ÜBER

DIE FLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG

MIT ZUGRUNDELEGUNG EINES MIT BELIEBIGEN AXENWINKELN VERSEHENEN COORDINATENSYSTEMS

NEBST EINER

EINLEITUNG AUS DER ANALITISCHEN GEOMETRIE IM RAUME,

VON

LORENZ ŻMURKO,

K. K. PROF. DER MATHEMATIK AN DER TECHNISCHEN AKADEMIE IN LEMBERG, UND THÄTIGEM MITGLIEDE DER GALIZISCHEN LANDWIRTHSCHAFTS-GESELLSCHAFT

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEM.-NATURW. CLASSE AM 30. NOVEMBER 1865.

EINLEITUNG.

Einige Eigenschaften eines schiefwinkeligen Coordinatensystems.

Ein Axensystem $[Ox, Oy, Oz]$ mit den Axenwinkeln: $yOz = \alpha$, $zOx = \beta$, $xOy = \gamma$, und den von je zwei Coordinatenebenen eingeschlossenen Winkeln: $[zx, xy] = a$, $[xy, yz] = b$; $[yz, zx] = c$ (1) bietet ein sphärisches Dreieck dar, dessen Elemente folgende für uns wichtige Relationen eingehen:

Nach Einführung der Bezeichnungen:

$$A = \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma;\quad B = \cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha;\quad C = \cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta;$$
$$M = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \tag{2}$$

erhält man:

$$\cos a = \frac{A}{\sin\beta\sin\gamma};\quad \cos b = \frac{B}{\sin\gamma\sin\alpha};\quad \cos c = \frac{C}{\sin\alpha\sin\beta}$$
$$\sin a = \frac{\sqrt{M}}{\sin\beta\sin\gamma};\quad \sin b = \frac{\sqrt{M}}{\sin\gamma\sin\alpha};\quad \sin c = \frac{\sqrt{M}}{\sin\alpha\sin\beta} \tag{3}$$
$$\operatorname{tang} a = \frac{\sqrt{M}}{A};\quad \operatorname{tang} b = \frac{\sqrt{M}}{B};\quad \operatorname{tang} c = \frac{\sqrt{M}}{C};$$

ferner lassen sich sehr leicht folgende Relationen bewahrheiten:

$$M = \sin^2\alpha - B\cos\beta - C\cos\gamma = \sin^2\beta - C\cos\gamma - A\cos\alpha = \sin^2\gamma - A\cos\alpha - B\cos\beta.$$

(4)
$$M=\frac{BC+A\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{CA+B\sin^2\beta}{\cos\beta}=\frac{AB+C\sin^2\gamma}{\cos\gamma}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{B+C\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{C+B\cos\alpha}{\cos\gamma}$$

$$\sin^2\beta=\frac{C+A\cos\beta}{\cos\gamma}=\frac{A+C\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$\sin^2\gamma=\frac{A+B\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{B+A\cos\gamma}{\cos\beta},$$

(5) oder

$$\sin^2\alpha\cos\beta-B-C\cos\alpha=\sin^2\alpha\cos\gamma-C-B\cos\alpha=0$$

$$\sin^2\beta\cos\gamma-C-A\cos\beta=\sin^2\beta\cos\alpha-A-C\cos\beta=0$$

$$\sin^2\gamma\cos\alpha-A-B\cos\gamma=\sin^2\gamma\cos\beta-B-A\cos\gamma=0.$$

Von den Bestimmungsarten eines Punktes im Raume.

Von den Coordinaten eines auf ein in (1) beschriebenes Axensystem bezogenen Punktes, wollen wir hier hauptsächlich zwei Sorten unterscheiden:

I. Die ersteren erhalten wir, wenn wir durch den gegebenen Punkt m drei Ebenen $E_1 // yOz$; $E_2 // zOx$; $E_3 // xOy$ legen, und die hiebei auf den Axen Ox, Oy, Oz sich ergebenden Durchschnittspunkte p_1, p_2, p_3 als Endpunkte der vom Ursprunge auslaufenden Axensegmente $x=Op_1$, $y=Op_2$, $z=Op_3$ charakterisiren.

(6) Die so erhaltenen Coordinaten xyz nennen wir Parallelcoordinaten des Punktes m, oder schlechtweg Coordinaten dieses Punktes. Sie bilden die in den Richtungen Ox, Oy, Oz genommenen Distanzen des Punktes m von den Ebenen yOz, zOx, xOy.

Aus den Längen xyz kann man die Lage des Punktes m auf mehrere Arten bestimmen:

a) Ein im Ursprunge liegender Punkt bewege sich dem Vorzeichen des x gemäss längs der Axe Ox bis zum Endpunkte p_1; von da aus bewege er sich dem Vorzeichen von y gemäss in einer zu Oy parallelen Richtung um die Länge $=y$; von dem so erreichten Orte bewege er sich dem Vorzeichen von z gemäss in der zu Oz parallelen Richtung um die Länge $=z$, um so in die Lage des durch xyz bestimmten Punktes zu gelangen.

b) Eben so wird man durch folgende Bewegung vom Ursprunge aus den Punkt auf fünf verschiedene Arten erreichen können, wenn man nach einander in der successiven Verwendung der gegebenen Coordinaten die Anordnungen: xzy; yxz; zxy; yzx; zyx beobachtet.

c) Man lege durch die Endpunkte von $Op_1=x$; $Op_2=y$; $Op_3=z$ die Ebenen: $E_1 // y0z$; $E_2 // z0x$; $E_3 // x0y$, und erhält den verlangten Punkt als Durchschnitt dieser drei Ebenen.

Die vom Ursprunge bis zum Punkte m reichende Länge $=r$ heisst der Fahrstrahl, und bildet mit jeder der Coordinatengruppen, deren Sinn und Verwendung in *a)* und *b)* beschrieben wurde, ein geschlossenes Viereck mit den entsprechend angeordneten Seiten $(xyzr)$.

II. Die Coordinaten der zweiten Art erhält man, wenn man durch den gegebenen Punkt m drei Ebenen $\dot{E}_1 \perp Ox$, $\dot{E}_2 \perp Oy$, $\dot{E}_3 \perp Oz$ legt, und die sich hiebei ergebenden Punkte $\dot{p}_1\dot{p}_2\dot{p}_3$ dadurch kennzeichnet, dass man dieselben als Endpunkte der Axensegmente

(7) $\dot{x}=O\dot{p}_1$, $\dot{y}=O\dot{p}_2$, $\dot{z}=O\dot{p}_3$ betrachtet. Der Übergang von den gegebenen $\dot{x}\dot{y}\dot{z}$ zum entsprechenden Punkte m ist einleuchtend.

Die Coordinaten dieser Art heissen orthogonale Coordinaten und bilden die orthogonale primäre, secundäre, tertiäre Componente des zu m gehörigen Fahrstrahles r in Bezug auf die Axen Ox, Oy, Oz.

Bildet der zum Punkte m führende Fahrstrahl $0m = r$ mit den Axen die Winkel $mOx = \lambda$, $mOy = \mu$, $mOz = \nu$, so ist es klar, dass Messungszahlen, welche aus der Messung der Coordinaten $\dot{x}\dot{y}\dot{z}$ durch die zugehörige Fahrstrahllänge $= r$ hervorgehen, die Cosinuszahlen der Winkel λ, μ, ν vorstellen, und somit zu den Gleichungen

$$\frac{\dot{x}}{\cos\lambda} = \frac{\dot{y}}{\cos\mu} = \frac{\dot{z}}{\cos\nu} = r \tag{8}$$

die Grundlage bilden.

In analoger Weise vorgehend, werden wir die Messungszahlen, welche wir durch $(x:r)$, $(y:r)$, $(z:r)$ andeuten, die schiefen Cosinuse des Winkelsystems λ, μ, ν nennen, und der einfacheren Schreibweise wegen durch k_x, k_y, k_z bezeichnen, Veranlassung gebend zu folgenden Relationen:

$$\begin{gathered} \frac{x}{k_x} = \frac{y}{k_y} = \frac{z}{k_z} = r \\ x = rk_x;\ y = rk_y;\ z = rk_z \\ k_x = (x:r);\ k_y = (y:r);\ k_x = (z:r). \end{gathered} \tag{9}$$

Hat man zwei Punkte im Raume, und zwar den Punkt m mit den Coordinaten $[xyz]$; den Punkt m' mit den Coordinaten $[x'y'z']$; die in der Richtung von m gegen m' hin aufgefasste Distanz $= \delta$ dieser Punkte, so ist es sehr leicht, die Parallelcomponenten = Parallelprojectionen von δ in Bezug auf die Axen Ox, Oy, Oz, zu bestimmen.

Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} &\text{die primäre Componente von } \delta = p_1p'_1 = Op'_1 - Op_1 = x' - x, \\ &\quad \text{„ secundäre „ „ } \delta = p_2p'_2 = Op'_2 - Op_2 = y' - y, \\ &\quad \text{„ tertiäre „ „ } \delta = p_3p'_3 = Op'_3 - Op_3 = z' - z. \end{aligned} \tag{10}$$

Man sieht wohl ein, dass eine parallele Verschiebung des Fahrstrahls $\delta = mm'$ im Raume zwar eine Änderung der Lage von m und m', hiemit auch eine entsprechende Änderung der Coordinaten xyz und $x'y'z'$ bewirken wird; dass aber diese Verschiebung auf die Längen von δ und seiner Componenten $p_1p'_1$, $p_2p'_2$, $p_3p'_3$ gar keinen Einfluss auszuüben vermag.

Gelangt in Folge einer parallelen Verschiebung der Punkt m in den Ursprung O, der Punkt m' in die Lage m'' mit den Coordinaten $x''y''z''$ und den entsprechenden Axenpunkten p''_1, p''_2, p''_3, so müssen wir dem Vorhergehenden gemäss folgende Gleichungen einräumen:

$$\begin{aligned} x'' &= Op''_1 = p_1p'_1 = (x' - x) = \delta k_x \\ y'' &= Op''_2 = p_2p'_2 = (y' - y) = \delta k_y \\ z'' &= Op''_2 = p_3p'_3 = (z' - z) = \delta k_z \end{aligned} \tag{11}$$

sobald man die schiefen Cosinuszahlen für die Richtung $Om''//mm'$ mit k_x, k_y, k_z bezeichnet.

Man erhält auch:

$$\frac{x' - r}{k_x} = \frac{y' - y}{k_y} = \frac{z' - z}{k_z} = \delta. \tag{12}$$

Die schiefen Cosinuszahlen stellen demgemäss die Parallelcomponenten der in der Richtung $Om''//mm'$ abgeschnittenen Einheitslänge.

Wenn man mittelst einer beliebigen Messeinheit die Zahlen k_x, k_y, k_z durch Längen darstellt, auf den Axen Ox, Oy, Oz die entsprechenden Segmente abschneidet, und nach (6) *a), b), c)* den zugehörigen Punkt P bestimmt, so erhält man die Richtung des Fahrstrahles $OP//mm'$.

In diesem Sinne wollen wir die Cosinuse k_x, k_y, k_z von nun an Einheitscomponenten = Richtungscomponenten = Richtungsfactoren = Richtungscoëfficienten nennen.

In vollkommen übereinstimmender Weise vorgehend, erhalten wir bezüglich der zweiten Gattung von Coordinaten der Punkte m und m' folgende Gleichungen:

(13) $$\frac{\dot{x}'-\dot{x}}{\cos\lambda} = \frac{\dot{y}'-\dot{y}}{\cos\mu} = \frac{\dot{z}'-\dot{z}'}{\cos\nu} = \delta$$

sobald man annimmt, dass die Linie $Om''//mm'$ mit den Axen Ox, Oy, Oz die Winkel λ, μ, ν einschliesst.

Ein vom Ursprunge ausgehender Strahl L sei in Bezug auf seine Richtung durch $(\lambda\mu\nu)$ oder $(k_xk_yk_z)$ gegeben; ein in L liegender Punkt m habe zu Coordinaten $(\dot{x}\dot{y}\dot{z})$ oder (xyz). In der Ebene E, welche durch m geht und auf dem Strahle L senkrecht steht, denken wir uns einen Punkt m' mit den Coordinaten $(x'y'z')$ oder $(\dot{x}'\dot{y}'\dot{z}')$, so erhalten wir ein Dreieck Omm', welches bei m rechtwinkelig ist, und die Seiten $Om = r$, $Om' = r'$, $mm' = \delta$ besitzt. Die den Strahl Om' in sich enthaltende Gerade L' sei in Bezug auf ihre Richtung durch $(\lambda'\mu'\nu')$ oder $(k'_xk'_yk'_z)$ bestimmt.

Aus dem Dreieck Omm' erhält man einerseits:

(14) $$Om = Om' \cos(LL') \text{ oder } r = r' \cos(LL').$$

Anderseits kann die Seite $Om = r$ als Schlussseite eines Fünfeckes angesehen werden, welches im Sinne (6) *a)* aus den Seiten $[x'y'z'\delta r]$ aufgebaut ist. Projicirt man die Seiten $x'y'z'\delta$ auf die Schlussseite $Om = r$, so erhält man:

(15) $$r = x'\cos(xL) + y'\cos(yL) + z'\cos(zL) + \delta\cos(\delta r) = x'\cos\lambda + y'\cos\mu + z'\cos\nu + \delta\cos\tfrac{1}{2}\pi.$$

Aus der Vergleichung von (14) und (15) hat man:

$$r'\cos(LL') = x'\cos\lambda + y'\cos\mu + z'\cos\nu$$

$$\cos(LL') = \frac{x'}{r'}\cos\lambda + \frac{y'}{r'}\cos\mu + \frac{z'}{r'}\cos\nu$$

hiemit

(16) $$\cos(LL') = k'_x\cos\lambda + k'_y\cos\mu + k'_z\cos\nu.$$

Auch ist:

(17) $$x'\cos\lambda + y'\cos\mu + z'\cos\nu = r.$$

Für zwei Strahlen L' und L würde man wie in (16) finden:

(18) $$\cos(L'L) = k_x\cos\lambda' + k_y\cos\mu' + k_z\cos\nu',$$

hiemit

(19) $$k'_x\cos\lambda + k'_y\cos\mu + k'_z\cos\nu = k_x\cos\lambda' + k_y\cos\mu' + k_z\cos\nu'.$$

Fällt der Strahl L' in die Axe Ox, so hat man $\lambda' = 0$, $\mu' = \gamma$, $\nu' = \beta$, $k'_x = 1$, $k'_y = k'_z = 0$, daher aus (19):

$$\cos\lambda = k_x + k_y \cos\gamma + k_z \cos\beta,$$

eben so

$$\cos\mu = k_y + k_z \cos\alpha + k_x \cos\gamma \qquad (20)$$
$$\cos\nu = k_z + k_x \cos\beta + k_y \cos\alpha.$$

Aus (20) findet man mit Rücksicht auf die Relation (4) und (5):

$$\begin{aligned} Mk_x &= \sin^2\alpha \cos\lambda - C\cos\mu - B\cos\nu \\ Mk_y &= \sin^2\beta\ \mathrm{coc}\ \mu - A\cos\nu - C\cos\lambda \\ Mk_z &= \sin^2\gamma \cos\nu - B\cos\lambda - A\cos\mu. \end{aligned} \qquad (21)$$

Ist in (18) $L \| L'$, so erhält man:

$$k_x \cos\lambda + k_y \cos\mu + k_z \cos\nu = 1. \qquad (22)$$

Wenn man die Gleichung (20), (21) Glied für Glied mit r multiplicirt, und dann die Producte rk_x, rk_y, rk_z, $r\cos\lambda$, $r\cos\mu$, $r\cos\nu$ beziehungsweise durch x, y, z; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ersetzt, so erhält man folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y\cos\gamma + z\cos\beta = \lfloor x\rceil = \lfloor (x)yz\rceil \\ \dot{y} &= y + z\cos\alpha + x\cos\gamma = \lfloor y\rceil = \lfloor x(y)z\rceil \\ \dot{z} &= z + x\cos\beta + y\cos\alpha = \lfloor z\rceil = \lfloor xy(z)\rceil; \end{aligned} \qquad (23)$$

$$\begin{aligned} Mx &= \sin^2\alpha\dot{x} - C\dot{y} - B\dot{z} = (\dot{x}) = ((\dot{x})\dot{y}\dot{z}) \\ My &= \sin^2\beta\dot{y} - A\dot{z} - C\dot{x} = (\dot{y}) = (\dot{x}(\dot{y})\dot{z}) \\ Mz &= \sin^2\gamma\dot{z} - B\dot{x} - A\dot{y} = (\dot{z}) = (\dot{x}\dot{y}(\dot{z})), \end{aligned} \qquad (24)$$

eben so erhält man aus (22), dieselbe beiderseits mit r^2 multiplicirend:

$$r^2 = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}, \qquad (25)$$

hieraus mit Rücksicht auf (23) und (24)

$$r^2 = \lfloor x\rceil x + \lfloor y\rceil y + \lfloor z\rceil z$$

und

$$Mr^2 = (\dot{x})\dot{x} + (\dot{y})\dot{y} + (\dot{z})\dot{z}. \qquad (26)$$

In der Gleichung (17) ist $r = Om$ eine constante Länge vom Strahle L, welcher mit den Axen die Winkel λ, μ, ν einschliesst, und auf der durch m gelegten Ebene E senkrecht seht. Die Entstehungsweise der Gleichung bringt es mit sich, dass sie für jeden in E liegenden Punkt m' erfüllt wird. Dass diese Gleichung durch einen ausserhalb der Ebene E liegenden Punkt σ nicht erfüllt werden kann, überzeugt man sich auf folgende Weise:

Denke man sich durch σ eine zu Oz parallele Gerade gelegt, welche die Ebene E in m'' und die Ebene xOy im Punkte σ'' durchstösst; sind nun $(x''y''z'')$ die Coordinaten des Punktes m'', so erhält man zur Bestimmung des Punktes $\sigma \ldots x = x''$, $y = y''$; $z = \sigma''m'' \pm m''\sigma = (z'' \pm m''\sigma)$ je nachdem der Punkt σ oberhalb oder unterhalb der Ebene E angenommen wurde.

Die Gleichung (17) wird durch den Punkt m'' ganz sicher erfüllt; sollte diese Gleichung auch durch den Punkt σ in Erfüllung gehen, so müssten wir die Coëxistenz folgender zwei Relationen einräumen:

$$r = x''\cos\lambda + y''\cos\mu + z''\cos\nu$$
$$r = x''\cos\lambda + y''\cos\mu + (z'' \pm m''\sigma)\cos\nu$$

was nur dann möglich ist, wenn die Länge $m''\sigma$ eine Nulllänge ist, wenn somit m'' und σ zusammenfallen; wenn schliesslich σ im E zu liegen kommt.

Es ist somit die Gleichung (17) der analytische Ausdruck einer Ebene, welche vom
(27) Anfangspunkte um die Länge $r = 0m$ absteht, und deren Perpendikel L mit den Axen die Winkel λ, μ, ν einschliesst.

Nach (16) oder (18) erhält man den Cosinus des von zwei Strahlen L und L' eingeschlossenen Winkels, wenn man jede schiefe Richtungscomponente des einen Strahles mit der entsprechenden orthogonalen Richtungscomponente des anderen Strahles multiplicirt, und die so erhaltenen Producte addirt.

Aus (20) und (21) ersieht man, wie man die schiefen Richtungscomponenten eines Punktes durch dessen orthogonalen Componenten ausdrücken kann, und umgekehrt.

Die Bedeutung der mit eckiger und runder unterbrochener Klammerfassung angedeuteten Symbole ist aus (23) und (24) genügend zu ersehen; die Bezeichnungsweise mit einzelnen in die Klammerfassungen eingezeichneten Buchstaben ist auf einen Complex von je drei Bauelementen anwendbar, welche bei jedesmaliger Anordung ein Gepräge mit sich führen, vermöge welchem diese Elemente einer bestimmten aus den Axenwinkeln zusammengesetzten Gruppe als entsprechend sich präsentiren. Wären die Elemente $\xi\,\eta\,\zeta$ ihrer Anordnung nach der Gruppe $\alpha\,\beta\,\gamma$ entsprechend, so könnte man schreiben:

$$[\eta] = \eta + \zeta \cos\alpha + \xi \cos\gamma;\quad (\eta) = \sin^2\beta\eta - A\zeta - C\xi.$$

Wenn aber den in Verwendung zu nehmenden Bauelementen das den Winkeln α, β, γ entsprechende Zuständigkeitsgepräge abgeht, so müssen jedesmal alle drei Elemente in die Klammerfassung eingezeichnet werden.

Die Deutung dieser Symbole festhaltend, wird es nicht schwer fallen, folgende Relationen einzusehen:

$$[\eta \pm \eta'] = [\eta] \pm [\eta']$$

und für ein constantes m

(28)
$$[m\eta] = m[\eta]$$

$$\xi[\xi'] + \eta[\eta'] + \zeta[\zeta'] = \xi'[\xi] + \eta'[\eta] + \zeta'[\zeta].$$

Dasselbe gilt auch in Bezug auf die runde Klammerfassung. Wenn die erste Gleichung in (23) beiderseits in runde; dann die erste Gleichung in (24) beiderseits in eckige Klammern gefasst wird, so erhält man:

$$(\dot{x}) = ([x]);\quad M[x] = [(\dot{x})],$$

es ist aber nach (24) und (23)

$$(\dot{x}) = Mx;\quad M[x] = M\dot{x},$$

daher auch

$$([x]) = Mx;\quad [(\dot{x})] = M\dot{x},$$

hiemit schliesslich:

(29)
$$([x]) = [(x)] = Mx,$$

woraus ersichtlich ist, dass beide Klammerfassungen auf einen und denselben Buchstaben successive und in beliebiger Ordnung angebracht und effectuirt, dasselbe leisten, als wenn man diesen Buchstaben mit M multiplicirt hätte.

(30) Sei
$$G = [\alpha\beta\gamma, xyz, \ldots] + [\beta\gamma\alpha, yzx\ldots] + [\gamma\alpha\beta, zxy\ldots]$$

eine Summe von drei auf ähnliche Weise gebauten Gliedern, von denen jedes nachfolgende aus dem vorhergehenden gebildet wird, wenn man die darin einbegriffenen Gruppen von je drei

Elementen einem einfachen in (30) ersichtlichen Permutationsgesetze unterwirft. Der kürzeren Schreibweise wegen wollen wir künftighin von solchen drei Gliedern blos eines hinschreiben, die übrigen zwei hingegen durch das Symbol $+\&$ ersetzen.

Demgemäss ist aus (30)

$$G=[\alpha\beta\gamma,\ xyz\ldots]+\&. \tag{31}$$

Den eben erklärten Klammerfassungen, und der Deutung des Symbols & gemäss, können wir die in (18), (22) und (26) angeführten Resultate folgendermassen hinschreiben:

$$\cos(LL')=k_x\cos\lambda'+\&=k'_x\cos\lambda+\&=k_x[k'_x]+\&=k'_x[k_x]+\&$$

$$\cos(LL')=\frac{(\cos\lambda)\cos\lambda'+\&}{M}=\frac{(\cos\lambda')\cos\lambda+\&}{M}= \tag{32}$$

$$=\left\{k_xk'_x+\cos\alpha(k_yk'_z+k'_yk_z)\right\}+\&=\left[\left\{\cos\lambda\cos\lambda'\sin^2\alpha-A(\cos\mu\cos\nu'+\cos\mu'\cos\nu)\right.+\&\right]:M.$$

Nimmt man $L//L'$, so braucht man in (32) nur die Striche bei r λ,μ,ν wegzulassen, um folgende Relationen zu erhalten:

$$k_x\cos\lambda+\&=\frac{\cos\lambda\ (\cos\lambda)+\&}{M}=k_x[k_x]+\&=1, \tag{33}$$

eben so

$$[k_x^2+2k_yk_z\cos\alpha]+\&=\left\{[\cos^2\lambda\sin^2\alpha-2A\cos\mu\cos\nu]+\&\right\}:M=1,$$

ferner ist:

$$r^2=x^2+y^2+z^2+2\cos\alpha.yz+2\cos\beta.zx+2\cos\gamma.xy=x[x]+\&=[x^2+2\cos\alpha.yz]+\&=$$

$$=[\dot{x}^2\sin^2\alpha+\dot{y}^2\sin^2\beta+\dot{z}^2\sin^2\gamma-2A\dot{y}\dot{z}-2B\dot{z}\dot{x}-2C\dot{x}\dot{y}]:M=[\dot{x}(\dot{x})+\&]:M= \tag{34}$$

$$=[(\dot{x}^2\sin^2\alpha-2A\dot{y}\dot{z})+\&]:M;$$

für zwei Punkte $[x_1y_1z_1]$; $[x_2y_2z_2]$ hat man zur Bestimmung der Richtung ihrer Distanzlinie $=$

$$k_x=[x_2-x_1]:\delta;\quad k_y=[y_2-y_1]:\delta;\quad k_z=[z_2-z_1]:\delta,$$

hiemit nach (33)

$$[(x_2-x_1)[x_2-x_1]+\&]:\delta^2=1; \tag{35}$$

hieraus mit Rücksicht auf (29)

$$\delta^2=(x_2-x_1)[x_2-x_1]+\&=\frac{(\dot{x}_2-\dot{x}_1)}{M}.\frac{[(\dot{x}_2-\dot{x}_1)]}{M}+\&=\frac{(\dot{x}_2-\dot{x}_1)(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+\&}{M}$$

Eben so erhält man für die Punkte $[x'_1y'_1z'_1]$; $[x'_2y'_2z'_2]$

$$k'_x=[x'_2-x'_1]:\delta';\quad k'_y=[y'_2-y'_1]:\delta';\quad k'_z=[z'_2-z'_1]:\delta',$$

hiemit

$$\delta'^2=(x'_2-x'_1)[x'_2-x'_1]+\&=[(\dot{x}'_2-\dot{x}'_2)(\dot{x}'_2-\dot{x}'_1)+\&]:M \tag{36}$$

und

$$\delta\delta'.\cos(\delta,\delta')=(x_2-x_1)[x'_2-x'_1]+\&=(x'_2-x'_1)[x_2-x_1]+\&=$$

$$=\frac{(\dot{x}_2-\dot{x}_1)(\dot{x}'_2-\dot{x}'_1)+\&}{M}=\frac{(\dot{x}'_2-\dot{x}'_1)(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+\&}{M}. \tag{37}$$

Eine aufmerksame Prüfung der mannigfachen Formen der eben aufgestellten Resultate verleiht dem Leser genügende Gelegenheit, um in der Handhabung der von uns adoptirten Symbolik sich die erwünschte Fertigkeit anzueignen.

Analytische Darstellung der Geraden und der Ebene.

Geht die Gerade L durch den gegebenen Punkt m mit den Coordinaten (ξ, η, ζ), in einer durch k_x, k_y, k_z angedeuteten Richtung, so erhält man zur Bestimmung der Coordinaten x, y, z irgend eines in L liegenden Punktes P, die Distanz $mP = r$ setzend, nach (12) folgende Relationen:

(38) $$x = \xi + rk_x; \quad y = \eta + rk_y; \quad z = \zeta + rk_z.$$

Bestimmt man den Werth von r aus der dritten, und führt denselben in die erste und zweite ein, so erhält man:

(39) $$x = \frac{k_x}{k_z} z + \frac{\xi k_z - \zeta k_x}{k_z}; \quad y = \frac{k_y}{k_z} z + \frac{\eta k_z - \zeta k_y}{k_z}.$$

(40) Nimmt man hier $\xi = \mathfrak{a}$, $\eta = \mathfrak{b}$, $\zeta = 0$, und wählt die Zahlen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ so, dass die Proportion $\frac{\mathfrak{A}}{k_x} = \frac{\mathfrak{B}}{k_y} = \frac{\mathfrak{C}}{k_z} = m$ stattfinde, so erhält man aus (39):

(41) $$x = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} z + \mathfrak{a}; \quad y = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} z + \mathfrak{b},$$

also ein System von zwei coëxistenten Gleichungen des ersten Grades, welche für ein beliebig angenommenes z die Werthe der entsprechenden x und y liefern, und sohin auf einen in der verlangten Geraden liegenden Punkt deuten.

Ist also eine Gerade L durch Gleichungen von der Form (41) analytisch dargestellt, so sieht man auf den ersten Blick, dass diese Gerade in dem Punkte ($x = \mathfrak{a}$, $y = \mathfrak{b}$, $z = 0$) die Grundebene xOy durchdringt. Die Richtung von L wird aus der Relation (40) in folgender Weise ermittelt.

Aus (40) ist etwa:

$$k_x = \frac{\mathfrak{A}}{m}, \text{ somit } \lfloor k_x \rceil = \frac{\lfloor \mathfrak{A} \rceil}{m} \text{ und } k_x \lfloor k_x \rceil = \frac{\mathfrak{A}\lfloor \mathfrak{A} \rceil}{m^2};$$

dann ist:

$$k_x \lfloor k_x \rceil + \& = 1 = \{\mathfrak{A}\lfloor \mathfrak{A} \rceil + \mathfrak{B}\lfloor \mathfrak{B} \rceil + \mathfrak{C}\lfloor \mathfrak{C} \rceil\} : m^2$$

und auch

(42) $$m^2 = \mathfrak{A}\lfloor \mathfrak{A} \rceil + \&; \; k_x = \frac{\mathfrak{A}}{m}; \; k_y = \frac{\mathfrak{B}}{m}; \; k_z = \frac{\mathfrak{C}}{m}$$
$$\cos\lambda = \frac{\lfloor \mathfrak{A} \rceil}{m}; \; \cos\mu = \frac{\lfloor \mathfrak{B} \rceil}{m}; \; \cos\nu = \frac{\lfloor \mathfrak{C} \rceil}{m}.$$

Ist eine zweite Gerade L' durch $[x = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}'} z + \mathfrak{a}'; \; y = \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{C}'} z + \mathfrak{b}']$ gegeben, so erhält man nach (16) und (42)

(43) $$\cos(LL') = \frac{\mathfrak{A}\lfloor \mathfrak{A}' \rceil + \&}{mm'} = \frac{\mathfrak{A}'\lfloor \mathfrak{A} \rceil + \&}{mm'} = \frac{\mathfrak{A}'\lfloor \mathfrak{A} \rceil + \mathfrak{B}'\lfloor \mathfrak{B} \rceil + \mathfrak{C}'\lfloor \mathfrak{C} \rceil}{mm'}$$

hier ist wie in (42) $m'^2 = \mathfrak{A}'\lfloor \mathfrak{A}' \rceil + \&$.

Soll $L // L'$ sein, so müsste $k_x = k'_x = \frac{\mathfrak{A}}{m} = \frac{\mathfrak{A}'}{m'}$, somit $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'} = \frac{m}{m'}$ sein, und schliesslich folgende Relationen stattfinden:

(44) $$[L//L'] \ldots . \; \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}'} = \frac{m}{m'} \text{ oder auch } \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}'}; \; \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{C}'}.$$

Aus (43) erhält man für $L \perp L'$ folgende Bedingungsgleichung;

$$[L \perp L'] \ldots\ldots \cos(LL') = 0 = \mathfrak{A}[\mathfrak{A}'] + \& = \mathfrak{A}'[\mathfrak{A}] + \&. \tag{45}$$

Nach (17) ist die Gleichung der Ebene, welche vom Ursprunge den normalen Abstand $= r$ besitzt, und deren Perpendikel mit den Axen $Ox\; Oy\; Oz$ die Wiukel $\lambda\,\mu\,\nu$ einschliesst, folgende:

$$x \cos\lambda + y \cos\mu + z \cos\nu - r = 0. \tag{46}$$

Wählt man die Zahlen a, b, c, d so, dass die Proportionalität

$$\frac{a}{\cos\lambda} = \frac{b}{\cos\mu} = \frac{c}{\cos\nu} = \frac{d}{-r} = m \tag{47}$$

erfüllt wird, so lässt sich die Gleichung (46) auch so schreiben:

$$E \ldots\ldots\; ax + by + cz + d = 0. \tag{48}$$

Aus (47) hat man:

$$m \cos\lambda = a;\; mk_x = \frac{(a)}{M},\; \text{hiemit}\; m^2 k_x \cos\lambda = \frac{a(a)}{M}$$

und auch:

$$m^2[k_x \cos\lambda + \&] = m^2 = [a(a) + b(b) + c(c)] : M.$$

Setzt man hier $a(a) + b(b) + c(c) = \Theta^2$, so erhält man:

$$\begin{gathered} m = \frac{\Theta}{\sqrt{M}};\; k_x = \frac{(a)}{\Theta\sqrt{M}};\; k_y = \frac{(b)}{\Theta\sqrt{M}};\; k_z = \frac{(c)}{\Theta\sqrt{M}} \\ r = \frac{-d\sqrt{M}}{\Theta} \cos\lambda = \frac{a\sqrt{M}}{\Theta};\; \cos\mu = \frac{b\sqrt{M}}{\Theta};\; \cos\nu = \frac{c\sqrt{M}}{\Theta}. \end{gathered} \tag{49}$$

Ist eine zweite Ebene E' durch die Gleichung:

$$E' \ldots\ldots\; a'x + b'y + c'z + d' = 0 \tag{50}$$

gegeben, so erhält man nach (16) und (49):

$$\text{für}\; \Theta'^2 = a'(a') + b'(b') + c'(c') \tag{51}$$

$$\cos(rr') = \cos(EE') = \frac{a(a') + b(b') + c(c')}{\Theta\Theta'} = \frac{a'(a) + \&}{\Theta\Theta'}. \tag{52}$$

Ist die Gerade L durch die Gleichungen (41) gegeben, so erhält man:

$$\cos(rL) = \sin(EL) = \frac{(a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} + c\mathfrak{C})\sqrt{M}}{\sqrt{a(a) + \&}\sqrt{\mathfrak{A}[\mathfrak{A}] + \&}}. \tag{53}$$

Ist aber die Gerade L'' in Bezug auf ihre Richtung durch k''_x, k''_y, k''_z gegeben, so hat man:

$$\sin(EL'') = \frac{(ak''_x + bk''_y + ck''_z)\sqrt{M}}{\sqrt{a(a) + b(b) + c(c)}}. \tag{54}$$

Aus den vorhergehenden Resultaten ersieht man, dass

(55)
für $E // E'$ die Bedingung $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{\Theta}{\Theta'}$;

„ $E \perp E'$ „ „ $a(a') + b(b') + c(c') = a'(a) + \& = 0$

„ $L // E$ „ „ $a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} + c\mathfrak{C} = 0$

„ $L'' // E$ „ „ $ak''_x + bk''_y + ck''_z = 0$

„ $L'' // E$ „ „ $a(\cos\lambda'') + \& = (a) \cos\lambda'' + \& = 0$

„ $(L \perp E)$ „ „ $\frac{\mathfrak{A}}{(a)} = \frac{\mathfrak{B}}{(b)} = \frac{\mathfrak{C}}{(c)}$ oder $\frac{a}{(\mathfrak{A})} = \frac{b}{(\mathfrak{B})} = \frac{c}{(\mathfrak{C})}$;

„ $L'' \perp E$ „ „ $\frac{k''_x}{(a)} = \frac{k''_y}{(b)} = \frac{k''_z}{(c)}$ „ $\frac{a}{\cos\lambda} = \frac{b}{\cos\mu} = \frac{c}{\cos\nu}$;

in Erfüllung gehen muss.

Bezeichnet man mit $[\overleftarrow{xx'}]$ die Distanz des Punktes $(x'y'z')$, vom Punkte (xyz) gemessen in der Richtung vom Punkte $(x'y'z')$ aus, gegen den Punkt (xyz) hin; sind ferner k_x, k_y, k_z die dieser Richtung angehörigen Componenten, so besteht die Relation:

(56) $$\frac{x-x'}{k_x} = \frac{y-y'}{k_y} = \frac{z-z'}{k_z} = [\overleftarrow{xx'}] = r;$$

hieraus ist:

$$x = x' + rk_x; \quad y = y' + rk_y; \quad z = z' + rk_z$$

Ist nun $(x'y'z')$ ein gegebener Punkt, und soll der Punkt (xyz) in der Ebene (48) enthalten sein, so müssen die Werthe aus (56) dieser Gleichung genügen, und man erhält:

$$(ak_x + bk_y + ck_z)r + (ax' + by' + cz' + d) = 0;$$

woraus sich:

(57) $$r = [\overleftarrow{xx'}) = -\frac{ax' + by' + cz' + d}{ak_x + bk_y + ck_z}.$$

ergibt.

Soll die durch $k_x k_y k_z$ angedeutete Richtung zur Ebene (48) perpendikulär sein, so hat man ihre Werthe aus (49) zu entnehmen, und in (57) einzuführen; in diesem Falle erhält man:

(58) $$\left[\overleftarrow{xx'}\right] = -\frac{(ax' + by' + cz' + d)\Theta\sqrt{M}}{a(a) + b(b) + c(c)} = \frac{-\sqrt{M}(ax' + by' + cz' + d)}{[a(a) + \&]^{\frac{1}{2}}}.$$

Nach (58) lässt sich die perpendikuläre Distanz eines gegebenen Punktes $(x'y'z')$ von einer gegebenen Ebene berechnen.

Nach (57) lässt sich die Distanz eines Punktes von einem in der Ebene liegenden Punkt berechnen, bei gegebener Distanzrichtung.

Denken wir uns vom Ursprunge aus drei Richtungen ausgehend, und zwar:

(59)
die Richtung Ox' mit den Richtungscomponenten k_x, k_y, k_z

„ „ Oy' „ „ „ k'_x, k'_y, k'_z

„ „ Oz' „ „ „ k''_x, k''_y, k''_z.

Einen Punkt P können wir erstens durch Aneinanderfügung dreier Axenstücke: $x//Ox$; $y//Oy$; $z//Oz$ nach der in (6) *a), b)* exponirten Methode erreichen; denselben Punkt können wir aber auch erreichen durch Aneinanderfügung dreier anderer Axenstücke:

$$x'//Ox';\ y'//Oy';\ z'//Oz'.$$

Denken wir uns den gebrochenen aus $x'y'z'$ gebauten bis P reichenden Polygonalzug auf die Axe Ox mittelst den zu yOz parallelen Ebenen projicirt, so erhalten wir die entsprechenden Projectionen der Reihe nach durch: $x'k_x$, $y'k'_x$, $z'k''_x$ ausgedrückt, und wissen, dass die Summe derselben geradezu die Länge x geben muss. Demgemäss erhalten wir:

$$x = x'k_x + y'k'_x + z'k''_x$$

und eben so:

$$\begin{aligned} y &= x'k_y + y'k'_y + z'k''_y \\ z &= x'k_z + y'k'_z + z'k''_z. \end{aligned} \tag{60}$$

Diese Gleichungen bilden das sogenannte Transformationsschema, mittelst welchem wir im Stande sind die Bestimmungsstücke eines auf das ursprüngliche Axensystem bezogenen Punktes durch solche Bestimmungsstücke auszudrücken, welche der Punkt erhält, sobald er auf ein neues aus den Richtungen Ox', Oy', Oz' bestehendes Axensystem bezogen wird.

Für ein orthgonales Axensystem hat man:

$$\begin{gathered} \alpha = \beta = \gamma = \tfrac{1}{2}\pi;\ M = 1,\ A = B = C = 0 \\ [x] = (x) = x,\ k_x = \cos\lambda,\ k_y = \cos\mu;\ k_z = \cos\nu. \end{gathered} \tag{61}$$

Es wird überhaupt leicht einzusehen sein, dass aus den in der Einleitung gewonnenen Resultaten, die dem orthogonalen Axensysteme entsprechenden unmittelbar vor das Auge treten, wenn man nur die Positionen in (61) beachtend, in den Formeln die eckigen und runden unterbrochenen Klammerfassungen sich wegdenkt.

Durch zweckmässige übrigens sehr leichte Specialisirung des in dieser Einleitung Vorgetragenen, gelangt man in den Besitz aller der Mittel und Werkzeuge, welche in der analyschen Geometrie in der Ebene wünschenswerth sind.

Über die geometrische Bedeutung einer Gleichung des zweiten Grades zwischen drei Variablen.

§. 1.

Die vollständige Gleichung des zweiten Grades zwischen x, y, z lässt sich in folgender Form schreiben:

(1) $$u_x = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'zx + 2c'xy + 2a''x + 2b''y + 2c''z + d = 0$$

oder

(2) $$u_x = xT_x + yT_y + zT_z + \overset{x}{T} = 0$$

sobald man:

(3) $$\begin{aligned} T_x &= ax + c'y + b'z + a'' \\ T_y &= by + a'z + c'x + b'' \\ T_z &= cz + b'x + a'y + c'' \\ \overset{x}{T} &= a''x + b''y + c''z + d \end{aligned}$$

sein lässt.

Es soll nun die Bedeutung der Gleichung (1) für jede mögliche Zusammensetzung von Werthen der in dieser Gleichung spielenden Coëfficienten bei Zugrundelegung eines beliebigen schiefwinkligen Axensystems erforscht werden.

Vergleiche man das System der Punkte (1) mit dem Verlaufe einer durch den erst später näher zu bestimmenden Punkt (ξ, η, ζ) gelegten Geraden, um zu erfahren, ob und welche Punkte vorhanden sind, welche sowohl der Geraden als auch dem Systeme (1) gleichzeitig angehören. Man findet zu diesem Behufe die Gleichung einer solchen Geraden, deren Richtungscoëfficienten k_x, k_y, k_z, aus den Winkeln λ, μ, ν gebaut sein mögen, in folgender Form:

(4) $$\frac{x-\xi}{k_x} = \frac{y-\eta}{k_y} = \frac{z-\zeta}{k_z} = r,$$

wo r den Abstand vom Standpunkte (ξ, η, ζ) aus bis zu dem in (1) liegenden Punkte andeuten soll. Dieser Umstand liefert uns zur Umstaltung der Gleichung (1) folgendes Schema:

(5) $$x = \xi + rk_x;\; y = \eta + rk_y;\; z = \zeta + rk_z.$$

Die Einführung dieser Werthe in (1) gibt:

(6) $$sr^2 + 2tr + u_\xi = 0$$

sobald man die Werthe der Coëfficienten s, t, u_ξ aus folgenden für die Folge sehr wichtigen symbolischen Bezeichnungen entnimmt, und u_ξ nach (2) und (3) deutet.

(7) $$\begin{aligned} &ak_x + c'k_y + b'k_z = w_x;\quad bk_y + a'k_z + c'k_x = w_y;\quad ck_z + b'k_x + a'k_y = w_z, \\ &a''k_x + b''k_y + c''k_z = q\ ;\quad k_xw_x + k_yw_y + k_zw_z = s \\ &t = w_x\xi + w_y\eta + w_z\zeta + q = T_\xi k_x + T_\eta k_y + T_\zeta k_z \\ &u_\xi = T_\xi\xi + T_\eta\eta + T_\zeta\zeta + \overset{\xi}{T}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_1 &= b'c' - aa'\,;\ \mathfrak{S}_2 = c'a' - bb';\ \mathfrak{S}_3 = a'b' - cc',\\ \sigma_1 &= bc - a'^2\,;\ \sigma_2 = ca - b'^2;\ \sigma_3 = ab - c'^2,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} N &= a\sigma_1 + b'\mathfrak{S}_2 + c'\mathfrak{S}_3 = b\sigma_2 + c'\mathfrak{S}_3 + a'\mathfrak{S}_1 = c\sigma_3 + a'\mathfrak{S}_1 + b'\mathfrak{S}_2,\\ Q_1 &= a''\sigma_1 + b''\mathfrak{S}_3 + c''\mathfrak{S}_2\\ Q_2 &= b''\sigma_2 + c''\mathfrak{S}_1 + a''\mathfrak{S}_3\\ Q_3 &= c''\sigma_3 + a''\mathfrak{S}_2 + b''\mathfrak{S}_1\\ D &= -d + \frac{1}{N}(Q_1a'' + Q_2b'' + Q_3c'').\end{aligned} \tag{9}$$

Aus (6) findet man in der Regel zwei primäre Werthe r_1 und r_2, welche andeuten, dass vom angenommenen Standpunkte $(\xi\eta\zeta)$ aus zwei dem Systeme (1) und (4) gemeinschaftlich angehörige Punkte angetroffen werden, von denen der erste im Endpunkte des Distanzsegmentes r_1, der zweite im Endpunkte des Fahrstrahles r_2 sich befindet. Das gerade, diese zwei Punkte verbindende Segment wird Sehne (chorda) genannt.

Setzt man die Richtung von (4) als bestimmt voraus, so stellt der analytische Ausdruck (10) in (4) für verschiedene Annahmen des Standpunktes $(\xi\eta\zeta)$ im Raume ein Bündel paralleler Geraden vor, von denen jede das System (1) in zwei Punkten begegnend, eine Sehne liefert. Da es uns freisteht jeden einzelnen Standpunkt in der ihm zugehörigen Sehnenrichtung beliebig zu positioniren, so möge über ihn jedesmal so verfügt werden, dass er in die Mitte der ihm zugehörigen Sehne fällt, dass hiemit die der Gleichung (6) genügenden Werthe r_1 und r_2 einander gleich und entgegengesetzt ausfallen.

Die Gleichung (6) muss in diesem Falle eine reine quadratische sein, d. h. es darf in derselben die Grösse r in der ersten Potenz nicht vorkommen.

Von diesem Standpunkte betrachtet zerfällt die Gleichung (6) in folgende zwei:

$$sr^2 + u_\xi = 0 \tag{11}$$

$$t = w_x\xi + w_y\eta + w_z\zeta + q = 0 \tag{12}$$

oder

$$t = T_\xi k_x + T_\eta k_y + T_\zeta k_z = 0. \tag{13}$$

Bei angenommener Sehnenrichtung sind die Grössen k_x, k_y, k_z, w_x, w_y, w_z bekannt, und in (12) erscheinen blos ξ, η, ζ als variabel, und zwar blos in der ersten Potenz. In diesem Falle ist in (12) eine Ebene analytisch bestimmt, welche die sämmtlichen Halbirungspunkte des mit der Richtung k_x, k_y, k_z begabten Sehnensystems beherbergt. Dieser Eigenschaft wegen nennen wir die in (12) dargestellte Ebene eine der Sehnenrichtung (k_x, k_y, k_z) zugehörige Diametralebene; die Richtungen des Sehnensystems und der diesem Systeme zugehörigen Diametralebene heissen in Bezug auf einander conjugirt.

Bezeichnet man die Richtungsbestimmungsstücke der Diametralebene mit $k'_x k'_y k'_z$ gebaut aus λ', μ', ν', so finden wir aus (12) ihre Bestimmung in Folgendem:

$$\frac{k'_x}{(w_x)} = \frac{k'_y}{(w_y)} = \frac{k'_z}{(w_z)} = \frac{1}{\rho M}$$

oder

$$\frac{\cos\lambda'}{w_x} = \frac{\cos\mu'}{w_y} = \frac{\cos\nu'}{w_z} = \frac{M}{\rho} \tag{14}$$

wo

$$\rho^2 = w_x(w_x) + w_y(w_y) + w_z(w_z).$$

Aus diesen Gleichungen findet man:

$$\cos\lambda' w_z - \cos\nu' w_x = \cos\mu' w_z - \cos\nu' w_y = 0$$

oder

(15)
$$(a\cos\nu' - b'\cos\lambda')\frac{k_x}{k_z} + (c'\cos\nu' - a'\cos\lambda')\frac{k_y}{k_z} + (b'\cos\nu' - c'\cos\lambda') = 0$$
$$(c'\cos\nu' - b'\cos\mu')\frac{k_x}{k_z} + (b\cos\nu' - a'\cos\mu')\frac{k_y}{k_z} + (a'\cos\nu' - c\cos\mu') = 0$$

nebst:

$$k_z^2\left[1 + \left(\frac{k_x}{k_z}\right)^2 + \left(\frac{k_y}{k_z}\right)^2 + 2\cos\alpha\frac{k_y}{k_z} + 2\cos\beta\frac{k_x}{k_z} + 2\cos\gamma\frac{k_x}{k_z}\cdot\frac{k_y}{k_z}\right] = 1.$$

Die Gleichungen (15) dienen dazu, um zur Richtung der angenommenen Diametralebene die conjugirte Sehnenrichtung zu finden. Aus den ersten zwei bestimmt man nämlich die Werthe $(k_x : k_z)$ und $(k_y : k_z)$ und erhält durch Einführung derselben in die dritte den Werth von k_z und somit auch die Werthe von k_x und k_y.

Eben so dienen die Gleichungen (14) dazu, um zur angenommenen Sehnenrichtung die ihr conjugirte Diametralebene zu bestimmen. Es kann sich aber ereignen, dass für specielle Werthe der in (1) spielenden Coëfficienten die Gleichungen (15) so beschaffen sind, dass für beliebige Wahl von λ', μ', ν' die Coëfficienten der ersten Gleichung in (15) den entsprechenden Coëfficienten der zweiten Gleichung proportional erscheinen, dass also unabhängig von $\lambda'\mu'\nu'$ folgende Gleichungen stattfinden:

(16)
$$\frac{a\cos\nu' - b\cos\lambda'}{c'\cos\nu' - b'\cos\mu'} = \frac{c'\cos\nu' - a'\cos\lambda'}{b\cos\nu' - a'\cos\mu'} = \frac{b'\cos\nu' - c'\cos\lambda'}{a'\cos\nu' - c\cos\mu'}.$$

Setzt man in (16) $\frac{\cos\lambda'}{\cos\nu'} = l$; $\frac{\cos\mu'}{\cos\nu'} = m$, so erhält man leicht folgende Gleichungen:

(17)
$$m\mathfrak{S}_1 + l\mathfrak{S}_2 + \sigma_3 = m\sigma_2 + l\mathfrak{S}_3 + \mathfrak{S}_1 = m\mathfrak{S}_3 + l\sigma_1 + \mathfrak{S}_2 = 0,$$

wo die Buchstaben $\mathfrak{S}$ und σ nach (8) zu deuten sind.

Soll (17) für beliebige $\lambda'\mu'\nu'$ d. h. für beliebige l und m bestehen, so müssten unnachsichtlich folgende Bedingungen in Erfüllung gehen:

(18)
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_3 = 0.$$

Beim Nichtstattfinden der Relation (18) sind auch die Gleichungen (16) für beliebige $\lambda'\mu'\nu'$ unstatthaft.

Finden die Relationen (18) statt, so gehen die Gleichungen (15) in folgende über:

(19)
$$\left[\frac{\cos\nu'}{\sqrt{c}} - \frac{\cos\mu'}{\sqrt{b}}\right]\left[k_x\sqrt{a} + k_y\sqrt{b} + k_z\sqrt{c}\right] = 0$$
$$\left[\frac{\cos\nu'}{\sqrt{c}} - \frac{\cos\lambda'}{\sqrt{a}}\right]\left[k_x\sqrt{a} + k_y\sqrt{b} + k_z\sqrt{c}\right] = 0.$$

Hier ist deutlich zu ersehen, dass die Diametralebene eine beliebige Richtung nehmen darf, sobald das Sehnensystem zur Ebene:

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c}=0 \tag{20}$$

parallel gelagert ist.

Ist überdies die angenommene Diametralebene zur Ebene (20) parallel, dann ist die conjugirte Sehnenrichtung eine vollkommen beliebige, weil in diesem Falle die Gleichungen (19) unabhängig von $k_x k_y k_z$ in Erfüllung gehen. — Für eine zu (20) nicht parallele Diametralebene muss die Sehnenrichtung zur Ebene (20) parallel sein, und demgemäss folgende Bedingung erfüllen:

$$\frac{w_x}{\sqrt{a}}=\frac{w_y}{\sqrt{b}}=\frac{w_z}{\sqrt{c}}=k_x\sqrt{a}+k_y\sqrt{b}+k_z\sqrt{c}=0. \tag{21}$$

Dann aber erhält die Gleichung der Diametralebene wegen (12) und (21) folgende Form:

$$0\xi+0\eta \quad +0\zeta \quad +q=0$$

wo

$$q=a''k_x+b''k_y+c''k_z, \tag{22}$$

welche nur dann fähig ist auf Punkte mit endlichen ξ, η und ζ zu deuten, wenn die Sehnenrichtung gleichzeitig der Bedingung: .

$$q=a'k_x+b''k_y+c''k_z=0 \tag{23}$$

genügt, wenn somit diese Sehnenrichtung zur Ebene

$$a''x+b''y+c''z=0 \tag{24}$$

parallel gewählt wird.

Wenn sich zu den Gleichungen (21), (23) keine der zwei folgenden Bedingungen $\frac{a''}{\sqrt{a}}=\frac{b''}{\sqrt{b}}=\frac{c''}{\sqrt{c}}$ oder $a''=b''=c''=0$ hinzugesellt, so geben die Gleichungen (21) und (23) eine (25) vollkommen bestimmte Sehnenrichtung, welche einer beliebig gerichteten Diametralebene entspricht.

Findet aber eine der Bedingungen (25) statt, so ist jede zur (20) parallele Sehnenrichtung fähig, einer beliebigen Diametralebene als conjugirt anzugehören.

Falls die Bedingungen (18) erfüllt sind, nimmt der in (11) vorkommende Coëfficient s folgenden Werth an:

$$s=k_x w_x+k_y w_y+k_z w_z=\left[k_x\sqrt{a}+k_y\sqrt{b}+k_z\sqrt{c}\right]^2$$

und die Gleichung (11) lässt sich auch so schreiben:

$$r^2=-u_\xi:\left(k_x\sqrt{a}+k_y\sqrt{b}+k_z\sqrt{c}\right)^2. \tag{26}$$

Ertheilt man nun der Diametralebene keine specielle Richtung, so muss die Sehnenrichtung jedenfalls zur (20) parallel sein, somit dem quadratischen Trinome in (26) den Nullwerth beibringen und die im Standpunkte beginnende halbe Sehnenlänge r erhält wegen (26)

$$\text{(27)}\qquad \begin{array}{l} \text{für } -u_\xi > 0 \text{ den Werth} = \pm\infty \\ \;\;\text{„}\;\; -u_\xi = 0 \;\;\text{„}\;\;\;\;\text{„}\;\; = \frac{0}{0} \end{array}$$

und kann jeden beliebigen Werth annehmen.

Die der Diametralebene angehörigen Punkte (ξ, η, ζ), welche gleichzeitig die Gleichung $u_\xi = 0$ erfüllen, genügen auch der Geichung (1); auch umgekehrt kann im Falle (18) jeder dem System (1) angehörige Punkt als in der Diametralebene liegend gedacht werden, weil es ja schon früher bemerkt wurde, dass in diesem Falle zur Sehnenrichtung, welche den Bedingungen (21) und (23) genügt, die zugehörige Diametralebene jede beliebige Richtung anzunehmen vermag. Da nun wegen (27) eine von einem Punkte des Systems (1) ausgehende Sehne beliebig lang gedacht werden kann, so gehört der jedesmalige Endpunkt dieser Sehne, somit die ganze Gerade dem Systeme (1) an, sobald diese Gerade in der zulässigen Sehnenrichtung, sonst aber durch einen beliebigen Punkt des Systems (1) gelegt wird. Tritt keine der in (25) erwähnten Bedingungen ein, so ist einerseits nur die zu (20) und (24) parallele Sehnenrichtung zulässig; andererseits ist die diesfällige Form der Gleichung (1):

$$\text{(28)}\qquad \left(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c}\right)^2 + 2\,(a''x+b''y+c''z)+d = 0$$

und liefert für $z = 0$ eine in der Ebene xOy sich erstreckende Parabelcurve, welche als Lehne des zu (20) und (24) parallelen Sehnensystems angesehen werden kann. Der geometrische Ort der in (1) angedeuteten Punkte ist diesfalls ein parabolischer Cylinder, welcher beschrieben wird, indem sich eine Gerade von constanter Richtung längs dem Umfange einer Parabel bewegt.

Ist aber $a'' = b'' = c'' = 0$, so erhält man aus (28) für $z = 0$ als Durchschnittsgebilde mit der Ebene xOy:
für $d < 0$ zwei parallele Geraden;
„ $d > 0$ zwei secundäre parallele Geraden;
„ $d = 0$ eine einzige Gerade; und in allen diesen Fällen bilden eben diese Geraden je eine
(29) Lehne für das System der in (1) liegenden parallelen Sehnen. Die Gleichung (1) deutet in diesem Falle auf zwei parallele Ebenen für $d < 0$; auf zwei secundäre Ebenen für $d > 0$; auf eine Ebene, wenn $d = 0$ sich ereignet.

Findet aber die Bedingung $\frac{a''}{\sqrt{a}} = \frac{b''}{\sqrt{b}} = \frac{c''}{\sqrt{e}}$ statt, so erhält man aus (28)

$$\left(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c}\right)^2 + \frac{2a''}{\sqrt{a}}\left(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c}\right) + d = 0,$$

hieraus

$$\text{(30)}\qquad \left(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c}\right) = -\frac{a''}{\sqrt{a}} \pm \sqrt{\frac{a''^2}{a} - d},$$

wodurch zwei parallele Ebenen, zwei secundäre Ebenen, eine einzige Ebene angedeutet wird, je nachdem sich

$$\text{(31)}\qquad da < a''^2;\; da > a''^2;\; da = a''^2$$

ereignet.

Dass beim Stattfinden eines der Umstände in (25) und der Bedingung (18) auf ebene Systeme von Punkten zu schliessen ist, erhellt aus der Bemerkung, dass wegen einem der Umstände (25) auch (23) in Kraft verbleibt, dass somit jede zu (20) parallele Sehnenrichtung eine zulässige ist, dass schliesslich um einen einzigen Standpunkt herum eine in Drehung versetzte Gerade die Fläche (1) beschreiben wird, sobald sie nur während der Drehung zu (20) parallel verbleibt.

Um jetzt zur allgemeinen Discussion zurückzukehren, nehmen wir die Gleichung (13) vor und versuchen dieselbe unabhängig von der Sehnenrichtung k_x, k_y, k_z zu erfüllen; dies erreichen wir, wenn es uns gelingt für ξ, η und ζ solche Werthe zu finden, welche den Relationen

$$T_\xi = T_\eta = T_\zeta = 0 \tag{32}$$

genügen.

Denkt man sich diese Gleichungen nach (3) ausgebaut, so findet man mit Rücksicht auf die in (8) und (9) niedergelegten symbolischen Bezeichnungen:

$$\xi = -\frac{Q_1}{N}; \ \eta = -\frac{Q_2}{N}; \ \zeta = -\frac{Q_3}{N}. \tag{33}$$

Hieraus ist unmittelbar ersichtlich, dass für $N \gtrless 0$ die Werthe für ξ, η, ζ in (33) vollkommen bestimmt und endlich ausfallen und die Gleichung (13) für jede beliebige Sehnenrichtung erfüllen. Diese bestimmten Werthe deuten somit auf einen in endlicher Distanz vom Ursprunge liegenden Punkt, welcher allen Diametralebenen gemeinschaftlich angehörend, den Halbirungspunkt einer beliebig gerichteten durch ihn gelegten Sehne ausmacht. Dieser Punkt wird desshalb das Centrum der durch (1) dargestellten Fläche genannt.

Die eben angeführte Eigenschaft dieses Punktes wird ins hellere Licht treten, wenn man denselben zum Ursprunge eines neuen Coordinatensystems auserwählt und zum Behufe der entsprechenden Transformation in der Gleichung (1) die Substitution:

$$x = x' - \frac{Q_1}{N}; \ y = y' - \frac{Q_2}{N}; \ z = z' - \frac{Q_3}{N} \tag{34}$$

ausführt. Man gelangt hiedurch zu folgender Gleichung:

$$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + 2a'y'z' + 2b'z'x' + 2c'x'y' - D = 0, \tag{35}$$

in welcher D nach (9) gebaut erscheint; und der Umstand, dass man in derselben die Vorzeichen von x', y', z' gleichzeitig ändern kann, ohne die Gleichung zu stören, die eben erwähnte Eigenschaft des Centrums zur Genüge befürwortet.

Sind die Grössen Q_1, Q_2, Q_3 von Null verschieden und $N = 0$, so rückt der in (33) angegebene Punkt in unendliche Ferne weg.

Beim Stattfinden der Relationen (18) nehmen die Coordinatenwerthe in (33) die unbestimmte Form $0/0$ an, sind somit in unendlicher Anzahl vorhanden.

Beim parabolischen Cylinder denke man sich die leitende Parabel als eine unendlich gestreckte Ellipse, dann ist die durch den Ellipsenmittelpunkt gehende, zu den Ebenen (20) und (24) parallele Gerade die Inhaberin aller dem parabolischen Cylinder angehörigen Centra.

Bei zwei parallelen Ebenen ist die von denselben äquidistante Ebene diejenige, welche in sich alle Centra beherbergt.

Mit Rücksicht auf die vorher ausgesprochene Auffassung des parabolischen Cylinders (36)
lässt sich derselbe als eine Rotationfläche darstellen, welche entsteht, indem man die unendlich gestreckte Ellipse, welche als Durchschnitt mit einer auf die Cylinderkante senkrechten Ebene

resultirt, um ihre kürzere Axe in Drehung versetzt. Hiebei beschreiben die Umfangspunkte dieser Ellipse geradlinige Bögen, welche mit der Cylinderkante zusammenfallen, und dies aus dem einfachen Grunde, weil diese Bögen zu unendlich langen Radien gehören.

Analytische Darstellung der conjugirten Coordinatenaxen.

Es seien die Richtungen der Strahlen L, L', L'' beziehungsweise durch (k_x, k_y, k_z) $(k'_x, k'_y. k'_z)$; (k''_x, k''_y, k''_z) bestimmt. Die diesen drei Strahlen entsprechenden Richtungen der Diametralebenen E, E', E'' werden nach (12) analytisch in folgenden Gleichungen dargestellt:

(37)
$$\begin{aligned} E \ldots\ldots & \; xw_x + yw_y + zw_z = 0 \\ E' \ldots\ldots & \; xw'_x + yw'_y + zw'_z = 0 \\ E'' \ldots\ldots & \; xw''_x + yw''_y + zw''_z = 0. \end{aligned}$$

Nimmt man $L'//E$ an, so muss man gleichzeitig die Bedingung:

(38)
$$w_x k'_x + w_y k'_y + w_z k'_z = 0$$

zulassen. Werden die in (38) vorkommenden w nach (7) entwickelt, und ordnet man dann die Gleichung (38) nach k_x, k_y, k_z, so erhält man:

(39)
$$w'_x k_x + w'_y k_y + w'_z k_z = 0,$$

wodurch besagt wird, dass $L//E'$ sein muss.

Auf dieser Eigenschaft der Reciprocität fussend, werden wir aus der Annahme: $L''//$ zur Durchschnittsgeraden zwischen E und E' d. h. $L''//E$, $L''//E'$ unmittelbar schliessen, dass auch $L//E'$ und $L'//E''$ sein muss. Hiebei ergeben sich folgende Relationen:

(40)
$$\begin{aligned} w_x k''_x + w_y k''_y + w_z k''_z &= w''_x k_x + w''_y k_y + w''_z k_z = 0 \\ w'_x k''_x + w'_y k''_y + w'_z k''_z &= w''_x k'_x + w''_y k'_y + w''_z k'_z = 0. \end{aligned}$$

Gehen die Strahlen L, L', L'' durch einen gemeinschaftlichen Ursprung, so sehen wir mit Hilfe des Vorhergehenden ein, dass je ein Paar dieser Strahlen eine Ebene bestimmt, welche
(41) zur Diametralebene des dritten Strahles parallel liegt.

Sind zwei von diesen Strahlen zu den zugehörigen Diametralebenen senkrecht, so muss auch der dritte auf seiner Diametralebene senkrecht sein, und solche drei Strahlen sind fähig ein orthogonales Axensystem zu repräsentiren.

Je drei solche Strahlen, deren Richtungen den Gleichungen (38) und (40) genügen, bilden ein conjugirtes Richtungssystem.

Man sieht leicht ein, dass man zu (1) unzählig viele conjugirte Richtungssysteme angeben kann. Hiebei verfährt man selbstverständlicher Weise auf folgende Art: Eine beliebig gerich-
(42) tete Ebene E denke man sich als parallel zur Diametralebene; berechnet man nach (15) die Richtungscomponenten der entsprechenden Sehnenrichtung L; ein in E liegender Strahl L' wird beliebig angenommen und hiezu nach (14) die Richtung der zugehörigen Ebene E' berechnet; schliesslich wird L'' so gewählt, dass die Bedingungen $L''//E$ und L''/E' erfüllt werden.

Geht man vom ursprünglichen der Gleichung (1) zu Grunde liegenden Axensysteme aus, zu irgend einem conjugirten Axensysteme über, so erhält man zum Behufe der Transformation der Gleichung (1) folgendes Schema:

$$\begin{aligned} x &= x'k_x + y'k'_x + z'k''_x \\ y &= x'k_y + y'k'_y + z'k''_y \\ z &= x'k_z + y'k'_z + z'k''_z. \end{aligned} \tag{43}$$

Nach Einführung dieser Werthe in (1) erhält man folgende aus x', y', z' gebaute Gleichung:

$$v_1 x'^2 + v_2 y'^2 + v_3 z'^2 + 2v'_1 y'z' + 2v'_2 z'x' + 2v'_3 x'y' + 2v''_1 x' + 2v''_2 y' + 2v''_3 z' + d = 0, \tag{44}$$

worin durch eine einfache Rechnung mit Rücksicht auf den in (7) ersichtlichen Bau von s, s', s'', q, q', q'', aus den entsprechenden Richtungscomponenten k_x, k_y, k_z:

$$v_1 = s;\ v_2 = s';\ v_3 = s'',$$

und wegen (38) und (40)

$$\begin{aligned} v'_1 &= w'_x k''_x + \& = 0;\ v'_2 = w''_x k_x + \& = 0;\ v'_3 = w_x k'_x + \& = 0 \\ v''_1 &= a'' k_x + \& = q;\ v''_2 = a'' k'_x + \& = q';\ v''_3 = a'' k''_x + \& = q'' \end{aligned} \tag{45}$$

sich ergeben.

Man gelangt somit aus (1) zur folgenden transformirten Gleichung:

$$s x'^2 + s' y'^2 + s'' z'^2 + 2q x' + 2q' y' + 2q'' z' + d = 0, \tag{46}$$

welche begreiflicher Weise auf dasselbe Punktsystem wie (1) deutet. Die Gleichung (46) ist einfacher und der weiteren Discussion zugänglicher als (1), weil in derselben die Coëfficienten der variablen Ambenproducte nicht vorkommen.

In der Gleichung (46) können die mit s bezeichneten Coëfficienten nicht alle drei gleichzeitig verschwinden, weil sonst die Transformationsgleichung aufhören würde dem zweiten (47) Grade anzugehören, und man müsste derselben jede Fähigkeit absprechen, durch entsprechende Rücktransformation in die Gleichung (1) übergehen zu können.

Es interessirt uns zunächst diejenigen Kriterien zu besprechen, welche aussagen, für welchen speciellen Fall blos eines, und für welchen Fall zwei von den drei conjugirten s gleichzeitig verschwinden.

Zu diesem Behufe erhält man aus (40):

$$\begin{aligned} \frac{k''_x}{k''_z} &= \frac{w_y w'_z - w'_y w_z}{w_x w'_y - w'_x w_y}; \quad \frac{w''_x}{w''_z} = \frac{k_y k'_z - k'_y k_z}{k_x k'_y - k'_x k_y} \\ \frac{k''_y}{k''_z} &= \frac{w_z w'_x - w'_z w_x}{w_x w'_y - w'_x w_y}; \quad \frac{w''_y}{w''_z} = \frac{k_z k'_x - k'_z k_x}{k_x k'_y - k'_x k_y} \end{aligned} \tag{48}$$

ferner ist

$$s'' = w''_x k''_x + \& = w''_z k''_z \left[\frac{w''_x k''_x}{w''_z k''_z} + \frac{w''_y k''_y}{w''_z k''_z} + 1 \right]; \tag{49}$$

führt man in (49) die Werthe aus (48) ein, so erhält man:

$$s'' = \frac{k''_z w''_z \left[(w_x w'_y - w' w_y)(k_x k'_y - k'_x k_y) + \& \right]}{(w_x w'_y - w'_x w_y)(k_x k'_y - k'_x k'_y)}. \tag{50}$$

Bezeichnet man mit u den positiven, mit v den negativen Bestandtheil des in (50) eingeklammerten Zählers, so erhält man:

(51)
$$u = w_x k_x [w'_y k'_y + w'_z k'_z] + \&$$
$$v = w_x k'_x [w'_y k_y + w'_z k_z] + \&.$$

Aus (39) hat man $w'_y k_y + w'_z k_z = - k_x w'_x$, somit:

$$v = - w_x k'_x . w'_x k_x + \&$$

und

(52)
$$u - v = w_x k_x (w'_x k'_x + \&) + \& = (w_x k_x + \&)(w'_x k'_x + \&) = ss'$$

und endlich

$$s'' = k''_z w''_z ss' : (w_x w'_y - w'_x w_y)(k_x k'_y - k'_x k_y);$$

und eben so:

(53)
$$s' = k'_z w'_z ss'' : (w_x w''_y - w''_x w_y)(k_x k''_y - k''_x k_y).$$

Aus dem in (48) angehobenen Vorgange ersieht man, dass die Gleichungen (53) noch zwei verschiedene Formen annehmen können, welche man aus (53) erhält, sobald man die
(54) Zeigergruppe (x, y, z) das erste Mal in die Zeigergruppe (y, z, x), das andere Mal in die Gruppe (z, y, x) übergehen lässt.

So lange keines der conjugirten s verschwindet, bieten die Gleichungen nichts Anstössiges. Verschwindet aber eines von denselben und ist etwa $s = 0$, so scheinen auf den ersten Anblick die Gleichungen (53) einen Widerspruch zu beherbergen, weil sie anscheinend auch für s' und s'' Nullwerthe beanspruchen. Diese Unzukömmlichkeit hebt sich, sobald man nur gestattet, dass für $s = 0$ die in (53) vorfindigen Divisoren Nullwerthe annehmen. Die aus k_x, k_y, k_z gebauten Factoren können nicht verschwinden, weil dies die Relationen:

$$\frac{k_x}{k'_x} = \frac{k_y}{k'_y} = \frac{k_z}{k'_z}; \quad \frac{k_x}{k''_x} = \frac{k_y}{k''_y} = \frac{k_z}{k''_z}$$

hiemit auch den Parallelismus der conjugirten Strahlen L, L', L'' zur Folge hätte. Es bleibt somit nichts übrig, als zuzugeben, dass für $s = 0$ die aus w gebauten im Divisor vorfindigen Factoren Nullwerthe annehmen, und mit Rücksicht auf (38) die Relationen

$$\frac{w_x}{w'_x} = \frac{w_y}{w'_y} = \frac{w_z}{w'_z} = \frac{w_x k'_x + w_y k'_y + w_z k'_z}{w'_x k'_x + w'_y k'_y + w'_z k'_z} = \frac{0}{s'}$$

oder

$$\frac{w_x}{w''_x} = \frac{w_y}{w''_y} = \frac{w_z}{w''_z} = \frac{w_x k''_x + w_y k''_y + w_z k''_z}{w''_x k''_x + w''_y k''_y + w''_z k''_z} = \frac{0}{s''}$$

herbeiführen und gleichzeitig aussagen, dass für $s = 0$ die Bedingungen

(55)
$$w_x = a k_x + c' k_y + b' k_z = 0$$
$$w_y = b k_y + a' k_z + c' k_x = 0$$
$$w_z = c k_z + b' k_x + a' k_y = 0$$

in Erfüllung gehen müssen.

Aus den ersten zwei Gleichungen in (55) ziehen wir:

$$\frac{k_x}{k_z} = \frac{\mathfrak{S}_2}{\sigma_3}; \quad \frac{k_y}{k_z} = \frac{\mathfrak{S}_1}{\sigma_3}. \tag{56}$$

Diese Werthe müssen offenbar der dritten in (55) genügen und man erhält demgemäss:

$$c + b'(\mathfrak{S}_2 : \sigma_3) + a'(\mathfrak{S}_1 : \sigma_3)$$

oder

$$c.\sigma_3 + a'\mathfrak{S}_1 + b'\mathfrak{S}_2 = N = 0 \tag{57}$$

als die unnachsichtliche und einzige Bedingung, welche die Coëfficienten in (1) zu erfüllen haben, wenn eines der conjugirten s verschwinden soll.

Man findet in der That für die in (56) angebotenen Werthe von k_x, k_y, k_z

$$\theta^2 = \mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2 + \sigma_3^2 + 2\cos\alpha.\mathfrak{S}_1\sigma_3 + 2\cos\beta.\mathfrak{S}_2\sigma_3 + 2\cos\gamma.\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$$

setzend:

$$w_x = w_y = 0 \text{ und } w_z = \frac{c\sigma_3 + b'\mathfrak{S}_2 + a'\mathfrak{S}_1}{\Theta} = \frac{N}{\Theta}$$

hiemit

$$s = k_x w_x + k_y w_y + k_z w_z = \frac{\sigma_3 N}{\Theta^2}, \tag{58}$$

woraus das gleichzeitige Verschwinden von N und s hervorleuchtet. Sollte neben $s = 0$ noch $s' = 0$ eintreffen, so müssten zunächst die Relationen:

$$\frac{w'_x}{w''_x} = \frac{w'_y}{w''_y} = \frac{w'_z}{w''_z} = \frac{w'_x k''_x + \&}{w''_x k''_x + \&} = \frac{0}{s''}$$

und demgemäss noch die Relationen:

$$w'_x = w'_y = w'_z = 0 \tag{59}$$

erfüllt werden. — Aus (55) erhält man:

$$\frac{k_x}{k_z} = \frac{\mathfrak{S}_2}{\sigma_3} = \frac{\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{S}_1} = \frac{\sigma_1}{\mathfrak{S}_2}; \quad \frac{k_y}{k_z} = \frac{\mathfrak{S}_1}{\sigma_3} = \frac{\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{S}_2} = \frac{\sigma_2}{\mathfrak{S}_1}. \tag{60}$$

Vollkommen dieselben Werthe erhält man für die Quotienten $\frac{k'_x}{k'_z}$ und $\frac{k'_y}{k'_z}$ aus (59), was nur dann verschiedene Richtungen bei L und L' veranlassen kann, wenn die in (60) angeführten Brüche die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, wenn somit die Coëfficienten in (1) die Relation:

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_3 = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \tag{61}$$

erfüllen.

Wenn also weder die in (57) noch die in (61) ausgeprägten Coëfficientenrelationen eintreffen, so müssen alle drei conjugirten s von Null verschieden ausfallen.

Wenn wir die eben besprochenen Vorkömmnisse in Rücksicht ziehen, so werden wir nach ausgeübter Transformation aus (1) zu einer der folgenden Gleichungsformen kommen:

(62)
$$\begin{aligned} &\text{I} \ldots\ldots s x'^2 + s' y'^2 + s'' z'^2 + 2 q x' + 2 q' y' + 2 q'' z' + d = 0 \\ &\text{II} \ldots\ldots s' y'^2 + s x'^2 + 2 q x' + 2 q' y' + 2 q'' z' + d = 0, \text{ wo } s'' = N = 0 \\ &\text{III} \ldots\ldots s x' + 2 q x' + 2 q' y' + d = 0, \text{ wo } s' = s'' = q'' = 0. \end{aligned}$$

In III tritt wegen $s' = s'' = 0$ die Erfüllung der Relation (61) ein, und in diesem Falle können wir immerhin die Richtung des Strahles L''/Oz' so annehmen, dass L'' parallel zu den Ebenen (20) und (24) wird, dass somit:

$$q'' = a'' k''_x + b'' k''_y + c'' k''_z$$

den Nullwerth annimmt.

Setzt man in I

$$x' = \mathrm{x} - \frac{q}{s};\; y' = \mathrm{y} - \frac{q'}{s'};\; z = \mathrm{z} - \frac{q''}{s''};\; -d + \frac{q^2}{s} + \frac{q'^2}{s'} + \frac{q''^2}{s''} = \vartheta,$$

so erhält man:

(63)
$$s\mathrm{x}^2 + s'\mathrm{y}^2 + s''\mathrm{z}^2 = \vartheta.$$

Setzt man in II sobald

$$q'' \gtrless 0; \ldots x' = \mathrm{x} - \frac{q}{s};\; y' = \mathrm{y} - \frac{q'}{s};\; z' = \mathrm{z} + \frac{-d + \frac{q^2}{s} + \frac{q'^2}{s'}}{2q''},$$

so erhält man:

(64)
$$s\mathrm{x}^2 + s'\mathrm{y}^2 + 2q''\mathrm{z} = 0.$$

Setzt man in II sobald

$$q'' = 0;\; x' = \mathrm{x} - \frac{q}{s};\; y' = \mathrm{y} - \frac{q'}{s'};\; -d + \frac{q^2}{s} + \frac{q'^2}{s'} = \vartheta,$$

so erhält man:

(65)
$$s\mathrm{x}^2 + s'\mathrm{y}^2 = \vartheta.$$

Setzt man in III sobald

$$q' \lessgtr 0;\; x' = \mathrm{x} - \frac{q}{s};\; y' = \mathrm{y} + \frac{-d + \frac{q^2}{s}}{2q'},$$

so erhält man:

(66)
$$s\mathrm{x}^2 + 2q'\mathrm{y} = 0.$$

Setzt man in III sobald

$$q' = 0;\; x' = \mathrm{x} - \frac{q}{s};\; -d + \frac{q^2}{s} = \vartheta,$$

so erhält man:

(67)
$$s\mathrm{x}^2 = \vartheta.$$

Aus der hier angeführten Darstellung ist ersichtlich, wie man durch passende Transformation die Gleichung (1) je nach Beschaffenheit der ihr angehörigen Coëfficienten auf eine der folgenden Hauptformen zurückführt:

(68)
$$\begin{aligned} s\mathrm{x}^2 + s'\mathrm{y}^2 + s''\mathrm{z}^2 &= \vartheta \\ s\mathrm{x}^2 + s'\mathrm{y}^2 + 2q''\mathrm{z} &= 0 \\ s\mathrm{x}^2 + s'\mathrm{y}^2 &= \vartheta \\ s\mathrm{x}^2 + 2q'\mathrm{y} &= 0 \\ s\mathrm{x}^2 &= \vartheta. \end{aligned}$$

Die Specialisirung der vorstehenden Gleichungen in Beziehung auf die eventuell positiven und negativen Vorzeichen der mit s und q bezeichneten Coëfficienten, und in Bezug auf die Fälle, wo $\vartheta = 0$, $\vartheta > 0$, $\vartheta < 0$ sich ereignet, gelangen wir zu folgenden siebzehn von einander specifisch verschiedenen Gleichungen:

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1 \text{ oder } \frac{x^2}{\left(l\sqrt{1-\frac{z^2}{n^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(m\sqrt{1-\frac{z^2}{n^2}}\right)^2} = 1 \ldots\ldots\ldots E_1 \ldots (\mathfrak{E})$$

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 1 \quad \text{„} \quad \frac{x^2}{\left(l\sqrt{1+\frac{z^2}{n^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(m\sqrt{1+\frac{z^2}{n^2}}\right)^2} = 1 \ldots\ldots\ldots E_2 \ldots (\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{L})$$

$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 1 \quad \text{„} \quad \frac{y^2}{\left(m\sqrt{\frac{x^2}{l^2}-1}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(n\sqrt{\frac{x^2}{l^2}-1}\right)^2} = 1 \ldots\ldots\ldots E_3 \ldots (\mathfrak{E}, \mathfrak{H})$$

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 0 \quad \text{„} \quad \frac{x^2}{\left(\frac{zl}{n}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{zm}{n}\right)^2} = 1 \ldots\ldots\ldots E_4 \ldots (\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{P}, \mathfrak{L})$$

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z}{n} = 0 \quad \text{„} \quad \frac{x^2}{\left(l\sqrt{\frac{z}{n}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(m\sqrt{\frac{z}{n}}\right)^2} = 1 \ldots\ldots\ldots E_5 \ldots (\mathfrak{E}, \mathfrak{P})$$

$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{m^2} - \frac{z}{n} = 0 \quad \text{„} \quad \frac{x^2}{\left(l\sqrt{\frac{z}{n}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(m\sqrt{\frac{z}{n}}\right)^2} = 1 \ldots\ldots\ldots E_6 \ldots (\mathfrak{H}, \mathfrak{P}, \mathfrak{L})$$

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots E_7 \ldots (\mathfrak{E}, \mathfrak{P})$$

$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{m^2} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots E_8 \ldots (\mathfrak{H}, \mathfrak{L})$$

$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{y}{m} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots E_9 \ldots (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}) \qquad (69)$$

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots E_{10} \ldots (\mathfrak{L})$$

$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{m^2} = 0 \text{ oder } \left(\frac{x}{l} - \frac{y}{m}\right)\left(\frac{x}{l} + \frac{y}{m}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots E_{11} \ldots (\mathfrak{L})$$

$$x^2 = l^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots E_{12} \ldots (\mathfrak{L})$$

$$x^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots E_{13} \ldots (\mathfrak{L})$$

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots E_{14} \ldots\ldots\ldots$$

$$x^2 = -l^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots E_{15} \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots E_{16} \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x^2}{l^1} + \frac{y^2}{m^2} = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots E_{17} \ldots\ldots\ldots$$

In dem vorstehenden Tableau ersehen wir aus den Formen der ersten sechs Gleichungen, dass die ihnen zugehörigen Flächen durch fortschreitende Bewegung je einer Kegelschnittslinie, die passend gewählt ist, erscheinen. Bei dieser Bewegung ändern sich die conjugirten Axenstücke des fortschreitenden Kegelschnittes unablässig, stehen in Beziehung zu einander stets im constanten Verhältnisse; und während jede von den Axen sich parallel verschiebend in einer ihr zugehörigen Ebene verbleibt, beschreibt ihr Endpunkt ebenfalls eine Kegelschnittslinie, welche wir die Leitlinie der Bewegung nennen wollen. Die bewegliche Kegelschnittslinie können wir durch ein System von ähnlichen Kegelschnittsscheiben ersetzen und erhalten dann durch gehörige Aufschichtung derselben, innerhalb der zugehörigen Leitlinie einen Körper, dessen Oberfläche die in Rede stehende Fläche desto besser darstellt, je dünner man die einzelnen Scheiben gewählt.

1. In E_1 sind die beiden Leitlinien Ellipsen. Man erhält aus E_1 ihre Gleichungen dadurch, dass man einmal $x = 0$, das andere Mal $y = 0$ in der Flächengleichung setzt. Die erzeugende Ellipse bewegt sich mit ihrem Centrum längs der Axe $0z$ dergestalt, dass ihre Axen in dem Maasse abnehmen, je entfernter die Ellipse von der Ebene xOy sich befindet.

Für $z = \pm n$ wird jede Axenlänge gleich Null.

Die so erzeugte Fläche schliesst einen endlichen Raum ab und heisst die Ellipsoïdalfläche.

2. Für $x = 0$ erhalten wir aus E_2 die erste, für $y = 0$ die zweite Leitlinie, beide sind Hyperbeln. Die Erzeugende eine Ellipse, deren Axen mit numerischen Werthen von z ins Unendliche zunehmen. Die kleinsten Axenwerthe sind l, m, und gehören der in xOy liegenden Ellipse an, welche den Namen Kehlellipse trägt. Die erzeugende Fläche heisst ein elliptisches Hyperboloïd und bildet eine einzige ununterbrochene Höhlung. Diese zu E_2
(70) gehörige Fläche könnte man sich als Aufschichtung von Hyperbeln denken, welche mit ihren Mittelpunkten entweder längs der Axe Ox zur Ebene yOz, oder längs der Axe Oy zur Ebene xOz parallel fortschreiten und hiebei wieder an hyperbolischen Leitlinien gleiten. In den Endpunkten der Halbaxen $\pm l$ und $\pm m$ erhalten die Axendimensionen der in der Aufschichtung begriffenen Hyperbel Nullwerthe — und die betreffenden Hyperbeln gehen in je zwei Gerade über, welche sich im Umfange der Kehlellipse schneiden.

3. Für $y = 0$ erhält man aus E_3 die erste, für $z = 0$ die zweite Leitlinie; beide sind Hyperbeln. Die Erzeugende ist eine Ellipse, deren Axenlängen von Null bis ins Unendliche zunehmen, während x von $x = \pm l$ bis $x = \pm \infty$ wächst. Innerhalb der Ebene $x = l$ und $x = -l$ besitzt diese Fläche keine Punkte. Diese Fläche heisst das Hyperboloïd mit unterbrochenen Höhlungen, oder auch das getheilte Hyperboloïd.

4. Als Leitlinien sind bei E_4 zwei gerade durch den Ursprung gehende Linien. Die Erzeugende ist eine Ellipse, welche längs der z-Axe mit ihrem Centrum fortschreitet. Ihre Axen wachsen von Null bis ins Unendliche, während x von Null bis $\pm \infty$ zunimmt. Die so erzeugte Fläche heisst Kegelfläche.

5. In E_5 erhält man für $x = 0$ die erste, für $y = 0$ die zweite Leitlinie; beide sind Parabeln und gehen durch den Ursprung. Die Erzeugende ist eine Ellipse, deren Axenlängen von Null bis ins Unendliche zunehmen, während $\frac{z}{n}$ von Null bis $+\infty$ zunimmt. Die betreffende Fläche
(70) heisst elliptisches Paraboloïd.

Man kann aber bei E_5 die Erzeugende analytisch durch:

$$y^2 = \frac{m^2}{n} z - \frac{m^2}{l^2} x^2;$$

und die Leitlinie durch:

$$x^2 = \frac{l^2}{n} z$$

darstellen; dann erscheint das elliptische Paraboloïd als eine Aufschichtung von unendlich vielen dem Parameter $\frac{m^2}{n}$ entsprechenden congruenten Parabelscheiben, welche zur Ebene zOy parallel liegen, und deren Scheitel im Umfange einer in der Ebene xOz mit dem Parameter $\frac{l^2}{n}$ verzeichneten Parabel liegen. Hiebei besitzen die Durchmesser der erzeugenden und leitenden Parabel eine übereinstimmende Richtung.

6. In E_6 erhalten wir für $x = 0$ die erste, für $y = 0$ die zweite Leitlinie; beide sind Parabeln mit entgegengesetzten Parametern. Die Erzeugende ist eine Hyperbel, welche in der
Ebene xOy Nulllängen zu Axen hat, und in zwei sich schneidende Geraden übergeht; von (70)
da an nehmen ihre Axenlängen ins Unendliche zu, während z von 0 bis $\pm\infty$ zunimmt. Hiebei ist jedoch zu bemerken, dass beim Übergange von positiven z zu den negativen die Axen der erzeugenden Hyperbel der Art ihre Rolle vertauschen, dass die primäre Hyperbelaxe zur secundären und die secundäre zur primären sich gestaltet. Diese Fläche heisst die Sattelfläche. Man kann übrigens die Sattelfläche als Aufschichtung von congruenten Parabeln ansehen; man wird aber finden, dass die Durchmesserrichtung der erzeugenden Parabel zur Durchmesserrichtung der leitenden Parabel entgegengesetzt gelagert ist.

Was die übrigen Gleichungsformen anbelangt, so findet man sehr leicht, dass:

E_7 auf eine elliptische Cylinderfläche
E_8 „ „ hyperbolische „
E_9 „ „ parabolische
E_{10} „ „ Gerade
E_{11} „ zwei sich schneidende Geraden
E_{12} „ „ parallele Ebenen
E_{13} „ eine einzige Ebene
E_{14} „ einen einzigen Punkt deuten,

und dass endlich die Formen E_{15}, E_{16}, E_{17} durch primäre Werthe von x, y, z nicht erfüllbar sind, dass selbe somit in dem von uns beanspruchten Sinne keine räumliche Deutung zulassen.

Aus der näheren Betrachtung der Gleichung der Kegelfläche geht hervor, dass dieselbe eben so gut durch Aufschichtung von ähnlichen elliptischen wie auch durch Aufschichtung von ähnlichen hyperbolischen Scheiben hervorgebracht werden kann. Hieraus geht weiter hervor, dass die Kegelfläche durch passende Zerlegung in parallele Scheiben und durch
Wiederaufschichtung dieser Scheiben mittelst passender Leitlinien fähig sei, näherungsweise (71)
die Form einer jeden mit E_1, E_2, E_3, E_5, E_6 bezeichneten Fläche zum Vorscheine zu bringen.

In diesem Sinne könnte man die Kegelfläche näherungsweise als den räumlichen Träger aller Gebilde der zweiten Ordnung ansehen. Dies gilt desswegen blos näherungsweise, weil die lockere oder dichtere Aufschichtung der aus dem Kegel genommenen Scheiben von der Leitlinie abhängig ist, welche zur Erzeugung einer verlangten Fläche benöthigt wird.

Die Bedeutung der in Klammern gefassten Buchstabengruppen, welche aus der Reihe $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{L}$ entnommen, neben den im Tableau (69) angeführten Gleichungsformen angesetzt sind, ersehen wir in folgender Weise:

$\mathfrak{E}$ deutet auf die Fähigkeit der Fläche in Ellipsen,
$\mathfrak{H}$ „ „ „ „ „ „ „ Hyperbeln,
$\mathfrak{P}$ „ „ „ „ „ „ „ Parabeln,
$\mathfrak{L}$ „ „ „ „ „ „ „ Geraden

geschnitten zu werden. Die Richtigkeit der eingetragenen Gruppen wird aus der nachstehenden Consideration hervorleuchten.

Wenn wir die in (70) angeführten Erzeugungsweisen der den 17 Gleichungsformen entsprechenden Gebilde in Erwägung ziehen, so gelangen wir zur Überzeugung, dass jedes dieser Gebilde sich so charakteristisch ausprägt, dass man umgekehrt aus der vorgefassten Gestalt eines Gebildes nur auf eine einzige von den 17 Gleichungsformen zu schliessen berechtigt ist. Hiebei muss jedoch stets der Umstand im Auge behalten werden, dass die Grössen l, m, n primäre endliche und von Null verschiedene Grössen andeuten.

Hieraus geht hervor, dass die Gleichung (1), welche bei gegebenen Coëfficienten nur auf eines von den 17 Gebilden zu deuten vermag, in Folge einer Transformation auf ein beliebiges der conjugirten Axensysteme stets zu einer und derselben Gleichungsform führen muss, und dass für verschiedene conjugirten Axensysteme blos die Grössen l, m, n quantitativ verschieden ausfallen, ohne die Gleichungsform selbst zu alteriren.

Da nun beim Übergange zu anderen und anderen conjugirten Axen die Diametralebene eine beliebige Richtung anzunehmen vermag, so lässt sich daraus schliessen, dass die Species der bei einem bestimmten conjugirten Axensysteme erhaltenen Parallelschnitte dieselben verbleiben für jedes andere conjugirte Axensystem; — und uns genügend darüber belehren, — welche Buchstaben in die erwähnte Klammerfassung einzubeziehen sind, um hiedurch auf alle möglichen der in Betracht stehenden Fläche angehörigen Schnittcurven hinzuweisen.

Aus (70) 2. erfuhren wir, dass ein im Axenpunkte der Kehlellipse von E_2 liegender Punkt den Ausgangspunkt bilde für zwei Gerade, welche in E_2 lagern. Diese Eigenschaft kommt mit Rücksicht auf die eben gepflogene Auseinandersetzung einem jeden Punkte des ungetheilten Hyperboloïd's zu, weil ja ein jeder Punkt dieser Fläche als Endpunkt einer conjugirten Halbaxe betrachtet werden kann.

Auf gleiche Weise schliesst man, dass ein jeder Punkt der Sattelfläche als Durchschnitt zweier in dieser Fläche enthaltenen Geraden angesehen werden kann.

Nur bei der Kegelfläche scheint der Parabelschnitt sich nicht als ein Parallelschnitt ergeben zu wollen. Er ergibt sich aber in der That in der Form von unendlich gestreckten Ellipsen, als Parallelschnitt zu solchen Diametralebenen, welche zu einer der Kegelkanten nahezu parallel sich gestalten.

Schliesslich leuchtet zur Genüge hervor, dass man nur nöthig habe, die Transformation einer vorgelegten Gleichung (1) blos in Bezug auf ein specielles, am leichtesten construirbares conjugirtes Axensystem zu vollziehen, um der Kriterien habhaft zu werden, welche, von Fall zu Fall aus den Werthen der in (1) spielenden Coëfficienten, die Entscheidung herbeiführen, welches von den 17 Ereignissen der vorgelegten Gleichung entspricht.

§. 2.

Wählen wir die Richtung der Ebene xOy als Richtung der Diametralebene E'', so erhalten wir zur Bestimmung der entsprechenden Sehnenrichtung L'' folgende Gleichungen:

$$w''_x = w''_y = 0,$$

woraus

$$\frac{k''_x}{k''_z} = \frac{\mathfrak{S}_2}{\sigma_3} ; \quad \frac{k''_y}{k''_z} = \frac{\mathfrak{S}_1}{\sigma_3} . \tag{1}$$

somit für

$$\mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2 + \sigma_3^2 + 2\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2 \cos\gamma + 2\mathfrak{S}_1\sigma_3 \cos\alpha + 2\mathfrak{S}_2\sigma_3 \cos\beta = [(\mathfrak{S}_2)\mathfrak{S}_1\sigma_3]\,\mathfrak{S}_2 + \& = \theta^2 \tag{2}$$

$$k''_x = \frac{\mathfrak{S}_2}{\Theta} ; \quad k''_y = \frac{\mathfrak{S}_1}{\Theta} ; \quad k''_z = \frac{\sigma_3}{\Theta} ; \tag{3}$$

ferner

$$w''_x = 0 ; \quad w''_y = 0 ; \quad w_z = \frac{N}{\Theta}$$

$$s'' = w''_x k''_x + \& = \sigma_3 \frac{N}{\Theta} ; \quad q'' = \frac{Q_3}{\Theta} . \tag{4}$$

Sei nun $L//Ox$, so erhält man:

$$k_x = 1 ; \quad k_y = 0 ; \quad k_z = 0 ; \tag{5}$$

hieraus

$$w_x = a ; \quad w_y = c' ; \quad w_z = b' \tag{6}$$

$$s = a ; \quad q_{\prime\prime} = a'' . \tag{7}$$

Die Gleichung der Ebene E, wenn selbe durch den Ursprung gehen soll, findet man mit Rücksicht auf (6):

$$ax + c'y + b'z = 0. \tag{8}$$

Die Richtung der Durchschnittslinie von E und E'' gehört bekannterweise dem dritten Strahle L' an, mit den Richtungscoëffizienten:

$$k'_x = -\frac{c'}{\psi} ; \quad k''_y = \frac{a}{\psi} ; \quad k'_z = 0 ; \tag{9}$$

wo

$$\psi^2 = c'^2 + a^2 - 2ac' \cos\gamma ;$$

ferner

$$w'_x = 0 ; \quad w'_y = \frac{\sigma_3}{\psi} ; \quad w'_z = \frac{\mathfrak{S}_1}{\psi} \tag{10}$$

$$s' = \frac{a\sigma_3}{\psi^2} ; \quad q' = \frac{ab'' - c'a''}{\psi} ; \tag{11}$$

und zur Bestimmung der Richtung der Ebene E' hat man:

$$\sigma_3 y - \mathfrak{S}_1 z = 0. \tag{12}$$

Mit Rücksicht auf die Werthe von s und q in (4), (7) und (11) erhält man nach Anleitung in (45) vorigen Paragraphes folgende Transformationsgleichung:

(13) $$\mathfrak{T}_1) \ldots . ax'^2 + \frac{a\sigma_3}{\psi^2} y'^2 + \frac{\sigma_3 N}{\Theta^2} z'^2 + 2a''x' + 2\,\frac{ab''-c'a''}{\psi} y' + 2\,\frac{Q_3}{\Theta} z' + d = 0.$$

Die Bestimmung der neuen Axenwinkel ergibt sich aus den Richtungen in (3), (5) und (11) wie folgt:

(14) $$\begin{aligned} \cos(x'Oy') &= (a\cos\gamma - c') : \psi \\ \cos(y'Oz') &= \{a[\mathfrak{S}_2(\mathfrak{S}_1)\sigma_3] - c'[(\mathfrak{S}_2)\mathfrak{S}_1\sigma_3]\} : \theta\psi \\ \cos(z'Ox') &= [(\mathfrak{S}_2)\mathfrak{S}_1\sigma_3] : \theta. \end{aligned}$$

Die in (13) vollzogene Transformation ist nicht statthaft, wenn von den Grössen a und σ_3 eine, oder beide gleichzeitig verschwinden; weil im ersten Falle der Winkel $x'Oy'$ den Nullwerth erhält; im zweiten Falle müsste Oz' in die Ebene $x'Oy'$ fallen, im dritten Falle aber beide Missstände gleichzeitig stattfinden müssten.

Auch ist diese Transformation im Falle des Eintreffens der Relationen (18) §. 1 nicht statthaft.

Man kann überhaupt von der Annahme $x'Oy'//xOy$ Gebrauch machen, wenn $\sigma_3 \gtrless 0$, und von der gleichzeitigen Annahme $Ox'//Ox$, wenn $a \gtrless 0$, oder wenn eigentlich $a > 0$, weil es immer möglich ist, letzteren Umstand herbeizuführen. Hieraus schliesst man, dass man auf die in (13) gepflogene Weise nur dann verfahren darf, wenn wenigstens eines von den
(15) Producten $a\sigma_2$; $a\sigma_3$; $b\sigma_1$; $b\sigma_3$; $c\sigma_1$; $\sigma c_2 \ldots . (\mathfrak{T}_1)$ von Null verschieden sich erbietet.

Findet aber die Relation:

(16) $$a\sigma_2 = a\sigma_3 = b\sigma_1 = b\sigma_3 = c\sigma_1 = c\sigma_2 = 0$$

statt, so sehe man nach, ob eines der Producte:

(17) $$a'\sigma_1;\; b'\sigma_2;\; c'\sigma_3 \ldots \ldots (\mathfrak{T}_2)$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

Ist etwa $c'\sigma_3 \gtrless 0$, so kann man diesen Fall nur dann als einen von (15) sich unterscheidenden Fall ansehen, wenn nebstbei $a = b = 0$ ist.

Hier werden wir wegen $\sigma_3 \gtrless 0$ die Ebene $z = 0$ zur Ebene E'' machen, und finden aus (3)

(18) $$k''_x = a'c' : \theta;\; k''_y = b'c' : \theta;\; k''_z = -c'^2 : \theta$$

(19) $$w''_x = 0;\; w'' = 0;\; w''_z = c'(2a'b' - cc') : \theta$$

(20) $$s'' = -Nc'^2 : \theta = \sigma_3 N : \theta;\; q'' = Q_3 : \theta.$$

Den Strahl L nehmen wir in E'' derart an, dass er den Winkel xOy halbirt. Demgemäss findet man:

(21) $$\begin{aligned} &k_x = \mu;\; k_y = \mu;\; k_z = 0;\; \mu = 1 : 2\cos\frac{\gamma}{2} \\ &w_x = c'\mu;\; w_y = c'\mu;\; w_z = (a' + b')\mu \\ &s = 2c'\mu^2;\; q = (a'' + b'')\mu. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Ebene E ist:

(22) $$c'x + c'y + (a' + b')z = 0.$$

Diese wird von der Ebene E in der Geraden L' geschnitten, deren Richtung im Folgenden bestimmt ist:

$$\begin{aligned} k'_x &= \mu';\ k'_y = -\mu';\ k'_z = 0;\ \mu' = 1 : 2\sin\frac{\gamma}{2} \\ w'_x &= -c'\mu';\ w'_y = c'\mu';\ w'_z = (b'-a')\mu' \\ s' &= -2c'\mu'^2;\ q' = (a''-b'')\mu'. \end{aligned} \tag{23}$$

Mit Rücksicht auf die mit s und q bezeichneten Werthe von (20), (21) und (23) erhält man für $a = b = 0$ und $c'\sigma_3 \gtrless 0$ folgende Transformationsgleichung:

$$\mathfrak{T}_2) \ldots\ 2\mu^2 c' x'^2 - 2\mu'^2 c' y'^2 + \frac{\sigma}{\Theta^2} N z'^2 + 2(a''+b'')\mu x' + 2(a''-b'')\mu' y' + 2\frac{Q_3}{\Theta} z' + d = 0 \tag{24}$$

mit folgenden Axenwinkeln:

$$\begin{aligned} &\cos(x'Oy') = 0 \\ &\cos(y'Oz') = c'\{[a'-b'](1-\cos\gamma) + c'(\cos\alpha - \cos\beta)\} : \theta \\ &\cos(z'Ox') = c'\{(a'+b')(1+\cos\gamma) - c'(\cos\alpha + \cos\beta)\} : \theta. \end{aligned} \tag{25}$$

In den Gleichungen $\mathfrak{T}_1$) und $\mathfrak{T}_2$) können wir gerade so, wie wir es in (63) bis (68) §. 1 allgemein angedeutet haben, durch je eine passende Versetzung des Coordinatenursprungs, die entsprechenden Transformationen vollziehen, und gelangen sofort zu folgenden Gleichungsformen:

$$\text{für } N \gtrless 0 \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{T}_1)\ \mathrm{x}^2 + \frac{\sigma_3}{\psi^2}\mathrm{y}^2 + \frac{\mathfrak{N}}{\Theta^2}\sigma_3 \mathrm{z}^2 = (D : a) = \mathfrak{D};\ \mathfrak{N} = N : a \\ &\mathfrak{T}_2)\ 2\mu^2\mathrm{x}^2 - 2\mu'^2\mathrm{y}^2 + \frac{\mathfrak{N}}{\Theta^2}\sigma_3 \mathrm{z}^2 = (D : c') = \mathfrak{D};\ \mathfrak{N} = N : c' \end{aligned} \right. \tag{26}$$

$$\begin{matrix}\text{für } N = 0 \\ Q_3 \gtrless 0\end{matrix} \left\{ \begin{aligned} &\text{aus } \mathfrak{T}_1) \ldots \mathrm{x}^2 + \frac{\sigma_3}{\psi^2}\mathrm{y}^2 + 2\frac{(Q_3 : a)}{\Theta}\mathrm{z} = 0 \\ &\ ,,\ \ \mathfrak{T}_2) \ldots 2\mu^2\mathrm{x}^2 - 2\mu'^2\mathrm{y}'^2 + 2\frac{(Q_3 : c')}{\Theta}\mathrm{z} = 0 \end{aligned} \right. \tag{27}$$

$$\begin{matrix}\text{für } N = 0 \\ Q_3 = 0\end{matrix} \left\{ \begin{aligned} &\text{aus } \mathfrak{T}_1) \ldots x^2 + \frac{\sigma_3}{\psi^2} y^2 = (D' : c') = \mathfrak{D}' \\ &\ ,,\ \ \mathfrak{T}_2 \ldots 2\mu\mathrm{x} - {}^2 2\mu'\mathrm{y}^2 = (D' : c') = \mathfrak{D}'. \end{aligned} \right. \tag{28}$$

Hier ist

$$\begin{aligned} D &= -d + \frac{1}{N}(a''Q_1 + b''Q_2 + c''Q_3) \\ D' &= -d + \frac{1}{\sigma_3}(ab''^2 + ba''^2 - 2a''b''c'). \end{aligned} \tag{29}$$

Wenn nun die Grössen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ nicht gleichzeitig verschwinden, so wird man aus der Coëffizientengruppe:

$$\left\{ \begin{matrix} a & a' & a'' & \\ b & b' & b'' & d \\ c & c' & c'' & \end{matrix} \right. \tag{30}$$

nach (8), (9) vorigen Paragraphes die Grössengruppen:

$$\begin{array}{llll} \sigma_1 & \mathfrak{S}_1 & Q_1 & N \\ \sigma_2 & \mathfrak{S}_2 & Q_2 & D, \text{ wenn } N \gtrless 0 \\ \sigma_3 & \mathfrak{S}_3 & Q_3 & D' \quad \text{„} \quad N = 0 \end{array}$$

berechnen, und im Falle $(\mathfrak{T}_1)$ das Vorzeichen von $\mathfrak{N} = N:a$; und $\mathfrak{D} = D:a$; $\mathfrak{D}' = D':a$
„ „ „ $(\mathfrak{T}_2)$ „ „ „ $\mathfrak{N} = N:c'$ „ $\mathfrak{D}' = D:c'$; $\mathfrak{D}' = D':c'$

bestimmen, und aus der entsprechenden Form (26), (27), (28) entscheiden, welches von den (17) im §. 1 angeführten Ereignissen der Coëfficientengruppe (30) angehört.

Die aus (26), (27), (28) entspringenden Kriterien einer jeden der in (69) vorkommenden Eventualitäten lassen sich in folgende Täfelchen zusammenbringen:

I. Wenn aus $(\mathfrak{T}_1)$ etwa $a\sigma_3 \gtrless 0$, sonst aber
„ $(\mathfrak{T}_2)$ „ $c'\sigma_3 \gtrless 0$ ist, hiermit $a = b = 0$.

(31)

$N \gtrless 0$												
σ_3	+	+	+	+	—	—	—	—	+	+	—	—
$\mathfrak{N}$	+	+	—	—	+	+	—	—	+	—	+	—
$\mathfrak{D}$	+	—	+	—	+	—	+	—	0	0	0	0
E:	1	16	2	3	3	2	2	3	14	4	4	4

$N = 0;\ Q_3 \gtrless 0$		
σ_3	+	—
E:	5	6

$N = Q_3 = 0$						
σ_3	+	+	—	—	+	—
$\mathfrak{D}'$	+	—	+	—	0	0
E:	7	17	8	8	10	11

Ist II:

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_3 = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

so haben wir:

(32)

(1)

$a'' = b'' = c'' = 0$			
d	+	0	—
E	15	13	12

(2)

$\frac{a''}{\sqrt{a}} = \frac{b''}{\sqrt{b}} = \frac{c''}{\sqrt{c}}$ und $(ad - a''^2) = \delta$			
δ	+	0	—
E	15	13	12

Findet endlich weder I noch II statt, so schliesst man stets auf das Ereigniss E_9 = parabolischen Cylinder.

Um etwa im Falle $N \gtrless 0$ zu entscheiden, welches von den siebzehn möglichen Ereignissen der vorgelegten Gleichung entspricht, sieht man in dem ersten Täfelchen (31) die den

Grössen σ_3, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{D}$ entsprechende verticale Zeichengruppe, und findet unter dieser Gruppe den Zeiger, welcher dem E beigefügt, auf ein bestimmtes in (69) §. 1 ersichtliches Gebilde (33) hinweist.

Die Untersuchung der Gleichung:

$$8x^2+6y^2+8z^2-16yz+16zx-16xy-28x+10y-28z-16=0 \qquad (34)$$

ergibt sich in folgenden Rechnungsresultaten.

$$\begin{array}{lll|lllll}
a=8 & a'=-8 & a''=-14 & \sigma_1=-16 & \mathfrak{S}_1=0 & Q_1=0 & N=0=\mathfrak{N} \\
b=6 & b'=8 & b''=5 & \sigma_2=0 & \mathfrak{S}_2=16 & Q_2=0 & D'=0=\mathfrak{D}' \\
c=8 & c'=-8 & c''=-14 & \sigma_3=-16 & \mathfrak{S}_3=0 & Q_3=0 &
\end{array}$$

Hier ist $\mathfrak{N}=Q_3=0$, $\sigma_3<0$ und $\mathfrak{D}'=0$ und man findet nach dem Täfelchen (31) das der vorgelegten Gleichung entsprechende Ereigniss $=E_{11}=$ zwei sich schneidende Ebenen. (35)

Die Gleichung (34) lässt sich auch so schreiben:

$$(2x-3y+2z-8)(4x-2y+4z+2)=0, \qquad (36)$$

woraus die oben gemachte Aussage unmittelbar hervorleuchtet.

Für die Gleichung:

$$x^2+2y^2-z^2+2yz+6xz-4xy+4x+6y+2z-7=0 \qquad (37)$$

hat man:

$$\begin{array}{lll|lllll}
a=1 & a'=1 & a''=2 & \sigma_1=-3 & \mathfrak{S}_1=-7 & Q_1=-11 & N=-29 \\
b=2 & b'=3 & b''=3 & \sigma_2=-10 & \mathfrak{S}_2=-8 & Q_2=-35 & D=7+\frac{166}{29} \\
c=-1 & c'=-2 & c''=1 & \sigma_3=-2 & \mathfrak{S}_3=1 & Q_3=-39 &
\end{array}$$

es entspricht hier der Grössengruppe $\sigma_3\mathfrak{N}\mathfrak{D}$ die Zeichengruppe $--+$ und man findet nach (31) das zutreffende Ereigniss

$$E_2=\text{ungetheiltes Hyperboloïd.}$$

Für die Gleichung:

$$6x^2+3y^2+11z^2-6yz+16xz-4xy+10x-4y+12z+6=0 \qquad (38)$$

hat man:

$$\begin{array}{lll|lllll}
a=6 & a'=-3 & a''=5 & \sigma_1=24 & \mathfrak{S}_1=2 & Q_1=16 & N=4 \\
b=3 & b'=8 & b''=-2 & \sigma_2=2 & \mathfrak{S}_2=-18 & Q_2=-2 & D=\mathfrak{D}=0, \\
c=11 & c'=-2 & c''=6 & \sigma_3=14 & \mathfrak{S}_3=-2 & Q_3=-10 &
\end{array}$$

hiemit die Zeichengruppe von $(\sigma_3\mathfrak{N}\mathfrak{D})=(++0)$ und deutet an:

$$E_{14}=\text{Punkt.}$$

Die Gleichung (38) lässt sich auch so schreiben:

$$(x+y+z+1)^2+(x-y+z+2)^2+(2x-y+3z+1)^2=0,$$

wodurch offenbar auf einen Punkt gedeutet wird.

§. 3.

Die im zweiten Paragraphen mitgetheilten Kriterien für je ein der Gleichung (1) §. 1 zukommendes Ergebniss sind von der speciellen Annahme des ursprünglichen Axensystems, und namentlich der ursprünglichen Axenwinkel vollkommen unabhängig. Hieraus ergibt sich der Schluss, dass die Gleichung (1) §. 1 stets zu demselben Ergebnisse führen muss, so lange die in ihrem Bau einbegriffenen Coëfficienten dieselben verbleiben, mag sonst das System der ursprünglichen Axenwinkel ein beliebiges sein.

Die aus der Beschaffenheit des ursprünglichen Axensystems abhängigen näheren Eigenschaften der einzelnen Ergebnisse werden ermittelt, wenn man die conjugirten Axenwinkel in ihrer Abhängigkeit sowohl von den vorgelegten Gleichungscoëfficienten, als auch von dem ursprünglich zu Grunde liegenden Axensysteme einer gründlichen Erwägung unterwirft.

Wenn es im Bereiche der Möglichkeit wäre, zu einem rechtwinkligen conjugirten Axensysteme zu gelangen, so liesse sich das angedeutete Vorhaben ohne alle Zersplitterung in verschiedene Fälle durch eine, auf alle Annahmen der Gleichungscoëfficienten sowohl, als auch der adoptirten Axenwinkel gleichmässig passende Untersuchung in Erledigung bringen.

Wäre uns gelungen eine Diametralebene E'' ausfindig zu machen, auf welcher die zugehörige Sehnenrichtung L'' der Bedingung $L'' \perp E''$ genügt, so könnte man die vorgelegte Gleichung auf ein neues Axensystem $x'y'z'$ transformiren, dergestalt, dass $O'z' // L''$ und dass die Axen Ox' und Oy' in der Ebene E'' ihre Lage einnehmen. In der Transformationsgleichung dürfen aus diesem Grunde die zur ersten Potenz von z' gehörigen Glieder nicht vorkommen, und man ist berechtigt, dieselbe in folgender Form vorauszusetzen:

(1) $$v_1x'^2+v_2y'^2+2v_3'x'y'+2v_1''x'+2v_2y'+G=0,$$

wo die Form von G etwa:

$$G=v_3z'^2+v \text{ ist.}$$

Die analytische Geometrie in der Ebene lehrt, dass diese Gleichung auf solche Axen $O'y''$, $O'x''$ zurückgeführt werden kann, welche in E'' liegen, und auf einander senkrecht stehen und bewirken, dass in der transformirten Gleichung das Glied mit dem Producte $x''y''$ nicht vorkommt. Wir wissen auch, dass die Richtungen von $O'y''$, $O'x''$ von G und hiermit auch von z' vollkommen unabhängig sich ergeben müssen.

Das so entstandene Axensystem $O'x''$, $O'y''$, $O'z''$ ist sicher ein conjugirtes, weil in der betreffenden Transformationsgleichung die Coëfficienten von $x''y''$, $y''z''$, $z''x''$ nicht vorkommen; es ist gleichzeitig ein orthogonales, weil je eine der Axen $O'x''$, $O'y''$, $O'z''$ auf den übrigen zwei gleichzeitig senkrecht steht.

Solche Richtungen, welche auf der zugehörigen Diametralebene senkrecht stehen, heissen Cardinalrichtungen, und wir können dem Gesagten gemäss folgenden Satz aussprechen:

(2) Wenn für die vorgelegte Gleichung eine einzige Cardinalrichtung bereits erwiesen ist, so existiren für diese Gleichung wenigstens noch zwei andere Cardinalrichtungen, welche in Verbindung mit der ersten ein conjugirtes orthogonales Axensystem bilden.

Die Transformation der vorgelegten Gleichung auf ein orthogonales conjugirtes Axensystem liefert uns die Gleichung in folgender Form:

(3) $$sx^2+s'y^2+s''z^2+2qx+2q'y+2q''z+d=0,$$

welche im Falle $s \lesseqgtr 0$, $s' \lesseqgtr 0$ auch so geschrieben werden kann:

$$s\left(x+\frac{q}{s}\right)^2+s'\left(y+\frac{q'}{s'}\right)^2=-d-2q''z-s''z^2+\frac{q_2}{s}+\frac{q'^2}{s'}=D_z. \tag{4}$$

Für $s=s'$ wird in der Gleichung (4) für jedes z eine Kreislinie charakterisirt, sobald $(D_z:s)>0$ ausfällt. Die betreffende Fläche entsteht durch Aufschichtung von Kreisscheiben, deren Centra sämmtlich in der Geraden:

$$x=-\frac{q}{s}\,,\quad y=\frac{q'}{s} \tag{5}$$

enthalten sind.

Diese Fläche könnte man sich durch Rotation einer passenden Curve um die Gerade (5) entstanden denken, sie heisst desswegen in Bezug auf die Axe (5) eine Rotationsfläche. Hier ist ersichtlich, dass die Annahme $s=s'$ uns zum Ausspruche berechtigt, dass jede auf (5) senkrechte Richtung als Cardinalrichtung anzusehen ist, von denen je zwei auf einander senkrecht stehende in Verbindung mit (5) ein conjugirtes orthogonales Axensystem zu liefern vermögen.

Ist überhaupt die Richtung der Rotationsaxe durch die Winkel λ_B, μ_B, ν_B bestimmt, so liefert jede der Bedingung $k_x \cos\lambda_B+k_y\cos\mu_B+k_z\cos\nu_B=0$ Genüge leistende Richtung (6) k_x, k_y, k_z, eine Cardinalrichtung und liefert stets denselben Werth für s.

Wäre ferner in (3) $s=s'=s''=\left[-d+\dfrac{q^2+q'^2+q''^2}{s}\right]:\rho^2$ und $s \gtrless 0$, so könnte man die Gleichung in folgender Form anschreiben:

$$\left(x+\frac{q}{s}\right)^2+\left(y+\frac{q'}{s}\right)^2+\left(z+\frac{q''}{s}\right)^2=\rho^2,\ \text{wo}\ \rho>0. \tag{7}$$

Die betreffende Fläche ist eine Kugelfläche, und jede Richtung kann in diesem Falle als Cardinalrichtung angesehen werden.

Die Cardinalrichtungen sind in diesem Falle an die Bedingung:

$$0k_x+0k_y+0k_z=0 \tag{8}$$

gebunden, und jede von ihnen liefert denselben von Null verschiedenen Werth für s.

Eine flüchtige Betrachtung eines eventuell möglichen orthogonalen Axensystems bietet uns also Anhaltspunkte um zu entdecken, ob die vorgelegte Gleichung einer Rotationsfläche oder einer Kugelfläche angehört. Aber auch für andere der vorgelegten Gleichung eventuell entsprechende Gebilde erreichen wir durch Transformation auf ein conjugirtes orthogonales Axensystem einen diesem Gebilde jeweilig entsprechenden Normalzustand. Von da aus wird es uns nicht schwer fallen, mehrere Flächen derselben Gattung in Bezug auf die Congruenz, Ähnlichkeit, die Grösse der ihnen angehörigen Parameter, einer näheren Beurtheilung zu unterziehen, und jede tiefere Erforschung eines beliebigen Gebildes kann von da aus in einer völlig übereinstimmenden Weise vor sich schreiten.

Aufsuchung der Cardinalrichtungen.

Ist die Richtung von L durch k_x, k_y, k_z, λ, μ, ν gegeben, so erhält man als Gleichung einer auf L senkrechten Ebene:

(9) $$x \cos\lambda + y \cos\mu + z \cos\nu = 0$$

und als Gleichung der zu L gehörigen Diametralebene E:

(10) $$x w_x + y w_y + z w_z + q = 0.$$

Soll L auf E senkrecht stehen, so müssen die Coëfficienten in (9) und (10) folgender Relation genügen:

(11) $$\frac{w_x}{\cos\lambda} = \frac{w_y}{\cos\mu} = \frac{w_z}{\cos\nu} = \frac{w_x k_x + w_y k_y + w_z k_z}{\cos\lambda k_x + \cos\mu k_y + \cos\nu k_z} = \frac{s}{1},$$

wo s die im vorigen Paragraphen adoptirte Bedeutung besitzt.

Wenn man in (11) w_x, w_y, w_z nach (7) §. 1 ausdrückt, und dann:

$$\cos\lambda = [k_x], \quad \cos\mu = [k_y]; \quad \cos\nu = [k_z]$$

setzt, so erhält man aus (11) folgende Gleichungen:

$$w_x - s\cos\lambda = w_y - s\cos\mu = w_z - s\cos\nu = 0$$

oder:

(12) $$\begin{cases} (a-s)k_x + (c' - \cos\gamma)k_y + (b' - s\cos\beta)k_z = 0 \\ (c' - s\cos\gamma)k_x + (b-s)k_y + (a' - s\cos\alpha)k_z = 0 \\ (b' - s\cos\beta)k_x + (a' - s\cos\alpha)k_y + (c-s)k_z = 0. \end{cases}$$

Wenn aber in (12) nach den Relationen:

$$Mk_x = \{\cos\lambda\}; \quad Mk_y = \{\cos\mu\}; \quad Mk_z = \{\cos\nu\}$$

die Richtungscomponenten durch $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ ausgedrückt werden, so erhält man:

(13) $$\begin{cases} (\mathfrak{A}_0 - s)\cos\lambda + \mathfrak{A}_2\cos\mu + \mathfrak{A}_1\cos\nu = 0 \\ (\mathfrak{B}_0 - s)\cos\mu + \mathfrak{B}_2\cos\nu + \mathfrak{B}_1\cos\lambda = 0 \\ (\mathfrak{C}_0 - s)\cos\nu + \mathfrak{C}_2\cos\lambda + \mathfrak{C}_1\cos\mu = 0 \end{cases}$$

mit den nach (24) in der Einleitung zu deutenden Bestimmungsgleichungen:

(14) $$\begin{aligned} M\mathfrak{A}_0 &= \{(a)c'b'\}; & M\mathfrak{B}_0 &= \{c'(b)a'\}; & M\mathfrak{C}_0 &= \{b'a'(c)\} \\ M\mathfrak{A}_1 &= \{ac'(b')\}; & M\mathfrak{B}_1 &= \{(c')ba'\}; & M\mathfrak{C}_1 &= \{b'(a')c\} \\ M\mathfrak{A}_2 &= \{a(c')b'\}; & M\mathfrak{B}_2 &= \{c'b(a')\}; & M\mathfrak{C}_2 &= \{(b')a'c\}. \end{aligned}$$

Das System (12) in Verbindung mit der Relation $k_x[k_x] + \& = 1$ dient zur Bestimmung der Grössen s, k_x, k_y, k_z; eben so dient das System (13) mit der Relation $\cos\lambda\{\cos\lambda\} + \& = M$ zur Bestimmung von s, λ, μ, ν.

Bestimmt man eben so aus den ersten zwei Gleichungen in (12) die Werthe von $(k_x : k_z)$ $(k_y : k_z)$ und setzt solche in die dritte Gleichung ein, so erhält man folgende nach den Potenzen von s geordnete cubische Gleichung:

(15) $$Ms^3 - Ps^2 + Qs - N = 0,$$

in welcher

$$\left\{\begin{aligned} M &= 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ P &= (\alpha\sin^2\alpha - Cc' - Bb') + \& = \mathfrak{A}_0 + \& \\ Q &= (\sigma_1 + 2\mathfrak{S}_1\cos\alpha) + \& \\ N &= a\sigma_1 + b'\mathfrak{S}_2 + c'\mathfrak{S}_3 . \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Bestimmt man eben so aus den ersten zwei Gleichungen in (13) die Werthe von $(\cos\lambda : \cos\nu)$ und $(\cos\mu : \cos\nu)$ und führt die so erhaltenen Werthe in die dritte Gleichung ein, so erhält man:

$$(\mathfrak{A}_0-s)(\mathfrak{B}_0-s)(\mathfrak{C}_0-s)-(\mathfrak{A}_0-s)\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1-(\mathfrak{B}_0-s)\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_1-(\mathfrak{C}_0-s)\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1+\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1+\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2=0=f(s) \tag{17}$$

welche in Bezug auf s eine kubische Gleichung ist, und dieselben Wurzeln besitzt, wie die Gleichung (15).

Ein aus (15) genommener Werth von s in (12) eingeführt, liefert drei Gleichungen von der Beschaffenheit, dass die Richtungsfactoren, welche zweien der Gleichungen in (12) genügen, nothwendig auch die dritte erfüllen müssen. Es ist daher klar, dass man mittelst einem aus (15) genommenen s, mit Hilfe (12) jedesmal zu einer Cardinalrichtung gelangen wird.

Die kubische Gleichung (15) deutet zum wenigsten auf ein primäres s, hiemit wenigstens auf eine Cardinalrichtung. In diesem Falle existiren nach (2) wenigstens drei zusammengehörige Cardinalrichtungen, von denen einer jeden ein primäres s zukommen muss, welches die Gleichung (15) erfüllt.

Man vermuthet somit, dass drei primäre Werthe von s existiren, welche die Gleichung (15) erfüllen, und eben nur so viele Wurzeln ist diese Gleichung zu liefern fähig.

Es lässt sich in der That auf Grund der Gleichung (12) erweisen, dass complexe s-Werthe nicht fähig sind die Gleichung (15) zu erfüllen.

Die Gleichungen (12) lassen sich zu diesem Behufe so schreiben:

$$\begin{aligned} ak_x + c'k_y + b'k_z &= s(k_x + k_y\cos\gamma + k_z\cos\beta) = s[k_x] \\ c'k_x + bk_y + a'k_z &= s(k_x\cos\gamma + k_y + k_z\cos\alpha) = s[k_y] \\ b'k_x + a'k_y + ck_z &= s(k_x\cos\beta + k_y\cos\alpha + k_z) = s[k_z] \end{aligned} \tag{18}$$

für ein von s verschiedenes s' seien die zugehörigen Grössen k'_x, k'_y, k'_z und man erhält eben so

$$\begin{aligned} ak'_x + c'k'_y + b'k'_z &= s'[k'_x] \\ c'k'_x + bk'_y + a'k'_z &= s'[k'_y] \\ b'k'_x + a'k'_y + ck'_z &= s'[k'_z] . \end{aligned} \tag{19}$$

Multiplizirt man die Gleichungen (18) der Reihe nach mit k'_x, k'_y, k'_z, und verbindet sie dann durch Addition; ordnet die linke Seite nach k_x, k_y, k_z, und nimmt Rücksicht auf (19), so erhält man:

$$k_x . s'[k'_x] + k_y . s'[k'_y] + k_z . s'[k'_z] = s\big[k'_x[k_x] + k'_y[k_y] + k'_z[k_z]\big],$$

oder den Ausdruck:

$$k_x[k'_x] + \& = k'_x[k_x] + \& = H \tag{20}$$

setzend,

(21) $$s'H = sH \text{ oder } (s'-s)H = 0.$$

Wollte man der Gleichung (15) complexe s-Werthe, etwa:

(22) $$s = p + q\sqrt{-1} \text{ und } s' = p - q\sqrt{-1}$$

zumuthen, so müssten wir folgerichtig für die Richtungsfactoren folgende Formen einräumen:

(23) $$\begin{aligned} k_x &= m_1 + n_1\sqrt{-1}\ ; & k'_x &= m_1 - n_1\sqrt{-1} \\ k_y &= m_2 + n_2\sqrt{-1}\ ; & k'_y &= m_2 - n_2\sqrt{-1} \\ k_z &= m_3 + n_3\sqrt{-1}\ ; & k'_z &= m_3 - n_3\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Aus (23) finden wir:

$$[k_x] = [m_1 + n_4\sqrt{-1}] = [m] + [n]\sqrt{-1}$$

und

$$k'_x[k_x] = m_1[m_1] + n_1[n_1] + \{m_1[n_1] - n_1[m_1]\}\sqrt{-1},$$

hiermit:

(24) $$H = k'_x[k_x] + \& = \{m_1[m_1] + \&\} + \{n_1[n_1] + \&\},$$

weil der mit dem Factor $\sqrt{-1}$ behaftete Theil sich so schreiben lässt:

$$\{m_1[n_1] + \&\} - \{n_1[m_1[+ \&\} = \{m_1[n_1] + \&\} - \{m_1[n_1] + \&\} = 0.$$

Sei nun $m_1[m_1] + \& = d^2$; $n_1[n_1] + \& = d'^2$, so ist d die Distanz eines durch $(x = m_1, y = m_2, z = m_3)$ bestimmten Punktes vom Ursprunge; eben so ist d' die Distanz eines durch $(x = n_1, y = n_2, z = n_3)$ bestimmten Punktes vom Ursprunge. — Dann ist:

(25) $$H = d^2 + d'^2.$$

Da nun die in (22) präsumirten Werthe von s und s' verschieden sind, so verlangt der Bestand der Gleichung (21) das Nullwerden des Ausdruckes H, was nur für $d = d' = 0$ geschehen kann.

In diesem Falle müssten wir im Widerspruche mit den Relationen:

$$k_x[k_x] + \& = 1\ ;\quad k'_z[k'_x] + \& = 1$$

die Satzungen:

$$m_1 = n_1 = m_2 = n_2 = m_3 = n_3 = k_x = k_y = k_z = k'_x = k'_y = k'_z = 0$$

zugeben.

Hieraus folgt, dass die Annahme complexer s-Werthe auf einen Widerspruch führt, und hiermit auch, dass die kubischen Gleichungen (15) und (17) nur primäre s-Werthe zulassen.

(26) Sind also zwei primäre Wurzeln s und s' von einander verschieden, so findet man mittelst (12) die Richtungen der entsprechenden Strahlen, L, L' und mittelst der Gleichung: $\cos(LL') = k'_x[k_x] + \& = H$, den von L und L' eingeschlossenen Winkel.

Die Relation (21) verlangt wegen $s \gtrless s'$ die Nullsetzung von H, und nöthigt zum Ausspruche: Zwei Cardinalrichtungen L und L' stehen auf einander senkrecht, sobald die ihnen zu Grunde liegenden s und s' von einander verschieden sind.

(27)

Liefert die Gleichung (15) drei von einander verschiedene Werthe, s, s', s'', so ist der von jedem Paar der Strahlen L, L', L'' eingeschlossene Winkel ein rechter. Diese Strahlen bilden daher ein orthogonales conjugirtes Axensystem.

Der Satz (2), auf die kubische Gleichung (15) angewendet, nöthigt uns zur Behauptung, dass bei jeder Beschaffenheit der Wurzelwerthe s, s', s'' wenigstens drei Cardinalrichtungen existiren, welche ein orthogonales conjugirtes Axensystem liefern. Umgekehrt müssen die solchen Axen entsprechenden Gruppen der Richtungsbestimmungsstücke (k_x, k_y, k_z), (k'_x, k'_y, k'_z), (k''_x, k''_y, k''_z) (28) unter einander verschieden sein, und nur solche s-Werthe $s, s' s''$ liefern, welche der cubischen Gleichung (15) genügen.

Die angeführten Gruppen aus den Richtungsgrössen werden nur dann zum gemeinschaftlichen s-Werthe führen und die Gleichung $s = s' = s''$ veranlassen, wenn die vorgelegte Gleichung (1) §. 1 in Bezug auf ihre Coëfficienten: a, b, c, a', b', c', fähig ist, auf eine Kugelfläche zu deuten, wenn somit die in (12) aufgestellten Bedingungsgleichungen mit der in (8) coïncidiren.

Dieser Umstand verlangt aber unnachsichtlich die Erfüllung der Gleichungen:

$$a - s = b - s = c - s = a' - s \cos \alpha = b' - s \cos \beta = c' - s \cos \gamma = 0,$$

woraus

$$s = a = b = c = \frac{a'}{\cos \alpha} = \frac{b'}{\cos \beta} = \frac{c'}{\cos \gamma} \tag{29}$$

gefolgert wird.

Dies sind also Bedingungen, welche erfüllt werden müssen, wenn überhaupt die Gleichung (15) oder (17) drei gleiche Wurzeln liefern soll.

Beim Stattfinden von (29) findet man aus (15): $P = 3aM$; $Q = 3a^2M$; $N = a^3M$ und die Gleichung selbst nimmt die Gestalt:

$$M(s-a)^3 = M(s-a)(s-a)(s-a) = 0$$

an, beurkundend, dass jede von ihren drei Wurzeln denselben s-Werth $= a$ besitzt.

Auch hier sieht man, dass der Fall $s = s' = s'' = 0$ nicht eintreffen kann, weil sonst im Widerspruche mit der vorgelegten Gleichung, wegen (29) die Satzung:

$$a = b = c = a' = b' = c' = 0$$

sich ergeben müsste.

Im Falle (29) erhält man für die Gleichungen (13) und (17):

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{C}_0 = a, \;\; \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2 = 0, \tag{30}$$

ein Umstand, der mit dem Vorhergehenden völlig übereinstimmt.

Um das Kriterium zweier gleicher Wurzeln $s' = s$ zu erhalten, bedenke man, dass dieser Umstand nur dann eintreten kann, wenn die gegebene Gleichung (1) §. 1 in Bezug auf ihre Coëffizienten fähig ist, einer Rotationsfläche anzugehören; in diesem Falle müssen die Gleichungen (13) mit der Gleichung:

$$k''_x \cos \lambda + k''_y \cos \mu + k''_z \cos \nu = 0 \tag{31}$$

coïncidiren, in so ferne λ, μ, ν die Richtungswinkel von L und L' betreffen, weil in diesem Falle L'' die Richtung der Rotationsaxe vorstellt, und mit den durch L und L' angedeuteten Richtungen rechte Winkel einschliessen soll.

Aus der Vergleichung der Coëffizienten aus (13) mit denen in (31) erhält man:

(32)
$$\frac{\mathfrak{A}_0 - s}{k''_x} = \frac{\mathfrak{A}_2}{k''_y} = \frac{\mathfrak{A}_1}{k''_z}$$
$$\frac{\mathfrak{B}_1}{k''_x} = \frac{\mathfrak{B}_0 - s}{k''_y} = \frac{\mathfrak{B}_2}{k''_z}$$
$$\frac{\mathfrak{C}_2}{k''_x} = \frac{\mathfrak{C}_1}{k''_y} = \frac{\mathfrak{C}_0 - s}{k''_z}$$

Durch Division der ersten durch die dritte erhält man:

$$s = \mathfrak{A}_0 - \frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2} = \mathfrak{A}_0 - \frac{\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_1} = \mathfrak{A}';$$

eben so

(33)
$$s = \mathfrak{B}_0 - \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_2} = \mathfrak{B}_0 - \frac{\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} = \mathfrak{B}'$$
$$s = \mathfrak{C}_0 - \frac{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2} = \mathfrak{C}_0 - \frac{\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_1} = \mathfrak{C}'.$$

Sollen nun alle für s enthaltenen Werthe einander gleich ausfallen, so müssen unnachsichtlich folgende Bedingungen stattfinden:

(34)
$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2$$
$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}' = \mathfrak{C}'.$$

Die kubische Gleichung in (15) und (17) ist überhaupt nicht fähig zwei gleiche Wurzeln $s = s'$ zu geben, wenn die Bedingungen (34) nicht zutreffen. Dass die Bedingungen (34) für das Stattfinden zweier gleicher Wurzeln in (15) und (17) genügend sind, mag aus Folgendem erhellen:

Bildet man sich zu der in (17) ersichtlichen Function aus $f(s)$ durch Differentiation nach s die erste Ableitung $= f_1(s)$, so erhält man:

(35)
$$f_1(s) = -(\mathfrak{A}_0 - s)(\mathfrak{B}_0 - s) - (\mathfrak{B}_0 - s)(\mathfrak{C}_0 - s) - (\mathfrak{C}_0 - s)(\mathfrak{A}_0 - s) + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_1.$$

Auf Grund der Gleichungen (34) erhält man:

$$f(\mathfrak{A}') = f(\mathfrak{B}') = f(\mathfrak{C}') =$$
$$= \frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2} \cdot \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_2} \cdot \frac{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2} - \frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2} \cdot \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1 - \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_2} \cdot \mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_1 - \frac{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2} \cdot \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2 =$$

(36)
$$= \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2 = 0.$$

Eben so findet man:

$$f_1(\mathfrak{A}') = f_1(\mathfrak{B}') = f_1(\mathfrak{C}') = -\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_1 = 0.$$

In Folge der Relationen (33) coïncidiren jede der Relationen (13) in eine einzige zur Bestimmung von λ, μ, ν dienende Gleichung von der Form:

(37)
$$\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2 \cos\lambda + \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 \cos\mu + \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2 \cos\nu = 0.$$

Die Gleichungen (36) bestätigen, dass die in (34) niedergelegten Kriterien die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen ausmachen, deren Erfüllung zwei gleiche Wurzeln $s = \mathfrak{A}' = \mathfrak{B}' = \mathfrak{C}'$ in der kubischen Gleichung (15) oder (17) hervorruft. Die Coïncidenzgleichung (37) sagt aus, dass die den gleichen s entsprechenden Cardinalrichtungen so beschaffen sein müssen, dass alle zur Ebene:

$$\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2[x] + \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1[y] + \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2[z] = 0 \tag{38}$$

eine parallele Lage einnehmen. Selbstverständlich ist die Rotationsaxe auf der Ebene (38) senkrecht.

Sollen von den Wurzeln s, s', s'' zwei, etwa s und s' Nullwerthe erhalten, denke man sich zum Behufe der Entwicklung des zugehörigen Kriteriums die vorgelegte Gleichung auf ein conjugirtes orthogonales Axensystem bereits transformirt; in der Transformationsgleichung werden nun wegen $s = s' = 0$ die Glieder sx^2 und $s'y^2$ fehlen, und der im §. 1 geführten Untersuchung zufolge, die Erfüllung der Relationen:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_3 = 0 \tag{39}$$

beanspruchen.

In Folge (39) erhalten in der Gleichung (15) die Coëffizienten P und N Nullwerthe, und besagen, dass $s = 0$ als eine doppelte Wurzel der Gleichung (15) oder (17) angehört.

Diese mit Nullwerthen begabten zwei Wurzeln deuten in Folge ihrer Gleichheit auf eine Rotationsfläche. Dies stimmt mit der im §. 2 niedergelegten Anschauungsweise überein, vermöge welcher wir den parabolischen Cylinder als durch Rotation einer unendlich langgestreckten Ellipse erklärt haben.

Wir haben die letztgeführte Untersuchung über die Eigenschaften der Wurzeln der kubischen Gleichung auf die Bildung des ersten Differentialquotienten gestützt. Wir können aber alle diese Resultate ohne Hilfe der Differentiation auf eine bald zu bildende Eliminationsgleichung in s anlehnen, die wir aus den Gleichungen (13) auf Grund der Relation:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2 \tag{40}$$

in folgender Weise entwickeln:

Addiren wir zu den drei Gleichungen in (13) beziehungsweise die Ausdrücke:

$$\cos\lambda\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2}\,,\quad \cos\mu\frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_2}\,,\quad \cos\nu\frac{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}\,, \tag{41}$$

mit dem positiven und negativen Zeichen hinzu, und ertheilen den Buchstaben $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ die in (33) ausgeprägte Bedeutung, so erhalten wir aus (13) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(s-\mathfrak{A}')\cos\lambda &= \frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2}\cos\lambda + \mathfrak{A}_2\cos\mu + \mathfrak{A}_1\cos\nu = g\\
(s-\mathfrak{B}')\cos\mu &= \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_2}\cos\mu + \mathfrak{B}_2\cos\nu + \mathfrak{B}_1\cos\lambda = g\,\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_1}\\
(s-\mathfrak{C}')\cos\nu &= \frac{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}\cos\nu + \mathfrak{C}_2\cos\lambda + \mathfrak{C}_1\cos\mu = g\,\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_2}\,,
\end{aligned} \tag{42}$$

hieraus:

$$\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2}\cos\lambda = \frac{g\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2(s-\mathfrak{A}')}\,;\quad \mathfrak{A}_2\cos\mu = \frac{g\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_1(s-\mathfrak{B}')}\,;\quad \mathfrak{A}_1\cos\nu = \frac{g\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2(s-\mathfrak{C}')}\,. \tag{43}$$

Durch Summirung der Gleichungen (43) erhalten wir wegen der ersten Relation (42)

$$g = g\left\{\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2(s-\mathfrak{A}')} + \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_2(s-\mathfrak{B}')} + \frac{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2(s-\mathfrak{C}')}\right\}$$

oder endlich:

(44) $$g\left[\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2(s-\mathfrak{A}')} + \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_2(s-\mathfrak{B}')} + \frac{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2(s-\mathfrak{C}')} - 1\right] = 0$$

und auch:

(45) $$(s-\mathfrak{A}')(s-\mathfrak{B}')(s-\mathfrak{C}') - \left\{\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2}(s-\mathfrak{B}')(s-\mathfrak{C}') + \&\right\} = 0.$$

Die Theilbarkeit der Gleichung (45) durch $(s-\mathfrak{A}')^2$ ist in die Augen springend, sobald man durch $a, b, c. a', b', c'$. die Erfüllung der Relationen (34) voraussetzt. In diesem Falle ist: $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}' = \mathfrak{C}' = s = s'$ eine zweimal wiederholte Wurzel der kubischen Gleichungen (15) und (17) und die Bestimmungsgleichungen der entsprechenden Richtungen von L und L' fallen auf Grund (42) in folgende zusammen:

(46) $$g = \frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2}\cos\lambda + \mathfrak{A}_2\cos\mu + \mathfrak{A}_1\cos\nu = 0,$$

welche auf dieselben Richtungen deutet wie (37).

Je zwei der Gleichung (46) genügende Richtungen L, L', welche auf einander senkrecht stehen, nebst einer dritten L'', welche auf beiden L und L' gleichzeitig senkrecht steht, bilden ein conjugirtes orthogonales Axensystem.

Wenn die Wurzeln s und s' Nullwerthe erhalten, wenn somit die Bedingungen (39) zutreffen, so erhält man:

$$M\mathfrak{A}_1 = (\sqrt{c})\sqrt{a};\; M\mathfrak{A}_2 = (\sqrt{b})\sqrt{a};\; M\mathfrak{B}_1 = (\sqrt{a})\sqrt{b};\; M\mathfrak{B}_2 = (\sqrt{c})\sqrt{b};$$
$$M\mathfrak{C}_1 = (\sqrt{b})\sqrt{c};\; M\mathfrak{C}_2 = (\sqrt{a})\sqrt{c};$$

und die Gleichung (46) nimmt in diesem Falle folgende Gestalt an:

$$\frac{\sqrt{a}}{M}\left[(\sqrt{a})\cos\lambda + (\sqrt{b})\cos\mu + (\sqrt{c})\cos\nu\right] = 0$$

oder

$$\sqrt{a}\left[\sqrt{a}\frac{(\cos\lambda)}{M} + \sqrt{b}\frac{(\cos\mu)}{M} + \sqrt{c}\frac{(\cos\nu)}{M}\right] = 0,$$

oder endlich:

$$k_x\sqrt{a} + k_y\sqrt{b} + k_z\sqrt{c} = 0,$$

woraus im Einklange mit dem im §. 1 Besprochenen hervorgeht, dass auch zwei von den conjugirten orthogonalen Axen zur Ebene

(47) $$x\sqrt{a} + y\sqrt{b} + z\sqrt{c} = 0$$

parallel sind, — die dritte hingegen auf (47) senkrecht steht.

Die in diesen Paragraphen niedergelegten Betrachtungen bieten überhaupt genügende Mittel an die Hand, um in den Fällen, wo die sehr einfache Construction eines speciellen conjugirten Axensystems für den vorgelegten Zweck nicht ausreicht, ein orthogonales conjugirtes Axensystem ausfindig zu machen, und die zugehörige einfachste Gleichungsform des in der vorgelegten Gleichung ausgeprägten Gebildes aufzustellen.

Auf Grund der in (15) aufgestellten kubischen Gleichung wird es uns möglich sein, einige sehr einfache Relationen aufzustellen, in denen namentlich für Mittelpunktsflächen überraschend einfache Gesetze sich ausprägen, denen die Parameter dieser Gebilde zu entsprechen haben, mögen sie sonst einem beliebigen conjugirten Axensysteme entlehnt worden sein. Die Mittelpunktsflächen bieten in Bezug auf die unzählig vielen möglichen conjugirten Axensysteme folgende Gleichungsformen:

$$\begin{array}{ll} p_1x^2+q_1y^2+r_1z^2=1 \;\ldots\ldots\ldots & (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \\ p_2x^2+q_2y^2+r_2z^2=1 \;\ldots\ldots\ldots & (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \\ p_3x^2+q_3y^2+r_3z^2=1 \;\ldots\ldots\ldots & (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \mathfrak{P}x^2+\mathfrak{Q}y^2+\mathfrak{R}z^2=1 \;\ldots\ldots\ldots & \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \tag{48}$$

Neben jeder dieser Gleichungsformen steht die zugehörige Axenwinkelgruppe angedeutet; neben der letzteren ist jeder der Axenwinkel mit dem Betrage $\frac{\pi}{2}$ ausgestattet, zum Zeichen, dass die betreffende Gleichungsform dem orthogonal conjugirten Axensysteme angehört.

Geht man von einer beliebigen Gleichung in (48) aus, so ist es klar, dass man aus jeder derselben zur kubischen Gleichung (15) gelangen muss, deren Wurzeln offenbar durch Coëffizienten der letzten Gleichung (48) repräsentirt werden, und die Relation:

$$s=\mathfrak{P}; \quad s'=\mathfrak{Q}; \quad s''=\mathfrak{R} \tag{49}$$

veranlassen.

Mag man also den Buchstaben p, q, r, α, β, γ beliebige Zeiger beilegen, so findet man nach Anleitung (16) folgende kubische Gleichung:

$$Ms^3-(p\sin^2\alpha+q\sin^2\beta+r\sin^2\gamma)\,s^2+(pq+pr+qr)\,s-pqr=0,$$

oder

$$\frac{M}{pqr}s^3-\left(\frac{\sin^2\alpha}{qr}+\frac{\sin^2\beta}{pr}+\frac{\sin^2\gamma}{pq}\right)s^2+\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)s-1=0. \tag{50}$$

Diese Gleichung behält stets dieselben Coëffizienten, mag man den Buchstaben p, q, r, α, β, γ, M beliebige Zeiger beilegen; und selbst dann, wenn man $p=\mathfrak{P}$, $q=\mathfrak{Q}$, $r=\mathfrak{R}$; $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$, $M=1$ setzt.

Im letzteren Falle erhält man:

$$\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}}\cdot s^3-\left(\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}+\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}+\frac{1}{\mathfrak{Q}\mathfrak{R}}\right)s^2+\left(\frac{1}{\mathfrak{P}}+\frac{1}{\mathfrak{Q}}+\frac{1}{\mathfrak{R}}\right)s-1=0. \tag{51}$$

Und aus der Vergleichung von (50) mit (51):

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{\mathfrak{P}}+\frac{1}{\mathfrak{Q}}+\frac{1}{\mathfrak{R}};$$

(52)
$$\frac{\sin^2\alpha}{qr}+\frac{\sin^2\beta}{pr}+\frac{\sin^2\gamma}{pq}=\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}+\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}+\frac{1}{\mathfrak{Q}\mathfrak{R}};$$

$$\frac{M}{pqr}=\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}}.$$

Denkt man sich die Längen $\pm\sqrt{\frac{1}{p}};\ \pm\sqrt{\frac{1}{q}};\ \pm\sqrt{\frac{1}{r}};\ \pm\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{P}}};\ \pm\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{Q}}};\ \pm\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{R}}}$ vom Ursprunge aus auf den zugehörigen conjugirten Axen abgeschnitten, so erhält man sechs Punkte, von denen nur diejenigen Paare gleichzeitig auch der Mittelpunktsfläche angehören, welche durch Ausdrücke mit positiver Zahl unter dem Wurzelzeichen gegeben sind. Diese sechs Axensegmente heissen Halbaxen der betreffenden Mittelpunktsfläche. — Je nach Beschaffenheit der vorliegenden Fläche werden die quadrirten Halbaxen entweder sämmtlich positiv ausfallen (Ellipsoïd) oder es ergeben sich unter denselben eines oder zwei Paare negativ (ungetheiltes oder getheiltes Hyperboloïd).

Wenn wir die Bedeutung der quadrirten Halbaxen in diesem Sinne auffassen, so können wir die in (52) niedergelegten Resultate in folgender Weise ausdrücken:

1. Wenn man in jeder der conjugirten Coordinatenebenen aus den in derselben vorkommenden Halbaxensegmenten ein Parallelogramm bildet, die diesen Parallelogrammen zukommenden Flächeninhalte quadrirt, mit gehörigen Vorzeichen versieht, und durch Addition verbindet, so erhält man bei jedem conjugirten Axensysteme stets eine und dieselbe Summe.

2. Je drei einem beliebigen Axensysteme zukommenden Halbaxen geben eine constante aus ihren Quadraten gebaute Summe.

3. Ein aus den conjugirten Axensegmenten gebautes Prisma liefert bei beliebigen conjugirten Axensystemen einen constanten Körperinhalt.

Die Kegelfläche, deren Halbaxen Nullwerthe annahmen, leistet selbstverständlich den hier ausgesprochenen Gesetzen Genüge.

§. 4.

Flächen zweiter Ordnung in Bezug auf die berührenden Ebenen, Normalen, und in Bezug auf den Berührungskegel.

Die im §. 1 unter (6) angeführte Gleichung:

(1)
$$s r^2 + 2 t r + u \xi = 0$$

war in Bezug auf den Umstand, dass wir den Standpunkt (ξ, η, ζ) in die Sehnenmittelpunkte versetzten, die Quelle aller der Untersuchungen und Resultate, welche den Inhalt der vorhergehenden Paragraphe bilden.

Eine anderweitige zweckmässige Verfügung über die Wahl des Standpunktes (ξ, η, ζ) und der Sehnenrichtungen wird uns vielfache Anhaltspunkte gewähren, um aus der Gleichung (1) die weitere Belehrung über die allgemeinen Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung in ausgiebiger Weise zu schöpfen.

Die Gleichung (1) liefert beim angenommenen fixen Ausgangspunkte (ξ, η, ζ) für je eine angenommene Sehnenrichtung jedesmal zwei Werthe von r; man erhält auf diese Weise in den Richtungen $L, L', L'', L'''\ldots$ die entsprechenden Coëffizientenwerthe $s, s', s'', s'''\ldots$ und die zugehörigen Radienpaare:

$$(r_1 r_2);\ (r_1' r_2');\ (r_1'' r_2'');\ (r_1''' r_2''')\ \ldots$$

welche der Gleichung (1) zufolge die Relationen:

$$s r_1 r_2 = s' r_1' r_2' = s'' r_1'' r_2'' = s''' r_1''' r_2''' = \ldots = u_\xi \tag{2}$$

erfüllen.

Wählt man aber als Ausgangspunkt das Flächencentrum (ξ', η', ζ'), so erhält man in diesem Falle:

$$T_{\xi'} = T_{\eta'} = T_{\zeta'} = 0 \text{ und } u_{\xi'} = \overset{\xi'}{T} \tag{3}$$

und man bekömmt mit Zugrundelegung der oben angeführten Richtungen L, L', L'', L''' aus der Gleichung (1) je zwei gleiche Radienwerthe, welche der Ordnung nach mit $R, R', R'', R'''\ldots$ bezeichnet, zur Erfüllung folgender Relationen beitragen:

$$sR^2 = s'R'^2 = s''R''^2 = s'''R'''^2 \ldots = \overset{\xi'}{T} \tag{4}$$

aus (2) und (4) erhält man, die entsprechenden Gleichungsglieder durch einander dividirend:

$$\frac{R^2}{r_1 r_2} = \frac{R'^2}{r_1' r_2'},\ \frac{R''^2}{r_1'' r_2''} = \frac{R'''^2}{r_1''' r_2'''}, = \ldots = (\overset{\xi'}{T} : u_\xi). \tag{5}$$

Sind die Richtungen L, L', L'', L''' so beschaffen, dass die aus (ξ, η, ζ) ausgehenden Strahlen die betreffende Fläche berühren, dann erhält man:

$$r_1 = r_2 = r;\ r_1' = r_2' = r';\ r_1'' = r_2'' = r'';\ r_1''' = r_2''' = r''' \ldots \tag{6}$$

und zufolge (6) erhalten wir aus (5):

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{R'^2}{r'^2} = \frac{R''^2}{r''^2} = \frac{R'''^2}{r'''^2} \ldots = \frac{\overset{\xi'}{T}}{u_\xi} \text{ oder } \frac{R}{r} = \frac{R'}{r'} = \frac{R''}{r''} = \frac{R'''}{r'''} \ldots = \sqrt{\frac{\overset{\xi'}{T}}{u_\xi}}. \tag{7}$$

Sind in (5) die aus dem Centrum ausgehenden Radien $R, R', R'', R'''\ldots$ einander gleich, so müssen auch die aus (ξ, η, ζ) ausgehenden Strahlenproducte einander gleich ausfallen, und ihre Begrenzungspunkte mit der Fläche sind auf der Oberfläche einer und derselben Kugel gelagert, und umgekehrt. Wenn nebstbei die aus dem Punkte $(\xi\,\eta\,\zeta)$ ausgehenden Strahlen die Fläche berühren, so sind sie sämmtlich gleich lang.

Nehmen wir jetzt irgend einen der Flächenpunkte selbst zum Ausgangspunkte (ξ, η, ζ) an, so erhalten wir vor allem:

$$u_\xi = \xi T_\xi + \eta T_\eta + \zeta T_\zeta + \overset{\xi}{T} = 0 \tag{8}$$

und die Gleichung (1) besitzt in diesem Falle für je eine angenommene Richtung die Wurzeln:

$$r_1 = 0;\ -r_2 = \frac{t}{s} = \frac{(k_x T_\xi + k_y T_\eta + k_z T_\zeta)}{s}. \tag{9}$$

Der Endpunkt des Radius r_1 ist der Ausgangspunkt selbst, und der Endpunkt von r_2 ist irgend ein anderer Punkt der Fläche; der Werth r_2 ist gleichzeitig auch der Werth der entsprechenden Sehnenlänge.

Sollen diese von (ξ, η, ζ) ausgehenden Strahlen die Fläche berühren, so müssen die Richtungen so beschaffen sein, dass die entsprechenden Sehnenlängen sämmtlich Nullwerthe annehmen, dass somit die zu $L, L', L'', L'''\ldots$ gehörigen Richtungscomponenten die Bedingung: $k_x T_\xi + k_y T_\eta + k_z T_\zeta = 0$ erfüllen.

Unter den in (10) angedeuteten Richtungen lassen sich auch specielle Richtungen denken, welche gleichzeitig der Bedingung $s = 0$ genügen und den Werth der Sehnenlänge $^0/_0$ zum
(10) Vorscheine bringen. Solche aus dem Flächenpunkte ausgehende Strahlen sind demgemäss mit allen ihren Punkten der Fläche angehörig.

Im Allgemeinen gehen die aus (ξ, η, ζ) ausgehenden der Bedingung (8) und (10) genügenden Strahlen mit der Fläche eine Berührung der ersten Ordnung ein, und sind wegen (10) sämmtlich in einer Ebene enthalten, welche die Fläche im Punkte (ξ, η, ζ) berührt, und desswegen eine berührende Ebene genannt wird.

Der in (10) aufgestellten Bedingung gemäss erhält die analytische Gleichung der berührenden Ebene folgende Form:

(11) $$xT_\xi + yT_\eta + zT_\zeta + \Delta = 0,$$

wo Δ eine constante Grösse sein wird. Da aber dieser Ebene auch der Punkt (ξ, η, ζ) angehört, so erhält man:

$$\xi T_\xi + \eta T_\eta + \zeta T_\zeta + \Delta = 0,$$

welche in Verbindung mit (8), $\Delta = -\overset{\xi}{T}$ liefert, und die Gleichung der berührenden Ebene in der Form:

(12) $$xT_\xi + yT_\eta + zT_\zeta + \overset{\xi}{T} = 0$$

erscheinen lässt.

Hieraus ist für die Richtung der Normalen im Punkte (ξ, η, ζ)

$$\cos\lambda = \frac{T_\xi \sqrt{M}}{\rho};\ \cos\mu = \frac{T_\eta \sqrt{M}}{\rho};\ \cos\nu = \frac{T_\zeta \sqrt{M}}{\rho}$$

$$k_x = \frac{(T_\xi)}{\rho\sqrt{M}};\ k_y = \frac{(T_\eta)}{\rho\sqrt{M}};\ k_z = \frac{(T_\zeta)}{\rho\sqrt{M}}$$

wo

$$\rho^2 = T_\xi(T_\xi) + \&$$

und die Gleichung der Normalen im Punkte (ξ, η, ζ):

(13) $$\frac{(x-\xi)}{(T_\xi)} = \frac{(y-\eta)}{(T_\eta)} = \frac{(z-\zeta)}{(T_\zeta)} = r.$$

Denkt man sich den Berührungspunkt (ξ, η, ζ) mit dem Centrum (ξ', η', ζ') verbunden, so erhält man zur Bestimmung der Richtung des betreffenden Durchmessers:

$$k'_x = \frac{\xi-\xi'}{\rho'};\ k'_y = \frac{\eta-\eta'}{\rho'};\ k'_z = \frac{\zeta-\zeta'}{\rho'}$$

$$\rho'^2 = (\xi-\xi')\,[\xi-\xi'] + \&$$

Hieraus findet man zur Bestimmung der Richtung der diesem Strahle zugehörigen Diametralebene:

$$w_x = ak'_x + c'k'_y + b'k'_z = \frac{(a\xi + c'\eta + a'\zeta + a'')}{\rho'} - \frac{(a\xi' + c'\eta' + a'\zeta' + a'')}{\rho'} = \frac{T_\xi - T_{\xi'}}{\rho'}$$

hiemit wegen $T_{\xi'} = T_{\eta'} = T_{\zeta'} = 0$

$$\frac{w_x}{T_\xi} = \frac{w_y}{T_\eta} = \frac{w_z}{T_\zeta} = \frac{1}{\rho'}. \qquad (13)'$$

Aus der Vergleichung dieser Gleichung mit (12) schliesst man, dass die berührende Ebene im Punkte (ξ, η, ζ) zu derjenigen Diametralebene parallel sein muss, welche dem Berührungsdurchmesser conjugirt ist.

Wird verlangt, dass eine berührende Ebene durch einen ausserhalb der Fläche liegenden Punkt (x', y', z') hindurchgehe, so erhalten wir zur Bestimmung des entsprechenden Berührungspunktes, welcher der Ebene und der Fläche gemeinschaftlich angehören muss, folgende Relationen:

$$u_\xi = 0; \; x'T_\xi + y'T_\eta + z'T_\zeta + T = 0. \qquad (14)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Relationen (14) auch so geschrieben werden können:

$$u_\xi = 0; \; \xi T_{x'} + \eta T_{y'} + \zeta T_{z'} + \overset{x'}{T} = 0. \qquad (15)$$

Betrachtet man einstweilen (ξ, η, ζ) als variabel, so stellt die erste Gleichung in (15) die Flächengleichung vor, die zweite hingegen ist die analytische Gleichung einer Ebene. Die Coëxistenz der Relationen (15) verlangt somit, dass (ξ, η, ζ) denjenigen Punkten entnommen werden solle, welche in der gegebenen Fläche und in der durch (15) angedeuteten Ebene gleichzeitig gelagert sind. Die Aufeinanderfolge dieser Punkte bildet eine ebene Curve der zweiten Ordnung und jeder ihrer Punkte ist fähig, den verlangten Berührungspunkt vorzustellen. Diese Curve könnten wir Berührungscurve und das durch diese Curve begrenzte ebene (16) Flächenstück die Berührungsscheibe nennen. Die Aufeinanderfolge der Strahlen, die vom Punkte (x', y', z') ausgehen, und an dem Umfange der gedachten Berührungscurve gleiten, bildet den Verlauf einer Kegelfläche der zweiten Ordnung, welche im Punkte $(x'y'z')$ ihren Scheitel besitzt, die gegebene Fläche berührt, und aus diesem Grunde der berührende Kegel genannt wird.

Die Verbindungslinie des Punktes $(x'y'z')$ mit dem Flächencentrum (ξ', η', ζ') habe die Richtungscomponenten k_x, k_y, k_z und man erhält wie in (13)'

$$\frac{w_x}{T_{x'}} = \frac{w_y}{T_{y'}} = \frac{w_z}{T_{z'}} = \frac{1}{\rho}; \; \rho^2 = (x' - \xi')[x' - \xi'] + \&, \qquad (17)$$

woraus erhellt, dass die durch $(x'y'z')$ gehende Centralrichtung zur Diametralebene eine solche Ebene besitzt, welche zu der in (16) erwähnten Berührungsscheibe parallel ist.

Sind nun p_1, p_2 die Punkte, in welchen die Fläche von der durch $(x'y'z')$ gehenden Centrallinie getroffen wird, so müssen die in p_1 und p_2 gelegten berührenden Ebenen an die Fläche zur Berührungsscheibe und unter einander parallel sein.

Sei r'' die Distanz des Punktes $(x'y'z')$ von der in (15) dargestellten Berührungsscheibe, gemessen in irgend einer etwa durch k_x, k_y, k_z bestimmten Richtung L, so findet man der in der Einleitung gegebenen Relation (57) gemäss:

(18) $$r'' = -\frac{x'T_{x'} + y'T_{y'} + z'T_{z'} + \overset{x'}{T}}{k_x T_{x'} + k_y T_{y'} + k_z T_{z'}}.$$

Derselbe durch den Punkt $(x'y'z')$ gehende Strahl L trifft auch die gegebene Fläche in den Entfernungen r_1, r_2, deren Werthe sich aus der bekannten Gleichung:

$$sr^2 + 2tr + u_{x'} = 0$$

in folgender Weise ergeben. Man findet:

$$s(r_1+r_2) = -2t = -2[k_x T_{x'} + k_y T_{y'} + k_z T_{z'}]$$

$$sr_1r_2 = u_{x'} = x'T_{x'} + y'T_{y'} + z'T_{z'} + \overset{x'}{T},$$

hiemit

(19) $$\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2} = -\frac{x'T_{x'} + y'T_{y'} + z'T_{z'} + \overset{x'}{T}}{k_x T_{x'} + k_y T_{y'} + k_z T_{z'}}.$$

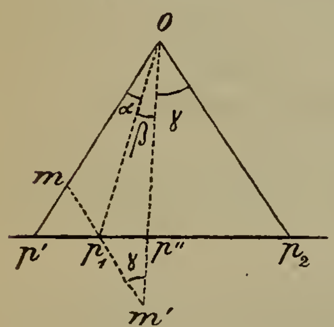
Aus der Vergleichung von (18) und (19) erhält man:

$$2r_1r_2 = r''(r_1+r_2)$$

oder

(20) $$r_1(r_2 - r'') = r_2(r'' - r_1).$$

Der Gleichung (20) gemäss bilden die Punkte p', p_1, p'', p_2, von denen der erste durch $(x'y'z')$ bestimmt ist, und die übrigen drei beziehungsweise den Radien r_1, r'', r_2, als Endpunkte angehören, ein harmonisches Punktsystem, welches in zwei Paare: $p'p''$ und p_1p_2 von je einander zugeordneten Punkten zerfällt. Ist die Lage von $p'p_1p_2$ bereits gegeben, so findet man die Lage des Punktes p'' durch folgende sehr einfache Construction:



Man verbindet p' und p_2 mit irgend einem ausserhalb der Geraden $p'p_2$ liegenden Punkte 0, zieht durch p_1 die Gerade $mm'//0p_2$ und macht $p_1m' = p_1m$; dann ist p'' derjenige Punkt, in welchem die Gerade $p'p_2$ von der Geraden $0m'$ getroffen wird.

Um diese Construction nachzuweisen, findet man aus dem Dreiecke $0mp_1$:

$$\sin\alpha : \sin(\alpha+\beta+\gamma) = mp_1 : 0p_1;$$

ebenso aus dem Dreiecke $om'p_1$

$$\sin\beta : \sin\gamma = m'p_1 : 0p_1 = mp_1 : 0p_1;$$

hieraus findet man:

(21) $$\sin\alpha\sin\gamma = \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

Ist h die senkrechte Distanz des Punktes 0 von $p'p_2$, so erhält man die Flächeninhalte der Dreiecke $p'0p_1$; $p''0p_2$; p_10p''; $p'0p_2$ in folgenden Doppelformen:

$$p'p_1 \,.\, h = 0p' \,.\, 0p_1 \sin\alpha;\quad p''p_2 \,.\, h = 0p'' \,.\, 0p_2 \sin\gamma$$

$$p_1p'' \,.\, h = 0p_1 \,.\, 0p'' \sin\beta;\quad p'p_2 \,.\, h = 0p_1 \,.\, 0p_2 \sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

Durch Multiplication der ersten zwei Gleichungen erhält man:

$$p'p_1 \,.\, p''p_2 \,.\, h^2 = r_1(r_2 - r'')\, h^2 = op' \,.\, op_1 \,.\, op'' \,.\, op_2 \sin \alpha \sin \gamma,$$

eben so

$$p_1 p'' \,.\, p'p_2 \,.\, h^2 = r_2(r'' - r_1)\, h^2 = op' \,.\, op_1 \,.\, op'' \,.\, op_2 \sin \beta \,.\, \sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

und mit Rücksicht auf (21) erhält man schliesslich im Einklange mit (20)

$$r_1(r_2 - r'') = r_2(r'' - r_1).$$

Wenn man also von p' aus drei Strahlen legt und die Durchschnittspunkte der gegebenen Fläche mit diesen Strahlen bestimmt, und dann nach der eben gegebenen Methode in jedem dieser drei Strahlen den vierten harmonischen Punkt bestimmt; so erhält man drei Punkte, welche wegen (20) in die Berührungsscheibe fallen müssen, und zur Bestimmung ihrer Lage vollkommen hinreichen.

Ist der Punkt $(x'y'z')$ auf der concaven Seite der gegebenen Fläche angenommen, so ist natürlicherweise von diesem Punkte aus kein berührender Kegel an die Fläche möglich, und die in (15) analytisch bestimmte Ebene wird wohl der in (20) ausgeprägten Bedingung Genüge leisten, ohne je mit der Fläche einen Durchschnitt zu geben; und die oben erwähnte Berührungscurve zu veranlassen. Diese Benennungen sind in solchen Fällen uneigentlich, wir werden daher besser thun, wenn wir von den zwei harmonisch zugeordneten Gebilden das Ausgangsgebilde (hier der Punkt $x'y'z'$) mit dem Namen Pol, und das gefolgerte Gebilde [hier die Ebene (15)] mit dem Namen das poläre Gebilde belegen.

Nimmt man die Gerade

$$x' = mz' + m';\; y' = nz' + n' \;.\;.\;.\;.\; L' \tag{22}$$

zur Pol-Geraden an, so erhält man zur Bestimmung des polären Gebildes aus (14) und (22) folgende Gleichungen:

$$(mz' + m')T_\xi + (nz' + n')T_\eta + z'T_\zeta + \overset{\xi}{T} = 0,$$

welche für jedes beliebige z' bestehen soll, und daher in folgende zwei Relationen zerfällt:

$$mT_\xi + nT_\eta + T_\zeta = 0;\quad m'T_\xi + n'T_\eta + \overset{\xi}{T} = 0, \tag{23}$$

oder auch:

$$L'' \;.\;.\;.\;.\; \begin{aligned} &\xi\,[am + c'n' + b'\,] + \eta\,[bn + a' + c'm] + \zeta\,[c + b'm + a'n] + (a''m + b''n + c'') = 0 \\ &\xi\,[am' + c'n' + a''] + \eta\,[bn' + c'm' + b''] + \zeta\,[b'm' + a'n' + c''] + (a''m' + b''n' + d) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Das zur Polgeraden L' gehörige poläre Gebilde ist somit ebenfalls eine Gerade L'', welche in (23) oder (24) analytisch dargestellt ist.

Wird die gegebene Fläche von L'' getroffen, so geschieht diess in zwei Punkten, deren jeder in einer solchen berührenden Ebene liegt, welche durch die Gerade L' hindurchgeht.

Die erste in (23) gegebene Ebene bezeichne man mit E', die zweite mit E''', eine durch L' und das Flächencentrum gelegte Ebene mit E'', eine durch das Flächencentrum und den Punkt $(x = m', y = n', z = 0)$ gelegte Gerade mit L''', die Durchschnittsgerade von E' und E'' durch L, und es wird leicht sein folgende Behauptungen mit Beweisen zu belegen:

(25) Die zur Sehnenrichtung L' gehörige Diametralebene ist parallel zu E'
„ „ „ L''' „ „ „ „ „ E'''.

Somit ist die durch L' und L''' gelegte Ebene E'' eine zur Sehnenrichtung L'' zugehörige Diametralebene.

(26) Schliesslich ist $L//E'$ und $L//E''$, bildet somit mit den Richtungen L' und L'' ein conjugirtes Axensystem.

Zum Behufe der Nachweisungen in (25) braucht man nur die Werthe w_x, w_y, w_z in Bezug auf die Richtungen L' und L''' zu berechnen und man erfährt, dass diese Werthe im ersten Falle den Coëfficienten der ersten in (24), im zweiten Falle den Coëfficienten der zweiten Gleichung in (24) proportionirt ausfallen.

Nimmt man in der Geraden L' einen Punkt $P''\ldots(x''y''z'')$ als Pol an, so ist die zugehörige poläre Ebene folgende:

(27) $$\xi T_{x''}+\eta T_{y''}+\zeta T_{z''}+\overset{x''}{T}=0 \text{ oder } x''T_\xi+y''T_\eta+z''T_\zeta+\overset{\xi}{T}=0.$$

Diese Ebene schneidet die Gerade L in einem Punkte $P'''(\xi, \eta, \zeta)$, welcher der Gegenpunkt von P'' heissen mag. Hiebei schliessen sich an die Gleichung (27) noch folgende an:

(28) $$x''=mz''+m';\ y''=nz''+n';\ \xi=m\zeta+m';\ \eta=n\zeta+n'.$$

Mittelst der fünf Gleichungen in (27) und (28) lassen sich die Coordinaten ξ, η, ζ, $y''x''$ bestimmen, sobald man den Werth von z'' annimmt. Hiedurch ist nun P''' vollkommen bestimmt.

Nimmt man umgekehrt den Punkt P''' zum Pol an, so ergeben sich zur Bestimmung der Lage des zugehörigen Gegenpunktes (ξ', η', ζ') vollkommen dieselben Gleichungen, wie in (27) und (28) mit dem Unterschiede. dass in den letzteren die Buchstaben $\xi\eta\zeta$ mit Strichen versehen sein werden. Hieraus schliesst man, dass man $\xi'=\xi$; $\eta'=\eta$ und $\zeta'=\zeta$ finden wird, dass somit P'' als Gegenpunkt von P''' sich ergeben muss. Solcher Paare von Gegenpunkten findet man unendlich viele.

Ist $P\ldots(xyz)$ der Durchschnittspunkt der Geraden L' mit der Ebene E', so erhält man zur Bestimmung der Coordinaten von P folgende Gleichungen:

(29) $$\begin{gathered} mT_x+nT_y+T_z=0 \\ x=mz+m';\ y=nz+n'. \end{gathered}$$

Wenn wir die Bedeutung von v, g, $u_{m'}$ aus den Relationen:

(30) $$\begin{aligned} v&=m'(am+c'n+b')+n'(bm+a'+c'm)+(a''m'+b''n'+c'') \\ g&=m(am+c'n+b')+n(bm+a'+c'm)+(c+a'n+b'n) \\ u_{m'}&=am'^2+bn'^2+2c'm'n'+2a''m'+2b''n'+d \end{aligned}$$

entnehmen, so finden wir mittelst den Gleichungen (27), (28) und (29) folgende Resultate:

$$z=-\frac{v}{g};\quad \zeta=-\frac{vz''+u_{m'}}{gz''+v},$$

hieraus:

$$z-\zeta=\frac{vz''+u_{m'}}{gz''+v}-\frac{v}{g};\quad z-z''=-\frac{gz''+v}{g}$$

und

$$(z-\zeta)(z-z'')=\frac{v^2}{g^2}-\frac{u_{m'}}{g}. \tag{31}$$

Man hat aber für die Richtung der Geraden L'

$$k_z^2=1:(m^2+n^2+1+2n\cos\alpha+2m\cos\beta+2mn\cos\gamma)=1:\mathfrak{Z}$$

$$\frac{z-\zeta}{k_z}=\overline{P''P}=\Delta''';\quad \frac{z-z''}{k_z}=\overline{PP''}=\Delta'';$$

hiemit wegen (31)

$$\Delta''.\,\Delta'''=\left(\frac{v^2}{g^2}-\frac{u_{m'}}{g}\right).\,\mathfrak{Z}. \tag{32}$$

Hier sehen wir, dass das Product aus den Distanzen des Punktes P von zwei zusammengehörigen Gegenpunkten von der Wahl des Werthes von z'' vollkommen unabhängig ist; dass somit dieses Product den in (32) ersichtlichen Werth für ein beliebiges Gegenpunktenpaar beibehalten muss.

Nimmt man endlich die Ebene

$$z'=mx'+ny'+r \tag{33}$$

zur Polebene an, so erhält man als Gleichung des zugehörigen polären Gebildes folgende:

$$x'T_\xi+y'T_\eta+(mx'+ny'+r)\,T^\zeta+\overset{\xi}{T}=0. \tag{34}$$

Diese zerfällt wegen beliebigen Werthen von x' und y' in folgende drei:

$$T_\xi+mT_\zeta=0;\quad T_\eta+nT_\eta=0;\quad rT_\zeta+\overset{\xi}{T}=0, \tag{35}$$

wodurch drei Ebenen angedeutet sind, welchen das poläre Gebilde gemeinschaftlich angehört. In diesem Falle ist somit das poläre Gebilde ein Punkt, in welchem sich die Ebenen (35) schneiden. Es müsste dieser die Gleichung $u_\xi=0$ erfüllen, also in der gegebenen Fläche enthalten sein, damit die Ebene (33) die Fläche berühre. Ist der poläre Punkt nicht in der Fläche enthalten, so könnte man durch diesen Punkt eine unzählige Anzahl von Ebenen legen, deren jede die Fläche in einer Kegelschnittslinie schneidet und auf einen berührenden Kegel hinweist, dessen Scheitel in der Polebene sich aufhält.

Die in (33) liegende Gerade $[y'=0;\ z'=mx'+r]$ liefert für $\rho^2=m^2+1+2m\cos\beta$ die Richtungscomponenten

$$\rho k_x=1;\quad \rho k_y=0;\quad \rho k_z=m;$$

hiemit:

$$\rho w_x=a+c'm;\quad \rho w_y=a'm+c';\quad \rho w_z=cm+b';$$

stellt somit eine Sehnenrichtung vor, deren zugehörige Diametralebene durch die erste Gleichung in (35) dargestellt ist. Eben so lässt es sich zeigen, dass die in (33) enthaltene

Gerade $L''\ldots(x'=0;\ z'=ny'+r)$ eine Sehnenrichtung repräsentirt, deren zugehörige Diametralebene durch die zweite Gleichung in (35) dargestellt ist. Es ist demgemäss die Verbindungsgerade L des polären Punktes mit dem Flächencentrum, welche den ersten zwei in (35) gegebenen Ebenen gemeinschaftlich ist, der Richtung der in (33) aufgestellten Polebene als conjugirter Durchmesser angehörig.

Hieraus folgt, dass die berührenden Ebenen in denjenigen Punkten, in welchen die angegebene Fläche von L getroffen wird, zu der Polebene parallel sein müssen.

Hier kann noch bemerkt werden, dass die merkwürdige Eigenschaft der dem polären Gebilde angehörigen Fundamentalgleichung:

(36) $$\xi T_{x'} + \eta T_{y'} + \zeta T_{z'} + \overset{\xi}{T} = 0$$

vermöge welcher in derselben x' mit ξ, y' mit η, z' mit ζ gleichzeitig vertauscht werden dürfen, ohne die Gleichung zu stören, die Behauptung rechtfertigt: dass von zwei als Pol und Poläres einander angehörigen Gebilden, ein beliebiges als Pol angenommen, das zweite als Poläres liefern muss.

Schliesslich möge uns gestattet sein, folgende recht interessante Eigenschaft der Flächen zweiter Ordnung zu erweisen:

(37) Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung F_1, F_2 einander schneiden, so erhält man in der Regel zwei Durchschnittcurven C_1 und C_2 von der Beschaffenheit, dass, wenn eine von diesen Curven als eine ebene vorausgesetzt wird, die andere nothwendig auch eine ebene Curve sein muss.

Beweis. Ist etwa C_1 eine ebene Curve, so beziehe man die Flächen F_1, F_2 auf ein Axensystem Ox, Oy, Oz, von welchen Ox, Oy in die Ebene C_1 zu liegen kommen, und man erhält mit Rücksicht auf den Umstand, dass für $z=0$ für beide Flächen die gemeinschaftliche Schnittcurve C_1 hervorgehen soll, die Gleichungen dieser Flächen in folgender Form:

(38) $$\begin{aligned} F_1 &= ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'zx+2c'xy+2a''x+2b''y+2c''z+d=0 \\ F_2 &= ax^2+by^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2c'xy+2a''x+2b''y+2C''z+d=0. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man:

(39) $$F_2-F_1 = z\,\{2(B'-b')x+2(A'-a')y+(C-c)z+2(C''-c'')\}=0.$$

Die vorstehende Gleichung wird durch alle in C_1 und C_2 liegende Punkte erfüllt, und deutet auf zwei Ebenen, von denen die erste $[z=0]$ der Annahme gemäss die Curve C_1 in sich enthält, und somit die zweite $[2(B'-b')x+2(A'-a')y+(C-c)z+2(C''-c'')=0]$ der Aussage in (37) entsprechend die Curve C_2 beherbergen muss.

Ergiebt sich hiebei:

$$B'=b';\quad A'=a';\quad C=c,$$

so erhält man:

(40) $$F_2-F_1 = 2(C''-c'')z=0.$$

In diesem Falle ist C_1 die einzig mögliche Schnittcurve. Für $A'=a'$, $B'=b'$, $C''=c''$ hat man:

(41) $$F_2-F_1=(C-c)z^2=0.$$

In diesem Falle fallen C_1 und C_2 in einander und demgemäss ist C_1 eine Berührungscurve.