THEORIE
DER
RELATIVEN MAXIMA UND MINIMA BESTIMMTER INTEGRALE.

VON

LORENZ ŽMURKO,

K. K. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT UND DER K. K. TECHNISCHEN AKADEMIE ZU LEMBERG.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 13. JÄNNER 1876.

Theorie des Grössten und Kleinsten bestimmter Integrale mit beliebiger Anzahl von unbekannten Functionen, welche überdies durch mehrere bekannte Relationen zusammenhängen.

Einleitende Bemerkungen.

Jacobi verdanken wir die Initiative derjenigen Untersuchungen, welche die Aufdeckung der Kriterien des Grössten und Kleinsten eines bestimmten Integrals bezwecken. Er behandelt den einfachsten Fall, nämlich das Maximum und Minimum eines einfachen bestimmten Integrals mit einer einzigen unbekannten Function U und ihren etwa bis zum Range n reichenden Differentialquotienten $U_1, U_2, U_3, \ldots U_n$, welches in der Form

$$S = \int_{x'}^{x''} V dx, \quad V = f(, x, U_1, U_2, \ldots U_n)\, U, \quad \frac{d^s U}{d x^s} = U_s \tag{1}$$

gegeben sein mag.

Für $\delta U = \rho z$, wo ρ von x unabhängig eine sehr kleine beliebig bezeichnete Grösse, und z eine beliebige innerhalb gegebener Grenzen continuirliche endliche Function bedeutet, erhält man $\delta U_s = \rho z_s$ und

$$\delta^2 S = \tfrac{1}{2}\rho^2 \int_{x'}^{x''} dx \mathop{S}_{0}^{n}{}_{r} \mathop{S}_{0}^{n}{}_{r'} \left[\frac{d^2 V}{d U_r \, d U_{r'}} z_r z_{r'} \right], \quad \frac{d^s z}{d x^s} = z_s. \tag{2}$$

Jacobi unterzieht den Ausdruck 2) einer eingehenden Untersuchung, und sucht ihn in eine einfachere Form zu dem Zwecke umzusetzen, damit die Discussion über die Stabilität oder Nichtstabilität seines Vorzeichens im Bereiche vorgelegter Integrationsgrenzen vorbereitet und erleichtert werde.

Auf Grund der Gleichung $\delta S = 0$ gelang es, mittelst der sogenannten Jacobi'schen Doppeltransformation den aus $n+1$ Argumenten $z, z_1, z_2 \ldots z_n$ gebauten homogenen Ausdruck 2) nach und nach in einen ebenfalls homogenen Ausdruck von weniger Argumenten zu verwandeln, und schliesslich in folgender vereinfachten Form zu geben:

$$\delta^2 S = \tfrac{1}{2}\rho^2 \int_{x'}^{x''} \frac{d^2 V}{d U_n^2} \psi^2, \tag{3}$$

wo ψ eine Function von $z, z_1, z_2, \ldots z_n$ und einer beträchtlichen Anzahl von willkürlichen Constanten vorstellt.

Dieses Resultat, sowie die von Jacobi daran geknüpften Schlüsse findet man in gedrängter Kürze im 17. Bande von Crelle's Journal niedergelegt. Gewichtige Kräfte haben sich veranlasst, diese Theorie zum Gegenstande eigener Forschung zu machen, theils um die Jacobi'sche Theorie näher zu beleuchten, theils um hieraus neue Ausgangspunkte zur Erforschung allgemeinerer Probleme zu gewinnen.

Die Begründung der Jacobi'schen Doppeltransformation, welche sogar in der von O. Hesse gegebenen Form, auf einem äusserst verwickelten und wenig durchsichtigen Algorithmus beruht veranlasste auch mich, Einiges zur Vereinfachung desselben beizutragen, und es gelang mir, diesen Algorithmus derart einzurichten, dass man in den Fällen $n = 1, 2, 3, \ldots$ stufenweise fortschreitend, die entsprechenden Transformationsresultate beinahe ohne alle Rechnung hinschreiben kann. Später begründete ich auf Grundlage der wiederholten Summirung eine neue höchst einfache Transformation, welche die Doppeltransformation von Jacobi in vollem Maasse ersetzt. Diese und andere Untersuchungen über die Maxima und Minima bestimmter Integrale habe ich in den Memoiren der Krakauer Akademie der Wissenschaften unter dem Titel „Beitrag zur Variationsrechnung", Band II, in polnischer Sprache publicirt.

Beim Übergang zu allgemeineren Problemen, wo das vorgelegte Integral

4) $$S = \int_{x_1'}^{x_1''} \int_{x_2'}^{x_2''} \cdots \int_{x_r'}^{x_r''} V dx_r dx_{r-1} \ldots dx_1$$

nebst den Bedingungsgleichungen

5) $$v_1 = v_2 = v_3 = \ldots = v_{\nu-1} = v_\nu = 0$$

gegeben ist, in welchem die Symbole x', x'', V, v in der im §. 1 ersichtlichen Bedeutung zu nehmen sind, ergibt sich, unter Aufrechthaltung der im §. 1 eingeführten Bezeichnungen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{W}$, z

6) $$\delta^2 \mathfrak{S} = \tfrac{1}{2} \rho^2 \int_{x_1'}^{x_1''} \int_{x_2'}^{x_2''} \int_{x_r'}^{x_r''} dx_r dx_{r-1} \ldots dx_1 \mathop{S}_{1}^{\mu}{}_{m'} \mathop{S}_{1}^{\mu}{}_{m} \mathop{S}_{1}^{n_{m'}}{}_{s'} \mathop{S}_{1}^{n_m}{}_{s} \left[\frac{d^2 \mathfrak{W}}{d U_{m m_s} \, d U_{m' m'_{s'}}} z_{m m_s} z_{m' m'_{s'}} \right]$$

als der in Bezug auf das Vorzeichen näher zu untersuchende Ausdruck. Nachdem ich mich überzeugte, dass ein dem Jacobi'schen analoger Transformationsvorgang zur Vereinfachung des Ausdruckes 6) nicht eingeleitet werden konnte, suchte ich in der seit Jacobi reichhaltig angewachsenen Literatur nach anderen zu diesem Zwecke geeigneteren Werkzeugen [1].

Den Arbeiten von A. Clebsch muss in dieser Beziehung unstreitig der oberste Rang zuerkannt werden. In seiner letzten Arbeit erhebt er sich bis zur Betrachtung des Ausdruckes 6), und liefert analog dem Jacobi'schen Resultate den Ausdruck 6) in folgender vereinfachten Form:

7) $$\delta^2 \mathfrak{S} = \tfrac{1}{2} \rho^2 \int_{x_1'}^{x_1''} \int_{x_2'}^{x_2''} \int_{x_r'}^{x_r''} dx_r dx_{r-1} \ldots dx_1 \mathop{S}_{1}^{\mu}{}_{m'} \mathop{S}_{1}^{\mu}{}_{m} \mathop{S}^{n_{m'}}{}_{s'} \mathop{S}^{n_m}{}_{s} \left[\frac{d^2 \mathfrak{W}}{d U_{m m_s} \, d U_{m' m'_{s'}}} Z_{m m_s} Z_{m' m'_{s'}} \right],$$

welche aus 6) dadurch hervorgeht, dass man darin z in Z übergehen lässt, und dann alle diejenigen Glieder weglässt, welche nicht den Differentialquotienten höchsten Ranges (der unbekannten Functionen U) ihr Dasein verdanken. Die in der Anzahl $n_1 + n_2 + \ldots + n_\mu$ vorhandenen mit Z bezeichneten Argumente sind überdies

---

[1] Jacobi, Crelle-Journal, 17. Band; Delaunay, Liouville's Journal, 6. Band; S. Spitzer, Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. 12. Band, p. 104, 14. Band, p. 41; O. Hesse, Crelle's Journal, Band 54, p. 227; A. Clebsch, Crelle's Journal, Band 55, p. 254 und 335; Minding, Crelle's Journal, Band 55, p. 300; A. Clebsch, Crelle's Journal, Band 56, p. 122; A. Mayer, Teubner, 1866; A. Mayer, Crelle's Journal, Band 69, p. 238; Lipschitz, Crelle's Journal, Band 65, p. 26.

Mein in dem Tagblatt der 48. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte skizzirter Vortrag „Über die Unzulänglichkeit der bis jetzt bekannt gewordenen Kriterien des Grössten und Kleinsten bestimmter Integrale etc." wird mit dieser Abhandlung berichtigt und vervollständigt.

gruppenweise durch sehr einfache durch alle Probleme hindurch sich gleich bleibende Differentialgleichungen unter einander verknüpft.

Um zu zeigen, dass mit dem Resultate 7) die Theorie über die Kriterien des Maximums und Minimums nicht als abgeschlossen betrachtet werden kann, sei es uns gestattet, folgende Bemerkungen anzuführen:

1. Die Anzahl der Argumente der von Clebsch gelieferten vereinfachten Form 7) ist $N = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \ldots + \bar{n}_\mu$, ein Betrag, der etwa für $r = \mu = n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 6$ in der Zahl Nr. *2772* sich stellt, während eigentlich blos μ dieser Argumente, im angezogenen Fall blos 6 Argumente willkürlich angenommen werden dürfen. Im allgemeinen Falle wäre demgemäss die Zahl μ die Grenze, welche man als Argumentenanzahl der reducirten zweiten Variation anstreben soll. Diesem Bestreben setzen sich aber in den Weg die eben erwähnten zwischen den N Argumenten bestehenden, für alle möglichen Probleme der Variationsrechnung sich gleich bleibenden Beziehungen, denen man bei der anzustrebenden Reduction Rechnung tragen soll. Die Auflösung dieser Beziehungen gehört jedenfalls in die allgemeine Theorie — es sei denn, dass man die Unmöglichkeit der Beseitigung dieses Hindernisses mit einem Beweis erhärtet.

2. In der reducirten, unter dem Integrationszeichen stehenden Summe in 7) spiegeln sich die zur Darstellung der Integrationsgrenzen dienenden Functionen x', x'' in keinerlei Weise ab; der Nachweis der eventuellen Stabilität oder Nichtstabilität des Vorzeichens dieser Summe wird demgemäss diejenigen Kriterien ganz gewiss nicht liefern, welche erst nach Einsicht in die Eigenschaften der Integrationsgrenzen gewonnen werden können.

3. Clebsch bietet keine Instruction, wie man sich zu benehmen habe, um während der Untersuchung des Vorzeichens einer Function stets in der vorgeschriebenen Veränderlichkeitssphäre verbleibend, schliesslich versichert zu sein, dass man die gesetzliche Veränderlichkeitssphäre erschöpft hat; er gibt nicht die Grenzwerthe der Variablen an, innerhalb deren die in die Function zu substituirenden Werthe der Grundvariablen enthalten sein müssen.

4. Die durch den Calcül-Mechanismus erreichte Thatsache des Überganges von den ursprünglichen Argumenten $z, z_1, z_2, \ldots z_\mu$ zur neuen mit $Z, Z_1, Z_2, \ldots Z_\mu$ bezeichneten Argumentenschaar, welche der ausgezeichneten Eigenschaft sich erfreut, dass die einzelnen Z-Argumente im Angesichte des vorgelegten Integrationswesens nur in den höchsten Differentialquotienten ihre Existenz beurkundend, sonst in allen Differentialquotienten tieferen Ranges verschwinden, wäre jedenfalls einer analytischen Discussion zu unterwerfen, um dann rückschliessend die mit obigen Eigenschaften ausgerüstete undifferenzirte Form der Z-Argumente zu ersinnen.

Eine derartige Discussion und die hiedurch veranlasste Entdeckung der undifferenzirten Z-Argumente wäre in jeder Beziehung eine dankbare. Die Substitution solcher Z-Formen an der Stelle der ursprünglichen z-Argumente in den Ausdruck 6) würde im Angesichte des vorgelegten Integrationswesens vor Allem die von Clebsch angestrebte und erreichte Reduction ganz gewiss zur Folge haben, und im Weiteren entweder eine neue im Wesen der angestrebten Reduction zwar gegründete, dem Forscher jedoch im Vorhinein noch unbewusste Vereinfachung von $\delta^2\mathfrak{S}$ bewirken — oder in minder günstigem Falle ausser der von Clebsch bewirkten keine weitere Vereinfachung bieten. Im ersteren Falle erreicht man die Grenze jeder möglichen Vereinfachung von $\delta^2\mathfrak{S}$, im zweiten Falle wäre der oben erwähnte Unmöglichkeitsbeweis geliefert, der uns dann von jedem Streben nach weiterer Vereinfachung von $\delta^2\mathfrak{S}$ dispensirt.

Unter Anleitung der hier vorgebrachten Bemerkungen ist es mir möglich geworden, die nachstehende Theorie der relativen Maxima und Minima bestimmter Integrale zu verfassen, welche in ihrer Anlage und Durchführung sich durch musterhafte Einfachheit auszeichnet, und der Erforschung specieller Fälle jeden theoretisch möglichen Vorschub bietet.

§. 1.

Sei

1) $$S=\int_{x_1'}^{x_1''}\int_{x_2'}^{x_2''}\cdots\int_{x_r'}^{x_r''} V\,dx_r\,dx_{r-1}\dots dx_2\,dx_1=\int^{(r)} V\,dx_r\,dx_{r-1}\dots dx_2\,dx_1\,;$$

2) $$v_1=v_2=v_3=\dots v_\nu=0\,,$$

wobei allgemein:

3) $$V=F(\dots x_r,\dots U_{m\,m_s}\dots);\quad v_p=\overset{p}{F}(\dots x_r,\dots U_{m\,m_s}\dots)$$

4) $$\begin{aligned}&x_2'=\varphi_2'(x_1)\,,\quad x_3'=\varphi_3'(x_1,x_2)\,,\quad x_4'=\varphi_4'(x_1,x_2,x_3)\,,\dots x_r'=\varphi_r'(x_1,x_2,\dots x_{r-1}),\\&x_2''=\varphi_2''(x_1)\,,\quad x_3''=\varphi_3''(x_1,x_2)\,,\quad x_4''=\varphi_4''(x_1,x_2,x_3)\,,\dots x_r''=\varphi_r''(x_1,x_2,\dots x_{r-1}),\end{aligned}$$

5) $$\Delta_1=x_1''-x_1',\ \Delta_2=x_2''-x_2',\quad \Delta_3=x_3''-x_3',\quad\dots\quad \Delta_r=x_r''-x_r'.$$

In den Ausdrücken F und $\overset{p}{F}$ soll durch $\dots x_r$ angedeutet sein, dass in V und v_p die Grössen $x_1, x_2, \dots x_r$ als unabhängige Variablen vorkommen, dagegen mag die symbolische Bezeichnung $\dots U_{m m_s}\dots$ daran erinnern, dass V und v_p Functionen sind der Unbekannten von $x_1, x_2, \dots x_r$ abhängigen Functionen $U_1, U_2, U_3, \dots U_\mu$ nebst ihren partiellen bis zu den Ordnungen $n_1, n_2, \dots n_\mu$ reichenden Ableitungen, welche durch die Zeiger m_s in der Weise angedeutet erscheinen, dass man sich vor Allem das Symbol m_s als eine Gruppe von Zahlen $m_{s1}, m_{s2}, m_{s3}, \dots m_{sr}$ denkt, und unter Einführung der Bezeichnung

6) $$[m_s]=m_{s1}+m_{s2}+\dots+m_{sr}$$

die Symbole Umm_s, $U\mu\mu_s, \dots$ im Folgenden definirt:

7) $$U_{m\,m_s}=\frac{d^{[m_s]}\,U_m}{dx_1^{m_{s1}}\,dx_2^{m_{s2}}\dots dx_r^{m_{sr}}}=(U_m)_{m_s}\,;\quad U_{\mu\,\mu_s}=\frac{d^{[\mu_s]}\,U_\mu}{dx_1^{\mu_{s1}}\,dx_2^{\mu_{s2}}\dots dx_r^{\mu_{sr}}}=(U_m)_{\mu_s}.$$

Die zur Function U_m gehörigen Zahlengruppen in abnehmender Ordnung fortlaufend bezeichnen wir mit

8) $$m_1,\ m_2,\ m_3,\dots\dots m_{n'_m-1},\ m_{n'_m},\ m_{n'_m+1},\dots m_{n''_m-1},\ m_{n''_m}$$

dergestalt, dass die nach 6) zu deutenden Zahlensummen:

9) $$[m_1],\ [m_2],\ [m_3],\dots[m_{n'_m-1}],\ [m_{n'_m}],\ [m_{n'_m+1}],\dots[m_{n''_m-1}],\ [m_{n''_m}]$$

entweder abnehmend, oder zum wenigsten nicht wachsend geordnet erscheinen.

In Bezug auf die ersten Ausdrücke in 9) mag noch folgende Relation gelten:

10) $$[m_1]=[m_2]=[m_3]=\dots=[m_{n'_m-1}]=[m_{n'_m}]=n_m,$$

wornach die Zahl n_m den höchsten Differentiationsrang andeutet, bis zu welchem sich die partiellen Ableitungen von U_m erheben dürfen. Den Zahlen $n_1, n_2, \dots n_{\mu-1}, n_\mu$ gehört offenbar die oben ausgesprochene Bedeutung in Bezug auf die entsprechenden unbekannten Functionen $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots U_{\mu-1}, U_\mu$ an.

In dem Falle, wo eine unbekannte Function U_m in allen möglichen, bis einschliesslich dem Range n_m angehörigen Differentialquotienten in V erscheint, findet man:

11) $$n'_m=\binom{n_m+r-1}{r-1},\ n''_m=\binom{n_m+r}{r}.$$

In diesbezüglichen Problemen gehören sehr oft auch diejenigen Functionen in die Reihe der zu bestimmenden Unbekannten, welche sub 4) die Darstellung der Integrationsgrenzen in der Art vermitteln, dass eine

Grenzfunction etwa x_p' als eine Function blos derjenigen Grundvariablen zu gelten hat, welche mit kleinerem Zeiger als p behaftet sind.

Diese Probleme lauten in der Hauptfassung folgendermassen:

Man soll die unbekannten Functionen $U_1, U_2 \ldots U_\mu, x', x''$ so bestimmen, dass unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen 2) das bestimmte $r$fache Integral S sub 1), 12)
wenn dies überhaupt möglich ist, einen Maximal- oder Minimalwerth erreiche.

Bezeichnet man die Variation von U_m mit

$$\partial U_m = \rho Z_m ,$$

unter ρ eine sehr kleine beliebig bezeichnete von $x_1, x_2, x_3, \ldots x_r$ unabhängige Zahl verstanden, so erhält man:

$$\partial U_{m m_s} = \partial(U_m)_{m_s} = (\partial U_m)_{m_s} = (\rho Z_m)_{m_s} = \rho (Z_m)_{m_s} = \rho Z_{m m_s}$$

$$\partial U_{m' m'_{s'}} = \rho Z_{m' m'_{s'}}, \quad \partial U_{3, 3_2} = \rho Z_{3, 3_2}, \quad \partial U_{4, 4_s} = \rho Z_{4, 4_s}, \text{ etc.} \tag{13}$$

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_\nu$ einstweilen unbestimmte, in Bezug auf ihre Functionsform unveränderliche Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_\nu$; sei ferner

$$\mathfrak{W} = V + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_\nu v_\nu = \mathfrak{F}(\ldots x_r \ldots U_{m m_s} \ldots)$$

$$\mathfrak{S} = \int_{x_1'}^{x_1''}\int_{x_2'}^{x_2''} \cdots \int_{x_r'}^{x_r''} \mathfrak{W}\, dx_r\, dx_{r-1} \ldots dx_2\, dx_1 = \int^{(r)} \mathfrak{W}\, dx_r\, dx_{r-1} \ldots dx_2\, dx_1 , \tag{14}$$

so kann man nach dem Vorgange von Lagrange das in 12) definirte Problem folgendermassen aussprechen.

Man soll die Unbekannten $U_1, U_2, \ldots U_\mu, x', x''$ so bestimmen, dass hiedurch das $r$fache Integral $\mathfrak{S}$ zu einem Maximum oder Minimum werde, wobei schliesslich über die Functionen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_3$ so verfügt werden soll, dass durch ihre Werthe den Bedingungen 2) genügt werde. 15)

Durch Entwicklung nach Taylor, mit ρ^2 die Reihe abschliessend, findet man:

$$\mathfrak{W}' = \mathfrak{F}(\ldots x_r, \ldots (U_{m m_s} + \rho Z_{m m_s}) \ldots) = \mathfrak{W} + \mathfrak{W}_1 \rho + \mathfrak{W}_2 \frac{\rho^2}{2} \tag{16}$$

sobald man

$$\rho \mathfrak{W}_1 = \rho \overset{\mu}{\underset{1}{S}}_m \overset{n''_m}{\underset{1}{S}}_s \left[\frac{\partial \mathfrak{W}}{d U_{m m_s}} Z_{m m_s}\right] = \partial \mathfrak{W} \tag{17}$$

$$\frac{\rho^2}{2} \mathfrak{W}_2 = \frac{\rho^2}{2} \overset{\mu}{\underset{1}{S}}_{m'} \overset{\mu}{\underset{1}{S}}_m \overset{n''_m}{\underset{1}{S}}_{s'} \overset{n''_m}{\underset{1}{S}}_s \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{d U_{m m_s}\, d U_{m' m'_{s'}}} Z_{m m_s} Z_{m' m'_{s'}}\right] = \partial^2 \mathfrak{W} \tag{18}$$

setzt. — Mit Hilfe des theilweisen Integrirens lässt sich jedes Integral

$$\int^{(r)} \frac{\partial \mathfrak{W}}{d U_{m m_s}} Z_{m m_s}\, dx_r\, dx_{r-1} \ldots dx_2\, dx_1$$

als aus zwei Theilen zusammengesetzt darstellen, und zwar:

$$\int^{(r)} \frac{\partial \mathfrak{W}}{d U_{m m_s}} Z_{m m_s}\, dx_r\, dx_{r-1} \ldots dx_2\, dx_1 = \int^{(r)} \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{d U_{m m_s}}\right)_{m_s} (-1)^{[m_s]} Z_m\, dx_r\, dx_{r-1} \ldots dx_2\, dx_1 + \tau_{(m, s)} . \tag{19}$$

Der erste dieser Theile wird aus dem vorgelegten Integral erhalten, indem man es mit $(-1)^{[m_s]}$ multiplicirt, und die Differentiationszeigergruppe m_s vom Ausdrucke $Z_{m m_s}$ loslösend, dieselbe zu gleichem Zwecke dem Ausdrucke $\dfrac{\partial \mathfrak{W}}{d U_{m m_s}}$ links unterhalb anhängt. Der zweite mit $\tau_{(m\, s)}$ bezeichnete Theil besteht aus

Integralen niederer Ordnung als r, weil man nach Ausführung der bei diesen Ausdrücken sich darbietenden Integrationen angewiesen wird, in derselben einige der Integrationszeichen etwa: $\int_{x'_v}^{x''_v}, \int_{x'_h}^{x''_h}, \dots$ in entsprechende Substitutionszeichen $\Big|_{x'_v}^{x''_v}, \Big|_{x'_h}^{x''_h}, \dots$ umzugestalten, und in eben dem Maasse $\tau_{(ms)}$ als einen Complex von Integralen niederer Ordnung anzusehen, als dies der Index r andeutet.

20)

Die in 19) angedeutete Operation lässt sich mit Hilfe des theilweisen Integrirens stufenweise, wenn zwar etwas mühselig, so doch ohne alle möglichen Hindernisse bewerkstelligen. Wir überlassen daher die endgiltige Darstellung des Complexes $\tau_{(ms)}$ recht gerne dem jeweiligen Unternehmen, irgend einen speciellen Fall der wirklichen Ausbildung zuzuführen.

Setzt man zur Bezeichnung der Variation der Grenzen

$$\delta x' = \rho\mathfrak{z}', \quad \delta x'' = \rho\mathfrak{z}'',$$

und kürzerer Schreibweise wegen:

21) $$\int_{x'_1}^{x''_1}\int_{x'_2}^{x''_2}\dots\int_{x'_{h-1}}^{x''_{h-1}}\Big|_{x'_h}^{x''_h}\int_{x'_{h+1}}^{x''_{h+1}}\dots\int_{x'_r}^{x''_r}\mathfrak{W}\,dx_r\,dx_{r-1}\dots dx_{h+1}\,\delta x_h\,dx_{h-1}\dots dx_2\,dx_1 = \rho\tau_h;$$

so findet man:

22) $$\delta\mathfrak{S} = \int^{(r)}\delta\mathfrak{W}\,dx_r\,dx_{r-1}\dots dx_2\,dx_1 + \rho\mathop{S}_{1}^{r}{}_h\,\tau_h,$$

und wegen 17), 18) und 19)

23) $$\delta\mathfrak{S} = \rho\int^{(r)}dx_r\,dx_{r-1}\dots dx_2\,dx_1\mathop{S}_{1}^{\mu}{}_m\mathop{S}_{1}^{n''_m}{}_s\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{dU_{m\,m_s}}\right)_{m_s}(-1)^{[m_s]}Z_m\right] + \rho\mathop{S}_{1}^{\mu}{}_m\mathop{S}_{1}^{n''_m}{}_s\tau_{(ms)} + \rho\mathop{S}_{1}^{r}{}_h\,\tau_h,$$

und unter der für jeden Zeiger zu geltenden Voraussetzung:

$$\delta x' = \delta x'' = 0$$

24) $$\delta^2\mathfrak{S} = \frac{\rho^2}{2}\int^{(r)}dx_r\,dx_{r-1}\dots dx_2\,dx_1\mathop{S}_{1}^{\mu}{}_{m'}\mathop{S}_{1}^{\mu}{}_m\mathop{S}_{1}^{n''_m}{}_{s'}\mathop{S}_{1}^{n''_m}{}_s\left[\frac{\partial^2\mathfrak{W}}{dU_{m\,m_s}\,dU_{m'\,m'_{s'}}}Z_{m\,m_s}\,Z_{m'\,m'_{s'}}\right].$$

In Übereinstimmung mit dem bei der Ermittlung der Maxima und Minima gewöhnlicher Functionen üblichen Verfahren setzen wir in $\delta\mathfrak{S}$ den Coëfficient von ρ der Null gleich, und erhalten innerhalb der zulässigen Willkürlichkeit von $Z_1, Z_2, \dots Z_\mu, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}''$ auf Grund der von Sarrus hierüber niedergelegten Bemerkungen und überhaupt auf Grund der bei verschiedenen Problemen dieser Art verschieden sich gestaltenden Orientirungsumständen folgende Systeme von Bestimmungsgleichungen:

25) (I) $$\mathop{S}_{1}^{n''_1}{}_s\left[(-1)^{[1_s]}\frac{\partial\mathfrak{W}}{dU_{1,1_s}}\right]_{1_s} = \mathop{S}_{1}^{n''_2}{}_s\left[(-1)^{[2_s]}\frac{\partial\mathfrak{W}}{dU_{2,2_s}}\right]_{2_s} = \dots = \mathop{S}_{1}^{n''_\mu}{}_s\left[(-1)^{[\mu_s]}\frac{\partial\mathfrak{W}}{dU_{\mu\,\mu_s}}\right]_{\mu_s} = 0;$$

26) (II) $$v_1 = v_2 = v_3 = \dots = v_{\nu-1} = v_\nu = 0;$$

27) (III) $$\mathop{S}_{1}^{\mu}{}_m\mathop{S}_{1}^{n''_m}{}_s\tau_{(ms)} + \mathop{S}_{1}^{r}{}_h\,\tau_h = 0;$$

indem wir die Ermittlung des aus 27) zu bildenden Gleichungssystems der jeweiligen Behandlung von speciell vorgelegten Problemen überlassen.

In 25) und 26) haben wir ein System von $(\mu+\nu)$ simultanen Differentialgleichungen, mit partiellen verschiedenen Ordnungen angehörigen Differentialquotienten der Unbekannten $U_1, U_2, U_3, \dots U_\mu, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_\nu$, welche in Bezug auf $U_1, U_2, \dots U_\mu$ beziehungsweise die Zahlen $2n_1, 2n_2, \dots 2n_\mu$, und in Bezug auf λ_1,
28) $\lambda_2, \dots \lambda_\nu$ die gemeinschaftliche, den Zahlen $n_1, n_2, \dots n_\mu$ entnommene höchste Zahl n_s als die höchsten Rangzahlen aufweisen, bis zu welchen sich die partiellen Differentialquotienten der entsprechenden unbekannten Functionen in diesen Gleichungen erheben.

Aus 25) und 26) ziehen wir in allgemeiner Bezeichnung die Werthe der $(\mu+\nu)$ unbekannten Functionen:

$$U_m = F_m(x_1, x_2, \ldots x_r, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots)\,;\quad \lambda_m = f_m(x_1, x_2, \ldots x, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots) \tag{29}$$

worin $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ auf eine dem Range der Differentialgleichungen 25), 26) entsprechende Anzahl von willkürlichen Functionen hindeuten.

Die Erfüllung des Gleichungssystems (III) unter Beachtung der jeweilig in speciellen Problemen sich darbietenden Orientirungsumstände verhilft uns schliesslich zur Auffindung und Feststellung der noch Unbekannten $\theta_1, \theta_2, \ldots x', x''$.

Ohne uns in die nähere Specialisirung der Umstände und Bedingungen, und in die Angabe der Art und Weise einzulassen, wie solche die endgiltige Bestimmung der Unbekannten $U_1, U_2, \ldots U_\mu, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu, x', x''$ herbeiführen, nehmen wir an, dass es uns bereits gelungen sei, zu folgenden Resultaten:

$$U_m = \overset{m}{F}(x_1, x_2, \ldots x_r)\,,\quad \lambda_m = \overset{m}{f}(x_1, x_2, \ldots x_r)\,, \tag{30}$$

$$x'_m = \varphi'_m(x_1, x_2, \ldots x_{m-1})\quad \overset{v}{x}'_m = \varphi''_m(x_1, x_2, \ldots x_{m-1}) \tag{31}$$

für alle erforderlichen Werthe von m zu gelangen, so können wir behaupten, dass in dem den Lösungen 30), 31) subsummirten Falle nur einzig für diese Werthe der Unbekannten, das Integral $\mathfrak{S}$ und hiemit auch S fähig sei, sich im Zustande des Maximums oder Minimums zu befinden. Ob dieser Zustand wirklich eintritt, und wenn dies geschieht, ob man ihn als Maximal- oder Minimalzustand anzusehen habe, darüber wird uns erst eine nähere Erörterung des Vorzeichens von $\delta^2\mathfrak{S}$ auf Grundlage der durch die Gleichungen 26) eingeschränkten Willkürlichkeit der Functionen Z_1, Z_2, Z_3, Z_μ einen sicheren Aufschluss gewähren.

§. 2.

Bevor wir den Ausdruck $\delta^2\mathfrak{S}$ einer näheren Prüfung in Bezug auf sein Vorzeichen unterwerfen, fragen wir nach, was in dem bestimmten Integral

$$A = \int_{x'_1}^{x''_1}\int_{x'_2}^{x''_2}\cdots\int_{x'_r}^{x''_r} dx_r\, dx_{r-1}\ldots dx_1\, F(x_r, x_{r-1}, \ldots x_1) \tag{1}$$

mit dem zu integrirenden Ausdrucke für Veränderungen vor sich gehen, wenn man A als eine wiederholte Summirung der Differentialelemente ansieht.

Die Integration in Bezug auf x_r zwischen x'_r und x''_r wird vollführt, wenn man in $F(x_r, x_{r-1}, \ldots x_1)$

$$x_r = x'_r + \alpha_r\Delta_r \tag{2}$$

substituirt, und dann in dem daraus hervorgehenden allgemeinen Ausdruck

$$F = F_1(\alpha_r, x_{r-1}, \ldots x_2, x_1) \tag{3}$$

α_r als eine zwischen Null und der Einheit variable Grösse ansieht.

Bei der nächsten Summirung in Bezug auf x_{r-1} wird

$$x_{r-1} = x'_{s-1} + \alpha_{r-1}\Delta_{r-1} \tag{4}$$

gesetzt, und es wird

$$F = F_1 = F_2(\alpha_r, \alpha_{r-1}, x_{r-2}, \ldots x_2, x_1) \tag{5}$$

als die allgemeine Form der Factoren der einzelnen Elemente auftreten, sobald man anstatt α_r, α_{r-1} irgend welche zwei zwischen Null und der Einheit liegende Werthe sich vorstellt.

Durch Verwendung der aufeinanderfolgenden Substitutionen

$$x_r = x'_r + \alpha_r\Delta_r\,,\; x_{r-1} = x'_{r-1} + \alpha_{r-1}\Delta_{r-1}\,,\;\ldots\; x_2 = x'_2 + \alpha_2\Delta_3,\; x_1 = x'_1 + \alpha_1\Delta_1 \tag{6}$$

wird endlich der Ausdruck A aus lauter Summanden zusammengesetzt erscheinen, welche aus dem Ausdrucke

7) $$F(x_r, x_{r-1}, \ldots x_2, x_1) = F_r(\alpha_r, \alpha_{r-1}, \ldots \alpha_2, \alpha_1, \Delta_1)$$

ihren Factor beziehen, wenn man an die Stelle eines jeden α irgend einen zwischen Null und der Einheit liegenden Werth einsetzt.

In Folge ähnlicher Substitutionen 7) wird:

8) $$\mathfrak{p} = \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \ldots \Delta_{r-1} \Delta_r = f(\alpha_{r-1}, \alpha_{r-2}, \ldots \alpha_1, \Delta_1)$$

und man erhält schliesslich

9) $$A = \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 F_r(\alpha_r, \alpha_{r-1}, \ldots \alpha_1)\, \mathfrak{p}\, d\alpha_r, d\alpha_{r-1}, \ldots d\alpha_1$$

sobald man Δ_1 als constant oder als eine Function eines constanten Parameters ansieht, und jedes α als zwischen Null und der Einheit variabel sich vorstellt. Aus 9) sieht man, dass das Vorzeichen irgend eines Elementes von A sich als Product der Vorzeichen von F_r und $\mathfrak{p}$ hinstellt.

Soll überhaupt eine Function von $x_r, x_{r-1}, \ldots x_2, x_1$ im Bereiche der Integrationsgrenzen in Bezug auf das ihren Werthen zukommende Vorzeichen untersucht werden, so transformire man diese Function mittelst 7) in einen Ausdruck aus den Variablen $\alpha_r, \alpha_{r-1}, \ldots \alpha_2, \alpha_1$ — und untersuche sein Vorzeichen in Bezug auf die zwischen Null und der positiven Einheit eingeschlossenen Werthe von α.

Behufs Transformation des Summenausdruckes $\partial^2 \mathfrak{S}$ setzen wir unter Festhaltung der Hypothese $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}'' = 0$ und der Bedeutung von n_m, und unter der Voraussetzung eines gehörig grossen, d. h. wenigstens eines so grossen n, dass in einem endlichen Polynome das Vorzeichen und der Werth desjenigen Gliedes den Ausschlag gibt, welches die niedrigste Potenz von n im Nenner beherbergt.

10) $$w_r = \alpha_1, x_2, \ldots \alpha_r = \frac{x_r - x'_r}{\Delta_r} + \frac{x_{r-1} - x'_{r-1}}{\Delta_{r-1}} + \ldots + \frac{x_1 - x'_1}{\Delta_1}, \; w = 2n\pi w;$$

11) $$\frac{d^{[m_s]} (\sin w)^{n_m}}{dw^{[m_s]}} = (\sin w^{n_m})_{[m_s]},$$

12) $$\left(m_s \frac{\partial w_r}{dx}\right) = \left(\frac{\partial w_r}{dx_1}\right)^{m_{s1}} \left(\frac{\partial w_r}{dx_2}\right)^{m_{s2}} \ldots \left(\frac{\partial w_r}{dx_r}\right)^{m_{sr}}$$

13) $$Z_m = \frac{\sin w^{n_m}}{(2n\pi)^{n_m}}\, \varepsilon\, \varphi_m$$

unter φ_m und ε beliebige innerhalb der Grenzen continuirliche und endliche Functionen von x_1, x_2, x_r verstanden.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung des Differentiationsindex m_s hat man aus 13)

14) $$Z_{m\,m_s} = \frac{\left(m_s \frac{\partial w_r}{dx}\right)(\sin w^{n_m})_{[m_s]}\, \varphi_m\, \varepsilon}{(2n\pi)^{n_m - [m_s]}} + \sigma,$$

wo σ den Betrag derjenigen Glieder andeutet, welche mit einer höheren Potenz von n im Nenner multiplicirt sind, als dies der Unterschied $n_m - [m_s]$ andeutet.

Insoferne wir uns die Coëfficienten der Form $\frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{dU_{m m_s}\, dU_{m' m'_{s'}}}$ innerhalb der Grenzen als endliche und continuirliche Functionen denken, können wir auf Grund des sehr grossen n in 14) σ weglassen und schreiben:

15) $$Z_{m\,m_r} = \frac{\left(m_s \frac{\partial w_r}{dx}\right)(\sin w^{n_m})_{[m_r]}}{(2n\pi)^{n_m - [m_r]}}\, \varepsilon\, \varphi_m.$$

Für $[m_s] < n_m$ enthält jeder Bestandtheil von Z_{mm_s} und sogar jeder in σ enthaltene Bestandtheil den Factor $sin\, w$ mindestens in der ersten Potenz. Demgemäss muss Z_{mm_s} für $x = x'$, $x = x''$ verschwinden, sobald $[m_s] < n_m$ sich gestaltet. Dieser Ausdruck verschwindet jedesmal, wenn $2n(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r) = 2n w_r$ sich als eine ganze Zahl stellt; beim ungeraden $[m_s]$ selbst dann noch, wenn $2n w_r = \frac{k}{2}$ mit einem ungeraden k sich ergibt. Möglicherweise dürfte Z_{mm_s} zuweilen in Fällen verschwinden, wo weder $sin\, w$ noch $cos\, w$ Null wird.

Man erhält $[m_s] = n_m$, sobald man für s einen beliebigen von den Zeigerwerthen

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \acute{n}_m - 1, \ldots \acute{n}_m \qquad 16)$$

setzt.

In diesem Falle setze man

$$\varphi\,(sin\, w^{n_m})_{[m_s]} = (sin\, w^{n_m})_{n_m}\, \varphi_m = \psi_m, \qquad 17)$$

und erhält

$$Z_{m\,m_s} = \left(m_s \frac{\partial w_r}{dx}\right) \varepsilon\, \psi_m. \qquad 18)$$

Für $x = x'$, $x = x''$ hat man $(sin\, w^{n_m})_{n_m} = n_m!$, und schliesst, dass für $[m_s] = n_m$ der Ausdruck Z_{mm_s} nur dann verschwindet, wenn hiebei entweder φ_m verschwindet, oder wenn in Folge gewisser Eigenthümlichkeiten der Functionen x', x'' der Ausdruck $\left(m_s \frac{\partial w_r}{dx}\right)$ einen Nullwerth annimmt. Da für $[m_s] = n_m$ die sehr grosse Zahl n im Nenner von Z_{mm_s} nicht vorkommt, so werden nur diejenigen Argumente Z_{mm_s} bei wachsendem n nicht verschwindend klein ausfallen, welche den Differentialquotienten von U des höchsten Ranges entsprechen. Gegen die Eventualität, dass irgend ein Δ im gegebenen Intervall verschwinden könnte, verwahren wir uns desshalb, weil diesfällig der Ausdruck $\left(m_s \frac{\partial w_r}{dx}\right)$ unendlich gross ausfallen, und eben hiedurch die obige Behauptung trüben könnte.

Auf Grund der besprochenen Eigenschaft der Substitution 13) 18), haften die Nachbarwerthe U_m und $(U_m + \rho Z_m)$ an sporadisch ausgestreuten Stellen vollkommen in einander, sonst aber unterscheiden sie sich blos in Beziehung auf Differentialquotienten vom höchsten Range n_m, und nähern sich mit wachsendem n unablässig einer sogenannten Osculation der $(\acute{n}_m - 1)$ten Ordnung. Die Substitution 18) wird desshalb osculatorische Substitution genannt.

Auf Grund der osculatorischen Substitution 18) werden in Folge des sehr gross gedachten n aus dem Ausdrucke $\partial^2 \mathfrak{S}$ alle Glieder wegfallen, welche der Relation $[m_s] < n_m$ entsprechen. Dieser Umstand erfordert, dass wir die in $\partial^2 \mathfrak{S}$ angedeuteten Summirungen in Bezug auf die Zeiger s, s' blos bis zu den Zahlen $\acute{n}_m$, $\acute{n}_{m'}$ erstrecken, und nicht bis zu den Zahlen $\acute{\acute{n}}_m$, $\acute{\acute{n}}_{m'}$ wie dies im ursprünglichen Ausdruck $\partial^2 \mathfrak{S}$ angedeutet erscheint.

Hierauf fussend, erhält man:

$$\mathop{S}_{s'}\limits_{1}^{\acute{\acute{n}}_{m'}} \mathop{S}_{s}\limits_{1}^{\acute{\acute{n}}_{m}} \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{d\,U_{m\,m_s}\, d\,U_{m'\,m'_{s'}}} Z_{m\,m_s} Z_{m'\,m'_{s'}}\right] = \varepsilon^2 \mathop{S}_{s'}\limits_{1}^{\acute{n}_{m'}} \mathop{S}_{s}\limits_{1}^{\acute{n}_{m}} \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{d\,U_{m\,m_s}\, d\,U_{m'\,m'_{s'}}} \left(m_s \frac{dw_r}{dx}\right) \left(m'_{s'} \frac{dw_r}{dx}\right) \psi_m \psi_{m'}\right] \qquad 19)$$

und Kürze wegen

$$\mathop{S}_{s'}\limits_{1}^{\acute{n}_{m'}} \mathop{S}_{s}\limits_{1}^{\acute{n}_{m}} \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{d\,U_{m\,m_s}\, d\,U_{m'\,m'_{s'}}} \left(m_s \frac{dw_r}{dx}\right) \left(m'_{s'} \frac{dw_r}{dr}\right)\right] = a_{m\,m'} = a_{m'\,m} \qquad 20)$$

setzend, erhalten wir mittelst Substitution 18) die Darstellung von $\partial^2 \mathfrak{S}$ im Folgenden:

Für

$$\partial x' = \partial x'' = 0\,, \quad \partial^2 \mathfrak{S} = \frac{\rho^2}{2} \int^{(r)} dx_r\, dx_{r-1} \ldots dx_2\, dx_1\, \varepsilon^2 \mathop{S}_{m'}\limits_{1}^{\mu} \mathop{S}_{m}\limits_{1}^{\mu} [a_{m\,m'}\, \psi_m \psi_{m'}]. \qquad 21)$$

Auf gleiche Weise vorgehend, setzen wir:

22) $$\overset{n_m}{\underset{1}{S_s}}\left[\frac{d v_p}{d U_{m m_s}}\left(m_s \frac{d w_r}{d x}\right)\right] = b_{p,m}$$

und erhalten:

23) $$\delta v_p = \rho\,\varepsilon \overset{\mu}{\underset{1}{S_m}}[b_{p,m}\,\psi_m] = 0\,,$$

und hieraus folgendes System von ν Gleichungen:

24) $$\tau_1 = 2\overset{\mu}{\underset{1}{S_m}}[b_{1,m}\,\psi_m] = 0\,,\;\; \tau_2 = 2\overset{\mu}{\underset{1}{S_m}}[b_{2,m}\,\psi_m] = 0\;\ldots\;\tau_\nu = 2\overset{\mu}{\underset{1}{S_m}}[b_{\nu,m}\,\psi_m] = 0,$$

welche dem Umstande ihren Bestand verdanken, dass die Gleichungen 2), §. 1 auch für den Fall gelten sollen, wenn man in denselben durchgehends $(U_1+\rho Z_1)$, $(U_2+\rho Z_2)$,...$(U_\mu+\rho Z_\mu)$ an die Stelle von U_1, U_2, .. U_μ substituirt.

In den Resultaten 21) und 24) werden die symbolisch gegebenen Ausdrücke $a_{mm'}$, $b_{p,m}$ auf Grund der
25) Auflösungen 30), 31), §. 1 als berechnet, und als reine Functionen von x_1, x_2,...x_r, oder mit Rücksicht auf die Transformation 7) als Functionen von α_1, α_2, α_3,...α_r dargestellt gedacht. Indem wir schon im Anfang des vorigen Paragraphes die Entwicklung nach Taylor vornahmen, haben wir stillschweigend angenom-
26) men, dass die Ableitungen von V, v, $\mathfrak{W}$ in Bezug auf die Unbekannten U_1, U_2,... U_μ und ihre Differentialquotienten $U_{m m_s}$ im Bereiche des Integrationsintervalls endlich und stetig sich erweisen. Nimmt man ausserdem an, dass die Function Δ_1, Δ_2,...Δ_r im Bereiche des erwähnten Intervalls nicht verschwinden dürfen, und demgemäss in eben diesem Intervall je ein stabiles Vorzeichen beurkunden, so muss man innerhalb des gedachten Intervalls auch den Functionen $a_{mm'}$, $b_{p,m}$ die Stetigkeit und Endlichkeit zuerkennen.

Die Erzielung der überraschend vereinfachten Transformationsresultate in 21) und 24) verdanken wir den in Bezug auf ε, ψ_m willkürlichen, jedoch in Bezug auf den Coëfficienten $\frac{\sin w^{n_m}}{(2n\pi)^{n_m}}$ einer mit specieller
27) Eigenschaft behafteten Substitution. Eben dieser Coëfficient verursachte im Transformationsresultate die Beseitigung aller derjenigen Glieder, welche mit Differentialquotienten von U multiplicirt erscheinen, die nicht in die Classe der mit dem höchsten Range begabten Differentialquotienten von U angehörig waren.

Auf Grund dieser Substitution ist das System der zur erwarteten Maximal- oder Minimalgestalt $\mathfrak{S}$ gehörigen Nachbargestalten reducirt auf ein System von solchen Nachbargestalten, welche von der erwar-
28) teten Gestalt $\mathfrak{S}$ sich blos in Bezug auf die höchsten für die Functionen U präliminirten Differentialquotienten unterscheiden, und so zu sagen mit $\mathfrak{S}$ je eine Osculation eingehen, welche in Bezug auf die einzelnen mit U bezeichneten Functionen bis zum entsprechenden Range $n_m - 1$ sich erhebt.

Aus diesem Grunde liesse sich der Hilfscoëfficient $\frac{\sin w^{n_m}}{(2n\pi)^{n_m}}$ mit der Benennung Osculationscoëfficient belegen.

Die durch Verwendung des Osculationscoëfficienten und durch Annahme $\delta x' = \delta x'' = 0$ beseitigten Nachbargestalten unterscheiden sich von der erwarteten Gestalt $\mathfrak{S}$ bald schon in den Grenzen selbst, bald schon in Differentialquotienten von U tieferen Ranges als $n_m - 1$, und gehen ganz gewiss mit $\mathfrak{S}$ eine Osculation ein, welche wenigstens nicht durchgehends den Rang n_m erreicht, — und eben aus diesem Grunde liegen die beseitigten Nachbargestalten vom erwarteten $\mathfrak{S}$ entfernter, als die beibehaltenen.

29) Man kann auch behaupten, dass die osculatorische Substitution 13), 18) die einzig mögliche sei, die uns zu erwünschten Kriterien führen kann, weil einerseits eine osculatorische Substitution tieferen Ranges zu entfernteren Nachbargestalten führend, keine sichere Unterscheidung gewähren kann, und weil anderseits eine osculatorische Substitution höheren Ranges in unserem Problem jedweden Unterschied zwischen den Nachbargestalten vernichtend, zwischen denselben durchaus keine Unterscheidungsmerkmale aufzuweisen vermag.

In Beziehung auf die durch Verwendung des Osculationscoëfficienten sich erbietende Anzahl der unter den eingeführten Functionen ε, ψ_1, $\psi_2, \ldots \psi_\mu$ in gewisser Beziehung willkürlich wählbaren Functionen ist leicht zu bemerken, dass dieselbe um eine Einheit grösser sich gestaltet, als dies bei der Anlage des vor- 30)
gelegten Problems angemessen und durchaus erforderlich ist, dass es demgemäss unserem Ermessen anheimgestellt verbleibt, zwischen den Grössen eine neue, versteht sich, eine die Zwecke der weiteren Discussion möglichst förderude Relation zu stiften. Als eine solche für die spätere Untersuchung sehr nützliche Relation erweist sich folgende:

$$\eta = \sigma^2 - (\psi_1^2 + \psi_2^2 + \ldots + \psi_\mu^2) = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon \gtrless 0, \qquad 31)$$

sobald man $\sigma^2 = \overset{\mu}{\underset{1}{S}}{}_m \left[\left((sin\, w^{n_m})_{n_m}\right)^2\right]$ setzt, und hiemit aussagt, dass die Functionen ψ_1, $\psi_2 \ldots \psi_\mu$ nicht gleichzeitig identisch verschwinden dürfen, und im vorgeschriebenen Intervalle stets endlich verbleiben müssen.

Aus der in 27) bis 31) niedergelegten Auseinandersetzung geht zur Genüge hervor, dass die Vergleichung der auf Grund 30), 31), §. 1 berechneten Gestalt $\mathfrak{S} = S$ mit den in Folge Verwendung des Osculationscoëfficienten übrig gebliebenen n ä c h s t e n Nachbargestalten zu entscheidenden Kriterien führen muss, ob die erwartete nach 30), 31), §. 1 ermittelte Gestalt $\mathfrak{S} = S$ sich im Zustande des Maximums oder Minimums — oder in gar keinem dieser Zustände befindet.

Es ist somit unsere nächste Aufgabe, zu untersuchen, ob der in 21) niedergelegte Ausdruck $\delta^2 \mathfrak{S}$ unter Beachtung der Relationen 24) und 31) im Bereiche der gesetzlichen Willkürlichkeit der Functionen ε, ψ_1, ψ_2, $\ldots \psi_\mu$ in Bezug auf sein Vorzeichen sich stabil erweise oder nicht; dann wird sich die erwartete Gestalt $\mathfrak{S} = S$

bei stabil positivem Werthe von $\delta^2 \mathfrak{S}$ im Zustande des Minimums,
„ „ negativem „ „ „ „ „ „ Maximums, 32)

befinden, und es wird $\mathfrak{S} = S$ keinen dieser Zustände ergeben, wenn erweislich die Grösse $\delta^2 \mathfrak{S}$ positive und negative Werthe anzunehmen vermag.

§. 3.

Mit Bezug auf das Zutreffen der in 26), §. 2 angedeuteten Bedingungen, welche innerhalb des Integrationsintervalls die Stetigkeit und Endlichkeit der mit $a_{m,m'}$, $b_{p,m}$ bezeichneten Grössen bedingen, können wir diese Eigenschaften auch bei der Summe

$$\varepsilon^2 M_2 = \varepsilon^2 \overset{\mu}{\underset{1}{S}}{}_{m'} \overset{\mu}{\underset{1}{S}}{}_m \left[a_{m,m'} \psi_m \psi_{m'}\right] \qquad 1)$$

gelten lassen, sobald wir ε endlich voraussetzen und erwägen, dass diese Eigenschaft den Functionen ψ_1, ψ_2, $\psi_3, \ldots \psi_\mu$ in Folge der Relation 31), §. 2 ganz gewiss anhaften muss.

Unter den Werthen von M_2, welche der in Bezug auf die Unbekannten ψ_1, $\psi_2, \ldots \psi_\mu$ gewonnenen Relation $\delta M_2 = 0$, und gleichzeitig den Relationen 24), 31), §. 2 entsprechen, befinden sich demgemäss theils Maximal-, theils Minimalwerthe von M_2, theils vielleicht auch solche, welche weder ein Maximum noch Minimum von M_2 darstellen. Den Inbegriff aller dieser Werthe von M_2 wollen wir unter der gemeinschaftlichen Benennung H a u p t w e r t h e v o n M_2 auffassen, und im Gefolge dessen folgende Sätze anführen:

Ist M_2 im Bereiche der zulässigen Veränderlichkeit stabil positiv, oder stabil negativ, so besitzt es im e r s t e n F a l l nur p o s i t i v e, im zweiten Falle nur n e g a t i v e Hauptwerthe.

Ist M_2 im Bereiche der zulässigen Veränderlichkeit nicht mit einem stabilen Vorzeichen versehen, so gilt 2)
dies auch von den Hauptwerthen von M_2.

Das gemeinschaftliche Vorzeichen aller Hauptwerthe von M_2 gehört auch den sämmtlichen Werthen von M_2 an.

Behufs Bestimmung der Hauptwerthe von M_2 unter Aufrechthaltung der sub 24) und 31), §. 2 ersichtlichen Bedingungen, setzen wir in bereits gepflogener Weise:

3)
$$\mathfrak{M} = M_2 + s\gamma + s_1\gamma_1 + s_2\gamma_2 + \ldots + s_\nu\gamma_\nu$$
$$\delta\mathfrak{M} = \delta M_2 + s\delta\gamma + s_1\delta\gamma_1 + \ldots + s_\nu\delta\gamma_\nu = 0\,,$$

wo $s,\ s_1,\ s_2,\ldots s_r$ einstweilen noch unbestimmte der Form nach unveränderliche Functionen von $x_1,\ x_2,\ldots x_r$ bedeuten.

Wir finden in Bezug auf die unbekannten Functionen $\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ldots\psi_\mu$ aus 24), 31), §. 2 und 1)

$$\delta\gamma_p = \quad 2\overset{\mu}{\underset{1}{S_m}}(b_{pm}\,\delta\psi_m)\,,$$

$$\delta\gamma = -2\overset{\mu}{\underset{1}{S_m}}(\psi_m\,\delta\psi_m)\,,$$

$$\delta M_2 = \quad 2\overset{\mu}{\underset{1}{S_{m'}}}\overset{\mu}{\underset{1}{S_m}}(a_{mm'}\,\psi_{m'}\,\delta\psi_m)$$

und schliesslich

4)
$$\delta\mathfrak{M}_2 = 2\overset{\mu}{\underset{1}{S_m}}\delta\psi_m\left[\overset{\mu}{\underset{1}{S_{m'}}}(a_{mm'}\,\psi_{m'}) + \overset{\nu}{\underset{1}{S_p}}(s_p\,b_{pm}) - s\,\psi_m\right] = 0.$$

Die vorstehende Gleichung zerfällt wegen der nun als willkürlich anzusehenden $\delta\psi_1\ \delta\psi_2\ldots\delta\psi_\mu$ in μ Gleichungen, welche man aus 4) durch Specialisirung der Werthe von $m = 1,\ 2,\ 3\ldots\mu$ erhält.

5)
$$\begin{aligned}
a_{11}\,\psi_1 + a_{12}\,\psi_2 + \ldots + a_{1\mu}\,\psi_\mu + b_{11}\,s_1 + b_{21}\,s_2 + \ldots + b_{\nu 1}\,s_\nu &= s\,\psi_1\\
a_{21}\,\psi_1 + a_{22}\,\psi_2 + \ldots + a_{2\mu}\,\psi_\mu + b_{12}\,s_1 + b_{22}\,s_2 + \ldots + b_{\nu 2}\,s_\nu &= s\,\psi_2\\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots\\
a_{\mu 1}\,\psi_1 + a_{\mu 2}\,\psi_2 + \ldots + a_{\mu\mu}\,\psi_\mu + b_{1\mu}\,s_1 + b_{2\mu}\,s_2 + \ldots + b_{\nu\mu}\,s_\nu &= s\,\psi_\mu
\end{aligned}$$

An diese Gleichungen schliessen sich noch die Bedingungsgleichungen 24), 31), §. 2 an:

6)
$$\begin{aligned}
b_{11}\,\psi_1 + b_{12}\,\psi_2 + \ldots + b_{1\mu}\,\psi_\mu &= 0\\
b_{21}\,\psi_1 + b_{21}\,\psi_2 + \ldots + b_{2\mu}\,\psi_\mu &= 0\\
\vdots \qquad & \\
b_{\nu 1}\,\psi_1 + b_{\nu 2}\,\psi_2 + \ldots + b_{\nu\mu}\,\psi_\mu &= 0
\end{aligned}$$

7)
$$\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 + \ldots + \psi_\mu^2 = \theta^2$$

Multiplicirt man die Gleichungen 5) der Reihe nach mit $\psi_1,\ \psi_2,\ldots\psi_\mu$, so erhält man durch Summirung der so multiplicirten Gleichungen mit Rücksicht auf 6) und 1), und unter Andeutung der Hauptwerthe von M_2 mit dem Symbol (M_2)

8)
$$\overset{\mu}{\underset{1}{S_m}}\overset{\mu}{\underset{1}{S_{m'}}}(a_{mm'}\,\psi_m\,\psi_{m'}) = s\,\theta^2 = (M_2).$$

Setzt man ganz allgemein $(a_{mm} - s) = a'_{mm}$, so erhält man aus 5) und 6) die Bestimmung der Grössen: $\psi_1,\ \psi_2,\ldots\psi_\mu,\ s_1,\ s_2,\ldots s_\nu$ in folgender Form:

9)
$$\psi_1 = \frac{0}{\Delta_s},\ \psi_2 = \frac{0}{\Delta_s},\ldots\psi_\mu = \frac{0}{\Delta_s},\ s_1 = \frac{0}{\Delta_s},\ s_2 = \frac{0}{\Delta_s},\ldots s_\nu = \frac{0}{\Delta_s},$$

wo

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a'_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \ldots & a_{1\mu}, & b_{11}, & b_{21}, \ldots & b_{\nu 1} \\ a_{21}, & a'_{22}, & a_{23}, \ldots & a_{2\mu}, & b_{12}, & b_{22}, \ldots & b_{\nu 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\mu 1}, & a_{\mu 2}, & a_{\mu 3}, \ldots & a'_{\mu\mu}, & b_{1\mu}, & b_{2\mu}, \ldots & b_{\nu\mu} \\ b_{11}, & b_{12}, & b_{13}, \ldots & b_{1\mu}, & 0, & 0, & 0 \\ b_{21}, & b_{22}, & b_{23}, \ldots & b_{2\mu}, & 0, & 0, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{\nu 1}, & b_{\nu 2}, & b_{\nu 3}, \ldots & b_{\nu\mu}, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} \qquad 10)$$

Wegen 7) können die Grössen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_\mu$ nicht gleichzeitig identisch verschwinden, und demgemäss muss das in ∇_s enthaltene s so gewählt werden, damit $\nabla_s = 0$ werde, und in Folge dessen die Bestimmungen 9) die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen.

Wenn man die Determinante ∇_s nach den Potenzen von s ordnet, so kann man die Gleichung $\nabla_s = 0$ in folgender Form schreiben:

$$\nabla_s = A_{\mu-\nu} s^{\mu-\nu} + A_{\mu-\nu-1} s_{\mu-\nu-1} + \ldots + A_2 \mu^2 + A_1 \mu^1 + A_0 = 0 \qquad 11)$$

wo sich die mit A bezeichneten Coëfficienten als reine Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_r$ oder auch als Functionen von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$ darstellen lassen, und unter oben erwähnten Bedingungen im Bereiche der zulässigen Veränderlichkeit als stetige und endliche Grössen zu betrachten sind.

Aus der Gestalt der Determinante ∇_s erschliesst man zur Bestimmung der Eckcoëfficienten A_0 und $A_{\mu-\nu}$ in 11) die Relationen:

$$A_{\mu-\nu} = (-1)^q \left[B_1^2 + B_2^2 + \ldots + B_\tau^2\right], \quad q = \binom{\mu+\nu+1}{2}, \quad \tau = \binom{\mu}{\nu} \qquad 12)$$
$$A_0 = \Delta_0,$$

wo $B_1, B_2 \ldots B_\tau$ die Partialdeterminanten vorstellen, welche aus 6) jedesmahl entstehen, wenn man auf alle möglichen Weisen ν Grössen aus dem Systeme $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_\mu$ heraushebt, und durch die übrigen ausdrückt. Insoferne nun die Gleichungen 6) in sich keinen Wiederspruch beherbergen, ist die Existenz des Coëfficienten $A_{\mu-\nu}$ und sein constantes Vorzeichen $(-1)^q$ verbürgt.

Der Fall $\nabla_0 = 0$ deutet auf einen oder mehrere identisch verschwindende der Gleichung 11) genügende s-Werthe, und führt zu solchen Systemen von ψ Werthen, welche ein identisches Verschwinden von M_2 herbeiführen. Die entsprechenden Nachbarwerthe werden demnach in der zweiten Variation $\delta^2 \mathfrak{S}$ sich gar nicht abspiegeln und mögen zweifelhafte Nachbarwerthe heissen. Sie erheischen einer besonderen Untersuchung nur in denjenigen Fällen, wenn die übrigen identisch nicht verschwindenden Wurzeln in 11) ein stabiles, gemeinschaftliche Vorzeichen beurkunden. Das nähere Eingehen in die Betrachtung solcher Fälle behalte ich mir für die nächte Abhandlung vor, und begnüge mich hier mit der Aufstellung derjenigen Kriterien, welche im Fall $\nabla_0 \gtrless 0$ über den Zustand des vorgelegten Integrals entscheiden.

Die aus 11) gezogenen $\mu - \nu$ Wurzeln liefern geradezu diejenigen Werthe von $s\,\theta^2$, welche mit Rücksicht auf 8) das vollständige System der Hauptwerthe von M_2 bilden.

Um über die Natur der Hauptwerthe (M_2) näheren Aufschluss zu erlangen, denken wir uns zwei Werthsysteme:

$$[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \psi_\mu, \; s_1, s_2, s_3, \ldots s_\nu]_1, \quad [\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3, \ldots \psi'_\mu, \; s'_1, s'_2, \ldots s'_\nu]_2$$

welche zwei verschiedenen Wurzeln s und s' der Gleichung 11) entsprechen, und natürlicher Weise den Gleichungen 5), 6), 7) genügen. Demgemäss können wir die Gleichung 5), 6), 7) in Bezug auf das zweite Werthsystem und mit Rücksicht auf die Eigenschaft $a_{m\,m'} = a_{m'\,m}$ in folgender Form aufschreiben:

$$
13)\quad
\begin{array}{l|l}
\psi_1 & a_{11}\psi'_1 + a_{21}\psi'_2 + \ldots + a_{\mu 1}\psi'_\mu + b_{11}s'_1 + b_{21}s'_2 + \ldots + b_{\nu 1}s'_\nu = s'\psi'_1 \\
\psi_2 & a_{12}\psi'_1 + a_{22}\psi'_2 + \ldots + a_{\mu 2}\psi'_\mu + b_{12}s'_1 + b_{22}s'_2 + \ldots + b_{\nu 2}s'_\nu = s'\psi'_2 \\
\cdot & \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\psi_\mu & a_{1\mu}\psi'_1 + a_{2\mu}\psi'_2 + \ldots + a_{\mu\mu}\psi'_\mu + b_{1\mu}s'_1 + b_{2\mu}s'_2 + \ldots + b_{\nu\mu}s'_\nu = s'\psi'_\mu \\
s_1 & b_{11}\psi'_1 + b_{12}\psi'_2 + \ldots + b_{1\mu}\psi'_\mu + \;0\; + \;0\; + \ldots + \;0\; = 0 \\
s_2 & b_{21}\psi'_1 + b_{22}\psi'_2 + \ldots + b_{2\mu}\psi'_\mu + \;0\; + \;0\; + \ldots + \;0\; = 0 \\
\cdot & \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
s_\nu & b_{\nu 1}\psi'_1 + b_{\nu 2}\psi'_2 + \ldots + b_{\nu\mu}\psi'_\mu + \;0\; + \;0\; + \ldots + \;0\; = 0
\end{array}
$$

Wenn man die Gleichungen 13) je mit den links exponirten Factoren multiplicirt, und dann zusammenaddirt, die Summengleichung nach Verticalreihen anordnet, und die Verticalcolumnen nach 5) und 6) bestimmt, so erhält man:

$$s\psi_1 . \psi'_1 + s\psi_2 . \psi'_2 + \ldots + s\psi_\mu . \psi'_\mu = s' . \psi_1\psi'_1 + s' . \psi_2\psi'_2 + \ldots + s' . \psi_\mu\psi'_\mu$$

oder

$$14)\qquad (s-s')(\psi_1\psi'_1 + \psi_2\psi'_2 + \ldots + \psi_\mu\psi'_\mu) = 0$$

Die Gleichung 11) als mit reellen Coëfficienten versehen, verträgt complexe Wurzeln nur in Form von conjugirten Wurzelpaaren etwa:

$$s = p + iq\,, \quad s' = p - iq\,,$$

und demgemäss müsste ganz allgemein sein:

$$\psi_m = p_m + iq_m\,, \quad \psi'_m = p_m - iq_m\,, \quad \psi_m\psi'_m = p_m^2 + q_m^2\,,$$

und im Gefolge dessen würde man aus 14) erhalten:

$$2iq\,[p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_\mu^2 + q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_\mu] = 0\,,$$

hiemit wegen $q \gtrless 0$ die der Bedingung 7) geradezu widersprechende Relation:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_\mu = q_1 = q_2 = \ldots = q_\mu = \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_\mu = 0\,,$$

welchem Widerspruch nur durch Satzungen begegnet werden kann:

15) 1. Alle Wurzeln der Gleichung 11) sind reelle Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_r$;

2. alle Hauptwerthe von M_2 sind reelle Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_r$;

und im Gefolge dessen sind

16) 3. die Hauptwerthe von M_2 im Bereiche des vorgeschriebenen Intervalls **stabil positiv** oder **stabil negativ**, je nachdem die Coëfficientengruppe in 11) in demselben Bereiche eine stabile Anzahl von $\mu-\nu$ Zeichenwechseln, oder von $\mu-\nu$ Zeichenfolgen darbietet. Im ersten Falle ist M_2 selbst im Bereiche der zulässigen Veränderlichkeit von $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_\mu$ stabil positiv, im zweiten dagegen stabil negativ. Sonst ist M_2 fähig, positive und negative Vorzeichen anzunehmen.

Das Integral 21), §. 2 lässt sich auch so schreiben:

$$17)\qquad \delta^2\mathfrak{S} = \frac{1}{2}\rho^2 \int^{(r)} dx_r\, dx_{r-1} \ldots dx_2\, dx_1\; \varepsilon^2 M_2\,,$$

und wird

4. mit Rücksicht auf die Bildung der einzelnen Summirungselemente im Bereiche der zulässigen Veränderlichkeit stabil positiv, wenn das stabile Vorzeichen der Werthe von M_2 mit dem stabilen Vorzeichen des Productes $\mathfrak{p} = \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \ldots \Delta_r$ übereinstimmt.

5. Das Integral $\delta^2 \mathfrak{S}$ wird in demselben Bereiche stabil negativ, wenn das stabile Vorzeichen von M mit dem stabilen Vorzeichen von $\mathfrak{p}$ nicht übereinstimmt.

6. Das Integral $\delta^2 \mathfrak{S}$ erfreut sich in diesem Bereiche keines stabilen Vorzeichens, wenn nicht schon M in diesem Bereiche die Stabilität des Vorzeichens beurkundet. In diesem Falle erscheint das Integral $\delta^2 \mathfrak{S}$ aus verschieden bezeichneten Elementen zusammengesetzt, und zwar in Folge der zulässigen Willkürlichkeit von $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_\mu$ bald vorherrschend aus positiven, bald vorherrschend aus negativen Elementen. Das Integral $\delta^2 \mathfrak{S}$ erscheint in diesem Falle gleich fähig, eben so gut positive als auch negative Vorzeichen anzunehmen, und besagt, dass in diesem Falle das vorgelegte Integral $S = \mathfrak{S}$ sich weder im Maximum noch im Minimum befinde.

Demnach wird ein auf Grundlage der Werthe 30) und 31), §. 1 berechneter Hauptwerth von $S = \mathfrak{S}$

im Fall 4. ein Minimalwerth,

„ „ 5. ein Maximalwerth sein, — und wird endlich

„ „ 6. keinen dieser Zustände beurkunden.

Die Untersuchung über die Zeichenfestigkeit der Functionen, welche den eben ausgesprochenen Kriterien zu Grunde liegt, erheischt in der Regel keines geringen Aufwandes von Zeit und Mühe — und es dürfte nicht überflüssig sein, in Bezug auf die zu beobachtende Reihenfolge der hiebei vorzunehmenden Operationen einige Bemerkungen vorzuführen, dies namentlich in denjenigen Fällen, wo man, mit Hintansetzung aller weiteren Operationen, schon auf Grundlage gewisser im Zuge der Untersuchung zu Tage tretender Indicien mit Sicherheit schliessen kann, dass weder ein Maximum noch ein Minimum stattfindet. Zu diesem Zwecke sei uns gestattet, folgende Grundsätze auszusprechen:

1. Hat man mehrere Functionen über ihre Zeichenfestigkeit zu untersuchen, so thue man dies, in der Weise, dass man hiebei von der minder complicirten zur complicirteren fortschreitet;

2. Unter Beobachtung dieses Gesetzes untersuche man die Functionen $\Delta_2, \Delta_3 \ldots \Delta_2$ jede insbesondere, bis man zur Überzeugung gelangt, dass dem Producte $\Delta_1 \; \Delta_2 \ldots \Delta_3$ ein stabiles Vorzeichen angehört oder nicht. Ein eventuell sich ergebendes stabile Vorzeichen $\mathfrak{z}_\mathfrak{p}$ dieses Productes berechtigt uns eine ähnliche Untersuchung auch auf die Coëfficienten der Kriteriengleichung auszudehnen und in folgender Weise einzuleiten.

3. Man theile die Coëfficienten der Kriteriengleichung in zwei Partien

$$P_1 = (A_1, A_3, A_5, \ldots), \; P_2 = (A_0, A_2, A_4, \ldots)$$

ab, und nehme zuerst diejenige Partie vor, in welcher der stabilbezeichnete Coëfficient $A_{\mu-2}$ vorkommt. Nach 1. vorgehend, ist man berechtigt, jedesmal die weitere Untersuchung abzubrechen, sobald man bei irgend einem Coëfficienten für sich, die Nichtstabilität seines Vorzeichens constatirt hat; und auch dann, wenn man zur Überzeugung gelangt, dass die derselben Parthie angehörenden Coëfficienten sich nicht eines gemeinschaftlichen stabilen Vorzeichens erfreuen. Die gewonnene Überzeugung, dass etwa $\mathfrak{z}_1$ als stabiles Vorzeichen der Coëfficientengruppe P_1 und $\mathfrak{z}_2$ als stabiles Vorzeichen der Coëfficientengruppe P_2 angehört, deutet auf ein Maximum oder Minimum hin, je nachdem das Product $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 \mathfrak{z}_\mathfrak{p}$ sich positiv oder negativ gestaltet.

4. Beim Vorkommen identisch verschwindender Coëfficienten in der Kriteriengleichung findet kein Maximum noch Minimum statt, wenn die identisch verschwindenden Coëfficienten nicht eine ununterbrochene

Aufeinanderfolge von Endcoëfficienten der Kriteriengleichung bilden, und auch dann nicht, wenn bei verschwindenden Endcoëfficienten irgend einer von den Gruppen P_1 oder P_2 ein stabiles gemeinschaftliche Vorzeichen abgeht.

5. Wenn bei identischem Verschwinden ausschliesslich blos von Endcoëfficienten die Gruppen P_1 und P_2 in Bezug auf die übrigen Coëfficienten je ein stabiles gemeinschaftliche Vorzeichen besitzen, so schliessen wir auf die Existenz von zweifelhaften Nachbarwerthen, und können erst durch Beiziehung höherer Variationen von $\mathfrak{S}$ über den Zustand des vorgelegten Integrals endgiltig entscheiden.

6. Um die Gebietsausdehnung der Nachbarwerthe zu erfahren, innerhalb dessen ein als Maximum oder Minimum erkannter Werth in dieser Eigenschaft vorherrscht, wäre es nothwendig, das möglichst kleine n zu ermitteln, welches zur Bildung des Osculationsfactors und dann zur Berechnung des vollständigen Ausdruckes $\delta^2\mathfrak{S}$ verwendet, das bereits erkannte Vorzeichen von $\delta^2\mathfrak{S}$ nicht alterirt. Bei derartig bestimmten n bildet dann der Ausdruck $\frac{1}{n}$ das natürliche Mass der erwähnten Gebietsausdehnung.