}$ als klein betrachtet werden, so kann man $(h-H)^2$ und H^2 in den Nennern vernachlässigen, und setzt man überdies noch $Fh=K$, wo K den kubischen Inhalt der attrahirenden Untertheilung anzeigt, so übergehen die letzten Gleichungen in:

$$13) \quad \begin{cases} X' = \frac{aK}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ Y' = \frac{bK}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

welche Formeln in den geeigneten Fällen für die praktische Berechnung sehr bequem sind.

Es kann jedoch ein zweiter Observationsort S_1 zu S so nahe gelegen sein, dass die horizontalen Coordinaten des Punktes m irgend einer Untertheilung in den Coordinatensystemen beider Orte nur unbedeutend von einander verschieden sind. Wären nun dieselben in dem Systeme von S_1 , a_1 und b_1 und setzt man $a_1 = a + \Delta a$ und $b_1 = b + \Delta b$, so erhält man durch Substitution dieser Werthe in die letzten Gleichungen und wenn die Entwicklung blos bis auf die erste Potenz von Δa und Δb vorgenommen wird:

$$\begin{aligned} X'' &= \frac{aK}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} - K \frac{(2a^2-b^2)\Delta a + 3ab\Delta b}{(a^2+b^2)^{\frac{5}{2}}}, \\ Y'' &= \frac{bK}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} - K \frac{(2b^2-a^2)\Delta b + 3ab\Delta a}{(a^2+b^2)^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned}$$

wo X'' und Y'' die von der genannten Untertheilung auf S_1 ausgeübte horizontale Attraction anzeigen.

Vergleicht man diese Ausdrücke mit 13), so sieht man, dass wenn Δa und Δb gegenüber $\sqrt{a^2+b^2}$ entsprechend kleine Werthe haben, die Unterschiede zwischen X'' und X' , dann Y'' und Y' so gering werden können, dass man die einen Grössen für die andern nehmen kann.

Bei dem angegebenen Umstände gibt es demnach eine Grenze, von welcher angefangen die von einer Untertheilung auf zwei, mithin auch auf mehrere Observationsorte ausgeübte horizontale Attraction als gleich betrachtet werden kann.

Dieser Gegenstand wird später noch unter Berücksichtigung der sphärischen Gestalt der Erde besprochen werden, und bildet in Beziehung der am Schlusse des Artikels II erwähnten Berechnung von D und $D\rho$ einen zweiten wichtigen Umstand.

Untertheilungen von symmetrischen horizontalen Querschnittsflächen, wie sie bei der Anwendung der oben angeführten Formeln erforderlich sind, wird man am besten construiren, wenn man ihre Grundflächen zu den Achsen des Coordinatensystems eines Observationsortes parallel abgrenzt. Auch ist es von Vortheil diese Abgrenzung wo möglich für die anderen Orte beizubehalten, weil sonst, bei verschiedenen Eintheilungen für die verschiedenen Orte, sich leicht ergeben könnte, dass die Fehler, welche bei der Abschätzung der Höhen der Untertheilungen unvermeidlich sind, im entgegengesetzten Sinne der Einwirkung begangen werden.

Man wird jedoch auf diese Art nicht bis in die nächste Umgebung eines Ortes gelangen können, weil sonst das Terrain in eine unendliche Anzahl unendlich kleiner Untertheilungen getheilt werden müsste. In einem solehen Falle wird es am vortheilhaftesten sein, nach Möglichkeit ein Gesetz aufzustellen, dem die Oberfläche der nächsten Umgebung des Observationsortes sich thunlichst anschliesst, wornaeh dann die Attraction berechnet werden kann. Besondere Vortheile ergeben sich, wenn die nächste Umgebung eines Observationsortes als eine Ebene betrachtet werden kann; denn bildet man innerhalb derselben um den Ort herum eine symmetrische Untertheilung so, dass die Projection des Schwerpunktes einer horizontalen Querschnittsfläche durch denselben geht, so ist die Attraction in jeder beliebigen horizontalen Richtung = 0. Fällt eine solehe Ebene mit der gewählten Normalfläche zusammen, so ist die Höhe aller auf derselben gebildeten Untertheilungen = 0, mithin übt sie in ihrem ganzen Umfange auf den Observationsort keine Attraction aus.

Das anstossende Terrain wird dann entsprechend in Untertheilungen getheilt. Ist man aber dabei gezwungen im Anstosse mit einer solchen Ebene Untertheilungen zu bilden, die nicht symmetrisch sind, so müssen selbe um so kleiner sein, weil sich $\frac{d\varphi}{dx} \cdot x, \frac{d\varphi}{dy} \cdot y$, u. s. w. wie es früher vorausgesetzt wurde, nicht vollständig heben.

Zur Eintheilung des Terrains in Untertheilungen bedient man sich guter Specialkarten, auf welche die Observationsorte möglichst genau aufgetragen werden. Eine grosse Anzahl von Höhenbestimmungen ist, besonders für die nächste Umgebung der Observationsorte wesentlich, daher auch eine mehr detaillierte Aufnahme derselben mit Nivellement erforderlich.

IV.

Berechnung der Attraction eines von einer schiefen Ebene in der Art abgeschnittenen rechtwinkeligen Parallelepipeds, dass die durch das grösste Gefälle gelegte verticale Ebene parallel ist zu zwei Seitenflächen.

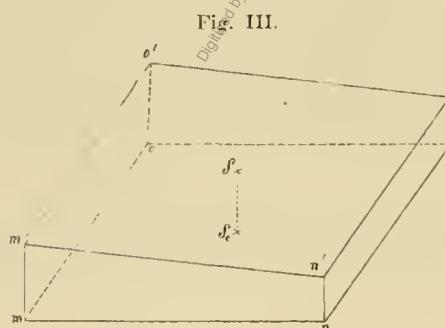


Fig. III.

Es sei (Fig. III) das rechtwinkelige Parallelogramm $m n o p$ die Grundfläche eines solchen rechtwinkeligen Parallelepipeds; $m' n' o' p'$ sei der schiefen in dem erwähnten Sinne geführte Schnitt, wo demnach $mm' = oo'$ und $nn' = pp'$ sein wird. Der von diesem Körper attrahirte Punkt S sei auf der schiefen Ebene so gelegen, dass seine Projection S_0 auf die horizontale Ebene $m n o p$ in den Schwerpunkt derselben falle.

Nehmen wir vorläufig ein rechtwinkeliges Coordinatensystem mit dem Nullpunkte in S so an, dass die Achsen der x und y parallel zur Grundfläche, die Achse der x überdies parallel zu den Seitenflächen mm' nn' , dann oo' pp' , mithin die Achse der z senkrecht auf die Grundfläche sei; so ist die in der Richtung der beiden horizontalen Achsen auf S ausgeübte Attraction:

$$X = \iiint \frac{xdx \cdot dy \cdot dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$Y = \iiint \frac{ydx \cdot dy \cdot dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Integriert man den Ausdruck für Y nach den von einander abhängigen z und x , so bleibt, da zwischen diesen Größen und y keine Relation besteht, noch ein Ausdruck von der Form $f(y^2) ydy$ zu integrieren übrig. Da nun $\int f(y^2) ydy$ offenbar eine Function blos von y^2 sein kann, mithin in den Grenzen von $y = -y_1$ bis $y = +y_1$ gleich Null wird, wo $y_1 = \frac{1}{2} m o$, $= \frac{1}{2} n p$; so ist auch $Y = 0$, daher die Attraction in der Richtung der y ebenfalls $= 0$. Es ist dies auch ganz natürlich, weil in der Richtung sowohl der positiven als auch der negativen y dieselbe Attraction stattfindet. Es erübrigt also nur den Ausdruck für X zu integrieren. Thut man dies nach z in den Grenzen von $z = z_1$ bis $z = h$, so ergibt sich:

$$X = \iint \frac{x \cdot dx \cdot dy \cdot h}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} - \iint \frac{x \cdot dx \cdot dy \cdot z_1}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2}}.$$

Betrachtet man in dieser Gleichung rechts das erste Glied, so sieht man, dass dieses Integrale eine Function blos von x^2 sein kann, mithin in den Grenzen von $x = -x_1$ bis $x = +x_1$ gleich Null wird, wo $x_1 = \frac{1}{2} mn = \frac{1}{2} o p$ ist.

Wir haben demnach blos zu berücksichtigen:

$$X = - \iint \frac{x \cdot dx \cdot dy \cdot z_1}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2}}.$$

Um die Integration nach x vorzunehmen, muss z_1 durch x ausgedrückt werden. Setzt man, da z nach unten positiv, entgegengesetzt negativ, und x in der Richtung der grössten Steigung positiv gezählt wird:

$$z_1 = -nx,$$

wo

$$n = \frac{mm' - nn'}{mn}$$

ist (siehe Fig. III), so hat man

$$X = \iint \frac{nx^2 \cdot dx \cdot dy}{(x^2 + y^2) ((1 + n^2)x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

wo y , wie schon erwähnt wurde, von x unabhängig ist. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes erhält man, wenn die Entwicklung nach den steigenden Potenzen von (n^2) oder vielmehr von ($n^2 x^2$) vorgenommen wird:

$$\frac{1}{(x^2 + y^2) ((1 + n^2)x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{8} \cdot \frac{n^4 x^4}{(x^2 + y^2)^{\frac{7}{2}}} - \dots$$

eben so erhält man:

$$\frac{1}{\left[\left(1 + \frac{n^2}{3}\right)x^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15}{72} \cdot \frac{n^4 x^4}{(x^2 + y^2)^{\frac{7}{2}}} - \dots$$

Wird nun berücksichtigt, dass n stets nur einen kleinen Werth hat, so wird man der hier nöthigen Genauigkeit unbeschadet den einen Ausdruck für den andern nehmen können, und man erhält dann sehr nahe:

$$X = n \left(\frac{3}{3+n^2}\right)^{\frac{3}{2}} \iint \frac{\frac{3+n^2}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{\frac{3+n^2}{3}} \cdot dx \cdot dy}{\left[\left(\frac{3+n^2}{3}\right)x^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

und wenn

$$x \sqrt{\frac{3+n^2}{3}} = \xi,$$

mithin

$$\sqrt{\frac{3+n^2}{3}} \cdot dx = d\xi$$

gesetzt wird:

$$X = n \left(\frac{3}{3+n^2}\right)^{\frac{3}{2}} \iint \frac{\xi^2 \cdot d\xi \cdot dy}{(\xi^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nimmt man in diesem Ausdrucke zuerst die Integration nach ξ in den Grenzen von $\xi = -\xi_1$ bis $\xi = +\xi_1$, wo $\xi_1 = \sqrt{\frac{3+n^2}{3}} x_1$ ist; dann nach y in den Grenzen von $y = -y_1$ bis $y = +y_1$; so erhält man:

$$X = 2n \left(\frac{3}{3+n^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot y_1 \cdot \log \frac{1 + \sqrt{\xi_1^2 + y_1^2} + \xi_1}{1 + \sqrt{\xi_1^2 + y_1^2} - \xi_1}.$$

Zur leichteren Berechnung kann man setzen:

$$\frac{\xi_1}{y_1} = \sqrt{\frac{3+n^2}{3}} \cdot \frac{x_1}{y_1} = \tan v;$$

wo dann

$$X = 4n \left(\frac{3}{3+n^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot y_1 \cdot \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}v\right)$$

wird.

Setzt man das Azimuth der dem grössten Gefälle parallelen Achse der x dieses Systems $= u$, und bezeichnet die in der Richtung des Meridians und senkrecht darauf wirkende horizontale Attraction mit X' und Y' ; so erhält man:

$$14) \quad \begin{cases} X' = 4n \left(\frac{3}{3+n^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cos u \cdot y_1 \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}v\right), \\ Y' = 4n \left(\frac{3}{3+n^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sin u \cdot y_1 \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}v\right). \end{cases}$$

Da sowohl hier, als auch in dem Folgenden bei allen algebraischen Ausdrücken und Functionen stets nur natürliche Logarithmen gemeint sind, so muss bei numerischen Berechnungen der Brigg. Log. noch mit 2,3025851 multipliziert werden, um das richtige Resultat zu erhalten. Brigg. Log dieser Zahl = 0,3622157.

V.

Berechnung der Attraction eines Berges, wenn der attrahirte Punkt auf einer beliebigen Stelle seiner Oberfläche gelegen ist, und bei der Voraussetzung, dass der Berg eine arrondirte Form habe.

Es sei $SS_0f_0p_0$ (Fig. IV) ein Theil eines Kreissegments, der grösser oder kleiner sein kann, als die Hälfte desselben; SS_0 sei senkrecht auf den Theil S_0ff_0 seiner Sehne. Zeigt nun SS_0S_0 die Tangente des Kreisbogens in S an, so wird der Winkel $S_0SS_0 \gtrless 90^\circ$, je nachdem $SS_0f_0p_0$ grösser oder kleiner als die Hälfte des Segmentes ist.

Wir wollen für die Folge den Winkel S_0SS_0 mit v_{u} und den Winkel S_0Sf_0 mit v , bezeichnen, so dass $(v_{\text{u}} - v)$ einen Winkel vorstellt, welcher der Hälfte des Kreisbogens Sp_0f_0 entspricht:

Dreht man nun diesen Theil des Segmentes um die Gerade SS_0 , so entsteht ein Körper $f_0p_0SS_0f_0p_0$ (Fig. V.) der als Ausschnitt eines Berges betrachtet, und dessen Attraction, die er auf den in S angenommenen Observationsort ausübt, berechnet werden soll. Ist SS_0 parallel zur Richtung der Normale der Erdoberfläche in S , so wird, nach dem hier allgemein geltenden Coordinaten-Systeme, SS_0 mit der Achse der z zusammenfallen, und $S_0f_0f_0$ parallel zur Ebene der $x y$ sein.

Führt man Polar-Coordinaten ein, indem man setzt:

$$\begin{aligned}x &= r \sin v \cos u, \\y &= r \sin v \sin u, \\z &= r \cos v;\end{aligned}$$

so zeigt r den Radius an, der den als Nullpunkt angenommenen Observationsort S mit einem Elemente p des in Rede stehenden attrahirenden Körpers verbindet; v ist der Winkel, den der Radius mit der Achse der z , und u der Winkel, den die durch r gelegte senkrechte Ebene mit der Meridianebene von S , mithin mit der Achse der x bildet; wonach also u ein Azimuth vorstellt. In welchem Sinne diese Winkel zu zählen sind, ergibt sich aus der positiven und negativen Richtung der Achsen.

Der kubische Inhalt oder die Masse des Elementes p wird demnach sein:

$$r^2 du \cdot \sin v \cdot dv \cdot dr$$

Fig. IV.

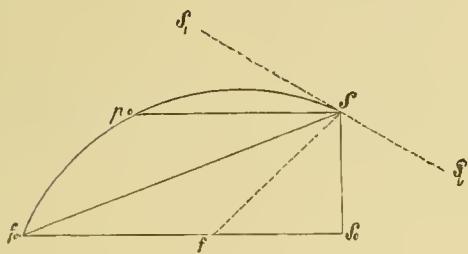
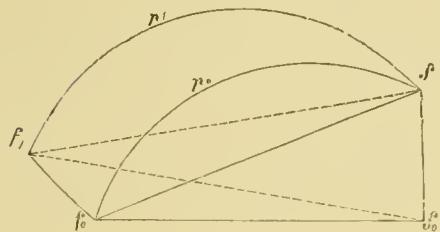


Fig. V.



und die auf S in der Richtung der beiden horizontalen Achsen ausgetübte Attraction, wenn solche analog mit X und Y bezeichnet wird:

$$X = \iiint \frac{xr^2 du \cdot \sin v \cdot dv \cdot dr}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y = \iiint \frac{yr^2 du \cdot \sin v \cdot dv \cdot dr}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wenn Polar-Coordinate eingeführt werden:

$$X = \iiint \cos u \cdot du \cdot \sin^2 v \cdot dv \cdot dr$$

$$Y = \iiint \sin u \cdot du \cdot \sin^2 v \cdot dv \cdot dr$$

und wenn die Integration nach r in den Grenzen von $r=0$ bis $r=r$, wo nämlich der Radius eine der Flächen, die den Körper begrenzen, trifft, vorgenommen wird, während man v und u als constant betrachtet:

$$15) \quad \begin{cases} X = \iint r \cos u \cdot du \cdot \sin^2 v \cdot dv, \\ Y = \iint r \sin u \cdot du \cdot \sin^2 v \cdot dv. \end{cases}$$

Bei der ferneren Integration nach v , wo u als constant betrachtet wird, muss offenbar r , durch v ausgedrückt werden. Da jedoch r , in dem Falle, in welchem der Radius die ebene Grundfläche in f trifft (Fig. IV) eine andere Function von v ist, als wenn er die Kugelfläche in p_0 trifft; so muss sowohl die Attraction des Kegelausschnittes $SS_0 f_0 f$, (Fig. V) als auch die des überbliebenen von der Kugeloberfläche begrenzten Körpers $Sf_0 p_0 f_0 p$, jede für sich abgesondert berechnet werden. Für den von der Kugeloberfläche abgegrenzten Körper ist, wenn (Fig. IV) der Winkel $S_0 Sp_0 = v$ gesetzt wird,

$$16) \quad \begin{aligned} Sp_0 &= r = 2a \sin(v - v), \\ r &= 2a (\sin v \cos v - \cos v \sin v), \end{aligned}$$

wo a den Halbmesser des Kreisbogens $Sp_0 f_0$ anzeigt. Substituirt man diesen Werth in die Gleichungen 15), bezeichnet die in der Richtung der analogen horizontalen Achsen wirkende Attraction dieses Körpers mit X und Y , und nimmt die Integration in den Grenzen von $v=v$ bis $v=v'$ vor; so erhält man:

$$17) \quad \begin{cases} X = \int 2a \left\{ \sin v' \left(\frac{\sin^3 v''}{3} - \frac{\sin^3 v'}{3} \right) + \cos v' \left[\frac{\cos^3 v'}{3} - \frac{\cos^3 v''}{3} - (\cos v' - \cos v'') \right] \right\} \cos u \cdot du, \\ Y = \int 2a \left\{ \sin v' \left(\frac{\sin^3 v''}{3} - \frac{\sin^3 v'}{3} \right) + \cos v' \left[\frac{\cos^3 v'}{3} - \frac{\cos^3 v''}{3} - (\cos v' - \cos v'') \right] \right\} \sin u \cdot du. \end{cases}$$

Für den Kegelausschnitt ist (Fig. IV) $r = Sf$ und setzt man $SS_0 = h$, so ist:

$$18) \quad r = \frac{h}{\cos v},$$

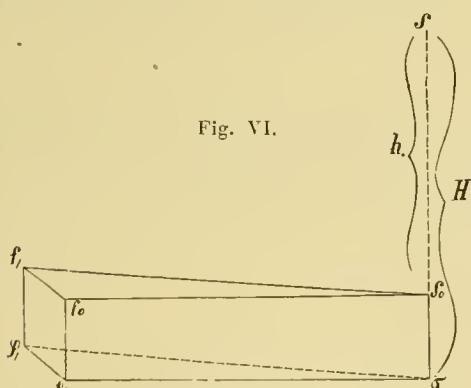
indem der Winkel S_0Sf mit v bezeichnet wird. Substituirt man diesen Werth für r , in die Gleichungen 15), bezeichnet die in denselben Richtungen wie beim vorigen Körper wirkende Attraction mit X_{μ} und Y_{μ} und nimmt die Integration in den Grenzen von $v = 0$ bis $v = v$, vor, so erhält man:

$$19) \quad X_{\mu} = \int h \left\{ \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} v \right) - \sin v \right\} \cos u \cdot du,$$

$$Y_{\mu} = \int h \left\{ \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} v \right) - \sin v \right\} \sin u \cdot du.$$

Die Ausdrücke 17) und 19) geben die Attraction nur bis auf den Fuss des Berges. Da jedoch die Unterlage desselben vom Fusse an bis zu der angenommenen Normalfläche ebenfalls eine Attraction auf den Observationsort ausübt; so wird man bei der Berechnung dieser letzteren am besten zum Ziele gelangen, wenn man sich durch die Seitenflächen des Bergausschnittes $SS_0f_0p_0$ und $SS_0f_1p_1$ (Fig. V) zwei Ebenen und durch die Punkte f_0 und f_1 eine Cylinderfläche so gelegt denkt, dass die Achse der letzteren mit SS_0 zusammenfällt. Hierdurch entsteht ein Körper $S_0f_0f_1\varphi_0\varphi_1\sigma$ (Fig. VI), der, von diesen drei Flächen, dann von der angenommenen Normale $\sigma\varphi_0\varphi_1$ und der Grundfläche $S_0f_0f_1$ des Bergausschnittes begrenzt, offenbar ein Cylinderausschnitt ist, und die Unterlage des Bergausschnittes bildet, dessen Attraction berechnet werden soll.

Fig. VI.



Ist S wieder der Observationsort, so fällt $SS_0\sigma$ mit der Achse der z zusammen, und SS_0 ist $= h$, wo h den vorigen Werth hat, hingegen H die Höhe von S über der Normalfläche anzeigt.

Nimmt man einen Radius ε an, der senkrecht auf $SS_0\sigma$ um diese Verticale, dem Azimuth u entsprechend sich bewegt, so hat man nach unserem Coordinaten-

systeme:

$$x = \varepsilon \cos u, \quad y = \varepsilon \sin u.$$

Ein unendlich kleines Volumenelement ist dann:

$$\varepsilon du \cdot d\varepsilon \cdot dz;$$

mithin die Attraction des Cylinderausschnittes in den entsprechenden Richtungen, wenn selbe den Achsen analog mit $X_{\mu\mu}$ und $Y_{\mu\mu}$ bezeichnet wird:

$$X_{\mu\mu} = \iiint \frac{x \cdot \varepsilon du \cdot d\varepsilon \cdot dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y_{\mu\mu} = \iiint \frac{y \cdot \varepsilon du \cdot d\varepsilon \cdot dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und wenn für x und y die oberen Werthe substituirt werden:

$$20) \quad \begin{cases} X_{\mu\mu} = \iiint \frac{\cos u \cdot du \cdot dz \cdot \varepsilon^2 d\varepsilon}{(\varepsilon^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ Y_{\mu\mu} = \iiint \frac{\sin u \cdot du \cdot dz \cdot \varepsilon^2 d\varepsilon}{(\varepsilon^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Integriert man diese Ausdrücke nach z in den Grenzen von $z = h$ bis $z = H$, während ε und u als constant betrachtet werden, so erhält man:

$$X_{\text{m}} = \iint \frac{H \cos u \cdot du \cdot dz}{\sqrt{\varepsilon^2 + H^2}} - \iint \frac{h \cos u \cdot du \cdot dz}{\sqrt{\varepsilon^2 + h^2}},$$

$$Y_{\text{m}} = \iint \frac{H \sin u \cdot du \cdot dz}{\sqrt{\varepsilon^2 + H^2}} - \iint \frac{h \sin u \cdot du \cdot dz}{\sqrt{\varepsilon^2 + h^2}}.$$

Um den Werth des fernerer Integrals nach ε in den Gränzen von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = e$, während u als constant betrachtet wird, zu erhalten, setze man rechts für das erste Glied $\frac{\varepsilon}{H} = \tang V$, mithin $d\varepsilon = \frac{H dV}{\cos^2 V}$ und für das zweite Glied $\frac{\varepsilon}{h} = \tang v$, mithin $d\varepsilon = \frac{h dv}{\cos^2 v}$. Ist dann, wenn $\varepsilon = e$ wird, $\frac{e}{H} = \tang V$ und $\frac{e}{h} = \tang v$, so ist, da für $e = 0$ auch $V = v = 0$ wird, das Integral des ersten Gliedes in den Gränzen von $V = 0$ bis $V = V$, und das des zweiten Gliedes in den Gränzen von $v = 0$ bis $v = v$, zu nehmen, und man hat:

$$21) \quad \begin{cases} X_{\text{m}} = \int H \cdot \log \tang \left(45^\circ + \frac{1}{2} V \right) \cos u \cdot du - \int h \log \tang \left(45^\circ + \frac{1}{2} v \right) \cos u \cdot du, \\ Y_{\text{m}} = \int H \cdot \log \tang \left(45^\circ + \frac{1}{2} V \right) \sin u \cdot du - \int h \log \tang \left(45^\circ + \frac{1}{2} v \right) \sin u \cdot du; \end{cases}$$

e ist hier offenbar $= S_0 f_0 = S_0 f$, (siehe Fig. V und VI).

Bei der nun folgenden Integration der Gleichungen 17), 19), 21), nach u ist zu berücksichtigen, dass die sämtlichen daselbst vorkommenden Grössen als unabhängig von u zu betrachten sind. Bedenkt man ferner, dass in den Gränzen von $u = u_{\text{a}}$ bis $u = u_{\text{b}}$

$$\begin{aligned} \int \cos u \, du &= 2 \cos \frac{1}{2} (u_{\text{b}} + u_{\text{a}}) \sin \frac{1}{2} (u_{\text{b}} - u_{\text{a}}) \\ \int \sin u \, du &= 2 \sin \frac{1}{2} (u_{\text{b}} + u_{\text{a}}) \sin \frac{1}{2} (u_{\text{b}} - u_{\text{a}}) \end{aligned}$$

ist, und substituiert überdies in 17) für a den aus 16) und 18) sich ergebenden Werth $\frac{h}{2 \cos v_i \sin (v_{\text{b}} - v_i)}$, wenn daselbst $v = v_i$ gesetzt wird; so erhält man bei der Zusammenziehung von je drei Gleichungen, so dass

$$\begin{aligned} X_{\text{a}} + X_{\text{b}} + X_{\text{m}} &= X_4, \\ Y_{\text{a}} + Y_{\text{b}} + Y_{\text{m}} &= Y_4 \end{aligned}$$

genommen wird:

$$22) \quad \begin{cases} X_4 = 2 \cos \frac{1}{2} (u_{\text{b}} + u_{\text{a}}) \sin \frac{1}{2} (u_{\text{b}} - u_{\text{a}}) \left\{ h \left[\sin v_{\text{b}} M + \cos v_{\text{b}} \left(N - \frac{\sin \frac{1}{2} (v_{\text{b}} + v_i)}{\cos v_i \cos \frac{1}{2} (v_{\text{b}} - v_i)} \right) - \sin v_i \right] + H \log \tang \left(45^\circ + \frac{1}{2} V \right) \right\} \\ Y_4 = 2 \sin \frac{1}{2} (u_{\text{b}} + u_{\text{a}}) \sin \frac{1}{2} (u_{\text{b}} - u_{\text{a}}) \left\{ h \left[\sin v_{\text{b}} M + \cos v_{\text{b}} \left(N - \frac{\sin \frac{1}{2} (v_{\text{b}} + v_i)}{\cos v_i \cos \frac{1}{2} (v_{\text{b}} - v_i)} \right) - \sin v_i \right] + H \log \tang \left(45^\circ + \frac{1}{2} V \right) \right\} \end{cases}$$

wo der Kürze halber

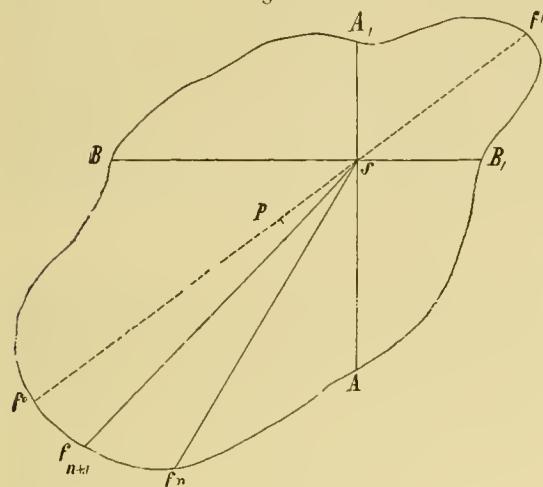
$$M = \frac{1}{3} \cdot \frac{[3 \sin^2 \frac{1}{2}(v_n + v) \cos^2 \frac{1}{2}(v_n - v) + \cos^2 \frac{1}{2}(v_n + v) \sin^2 \frac{1}{2}(v_n - v)] \cos \frac{1}{2}(v_n + v)}{\cos v, \cos \frac{1}{2}(v_n - v)}$$

$$N = \frac{1}{3} \cdot \frac{[3 \cos^2 \frac{1}{2}(v_n + v) \cos^2 \frac{1}{2}(v_n - v) + \sin^2 \frac{1}{2}(v_n + v) \sin^2 \frac{1}{2}(v_n - v)] \sin \frac{1}{2}(v_n + v)}{\cos v, \cos \frac{1}{2}(v_n - v)}$$

gesetzt wurde.

X_4 und Y_4 sind daher die Werthe der von dem ganzen bis auf die Normalfläche reichenden Bergausschnitte in der Richtung der analogen Achsen ausgeübten Attraction.

Fig. VII.



Es sei nun ferner (Fig. VII) $Af_n f_{n+1} f^0 B A, f^0 B$, die Projection des Bergumfangs am Fusse desselben auf die angenommene Normalfläche; S sei die Projection des Observationsortes, ASA , und BSB , die der Achsen der x und y nach dem hier allgemein geltigen Coordinatensysteme.

Stellt nun $f_n S f_{n+1}$ die Projection eines Bergausschnittes vor, so ist natürlich:

$$\begin{aligned} u_n &= AS f_{n+1}, \\ u &= AS f_n, \\ e &= \frac{S f_n + S f_{n+1}}{2}; \end{aligned}$$

zeigt ferner m_0 die Höhe der angenommenen Normalfläche über der Meeresfläche an, und sind m, m_n, m_{n+1} die dem Observationsorte S dann den Fusspunkten f_n, f_{n+1} entsprechenden Höhen über der Meeresfläche, so hat man:

$$\begin{aligned} H &= m - m_0 \\ h &= m - \frac{m_n + m_{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

Daraus erhält man, wie schon oben angeführt wurde, die Werthe von V und v , indem man setzt:

$$\begin{aligned} 23) \quad \tang V &= \frac{e}{H} \text{ und} \\ \tang v &= \frac{e}{h}. \end{aligned}$$

Denkt man sich eine die krumme Oberfläche des Berges in dem Observationsorte S tangirende Ebene, und legt durch denselben eine auf die angenommene Normalfläche senkrechte Ebene, deren Azimuth von der Achse der x , mithin von A an, gezählt = u ist, so wird der Schnitt dieser beiden Ebenen offenbar eine Tangente der krummen Oberfläche des Berges sein, und das Gefälle o der tangirenden Ebene in der dem Azimuth u entsprechenden Richtung anzeigen, wornach also o derjenige Winkel ist, den die betreffende Tangente mit der Normalfläche bildet.

Bezeichnet man die Werthe von o und u , wenn o die grösste Steigung, also den grössten positiven Werth erlangt, mit O und U , so ergibt sich nach einer einfachen Herleitung:

$$\tang o = \cos(u - U) \tang O,$$

wo σ positiv oder negativ ausfällt, je nachdem das Gefälle eine Steigung oder Senkung in sich begreift.

Für den Bergausschnitt $f_n S f_{n+1}$ erhält man, wenn anstatt u der Werth $\frac{1}{2} (u_n + u_{n+1})$ gesetzt wird:

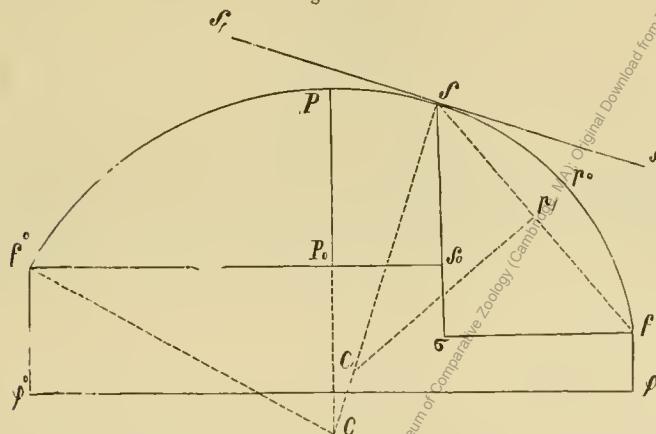
$$24) \quad \tan o = \cos \left(\frac{1}{2} (u_1 + u_n) - U \right) \tan O,$$

und

$$25) \qquad \qquad \qquad v_{\mu} = 90 + o.$$

Es fehlen daher nur noch die Werthe von O und U , um die numerische Berechnung der Formeln 22) vornehmen zu können. Zur Bestimmung dieser beiden Grössen wird hier blos die Kenntniss der horizontalen Lage des höchsten Punktes P der Bergoberfläche (Fig VII) und des auf derselben befindlichen Observationsortes S nebst seiner Höhe vorausgesetzt, und angenommen, dass die grösste Steigung in der Richtung vom letzteren auf den ersteren stattfinde. Führt man daher durch diese zwei Punkte mittelst einer auf die Normalfläche senkrechten Ebene den Schnitt f^oPSf' , so ist das der grössten Steigung entsprechende Azimuth $U = ASP = ASf^o$.

Fig. VIII.



The Bed

Das durch den eben erwähnuten Schnitt entstehende Profil des Berges ist in (Fig. VIII) dargestellt. $\varphi^0\varphi'$ ist der Schnitt der senkrechten Ebene mit der Normalfläche; f^0 und f' sind dieselben Fusspunkte wie in (Fig. VII); $f^0P_0S_0$ und $f'\sigma$ sind parallel zu $\varphi^0\varphi'$; PP_0 und $SS_0\sigma$ sind senkrecht darauf, mithin auch senkrecht auf $f^0P_0S_0$ und $f'\sigma$; $\varphi^0f^0P_0S_0\sigma f'\varphi'$ ist das Profil der früher erwähnnten Unterlage des Berges; endlich stellen die Kreisbögen f^0PS und Sp_0f' den Schnitt vor, den die verticale Ebene mit der krummen Oberfläche

des Berges bildet. Ist das Centrum von $f^0 PS$ in C , so ist das Centrum von $Sp_0 f'$ in dem Schnitte C , den der aus der Mitte p , der Chorde $Sp_0 f'$ errichtete Perpendikel p, C , mit dem Radius CC, S bildet. Eine durch S senkrecht auf SCC gezogene Gerade S, SS_{α} tangirt beide Kreisbögen in diesem ihren gemeinschaftlichen Punkte. Werden S, SS_{α} und $\varphi^0 \varphi'$ so weit verlängert, bis sie sich schneiden, so ist der von ihnen eingeschlossene Winkel $= O$, mithin

$$O = PCS.$$

Setzt man nun $f^0 P_0 = L$, $S_0 P_0 = l$, Werthe, welche in Folge der bekannten Lage von S und P ebenfalls als bekannt vorausgesetzt werden können; ferner die Höhe von S über der Horizontalen $f^0 P_0 S_0$ nämlich $SS_0 = \gamma$; endlich $PCf^0 = w$ und den Halbmesser $Cf^0 = CP = CS = \alpha$; so erhält man:

$$\alpha \cos O - \alpha \cos w = \gamma$$

$$\alpha \sin w = L$$

$$\alpha \sin O = l$$

und durch ein entsprechendes Verfahren mit diesen Gleichungen auch:

$$\tan \frac{1}{2}(w-O) = \frac{\gamma}{L+l},$$

$$\tan \frac{1}{2}(w+O) = \frac{\gamma}{L-l}.$$

Da nun

$$O = \frac{1}{2}(w+O) - \frac{1}{2}(w-O)$$

ist, so ist nebst dem schon bekannten Werthe von U auch O bekannt, so dass es keinem Anstande unterliegt, endlich auch die Werthe von o und v_{u} nach 24) und 25) zu bestimmen. Um die Attraction des ganzen Berges zu erhalten, theilt man (Fig. VII) mittelst durch S unter gleichen Winkeln, senkrecht auf die Normalfläche gelegten Ebenen den Berg in der ganzen Peripherie, von A angefangen, in die nöthige Anzahl gleicher Ausschnitte. Die Summe der Attraction dieser letzteren gibt dann die Attraction des Berges selbst.

24 bis 36 solcher Ausschnitte werden hinreichend sein.

Sollte sich der Fall ereignen, dass für einen oder mehrere Ausschnitte $v_{\text{u}} < v$, zum Vorschein kommt, so ist das ein Zeichen, dass die krumme Oberfläche solcher Ausschnitte als concav zu betrachten sei. Die Formeln 22) geben auch für diesen Fall richtige Werthe.

Befindet sich der Observationsort auf der höchsten Stelle des Berges, so fällt S mit P zusammen (Fig. VIII), wo dann offenbar $P_0 S_0 = l = 0$ ist, und nach den zuletzt angeführten Gleichungen ergibt sich dann:

$$\tan \frac{1}{2}(w-O) = \frac{\gamma}{L},$$

und

$$\tan \frac{1}{2}(w+O) = \frac{\gamma}{L},$$

mithin

$$\frac{1}{2}(w+O) = \frac{1}{2}(w-O)$$

und

$$O = 0,$$

womit man aus 24) und 25)

$$o = 0$$

$$v_{\text{u}} = 90^{\circ}$$

erhält.

Setzt man diesen Werth von v_{u} in die Gleichungen 22) und bedenkt, dass

$$\cos v_{\text{u}} = \sin(90 + v_{\text{u}}) = 2 \sin\left(45^{\circ} + \frac{1}{2}v_{\text{u}}\right) \cos\left(45^{\circ} + \frac{1}{2}v_{\text{u}}\right)$$

und

$$-\sin v_{\text{u}} = \cos(90 + v_{\text{u}}) = \cos^2\left(45^{\circ} + \frac{1}{2}v_{\text{u}}\right) - \sin^2\left(45^{\circ} + \frac{1}{2}v_{\text{u}}\right)$$

ist; so erhält man schliesslich:

$$26) \begin{cases} X_4 = 2 \cos \frac{1}{2}(u_{\prime\prime} + u) \sin \frac{1}{2}(u_{\prime\prime} - u) \left\{ H \cdot \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}V \right) - h \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2}v \right) \right] + \right. \\ \quad \left. + \frac{h}{6} \cos^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2}v \right) \cot^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2}v \right) \right\} \\ Y_4 = 2 \sin \frac{1}{2}(u_{\prime\prime} + u) \sin \frac{1}{2}(u_{\prime\prime} - u) \left\{ H \cdot \log \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}V \right) - h \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2}v \right) \right] + \right. \\ \quad \left. + \frac{h}{6} \cos^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2}v \right) \cot^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2}v \right) \right\} \end{cases}$$

als diejenigen Gleichungen, welche dem Falle, wenn sich der Observationsort auf der höchsten Stelle des Berges befindet, entsprechen.

Die Gleichung $\frac{e}{h} = \tan v$, wird für v einen Werth geben, der selten unter 70° ist; demnach wird das Glied $\frac{h}{6} \cos^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2}v \right) \cot^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2}v \right)$ einen so geringen Werth erhalten, dass es bei der hier nötigen Genauigkeit in den meisten Fällen wird weggelassen werden können, wodurch diese Formeln zur Berechnung eine bequeme Form erhalten.

VI.

Berechnung der Attraction für die nächste Umgebung eines Observationsortes, wenn diese so unregelmässig ist, dass man die obere Fläche derselben keinem Gesetze unterwerfen kann.

In einem solchen Falle wird es am zweckmässigsten sein, zuerst auf ähnliche Art, wie es bei der Unterlage eines Berges im vorigen Artikel geschehen ist, das Terrain in der ganzen Peripherie mittelst durch den Observationsort unter gleichen Winkeln senkrecht auf die Normalfläche gelegten Ebenen in die entsprechende Anzahl Theile zu theilen, und dann diese Ebenen mit concentrischen Cylinderflächen von verschiedenen Halbmessern in der Art zu schneiden, dass ihre gemeinschaftliche Achse mit dem gemeinschaftlichen Schnitte der verticalen Ebenen zusammenfällt.

Schätzt man hierauf die Höhen der sich so ergebenden Untertheilungen in der Art ab, dass man ihre oberen Flächen als horizontale Ebenen betrachten kann, so werden diese Untertheilungen hohle Cylinder- oder eigentlich Röhrenausschnitte bilden, deren Attraction nun zu berechnen sein wird.

Es ist augenscheinlich, dass man zu diesem Zwecke nur die Ausdrücke 20) des vorigen Artikels in den entsprechenden Grenzen zu integriren braucht.

Nehmen wir zur Vereinfachung noch an, dass der Observationsort im Niveau entweder der oberen oder der unteren horizontalen Fläche der Untertheilung sich befindet, so ist im ersten Falle das Integral nach z in den Grenzen von $z = 0$ bis $z = h$, und im zweiten Falle in den Grenzen von $z = -h$ bis $z = 0$ zu nehmen, wenn h die Höhe der Untertheilung anzeigt. In beiden Fällen erhält man jedoch, wenn mit X und Y die horizontale Attraction in der Richtung der analogen Achsen bezeichnet wird:

$$X = \iint \frac{h \cos u \cdot du \cdot dz}{\sqrt{\varepsilon^2 + h^2}},$$

$$Y = \iint \frac{h \sin u \cdot du \cdot dz}{\sqrt{\varepsilon^2 + h^2}}.$$

Die fernere Integration nach ε muss selbstverständlich, wenn ε_{u} und ε_{s} die Halbmesser der einschliessenden und eingeschlossenen Cylinderfläche anzeigen, in den Grenzen von $\varepsilon = \varepsilon_{\text{s}}$, bis $\varepsilon = \varepsilon_{\text{u}}$ genommen werden, und setzt man hier $\frac{\varepsilon}{h} = \tan w$, mithin $d\varepsilon = \frac{hdw}{\cos^2 w}$, so wird das Integral nach w , wenn $\frac{\varepsilon_i}{h} = \tan w$, und $\frac{\varepsilon_u}{h} = \tan w_{\text{u}}$ gesetzt wird, in den Grenzen von $w = w_i$, bis $w = w_{\text{u}}$ genommen werden müssen. Thut man dies, und integriert ferner nach u in den Grenzen von $u = u_i$, bis $u = u_{\text{u}}$, so erhält man schliesslich, da hier alle drei Veränderliche von einander unabhängig sind:

$$27) \quad \begin{cases} X = 2 \cos \frac{1}{2} (u_{\text{u}} + u_i) \sin \frac{1}{2} (u_{\text{u}} - u_i) h \log \frac{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}w_{\text{u}})}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}w_i)}, \\ Y = 2 \sin \frac{1}{2} (u_{\text{u}} + u_i) \sin \frac{1}{2} (u_{\text{u}} - u_i) h \log \frac{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}w_{\text{u}})}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}w_i)}. \end{cases}$$

Durch eine zweckmässige Zusammenstellung dieser zwei Fälle wird man sich in jedem anderen Falle behelfen können; denn betrachtet man bei gleichen Querschnittsflächen X und Y als Functionen von h , z. B. als $F(h)$ und $f(h)$, so erhält man, wenn der attrahirte Ort zwischen dem Niveau der oberen und unteren Horizontalfläche, und zwar von dem der ersten um h , und von dem der letzteren um h_{u} entfernt gelegen ist, die auf ihn ausgeübte Attraction:

$$X = F(h) + F(h_{\text{u}})$$

und

$$Y = f(h) + f(h_{\text{u}});$$

und wenn er oberhalb der oberen oder unterhalb der unteren Niveaufläche um h_{u} entfernt gelegen ist, und die Höhe der Untertheilung $= h$, ist, so hat man:

$$X = F(h + h_{\text{u}}) - F(h_{\text{u}})$$

und

$$Y = f(h + h_{\text{u}}) - f(h_{\text{u}}).$$

• Wenn die Entfernung des attrahirten Ortes von einer der beiden Niveauflächen gegenüber ε_{s} und ε_{u} als sehr klein angesehen werden kann, so wird es hinreichend sein, den einen oder den andern der beiden den Formeln 27) entsprechenden Fälle anzunehmen.

VII.

Die bis jetzt dargestellte Berechnung der Attraction der verschiedenen Untertheilungen hat, wie schon am Schlusse des Artikels II gesagt wurde, nur in soferne Giltigkeit, als man die angenommene kugelförmige Normaloberfläche als eine Ebene betrachten kann. Überschreitet die Entfernung der attrahirenden Untertheilung von dem attrahirten Orte die dort angegebene Grenze, so muss die Krümmung der Erdoberfläche berücksichtigt werden. Es wird hier am zweckmässigsten sein, Meridiane und Parallelkreise zu Abgrenzungen der Grundfläche der attrahirenden Untertheilungen anzunehmen, weil hiezu die Karten, auf welchen diese Linien schon ersichtlich sind, benutzt werden können.

Die eine Untertheilung abgrenzenden Seitenflächen sind dann durch die Meridiane gelegte Ebenen und den Parallelkreisen entsprechende Kegeloberflächen, deren Spitzen mit dem Mittelpunkte der Kugel concentrisch zusammenfallen.

Nimmt man vorläufig ein rechtwinkeliges Coordinatensystem an, dessen Nullpunkt im Mittelpunkte der Erde ist, dessen Achse der x mit dem Schnitte, welchen die Meridianebene des Observationsortes mit der Äquatorebene bildet, und die Achse der y mit der letzteren zusammenfällt; so ist die Erdachse zugleich die Achse der z . Zeigt nun r die Entfernung irgend eines Volumenelementes p der attrahirenden Untertheilung vom Mittelpunkte der Erde an, ist b die Breite und t die Länge derselben, wo die erstere vom Äquator gegen Norden, die letztere vom Meridiane des Observationsortes gegen Westen positiv, entgegengesetzt negativ gezählt wird; so sind die Coordinaten von p , die Erde als eine Kugel betrachtet:

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos b \cos t, \\y_1 &= r \cos b \sin t, \\z_1 &= r \sin b,\end{aligned}$$

wo x_1 nach der Seite des Observationsortes, y_1 gegen Westen und z_1 gegen den Nordpol positiv, entgegengesetzt negativ gezählt werden. Bezeichnet man die Breite des Observationsortes mit B , seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde mit e , so sind die Coordinaten derselben, da für ihn $t = 0$ ist:

$$\begin{aligned}x_2 &= e \cos B, \\y_2 &= 0, \\z_2 &= e \sin B;\end{aligned}$$

mithin sind die Coordinaten des Elementes p , wenn der Observationsort als Nullpunkt angenommen, und für x_1, y_1, z_1 , dann x_2, y_2, z_2 , die oberen Werthe substituirt werden:

$$\begin{aligned}\xi &= r \cos b \cos t - e \cos B, \\ \eta &= r \cos b \sin t, \\ \zeta &= r \sin b - e \sin B.\end{aligned}$$

Da nun der kubische Inhalt eines Elementes p

$$= r^3 \cos b \cdot dr \cdot db \cdot dt$$

ist, so erhält man, wenn die von der Untertheilung auf den Observationsort ausgeübte Attraktion den drei Achsenrichtungen dieses Systems analog mit X' , Y' , und Z' bezeichnet, und wenn für ξ, η, ζ , die oberen Werthe gesetzt werden:

$$28) \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = \iiint \frac{(r \cos b \cos t - e \cos B) r^2 \cos b \cdot dr \cdot db \cdot dt}{\{r^2 - 2re(\cos b \cdot \cos t \cdot \cos B + \sin b \cdot \sin B) + e^2\}^{\frac{3}{2}}}, \\ Y' = \iiint \frac{r^3 \cos^2 b \sin t \cdot dr \cdot db \cdot dt}{\{r^2 - 2re(\cos b \cdot \cos t \cdot \cos B + \sin b \cdot \sin B) + e^2\}^{\frac{3}{2}}}, \\ Z' = \iiint \frac{(r \sin b - e \sin B) r^2 \cos b \cdot dr \cdot db \cdot dt}{\{r^2 - 2re(\cos b \cdot \cos t \cdot \cos B + \sin b \cdot \sin B) + e^2\}^{\frac{3}{2}}}, \end{array} \right.$$

welche Ausdrücke man nach den von einander unabhängigen Veränderlichen: r , b , und t in den entsprechenden Grenzen zu integriren hat. Sind die Werthe dieser Grössen enthalten in den Grenzen:

$$\begin{aligned} & \text{von } r = r_i \text{ bis } r = r_u, \\ & , \quad b = b_i, \quad b = b_u, \\ & , \quad t = t_i, \quad t = t_u, \end{aligned}$$

und setzt man der Kürze halber

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{r_i + r_u}{2}, \\ b_0 &= \frac{b_i + b_u}{2}, \\ t_0 &= \frac{t_i + t_u}{2}; \end{aligned}$$

so kann man drei Veränderliche ρ , β und τ in der Art einführen, dass

$$\begin{aligned} r_0 + \rho &= r, \\ b_0 + \beta &= b, \\ t_0 + \tau &= t \end{aligned}$$

wird, wo dann offenbar ρ , β und τ als Functionen von r , b und t zu betrachten sind, indem r_0 , b_0 und t_0 constante Werthe haben. Setzt man in diese Gleichungen einmal die Grenzwerthe r_u , b_u , t_u , das andere Mal die Grenzwerthe r_i , b_i , t_i , so ergibt sich, dass die Werthe von ρ , β und τ in den Grenzen

$$\begin{aligned} \text{von } \rho &= -\frac{r_u - r_i}{2} \text{ bis } \rho = \frac{r_u - r_i}{2} \\ , \quad \beta &= -\frac{b_u - b_i}{2} \quad , \quad \beta = \frac{b_u - b_i}{2} \\ , \quad \tau &= -\frac{t_u - t_i}{2} \quad , \quad \tau = \frac{t_u - t_i}{2} \end{aligned}$$

enthalten sind.

Aus dem eben Gesagten wird man leicht ersehen, dass in jeder attrahirenden Untertheilung je acht Elemente vorkommen, deren Polar-Coordinaten sich nur durch das Vorzeichen von ρ , β und τ unterscheiden, was folgende Combinationen gibt:

$$\begin{array}{lll} r_0 + \rho, & b_0 + \beta, & t_0 + \tau; \\ r_0 + \rho, & b_0 - \beta, & t_0 + \tau; \\ r_0 - \rho, & b_0 + \beta, & t_0 + \tau; \\ r_0 - \rho, & b_0 - \beta, & t_0 + \tau; \\ r_0 + \rho, & b_0 + \beta, & t_0 - \tau; \\ r_0 + \rho, & b_0 - \beta, & t_0 - \tau; \\ r_0 - \rho, & b_0 + \beta, & t_0 - \tau; \\ r_0 - \rho, & b_0 - \beta, & t_0 - \tau. \end{array}$$

Setzt man

$$X' = \iiint \varphi \cdot dr \cdot db \cdot dt,$$

so ist mit Rücksicht auf die erste Gleichung 28)

$$\varphi = \frac{(r \cos b \cos t - e \cos B) r^2 \cos b}{\{r^2 - 2re(\cos b \cos t \cos B + \sin b \sin B) + e^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

und wenn für r , b und t die Werthe $r_0 + \rho$, $b_0 + \beta$ und $t_0 + \tau$ substituirt werden, so ist φ als eine Function von ρ , β und τ zu betrachten.

Nimmt man die Differential-Quotienten für die Werthe $\rho = 0$, $\beta = 0$ und $\tau = 0$, so erhält man, da für diese Werthe

$$\varphi = \frac{(r_0 \cos b_0 \cos t_0 - e \cos B) r_0^2 \cos b_0}{\{r_0^2 - 2r_0 e (\cos b_0 \cos t_0 \cos B + \sin b_0 \sin B) + e^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

wird:

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{(r_0 \cos b_0 \cos t_0 - e \cos B) r_0^2 \cos b_0}{\{r_0^2 - 2r_0 e (\cos b_0 \cos t_0 \cos B + \sin b_0 \sin B) + e^2\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{d\varphi}{d\rho} \cdot \rho + \frac{d\varphi}{d\beta} \cdot \beta + \frac{d\varphi}{d\tau} \cdot \tau + \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} \cdot \frac{\rho^2}{2} + \\ & + \frac{d^2\varphi}{d\beta^2} \cdot \frac{\beta^2}{2} + \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} \cdot \tau^2 + \frac{d^2\varphi}{d\rho d\beta} \cdot \rho \beta + \frac{d^2\varphi}{d\rho d\tau} \cdot \rho \tau + \frac{d^2\varphi}{d\beta d\tau} \cdot \beta \tau \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Substituirt man diesen Werth in die letzte Gleichung für X' und nimmt für jeden der einzelnen Werthe der Attraetion der je acht oben angeführten Elemente das arithmetische Mittel aus allen Acht, so werden sich alle Glieder, welche ungerade Potenzen von ρ , β und τ enthalten, heben, ohne den Werth des Integrals zu ändern, und man erhält auf diese Art:

$$\begin{aligned} X' = & \iiint \left\{ \frac{(r_0 \cos b_0 \cos t_0 - e \cos B) r_0^2 \cos b_0}{\{r_0^2 - 2r_0 e (\cos b_0 \cos t_0 \cos B + \sin b_0 \sin B) + e^2\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} \cdot \frac{\rho^2}{2} + \frac{d^2\varphi}{d\beta^2} \cdot \frac{\beta^2}{2} + \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} \cdot \frac{\tau^2}{2} + \right. \\ & \left. + \text{u. s. f.} \right\} dr \cdot db \cdot dt. \end{aligned}$$

Bezeichnet m denjenigen Punkt, dessen Lage durch die Polar-Coordinaten r_0 , b_0 und t_0 angegeben wird, so kann man m als den mittlern Punkt der attrahirenden Untertheilung betrachten, dessen Entfernung vom Observationsorte

$$= \sqrt{r_0^2 - 2r_0 e (\cos b_0 \cos t_0 \cos B + \sin b_0 \sin B) + e^2}$$

ist.

Gibt man aber der attrahirenden Untertheilung nur eine solche Ausdehnung, dass ρ , $r_0 \beta$ und $r_0 \tau$ gegenüber dieser Entfernung als klein betrachtet werden können, so werden die Glieder von ρ^2 , β^2 und τ^2 einen so geringen Werth haben, dass man sie bei dem hier nöthigen Grade der Genauigkeit vernachlässigen kann. Demnach erhält man sehr nahe, wenn die Integration des letzten Ausdrückes für X' nach den von einander unabhängigen Veränderlichen r , b und t in den oberen Grenzen nach einander vorgenommen wird:

$$X' = \frac{(r_0 \cos b_0 \cos t_0 - e \cos B) r_0^2 \cos b_0 (r_u - r_i) (b_u - b_i) (t_u - t_i)}{\{r_0^2 - 2r_0 e (\cos b_0 \cos t_0 \cos B + \sin b_0 \sin B) + e^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

Setzt man:

$$P = r_0^2 \cos b_0 (r_u - r_i) (b_u - b_i) (t_u - t_i)$$

und

$$r_u - r_i = h,$$

wo h die Höhe der attrahirenden Untertheilung über der angenommenen Normalfläche anzeigt, so hat man auch, da $b_0 = \frac{b_u + b_i}{2}$ ist:

$$P = r_0^2 h \cos \frac{(b_u + b_i)}{2} (b_u - b_i) (t_u - t_i).$$

Der kubische Inhalt eines Volumenelementes ist, wie schon oben gesagt $r^2 \cos b \cdot dr \cdot db \cdot dt$.

Nach vorgenommener Integration ergibt sich der kubische Inhalt der attrahirenden Untertheilungen.

$$= \frac{2}{3} (r_u^3 - r_i^3) \cos \frac{1}{2} (b_u + b_i) \sin \frac{1}{2} (b_u - b_i) (t_u - t_i).$$

Es ist aber $r_u = \frac{r_u + r_i}{2} + \frac{r_u - r_i}{2}$ und $r_i = \frac{r_u + r_i}{2} - \frac{r_u - r_i}{2}$, oder $r_u = r_0 + \frac{h}{2}$ und $r_i = r_0 - \frac{h}{2}$.

Substituirt man diese Werthe in den letzten Ausdrück bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von h in dem Factor $(r_u^3 - r_i^3)$ und erlaubt sich anstatt des Sinus des spitzen Winkels $\frac{1}{2} (b_u - b_i)$ den Bogen selbst zu nehmen, so erhält man:

$$r_0^2 h \cos \frac{1}{2} (b_u + b_i) (b_u - b_i) (t_u - t_i),$$

woraus zu sehen ist, dass P dem kubischen Inhalte der attrahirenden Untertheilung sehr nahe kommt.

Bezeichnet man nun, den Observationsort als Nullpunkt betrachtend, die Coordinaten des mittleren Punktes m in diesem Systeme mit ξ_0, η_0, ζ_0 , so hat man mit Rückblick auf die Gleichungen für ξ, η und ζ :

$$\xi_0 = r_0 \cos b_0 \cos t_0 - e \cos B,$$

$$\eta_0 = r_0 \cos b_0 \sin t_0,$$

$$\zeta_0 = r_0 \sin b_0 - e \sin B;$$

und in Bezug auf die letzte Gleichung für X' :

$$X' = -\frac{\xi_0 P}{(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und auf dieselbe Art erhält man auch:

$$Y' = \frac{\eta_0 P}{(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad Z' = \frac{\zeta_0 P}{(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aus diesen letzten Gleichungen geht aber hervor, dass bei den hier gemachten Voraussetzungen die Attraction einer Untertheilung so angenommen werden kann, als wenn die Masse P in ihrem mittleren Punkte m concentrirt wäre, was auch für jedes andere Coordinaten-system giltig ist.

Wendet man diese Annahme bei dem gleich Anfangs (Artikel I) aufgestellten unseren Zwecken entsprechenden Coordinatensysteme an; bezeichnet den von den Radien des Observationsortes und des mittleren Punktes m eingeschlossenen Winkel mit v und das auf ersterem gemessene Azimuth des v entsprechenden grössten Kreisbogens mit u , und erlaubt sich endlich $e = r_0 = a$ zu setzen, wo a den im Artikel II angegebenen Werth hat, so erhält man, wenn der Observationsort als Nullpunkt angenommen wird:

$$\begin{aligned}x &= a \sin v \cos u, \\y &= a \sin v \sin u, \\z &= a(1 - \cos v),\end{aligned}$$

und die horizontale von der gedachten Untertheilung auf den Observationsort ausgeübte Attraction ist dann, wenn sie den Achsen analog mit X und Y bezeichnet, und wenn für x, y und z unter Einem die eben angegebenen Werthe substituiert werden:

$$29) \quad \begin{cases} X = \frac{\cos u \cdot \cos \frac{1}{2} v P}{(2a \sin \frac{1}{2} v)^2}, \\ Y = \frac{\sin u \cdot \cos \frac{1}{2} v P}{(2a \sin \frac{1}{2} v)^2}, \end{cases} .$$

welehe Resultate man auch durch Transformation aus dem vorigen in dieses Coordinatensystem erhält, wenn man sich ebenfalls erlaubt $e = r_0 = a$ zu setzen.

Zieht man nur den positiven Werth von $t_0 = \frac{t_u + t_v}{2}$ in Betrachtung, so kann man $(90 - b_0) = \left(90 - \frac{1}{2}(b_u + b_v)\right)$, $(90 - B)$ und t_0 als drei bekannte Elemente eines sphärischen Dreieckes ansehen, wovon $(90 - b_0)$ dann $(90 - B)$ zwei Seiten, N und M die denselben gegenüber liegenden, und t_0 den von ihnen eingeschlossenen Winkel vorstellen. Mit Hilfe der Nepperschen Analogien hat man dann:

$$\tan \frac{1}{2}(M+N) = \frac{\cos \frac{1}{2}(b_0 - B)}{\sin \frac{1}{2}(b_0 + B)} \cot \frac{1}{2} t_0,$$

$$\tan \frac{1}{2}(M-N) = \frac{\sin \frac{1}{2}(b_0 - B)}{\cos \frac{1}{2}(b_0 + B)} \cot \frac{1}{2} t_0,$$

und

$$u = 180 \mp N,$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem t_0 westlich oder östlich von dem Meridiane des Observationsortes fällt.

Ferner erhält man:

$$\tan \frac{1}{2} v = \frac{\cos \frac{1}{2}(M+N)}{\cos \frac{1}{2}(M-N)} \cot \frac{1}{2}(b_0 + B).$$

Da nun $P = a^2 h \cos \left(\frac{(b_u + b_v)}{2}\right) (b_u - b_v) (t_u - t_v)$ ist, so hat es keinen Anstand mehr die Attraction nach 29) zu berechnen.

Entspricht nun die durch die Formeln 29) ausgedrückte Attraction dem Observationsorte S , so erhält man nach denselben Formeln, die auf einen andern Ort S' ausgeübte Attraction, wenn anstatt v und u die diesem Orte entsprechenden Werthe v' und u' gesetzt werden. P behält, da die attrahirende Untertheilung dieselbe ist, seinen Werth.

Bezeichnet man die Werthe der auf S ausgeübten Attraction mit X und Y , so erhält man leicht, wenn $(v + \Delta v)$ und $(u + \Delta u)$ für v und u , gesetzt, und unter der Annahme, dass Δv und Δu nur kleine Werthe haben, die Entwicklung blos auf die erste Potenz dieser Grössen vorgenommen, und hierauf die ursprünglichen Gleichungen abgezogen werden:

$$X' - X = -Y\Delta u - X\left(1 + \cos^2 \frac{1}{2}v\right)\frac{\Delta v}{\sin v},$$

$$Y' - Y = -X\Delta u - Y\left(1 + \cos^2 \frac{1}{2}v\right)\frac{\Delta v}{\sin v}.$$

Zur Beurtheilung dieser Unterschiede dürfte es jedoch zweckmässiger sein Δv und Δu durch die Differenzen der Breite und Länge von S und S' auszudrücken.

Wenn man wieder die vorige Bezeichnung für die Elemente beibehält, so bekommt man:

$$X' - X = Y\left(\cos v \sin u \frac{\Delta B}{\sin v} + \cos b_0 \cos P \frac{\Delta t_0}{\sin v}\right) - X\left(1 + \cos^2 \frac{1}{2}v\right)\left(\cos u \frac{\Delta B}{\sin v} - \sin u \cos B \frac{\Delta t_0}{\sin v}\right),$$

$$Y' - Y = -X\left(\cos v \sin u \frac{\Delta B}{\sin v} + \cos b_0 \cos P \frac{\Delta t_0}{\sin v}\right) - Y\left(1 + \cos^2 \frac{1}{2}v\right)\left(\cos u \frac{\Delta B}{\sin v} - \sin u \cos B \frac{\Delta t_0}{\sin v}\right),$$

wo P den vom Meridian des mittleren Punktes m und von dem v entsprechenden grössten Kreisbogen eingeschlossenen Winkel, ΔB und Δt_0 die Unterschiede anzeigen, die man erhält, wenn von der Breite und Länge des Ortes S , die Breite und Länge des Ortes S' abgezogen werden.

Aus diesen Ausdrücken ist zu ersehen, dass, wenn $\frac{\Delta B}{\sin v}$ und $\frac{\Delta t_0}{\sin v}$ sehr kleine Grössen sind, auch $(X' - X)$ und $(Y' - Y)$ sehr klein werden. Demnach wird man, wie schon im Artikel III gezeigt wurde, von derjenigen Grenze angefangen, von welcher diese Grössen vernachlässigt werden können, die Attraction nur für den als Hauptort angenommenen Observationsort zu berechnen nötig haben.

VIII.

Betrachtet man den Observationsort oder seine Projection auf die Normalfläche als Polpunkt, zieht durch denselben grösste Kreise, und auf die gemeinschaftliche Achse derselben senkrechte Kreise, so kann man die ersten als Meridiane, die letzteren als Parallelkreise ansehen. Begrenzt man dann die Untertheilungen mit ähnlichen Seitenflächen wie im vorigen Artikel und behält dieselbe Bezeichnung für die Elemente, so hat man, wenn der Nullpunkt im Observationsorte angenommen wird:

$$x = r \sin v \cos u$$

$$y = r \sin v \sin u$$

$$z = e - r \cos v$$

und für den kubischen Inhalt eines Volumenelementes

$$p = r^2 dr \cdot \sin v \, dv \, du.$$

Daher hat man für die horizontale Attraction in der Richtung der analogen Achsen:

$$X = \iiint \frac{x r^2 \cdot dr \cdot \sin v \cdot dv \cdot du}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y = \iiint \frac{y r^2 \cdot dr \cdot \sin v \cdot dv \cdot du}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und wenn für x, y, z die oberen Werthe substituirt werden:

$$30) \quad \begin{cases} X = \iiint \frac{r^3 \cdot dr \cdot \sin^2 v \cdot dv \cdot \cos u \cdot du}{(r^2 - 2re \cos v + e^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ Y = \iiint \frac{r^3 \cdot dr \cdot \sin^2 v \cdot dv \cdot \sin u \cdot du}{(r^2 - 2re \cos v + e^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Betrachtet man nur r als veränderlich, v und u hingegen als constant, setzt

$$\int \frac{r^3 \cdot dr}{(r^2 - 2re \cos v + e^2)^{\frac{3}{2}}} = \varphi(r)$$

und bezeichnet die Differenzialquotienten nach einander mit $\varphi_1(r), \varphi_2(r), \varphi_3(r) \dots$, so ist:

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= \frac{r^3}{(r^2 - 2re \cos v + e^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \varphi_2(r) &= \frac{3r^2 e (e - r \cos v)}{(r^2 - 2re \cos v + e^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \varphi_3(r) &= \frac{6re^4 \cos v - 9r^2 e^2 + 3r^3 e^2 \cos^2 v - 6r^2 e^3 \cos v + 6r^4 e}{(r^2 - 2re \cos v + e^2)^{\frac{7}{2}}} \end{aligned}$$

u. s. f.

Nimmt man wieder $r_1 = r_0 - \frac{h}{2}$ und $r_n = r_0 + \frac{h}{2}$, wo h die Höhe der Untertheilung über der angenommenen Normalfläche anzeigt, so erhält man, wenn in $\varphi(r)$ für r einmal der Werth $r_1 = r_0 - \frac{h}{2}$ das andere Mal der Werth $r_n = r_0 + \frac{h}{2}$ gesetzt wird:

$$\varphi(r_1) = \varphi(r_0) - \varphi_1(r_0) \frac{h}{2} + \varphi_2(r_0) \frac{h^2}{8} - \varphi_3(r_0) \frac{h^3}{48} + \dots$$

$$\varphi(r_n) = \varphi(r_0) + \varphi_1(r_0) \frac{h}{2} + \varphi_2(r_0) \frac{h^2}{8} + \varphi_3(r_0) \frac{h^3}{48} + \dots$$

und durch Subtraction der ersten Gleichung von der zweiten

$$\int_{r_1}^{r_n} \frac{r^3 \cdot dr}{(r^2 - 2re \cos v + e^2)^{\frac{3}{2}}} = \varphi_1(r_0) h + \varphi_3(r_0) \frac{h^3}{24} + \dots$$

Setzt man in $\varphi_1(r), \varphi_2(r) \dots$ anstatt r den Werth r_0 und erlaubt sich $e = r_0 = a$ anzunehmen, wo a den Halbmesser der Erdkugel anzeigt, so ergibt sich:

$$\int_{r_0}^{r_u} \frac{r^3 \cdot dr}{(r^2 - 2re \cos v + e^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{h}{8 \sin^3 \frac{1}{2} v} \left\{ 1 - \frac{1}{32} \cdot \frac{\cos^2 \frac{1}{2} v h^2}{a^2 \sin^2 \frac{1}{2} v} + \dots \right\}$$

und wenn der kleinste Werth von v so angenommen wird, dass man $\frac{h}{a \sin \frac{1}{2} v}$ als eine kleine Grösse betrachten kann, so beschränkt sich der zweite Theil der Gleichung blos auf $\frac{h}{8 \sin^3 \frac{1}{2} v}$ und man hat mit Rückblick auf die Gleichungen 30):

$$X = \iint \frac{1}{2} h \cos u \cdot du \left(\frac{dv}{\sin \frac{1}{2} v} - \sin \frac{1}{2} v \cdot dv \right),$$

$$Y = \iint \frac{1}{2} h \sin u \cdot du \left(\frac{dv}{\sin \frac{1}{2} v} - \sin \frac{1}{2} v \cdot dv \right).$$

Integriert man diese Gleichungen nach den von einander unabhängigen v und u in den entsprechenden Grenzen von $v = v_i$ bis $v = v_u$, dann von $u = u_i$ bis $u = u_u$, so erhält man endlich die Attraetion:

$$31) \begin{cases} X = 2h \cos \frac{1}{2} (u_u + u_i) \sin \frac{1}{2} (u_u - u_i) \left\{ \log \frac{\tan \frac{1}{4} v_u}{\tan \frac{1}{4} v_i} - 2 \sin \frac{1}{4} (v_u + v_i) \sin \frac{1}{4} (v_u - v_i) \right\}, \\ Y = 2h \sin \frac{1}{2} (u_u + u_i) \sin \frac{1}{2} (u_u - u_i) \left\{ \log \frac{\tan \frac{1}{4} v_u}{\tan \frac{1}{4} v_i} - 2 \sin \frac{1}{4} (v_u + v_i) \sin \frac{1}{4} (v_u - v_i) \right\}, \end{cases}$$

welche Ausdrücke bezüglich der Grösse der Untertheilung unbeschränkt sind, wenn sonst die Bedingung erfüllt wird, dass für den kleinsten Werth von v , $\frac{h}{a \sin \frac{1}{2} v}$ eine kleine Grösse ist.

Man kann sie aber noch auf eine bequemere Form bringen, wenn $\frac{\sin \frac{1}{4} (v_u - v_i)}{\sin \frac{1}{4} (v_u + v_i)}$ nur einen kleinen Werth hat; denn es ist auch:

$$\log \frac{\tan \frac{1}{4} v_u}{\tan \frac{1}{4} v_i} - 2 \sin \frac{1}{4} (v_u + v_i) \sin \frac{1}{4} (v_u - v_i) = 2 \frac{\sin \frac{1}{4} (v_u - v_i)}{\sin \frac{1}{4} (v_u + v_i)} \cos^2 \frac{1}{4} (v_u + v_i) + \frac{2}{3} \left(\frac{\sin \frac{1}{4} (v_u - v_i)}{\sin \frac{1}{4} (v_u + v_i)} \right)^3 + \\ + \frac{2}{5} \left(\frac{\sin \frac{1}{4} (v_u - v_i)}{\sin \frac{1}{4} (v_u + v_i)} \right)^5 + \dots$$

Vernachlässigt man die höheren Potenzen von $\frac{\sin \frac{1}{4} (v_u - v_i)}{\sin \frac{1}{4} (v_u + v_i)}$ und setzt diese Grösse selbst $= \sin \frac{1}{2} C$, oder was dasselbe ist,

$$\frac{\tan \frac{1}{4} v_u - \tan \frac{1}{4} v_i}{\tan \frac{1}{4} v_u + \tan \frac{1}{4} v_i} = \sin \frac{1}{2} C,$$

wo C eine willkürliche jedoch nur mit dem Werthe von einigen Graden angenommene Grösse ist, so ergibt sich:

$$\tan \frac{1}{4} v_n = \tan \frac{1}{4} V \tan^2 \left(45^\circ + \frac{1}{4} C \right).$$

Demnach erhält man auch, wenn für eine gewisse Stelle $v_n = V$ gesetzt wird, für die auf einander folgenden nächst grösseren v :

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{4} v_{n+1} &= \tan \frac{1}{4} V \tan^2 \left(45^\circ + \frac{1}{4} C \right), \\ \tan \frac{1}{4} v_{n+2} &= \tan \frac{1}{4} v_{n+1} \tan^2 \left(45^\circ + \frac{1}{4} C \right), \\ \vdots &\quad \vdots \\ \vdots &\quad \vdots \end{aligned}$$

und für die nächst kleineren v :

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{4} v_{n-1} &= \tan \frac{1}{4} V \cot^2 \left(45^\circ + \frac{1}{4} C \right), \\ \tan \frac{1}{4} v_{n-2} &= \tan \frac{1}{4} v_{n-1} \cot^2 \left(45^\circ + \frac{1}{4} C \right), \\ \vdots &\quad \vdots \\ \vdots &\quad \vdots \end{aligned}$$

Mit Bezug auf 31) erhalten wir nun näherungsweise nach dem eben Angeführten leicht:

$$32) \quad \begin{cases} X = 4h \cos \frac{1}{2} (u_n + u_s) \sin \frac{1}{2} (u_n - u_s) \sin \frac{1}{2} C \cos^2 \frac{1}{4} (v_{s+1} + v_s), \\ Y = 4h \sin \frac{1}{2} (u_n + u_s) \sin \frac{1}{2} (u_n - u_s) \sin \frac{1}{2} C \cos^2 \frac{1}{4} (v_{s+1} + v_s), \end{cases}$$

wo s den betreffenden Index anzeigt.

Setzt man überdies $(u_n - u_s) = C$, wo C wegen der bequemen Eintheilung der Peripherie des Ortes auch noch so angenommen werden muss, dass, wenn es in Graden gegeben ist, der Quotient $\frac{360}{C}$ eine möglichst theilbare Zahl sei, so hat man:

$$33) \quad \begin{cases} X = 4h \cos \frac{1}{2} (u_n + u_s) \sin^2 \frac{1}{2} C \cos^2 \frac{1}{4} (v_{s+1} + v_s), \\ Y = 4h \sin \frac{1}{2} (u_n + u_s) \sin^2 \frac{1}{2} C \cos^2 \frac{1}{4} (v_{s+1} + v_s). \end{cases}$$

Bei der Anwendung der in diesem Artikel abgeleiteten Formeln, so wie auch bei den Formeln 27) im Artikel VI, wird es am besten sein, sich eine Karte nach dem Principe der stereographischen Projection zu entwerfen, wobei die Ebene, auf welche die Projectionen gefällt werden, die Erdkugel am Observationsorte tangirt. Man hat dann, wenn die mit $V, v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{n-4}, v_{n-2}, \dots$ correspondirenden Halbmesser der Cylinderflächen dem Artikel VI analog mit $\epsilon, \epsilon_{n+1}, \epsilon_{n+2}, \dots, \epsilon_{n-1}, \epsilon_{n-2}, \dots$ bezeichnet werden:

$$\begin{aligned}\epsilon &= 2a \tan \frac{1}{2} V, \\ \epsilon_{n+1} &= 2a \tan \frac{1}{2} v_{n+1}, \text{ u. s. f.} \\ \epsilon_{n-1} &= 2a \tan \frac{1}{2} v_{n-1}, \\ \epsilon_{n-2} &= 2a \tan \frac{1}{2} v_{n-2}, \text{ u. s. f.}\end{aligned}$$

und selbst bei der Voraussetzung, dass diese Grössen gegenüber h als sehr gross anzusehen sind, können die v dennoch nur einen so grossen Werth haben, dass man sich erlauben darf:

$$\begin{aligned}2 \tan \frac{1}{4} v_s &= \tan \frac{1}{2} v_s, \\ 4a \tan \frac{1}{4} v_s &= 2a \tan \frac{1}{2} v_s,\end{aligned}$$

mithin

$$4a \tan \frac{1}{4} v_s = \epsilon_s$$

zu setzen; woraus dann folgt:

$$\begin{aligned}\epsilon_{n+1} &= \epsilon \cdot \tan^2 \left(45^\circ + \frac{1}{4} C \right), \\ \epsilon_{n+2} &= \epsilon_{n+1} \tan^2 \left(45^\circ + \frac{1}{4} C \right), \\ \vdots &\quad \vdots \\ \epsilon_{n-1} &= \epsilon \cdot \cot^2 \left(45^\circ + \frac{1}{4} C \right), \\ \epsilon_{n-2} &= \epsilon_{n-1} \cot^2 \left(45^\circ + \frac{1}{4} C \right), \\ \vdots &\quad \vdots\end{aligned}$$

Doch wollen wir das Gesagte für die praktische Anwendung noch klarer machen.

Es seien Fig. IX, Sp_5 und Sp'_5 , wo S den Observationsort anzeigt, zwei geradlinige, auf einer nach dem angeführten Principe entworfenen Karte gezogene Räden, die dadurch entstanden sind, dass man die Peripherie des Observationsortes z. B. in 60 gleiche Theile getheilt, mithin $C = 6^\circ$ angenommen hat. Sind nun u_m und u_{m+1} die Azimuttheide dieser beiden Räden, so ist $u_{m+1} - u_m = C = 6^\circ$.

Nimmt man nun nach Umständen für $Sp_5 = Sp'_5$ den Werth ϵ an, wo dann nach demselben Massstabe des Kartenentwurfes diese Grösse ϵ abzunehmen, und mit ihr als Halbmesser der Kreis $p_5 p'_5$ — bei wirklichen Berechnungen natürlich in der ganzen Peripherie — zu ziehen ist; so erhält man nach dem oben Gesagten den Werth von V aus der Gleichung:

$$\tan \frac{1}{2} V = \frac{\epsilon}{2a},$$

und wenn die den $Sp_1, Sp_2, Sp_3 \dots \dots$ entsprechenden Bögen mit $v_1, v_2, v_3 \dots \dots$ bezeichnet, und berücksichtigt wird, dass $\frac{C}{4} = \frac{6}{4} = 1^\circ 30'$ ist:

$$\begin{aligned}\tang \frac{1}{4} v_6 &= \tang \frac{1}{4} V \tang^2 (46^\circ 30'), \\ \tang \frac{1}{4} v_7 &= \tang \frac{1}{2} v_6 \tang^2 (46^\circ 30'), \\ \vdots &\quad \vdots \\ \tang \frac{1}{4} v_4 &= \tang \frac{1}{4} V \cotg^2 (46^\circ 30'), \\ \vdots &\quad \vdots \\ \vdots &\quad \vdots \\ \tang \frac{1}{4} v_1 &= \tang \frac{1}{4} v_2 \cotg^2 (46^\circ 30').\end{aligned}$$

Hat man auf diese Art die Werthe der v berechnet, werden dann von S aus mit $2a \tang \frac{1}{2} v_1, 2a \tang \frac{1}{2} v_2, u. s. w.$ als Halbmesser nach einander — natürlich wieder in der ganzen Peripherie — die Kreise $p_1 p'_1, p_2 p'_2, p_3 p'_3$ u. s. w. beschrieben, und sind h_1, h_2, h_3 , u. s. w. die ausgemittelten Höhen der von solchen Kreisen und den Radien Sp_9 und Sp'_9 eingeschlossenen Untertheilungen; so erhält man nach 33) die horizontale Attraction aller, da $\frac{1}{2} C = 3^\circ$ ist:

$$\begin{aligned}X &= 4 \cos \frac{1}{2} (u_{m+1} + u_m) \sin^2 3^\circ \left\{ h_1 \cos^2 \frac{1}{4} (v_1 + v_2) + h_2 \cos^2 \frac{1}{4} (v_2 + v_3) + h_3 \cos^2 \frac{1}{4} (v_3 + v_4) + \dots \right\}, \\ Y &= 4 \sin \frac{1}{2} (u_{m+1} + u_m) \sin^2 3^\circ \left\{ h_1 \cos^2 \frac{1}{4} (v_1 + v_2) + h_2 \cos^2 \frac{1}{4} (v_2 + v_3) + h_3 \cos^2 \frac{1}{4} (v_3 + v_4) + \dots \right\}.\end{aligned}$$

Übersteigt der grösste Werth der v , je nach dem Grade der nöthigen Genauigkeit, nicht eine gewisse Grenze, z. B. 2° , so kann man die zur Beschreibung der Kreise nöthigen Halbmesser $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ u. s. w. unmittelbar nach

$$\begin{aligned}\epsilon_6 &= \epsilon \tang^2 (46^\circ 30'), \\ \epsilon_7 &= \epsilon_6 \tang^2 (46^\circ 30'), \\ \vdots &\quad \vdots \\ \epsilon_4 &= \epsilon \cotg^2 (46^\circ 30'), \\ \vdots &\quad \vdots \\ \epsilon_1 &= \epsilon_2 \cotg^2 (46^\circ 30'),\end{aligned}$$

berechnen und man erhält dann, wenn man sich erlaubt 1 für $\cos^2 \frac{1}{4} (v_1 + v_2), \cos^2 \frac{1}{4} (v_2 + v_3)$ u. s. w. anzunehmen:

$$\begin{aligned}X &= 4 \cos \frac{1}{2} (u_{m+1} + u_m) \sin^2 3^\circ \left\{ h_1 + h_2 + h_3 + \dots \right\}, \\ Y &= 4 \sin \frac{1}{2} (u_{m+1} + u_m) \sin^2 3^\circ \left\{ h_1 + h_2 + h_3 + \dots \right\},\end{aligned}$$

wodurch die Formeln sehr vereinfacht werden.

Auf dieselbe Art verfährt man dann mit allen von je zwei Radien eingeschlossenen Untertheilungen.

Selbstverständlich muss der Halbmesser des kleinsten Kreises, so wie auch der folgenden Kreise immer noch einen solchen Werth haben, dass ihm gegenüber die Höhen der betreffenden Untertheilungen, und die Höhe des Observationsortes selbst, als gering betrachtet werden können, weil sonst die hier in Anwendung gebrachten Formeln nicht hinreichende Genauigkeit gewähren; mithin die Attraction des innerhalb des kleinsten Kreises befindlichen Terrains nach Artikel VI berechnet werden müsste.

Überhaupt aber kommen die Formeln 31) 32) 33) zur Fortsetzung der Attractionsberechnung nach den Formeln 27) Artikel VI in Anwendung, sobald wegen zu grosser Ausdehnung des attrahirenden Terrains die Erdoberfläche nicht mehr als eine Ebene betrachtet werden kann.

Wenn Untertheilungen unter der angenommenen Normalfläche vorkommen, wie es in diesem, dann in den Artikeln III, VI und VII der Fall sein kann; so betrachte man vorläufig die untere Fläche derselben als Normalfläche, mittle die betreffenden Höhen darnach aus, und berechne die Attraction für die Dichtigkeit = 1 auf die gewöhnliche Art, und wie dann weiter damit zu verfahren, ist im Artikel II gezeigt worden.

Um hier noch die Grösse der durch die Attraction eines ausgedehnten Terrains bewirkten Ablenkung der Lothlinie anschaulicher darzustellen, nehmen wir an, dass eine durch den Observationsort von Ost nach West gelegte senkrechte Ebene die Scheidung zwischen Land und Meer bilde, so zwar, dass die südlich gelegene Hemisphäre Land, und die nördliche blos Meer enthalte. Das Land erhebe sich durchgehends hundert Wiener Klafter über den Observationsort, und die Tiefe des Meeres vom Observationsorte an bis auf den Grund desselben sei durchgängig ebenfalls hundert Wiener Klafter.

Nimmt man nun die Scheidungslinie als grössten Kreis einerseits, und die den Werthen der v in der nachstehenden Tabelle entsprechenden Parallelkreise im früher erwähnten Sinne andererseits, als Abgrenzungen der Grundflächen attrahirender Untertheilungen an; so zeigen die nebenbei stehenden Zahlen der Tabelle die je zwei solchen Untertheilungen des Landes und Meeres entsprechenden Ablenkungen.

Man hat hier nämlich für die Landuntertheilungen $u_1 = +90^\circ$, $u_2 = -90^\circ$; für die Meeresuntertheilungen $u_3 = +90^\circ$, $u_4 = 270^\circ$, und da 1000 Klafter als Einheit gelten, $h = 0,1$. Ferner wurde nach Artikel II $D = 2.7593$, $\rho = 2,75$ und die Dichtigkeit des Meerwassers = 1,026 angenommen.

Der erste Posten wurde da der Observationsort im Niveau der unteren Fläche der Landuntertheilung und im Niveau der oberen Fläche der Meeresuntertheilung gelegen ist, nach 27) Artikel VI berechnet, wofür sich

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 2a \tan \frac{1}{2} v_1 = 2a \tan 0 = 0, \\ \varepsilon_2 &= 2a \tan \frac{1}{2} v_2 = 2a \tan \frac{1^\circ}{2} = 58,5929, \\ \text{mithin } \tan w_1 &= \frac{0}{0,1} = 0 \\ \tan w_2 &= \frac{58,5929}{0,1}\end{aligned}$$

ergab.

Die anderen Posten sind nach 31) berechnet.

von v ,	bis v_{II}	Ablenkung in Secunden
0°	1°	17",447
1	20	7,365
20	60	2,470
60	100	0,817
100	140	0,261
140	180	0,035
S u m m e . .		28,395

IX.

Sollen astronomische Polhöhenbestimmungen mit terrestrisch abgeleiteten Daten verglichen werden, so scheinen uns bei der Behandlung dieser Aufgabe folgende Betrachtungen nothwendig.

Nach 11) Artikel II kann die durch die Attraction in der Richtung der x verursachte Ablenkung von der Normale der regelmässigen Erdoberfläche, in Bogenseunden ausgedrückt, im Allgemeinen durch

$$\frac{M}{E \sin 1^\circ} = PD\rho + pD$$

dargestellt werden, wo P und p sich aus der für die Dictheit $= 1$ berechneten Attraction ergeben. Wenn nun φ eine astronomisch bestimmte Polhöhe und v eine Correction in dem Sinne anzeigt, dass $(\varphi+v)$ der von der Attraction befreite Werth ist; so hat man nach 1) Artikel I:

$$\varphi + v = \varphi - PD\rho - pD,$$

mithin

$$v + PD\rho + pD = 0.$$

Nehmen wir nun an, dass der betreffende Observationsort einer Gruppe ziemlich nahegelegener Punkte angehöre, und setzen wir:

$$P = P' + P'' ; \quad p = p' + p'',$$

wo P' und p' die geltenden Werthe bis zu der im Artikel III und VII erwähnten Grenze, über welche hinaus die auf alle Punkte der Gruppe noch ausgeübte Attraction als gleich betrachtet werden kann; P'' und p'' hingegen die Werthe jenseits derselben anzeigen; so erhalten wir:

$$v + P'D\rho + p'D + P''D\rho + p''D = 0,$$

und wenn der Kürze halber

$$P'D\rho + p''D = J$$

gesetzt wird:

$$v + P'D\rho + p'D + J = 0,$$

wo J für alle Observationsorte der Gruppe denselben Werth hat.

Es ist klar, dass zwei und auch mehrere Observationsorte so nahe an einander gelegen sein können, dass die terrestrisch berechneten Unterschiede zwischen den Polhöhen derselben durch eine Änderung der Erddimensionen, der betreffenden Seiten und der Azimuthe — innerhalb der möglichen Grenzen — in einem so geringen Masse beeinflusst werden, dass man dieselben als fehlerfrei betrachten kann.

Bezeichnet man nun die Observationsorte nach einander mit $S_1, S_2, \dots, S_n, S_{n+1}, \dots$, dann die terrestrischen Polhöhenunterschiede oder Amplituden zwischen S_1 und S_n , S_2 und S_n , \dots, S_{n-1} und S_n , S_n und S_{n+1} , \dots mit $[S_n - S_1], [S_n - S_2], \dots, [S_n - S_{n-1}], [S_{n+1} - S_n], \dots$ und fügt den andern Größen den Index des bezüglichen Observationsortes bei; so erhält man, wenn die hier angeführten Umstände vorhanden sind, nachstehende Gleichungen:

$$\begin{aligned}\varphi_1 + v_1 &= \varphi_n + v_n - [S_n - S_1]. \\ \varphi_2 + v_2 &= \varphi_n + v_n - [S_n - S_2]. \\ \vdots &\quad \vdots \\ \varphi_{n+1} + v_{n+1} &= \varphi_n + v_n + [S_{n+1} - S_n]. \\ \vdots &\quad \vdots \\ \vdots &\quad \vdots \\ v_1 + P'_1 D\rho + p'_1 D &+ J = 0 \\ v_2 + P'_2 D\rho + p'_2 D &+ J = 0 \\ \vdots &\quad \vdots \\ v_n + P'_n D\rho + p'_n D &+ J = 0 \\ v_{n+1} + P'_{n+1} D\rho + p'_{n+1} D &+ J = 0 \\ \vdots &\quad \vdots\end{aligned}$$

ferner

Ist die Anzahl der Observationsorte $= N$, so ist die Anzahl der erstenen Gleichungen: $= (N-1)$ und die der letzteren $= N$; mithin zusammen $= (2N-1)$ Gleichungen. Da nun die Anzahl der v ebenfalls $= N$ ist, so hat man, wenn auch $D\rho$ und D als unbekannt angenommen werden, wie es schon im Artikel II angedeutet wurde, $(N+2)$ Unbekannte mit $(2N-1)$ Gleichungen. Es werden daher, wenn $N > 3$ ist, mehr Gleichungen als Unbekannte vorhanden sein, die dann nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösen sind, wobei die erstenen Gleichungen selbstverständlich als Bedingungsgleichungen zu betrachten, mithin streng zu erfüllen sind.

Treten aber die hier gemachten Voraussetzungen nicht ein, und sind die Observationsorte in der Richtung von Süd nach Nord so weit von einander gelegen, dass eine Änderung in den Erddimensionen auch eine fühlbare Änderung in den Amplituden der Meridianbögen verursacht; so bedarf es in diesem Falle nur der Erwägung, dass die genannten Amplituden Functionen der Erddimensionen sind. Bezeichnet man daher die halbe Achse des Äquators mit a , die Abplattung mit η , und zeigen Δa und $\Delta \eta$ die Änderungen dieser Größen an; so braucht man nur anstatt $[S_n - S_1], [S_n - S_2]$ u. s. w. nach einander

$$\begin{aligned}[S_n - S_1] + \frac{d[S_n - S_1]}{da} \cdot \Delta a + \frac{d[S_n - S_1]}{d\eta} \cdot \Delta \eta, \\ [S_n - S_2] + \frac{d[S_n - S_2]}{da} \cdot \Delta a + \frac{d[S_n - S_2]}{d\eta} \cdot \Delta \eta, \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

zu setzen, wo a und η dieselben Werthe haben, mit welchen die Amplituden berechnet worden.

Man sieht, dass man auf diese Art selbst in den Stand gesetzt wird, auf die Dimensionen der Erde zu schliessen; natürlich muss aber, wenn in dieser Hinsicht ein Erfolg verbürgt sein soll, sowohl die Anlage als auch die Anzahl der Observationsorte eine angemessene, und die Berechnung der Attraction in der entsprechenden Ausdehnung durchgeführt, d. h. vollständig sein, damit dann die Grösse J wegfallen.

Ist J , dessen Werth nicht von der Auflösung der Gleichungen, sondern, wie eben bemerkt, nur von der Berechnung der Attraction abhängt, noch nicht bekannt, wie es weiter oben auch wirklich vorausgesetzt wird — so drücke man mit Hilfe der Bedingungsgleichungen alle in denselben vorkommenden v allenfalls durch v_n aus, und setze hierauf $v_n = v - J$, damit J aus der Rechnung verschwinde. Die Werthe von $D\rho$ und D , mithin auch von ρ werden dann unmittelbar, dagegen jene von v_1, v_2, v_3 u. s. w. erst dann vollständig erhalten werden, wenn J berechnet ist.

Mit Rückblick auf den Werth von D , nach Artikel II geht aber hervor, dass selbst bei dem unbekannten Werthe von J , sowohl die mittlere Dichtigkeit der zunächst der Erdoberfläche gelegenen Erdschichten oder der Erdrinde, als auch die mittlere Dichtigkeit der Erde berechnet werden kann. Insbesondere eignet sich das angegebene Verfahren zu diesem Zwecke dann, wenn in der Nähe der Observationsorte bedeutende Gewässer (ein grosser See oder ein Meer) vorkommen, welche die geeignete Lage haben, widrigens der Coëfficient von D entweder = 0 oder sehr klein wird, so dass sich auf den Werth dieser Grösse nicht schliessen lässt.

Sind ausser den Polhöhen noch vergleichbare sowohl terrestisch hergeleitete als auch astronomisch bestimmte Werthe von Azimuthen und Längenunterschieden vorhanden, so werden natürlich in beiden früher erwähnten Fällen neue Bedingungen zuwachsen, die wir aber dermalen näher zu besprechen nicht die Absicht haben.

Rücksichtlich der öfter erwähnten Grenze für die Attractionsberechnung einer Gruppe nicht zu weit von einander entfernter Observationsorte muss noch des Vortheils gedacht werden, den man erzielt, wenn diese Grenze so arrondirt wird, dass sie in Bezug auf zwei durch den als Hauptort angenommenen Observationsort senkrecht auf einander gelegte Achsen eine symmetrische Figur bilde.

Denn, da die, von einem in allen Theilen als gleich dicht angenommenen durch zwei parallele Normalflächen und den symmetrischen Umfang eingeschlossenen Körper, auf den innerhalb befindlichen Hauptort ausgeübte Attraction in jeder beliebigen horizontalen Richtung sich vollkommen hebt, oder = 0 ist, so wird auch die für den Hauptort berechnete horizontale Attraction von der Wahl der Normalfläche unabhängig. Es bedarf daher auch, wenn die Hauptorte von mehreren Gruppen mit einander in Verbindung gebracht werden, die für sie bereits berechnete horizontale Attraction keiner ferneren Reduction mehr auf eine gemeinschaftliche Normalfläche.

Wie schon aus der Einleitung hervorgeht, wurden bei den hier angegebenen Attractionsberechnungen nur die sichtbaren, d. h. nur die auf der Oberfläche der Erde vorkommenden Unregelmässigkeiten berücksichtigt, weil unserer Meinung nach diese in den meisten Fällen ausreichen dürften, die Abweichung der Lothlinie mit zureichender Schärfe zu erklären, und weil wir erst bei einer allenfalls stattfindenden Disharmonie der erzielten Resultate — wenn sonst die ganze Operation als richtig vorausgesetzt werden kann — auf das Vorhandensein von Unregelmässigkeiten unterhalb der Erdoberfläche mit Grund schliessen können, deren Erklärung dann allerdings Hypothesen überlassen bleiben mag.

X

Wir wollen noch eine praktische Anwendung über das hier Vorgetragene anreihen, nachdem die lobsame Direction des k. k. militärisch-geographischen Institutes, auf deren Veranlassung die folgenden astronomischen Bestimmungen bei Innsbruck und Klagenfurt vorgenommen wurden, nicht nur ihre Zustimmung zur Benützung derselben ertheilt, sondern im Interesse des Fortschrittes auch die Veröffentlichung der angewendeten Attractionsberechnung als wünschenswerth erkannt hat.

Für denselben Ort war aber früher gefunden und zwar nach:

Vidige: Ondai

Das vom Lanserkopf übertragene Resultat war daher jedenfalls zu gross, und konnte nur dem Einflusse der näheren südlichen Gebirgsmassen auf diese Beobachtungsstation zugeschrieben werden.

Die Direction des milit.-geographischen Institutes fand sich desshalb veranlasst eine neue Breitenbestimmung in der Ebene von Innsbrück vornehmen zu lassen, und übertrug mir die Ausführung derselben im Sommer 1857, wobei jedoch die möglichste Sicherstellung des Resultates bezüglich der Attractionseinflüsse im Auge zu behalten war.

Ich wählte zur astronomischen Beobachtungsstation einen Punkt östlich von Innsbruck und dem Dorfe Pradl, fast in der Mitte der ziemlich symmetrisch vom Gebirgsrande umgrenzten Thalebene, welche in der Richtung von Süd nach Nord eine Ausdehnung von ungefähr 1460 Klafter hat.

Ausser dieser Hauptbeobachtungsstation wählte ich noch fast im Meridiane derselben zwei weitere Observationsorte, welche so wie der Hauptort mit dem trigonometrischen Netze gut und sicher verbunden waren.

Zwischen Lanserkopf und meinem nördlichen Punkte beträgt die Entfernung nahe 2000 Klafter.

Weiter ist noch zu bemerken, dass die Messungen auf dem Lanserkopf im Jahre 1851
zwar von einem andern Beobachter, allein mit denselben Instrumenten und nach denselben
Methoden vorgenommen, und hiezu fast alle dieselben Sterne benutzt wurden, wie von mir
im Jahre 1857, und dass die nachfolgenden Bestimmungen mit Hilfe der Ephemeriden
„Connaissance des temps“ gewonnen wurden, die an Ort und Stelle zur Hand waren, wo gleich
die Berechnung besorgt wurde.

¹⁾ Die abgeleiteten Resultate von München und Bern wurden durch die bewirkte Verbindung der Triangulationen in Tirol und Vorarlberg im Jahre 1852 und 1853 gewonnen.

Die vier Observationsorte sollen nun, wie sie von Süd gegen Nord auf einander folgen, in nachstehender Weise bezeichnet werden:

- S_1 Lanserkopf, Berg,
- S_2 Pradl, südlicher Meridianstand,
- S_3 Pradl, Hauptort,
- S_4 Pradl, nördlicher Meridianstand.

Die auf denselben astronomisch bestimmten Polhöhen sind, wenn sie in derselben Ordnung angeführt werden:

Beobachtungen:		
$\varphi_1 = 47^\circ 14'$	$56''90$,	$510,$
$\varphi_2 = 47^\circ 15.$	$36,60$,	$180,$
$\varphi_3 = 47^\circ 16.$	$9,24$,	$320,$
$\varphi_4 = 47^\circ 16.$	$35,99$,	$170.$

Terrestrisch wurden berechnet die Amplituden der Meridianbögen zwischen:

$$S_1 \text{ und } S_3 = 81''92$$

$$S_2 \text{ " } S_3 = 38,41$$

$$S_3 \text{ " } S_4 = 32,55$$

die aus dem schon früher erwähnten Grunde als fehlerfrei betrachtet werden können. Nach dem im vorigen Artikel Gesagten erhalten wir daher:

$$\varphi_1 + v_2 = \varphi_3 + v_3 - 81''92,$$

$$\varphi_2 + v_2 = \varphi_3 + v_3 - 38,41,$$

$$\varphi_4 + v_4 = \varphi_3 + v_3 + 32,55,$$

oder

$$A) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = v_3 + \varphi_3 - \varphi_1 - 81''92, \\ v_2 = v_3 + \varphi_3 - \varphi_2 - 38,41, \\ v_4 = v_3 + \varphi_3 - \varphi_4 + 32,55, \end{array} \right.$$

welche letztere die Bedingungsgleichungen bilden und streng erfüllt werden müssen.

Hiezu kommen — da hier die Attraction nur bis zu der öfter erwähnten Grenze berechnet wurde:

$$B) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 + P'_1 x + p'_1 y + J = 0, \text{ Gewicht } 510, \\ v_2 + P'_2 x + p'_2 y + J = 0, \quad " \quad 180, \\ v_3 + P'_3 x + p'_3 y + J = 0, \quad " \quad 320, \\ v_4 + P'_4 x + p'_4 y + J = 0, \quad " \quad 170, \end{array} \right.$$

wo x und y anstatt $D\rho$ und D gesetzt wurde, und wo die Summe der mit ihren Gewichten multiplizirten Quadrate der linken Seiten ein Minimum werden muss.

Aus der für die Dichtigkeit = 1 berechneten Attraction in der Richtung der x ergab sich:

$$C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Auf } S_1 \dots P'_1 = 1,74994, p'_1 = 0, \\ " \quad S_2 \dots P'_2 = 1,25466, p'_2 = 0, \\ " \quad S_3 \dots P'_3 = 0,37034, p'_3 = 0, \\ " \quad S_4 \dots P'_4 = -0,06208, p'_4 = 0, \end{array} \right.$$

wo die p' , da keine Gewässer vorhanden, gleich Null sind, mithin y aus der Rechnung verschwindet.

Es bleiben uns hier sieben Gleichungen mit fünf Unbekannten.

Substituirt man nun in die $B)$ für v_1 , v_2 und v_4 die Werthe aus den $A)$, und in die so erhaltenen Gleichungen für φ_1 , φ_2 , φ_3 und φ_4 die früher angeführten, dann für P'_1 , P'_2 , P'_3 und P'_4 die in $C)$ gegebenen numerischen Werthe, so erhält man, wenn zugleich $v = v_3 + J$ gesetzt wird, nachstehende numerische Gleichungen:

$$D) \quad \begin{cases} v + 1,74994 x - 9,58 = 0, & \text{Gewicht 510} \\ v + 1,25466 x - 5,77 = 0, & " 180 \\ v + 0,37034 x = 0, & " 320 \\ v - 0,62508 x + 5,80 = 0, & " 170, \end{cases}$$

woraus wir, wenn die Bedingung des Minimums erfüllt werden soll, erhalten:

$$E) \quad \begin{cases} 1180,00 v + 1130,55 x - 4938,40 = 0 \\ 1130,55 v + 1955,43 x - 10469,28 = 0. \end{cases}$$

Die wahrscheinlichsten Werthe ergeben sich nun, und zwar aus diesen Gleichungen selbst:

$$\begin{aligned} v &= -2,12 \text{ mit dem wahrscheinlichen Fehler } \pm 0,215, \\ x &= +6,58 " " " " \pm 0,167, \end{aligned}$$

dann mit Benützung der $A)$, wenn die numerischen Werthe für φ_1 , φ_2 , φ_3 und φ_4 substituirt werden, und wenn man berücksichtigt, dass

$$v_3 = v - J = -2,12 - J$$

ist:

$$\begin{aligned} v_1 &= -11,70 - J, \pm 0,215 \\ v_2 &= -7,89 - J, \pm 0,215 \\ v_3 &= -2,12 - J, \pm 0,215 \\ v_4 &= +3,68 - J, \pm 0,215. \end{aligned}$$

Endlich erhält man, wenn diese Werthe zu den entsprechenden φ hinzugezahnt werden, die wahrscheinlichsten Werthe der Polhöhen auf:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &\dots \varphi_1 + v_1 = 47^\circ 14' 45" 20 - J \\ S_2 &\dots \varphi_2 + v_2 = 47^\circ 15' 28,71 - J \\ S_3 &\dots \varphi_3 + v_3 = 47^\circ 16' 7,12 - J \\ S_4 &\dots \varphi_4 + v_4 = 47^\circ 16' 39,67 - J \end{aligned} \right\} \pm 0,215$$

Nachdem die numerisch berechneten Werthe von $P'_1 x$, $P'_2 x$, $P'_3 x$ und $P'_4 x$ die Ablenkung der Lothlinie für die unmittelbar gemessenen Polhöhen φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 geben, so kann man sich, wenn man die unmittelbar gemessenen, dann die von der Attraction befreiten Polhöhen in der Reihenfolge, wie die Combinationen zu zweien gebildet werden, von einander abzieht,

dann zu den schon angegebenen terrestrischen Amplituden die noch fehlenden aus diesen selbst bildet, die nachstehende Übersicht verschaffen:

Zwischen den Orten	Amplituden			Differenzen	
	Astronomische		Terrestrische	ohne	mit
	ohne	mit		Berücksichtigung der Attraction	Berücksichtigung der Attraction
	Berücksichtigung der Attraction				
S_2 und S_1	0° 39' 70"	0° 42' 96"	0° 43' 51"	+ 3" 81	+ 0" 55
S_3 „ S_1	1 12,34	1 21,41	1 21,92	+ 9,58	+ 0,51
S_4 „ S_1	1 39,09	1 54,71	1 54,47	+ 15,38	- 0,24
S_3 „ S_2	0 32,64	0 38,45	0 38,41	+ 5,77	- 0,04
S_4 „ S_2	0 59,39	1 11,75	1 10,96	+ 11,57	- 0,79
S_4 „ S_3	0 26,75	0 33,30	0 32,55	+ 5,80	- 0,75

woraus man zur Genüge den Werth der Attractionsberechnung bei Bestimmungen von Polhöhen würdigen und zugleich entnehmen kann, wie wichtig es sei, dieselbe bei Gradmessungen zu berücksichtigen.

Obwohl nun der vorliegende Fall den Bedingungen des Artikels IX nicht besonders entspricht, so wollen wir es doch versuchen, daraus noch die mittlere Dichtigkeit der Erde zu berechnen. Aus der Gleichung $D\rho = x$ erhält man nämlich, wenn für D der Werth nach Artikel II gesetzt, und für π und a die dort angegebenen Zahlen werthe substituirt und $\rho = 2,75$ angenommen wird:

$$\Delta = 40,338 \cdot \frac{1}{x}.$$

Mithin ist, wenn man die wahrscheinlichen Fehler von Δ und x mit Δ_x und x_x bezeichnet:

$$\pm \Delta_x = \pm 40,338 \cdot \frac{x_x}{x^2},$$

und wenn man für x und x_x die oben erhaltenen Werthe 6,58 und $\pm 0,167$ setzt, so hat man für die mittlere Dichtigkeit der Erde:

$$\Delta = 6,1311 \text{ mit dem wahrscheinlichen Fehler } \pm 0,1557.$$

Im Jahre 1859 erhielt ich den Auftrag eine astronomische Bestimmung der Polhöhe und eines Azimuthes in der Nähe von Klagenfurt vorzunehmen, so dass die erzielten Resultate möglichst von jedem Attractionseinflusse befreit sein sollten.

Der Vorgang war ein ähnlicher wie in Tirol, nur dass ausser dem gewählten Hauptobservationsorte bei St. Peter östlich von Klagenfurt noch auf fünf anderen, demselben Meridian sehr nahe gelegenen Orten die Polhöhe astronomisch bestimmt wurde, wovon der nördlichste von dem südlichsten sehr nahe 1700 Wr. Klafter entfernt war.

Bezeichnet man diese Observationsorte von Süden angefangen mit $S_1, S_2 \dots S_6$, wo S_3 den Hauptort St. Peter anzeigt, so sind die Bestimmungen:

	Anzahl Beobachtungen
auf $S_1 \dots \varphi_1 = 46^\circ 36' 43'' 72,$	160
" $S_2 \dots \varphi_2 = 46 37 4,80,$	100
" $S_3 \dots \varphi_3 = 46 37 24,13,$	320
" $S_4 \dots \varphi_4 = 46 37 44,27,$	130
" $S_5 \dots \varphi_5 = 46 38 3,85,$	200
" $S_6 \dots \varphi_6 = 46 38 23,39,$	110.

Die berechneten terrestrischen Amplituden der Meridianbögen waren zwischen den Punkten

$$\begin{aligned} S_1 \text{ und } S_3 &= 43'' 02, \\ S_2 \text{ " } S_3 &= 20,61, \\ S_3 \text{ " } S_4 &= 19,98, \\ S_3 \text{ " } S_5 &= 40,24, \\ S_3 \text{ " } S_6 &= 60,72, \end{aligned}$$

welche wir aus demselben Grunde wie bei dem vorigen Beispiele als fehlerfrei betrachten können. Demnach erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varphi_1 + v_1 &= \varphi_3 + v_3 - 43,02, \\ \varphi_2 + v_2 &= \varphi_3 + v_3 - 20,61, \\ \varphi_4 + v_4 &= \varphi_3 + v_3 + 19,98, \\ \varphi_5 + v_5 &= \varphi_3 + v_3 + 40,24, \\ \varphi_6 + v_6 &= \varphi_3 + v_3 + 60,72, \end{aligned}$$

und wenn wir die Gleichungen dem vorigen Beispiele analog bezeichnen:

$$A_1) \quad \begin{cases} v_1 = v_3 + \varphi_3 - \varphi_1 - 43,02, \\ v_2 = v_3 + \varphi_3 - \varphi_2 - 20,61, \\ v_4 = v_3 + \varphi_3 - \varphi_4 + 19,98, \\ v_5 = v_3 + \varphi_3 - \varphi_5 + 40,24, \\ v_6 = v_3 + \varphi_3 - \varphi_6 + 60,72. \end{cases}$$

Da auch hier die Attraction nur bis zu einer gewissen Grenze berechnet wurde, so haben wir:

$$B_1) \quad \begin{cases} v_1 + P'_1 x + p'_1 y + J = 0, & 160, \\ v_2 + P'_2 x + p'_2 y + J = 0, & 100, \\ v_3 + P'_3 x + p'_3 y + J = 0, & 320, \\ v_4 + P'_4 x + p'_4 y + J = 0, & 130, \\ v_5 + P'_5 x + p'_5 y + J = 0, & 200, \\ v_6 + P'_6 x + p'_6 y + J = 0, & 110. \end{cases}$$

Die Berechnung der Attraction für die Dichtigkeit = 1 ergab:

$$C_1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Auf } S_1 \dots P'_1 = + 0,52621, & p'_1 = 0, \\ \text{, } S_2 \dots P'_2 = + 0,37890, & p'_2 = 0, \\ \text{, } S_3 \dots P'_3 = + 0,26559, & p'_3 = 0, \\ \text{, } S_4 \dots P'_4 = + 0,15856, & p'_4 = 0, \\ \text{, } S_5 \dots P'_5 = + 0,05428, & p'_5 = 0, \\ \text{, } S_6 \dots P'_6 = - 0,05500, & p'_6 = 0, \end{array} \right.$$

und da y aus demselben Grunde wie im vorigen Beispiele wegfällt, so haben wir 11 Gleichungen mit 7 Unbekannten, woraus man erhält:

$$D_1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} v + 0,52621 x - 2,61 = 0, & \text{Gewicht} \\ v + 0,37890 x - 1,28 = 0, & 160 \\ v + 0,26559 x + 0,00 = 0, & 100 \\ v + 0,15856 x - 0,16 = 0, & 320 \\ v + 0,05428 x + 0,52 = 0, & 130 \\ v - 0,05500 x + 1,46 = 0, & 200 \\ & 110 \end{array} \right.$$

$$E_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1020 v + 232,491 x - 301,8 = 0, \\ 232,491 v + 85,423 x - 274,73 = 0. \end{array} \right.$$

Die wahrscheinlichsten Werthe ergeben sich, und zwar aus diesen Gleichungen:

$$\begin{aligned} v &= - 1''15 & \text{wahrscheinliche Fehler} \\ x &= + 6,3501 & \pm 0,210 \\ & & \pm 0,726, \end{aligned}$$

dann aus den A_1), wenn wieder berücksichtigt wird, dass $v_3 = v - J$ ist:

$$\begin{aligned} v_1 &= - 3,76 - J, & v_4 &= - 1,31 - J, \\ v_2 &= - 2,43 - J, & v_5 &= - 0,63 - J, \\ v_3 &= - 1,15 - J, & v_6 &= + 0,31 - J, \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{c} \pm 0,210; \\ \pm 0,210; \end{array} \right\} \pm 0,210,$$

endlich, wenn diese sechs Grössen zu den entsprechenden hinzugehan werden¹⁾

$$\begin{aligned} \text{Polhöhe auf } S_1 \dots \varphi_1 + v_1 &= 46^\circ 36' 39'' 96 - J \\ \text{, } S_2 \dots \varphi_2 + v_2 &= 46 37 2,37 - J \\ \text{, } S_3 \dots \varphi_3 + v_3 &= 46 37 22,98 - J \\ \text{, } S_4 \dots \varphi_4 + v_4 &= 46 37 42,96 - J \\ \text{, } S_5 \dots \varphi_5 + v_5 &= 46 38 3,22 - J \\ \text{, } S_6 \dots \varphi_6 + v_6 &= 46 38 23,70 - J \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \pm 0,210.$$

¹⁾ Die hier gewonnenen Resultate sind von den für das k. k. militär.-geographische Institut auf einem andern Wege berechneten etwas verschieden, jedoch durchaus ohne Erheblichkeit.

Nach dieser Aufgabe stellt sich folgende Übersicht heraus:

Zwischen den Orten	Amplituden			Differenzen	
	ohne	mit	Terrestrische	ohne	mit
	Berücksichtigung der Attraction			Berücksichtigung der Attraction	
S_2 und S_1	0° 21' 08"	0° 22' 01"	0° 22' 41"	+ 1" 33	+ 0" 40
S_3 " S_1	0 40,41	0 42,06	0 43,02	+ 2,61	+ 0,96
S_4 " S_1	1 0,55	1 2,88	1 3,00	+ 2,45	+ 0,12
S_5 " S_1	1 20,13	1 23,13	1 23,26	+ 3,13	+ 0,13
S_6 " S_1	1 39,67	1 43,36	1 43,74	+ 4,07	+ 0,38
S_3 " S_2	0 19,33	0 20,05	0 20,61	+ 1,28	+ 0,56
S_4 " S_2	0 39,47	0 40,87	0 40,59	+ 1,12	- 0,28
S_5 " S_2	0 59,05	1 1,12	1 0,85	+ 1,80	- 0,27
S_6 " S_2	1 18,59	1 21,35	1 21,33	+ 2,74	- 0,02
S_4 " S_3	0 20,14	0 20,82	0 19,98	- 0,16	- 0,84
S_5 " S_3	0 39,72	0 41,07	0 40,24	+ 0,52	- 0,83
S_6 " S_3	0 59,26	1 1,30	1 0,72	+ 1,46	- 0,58
S_5 " S_4	0 19,58	0 20,25	0 20,26	+ 0,68	+ 0,01
S_6 " S_4	0 39,12	0 40,48	0 40,74	+ 1,62	+ 0,26
S_6 " S_5	0 19,54	0 20,23	0 20,48	+ 0,94	+ 0,25

Man sieht also auch hier, dass die Attraction die Messung bedeutend beeinflusste.

Setzt man in den Formeln der früheren Aufgabe:

$$\Delta = 40,338 \cdot \frac{1}{x}$$

und

$$\pm \Delta = \pm 40,338 \cdot \frac{x_1}{x^2}$$

die hier erhaltenen Werthe für x und x_1 nämlich + 6,3501 und ± 0,726, so ergibt sich die mittlere Dicke der Erde:

$$\Delta = 6,352 \text{ mit dem wahrscheinlichen Fehler } \pm 0,726,$$

wenn die mittlere Dicke der Erdrinde so wie früher mit 2,75 angenommen wird.

Das Resultat der mittleren Dichte der Erde ist in beiden Aufgaben ein grösseres, als es sonst (5,44 bis 5,68) angegeben wird; allein dafür auch ein von der angenommenen mittleren Dichte der Erdrinde Abhängiges, da in beiden Fällen nicht die Bedingungen vorhanden waren, desshalb eigene Bestimmungen zu machen.

Um endlich den Vorgang bei der Berechnung der Attraction anschaulicher zu machen, sind hier vier Karten beigeschlossen, auf welchen in Bezug auf die Observationsorte bei Innsbruck in Tirol die attrahirenden Untertheilungen dargestellt sind, die übrigens in den wegen ihres zu grossen Umfanges nicht beigehlossenen Berechnungsprotokollen unter der Bezeichnung „Figur“ erscheinen.

Sie sind in sechs Partien oder Abtheilungen abgetheilt, die mit stehenden römischen Ziffern bezeichnet sind.

Der Nullpunkt des rechtwinkeligen Coordinatensystems wurde in Lanserkopf angenommen, die Achsen desselben sind parallel zum Meridian von Lanserkopf und senkrecht darauf. Die Normalfläche wurde 295 österr. Klafter über der Meeresfläche, die drei Observationsorte

bei Pradl wurden in einer 304 österr. Klafter über dem Niveau des Meeres erhöhten Ebene und Lanserkopf 490 österr. Klafter über demselben angenommen.

Im ersten Blatte sind die Untertheilungen blos von der V. und VI. Abtheilung ersichtlich; allein, um die Untertheilungen der ersten vier Abtheilungen ersichtlich zu machen, mussten diese in grösserem Massstabe auf den folgenden drei Blättern gezeichnet werden. Zur Berechnung der auf die vier genannten Orte von der nächsten Umgebung ausgeübten Attraction ist die Eintheilung derselben in Untertheilungen nach der am Schlusse des Artikels III gegebenen Andeutung vorgenommen worden, daher die I^{te} Abtheilung für jeden Ort eine andere Eintheilung hat, wie es in Blatt II auch ersichtlich. Für Lanserkopf, auf der höchsten Stelle des gleichnamigen Kogels, wurde dieser in 24 Ausschnitte getheilt, die mit a, b, c, \dots bis y und das Ganze mit Fig. 44 (für das Berechnungsprotokoll) bezeichnet wurde. Die Berechnung der Attraction geschah hier nach 26) Artikel V.

Um die anderen drei Punkte bei Pradl wurden Untertheilungen von symmetrischem Umfange (rechteckige Parallelogramme) gebildet, und ihre obere Fläche als eben angenommen, so dass also die horizontale Attraction für dieselben = 0 ist. Das übrige Terrain der ersten, so wie das der anderen Abtheilungen wurde, ausgenommen im Anstosse mit dem Fussumfange des Lanserkopfes, in Untertheilungen von symmetrischem Umfange getheilt, und ihre horizontale Attraction nach 13) Artikel III berechnet. Die Abgrenzungen aller dieser symmetrischen Untertheilungen, so wie auch die der Abtheilungen selbst, sind zu den Coordinatenachsen parallel; die ersten bilden überdies, wie es gleich auffällt, je nach dem Grade der erforderlichen Genauigkeit Quadrate, welche 1000, 2000 bis 4000 österr. Klafter, also nach der angenommenen Einheit 1, 2 bis 4 zur Seite haben.

In der nordwestlichen Ecke derselben ist ihre Numerirung, die in jeder Abtheilung mit 1 anfängt, mit stehenden arabischen Ziffern, und in der Mitte der kubische Inhalt, wie er sich aus der Ausmittelung der Höhen über der angenommenen Normalfläche ergab, mit liegenden arabischen Ziffern eingeschrieben.

Die erste Abtheilung bildet ein rechteckiges Parallelogramm, das in Bezug auf einen gedachten, 1000 österr. Klafter nördlich vom Lanserkopf im Meridiane desselben angenommenen Punkt symmetrisch ist; die folgenden vier sind rahmenförmig, so dass deren innerer Umfang sowohl, als auch der äussere in Bezug auf den gedachten Punkt ebenfalls symmetrisch ist; die sechste Abtheilung besteht aus vier in der Richtung der vier Weltgegenden symmetrisch sich anschliessenden Gruppen von Untertheilungen. Von dem gedachten Punkte sind die äussersten Umfangslinien des ganzen berechneten Terrains in der Richtung der vier Weltgegenden 10 Meilen = 40000 österr. Klafter entfernt, mithin so weit, dass man diesen symmetrischen Umfang als die Grenze ansehen kann, über welche hinaus die auf die vier verschiedenen Punkte, oder wenn man den gedachten Punkt dazu nimmt die auf alle fünf noch weiter ausgeübte Attraction als gleich betrachtet werden kann.

Zum Entwurfe der beiliegenden Blätter so wie zur Ausmittelung der Höhen der Untertheilungen wurden die Spezialkarten von Tirol und Oberösterreich sammt Salzburg des k. k. Generalstabes, dann wegen der auf Baiern fallenden Fläche die Karte der österreichischen Monarchie von Oberstlieutenant Scheda nebst den Elaboraten des k. k. Katasters benutzt, welche letztere besonders reichhaltige Höhendaten lieferten. Die punktirten Linien zeigen die Scheidung der Blätter der Generalstabskarte an, und in den nordwestlichen Ecken sind ihre Numern mit grösseren stehenden arabischen Ziffern eingeschrieben.

Bei Klagenfurt war die Eintheilung des Terrains in Untertheilungen eine ähnliche, und es wurden darnach auch die Blätter mit Benützung der Generalstabskarten entworfen. Jedoch erstreckt sich die Attraeptionsberechnung von St. Peter nördlich und südlich nur auf $6\frac{3}{4}$, östlich und westlich auf $4\frac{1}{2}$ österr. Meilen.

Die vorliegende Abhandlung und ihre Anwendung auf die zwei angeführten Beispiele dürfte jedenfalls die Eingangs erwähnte Ansicht genügend begründen, dass eine Gradmessung ohne Berücksichtigung der von den Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche hervorgebrachten Ablenkung der Schwere nur unvollständig sein könne, und dass da, wo die messbaren Unregelmässigkeiten berücksichtigt werden, ein der Wahrheit weit genäherteres Resultat zu erwarten stehe, als im entgegengesetzten Falle. Wir glauben hierbei überhaupt jenem Theile der interessanten Denkschrift zur Begründung einer mitteleuropäischen Gradmessung von Herrn Generallieutenant Baeyer entgegengekommen zu sein, in welchem gesagt wird, dass eine künftige Gradmessung es hauptsächlich nur mit den Abweichungen zu thun haben und bei ihrer Anlage Gegenden und Terrainverhältnisse aufzusuchen müssen wird, die man sonst gerne vermied.

Ist es uns aber gestattet, unsere Betraehungen etwas weiter auszudehnen, so übergehen wir auf Seite 100 dieser Denkschrift, wo es heisst: „Aus den astronomischen Bestimmungen der Sternwarten oder sonstiger Stationsorte sind die wahrscheinlichen Fehler der Polhöhen und die wahrscheinlichen Fehler der Azimuthe bekannt; es lässt sich daher untersuchen in wie weit durch Einführung dieser Fehler die Differenzen der Abplattung zum Verschwinden gebracht werden können. Und in so weit, wie dies angeht, sind diese Differenzen Beobachtungsfehlern beizumessen. Für alle Punkte aber, wo noch ein erheblicher Rest übrig bleibt, wird derselbe einer Ablenkung der Lothlinie zuzuschreiben sein. Diese Punkte werden nun ausgeschlossen und die übrigen zu einem Polygone vereinigt, welches so auszugleichen ist, dass es einem einzigen Sphäroid entspricht.“

Abgesehen davon, dass durch dieses Ausschliessen eine beträchtliche Anzahl von Punkten dem beabsichtigten Zwecke entzogen wird, ist auch die Sicherheit des Schlusses in Bezug auf das entsprechende Sphäroid eine verhältnissmässig um so geringere. Das Ausschliessen von Punkten, wo noch ein erheblicher Rest übrig bleibt, würde uns daher erst dann gerechtfertigt erscheinen, wenn früher alle astronomischen Bestimmungen von der Ablenkung in Folge messbarer Unregelmässigkeiten befreit sind; denn nur so wird eine Gradmessung, gegenüber den bereits geschehenen, mit Recht als ein Fortschritt in der wissenschaftlichen Untersuchung unseres Erdalles angesehen werden können. Eine strenge Berechnung der Attraction und in der gehörigen Ausdehnung durchgeführt, dürfte schon allein zur Hebung der Disharmonie zwischen astronomischen und terrestrischen Bestimmungen in den meisten Fällen um so mehr hinreichend sein, als dies oft durch blosse allgemeine Abschätzungen theilweise erfüllt wird. Denn, wenn man voraussetzt, dass die Orte, auf welchen astronomische Bestimmungen vorgenommen werden, nahe in demselben Meridiane gelegen sind; so werden — ausser wenn noch besonders grell hervortretende Unregelmässigkeiten einwirken — auf einer Insel, oder wenn die Observationsorte sich über einen Berg ziehen, die astronomischen Amplituden immer grösser; und wenn die Observationsorte in einem nördlich und südlich vom Gebirge begrenzten Thale,

oder zu beiden Seiten eines bedeutenden Gewässers gelegen sind, immer kleiner sich herausstellen, als die terrestrischen Amplituden.

Da nun die Excentricität, mithin auch die Abplattung der Erde mit wachsenden Amplituden der Meridianbögen zu- oder abnimmt, je nachdem $\sin \varphi \geq \sqrt{\frac{2}{3(1 - \frac{4}{3}\varepsilon^2 + \varepsilon^4)}}$ ist, wo φ die Polhöhe anzeigt; so ist die Seite 73 der genannten Denkschrift angeführte Bemerkung, dass die astronomischen Polhöhenbestimmungen für England eine grössere specielle Abplattung ergeben, hiemit schon gerechtfertigt.

Eben so ist es erklärlich, dass in unseren beiden Beispielen die astronomischen Amplituden, bis auf eine, durchgehends kleiner sind, als die terrestrischen, indem in beiden Fällen die Observationsorte in von Ost gegen West sich hinziehenden Thälern gelegen sind.

Die in beiden Aufgaben durchgeföhrte Berechnung des Verhältnisses der mittleren Dichtigkeit der Erde zur mittleren Dichtigkeit der Erdrinde, oder wie wir die Letztere = 2,75 annahmen, die Berechnung der Ersteren, dürfte jedenfalls als eine im hohen Grade befriedigende Beantwortung einer jener Fragen erscheinen, die nach § 8 der Denkschrift künftigen Gradmessungen vorbehalten bleiben. Nur wäre noch zu wünschen, dass bei der im Zuge befindlichen mitteleuropäischen Gradmessung an einer, den im Artikel IX angezeigten Bedingungen entsprechenden Örtlichkeit ähnliche Bestimmungen vorgenommen würden, um daraus auf die mittlere Dichtigkeit der Erde und ihrer Oberfläche mit um so grösserer Sicherheit schliessen zu können, und Daten zu gewinnen, die dann auch als Grundlage zu ferneren Berechnungen der Ablenkung dienen könnten. Unserer Ansicht nach dürfte sich in Österreich die Südspitze Istriens unterhalb Pola, in Italien die Gegend von Genua, und in Frankreich die Gegend von Marseille besonders dazu eignen.

Bei der Lösung unserer beiden Aufgaben haben wir nicht die geringste Veranlassung gefunden, zu unterirdischen oder sonst unerklärlichen Unregelmässigkeiten Zuflucht zu nehmen, um die astronomischen Bestimmungen mit den terrestrischen in Einklang zu bringen. Zur Beantwortung der Frage, in wie weit dieses auch bei entfernteren unter verschiedenen Meridianen gelegenen Observationsorten stattfindet, ist bereits eine ausgedehnte Berechnung der auf Pradl bei Innsbruck, Wien und Fiume ausgeübten Attraction in Angriff genommen, um nach Durchführung derselben den Vergleich der astronomischen mit den terrestrisch hergeleiteten Polhöhenunterschieden dieser Orte herstellen zu können, wozu wir die Daten ebenfalls durch die Güte der Direction des k. k. militärisch-geographischen Institutes zu erhalten hoffen.

Die Ergebnisse dieses Unternehmens der k. k. Akademie und damit der Öffentlichkeit vorzulegen, ist daher einem späteren Zeitpunkte vorbehalten.

Tabelle der Anzahl der jährlichen Bevölkerungsänderungen											
		I		II		III		IV		V	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		W	W	W	W	W	W	W	W	W	W
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104
105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116
117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128
129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152
153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164
165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176
177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188
189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212
213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224
225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236
237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248
249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272
273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284
285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296
297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308
309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332
333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344
345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356
357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368
369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392
393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404
405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416
417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428
429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440
441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452
453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464
465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476
477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488
489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512
513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524
525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536
537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548
549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560
561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572
573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584
585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596
597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608
609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620
621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632
633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644
645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656
657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668
669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680
681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692
693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704
705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716
717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728
729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740
741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752
753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764
765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776
777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788
789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800
801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812
813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824
825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836
837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848
849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860
861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872
873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884
885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896
897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908
909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920
921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932
933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944
945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956
957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968
969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980
981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992
993	994	995	996	997	998	999	990	991	992	993	994
995	996	997	998	999	990	991	992	993	994	995	996
997	998	999	990	991	992	993	994	995	996	997	998
999	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	990
991	992	993	994	995	996	997	998	999	990	991	992
993	994	995	996	997	998	999	990	991	992	993	994
995	996	997	998	999	990	991	992	993	994	995	996
997	998	999	990	991	992	993	994	995	996	997	998
999	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	990
991	992	993	994	995	996	997	998	999	990	991	992
993	994	995	996	997	998	999	990	991	992	993	994
995	996	997	998	999	990	991	992	993	994	995	996
997	998	999	990	991	992	993	994	995	996	997	998
999	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	990
991	992	993	994	995	996	997	998	999	990	991	992
993	994	995	996	997	998	999	990	991	992	993	994
995	996	997	998	999	990	991	992	993	994	995	996
997	998	999	990	991	992	993	994	995	996	997	998
999	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	990
991	992	993	994	995	996	997	998	999	990	991	992
993	994	995	996	997	998	999	990	991	992	993	994
995	996	997	998	999	990	991	992	993	994	995	996
997	998	999	990	991	992	993	994	995	996	997	998
999	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	990
991	992	993	994	995	996	997	998	999	990	991	992
993	994	995	996	997	998	999	990	991	992	993	994
995	996	997	998	999	990	991	992	993	994	995	996
997	998	999	990	991	992	993	994	995	996	997	998
999	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	990
991	992	993	994	995	996	997	998	999	990	991	992
993	994	995	996	997	998	999	990	991	992	993	994



oder zu beiden Seiten eines bedeutenden, als die terrestrischen Ampli stellen, als die terrestrischen Ampli
Da nun die Excentricität, mithi

der Meridianbögen zu- oder abnimmt

Polhöhe anzeigt; so ist die Seite 72 die astronomischen Polhöhenbestim mungen ergeben, hiemit schon gerechtfertigt

Eben so ist es erklärlich, dass den, bis auf eine, durchgehends kleineren die Observationsorte in von Ost ge

Die in beiden Aufgaben durch tigkeit der Erde zur mittleren Dicke annahmen, die Berechnung der Ers gende Beantwortung einer jener F Gradmessungen vorbehalten bleibe sindlichen mitteleuropäischen Grad gungen entsprechenden Örtlichkeit auf die mittlere Dichtigkeit der Erde schliessen zu können, und Daten Berechnungen der Ablenkung dien die Südspitze Istriens unterhalb Po Gegend von Marseille besonders d

Bei der Lösung unserer beider gefunden, zu unterirdischen oder so um die astronomischen Bestimmungen Beantwortung der Frage, in wie weiten gelegenen Observationsorte auf Pradl bei Innsbruck, Wien und nach Durchführung derselben den leiteten Polhöhenunterschieden dies durch die Güte der Direction des k.

Die Ergebnisse dieses Unterw vorzulegen, ist daher einem späteren

I^{te} ABTHEILUNG.

LANSERKOPF

1	2	3	4
0 0 8 9	0 0 6 3	0 0 9 0	0 0 4 0
5	0	7	8
0 0 4 0	0 0 4 5	0 0 6 6	0 0 2 2
9	10	11	12
0 0 0 2	0 0 0 4	0 0 0 2	0 0 0 7
13	14	15	16
0 0 0 3	0 0 0 2	0 0 0 0	0 0 0 0
17	18	19	20
0 0 0 7 5	0 0 0 7 5	0 0 0 5	0 0 0 5
25	26	27	28
0 0 0 7 5	0 0 0 7 5	0 0 0 5	0 0 0 5
33	34	35	36
0 0 0 1	0 0 0 4	0 0 0 8	0 0 0 8
41	42	43	44
0 0 0 4	0 0 0 4	0 0 0 5	0 0 0 5
48	49	50	51
0 0 0 4	0 0 0 4	0 0 0 5	0 0 0 5
57	58	59	60
0 0 0 9	0 0 0 9	0 0 0 9	0 0 0 9
65	66	67	68
0 0 0 9	0 0 0 9	0 0 0 5	0 0 0 5
73	74	75	76
0 0 0 9	0 0 0 9	0 0 0 5	0 0 0 5

PRADL

1	2	3	4
0 0 8 9	0 0 6 3	0 0 9 0	0 0 4 0
5	6	7	8
0 0 4 0	0 0 4 5	0 0 6 6	0 0 2 2
9	10	11	12
0 0 0 3	0 0 0 5	0 0 0 5	0 0 0 5
15	16	17	18
0 0 0 5	0 0 0 5	0 0 0 5	0 0 0 5
22	23	24	25
0 0 0 7 5	0 0 0 7 5	0 0 0 5	0 0 0 5
24	25	26	27
0 0 0 7 5	0 0 0 5	0 0 0 5	0 0 0 5
31	32	33	34
0 0 0 7 5	0 0 0 5	0 0 0 5	0 0 0 5
37	38	39	40
0 0 0 7 5	0 0 0 7 5	0 0 0 5	0 0 0 5
44	45	46	47
0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0
48	49	50	51
0 0 3 3	0 0 4 6	0 0 3 7	0 0 4 0
52	53	54	55
0 0 3 6	0 0 3 8	0 0 4 0	0 0 4 2

SÜDLICHER MERID:STAND

1	2	3	4
0 0 8 9	0 0 6 3	0 0 9 0	0 0 4 0
5	6	7	8
0 0 4 0	0 0 4 5	0 0 6 6	0 0 2 2
9	10	11	12
0 0 0 2	0 0 0 2	0 0 0 2	0 0 0 1
13	14	15	16
0 0 0 2	0 0 0 2	0 0 0 0	0 0 0 0
17	18	19	20
0 0 0 2	0 0 0 2	0 0 0 5	0 0 0 5
25	26	27	28
0 0 0 2	0 0 0 2	0 0 0 8	0 0 0 8
33	34	35	36
0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 0 8	0 0 0 8
41	42	43	44
0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 2	0 0 0 8
49	50	51	52
0 0 3 3	0 0 4 6	0 0 3 7	0 0 4 0
57	58	59	60
0 0 3 6	0 0 3 8	0 0 4 0	0 0 4 2

NÖRDLICHER MERID:STAND

1	2	3	4
0 0 8 9	0 0 6 3	0 0 9 0	0 0 4 0
5	6	7	8
0 0 4 0	0 0 4 5	0 0 6 6	0 0 2 2
9	10	11	12
0 0 0 3	0 0 0 5	0 0 0 5	0 0 0 5
15	16	17	18
0 0 0 5	0 0 0 5	0 0 0 5	0 0 0 5
22	23	24	25
0 0 0 7 5	0 0 0 7 5	0 0 0 5	0 0 0 5
24	25	26	27
0 0 0 7 5	0 0 0 5	0 0 0 5	0 0 0 5
31	32	33	34
0 0 0 7 5	0 0 0 5	0 0 0 5	0 0 0 5
37	38	39	40
0 0 0 7 5	0 0 0 7 5	0 0 0 5	0 0 0 5
44	45	46	47
0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0
48	49	50	51
0 0 3 3	0 0 4 6	0 0 3 7	0 0 4 0
57	58	59	60
0 0 3 6	0 0 3 8	0 0 4 0	0 0 4 2

Digitized by the Internet Archive
in cooperation with the
Biodiversity Heritage Library / http://www.biodiversitylibrary.org

II & III-te ABTHEILUNG.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.5 6.5	0.4 5.0	0.4 4.0	0.5 5.0	0.5 9.0	0.6 9.0	0.6 0.0	0.6 0.0	0.6 0.0	0.6 0.0	0.6 5.5	0.6 9.0
15	16	15	16	17	16	19	20	21	22	25	26
0.6 0.0	0.4 5.0	0.7 1.0	0.9 4.0	0.6 2.5	0.8 7.0	III	0.6 0.0	0.9 0.0	1.0 1.0	0.8 2.0	0.7 4.0
25	26	25	28	29	50	51	52	53	54	55	56
0.7 5.9	0.4 2.2	0.4 9.0	0.6 6.8	0.3 2.0	0.6 5.0	0.9 2.5	0.9 0.0	0.9 2.0	0.9 6.0	0.8 9.0	0.6 2.0
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
0.8 9.0	0.6 9.0	0.5 5.0	0.6 5.0	0.2 5.0	0.7 4.0	0.8 0.0	0.8 0.0	0.8 0.0	0.7 2.0	0.5 1.0	0.4 0.0
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
0.6 3.6	0.8 5.0	0.9 2.0	0.8 9.5	0.2 5.0	0.2 5.0	0.1 1.0	0.1 1.0	0.5 0.0	0.2 1.0	0.1 3.0	0.1 1.0
57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68
0.4 2.0	0.6 4.0	0.4 5.0	0.4 0.0	0.1 2.0	0.1 5.7	0.1 2.0	0.1 2.0	0.6 5.0	0.2 2.5	0.0 5.0	0.0 2.5
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
0.2 0.0	0.5 5.0	0.4 5.0	0.1 0.0	0.0 4.0	0.0 4.0	0.0 2.0	0.0 2.0	0.0 2.0	0.0 5.0	0.1 5.5	0.2 0.0
75	76	75	76	75	76	77	78	79	80	81	82
0.0 9.0	0.0 6.0	0.0 2.5	0.0 2.0	0.5 7	58	59	60	61	62	63	64
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
0.4 6.0	0.1 6.0	0.2 0.0	0.2 3.0	0.0 5.1	0.0 5.0	0.0 4.0	0.0 4.0	0.4 6.5	0.4 6.5	0.5 7.0	0.5 7.0
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
0.2 8.6	0.5 0.0	0.2 8.0	0.2 0.0	0.0 5.5	0.0 5.5	0.0 4.0	0.0 4.0	0.6 6.7	0.7 6.5	0.8 4.6	0.8 0.5
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
0.6 5.0	0.6 2.0	0.7 2.0	0.3 7.0	0.5 5.0	0.2 0.0	0.9 4.2	0.3 7.0	0.0 0.0	1.0 0.5	1.1 1.7	1.0 0.0
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
0.6 5.0	0.9 0.8	0.9 2.0	0.7 1.5	0.5 1.5	0.2 2.0	0.2 2.0	0.5 5.0	0.6 0.0	1.0 5.0	1.0 0.5	1.0 5.0
124	122	125	124	125	120	127	128	129	130	131	132
0.6 5.0	0.9 0.6	0.6 6.0	0.5 8.0	0.2 5.5	0.4 5.0	0.4 0.0	0.4 0.0	0.5 3.0	0.9 6.0	1.0 3.0	1.0 4.0
135	135	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144
0.9 4.0	0.8 5.0	0.7 4.0	0.2 2.0	0.4 6.0	0.5 0.0	0.6 5.0	0.2 5.0	0.6 0.0	0.9 4.0	0.9 1.0	0.8 4.0

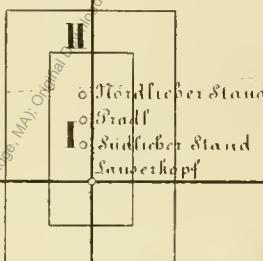
0° 500° 1000° 1500° 2000° 4000° 6000°

Generalstab's Karte
Nr. 5

9184

N^{te} ABTHEILUNG.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1760	1560	1150	2100	1850	6640	6960	1020	6090	8250	2110	2350	2650	1940	2000	2050		
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32		
1960	0750	3280	1640	1200	1020	1500	1400	0960	9740	2370	2050	2836	1800	1450	1640		
55	54	55	56	57	N	59	40	41	42	43	44	45	46	47	48		
1980	2140	1680	1200	6960	1450	2040	2400	2000	1660	2540	2820	2150	2400	2560	2660		
49	50	B	A	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	
5630	3460	2050	1050	2240	1040	5410	5056	2950	2895	2670	2950	2400	1350	1890	1740		
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80		
24550	2550	2550	1950	1800	2570	3045	3450	3650	3650	3250	5005	5270	2030	0000	0200		
31	32	33	34	35													
5060	2754	1920	2020	2050													
91	92	93	94	95													
1020	2250	1640	0950	2880													
101	102	103	104	105													
0430	0590	0500	1200	1420													
111	112	113	114	115													
2000	3141	2520	0980	0100													
121	122	123	124	125													
5400	5560	5184	2288	0698													
151	152	153	154	155													
5610	5240	2356	2650	1500													
141	142	143	144	145													
5754	5574	2000	5458	2640													
151	152	153	154	155													
5250	5550	2680	0510	3228	2532	1950	2180	1108	1610	2650	5380	4590	5810	4080	2570		
161	168	169	170	171													
4650	4290	4050	5010	5784	2660	2896	2660	2664	2120	5240	2680	4550	4250	2900	4120		
185	186	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198		
5620	4900	4110	5680	2970	3400	5100	2120	2900	1900	2870	4550	5590	2860	2450	5880		
199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214		
4120	4520	5080	5590	5810	4050	5680	5800	2156	2052	5150	5300	4900	5690	4150	5150		
215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230		
4260	4690	5120	5010	4070	5260	5690	5120	2170	2600	3410	5280	5950	4220	4530	4650		



Digitized by the Harvard University Library

9184

9185

0° 200' 400' 600' 800' 1000' 1200' 1400' 1600' 1800' 2000' 2200' 2400' 2600' 2800' 3000' 3200' 3400' 3600' 3800' 4000' 4200' 4400' 4600' 4800' 5000' 5200' 5400' 5600' 5800' 6000' 6200' 6400' 6600' 6800' 7000' 7200' 7400' 7600' 7800' 8000' 8200' 8400' 8600' 8800' 9000' 9200' 9400' 9600' 9800' 10000' 10200' 10400' 10600' 10800' 11000' 11200' 11400' 11600' 11800' 12000' 12200' 12400' 12600' 12800' 13000' 13200' 13400' 13600' 13800' 14000' 14200' 14400' 14600' 14800' 15000' 15200' 15400' 15600' 15800' 16000' 16200' 16400' 16600' 16800' 17000' 17200' 17400' 17600' 17800' 18000' 18200' 18400' 18600' 18800' 19000' 19200' 19400' 19600' 19800' 20000' 20200' 20400' 20600' 20800' 21000' 21200' 21400' 21600' 21800' 22000' 22200' 22400' 22600' 22800' 23000' 23200' 23400' 23600' 23800' 24000' 24200' 24400' 24600' 24800' 25000' 25200' 25400' 25600' 25800' 26000' 26200' 26400' 26600' 26800' 27000' 27200' 27400' 27600' 27800' 28000' 28200' 28400' 28600' 28800' 29000' 29200' 29400' 29600' 29800' 30000' 30200' 30400' 30600' 30800' 31000' 31200' 31400' 31600' 31800' 32000' 32200' 32400' 32600' 32800' 33000' 33200' 33400' 33600' 33800' 34000' 34200' 34400' 34600' 34800' 35000' 35200' 35400' 35600' 35800' 36000' 36200' 36400' 36600' 36800' 37000' 37200' 37400' 37600' 37800' 38000' 38200' 38400' 38600' 38800' 39000' 39200' 39400' 39600' 39800' 40000' 40200' 40400' 40600' 40800' 41000' 41200' 41400' 41600' 41800' 42000' 42200' 42400' 42600' 42800' 43000' 43200' 43400' 43600' 43800' 44000' 44200' 44400' 44600' 44800' 45000' 45200' 45400' 45600' 45800' 46000' 46200' 46400' 46600' 46800' 47000' 47200' 47400' 47600' 47800' 48000' 48200' 48400' 48600' 48800' 49000' 49200' 49400' 49600' 49800' 50000' 50200' 50400' 50600' 50800' 51000' 51200' 51400' 51600' 51800' 52000' 52200' 52400' 52600' 52800' 53000' 53200' 53400' 53600' 53800' 54000' 54200' 54400' 54600' 54800' 55000' 55200' 55400' 55600' 55800' 56000' 56200' 56400' 56600' 56800' 57000' 57200' 57400' 57600' 57800' 58000' 58200' 58400' 58600' 58800' 59000' 59200' 59400' 59600' 59800' 60000' 60200' 60400' 60600' 60800' 61000' 61200' 61400' 61600' 61800' 62000' 62200' 62400' 62600' 62800' 63000' 63200' 63400' 63600' 63800' 64000' 64200' 64400' 64600' 64800' 65000' 65200' 65400' 65600' 65800' 66000' 66200' 66400' 66600' 66800' 67000' 67200' 67400' 67600' 67800' 68000' 68200' 68400' 68600' 68800' 69000' 69200' 69400' 69600' 69800' 70000' 70200' 70400' 70600' 70800' 71000' 71200' 71400' 71600' 71800' 72000' 72200' 72400' 72600' 72800' 73000' 73200' 73400' 73600' 73800' 74000' 74200' 74400' 74600' 74800' 75000' 75200' 75400' 75600' 75800' 76000' 76200' 76400' 76600' 76800' 77000' 77200' 77400' 77600' 77800' 78000' 78200' 78400' 78600' 78800' 79000' 79200' 79400' 79600' 79800' 80000' 80200' 80400' 80600' 80800' 81000' 81200' 81400' 81600' 81800' 82000' 82200' 82400' 82600' 82800' 83000' 83200' 83400' 83600' 83800' 84000' 84200' 84400' 84600' 84800' 85000' 85200' 85400' 85600' 85800' 86000' 86200' 86400' 86600' 86800' 87000' 87200' 87400' 87600' 87800' 88000' 88200' 88400' 88600' 88800' 89000' 89200' 89400' 89600' 89800' 90000' 90200' 90400' 90600' 90800' 91000' 91200' 91400' 91600' 91800' 92000' 92200' 92400' 92600' 92800' 93000' 93200' 93400' 93600' 93800' 94000' 94200' 94400' 94600' 94800' 95000' 95200' 95400' 95600' 95800' 96000' 96200' 96400' 96600' 96800' 97000' 97200' 97400' 97600' 97800' 98000' 98200' 98400' 98600' 98800' 99000' 99200' 99400' 99600' 99800' 100000' 100200' 100400' 100600' 100800' 101000' 101200' 101400' 101600' 101800' 102000' 102200' 102400' 102600' 102800' 103000' 103200' 103400' 103600' 103800' 104000' 104200' 104400' 104600' 104800' 105000' 105200' 105400' 105600' 105800' 106000' 106200' 106400' 106600' 106800' 107000' 107200' 107400' 107600' 107800' 108000' 108200' 108400' 108600' 108800' 109000' 109200' 109400' 109600' 109800' 110000' 110200' 110400' 110600' 110800' 111000' 111200' 111400' 111600' 111800' 112000' 112200' 112400' 112600' 112800' 113000' 113200' 113400' 113600' 113800' 114000' 114200' 114400' 114600' 114800' 115000' 115200' 115400' 115600' 115800' 116000' 116200' 116400' 116600' 116800' 117000' 117200' 117400' 117600' 117800' 118000' 118200' 118400' 118600' 118800' 119000' 119200' 119400' 119600' 119800' 120000' 120200' 120400' 120600' 120800' 121000' 121200' 121400' 121600' 121800' 122000' 122200' 122400' 122600' 122800' 123000' 123200' 123400' 123600' 123800' 124000' 124200' 124400' 124600' 124800' 125000' 125200' 125400' 125600' 125800' 126000' 126200' 126400' 126600' 126800' 127000' 127200' 127400' 127600' 127800' 128000' 128200' 128400' 128600' 128800' 129000' 129200' 129400' 129600' 129800' 130000' 130200' 130400' 130600' 130800' 131000' 131200' 131400' 131600' 131800' 132000' 132200' 132400' 132600' 132800' 133000' 133200' 133400' 133600' 133800' 134000' 134200' 134400' 134600' 134800' 135000' 135200' 135400' 135600' 135800' 136000' 136200' 136400' 136600' 136800' 137000' 137200' 137400' 137600' 137800' 138000' 138200' 138400' 138600' 138800' 139000' 139200' 139400' 139600' 139800' 140000' 140200' 140400' 140600' 140800' 141000' 141200' 141400' 141600' 141800' 142000' 142200' 142400' 142600' 142800' 143000' 143200' 143400' 143600' 143800' 144000' 144200' 144400' 144600' 144800' 145000' 145200' 145400' 145600' 145800' 146000' 146200' 146400' 146600' 146800' 147000' 147200' 147400' 147600' 147800' 148000' 148200' 148400' 148600' 148800' 149000' 149200' 149400' 149600' 149800' 150000' 150200' 150400' 150600' 150800' 151000' 151200' 151400' 151600' 151800' 152000' 152200' 152400' 152600' 152800' 153000' 153200' 153400' 153600' 153800' 154000' 154200' 154400' 154600' 154800' 155000' 155200' 155400' 155600' 155800' 156000' 156200' 156400' 156600' 156800' 157000' 157200' 157400' 157600' 157800' 158000' 158200' 158400' 158600' 158800' 159000' 159200' 159400' 159600' 159800' 160000' 160200' 160400' 160600' 160800' 161000' 161200' 161400' 161600' 161800' 162000' 162200' 162400' 162600' 162800' 163000' 163200' 163400' 163600' 163800' 164000' 164200' 164400' 164600' 164800' 165000' 165200' 165400' 165600' 165800' 166000' 166200' 166400' 166600' 166800' 167000' 167200' 167400' 167600' 167800' 168000' 168200' 168400' 168600' 168800' 169000' 169200' 169400' 169600' 169800' 170000' 170200' 170400' 170600' 170800' 171000' 171200' 171400' 171600' 171800' 172000' 172200' 172400' 172600' 172800' 173000