DAS

INDEPENDENTE BILDUNGSGESETZ DER KETTENBRÜCHE.

VON

Dr. SIEGMUND GÜNTHER,
DOCENT AN DER POLYTECHNISCHEN SCHULE IN MÜNCHEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 14. OCTOBER 1875.

Nahezu unzählbar ist die Menge der Versuche, welche man angestellt hat, um das independente Bildungsgesetz der Näherungswerthe eines Kettenbruches allgemein zu eruiren, allein noch scheint es zur Zeit nicht gelungen zu sein, dieses Ziel endgiltig zu erreichen. Fassen wir diese Versuche sämmtlich zusammen, so können wir drei wesentlich verschiedene Kategorien unterscheiden, unter welche sich dieselben subsumiren lassen.

I. Ältere Mathematiker, unter ihnen besonders Euler und Hindenburg, hielten die analytischen Formen, über welche die Wissenschaft ihrer Zeit disponirte, nicht für ausreichend, um das Problem zu bewältigen, und schufen sich zu diesem Zwecke neue Symbole. So entstanden Euler's Kettenbruch-Algorithmen, so wandte die combinatorische Schule ihre neu eingeführten Involutionen mit besonderer Vorliebe auf die continuirlichen Brüche an. Die Geschichte dieser Epoche haben wir bereits bei einer früheren Gelegenheit 1) ausführlich verfolgt; sie lehrt uns, dass all diese Methoden, so geistreich sie waren[1] und so gefügig sie sich theilweise für die praktische Anwendung gestalteten, vom theoretischen Standpunkte aus doch nur als Nothbehelfe gelten konnten. Denn ehe man ihnen einen wirklich abschliessenden Charakter zuertheilen konnte, hätte doch nothwendigerweise erst bewiesen sein müssen, dass mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln der Analysis in der That nicht auszureichen sei. Allein ein solcher Beweis ward nie zu leisten versucht, und so musste

[1] Das Wesen des Hindenburg'schen Verfahrens zu verdeutlichen, möge hier eine historisch höchst interessante Stelle eingeschaltet werden. Die unerschöpfliche Bibliothek des Fürsten Boncompagni in Rom enthält ein analytisches Manuscript, welches dem Ende des vergangenen Jahrhunderts entstammt, allen Anzeichen nach sogar dem Beginne der combinatorisch-analytischen Bewegung. Es repräsentirt uns somit die Anschauungen Hindenburg's in ungetrübter Reinheit.
Die betreffende Stelle (S. 119 der Handschrift) lautet:

„Forme
$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \text{etc.}}}}$$

Problem I. Datam fractionem continuam dictae formae reducere simplicem.

die Frage offen bleiben, ob in den Euler-Hindenburg'schen Symbolisirungen die bestehenden Schwierigkeiten gelöst oder nicht vielmehr blos umgangen waren.

II. Beginnend mit Binet fasste eine zweite Classe von Mathematikern die Aufgabe in einem anderen universelleren Sinne. Es handelte sich für sie darum, ganz allgemein lineare Differenzengleichungen zu integriren; gelang dies, so war auch das uns hier beschäftigende Problem gelöst, wenn auch nicht ganz in dem von uns zu normirenden Sinne. Um den Charakter dieser Gattung von Untersuchungen zu fixiren, erinnern wir an die Lösung von Zehfuss [2]), welche uns die vollkommenste dünkt. Er betrachtet die lineare trinomische Gleichung

$$y_{x+2} = y_{x+1} + p_x y_x$$

und findet als deren allgemeines Integral das folgende

$$y_x = p_0 y_0 \int_0^{1^{(x-2)}} P_{2,x}\, da_2\, da_3 \ldots da_{x-1} + y_1 \int_0^{1^{(x-1)}} P_{1,x}\, da_1\, da_2 \ldots da_{x-1},$$

wo y_0 und y_1 die willkürlichen Constanten, $P_{1,x}$ und $P_{2,x}$ aber gewisse Functionen der $(x-1)$ unabhängig veränderlichen Grössen

$$a_1, a_2 \ldots a_{x-1}$$

bedeuten. Dass wirklich diese Formulirung dasselbe leistet, erhellt sofort, wenn man erwägt, dass bei der Auflösung des obigen Systemes jedes einzelne y als ein Quotient zweier Determinanten von der Form

$$\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{p_a} & 0 & . & . & . & 0 \\ \sqrt{p_a} & 1 & \sqrt{p_{a+1}} & . & . & . & 0 \\ 0 & \sqrt{p_{a+1}} & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

Ut lex progressus appareat construantur involutiones sequentes:

Ima

b	c	d	e	f	g	h
	1	d	e	f	g	h
		b	e	f	g	h
		b	c	f	g	h
			1	f	g	h
		b	c	d	g	h
				d	g	h
				b	g	h
		b	c	d	e	h
				d	e	h
				b	e	h
				b	c	h
					1	h

etc.

IIda

c	d	e	f	g	h
	1	e	f	g	h
		c	f	g	h
		c	d	g	h
			1	g	h
		c	d	e	h
				e	h
				c	h
		c	d	e	f
				e	f
				c	f
				c	d
					1

etc.

...Quibus divisis symbolis exprimetur

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \ldots + \cfrac{1}{h}}} = \frac{[bc\ldots h]\Sigma}{ax\,[bc\ldots h]\Sigma + [cd\ldots h]\Sigma}.\text{“}$$

sich darstellen lässt, oder was dasselbe besagt, dass die Entwickelung jedes trinomischen Systemes auf einen gewöhnlichen Kettenbruch führt[1].

Eine gewisse Eleganz und Einfachheit wird man diesem Verfahren, wie wir es in kurzen Zügen hier vorführten, gewiss nicht absprechen können, aber durchsichtig ist dasselbe nicht. Die explicite Darstellung der Functionen P ist complicirt, und die eigentliche Gesetzmässigkeit in der Bildung der Ausdrücke nur schwer erkenntlich.

III. Gewissermassen als Vervollkommnung der in Classe I charakterisirten Bemühungen erscheint die Zurückführung der Näherungswerthe auf das vollendetste combinatorische Symbol: auf die Determinante. Wir haben in der oben namhaft gemachten Schrift den Nachweis geführt, wie sich unter den Händen von Ramus, Spottiswoode und Heine allmälig eine consequente Transformationsmethode ausbildete, welche durch neuere Forschungen nunmehr eine solche Ausbildung erhalten hat, dass jedes Einzelproblem der Kettenbruchlehre in naturgemässester Weise durch eine Determinanten-Umformung erledigt werden kann. Allein trotz all dieser praktisch nicht hoch genug anzuschlagenden Vorzüge wird sich nicht leugnen lassen, dass für das eigentliche Bildungsgesetz der Näherungsbrüche die Determinanten ebenso wenig Aufschluss gewähren, als die mancherlei anderen Formen, welche man zu diesem Zwecke in Vorschlag gebracht hat.

Nachdem man aber wusste, dass der Nenner des Kettenbruches

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}}$$

der symmetralen Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & -\sqrt{b_2} & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ \sqrt{b_2} & a_2 & -\sqrt{b_3} & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b_3} & a_3 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_{n-1} & -\sqrt{b_n} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \sqrt{b_n} & a_n \end{vmatrix}$$

gleich sei, lag es nahe, auf diese letztere die bekannten Zerlegungssätze für solche Determinanten zur Anwendung zu bringen. Dieser Gedanke findet sich in einer Abhandlung von Studnička 4) durchgeführt; da jedoch daselbst die Diagonalelemente nicht sämmtlich unter einander gleich sind, so konnte das Resultat keine so concise Form gewinnen, als zu wünschen gewesen wäre. Es wird daher nöthig sein, diese Gleichheit vorher herbeizuführen, und wir erreichen dies vermittelst des bekannten Satzes, dass man je zwei Theilnenner und den zwischenliegenden Theilzähler eines Kettenbruches mit einer willkürlichen Zahl ($\gtrless 0$) multipliciren darf, ohne dessen Werth zu verändern.

Mit Rücksicht hierauf ist

$$\frac{P_n}{Q_n} = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}} = \cfrac{\frac{b_1}{a_1}}{1 + \cfrac{\frac{b_2}{a_1 a_2}}{1 + \cfrac{\frac{b_3}{a_2 a_3}}{1 + \cdots + \cfrac{\frac{b_n}{a_{n-1} a_n}}{1}}}},$$

---

[1] Ganz ebenso führt, wie Fürstenau 3) kürzlich dargethan hat, jedes System recurrenter Gleichungen, in welchem allgemein p Unbekannte linear verknüpft erscheinen, auf einen Kettenbruch der $(p-2)$ten Ordnung, wenn wir unter einem

also

$$Q_n = \begin{vmatrix} 1_{(1)} & -\sqrt{\frac{b_2}{a_1 a_2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{b_2}{a_1 a_2}} & 1_{(2)} & -\sqrt{\frac{b_3}{a_2 a_3}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{b_3}{a_2 a_3}} & 1_{(3)} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1_{(n-1)} & -\sqrt{\frac{b_n}{a_{n-1} a_n}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\frac{b_n}{a_{n-1} a_n}} & 1_{(n)} \end{vmatrix}$$

und

$$P_n = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{\partial Q_n}{\partial 1_{(1)}}.$$

Halten wir dies fest, so stellt sich die Aufgabe, welche wir zu lösen haben, als Unterfall der folgenden heraus:

Es soll die symmetrale Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} z & -\alpha_1 & 0 & \cdot\ \cdot & 0 & 0 \\ \alpha_1 & z & -\alpha_2 & \cdot\ \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & z & \cdot\ \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot\ \cdot & z & -\alpha_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot\ \cdot & \alpha_{m-1} & z \end{vmatrix}$$

in eine nach Potenzen von z fortlaufende Reihe entwickelt werden, so zwar, dass jeder Coëfficient einer Potenz von z in geschlossener Form gegeben werde.

Unter geschlossener Form verstehen wir einen algebraischen Ausdruck, in welchen Symbole, mit Ausnahme des gewöhnlichen Summenzeichens, nicht eingegangen sein dürfen. Um von der allgemeinen Aufgabe zum speciellen Falle des Kettenbruches zurückzukehren, hat man einfach

$$z = 1\,, \quad \alpha_p = \sqrt{\frac{b_{p+1}}{a_p\, a_{p+1}}}$$

zu setzen.

Den Coëfficienten von z^{m-q} findet man bekanntlich, indem man alle condiagonalen[1] Unter-Determinanten $q$ten Grades der Determinante

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} z & -\alpha_1 & \cdot\ \cdot & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \cdot\ \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot\ \cdot & 0 & -\alpha_{m-1} \\ 0 & 0 & \cdot\ \cdot & \alpha_{m-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Kettenbruch der ersten Ordnung den gewöhnlichen verstehen. Bei einem Kettenbruch der zweiten Ordnung ist jeder einzelne Theilnenner und Theilzähler selbst wieder ein Kettenbruch der ersten Ordnung, und in dieser Weise schreitet die Bildung fort.

[1] Wir nennen eine Unter-Determinante dann mit der ursprünglichen condiagonal, wenn ihre Diagonal-Elemente sämmtlich in der Diagonale der Haupt-Determinante vorkommen.

summirt. Die Diagonalen dieser Determinanten sind demnach sämmtlich durch Nullen gebildet; ist also q ungerade, so verschwinden alle identisch, für jedes gerade q hat man dagegen Determinanten von der Form

$$\begin{vmatrix} 0 & -\alpha_{(x_1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{(x_1)} & 0 & -\alpha_{(x_2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{(x_2)} & 0 & -\alpha_{(x_3)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{(x_3)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{(x_{2y-3})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{(x_{2y-3})} & 0 & -\alpha_{(x_{2y-2})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{(x_{2y-2})} & 0 & -\alpha_{(x_{2y-1})} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{(x_{2y-1})} & 0 \end{vmatrix} = \prod_{q=0}^{q=y-1} \alpha^2_{(x_{2q+1})} \,.$$

Wir brauchen sonach nur diejenigen Fälle ins Auge zu fassen, in welchen $q = 2p$ ist. Um dann den Coëfficienten von z^{m-2p} zu finden, ist Folgendes zu thun:

Es sind aus den in der Determinante Δ auftretenden Grössen α sämmtliche Producte zu p Factoren zu bilden, so dass, wenn die Indices in der Ordnung des Zahlensystemes fortschreiten, die Differenz zweier unmittelbar aufeinander folgender Indices

$$\geqq 2$$

ist; diese Producte sind hierauf zu quadriren und zu addiren.

Diese Aufgabe lösen wir sofort durch nachstehenden

Lehrsatz. Der Coëfficient der Potenz

$$z^{m-2p}$$

in der Determinanten-Entwickelung hat den Werth

$$\sum_{k=1}^{k=m-2p+1} \quad \sum_{r=o}^{r=p-2} \alpha_k^2 \cdot \alpha^2_{k+2\cdot 1} \cdot \alpha^2_{k+2\cdot 2} \cdots \alpha^2_{k+2\cdot r}\, M,$$

unter M die $(p-r-1)$ fache Summe

$$\sum_{s_1=k+2r+3}^{s_1=m-2p+2r+3} \quad \sum_{s_2=k+2r+3+2\cdot 1}^{s_2=m-2p+2r+3+2\cdot 1} \cdots \sum_{s_{p-r-3}=k+2r+3+2(p-r-4)}^{s_{p-r-3}=m-2p+2r+3+2(p-r-4)}$$

$$\sum_{s_{p-r-2}=k+2r+3+2(p-r-3)}^{s_{p-r-2}=m-2p+2r+3+2(p-r-3)} \alpha^2_{s_1}\,\alpha^2_{s_2}\ldots\alpha^2_{s_{p-r-3}} \cdot \alpha^2_{s_{p-r-2}} \quad \sum_{t=s_{p-r-2}+2}^{t=m-1} \alpha_t^2$$

verstanden.

Beweis. Zunächst ergibt sich aus unserer Formel, dass jedes Einzelproduct aus

$$r+1+p-r-1 = p$$

Factoren besteht, wie erfordert wird. Es kommt also nur noch darauf an darzuthun, dass die Grenzwerthe für jedes einzelne Summenzeichen durch eine richtige Abzählung erhalten wurden.

Verfahren wir bei Bildung der einzelnen Index-Complexionen in der gewöhnlichen Weise der Combinationslehre, so muss k zuerst den Werth 1 annehmen. Dass auch die obere Grenze stimmt, erhellt sofort, wenn man das letzte überhaupt denkbare Product

$$\alpha^2_{m-2p+1} \cdot \alpha^2_{m-2p+1+2\cdot 1} \cdots \alpha^2_{m-2p+1+2(p-2)} \cdot \alpha^2_{m-2p+1+2(p-1)}$$

anschreibt; denn jetzt ist der letzte Index

$$m-2p+1+2(p-1) = m-1.$$

Da es ferner offenbar eine Complexion

$$\alpha^2_k \cdot \alpha^2_{k+2\cdot 1+1} \cdots$$

geben muss, so besteht für r die untere Grenze 0; dass die obere den Werth $(p-2)$ hat, erkennt man durch Betrachtung der Complexion

$$\alpha^2_k \cdot \alpha^2_{k+2\cdot 1} \cdot \alpha^2_{k+2\cdot 2} \cdots \alpha^2_{k+2(p-2)} \cdot \Sigma\alpha^2_t.$$

Auch die dem letzteren Summenzeichen oben beigefügten Limiten verificirt man einfach durch die Überlegung, dass der Anfangswerth von t mindestens um zwei Einheiten grösser sein muss als der unmittelbar vorangehende s_{p-r-2}, im Übrigen aber alle noch vorhandenen Werthe bis $(m-1)$ inclusive annimmt.

Wenden wir uns nun zu den einzelnen Grenzwerthen der Summe M; der Factor $\Sigma\alpha^2_t$ ist bereits abgethan. Zunächst ist klar, dass sowohl die oberen wie die unteren Grenzen arithmetische Progressionen der Differenz 2 bilden müssen, dass also, wenn bezüglich $s_{(v_1)}$ und $s_{(v_2)}$ die ersten Grenzwerthe sind, die zuletzt kommenden durch

$$s_{(v_1+2[p-r-3])}$$

und

$$s_{(v_2+2[p-r-3])}$$

ausgedrückt sein werden. v_1 muss um $(2+1=3)$ grösser sein als der zunächst vorhergehende Index $(k+2r)$; um v_2 zu bestimmen, schlagen wir folgenden Weg ein. Nach $\alpha^2_{v_2}$ folgen noch $(p-r-3)$ Factoren, deren Indices immer um 2 zunehmen; es ist also, da der letzte Index die Zahl $(m-3)$ selbst sein muss,

$$v_2 = m-3-2(p-r-3) = m-2p+2r+3,$$

wie vorhin angegeben.

Hiemit ist denn also das vorstehend von uns formulirte Theorem in all seinen Theilen bewiesen.

Man könnte nun vielleicht geneigt sein, demselben als einer isolirt dastehenden Thatsache die Eigenschaft allgemeiner Verwendbarkeit abzusprechen; um dem zu begegnen, wollen wir zeigen, dass sich daraus eine äusserst bequeme Methode zur expliciten Darstellung der einzelnen Glieder herleiten lässt, welche vielleicht selbst vor der anerkanntermassen höchst brauchbaren Minding'schen Regel 5) den Vorzug beanspruchen dürfte, zumal da sie einen universelleren Charakter trägt.

Um dies an einem Beispiele darzulegen, wollen wir

$$m = 16, \quad p = 7$$

setzen; es soll also der Coëfficient von

$$z^{16-2.7} = z^2$$

in der Entwickelung der Determinante

$$\begin{vmatrix} z & -\alpha_1 & . & . & 0 & 0 \\ \alpha_1 & z & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & z & -\alpha_{15} \\ 0 & 0 & . & . & \alpha_{15} & z \end{vmatrix}$$

berechnet werden.

Den obigen Festsetzungen zufolge hat hier k den Spielraum

$$1,\ 2,\ 3,$$

wogegen r einen der Werthe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

anzunehmen im Stande ist. Auf diese Weise erhalten wir als Resultat nachstehendes Aggregat

$$
\begin{array}{lll}
k=1 & \alpha_1^2\cdot\alpha_3^2\cdot\alpha_5^2\cdot\alpha_7^2\cdot\alpha_9^2\cdot\alpha_{11}^2(\alpha_{13}^2+\alpha_{14}^2+\alpha_{15}^2)+ & r=0\\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_3^2\cdot\alpha_5^2\cdot\alpha_7^2\cdot\alpha_9^2\cdot\alpha_{12}^2(\alpha_{14}^2+\alpha_{15}^2)+ & r=1\\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_3^2\cdot\alpha_5^2\cdot\alpha_7^2\cdot\alpha_9^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & \\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_3^2\cdot\alpha_5^2\cdot\alpha_7^2\cdot\alpha_{10}^2\cdot\alpha_{12}^2(\alpha_{14}^2+\alpha_{15}^2)+ & r=2\\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_3^2\cdot\alpha_5^2\cdot\alpha_7^2\cdot\alpha_{10}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & \\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_3^2\cdot\alpha_5^2\cdot\alpha_7^2\cdot\alpha_{11}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & \\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_3^2\cdot\alpha_5^2\cdot\alpha_8^2\cdot\alpha_{10}^2\cdot\alpha_{12}^2(\alpha_{14}^2+\alpha_{15}^2)+ & r=3\\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_3^2\cdot\alpha_5^2\cdot\alpha_8^2\cdot\alpha_{10}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & \\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_3^2\cdot\alpha_5^2\cdot\alpha_8^2\cdot\alpha_{11}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & \\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_3^2\cdot\alpha_5^2\cdot\alpha_9^2\cdot\alpha_{11}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & \\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_3^2\cdot\alpha_6^2\cdot\alpha_8^2\cdot\alpha_{10}^2\cdot\alpha_{12}^2(\alpha_{14}^2+\alpha_{15}^2)+ & r=4\\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_3^2\cdot\alpha_6^2\cdot\alpha_8^2\cdot\alpha_{10}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & \\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_3^2\cdot\alpha_6^2\cdot\alpha_8^2\cdot\alpha_{11}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & \\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_3^2\cdot\alpha_6^2\cdot\alpha_9^2\cdot\alpha_{11}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & \\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_3^2\cdot\alpha_7^2\cdot\alpha_9^2\cdot\alpha_{11}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & \\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_4^2\cdot\alpha_6^2\cdot\alpha_8^2\cdot\alpha_{10}^2\cdot\alpha_{12}^2(\alpha_{14}^2+\alpha_{15}^2)+ & r=5\\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_4^2\cdot\alpha_6^2\cdot\alpha_8^2\cdot\alpha_{10}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & \\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_4^2\cdot\alpha_6^2\cdot\alpha_8^2\cdot\alpha_{11}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & \\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_4^2\cdot\alpha_6^2\cdot\alpha_9^2\cdot\alpha_{11}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & \\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_4^2\cdot\alpha_7^2\cdot\alpha_9^2\cdot\alpha_{11}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & \\
 & \alpha_1^2\cdot\alpha_5^2\cdot\alpha_7^2\cdot\alpha_9^2\cdot\alpha_{11}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & \\
k=2 & \alpha_2^2\cdot\alpha_4^2\cdot\alpha_6^2\cdot\alpha_8^2\cdot\alpha_{10}^2\cdot\alpha_{12}^2(\alpha_{14}^2+\alpha_{15}^2)+ & r=0\\
 & \alpha_2^2\cdot\alpha_4^2\cdot\alpha_6^2\cdot\alpha_8^2\cdot\alpha_{10}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & r=1\\
 & \alpha_2^2\cdot\alpha_4^2\cdot\alpha_6^2\cdot\alpha_8^2\cdot\alpha_{11}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & r=2\\
 & \alpha_2^2\cdot\alpha_4^2\cdot\alpha_6^2\cdot\alpha_9^2\cdot\alpha_{11}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & r=3\\
 & \alpha_2^2\cdot\alpha_4^2\cdot\alpha_7^2\cdot\alpha_9^2\cdot\alpha_{11}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & r=4\\
 & \alpha_2^2\cdot\alpha_5^2\cdot\alpha_7^2\cdot\alpha_9^2\cdot\alpha_{11}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2+ & r=5\\
k=3 & \alpha_3^2\cdot\alpha_5^2\cdot\alpha_7^2\cdot\alpha_9^2\cdot\alpha_{11}^2\cdot\alpha_{13}^2\cdot\alpha_{15}^2. &
\end{array}
$$

Bei einem Kettenbruch von so vielen Theilgliedern, bei welchem also nach einer bekannten Regel für den Zähler und Nenner bezüglich 6)

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{16}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{16}}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{17}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{17}}{\sqrt{5}}$$

Glieder zu berechnen wären, dürften die gewöhnlichen Methoden, wenn auch nicht geradezu den Dienst versagen, so doch enorme Rechnungen benöthigen, während hier die Bildung jedes einzelnen Coëfficienten durch einen einfachen Mechanismus sich vollzieht, welcher das Auslassen eines Gliedes nahezu unmöglich macht.

---

1) Günther, Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form, Erlangen 1873. S. 1 ff.

2) Zehfuss, Über die Auflösung der linearen endlichen Differenzengleichungen mit variabeln Coëfficienten, Zeitschr. f. Math. und Phys. 3. Jahrgang, S. 176.

3) Fürstenau, Über Kettenbrüche höherer Ordnung, Wiesbaden 1874.

4) Studnička, Über eine besondere Art von symmetralen Determinanten und deren Verwendung in der Theorie der Kettenbrüche, Prager Berichte 1872, S. 74 ff.

5) Minding, Über das Bildungsgesetz der Zähler und Nenner bei Verwandlung der Kettenbrüche in gewöhnliche Brüche, Bull. de l'acad. de St. Pétersbourg, Tome XIII, S. 523.

6) Stern, Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 10 Band, S. 10.