BEITRÄGE

ZUR

BILDUNG DER SYMMETRISCHEN FUNCTIONEN DER WURZELSYSTEME

UND DER

RESULTANTE SIMULTANER GLEICHUNGEN.

VON

DR. GUSTAV VON ESCHERICH.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 27. JÄNNER 1876.

Zur Berechnung der einfachsten symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung besteht eine ziemlich grosse Anzahl Methoden. Die älteste und bekannteste derselben drückt mittelst einer allgemeinen von Waring herrührenden Formel zuerst die angegebene Function durch die Potenzsummen der Wurzeln aus, und dann jede dieser Potenzsummen vermöge der Newton'schen Relationen durch die Coëfficienten der Gleichung. Diese Methode leidet an mehreren, theils theoretischen, theils praktischen Gebrechen, von deren letzteren das hauptsächlichste ist, dass sie viele Glieder in die Rechnung aufzunehmen und fortzuschleppen zwingt, die sich schliesslich im Endresultate vernichten. Es hat deshalb Waring in seinen „Meditationes algebraicae" eine neue Methode aufgestellt, die Glied für Glied aus der vorgelegten symmetrischen Function eliminiren lehrt. Dieses Verfahren, das auch Gauss in der „Demonstratio nova altera" angibt, besitzt vor der älteren Methode allerdings den Vortheil, klar zu zeigen, dass jede symmetrische Function der Wurzeln eine ganze und ganzzahlige Function der Coëfficienten der Gleichung ist: es erfordert aber nicht minder langwierige Rechnungen. Auch die theoretisch so elegante Methode Cauchy's, der Reihe nach die einzelnen Wurzeln der Gleichung aus der gegebenen symmetrischen Function zu eliminiren, beansprucht zu ihrer Ausführung oft mühselige Rechnungen. Durch grosse Einfachheit zeichnet sich hingegen das von Abel Transon[1] angegebene Verfahren aus, das sich noch durch die von ihm gefundenen Sätze über den Grad und das Gewicht einer symmetrischen Function erheblich vereinfacht. Diese Sätze haben auch zu einer anderen höchst compendiösen Berechnungsweise der symmetrischen Functionen geführt. Sie ermöglichen es nämlich, die litterale Form der symmetrischen Function aufzustellen. Die noch unbekannten Coëfficienten derselben werden mittelst eines Systems linearer Gleichungen bestimmt, das man erhält, entweder, indem man in die litterale Form die Wurzeln und Coëfficienten zweckmässig gebildeter Gleichungen substituirt,

[1] Nouvelles annales des mathématiques, t. IX.

oder durch eine von Brioschi[1] aufgestellte Differentialformel für Functionen aus den Coëfficienten einer Gleichung. Auf einem ganz neuen Principe beruht die von Borchardt[2] angegebene Methode. Er stellt nämlich eine erzeugende Function auf, aus deren Entwicklung alle einfachsten Typen der symmetrischen Functionen hervorgehen, und bestimmt dann dieselbe durch die Coëfficienten der gegebenen Gleichung.

Von diesen Methoden wurde zuerst die älteste durch Poisson für ein System simultaner Gleichungen erweitert. Diese Methode ist aber wegen der ungeheuren Rechnungen, die sie erfordert, fast praktisch unausführbar. Mit derselben nahezu identisch ist auch das von Schlaefli[3] angegebene Verfahren zur Bestimmung der symmetrischen Functionen. Der wichtige Satz über den Grad des Zählers und Nenners einer symmetrischen Function, den Schlaefli bei dieser Gelegenheit aufstellte, erhielt seine Ergänzung durch eine merkwürdige Abhandlung Betti's[4], in welcher derselbe Formeln entwickelte um die symmetrischen Functionen direct durch die Coëfficienten der Gleichungen auszudrücken, ferner Sätze über den Grad, das totale Gewicht und die partialen Gewichte[5] des Zählers der symmetrischen Function und auch den Nenner derselben finden lehrte. Diese Sätze besitzen aber keineswegs mehr die grosse Verwendbarkeit, wie die analogen bei den Gleichungen mit einer Unbekannten. Sie vermögen allerdings die litterale Form des Zählers der symmetrischen Function festzustellen, und wäre daher noch der Nenner berechnet, so liesse sich in ähnlicher Weise, wie bei den Gleichungen mit einer Unbekannten die ganze Function bestimmen. Aber abgesehen davon, dass jetzt eine ziemlich grosse Anzahl linearer Gleichungen zur Bestimmung der Coëfficienten der litteralen Form erforderlich, also eine eben so grosse Anzahl Systeme simultaner Gleichungen mit angenommenen simultanen Wurzelsystemen zu bilden wäre, lassen sich diese nicht mehr mit derselben Leichtigkeit herstellen, wie eine Gleichung aus gegebenen Wurzeln.

Wegen der Schwierigkeiten, welche der Ausführung all' dieser Methoden entgegenstehen, habe ich versucht, ob sich nicht die Methoden Cauchy's und Abel Transon's verallgemeinern lassen und auch einfachere Methoden ergeben. Meine Bemühungen führten mich auf ein Verfahren, welches in den folgenden Blättern dargelegt werden soll. Dasselbe eignet sich zur Berechnung jedweder gegebenen symmetrischen Function, lässt aber bei den einfachsten Typen derselben in Folge der Sätze Betti's eine besondere Kürzung zu. Die Beschaffenheit dieses Verfahrens liess auch erkennen, dass mittelst desselben die logarithmische Berechnungsweise der Resultante, die Lagrange[6] für zwei simultane Gleichungen anwandte, für ein beliebiges Gleichungssystem sich relativ einfach gestaltet. Ganz ungesucht führte die Entwicklung dieses Verfahrens auch zu einer Verallgemeinerung der Methode Borchardt's.

Das ganze Verfahren beruht hauptsächlich auf den Eigenschaften einer gewissen Function, die, wie ich erst nach Beendigung meiner Untersuchungen zufällig ersah, schon von Jacobi[7] für den Fall zweier simultanen Gleichungen zur Berechnung der Potenzsummen ihrer Wurzeln benützt wurde. Jacobi hat jedoch, da seine Abhandlung mehr auf die Verallgemeinerung einer äusserst wichtigen Formel abzielte, sein Verfahren zur Berechnung der Potenzsummen nicht weiter ausgebildet. Auch diese Formel in aller Allgemeinheit[8], die später Liouville[9] aus einer Relation — die er mittelst seiner Eliminationsmethode gewann, und die er für allgemeiner als die Jacobi'sche hielt — durch einen Übergang von $(n+1)$ zu n Dimensionen ableitete, ergibt sich im Folgenden ganz von selbst. Es zeigt sich aber, dass in dieser Jacobi'schen Formel die von Lion-

---

[1] Annali di Tortolini, t. V.

[2] Crelle's Journal, Bd. 53.

[3] Denkschriften d. kais. Akad. d. Wiss. in Wien, Bd. IV.

[4] Annali di Matematica, t. I. Sopra le funzione simmetriche etc.

[5] Diese Sätze lassen sich auch ohne Benützung der Abhandlung Betti's in derselben Weise darthun, in welcher Salmon (Lesson introductory etc. Deutsche Ausgabe, p. 65) die Sätze über den Grad und das Gewicht einer Resultante von drei homogenen Gleichungen beweist.

[6] Sur l'élimination des inconnues etc. Oeuvres 3.

[7] Crelle's Journal, Bd. 14. Theoremata nova etc.

[8] Dass Jacobi die Allgemeinheit seiner Formel kannte, geht aus seiner Abhandlung über das Cramer'sche Paradoxon hervor: Theoremata de punctis etc. (Crelle's Journal, Bd. 15).

[9] Journal de Mathématiques, Sér. I, t. IV.

ville angegebene, vermeintlich allgemeinere, als ganz specieller Fall enthalten ist. Aus dieser Liouville'schen lassen sich ferner durch passende Specialisirungen alle Formeln gewinnen, die derselbe durch sein Eliminationsverfahren ableitete.

I.

Die folgenden Betrachtungen beruhen auf einer Bemerkung, die unmittelbar aus der Entwicklung einer Function $F(x, y, z\ldots)$ der Veränderlichen $x, y, z\ldots$ nach der Mac-Laurin'schen Reihe fliesst. Ist nämlich $F(x, y, z\ldots)$ eine ganze, rationale Function der $x, y, z\ldots$, so sind in der Entwicklung des Quotienten:

$$\frac{F(x, y, z\ldots)}{(x-a)(y-b)(z-c)\ldots}$$

nach fallenden Potenzen der $x, y, z\ldots$ die Coëfficienten, welche Producten aus negativen Potenzen sämmtlicher Variablen angehören, gleich den Ausdrücken, welche in der Entwicklung von:

$$\frac{F(a, b, c\ldots)}{(x-a)(y-b)(z-c)\ldots}$$

nach fallenden Potenzen der $x, y, z\ldots$ mit denselben Potenzen der Variablen behaftet sind; insbesondere ist der Coëfficient der negativen ersten Potenz des Productes sämmtlicher Variablen in $\frac{F(x, y, z\ldots)}{(x-a)(y-b)(z-c)\ldots}$ gleich

$$F(a, b, c\ldots).$$

II.

Es seien n Gleichungen:

$$f_1(x_1, x_2\ldots x_n) = 0\,, \quad f_2(x_1, x_2\ldots x_n) = 0\ldots f_3(x_1, x_2\ldots x_n) = 0$$

mit den Unbekannten $x_1, x_2\ldots x_n$ gegeben.

Die Endgleichungen $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)\ldots F_n(x_n)$ nach $x_1, x_2\ldots x_n$ seien vom Grade μ und besässen bezüglich die Wurzeln:

$$\begin{matrix} \alpha_1^1, & \alpha_1^2\ldots\alpha_1^\mu \\ \alpha_2^1, & \alpha_2^2\ldots\alpha_2^\mu \\ \vdots & \\ \alpha_n^1, & \alpha_n^2\ldots\alpha_n^\mu \end{matrix} \tag{1}$$

wo die in derselben Colonne stehenden Wurzeln Systeme simultaner Wurzeln der vorgelegten Gleichungen vorstellen.

Um nun die Bemerkung in (I.) zur Berechnung der symmetrischen Functionen der Wurzelsysteme verwerthen zu können, ist es zuvörderst nothwendig, eine Summe von der Form:

$$\sum_{k=1}^{\mu} \frac{1}{\varphi(\alpha_1^k, \alpha_2^k\ldots\alpha_n^k)(x-\alpha_1^k)(x_2-\alpha_2^k)(x_n-\alpha_n^k)}, \tag{2}$$

in der $\varphi(\alpha_1^k, \alpha_2^k\ldots\alpha_n^k)$ eine ganze, rationale Function der $\alpha_1^k, \alpha_2^k\ldots\alpha_n^k$ sein muss, — die sich auf eine Constante reduciren kann — und eine sie erzeugende Function, welche keine Wurzeln der vorgelegten Gleichungen in ihren Coëfficienten enthält, aufzufinden.

Diese Aufgabe bietet keine grossen Schwierigkeiten, denn der blosse Anblick der Summe 2) erinnert an die Zerlegung einer echt gebrochenen algebraischen Function in Partialbrüche, und führt also auf den Gedanken, die Lösung der Aufgabe auf diesem Wege zu versuchen.

Ist nun $\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ eine ganze rationale Function, die nach keiner ihrer Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ den $(\mu-1)$ten Grad übersteigt, so ist:

$$\frac{\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{F_1(x_1)\,F_2(x_2)\ldots F_n(x_n)} = \sum_{r_1, r_2 \ldots r_n} \frac{\Phi(\alpha_1^{r_1}, \alpha_2^{r_2} \ldots \alpha_n^{r_n})}{F_1'(\alpha_1^{r_1})\,F_2'(\alpha_2^{r_2})\ldots F_n'(\alpha_n^{r_n})\,(x_1-\alpha_1^{r_1})(x_2-\alpha_2^{r_2})\ldots(x_n-\alpha_n^{r_n})},$$

wo die Indices r alle Werthe von 1 bis μ annehmen. Soll daher die gestellte Aufgabe lösbar sein, so muss sich eine ganze, rationale Function $\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ finden lassen, die nach keiner der Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n$ den μten Grad erreicht, und von den Eigenschaften, dass:

1. $\Phi(\alpha_1^{r_1}, \alpha_2^{r_2} \ldots \alpha_n^{r_n})$ verschwindet, wenn nicht alle Indices r einander gleich sind;
2. $\dfrac{F_1'(\alpha_1^{r_1})\,F_2'(\alpha_2^{r_2}) \ldots F_n'(\alpha_n^{r_n})}{\Phi(\alpha_1^{r_1}, \alpha_2^{r_2} \ldots \alpha_n^{r_n})}$ für $r_1 = r_2 = \ldots r_n$ einer ganzen Function der α gleich wird.

Ich will nun eine Function, welche die erste der angegebenen Eigenschaften besitzt, suchen, und es wird sich zeigen, dass derselben auch die zweite zukommt.

Nach dieser Eigenschaft der Function Φ muss jedes der Producte:

$$\Phi f_1,\ \Phi f_2 \ldots \Phi f_n$$

für die Substitution irgend welcher n Wurzeln, die verschiedenen Zeilen von 1) entnommen sind, verschwinden. Diesen Producten kann man daher die Form geben:

$$\begin{aligned}
\Phi f_1 &= a_1^1\,F_1 + a_1^2\,F_2 + \ldots + a_1^n\,F_n \\
\Phi f_2 &= a_2^1\,F_1 + a_2^2\,F_2 + \ldots + a_2^n\,F_n \\
&\ldots \\
&\ldots \\
\Phi f_n &= a_n^1\,F_1 + a_n^2\,F_2 + \ldots + a_n^n\,F_n,
\end{aligned}$$

wo man offenbar die a als ganze Functionen der $x_1, x_2 \ldots x_n$ annehmen darf.

Nun bestehen bekanntlich Systeme ganzer Functionen m, welche die Relationen erfüllen:

$$\begin{aligned}
F_1 &= m_1^1\,f_1 + m_2^1 f_2 + \ldots + m_n^1\,f_n \\
F_2 &= m_1^2 f_1 + m_2^2 f_2 + \ldots + m_n^2 f_n \\
&\ldots \\
&\ldots \\
F_n &= m_1^n f_1 + m_2^n f_2 + \ldots + m_n^n f_n.
\end{aligned}$$

Bezeichnen daher die m die einfachsten Multiplicatoren, so ist die Function

$$\Phi = \Sigma \pm m_1^1\,m_2^2 \ldots m_n^n,$$

welche nach keiner der Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ den $(\mu-1)$ten Grad übersteigt, die einfachste Function, welche der gestellten Bedingung Genüge leistet.

Diese Function ist dieselbe, welche schon Jacobi für den Fall zweier simultanen Gleichungen aufstellte, und von welcher er sodann die oben genannten Eigenschaften nachwies.

Dass der Function $\Phi = \Sigma \pm m_1^1\,m_2^2 \ldots m_n^n$ auch die zweite der geforderten Eigenschaften zukommt, und zwar, dass $\dfrac{F_1'(x_1)\,F_2'(x_2)\ldots F_n'(x_n)}{\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n)}$ für die Substitution eines Systems simultaner Wurzeln denselben Werth annimmt, welchen die Functional-Determinante der vorgelegten Gleichungen $\Sigma \pm \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\,\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}$ für die Substitution desselben Systems erhält, ergibt sich aus ganz denselben Betrachtungen, welche Jacobi für den Fall zweier Gleichungen in der erwähnten Abhandlung durchgeführt hat.

Die gefundene Function $\Sigma \pm m_1^1 m_2^2 \ldots m_n^n$ genügt somit allen gestellten Bedingungen.

Bezeichnet man daher mit $D(x_1, x_2 \ldots x_n)$ die Functional-Determinante $\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ und mit $\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ die Determinante $\Sigma \pm m_1^1 m_2^2 \ldots m_n^n$, so ist:

$$\frac{\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{F_1(x_1) F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)} = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{1}{D(\alpha_1^k, \alpha_2^k \ldots \alpha_n^k)(x_1 - \alpha_n^k)(x_2 - \alpha_n^k) \ldots x_n - \alpha_n^k)}. \qquad 3)$$

III.

Bleibt die Summe

$$\sum_{h_1, h_2 \ldots h_\lambda} \Phi(\alpha_1^{h_1}, \alpha_2^{h_1} \ldots \alpha_n^{h_1}; \alpha_1^{h_2}, \alpha_2^{h_2} \ldots \alpha_n^{h_2}; \ldots \alpha_1^{h_\lambda}, \alpha_2^{h_\lambda} \ldots \alpha_n^{h_\lambda}),$$

in welcher

$$\Psi(\alpha_1^{h_1}, \alpha_2^{h_1} \ldots \alpha_n^{h_1}; \alpha_1^{h_2}, \alpha_2^{h_2} \ldots \alpha_n^{h_2}; \ldots \alpha_1^{h_\lambda}, \alpha_2^{h_\lambda} \ldots \alpha_n^{h_\lambda})$$

eine ganze, rationale Function der $\alpha_1^{h_1}, \alpha_2^{h} \ldots \alpha_n^{h_\lambda}$ bezeichnet, und in der die Indices alle von einander verschiedenen Werthe der Reihe 1 bis μ annehmen, für alle möglichen Vertauschungen der sämmtlichen simultanen Wurzelsysteme der vorgelegten Gleichungen unverändert, so soll diese Summe eine λ-förmige symmetrische Function der simultanen Wurzelsysteme genannt werden.

Um nun die einförmige, symmetrische Function $\sum_{h=1}^{\mu} \Psi(\alpha_1^h, \alpha_2^h \ldots \alpha_n^h)$ durch die Coëfficienten der Gleichungen auszudrücken, wird man in der Entwicklung von

$$\frac{\Psi(x_1, x_2 \ldots x_n) \Phi(x_1, x_2 \ldots x_n) D(x_1, x_2 \ldots x_n)}{F_1(x_1) F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)}$$

nach fallenden Potenzen der x den Coëfficienten von $(x_1, x_2 \ldots x_n)^{-1}$ aufsuchen. Dieser ist dann nach (I.) der gesuchten symmetrischen Function gleich.

Die mehrförmigen symmetrischen Functionen können durch eine fast augenfällige Modification dieses Verfahrens bestimmt werden.

Um z. B. die zweiförmige symmetrische Function $\sum_{h_1, h_2} \Psi(\alpha_1^{h_1}, \alpha_2^{h_1} \ldots \alpha_n^{h_1}; \alpha_1^{h_2}, \alpha_2^{h} \ldots \alpha_n^{h_2})$ zu berechnen, transformire man zuvörderst die Gleichung 3) dadurch, dass man ein Glied der Summe rechts, etwa das $h$te, von beiden Seiten der Gleichung subtrahirt; man erhält so:

$$\frac{\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{F_1(x_1) F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)} - \frac{1}{D(\alpha_1^h, \alpha_2^h \ldots \alpha_n^h)(x_1 - \alpha_1^h)(x_2 - \alpha_2^h) \ldots (x - \alpha_n^h)}$$
$$= \sum_k \frac{1}{D(\alpha_1^k, \alpha_2^k \ldots \alpha_n^k)(x_1 - \alpha_1^k)(x_2 - \alpha_2^k) \ldots (x - \alpha_n^k)},$$

wo k alle Werthe der Reihe 1 bis μ mit Ausnahme von h annimmt. Multiplicirt man den Ausdruck links mit $\Psi(\alpha_1^h, \alpha_2^h \ldots \alpha_n^h; x_1, x_2 \ldots x_n) D(x_1, x_2 \ldots x_n)$, und bezeichnet in der Entwicklung dieses Productes nach fallenden Potenzen der x den Coëfficienten von $(x_1, x_2 \ldots x_n)^{-1}$, welcher eine Function der Wurzeln $\alpha_1^h, \alpha_2^h \ldots \alpha_n^h$ sein wird, mit $\psi(\alpha_1^h, \alpha_2^h \ldots \alpha_n^h)$. so ist nach (I):

$$\psi(\alpha_1^h, \alpha_2^h \ldots \alpha_n^h) = \sum_k \Psi(\alpha_1^h, \alpha_2^h \ldots \alpha_n^h; \alpha_1^k, \alpha_2^k \ldots \alpha_n^k),$$

wo das k unter dem Summenzeichen alle Werthe von 1 bis μ mit Ausnahme von h annimmt. Daher ist der Coëfficient von $(x_1, x_1 \ldots x_n)^{-1}$ in der Entwicklung des Ausdruckes:

$$\frac{\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n) D(x_1, x_2 \ldots x_n) \psi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{F_1(x_1) F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)}$$

nach fallenden Potenzen der x gleich der gesuchten zweiförmigen symmetrischen Function.

Um die λ-förmige symmetrische Function

$$\sum_{h_1, h_2 \ldots h_\lambda} \Psi(\alpha_1^{h_1}, \alpha_2^{h_1} \ldots \alpha_n^{h_1}; \ldots \alpha_1^{h_\lambda}, \alpha_2^{h_\lambda} \ldots \alpha_n^{h_\lambda})$$

zu berechnen, subtrahire man von beiden Seiten der Gleichung 3) $(\lambda-1)$ z. B. die $(\lambda-1)$ ersten Glieder der Summe rechts; dadurch ergibt sich:

$$\frac{\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{F_1(x_1) F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)} - \sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{1}{D(\alpha_1^k, \alpha_2^k \ldots \alpha_n^k)(x_1-\alpha_1^k)(x_2-\alpha_2^k) \ldots (x_n-\alpha_n^k)}$$
$$= \sum_{k=\lambda}^{\mu} \frac{1}{D(\alpha_1^k, \alpha_2^k \ldots \alpha_n^k)(x_1-\alpha_1^k) \ldots (x_n-\alpha_n^k)}.$$

Multiplicirt man in dieser Gleichung den Ausdruck links mit

$$\Psi(\alpha_1^1, \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^1; \ldots \alpha_1^{\lambda-1}, \alpha_2^{\lambda-1} \ldots \alpha_n^{\lambda-1}; x_1, x_2 \ldots x_n) \; D(x_1, x_2 \ldots x_n),$$

und bezeichnet in der Entwicklung des so gefundenen Productes nach fallenden Potenzen der x den Coëfficienten von $(x_1, x_2 \ldots x_n)^{-1}$, welcher eine Function der Wurzeln $\alpha_1^1, \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^{\lambda-1}$ sein wird, mit $\psi(\alpha_1^1, \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^{\lambda-1})$, so ist nach (I.):

$$\psi(\alpha_1^1, \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^{\lambda-1}) = \sum_{h=\lambda}^{n} \Psi(\alpha_1^1, \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^1; \ldots \alpha_1^{\lambda-1}, \alpha_2^{\lambda-1} \ldots \alpha_n^{\lambda-1}; \alpha_1^h, \alpha_2^h \ldots x_n^h)$$

Somit ist die $(\lambda-1)$förmige symmetrische Function:

$$\sum_{h_1, h_2 \ldots h_{\lambda-1}} \psi(\alpha_1^{h_1}, \alpha_2^{h_1} \ldots \alpha_n^{h_1}; \ldots \alpha_1^{h_{\lambda-1}}, \alpha_2^{h_{\lambda-1}} \ldots \alpha_n^{h_{\lambda-1}})$$

gleich der gegebenen λ-förmigen, also die Berechnung dieser auf die jener zurückgeführt.

IV.

Das angegebene Verfahren zur Berechnung der mehrförmigen symmetrischen Functionen lässt für specielle Formen der Function Ψ noch bedeutende Abkürzungen zu. Es verdienen hiebei vorzüglich drei Fälle besondere Beachtung.

Der eine ist der, dass die Function Ψ ein Product aus Systemen simultaner Wurzeln und einer Function der Wurzeln ist.

Wäre etwa eine zweiförmige Function von der Form:

$$S_2 = \sum_{h_1, h_2} (\alpha_1^{h_1})^{p_1} (\alpha_2^{h_1})^{p_2} \ldots (\alpha_n^{h_1})^{p_n} \varphi(\alpha_1^{h_2}, \alpha_2^{h_2} \ldots \alpha_n^{h_2})$$

gegeben, wo die $p_1, p_2 \ldots p_n$ Exponenten bedeuten, und die Indices h alle möglichen von einander verschiedenen Werthe der Reihe 1 bis μ annehmen, so ist S_2 gleich dem Producte aus dem Coëfficienten von $x_1^{-(p_1+1)} x_2^{-(p_2+1)} \ldots x_n^{-(p_n+1)}$ in der Entwicklung von

$$\frac{\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n) \, D(x_1, x_2 \ldots x_n}{F_1(x_1) F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)}$$

nach fallenden Potenzen der x und dem Coëfficienten von $(x_1, x_2 \ldots x_n)^{-1}$ in der analogen Entwicklung von

$$\frac{\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n) \, D(x_1, x_2 \ldots x_n) \, \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{F_1(x_1) F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)}$$

vermindert um den Coëfficienten von $x_1^{-(p_1+1)}, x_2^{-(p_2+1)} \ldots x_n^{-(p_n+1)}$ in der letzteren Entwicklung.

Hätte eine dreiförmige Function die Form:

$$S_3 = \sum_{h_1, h_2 \ldots h_3} (\alpha_1^{h_1})^{p_1} (\alpha_2^{h_2})^{p_2} \ldots (\alpha_n^{h_n})^{p_n} (\alpha_1^{h_2})^{q_1} (\alpha_2^{h_3})^{q_2} \ldots (\alpha_n^{h_n})^{q_n} \varphi(\alpha_1^{h_3}, \alpha_2^{h_3} \ldots \alpha_n^{h_3}),$$

wo die p und q Exponenten bedeuten, und die h alle möglichen von einander verschiedenen Werthe der Reihe 1 bis μ erhalten sollen, so liessen sich dieselben in ähnlicher Weise berechnen.

Bezeichnet man in der Entwicklung des Quotienten

$$\frac{\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n)\, D(x_1, x_2 \ldots x_n)}{F_1(x_1)\, F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)}$$

nach fallenden Potenzen der Grössen x den Coëfficienten von $x_1^{-(p_1+1)}\, x_2^{-(p_2+1)} \ldots x_n^{-(p_n+1)}$ mit A, den von $x_1^{-(q_1+1)}\, x_2^{-(q_2+1)} \ldots x_n^{-(q_n+1)}$ mit B, in der mit $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ multiplicirten obigen Entwicklung den Coëfficienten von $(x_1, x_2 \ldots x_n)^{-1}$ mit C, den von $x_1^{-(p_1+1)}\, x_2^{-(p_2+1)} \ldots x_n^{-(p_n+1)}$ mit D, den von $x_1^{-(q_1+1)}\, x_2^{-(q_2+1)} \ldots x_n^{-(q_n+1)}$ mit E und den von $x_1^{-(p_1+q_1+1)}\, x_2^{-(p_2+q_2+1)} \ldots x_n^{-(p_n+q_n+1)}$ mit F, so ist

$$S_3 = ABC - AD - BE + F.$$

Man sieht hieraus klar, wie sich die Rechnung für eine derartige vier- und allgemein λ-förmige symmetrische Function gestaltet.

Der zweite, weit wichtigere Fall ist der, dass in jedem Gliede der Function $\Psi(\alpha_1^{h_1}, \alpha_2^{h_1} \ldots \alpha_n^{h_1}; \ldots \alpha_1^{h_\lambda}, \alpha_2^{h_\lambda} \ldots \alpha_n^{h_\lambda})$ alle Wurzeln $\alpha_1^h, \alpha_2^h \ldots \alpha_n^{h_\lambda}$ vorkommen. Dann gehört die λ-förmige symmetrische Function: $\sum\limits_{h_1, h_2 \ldots h_\lambda} \Psi(\alpha_1^{h_1}, \alpha_2^{h_1} \ldots \alpha_n^{h_1}; \ldots \alpha_1^{h_\lambda}, \alpha_2^{h_\lambda} \ldots \alpha_n^{h_\lambda})$ zu jenen einfachsten Typen symmetrischer Functionen der Wurzelsysteme, welche alle ganzen, symmetrischen Functionen additiv zusammensetzen. Für diese einfachsten Typen der symmetrischen Functionen ermöglichen die von Schlaefli und Betti aufgestellten Sätze über ihren Grad, ihr vollständiges Gewicht und ihre partialen Gewichte eine besondere Vereinfachung des auseinandergesetzten allgemeinen Verfahrens zur Berechnung der symmetrischen Functionen. Man wird nämlich bei Berechnung dieser symmetrischen Functionen vor Beginn der nöthigen Operationen jedesmal alle jene Glieder unterdrücken, welche nach Massgabe dieser Sätze im Schlussresultat nicht erscheinen können, also insbesondere jene Glieder, deren Grad, vollständiges oder partiales Gewicht, zu der nach diesen Sätzen im Endresultat zu erreichenden Grenze nicht herabzusinken vermag. Während der Ausführung der nöthigen Rechnungen mit den so abgekürzten Ausdrücken wird man dann immer sogleich alle jene Glieder weglassen, die den durch die Sätze Schlaefli's und Betti's ausgesprochenen Bedingungen nicht Genüge leisten.

Der dritte Fall tritt ein, wenn die symmetrische Function S die Form hat:

$$S = \psi(\alpha_1^1, \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^1)\, \psi(\alpha_1^2, \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^2) \ldots \psi(\alpha_1^\mu, \alpha_2^\mu \ldots \alpha_n^\mu),$$

wo $\psi(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ eine ganze, rationale, algebraische Function der $x_1, x_2 \ldots x_n$ bedeutet; also, wenn S die Resultante des Systems simultaner Gleichungen:

$$\psi(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0,\; f_1(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \;\ldots\; f_n(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$$

ist. Der Logarithmus dieser μ-förmigen symmetrischen Function ist nun gleich einer transcendenten, einförmigen, symmetrischen Function, nämlich

$$lS = \sum_{h=1}^{\mu} l\psi(\alpha_1^h, \alpha_2^h \ldots \alpha_n^h).$$

Entwickelt man daher $l\psi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ in eine Potenzreihe, so lässt sich $\sum\limits_{h=1}^{\mu} l\psi(\alpha_1^h, \alpha_2^h \ldots \alpha_n^h)$ auf die für die einförmigen, symmetrischen Functionen angegebene Art berechnen. Hat man auf diese Weise

$$lS = \omega$$

gefunden, wo die Function ω blos aus den Coëfficienten der Gleichungen zusammengesetzt ist, so ergibt sich

$$S = e^\omega = 1 + \omega + \frac{\omega^2}{2!} + \ldots$$

Vermöge der Sätze über den Grad der Resultante in den Coëfficienten der einzelnen Gleichungen und über ihr Gewicht braucht man bei der Bildung von ω und S nur eine beschränkte Anzahl von Gliedern der Reihen in Betracht zu ziehen, und wird nach Entwicklung derselben noch alle jene Ausdrücke beseitigen, welche diesen Sätzen nicht genügen.

$l\psi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ kann man sehr leicht und auf verschiedene Weise in eine Reihe nach Potenzen der x_1, $x_2 \ldots x_n$ entwickeln. Keine grösseren Schwierigkeiten bietet die allgemeinere Aufgabe: $F[\xi(x_1, x_2 \ldots x_n)]$, wo F und ξ beliebige Functionen bedeuten, in eine Reihe nach Potenzen der $x_1, x_2 \ldots x_n$ zu entwickeln.

Setzt man der Kürze halber:

$$\xi(x_1, x_2 \ldots x_n) = u, \quad \xi(0, 0 \ldots 0) = u_0$$

und bezeichnet $\left(\frac{\partial^n F}{\partial u^n}\right)_0$, dass in $\frac{\partial^n F}{\partial u^n}$ gesetzt wurde: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, so ist

$$F[\xi(x_1, x_2 \ldots x_n)] = (F)_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 (u - u_0) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right)_0 \frac{(u-u_0)^2}{2!} + \ldots$$

In der Entwicklung von $F[\xi(x_1, x_2 \ldots x_n)]$ nach Potenzen der $x_1, x_2 \ldots x_n$ ist daher der Coëfficient von $x_1^{m_1}, x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$ gleich der Summe der Coëfficienten von $x_1^{m_1}, x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$ der einzelnen Glieder in dieser Reihe. Dieser Coëfficient im Ausdrucke $\left(\frac{\partial^p F}{\partial u^p}\right)_0 \frac{(u-u_0)^p}{p!}$ ist nun:

$$\frac{1}{m_1!\, m_2! \ldots m_n!\, p!} \left(\frac{\partial^p F}{\partial u^p}\right)_0 \left(\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_n}(u-u_0)^p}{\partial x_1^{m_1}\, \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_n^{m_n}}\right)_{x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.}$$

Man erkennt leicht, dass $(u - u_0)^p$ nur dann ein Glied mit $x_1^{m_1}, x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$ besitzt, wenn $p \leqq m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

Der Coëfficient von $x_1^{m_1}, x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$ in $F[\xi(x_1, x_2 \ldots x_n)]$ lässt sich noch in entwickelterer Form darstellen. Zu diesem Zwecke denke man sich $\xi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ nach der Mac-Laurin'schen Reihe entwickelt, und bezeichne in dieser Entwicklung den Coëfficienten von $x_1^f x_2^g x_3^h \ldots x_n^r$ mit $a_{f, g, h \ldots r}$; es sei also

$$a_{f, g, h, \ldots r} = \frac{1}{f!\, g!\, h! \ldots r!} \frac{\partial^{f+g+h+\ldots+r}\, \xi}{\partial x_1^f\, \partial x_2^g \ldots \partial x_n^r}.$$

Bedeutet dann $\pi(k, m_1, m_2 \ldots m_n)$ die Summe

$$\sum \frac{1}{\alpha_1!\, \alpha_2!\, \alpha_3! \ldots}\, a_{f_1, g_1, h_1 \ldots r_1}^{\alpha_1}\, a_{f_2, g_2, h_2 \ldots r_2}^{\alpha_2}\, a_{f_3, g_3, h_3 \ldots r_3}^{\alpha_3} \ldots,$$

welche alle Glieder umfasst, die aus den Gleichungen sich ergeben:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots &= k \\
f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + \ldots &= m_1 \\
g_1 \alpha_1 + g_2 \alpha_2 + g_3 \alpha_3 + \ldots &= m_2 \\
h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2 + h_3 \alpha_3 + \ldots &= m_3 \\
\cdots & \\
\cdots & \\
r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + r_3 \alpha_3 + \ldots &= m_n,
\end{aligned}$$

so ist der Coëfficient von $x_1^{m_1}, x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$ in $F[\xi(x_1, x_2 \ldots x_n)]$:

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial^k F}{\partial u^k}\right)_0 \pi(k, m_1, m_2 \ldots m_n) \quad \text{wo} \quad p = m_1 + m_2 + \ldots + m_n.$$

Damit ist die Entwicklung von $F[\xi(x_1, x_2 \ldots x_n)]$, also auch die von $l\psi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ nach Potenzen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ bewerkstelligt. Andere Methoden zur Entwicklung speciell von $l\psi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ ergeben sich aus den von Lagrange in der erwähnten Abhandlung für den Fall einer Function einer Veränderlichen angewandten.

V.

Die vorhergehenden Betrachtungen legen den Gedanken nahe, eine erzeugende Function der einfachsten Typen der symmetrischen Verbindungen der simultanen Wurzelsysteme aufzustellen, also eine solche Function, aus deren Entwicklung alle diese Typen hervorgehen. Vermag man dann eine dieser Entwicklung äquivalente zu bestimmen, deren Entwicklungscoëfficienten aber die Wurzeln der vorgelegten Gleichungen nicht enthalten, so ist eine Methode zur Berechnung dieser einfachsten Typen der symmetrischen Functionen gefunden.

Eine solche erzeugende Function ist offenbar die Summe:

$$\sum \frac{1}{(t_1^1-\alpha_1^1)(t_2^1-\alpha_2^1)\ldots(t_n^1-\alpha^1)(t_1^2-\alpha_1^2)(t_2^2-\alpha_2^2)\ldots(t_n^2-\alpha_n^2)\;\ldots\;(t_1^\mu-\alpha_1^\mu)(t_2^\mu-\alpha_2^\mu)\ldots(t_n^\mu-\alpha_n^\mu)}, \tag{4}$$

welche ausser dem angeschriebenen Gliede noch alle Glieder umfassen soll, die aus ihm durch alle möglichen Vertauschungen der Wurzelsysteme erhalten werden. Die Entwicklung dieser Summe nach fallenden Potenzen der t besitzt nämlich die einfachsten Typen der symmetrischen Functionen zu Coëfficienten.

Um die dieser Entwicklung geforderte äquivalente aufzufinden, bilde man den Ausdruck:

$$\frac{D(t_1^1, t_2^1 \ldots t_n^1)\;\ldots\;D(t_1^\mu, t_2^\mu \ldots t_n^\mu)\;\Phi(t_1^1, t_2^1 \ldots t_n^1)\;\ldots\;\Phi(t_1^\mu, t_2^\mu \ldots t_n^\mu)\;\Pi^2(t_1^1, t_1^2 \ldots t_1^\mu)}{F_1(t_1^1)\,F_2(t_2^1)\ldots F_n(t_n^1)\;\ldots\;F_1(t_1^\mu)\,F_2(t_2^\mu)\ldots F_n(t_n^\mu)\;\Pi^2(\alpha_1^1, \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^\mu)}, \tag{5}$$

wo die Functionszeichen D, F, Φ die frühere Bedeutung haben, und $\Pi(t_1^1, t_1^2 \ldots t_1^\mu)$ die von Jacobi gebrauchte Bezeichnung für das Differenzproduct der $t_1^1, t_1^2 \ldots t_1^\mu$ ist. Die Coëfficienten in der Entwicklung dieses Ausdruckes nach fallenden Potenzen der t sind gleich den Coëfficienten, welche in der analogen Entwicklung der Summe 4) demselben Producte der t angehören. Denn denkt man sich

$$\frac{\Phi(t_1^1, t_2^1 \ldots t_n^1)\,\Phi(t_1^2, t_2^2 \ldots t_n^2)\;\ldots\;\Phi(t_1^\mu, t_2^\mu \ldots t_n^\mu)}{F_1(t_1^1)\,F_2(t_2^1)\ldots F_n(t_n^1)\;\ldots\;F_1(t_1^\mu)\,F_2(t_2^\mu)\ldots F_n(t_n^\mu)}$$

in Partialbrüche zerlegt, so ersieht man sofort, dass nach (I.) die Entwicklungscoëfficienten von 5) gleich sind den Entwicklungscoëfficienten desselben Productes der t in

$$\frac{1}{\Pi^2(\alpha_1^1, \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^\mu)} \sum \frac{\Pi^2(\alpha_1^{h_1}, \alpha_2^{h_2} \ldots \alpha_1^{h_\mu})}{(t_1^1-\alpha_1^{h_1})(t_2^1-\alpha_2^{h_1})\ldots(t_n^1-\alpha_n^{h_1})\;\ldots\;(t_1^\mu-\alpha_1^{h_\mu})(t_2^\mu-\alpha_2^{h_\mu})\ldots(t_n^\mu-\alpha_n^{h_\mu})},$$

wo die Indices $h_1, h_2 \ldots h_\mu$ alle möglichen Werthe von 1 bis μ annehmen. Da aber $\Pi(\alpha_1^{h_1}, \alpha_1^{h_2} \ldots \alpha_1^{h_\mu})$ verschwindet, sobald irgend zwei der Indices h einander gleich werden, so reducirt sich diese Summe auf die Summe 4); nun kann bekanntlich $\Pi^2(\alpha_1^1, \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^\mu)$ in einfacher Weise durch die Coëfficienten der Gleichung $F_1(x_1) = 0$ ausgedrückt werden, somit enthält die Entwicklung von 5) nach fallenden Potenzen der t keine Wurzeln der Gleichungen in ihren Coëfficienten, und entspricht somit den gestellten Bedingungen.

VI.

Die auseinandergesetzten Methoden dienen blos zur Berechnung der ganzen symmetrischen Functionen. Die Bestimmung der gebrochenen symmetrischen Functionen wird im Allgemeinen durch den Umstand erledigt, dass jede derartige Function sich als der Quotient zweier ganzer symmetrischer Functionen darstellen lässt. Es ist dies blos eine Folge des allgemeinen Satzes, dass jede rationale gebrochene Function der Wurzeln eines oder mehrerer simultaner Systeme in 1) äquivalent ist einer rationalen ganzen Function dieser Wurzeln, die nach keiner derselben den $(\mu-1)$ten Grad übersteigt.

Es seien im Quotienten:

$$\frac{\varphi(\alpha_1^h,\ \alpha_2^h\dots\alpha_n^h)}{\psi(\alpha_1^h,\ \alpha_2^h\dots\alpha_n^h)}$$

φ und ψ ganze rationale Functionen der Wurzeln $\alpha_1^h,\ \alpha_2^h\dots\alpha_n^h$. Dann ist

$$\frac{\varphi(\alpha_1^h,\ \alpha_2^h\dots\alpha_n^h)}{\psi(\alpha_1^h,\ \alpha_2^h\dots\alpha_n^h)}=\frac{\psi(\alpha_1^1,\ \alpha_2^1\dots\alpha_n^1)\dots\psi(\alpha_1^{h-1},\ \alpha_2^{h-1}\dots\alpha_n^{h-1})\,\psi(\alpha_1^{h+1},\ \alpha_2^{h+1}\dots\alpha_n^{h+1})\dots\psi(\alpha_1^{\mu},\ \alpha_2^{\mu}\dots\alpha_n^{\mu})}{\psi(\alpha_1^1,\ \alpha_2^1\dots\alpha_n^1)\dots\psi(\alpha_1^h,\ \alpha_2^h\dots\alpha_n^h)\dots\psi(\alpha_1^{\mu},\ \alpha_2^{\mu}\dots\alpha_n^{\mu})}\,\varphi(\alpha_1^h,\ \alpha_2^h\dots\alpha_n^h),$$

somit der Nenner $\psi(\alpha_1^1,\ \alpha_2^1\dots\alpha_n^1)\dots\psi(\alpha_1^{\mu},\ \alpha_2^{\mu}\dots\alpha_n^{\mu})$ als ganze symmetrische Function der simultanen Wurzelsysteme durch die Coëfficienten der Gleichungen ausdrückbar. Der Dividend dieses Quotienten ist eine ganze symmetrische Function der simultanen Wurzelsysteme $\alpha_1^1,\ \alpha_2^1\dots\alpha_n^1;\ \dots\ \alpha_1^{h-1},\ \alpha_2^{h-1}\dots\alpha_n^{h-1};\ \alpha_1^{h+1},\ \alpha_2^{h+1}\dots\alpha_n^{h+1};\ \dots\ \alpha_1^{\mu},\ \alpha_2^{\mu}\dots\alpha_n^{\mu}$, und lässt sich durch eine rationale ganze Function der Wurzeln des Systems $\alpha_1^h,\ \alpha_2^h\dots\alpha_n^h$ ausdrücken.

Denn wendet man auf die Gleichung:

$$\left\{\frac{\Phi(x_1,\ x_2\dots x_n)}{F_1(x_1)\,F_2(x_2)\dots F_n(x_n)}-\frac{1}{D(\alpha_1^h,\ \alpha_2^h\dots\alpha_n^h)\,(x_1-\alpha_1^h)\,(x_2-\alpha_2^h)\dots(x_n-\alpha_n^h)}\right\}$$
$$=\sum_k\frac{1}{D(\alpha_1^k,\ \alpha_2^k\dots\alpha_n^k)\,(x_1-\alpha_1^k)\,(x_2-\alpha_2^k)\dots(x_n-\alpha_n^k)},$$

wo k alle Werthe der Reihe 1 bis μ mit Ausnahme von h annimmt, das angegebene Verfahren zur Berechnung der ganzen, symmetrischen Functionen an, so erhält man hiedurch jede ganze symmetrische Function der simultanen Wurzelsysteme in der rechten Seite dieser Gleichung als rationale ganze Function der Wurzeln des Systems $\alpha_1^h,\ \alpha_2^h\dots\alpha_n^h$. Kommen nun etwa in dieser Function Potenzen der $\alpha_1^h,\ \alpha_2^h\dots\alpha_n^h$ in einem höheren als dem $(\mu-1)$ten Grade vor, so kann man alle diese Potenzen vermittelst der Gleichungen:

$$F_1(\alpha_1^h)=0\,,\quad F_2(\alpha_2^h)=0\dots F_n(\alpha_n^h)=0$$

eliminiren.

Hat man eine rationale, gebrochene Function der Wurzeln mehrerer Systeme, so kann man dieselbe zuvörderst nach dem oben auseinandergesetzten Verfahren als eine ganze, rationale Function der Wurzeln eines Systems darstellen, die nach keiner dieser Wurzeln den $(\mu-1)$ten Grad übersteigt. Die Coëfficienten dieser Function sind nunmehr rationale gebrochene Functionen blos der Wurzeln der noch übrigen simultanen Systeme der ursprünglichen Function. Wendet man daher dieses Verfahren auf jeden der erhaltenen Coëfficienten an, so kann man jeden derselben in eine rationale ganze Function der Wurzeln eines zweiten simultanen Systems umformen, die nach keiner derselben den μten Grad erreicht, u. s. f.

Für die gebrochenen symmetrischen Functionen bestehen noch wichtige Relationen, vermittelst welcher man auch die Berechnung der Coëfficienten der Endgleichung eines Systems von n simultanen Gleichungen auf die Bestimmung einer gebrochenen symmetrischen Function der Wurzelsysteme von $(n-1)$ simultanen Gleichungen zurückführen kann. Dieselben ergeben sich aus einer äusserst wichtigen Formel, welche zuerst von Jacobi für den Fall zweier und von Liouville für ein beliebiges System simultaner Gleichungen abgeleitet wurde. In der vorliegenden Untersuchung erhält man dieselbe ganz unmittelbar aus der Bemerkung in (I.).

VII.

Ist $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ eine ganze, rationale algebraische Function der $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, deren Grad um mindestens eine Einheit niedriger ist, als der Grad der Functional-Determinante $D(x_1, x_2 \ldots x_n)$, so ist

$$\sum_{k=1}^{\mu} \frac{\varphi(\alpha_1^k, \alpha_2^k \ldots \alpha_n^k)}{D(\alpha_1^k, \alpha_2^k \ldots \alpha_n^k)} = 0. \tag{6}$$

Wegen der Gradzahl, welche die einfachsten Multiplicatoren m erreichen können, ist nämlich in diesem Falle der Coëfficient von $(x_1, x_2 \ldots x_n)^{-1}$ in

$$\frac{\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)\ \Phi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{F_1(x_1)\ F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)}$$

gleich 0.

Sind $f_1, f_2 \ldots f_n$, $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$ neue ganze rationale algebraische Functionen der $x_1, x_2 \ldots x_n$, und setzt man in 6) für

$$f_1 : f_1\psi_1, \quad f_2 : f_2\psi_2 \ldots f_n : f_n\psi_n,$$

wo aber das Product der neuen Functionen im Allgemeinen nicht von niedrigerem Grade sein darf, als das der ursprünglichen; bezeichnet man ferner mit $\Delta(f_1, f_2 \ldots f_n)$ die Functional-Determinante

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x},$$

so geht durch diese Substitutionen die obige Formel über in:

$$0 =$$

$$\sum \frac{\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{f_1 f_2 \ldots f_n \Delta(\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n) + \psi_1 f_2 \ldots f_n \Delta(f_1, \psi_2 \ldots \psi_n) + \ldots + \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_{n-1} f_n \Delta(f_1, f_2 \ldots f_{n-1}, \psi_n) + \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_n \Delta(f_1, f_2 \ldots f_n)}$$

oder

$$\sum \frac{\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{f_1 f_2 \ldots f_n \Delta(\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n)} + \sum \frac{\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{\psi_1 f_2 \ldots f_n \Delta(f_1, \psi_2 \ldots \psi_n)} + \ldots + \sum \frac{\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n \Delta(f_1 f_2 \ldots f_n)} = 0. \tag{7}$$

In dieser Formel gehen die sämmtlichen Summen aus der ersten dadurch hervor, dass man in dieser die f einer jeden Combination der $f_1, f_2 \ldots f_n$ von der ersten bis $n$ten Classe mit den zugehörigen Multiplicatoren ψ vertauscht; ferner erstreckt sich jedes Summenzeichen über die Substitutionen aller simultanen Wurzelsysteme der Functionen innerhalb seines Δ an Stelle der $x_1, x_2 \ldots x_n$.

In dieser Relation ist als specieller Fall eine zuerst von Liouville angegebene enthalten. Setzt man nämlich in 7) für $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n) : \chi f_2 \ldots f_n \Delta(\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n)$, was immer erlaubt ist, sobald man nur die ganze, rationale algebraische Function χ von niedrigerem Grade als f_1 wählt, so erhält man:

$$\sum \frac{\chi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{f_1(x_1, x_2 \ldots x_n)} = - \sum \frac{\chi \Delta(\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n)}{\psi_1 \Delta(f_1, \psi_2 \ldots \psi_n)}, \tag{8}$$

wo also das Summenzeichen links die Substitutionen aller simultanen Wurzelsysteme der Gleichungen

$$\psi_1 = 0, \ \psi_2 = 0 \ldots \psi_n = 0,$$

das rechts die aller simultanen Wurzelsysteme der Gleichungen:

$$f_1 = 0, \ \psi_2 = 0 \ldots \psi_n = 0$$

an Stelle der $x_1, x_2 \ldots x_n$ umfasst.

Zu demselben Resultate wäre man gelangt, wenn man in 6) statt $f_1 : f_1 \psi_1$, welches Product im Allgemeinen nicht von niedrigerem Grade als das ursprüngliche f_1 sein darf, und statt $\varphi : \chi \Delta(\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n)$ gesetzt, und die so veränderte Summe 6) in ihre zwei Summanden zerlegt hätte.

Specialisirt man in 8) χ und f_1, indem man:

$$\chi = x_2\, x_3 \ldots x_n\,;\; f_1 = x_1\, x_2 \ldots x_n$$

setzt, so erhält man $\sum \frac{1}{x_1}$, also die Summe der reciproken Werthe der Wurzeln der Endgleichung des Systemes: $\psi_1 = 0,\ \psi_2 = 0 \ldots \psi_n = 0$ nach x_1. Die rechte Seite von 8) lässt sich für diese speciellen Werthe von χ und f_1 in ein Aggregat von Summen zerlegen, die sich über die Substitutionen der simultanen Wurzelsysteme bezüglich der Gleichungen:

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,\ \ \psi_2(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \ .\ .\ \ \psi_n(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \\ x_2 = 0,\ \ \psi_2(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \ .\ .\ .\ \psi_n(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \\ \ \ \vdots \\ x_n = 0,\ \ \psi_2(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \ .\ .\ .\ \psi_n(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \end{array}$$

an Stelle der $x_1, x_2 \ldots x_n$ erstrecken. Von diesen Ausdrücken verschwinden aber alle bis auf den ersten und es ergibt sich:

$$\sum \frac{1}{x_1} = -\sum \left\{ \frac{\Delta(\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_n)}{\Delta(\psi_2, \psi_3 \cdots \psi_n)} \right\}_{x_1 = 0},$$

wo also in die Summe links alle x_1 der simultanen Wurzelsysteme der Gleichungen:

$$\psi_1(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0;\ \psi_2(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \ .\ .\ .\ \psi_n(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$$

und in die Summe rechts $x_1 = 0$, und für die $x_2, x_3 \ldots x_n$ die simultanen Wurzelsysteme der Gleichungen:

$$\psi_2(0, x_2 \ldots x_n) = 0;\ \psi_3(0, x_2 \ldots x_n) = 0 \ .\ .\ .\ \psi_n(0, x_2 \ldots x_n) = 0$$

zu substituiren sind.

Um $\sum \frac{1}{x_1^2}$ zu finden, müsste man in 8) für χ: $x_2\, x_3 \ldots x_n$, für f_1: $x_1(x_1 - h)\, x_2 \ldots x_n$ setzen, und dann den so erhaltenen Ausdruck wieder in ein Aggregat von Summen zerlegen. Von diesen Summen verschwinden alle bis auf zwei, die h als Factor in ihrem Nenner haben; für $h = 0$ nehmen sie die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, nach deren Bestimmung sich ergibt:

$$\sum \frac{1}{x_1^2} = -\sum \left\{ \frac{d}{dx_1}\, \frac{\Delta(\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_n)}{\Delta(\psi_2, \psi_3 \cdots \psi_n)} \right\}_{x_1 = 0},$$

wo die Summen dieselbe Bedeutung haben, wie im vorhergehenden Falle.

Auf ganz analoge Weise erhält man:

$$\sum \frac{1}{x_1^m} = \frac{-1}{(m-1)!} \sum \left\{ \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\, \frac{\Delta(\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_n)}{\Delta(\psi_2, \psi_3 \cdots \psi_n)} \right\}_{x_1 = 0}.$$

Und es ist somit die Berechnung der reciproken Potenzsummen irgend einer Endgleichung eines Systems von n simultanen Gleichungen zurückgeführt auf die Bestimmung einer gebrochenen symmetrischen Function der simultanen Wurzelsysteme von $(n-1)$ Gleichungen.

VIII.

Die Formel 8) unterliegt der Bedingung, dass die Function $f_1(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ von höherem Grade als $\chi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ sei. Dieselbe lässt sich aber leicht für den Fall modificiren, als die Function $f_1(x_1, x_2 \ldots x)$ nicht von höherem Grade als $\chi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ ist.

Es sei zuerst $\chi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ von demselben Grade wie $f_1(x_1, x_2 \ldots x_n)$. Bezeichnet dann a irgend eine Zahl, so ist nach 8):

$$\sum \frac{\chi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{(x_1 - a) f(x_1, x_2 \ldots x_n)} = -\sum \frac{\chi \Delta(\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_n)}{(x_1 - a)\psi_1 \Delta(f, \psi_2 \cdots \psi_n)} - \sum_{x_1 = a} \frac{\chi \Delta(\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_n)}{\psi_1 f \Delta(\psi_2, \psi_3 \cdots \psi_n)},$$

wo $\Delta(\psi_2, \psi_3 \cdots \psi_n) = \sum \pm \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}$ ist. In dieser Relation erstreckt sich das Summenzeichen links vom Gleichheitszeichen über die Substitutionen aller simultanen Wurzelsysteme der Gleichungen:

$$\psi_1(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0,\ \psi_1(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \ \ldots\ \psi_n(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0,$$

das erste rechts vom Gleichheitszeichen über die der Gleichungen:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0,\ \psi_2(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \ \ldots\ \psi_n(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$$

an Stelle der $x_1, x_2 \ldots x_n$; in der zweiten Summe links vom Gleichheitszeichen ist $x_1 = a$ und für $x_2, x_3 \ldots x$ sind alle simultanen Wurzelsysteme der Gleichungen

$$\psi_2(a, x_2 \ldots x_n) = 0,\ \psi_3(a, x_2 \ldots x_n) = 0 \ \ldots\ \psi_n(a, x_2 \ldots x_n) = 0$$

zu setzen.

Multiplicirt man nun jedes Glied der obigen Gleichung mit a, und setzt hierauf darin $a = \infty$, so erhält man:

$$\sum \frac{\chi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{f(x_1, x_2 \ldots x_n)} = -\sum \frac{\chi \Delta(\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_n)}{\psi_1 \Delta(f, \psi_2 \cdots \psi_n)} + \sum_{x_1 = \infty} \frac{\chi \Delta(\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_n)}{\psi_1 f \Delta(\psi_2, \psi_3 \cdots \psi_n)},$$

wo die Bedeutung der einzelnen Summenzeichen aus dem Vorhergehenden klar ist.

Der zweiten rechts lässt sich noch eine einfachere Gestalt geben, wenn man jede der Functionen: χ, f, ψ_1, $\Delta(\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_n)$, $\Delta(\psi_2, \psi_3 \ldots \psi_n)$ nach dem Vorgange Liouville's in Gruppen homogener Functionen der $x_1, x_2 \ldots x_n$ zerlegt und aus jeder Gruppe die höchste Potenz von x_1 als Factor heraushebt. Die derart geordneten Functionen haben die Form:

$$\chi(x_1, x_2 \ldots x_n) = \chi_1(u_2, u_3 \ldots u_n) x_1^p + \chi_2(u_2, u_3 \ldots u_n) x_1^{p-1} + \chi_3(u_2, u_3 \ldots u_n) x_1^{p-2} + \ldots$$

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = f_1(u_2, u_3 \ldots u_n) x_1^p + f_2(u_2, u_3 \ldots u_n) x_1^{p-1} + f_3(u_2, u_3 \ldots u_n) x_1^{p-2} + \ldots$$

$$\psi_1(x_1, x_2 \ldots x_n) = \psi_1^1(u_2, u_3 \ldots u_n) x_1^{m_1} + \psi_1^2(u_2, u_3 \ldots u_n) x_1^{m_1 - 1} + \psi_1^3(u_2, u_3 \ldots u_n) x_1^{m_1 - 2} + \ldots$$

$$\Delta(\psi_2, \psi_3 \cdots \psi_n) = B_1(u_2, u_3 \ldots u_n) x_1^q + B_2(u_2, u_3 \ldots u_n) x_1^{q-1} + B_3(u_2, u_3 \ldots u_n) x_1^{q-2} + \ldots$$

$$\Delta(\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_n) = A_1(u_2, u_3 \ldots u_n) x_1^{m_1 + q - 1} + A_2(u_2, u_3 \ldots u_n) x_1^{m_1 + q - 2} + A_3(u_2, u_3 \ldots u_n) x_1^{m_1 + q - 3} + \ldots$$

Dann ist:

$$\sum \frac{\chi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{f(x_1, x_2 \ldots x_n)} = -\sum \frac{\chi \Delta(\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_n)}{\psi_1 \Delta(f, \psi_2 \cdots \psi_n)} + \sum \frac{\chi_1 A_1}{\psi_1^1 f_1 B_1}. \qquad 9)$$

---

[1] Hierin ist statt des früheren f_1 kürzer f geschrieben.

In der letzten Summe kommen blos die Verhältnisse $\frac{x_2}{x_1} = u_2$, $\frac{x_3}{x_1} = u_3 \ldots \frac{x_n}{x_1} = u_n$ vor, und sind darin $x_1 = \infty$ und für $x_2, x_3 \ldots x_n$ die simultanen Wurzelsysteme der Gleichungen:

$$\psi_2(\infty, x_2 \ldots x_n) = 0, \; \psi_3(\infty, x_2 \ldots x_n) = 0 \; \ldots \; \psi_n(\infty, x_2 \ldots x_n) = 0$$

zu setzen. Ordnet man nun die Functionen $\psi_2, \psi_3 \ldots \psi_n$ in derselben Weise wie ψ_1 und ist:

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \psi_2^1(u_2, u_3 \ldots u_n)\, x_1^{m_2} + \psi_2^2(u_2, u_3 \ldots u_n)\, x_1^{m_2-1} + \psi_2^3(u_2, u_3 \ldots u_n)\, x_1^{m_2-2} + \ldots \\ &\vdots \\ \psi_n &= \psi_n^1(u_2, u_3 \ldots u_n)\, x_1^{m_n} + \psi_n^2(u_2, u_3 \ldots u_n)\, x_1^{m_n-1} + \psi_n^3(u_2, u_3 \ldots u_n)\, x_1^{m_n-2} + \ldots \end{aligned}$$

so sind offenbar in

$$\sum \frac{\chi_1}{\psi_1^1 f_1} \frac{A_1}{B_1}$$

für $u_2, u_3 \ldots u_n$ die simultanen Wurzelsysteme der Gleichungen:

$$\psi_2^1(u_2, u_3 \ldots u_n) = 0, \; \psi_3^1(u_2, u_3 \ldots u_n) = 0 \; \ldots \; \psi_n^1(u_2, u_3 \ldots u_n) = 0$$

zu setzen.

Wäre $\chi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ um einen Grad höher als $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$, also:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = f_1(u_2, u_3 \ldots u_n)\, x_1^{p-1} + f_2(u_2, u_3 \ldots u_n)\, x_1^{p-2} + f_3(u_2, u_3 \ldots u_n)\, x_1^{p-3} + \ldots,$$

so ist $(x_1 - a) f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ von demselben Grade als $\chi(x_1, x_2 \ldots x_n)$. Somit ist nach der eben gewonnenen Formel:

$$\sum \frac{\chi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{(x_1 - a) f(x_1, x_2 \ldots x_n)} = -\sum \frac{\chi \Delta(\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n)}{(x_1 - a)\psi_1 \Delta(f, \psi_2 \ldots \psi_n)} - \sum_{x_1 = a} \frac{\chi \Delta(\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n)}{\psi_1 f \Delta(\psi_2, \psi_3 \ldots \psi_n)} + \sum_{x_1 = \infty} \frac{A_1 \chi_1}{\psi_1^1 f_1 B_1}.^{1}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit a und lässt sodann darin $a = \infty$ werden, so geht die Summe links vom Gleichheitszeichen über in:

$$-\sum \frac{\chi(x_1, x_2 \ldots x_n)}{f(x_1, x_2 \ldots x_n)},$$

die erste Summe rechts in:

$$-\sum \frac{\chi \Delta(\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n)}{\psi_1 \Delta(f, \psi_2 \ldots \psi_n)}.$$

Die Differenz der beiden letzten Summen nimmt die unbestimmte Form $0.\infty$ an.

Nun ist

$$\sum \frac{\chi \Delta(\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n)}{\psi_1 f \Delta(\psi_2, \psi_3 \ldots \psi_n)} = \sum \left\{ \frac{A_1 \chi_1}{f_1 \psi_1^1 B_1} + \frac{(A_2 \chi_1 + A_1 \chi_2) f_1 \psi_1^1 B_1 - A_1 \chi_1 (f_1 \psi_1^1 B_2 + f_2 \psi_1^1 B_1 + f_1 \psi_1^2 B_1)}{(f_1 \psi_1^1 B_1)^2}\, x_1^{-1} + \ldots, \right.$$

also, wenn man der Kürze halber

$$M = \frac{(A_2 \chi_1 + A_1 \chi_2) f_1 \psi_1^1 B_1 - A_1 \chi_1 (f_1 \psi_1^1 B_2 + f_2 \psi_1^1 B_1 + f_1 \psi_1^2 B_1)}{(f_1 \psi_1^1 B_1)^2}$$

setzt:

$$a\left[\sum_{x_1 = a} \frac{\chi \Delta(\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n)}{\psi_1 f \Delta(\psi_2, \psi_3 \ldots \psi_n)} - \sum_{x_1 = \infty} \frac{A_1 \chi_1}{f_1 \psi_1^1 B_1}\right] = a\left[\sum_{x_1 = a} \frac{A_1 \chi_1}{f_1 \psi_1^1 B_1} - \sum_{x_1 = \infty} \frac{A_1 \chi_1}{f_1 \psi_1^1 B_1}\right] + M + \ldots$$

wo die auf M folgenden Potenzen von a negative sind. Lässt man daher $a : \infty$ werden, so findet man:

$$\lim \left\{ a\left[\sum_{x_1 = a} \frac{\chi \Delta(\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n)}{\psi_1 f_1 \Delta(\psi_2, \psi_3 \ldots \psi_n)} - \sum_{x_1 = \infty} \frac{A_1 \psi_1}{f_1 \psi_1^1 B_1}\right]\right\}_{a = \infty} = M + \lim \left\{ a\left[\sum_{x_1 = a} \frac{A_1 \chi_1}{f_1 \psi_1^1 B_1} - \sum_{x_1 = \infty} \frac{A_1 \chi_1}{f_1 \psi_1^1 B_1}\right]\right\}_{a = \infty}.$$

---

[1] Hierin ist die Bedeutung der einzelnen Summenzeichen wohl selbstverständlich.

Es ist aber:

$$\lim \left\{a\left[\sum_{x_1=a}\frac{A_1\chi_1}{f_1\psi_1^1 B_1}-\sum_{x_1=\infty}\frac{A_1\chi_1}{f_1\psi_1^1 B_1}\right]\right\}_{a=\infty} = -\lim\left\{a^2\frac{d}{da}\left(\sum_{x_1=a}\frac{A_1\chi_1}{f_1\psi_1^1 B_1}\right)\right\}_{a=\infty}$$

$$= -\lim\left\{a^2\frac{dw}{da}\right\}_{a=\infty},$$

wenn man

$$\sum_{x_1=a}\frac{A_1\chi_1}{f_1\psi_1^1 B_1} = w$$

setzt. Ferner ist

$$\frac{dw}{da} = \sum_{i=2}^{n}\frac{\partial w}{\partial u_i}\frac{du_i}{da},$$

wo die $\frac{du_2}{da}, \frac{du_3}{da}\cdots\frac{du_n}{da}$ durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial a}+\frac{\partial\psi_2}{\partial u_2}\frac{du_2}{da}+\ldots+\frac{\partial\psi_2}{\partial u_n}\frac{du_n}{da}=0$$

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial a}+\frac{\partial\psi_3}{\partial u_2}\frac{du_2}{da}+\ldots+\frac{\partial\psi_2}{\partial u_n}\frac{du_n}{da}=0$$

$$\cdots$$

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial a}+\frac{\partial\psi_n}{\partial u_2}\frac{du_2}{da}+\ldots+\frac{\partial\psi_n}{\partial u_n}\frac{du_n}{da}=0.$$

Hieraus findet man

$$\frac{du_i}{da} = -\frac{\sum\pm\frac{\partial\psi_2}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial u_{i-1}}\frac{\partial\psi_i}{\partial a}\frac{\partial\psi_{i+1}}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n}{\partial u_n}}{\sum\pm\frac{\partial\psi_2}{\partial u_2}\frac{\partial\psi_3}{\partial u_3}\cdots\frac{\partial\psi_n}{\partial u_n}}.$$

Mit Hilfe des Satzes, dass jede Determinante, unter deren Elementen Aggregate von Ausdrücken sich befinden, in eine Summe von Determinanten mit lauter einfachen Elementen aufgelöst werden kann, lässt sich sowohl der Zähler als Nenner von $\frac{du_i}{da}$ nach Potenzen von a ordnen. Man erhält

$$\sum\pm\frac{\partial\psi_2}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial u_{i-1}}\frac{\partial\psi_i}{\partial a}\frac{\partial\psi_{i+1}}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n}{\partial u_n} = a^{\mu-1}\sum\pm\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial\psi_{i-1}^1}{\partial u_{i-1}}m_i\psi_i^1\frac{\partial\psi_{i+1}^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}+$$

$$\left\{\Sigma D_k+\sum\pm\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial\psi_{i-1}^1}{\partial u_{i-1}}(m_i-1)\psi_i^2\frac{\partial\psi_{i+1}^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}\right\}a^{\mu-2}+\ldots$$

$$= p_i a^{\mu-1}+q_i a^{\mu-2}+\ldots$$

Hierin ist $\mu = m_2+m_3+\ldots+m_n-(n-3)$

$$p_i = \sum\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial\psi_{i-1}^1}{\partial u_{i-1}}m_i\psi_i^1\frac{\partial\psi_{i+1}^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n} = \begin{vmatrix}\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_{i-1}}, m_2\psi_2^1, \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n}\\ \frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_{i-1}}, m_3\psi_3^1, \frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_n}\\ \cdots \\ \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_{i-1}}, m_n\psi_n^1, \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}\end{vmatrix}$$

D_k bezeichnet in q_i eine Determinante, die aus dieser entsteht, indem man in ihrer $(k-1)$ten Colonne den oberen Index 1 von ψ in 2 verwandelt. In ΣD_k nimmt k alle Werthe von 2 bis n mit Ausnahme von i an; ferner ist hierin:

$$\sum \pm \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial\psi_{i-1}^1}{\partial u_{i-1}}(m_i-1)\,\psi_i^2\,\frac{\partial\psi_{i+1}^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_{i-1}}, & (m_2-1)\,\psi_2^2, & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_{i-1}}, & (m_3-1)\,\psi_3^2, & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_n} \\ \cdots & & \\ \cdots & & \\ \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_{i-1}}, & (m_n-1)\,\psi_n^2, & \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi^1}{\partial u_2} \end{vmatrix},$$

welche Determinante mit π_i bezeichnet werde.

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\sum\pm\frac{\partial\psi_2}{\partial u_2}\,\frac{\partial\psi_3}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial\psi_n}{\partial u_n}=x_1^{\mu}\sum\pm\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\,\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_3}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}+x_1^{\mu-1}\sum_k\Sigma\pm\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial\psi_{k-1}^1}{\partial u_{k-1}}\,\frac{\partial\psi_2^2}{\partial u_k}\,\frac{\partial\psi_{k+1}^1}{\partial u_{k+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}$$

$$+\cdots$$

$$=\alpha x_1^{\mu}+\beta x_1^{\mu-1}+\cdots.$$

worin die einzelnen Bezeichnungen keiner Erläuterung bedürfen.

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{du_i}{da}=-\left(\frac{p_i}{\alpha}a^{-1}+\frac{q_i\alpha-p_i\beta}{\alpha^2}a^{-2}+\cdots\right).$$

Somit ist

$$a^2\frac{dw}{da}=-\sum_i\frac{\partial w}{\partial u_i}\left[\frac{p_i}{\alpha}a+\frac{q_i\alpha-p_i\beta}{\alpha^2}+\cdots\right].$$

Für $a=\infty$ wird $p_i=D_k=0$, weil für $u_2, u_3\ldots u_n$ die simultanen Wurzelsysteme der Gleichungen

$$\psi_2^1=0,\ \psi_3^1=0\ldots\psi_n^1$$

zu substituiren sind. Es ist also

$$lim\left\{a^2\frac{dw}{da}\right\}_{a=\infty}=-\,lim\sum_i\frac{\partial w}{\partial u_i}\left[\frac{p_i a+\pi_i}{\alpha}\right]_{a=\infty}.$$

Nun ist aber

$$p_i a+\pi_i=\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_{i-1}}, & m_2(a\psi_2^1+\psi_2^2), & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_{i-1}}, & m_3(a\psi_3^1+\psi_3^2), & \frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_n} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_{i-1}}, & m_n(a\psi_n^1+\psi_n^2), & \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_{i-1}}, & \psi_2^2, & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_{i-1}}, & \psi_3^2, & \frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_n} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_{i-1}}, & \psi_n^2, & \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

Da aber für $a=\infty$ und die vollführten Substitutionen an Stelle der $u_2, u_3\ldots u_n$

$$a\psi_2^1+\psi_2^2=0,\ a\psi_3^1+\psi_3^2=0\ \ldots\ a\psi_n^1+\psi_n^2=0$$

ist, so ergibt sich:

$$\lim\left\{a^2\frac{dw}{da}\right\}_{a=\infty}=\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial w}{\partial u_i}\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_{i-1}},\ \psi_2^2,\ \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n}\\ \frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_{i-1}},\ \psi_3^2,\ \frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_n}\\ \cdots\\ \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_{i-1}},\ \psi_n^2,\ \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2},\ \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_3}\cdots\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n}\\ \frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_2},\ \frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_3}\cdots\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_n}\\ \cdots\\ \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2},\ \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_3}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}\end{vmatrix}$$

Man erhält auf diese Weise:

$$\sum\frac{\chi(x_1,x_2\ldots x_n)}{f(x_1,x_2\ldots x_n)}=-\sum\frac{\chi\,\Delta(\psi_1,\psi_2\ldots\psi_n)}{\psi_1\,\Delta(f,\psi_2\ldots\psi_n)}+\sum\frac{(A_1\chi_2+A_2\chi_1)f_1\psi_1^1B_1-A_1\chi_1(f_1\psi_1^1B_2+f_2\psi_1^1B_1+f_1\psi_1^2B_1)}{(f_1\psi_1^1B_1)^2}$$

$$-\sum\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{A_1\chi_1}{f_1\psi_1^1B_1}\right)\frac{\sum\pm\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial\psi_{i-1}^1}{\partial u_{i-1}}\,\psi_i^2\,\frac{\partial\psi_{i+1}^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}}{\sum\pm\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\,\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_3}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}},\qquad 10)$$

worin die Bedeutung der einzelnen Zeichen aus dem Vorhergehenden klar ist. In der linken Seite dieser Gleichung sind für $x_1, x_2\ldots x_n$ die simultanen Wurzelsysteme der Gleichungen:

$$\psi_1(x_1,x_2\ldots x_n)=0,\ \psi_2(x_1,x_2\ldots x_n)=0\ \ldots\ \psi_n(x_1,x_2\ldots x_n)=0,$$

in der ersten Summe der rechten Seite für dieselben Grössen die der Gleichungen:

$$f(x_1,x_2\ldots x_n)=0,\ \psi_2(x_1,x_2\ldots x_n)=0\ \ldots\ \psi_n(x_1,x_2\ldots x_n)=0,$$

in den beiden letzten Summen der rechten Seite sind für die $u_2, u_3\ldots u_n$ die simultanen Wurzelsysteme der Gleichungen:

$$\psi_2^1(u_2,u_3\ldots u_n)=0,\ \psi_3^1(u_2,u_3\ldots u_n)=0\ \ldots\ \psi_n^1(u_2,u_3\ldots u_n)=0$$

zu substituiren.

In der obigen Formel sind noch die Grössen A_1, A_2, B_1, B_2 aus den Coëfficienten der in der angegebenen Weise geordneten Gleichungen

$$\psi_1=0,\ \psi_2=0\ \ldots\ \psi_n=0$$

des Näheren zu bestimmen.

Man erhält auf die schon früher angedeutete Weise für den Coëfficienten A_1 der höchsten Potenz von x_1 in $\Delta(\psi_1,\psi_2\ldots\psi_n)$:

$$A_1=\begin{vmatrix}m_1\psi_1^1,\ \frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_n}\\ m_2\psi_2^1,\ \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n}\\ \cdots\\ m_n\psi_n^1,\ \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2},\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}\end{vmatrix}$$

Die Summe aller Determinanten, welche aus A_1 gewonnen werden können, indem man darin den oberen Index der ψ irgend einer der $(n-1)$ letzten Colonnen um 1 vergrössert, vermehrt um die Determinante

$$\begin{vmatrix} (m_1-1)\,\psi_1^2, & \dfrac{\partial\psi^1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_1^1}{\partial u_n} \\ (m_2-1)\,\psi_2^2, & \dfrac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ (m_n-1)\,\psi_n^2, & \dfrac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

ist gleich A_2.

Ebenso findet man:

$$B_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}, & \dfrac{\partial\psi_2^1}{\partial u_3} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n} \\ \dfrac{\partial\psi_3^1}{\partial u_2}, & \dfrac{\partial\psi_3^1}{\partial u_3} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_3^1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \dfrac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2}, & \dfrac{\partial\psi_n^1}{\partial u_3} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

Erhöht man in dieser Determinante B_1 den oberen Index der ψ in einer Colonne um 1, so gibt die Summe aller Determinanten, welche auf diese Weise aus B_1 gebildet werden können: B_2.

Die Grössen A_1, A_2, B_1, B_2 der Formel 10) gehen nun aus diesen hervor, indem man in ihnen für $u_2, u_3 \ldots u_n$ die simultanen Wurzelsysteme der Gleichungen:

$$\psi_2^1(u_2, u_3 \ldots u_n) = 0,\ \psi_3^1(u_2, u_3 \ldots u_n) = 0 \ldots \psi_n^1(u_2, u_3 \ldots u_n) = 0$$

substituirt. Man erhält dadurch für die Grössen A_1, A_2, B_1, B_2 der Formel:

$$A_1 = m_1\,\psi_1^1 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}, & \dfrac{\partial\psi_2^1}{\partial u_3} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n} \\ \dfrac{\partial\psi_3^1}{\partial u_2}, & \dfrac{\partial\psi_3^1}{\partial u_3} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_3^1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \dfrac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2}, & \dfrac{\partial\psi_n^1}{\partial u_3} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n} \end{vmatrix} = m_1\,\psi_1^1\,B_1$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} (m_1-1)\,\psi_1^2, & \dfrac{\partial\psi_1^1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_1^1}{\partial u_n} \\ (m_2-1)\,\psi_2^2, & \dfrac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ (m_n-1)\,\psi_n^2, & \dfrac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n} \end{vmatrix} + m_1\,\psi_1^1\,B_2 = D + m_1\,\psi_1^1\,B_1,$$

wo D die Determinante bezeichne.

Die Grössen B_1, B_2 bewahren auch nach der angegebenen Substitution für $u_2, u_3 \ldots u_n$ ihre ursprüngliche Form.

IX.

Mittelst der Formel 10) lässt nun auch Σx_1, d. h. der Coëfficient des zweiten Gliedes der Endgleichung der $\psi_1^1 = 0$, $\psi_2 \ldots \psi_n = 0$ nach x_1 bestimmen.

Setzt man nämlich

$$\chi(x_1, x_2 \ldots x_n) = x_1\, x_2 \ldots x_n = x_1^n \quad u_2\, u_3 \ldots u_n,$$

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = x_2\, x_3 \ldots x_n = x_1^{n-1}\, u_2\, u_3 \ldots u_n$$

so gibt die linke Seite der Formel Σx_1. Auf der rechten Seite wird

$$\sum \frac{\chi \Delta(\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_n)}{\psi_1 \Delta(f, \psi_2 \cdots \psi_n)} = 0$$

$$\frac{(A_1\chi_2 + A_2\chi_1) f_1 \psi_1^1 B_1 - (f_1 \psi_1^1 B_2 + f_2 \psi_1^1 B_1 + f_1 \psi_1^2 B_1) A_1 \chi_1}{(f_1 \psi_1^1 B_1)^2} = \frac{A_2 \psi_1^1 B_1 - A_1(\psi_1^1 B_2 + \psi_1^2 B_2)}{(\psi_1^1 B_1)^2}$$

$$= \frac{D - m_1\, \psi_1^2 B_1}{\psi_1^1 B_1},$$

wo sich

$$D - m_1\, \psi_1^2 B_1 = \begin{vmatrix} -\psi_1^2, & \frac{\partial \psi_1^1}{\partial u_2} \cdots & \frac{\partial \psi_1^1}{\partial u_n} \\ (m_2 - 1)\, \psi_2^2, & \frac{\partial \psi_2^1}{\partial u_2} \cdots & \frac{\partial \psi_2^1}{\partial u_n} \\ \cdots & & \\ \cdots & & \\ (m_n - 1)\, \psi_n^2, & \frac{\partial \psi_n^1}{\partial u_n} \cdots & \frac{\partial \psi_n^1}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

ergibt. Vom dritten Gliede der Formel 10) ist

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{A_1 \chi_1}{f_1 \psi_1^1 B_1}\right) = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{A_1}{\psi_1^1 B_1}\right) = \frac{\psi_1^1 B_1 \frac{\partial A_1}{\partial u_i} - A_1 \left(B_1 \frac{\partial \psi_1^1}{\partial u_i} + \psi_1^1 \frac{\partial B_1}{\partial u_i}\right)}{(\psi_1^1 B_1)^2}.$$

Es ist aber, wie man leicht findet

$$\frac{\partial A_1}{\partial u_i} = \begin{vmatrix} m_1 \frac{\partial \psi_1^1}{\partial u_i}, & \frac{\partial \psi_1^1}{\partial u_2} \cdots & \frac{\partial \psi_1^1}{\partial u_n} \\ m_2 \frac{\partial \psi_2^1}{\partial u_i}, & \frac{\partial \psi_2^1}{\partial u_2} \cdots & \frac{\partial \psi_2^1}{\partial u_n} \\ \cdots & & \\ \cdots & & \\ m_n \frac{\partial \psi_n^1}{\partial u_i}, & \frac{\partial \psi_n^1}{\partial u_2} \cdots & \frac{\partial \psi_n^1}{\partial u_n} \end{vmatrix} + m_1\, \psi_1^1 \frac{\partial B_1}{\partial u_i},$$

also

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{A_1 \chi_1}{f_1 \psi_1 B_1}\right) = -\frac{d_i - m_1 B_1 \frac{\partial \psi_1^1}{\partial u_i}}{\psi_1^1 B_1}$$

wenn die vorhergehende Determinante der Kürze halber mit d_i bezeichnet wird. Somit ist

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{A_1\chi_1}{f_1\psi_1^1 B_1}\right)\frac{\sum\pm\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial\psi_{i-1}^1}{\partial u_{i-1}}\psi_i^2\frac{\partial\psi_{i+1}^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}}{\sum\pm\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_3}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}}=\sum_{i=2}^{n}\frac{d_i-m_1 B_1\frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_i}}{\psi_1^1 B_1}\frac{\sum\pm\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial\psi_{i-1}^1}{\partial u_{i-1}}\psi_i^2\frac{\partial\psi_{i+1}^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}}{\sum\pm\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_3}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}}.$$

Hierin ist $d_i-m_1 B_1\frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_i}$ wieder eine einzige Determinante δ_i, nämlich:

$$\delta_i=d_i-m_1 B_1\frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_i}=\begin{vmatrix} 0\;, & \frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_2}\cdots & \frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_n}\\ m_2\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_i}, & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\cdots & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & \\ m_n\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_i}, & \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2}\cdots & \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}\end{vmatrix}$$

Die gewonnenen Ausdrücke der Formel lassen sich noch weiter vereinfachen. Bezeichnet A_1^k die Subdeterminante von $m_k\psi_k^2$ in A_1, B_i^k, die von $\frac{\partial\psi_k^1}{\partial u_i}$ in B_1, so ist

$$\delta_i=\sum_{k=2}^{n} m_k\frac{\partial\psi_k^1}{\partial u_i}A_1^k$$

$$\Sigma\pm\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial\psi_{i-1}^1}{\partial u_{i-1}}\psi_i^2\frac{\partial\psi_{i+1}^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}=\sum_{\lambda=2}^{n}\psi_\lambda^2 B_i^\lambda,$$

daher ist

$$\sum_{i=2}^{n}\delta_i\,\Sigma\pm\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial\psi_{i-1}^1}{\partial u_{i-1}}\psi_i^2\frac{\partial\psi_{i+1}^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}=\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{k=2}^{n} m_k\frac{\partial\psi_k^1}{\partial u_i}A_1^k\sum_{\lambda=2}^{n}\psi_\lambda^2 B_i^\lambda\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{n} m_k\psi_k^2\left(\frac{\partial\psi_k^1}{\partial u_i}B_i^k\right)A_1^k+\sum_{i=2}^{n}\sum_{k}\sum_{\lambda} m_k\psi_\lambda^2 A_1^k\left(\frac{\partial\psi_k^1}{\partial u_i}B_i^\lambda\right)$$

wo die k und λ der dreifachen Summe nur mehr lauter von einander verschiedene Werthe der Reihe 2 bis n annehmen können. Nach der Bedeutung der Zeichen B_i^k, A_1^k und B_i^λ ist aber

$$\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{n} m_k\psi_k^2\left(\frac{\partial\psi_k^1}{\partial u_i}B_i^k\right)A_1^k=\sum_{k=2}^{n}\left(m_k\psi_k^2 A_1^k\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial\psi_k^1}{\partial u_i}B_i^k\right)=B_1\sum_{i=2}^{n} m_k\psi_k^2 A_1^k$$

$$=B_1\begin{vmatrix} 0, & \frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_2},\cdots & \frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_n}\\ m_2\psi_2^2, & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2},\cdots & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & \\ m_n\psi_u^2, & \frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_2},\cdots & \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}\end{vmatrix}$$

und

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{k}\sum_{\lambda} m_k\,\psi_\lambda^2\,A_1^k\left(\frac{\partial\psi_k^1}{\partial u_i}B_i^\lambda\right)=0,$$

weil

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial\psi_k^1}{\partial u_i}B_i^\lambda=0.$$

Somit ist:

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{A_1\chi_1}{f_1\psi_1^1B_1}\right)\frac{\sum\pm\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\cdots\frac{\partial\psi_{i-1}^1}{\partial u_{i-1}}\psi_i^2\frac{\partial\psi_{i+1}^1}{\partial u_{i+1}}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}}{\sum\pm\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}\frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_3}\cdots\frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}}=\begin{vmatrix}0, & \frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_2}, & \cdots & \frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_n}\\ m_2\psi_2^2, & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}, & \cdots & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\ m_n\psi_n^2, & \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2}, & \cdots & \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}\end{vmatrix}:\psi_1^1B_1,$$

folglich ergibt die Substitution dieser Ausdrücke in 10)

$$\Sigma x_1=\sum\left\{\begin{vmatrix}-\psi_1^2 & \frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_2}, & \cdots & \frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_n}\\ (m_2-1)\psi_2^2, & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}, & \cdots & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\ (m_n-1)\psi_n^2, & \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2}, & \cdots & \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0, & \frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_2}, & \cdots & \frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_n}\\ m_2\psi_2^2, & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}, & \cdots & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\ m_n\psi_n^2, & \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2}, & \cdots & \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}\end{vmatrix}\right\}:\psi_1^1B_1,$$

oder

$$\Sigma x_1=-\sum\begin{vmatrix}\psi_1^2, & \frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_2}, & \cdots & \frac{\partial\psi_1^1}{\partial u_n}\\ \psi_2^2, & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}, & \cdots & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_u}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\ \psi_n^2, & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}, & \cdots & \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}\end{vmatrix}:\psi_1^1\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_2}, & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_3}, & \cdots & \frac{\partial\psi_2^1}{\partial u_n}\\ \frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_2}, & \frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_3}, & \cdots & \frac{\partial\psi_3^1}{\partial u_n}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\ \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_2}, & \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_3}, & \cdots & \frac{\partial\psi_n^1}{\partial u_n}\end{vmatrix}$$

Hierin bezeichnet die Summe links vom Gleichheitszeichen die Summe aller x_1 der simultanen Wurzelsysteme der Gleichungen:

$$\psi_1(x_1, x_2\ldots x_n)=0,\ \psi_2(x_1, x_2\ldots x_n)=0\ \ldots\ \psi_n(x_1, x_2\ldots x_n)=0,$$

die Summe rechts erstreckt sich über die Substitutionen aller simultanen Wurzelsysteme der Gleichungen:

$$\psi_2^1(u_2, u_3\ldots u_n)=0,\ \psi_3^1(u_1, u_2\ldots u_n)=0\ \ldots\ \psi_n^1(u_2, u_3\ldots u_n)=0$$

an Stelle der $u_2, u_3\ldots u_n$.

Diese Formel wurde in etwas anderer Gestalt schon von Lionville gegeben. Sie führt die Berechnung des Coëfficienten des zweiten Gliedes einer Endgleichung von n Gleichungen zurück auf die Bestimmung einer symmetrischen Function von $(n—1)$ Gleichungen.

In ganz analoger Weise lässt sich die Formel 8) auch für den Fall erweitern, dass $\chi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ um zwei Grade höher ist, als $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$. Die hiezu nöthigen Rechnungen nehmen aber eine etwas unerquickliche Ausdehnung an, weshalb ich die Ausführung derselben unterlasse, umsomehr als der Gang der Rechnung sich nach dem Vorhergehenden vollkommen übersehen lässt.

Zeitschrift/Journal: Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.

Jahr/Year: 1876

Band/Volume: 36_2

Autor(en)/Author(s): Escherich Gustav von

Artikel/Article: Beiträge zur Bildung der symmetrischen Functionen der Wurzelsysteme und der Resultante simultaner Gleichungen. 251-272