ÜBER

DIE ORTHOGONALEN UND EINIGE IHNEN VERWANDTE SUBSTITUTIONEN.

VON

DR. B. IGEL.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 31. DECEMBER 1877

I.

Die Transformation Cartesischer Punktcoordinaten von einem System rechtwinkeliger Axen zu einem anderen Systeme rechtwinkeliger Axen geschieht bekanntlich durch die Formeln:

$$\text{I)}\qquad \begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11} X_1+\lambda_{12} X_2+\lambda_{13} X_3 \\ x_2 &= \lambda_{21} X_1+\lambda_{22} X_2+\lambda_{23} X_3 \\ x_3 &= \lambda_{31} X_1+\lambda_{32} X_2+\lambda_{33} X_3, \end{aligned}$$

wo zwischen den λ folgende Relationen stattfinden:

$$\text{II)}\qquad \begin{aligned} &\lambda_{11}^2+\lambda_{21}^2+\lambda_{31}^2 = 1 && \lambda_{11}\lambda_{12}+\lambda_{21}\lambda_{22}+\lambda_{31}\lambda_{32} = 0 \\ &\lambda_{12}^2+\lambda_{22}^2+\lambda_{32}^2 = 1 && \lambda_{12}\lambda_{13}+\lambda_{22}\lambda_{23}+\lambda_{32}\lambda_{33} = 0 \\ &\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2+\lambda_{33}^2 = 1 && \lambda_{11}\lambda_{13}+\lambda_{21}\lambda_{23}+\lambda_{31}\lambda_{33} = 0 \\ &\lambda_{11}^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2 = 1 && \lambda_{11}\lambda_{21}+\lambda_{12}\lambda_{22}+\lambda_{13}\lambda_{23} = 0 \\ &\lambda_{21}^2+\lambda_{22}^2+\lambda_{23}^2 = 1 && \lambda_{21}\lambda_{31}+\lambda_{22}\lambda_{32}+\lambda_{32}\lambda_{33} = 0 \\ &\lambda_{31}^2+\lambda_{32}^2+\lambda_{33}^2 = 1 && \lambda_{11}\lambda_{31}+\lambda_{12}\lambda_{32}+\lambda_{13}\lambda_{33} = 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Relationen folgt bekanntlich der Übergang von den neuen Axen zu den alten durch die Formeln:

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda_{11} x_1+\lambda_{21} x_2+\lambda_{31} x_3 \\ X_2 &= \lambda_{12} x_1+\lambda_{22} x_2+\lambda_{32} x_3 \\ X_3 &= \lambda_{13} x_1+\lambda_{23} x_2+\lambda_{33} x_3. \end{aligned}$$

Aus denselben Relationen folgen die Identitäten:

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{vmatrix} = \pm 1$$

und:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = X_1^2+X_2^2+X_3^2.$$

Das letztere Resultat, das im ternären Gebiete auch geometrisch evident ist, fassten die Mathematiker als ganz besonders wichtig auf, und suchten es algebraisch zu erweitern, indem sie solche Substitutionen suchten, die die Identität

$$\Sigma x_i^2 = \Sigma X_i^2 \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

hervorbringen. Von dieser ausgehend, fanden sie Grundgleichungen zwischen den Substitutionscoefficienten, aus welchen sie dann die Eigenschaften der Substitutionen ableiteten. Verfolgt man aber den obigen Gedankengang und beachtet ganz besonders den eigenthümlichen Bau der Substitutionen in I) und III), so sieht man, dass es viel einfacher ist, anstatt von der Gleichung

$$\Sigma x_i^2 = \Sigma X_i^2$$

auszugehen, die Eigenschaften solcher allgemeinen Substitutionen zu untersuchen, wobei sich diese Gleichung als eine unter den Eigenschaften ergibt. Setzen wir nämlich die Substitutionsgleichungen

$$\text{IV)}\qquad \begin{aligned} x_1 &= a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \cdots + a_{1n} X_n \\ x_2 &= a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \cdots + a_{2n} X_n \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \cdots + a_{nn} X_n \end{aligned}$$

$$\text{V)}\qquad \begin{aligned} X_1 &= a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \cdots + a_{n1} x_n \\ X_2 &= a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{n2} x_n \\ &\cdots\cdots \\ X_n &= a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n \end{aligned}$$

und multipliciren die Gleichungen IV) der Reihe nach mit

$$a_{11}\; a_{21}\; a_{31} \ldots a_{n1}$$

und addiren alle, so ergibt sich wegen V)

$$\Sigma a_{i1}^2 = 1$$
$$\Sigma a_{i2}\, a_{i1} = 0.$$

Multiplicirt man ferner die Gleichungen IV) der Reihe nach mit

$$a_{12}\; a_{22} \ldots a_{n2}$$

so ergibt sich wegen V)

$$\Sigma a_{i2}^2 = 1$$
$$\Sigma a_{i1}\, a_{i2} = 0.$$

Verfährt man sofort, so erhält man ein System von n^2 Gleichungen von der Form

$$\text{VI)}\qquad \begin{aligned} a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 &= 1 \\ a_{i1}\, a_{k1} + a_{i2}\, a_{k2} + \cdots + a_{in}\, a_{kn} &= 0. \end{aligned}$$

Bevor wir zeigen, dass dieses Gleichungssystem sich auf $\frac{n(n+1)}{2}$ reducirt, wollen wir zeigen, dass es auch hinreicht, um von den Gleichungen IV) zu denen von V) überzugehen. Zu diesem Behufe fassen wir das System VI) in eine Gleichung zusammen:

$$a_{i1}\, a_{k1} + a_{i2}\, a_{k2} + \cdots + a_{in}\, a_{kn} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = k \\ 0 \;\; „ \;\; i \gtrless k. \end{cases}$$

Aus IV) erhält man die n Gleichungen

VII) $$X_i = A_{1i}x_1 + A_{2i}x_2 + \dots + A_{ni}x_n.$$

Um die A_{ki} zu berechnen, setzen wir in den Gleichungen IV)

$$X_i = a_{ki},$$

es wird dann:

$$x_k = a_{ki}a_{i1} + a_{i2}a_{k2} + \dots + a_{in}a_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{„} \quad i \gtrless k. \end{cases}$$

Tragen wir nun diese in VII) ein, so erhalten wir

$$a_{ki} = A_{ki}$$

und somit

$$X_i = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \dots + a_{ni}x_n \quad \text{q. d. e.}$$

Substituirt man die Werthe von x_i aus V) in IV), so erhält man die Gleichungen:

VIII) $$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \\ x_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n, \end{aligned}$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2 = b_{11} \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \dots + a_{1n}a_{2n} = b_{12} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{11}a_{n1} + a_{12}a_{n2} + \dots + a_{1n}a_{nn} = b_{1n} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} + \dots + a_{2n}a_{1n} = b_{21} \\ a_{21}a_{21}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{2n} = b_{22} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{21}a_{n1} + a_{22}a_{n2} + \dots + a_{2n}a_{nn} = b_{2n} \end{array}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n1}a_{11} + a_{n2}a_{12} + \dots + a_{nn}a_{1n} = b_{n1} \\ a_{n1}a_{21} + a_{n2}a_{22} + \dots + a_{nn}a_{2n} = b_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \dots + a_{nn}^2 = b_{nn}. \end{array}\right.$$

Aus VIII) folgt, dass die Determinante

$$B = \begin{vmatrix} b_{11}-1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-1 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}-1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ist}$$

und zwar dadurch, dass in Folge von VI) alle Elemente derselben verschwinden. Da aber B symmetrisch ist, d. h. die Elemente zu beiden Seiten der Diagonalreihe gleich sind, so folgt, dass die n^2 Gleichungen VI) sich auf $\frac{n(n+1)}{2}$ reduciren.

Wendet man das obige Verfahren auf die Gleichung V), indem man diese der Reihe nach mit den Coefficienten der horizontalen Reihen in IV) multiplicirt und alle addirt, so erhält man das zweite System von Gleichungen:

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdot + a_{ni}^2 = 1$$

$$a_{1i}a_{1k} + a_{21}a_{2k} + \cdot + a_{ni}a_{nk} = 0.$$

Dieses System sagt aus, dass der Effect der orthogonalen Substitutionen derselbe bleibt, wenn man dieselben transponirt, d. h. die gleichvielten Horizontal- und Verticalreihen mit einander vertauscht, obwohl dieselben nicht gleich sind. Diese Eigenschaft zeigt am deutlichsten den Charakter dieser Substitutionen.

Bildet man die reciproke Determinante des Systems IV) und berücksichtigt, dass zufolge V) die Minoren durch die Gleichungen:

$$A_{ik} : R = a_{ik}$$

gegeben sind, so folgt (mit Anwendung eines bekannten Satzes), dass die Reciproke, die R' heissen möge, die $(n+1)$te Potenz von R ist und in Folge eines bekannten Satzes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}^{n+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}^{n-1}$$

oder

$$(\Sigma \pm a_{11}a_{22} \cdot \cdot a_{nn})^2 = 1,$$

d. h.

$$\Sigma \pm a_{11}a_{22} \cdot \cdot a_{nn} = \pm 1.$$

Man sieht also, dass alle Eigenschaften aus dem Charakter der Substitutionen abgeleitet werden können, und dass die Gleichungen VI) und mit ihnen die Gleichung

$$\Sigma x_i^2 = \Sigma X_i^2$$

als Eigenschaften der orthogonalen Substitutionen auftreten.

II.

Ich schalte hier einen Beweis zweier Determinanten-Sätze ein, die sonst einzeln, nach unserer auch später zu gebrauchenden Methode aber zusammen bewiesen werden. Es sind folgende Sätze:

I. „Die Determinante des Systems von Elementen, welches einem Systeme von n^2 Elementen adjungirt ist, ist die $(n-1)$te Potenz der Determinante des gegebenen Systems.“

II. „Eine partiale Determinante des adjungirten Systems von $m$tem Grade ist das Product von R^{m-1} mit dem Coefficienten, welchen die entsprechende partiale Determinante des ursprünglichen Systems in R hat.“ [1]

Entsprechend der Collineation im ternären Gebiete kann man von einer Collineation in der n-fachen Mannigfaltigkeit sprechen, welche dann folgendermassen definirt ist

1) $$\begin{aligned} \mu x_1 &= \lambda_{11} y_1 + \lambda_{12} y_2 + \cdot + \lambda_{1n} y_n \\ \mu x_2 &= \lambda_{21} y_1 + \lambda_{22} y_2 + \cdot + \lambda_{2n} y_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mu x_n &= \lambda_{n1} y_1 + \lambda_{n2} y_2 + \cdot + \lambda_{nn} y_n. \end{aligned}$$

In dieser Mannigfaltigkeit entsprechen n Elemente sich selbst und zwar diejenigen, die durch folgende algebraische Gleichung bestimmt sind:

[1] S. Baltzer's Determinanten, §. 6 z. A.

$$\text{II)}\qquad \begin{vmatrix} \lambda_{11}-\mu & \lambda_{12} & \cdot\cdot & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22}-\mu & \cdot\cdot & \lambda_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n-1,1} & \lambda_{n-1,2} & \cdot\cdot\,\lambda_{n-1,n-1}-\mu & \lambda_{n-1\,n} \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdot\cdot & \lambda_{nn}-\mu \end{vmatrix} = 0$$

Durch Auflösung des Systems I) erhält man

$$\text{III)}\qquad \begin{aligned} Ry_1 : \mu &= \Lambda_{11}x_1+\Lambda_{21}x_2+ \;+\Lambda_{n1}x_n \\ Ry_2 : \mu &= \Lambda_{12}x_1+\Lambda_{22}x_2+ \;+\Lambda_{n2}x_n \\ \cdots & \;\cdots\cdots\cdots \\ Ry_n : \mu &= \Lambda_{1n}x_1+\Lambda_{2n}x_2+ \;+\Lambda_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Die sich selbst entsprechenden Elememte bleiben dieselben und in Folge dessen muss die algebraische Gleichung

$$\text{IV)}\qquad \begin{vmatrix} \Lambda_{11}-\frac{R}{\mu} & \Lambda_{21} & \cdot\cdot\,\Lambda_{n1} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22}-\frac{R}{\mu} & \cdot\cdot\,\Lambda_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Lambda_{1n} & \Lambda_{2n} & \cdot\cdot\,\Lambda_{nn}-\frac{R}{\mu} \end{vmatrix} = 0$$

dieselben Wurzeln für μ geben. Bezeichnen wir die Determinanten von I) und III) mit R und $\overline{R}$, und benützen einen bekannten Determinantensatz, so erhalten II) und IV) folgende Gestalt

$$\text{V)}\qquad \begin{cases} \mu^n-\mu^{n-1}\Sigma R_1+ \;+\; +\mu^2\Sigma R_{n-2}+\mu\Sigma R_{n-1}\pm R_n = 0\,, \\ \mu^n\overline{R}_n-\mu^{n-1}R\,\Sigma\overline{R}_1+ \;+\; +\mu^2 R^{n-2}\Sigma\overline{R}_{n-2}-\mu R^{n-1}\Sigma\overline{R}_{n-1}\pm R^n = 0 \end{cases}$$

dividirt man die zweite Gleichung durch $\overline{R}_n$, so müssen die Coëfficienten beider Gleichungen übereinstimmen; man hat daher folgendes System von Relationen:

$$\text{VI)}\qquad \begin{aligned} \frac{R\,\Sigma\overline{R}_{n-1}}{\overline{R}_n} &= \Sigma R_1 \\ \frac{R^2\,\Sigma\overline{R}_{n-2}}{\overline{R}_n} &= \Sigma R_2 \\ \frac{R^3\,\Sigma\overline{R}_{n-3}}{\overline{R}_n} &= \Sigma R_3 \\ \cdots\cdots & \\ \frac{R^n}{\overline{R}_n} &= R_n. \end{aligned}$$

Die letzte Relation gibt nun offenbar den ersten Satz und die übrigen beweisen den zweiten allerdings nur für die Hauptminoren. Ist aber der Satz für diese bewiesen, so lässt er sich leicht für alle Minoren beweisen. Setzen wir nämlich nach einem bekannten Determinantensatze[1]

$$\text{VII)}\qquad \begin{cases} R = \Sigma\varepsilon PQ \\ \overline{R} = \Sigma\varepsilon\Pi\Omega \end{cases}$$

[1] L. c. §. 4.

wo

$$P = \Sigma \pm \lambda_{f1} \lambda_{g2} \lambda_{h3} \ldots$$
$$Q = \Sigma \pm \lambda_{r,\, m+1} \lambda_{s,\, m+2} \ldots$$
$$\Pi = \Sigma \pm \Lambda_{f1} \Lambda_{g2} \Lambda_{h3} \ldots$$
$$\Omega = \Sigma \pm \Lambda_{r, m+1} \Lambda_{s,\, m+2} \ldots$$

so kann man die zweite Gleichung in VII) folgendermassen schreiben:

VIII) $$\overline{R} = P.Q.R^{n-2} + \Sigma \varepsilon \Pi' \Omega'.$$

Die Summen der Producte werden bekanntlich aus dem ersten Gliede, das die complimentären Hauptminoren enthält, gebildet, indem man für $f, g, h\ldots$ alle Combinationen von m verschiedene Nummern der Reihe $1, 2\ldots n$, für $r, s, t\ldots$ die jedesmal übrigen Nummern setzt, daraus folgt, dass jedes Glied in VIII) R^{n-2} als Factor enthält, und dass dessen zweiter Factor das entsprechende Glied in

$$R = \Sigma \varepsilon P.Q$$

ist. Somit sind die Sätze streng bewiesen.

III.

Wir gehen nun zu einer Gattung von Substitutionen über, die mit den orthogonalen Substitutionen eine grosse Ähnlichkeit haben. Es seien folgende zwei Gleichungssysteme gegeben

I) $$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \ + \alpha_{1n} y_n \\ x_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{23} y_2 + \ + \alpha_{2n} y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1} y_1 + \alpha_{n2} y_2 + \ + \alpha_{nn} y_n \end{cases}$$

II) $$\begin{cases} S y_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ + \alpha_{21n} x_n \\ S y_2 = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ + \alpha_{2n} x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S y_n = \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ + \alpha_{nn} x_n \end{cases}$$

Das Gleichungssystem II) soll die Auflösung des Systems I) sein, S eine rationale ganze Function der α_{ik} bedeuten.

Im Falle $S = 1$, so stellen die Systeme I) und II) ein vertauschbares Entsprechen der Elemente. Multiplicirt man die Gleichungen in I) der Reihe nach mit

$$\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{13}\ldots\alpha_{1n},$$

so erhält man folgendes System von Identitäten:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^2 \quad + \alpha_{12}\,\alpha_{21} + \ + \ + \alpha_{1n}\,\alpha_{n1} &= S \\ \alpha_{11}\,\alpha_{12} + \alpha_{12}\,\alpha_{22} + \ + \ + \alpha_{1n}\,\alpha_{n2} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{11}\,\alpha_{1n} + \alpha_{12}\,\alpha_{2n} + \ + \ + \alpha_{1n}\,\alpha_{nn} &= 0. \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise leitet man noch $n-1$ Systeme ab, so dass im Ganzen n^2 solcher Gleichungen vorhanden sind. Es soll nun das Verhältniss von S zu der Determinante $\Sigma \pm \alpha_{11}\,\alpha_{22}\,\alpha_{33}\ldots$ eruirt werden. Wenn man sich der Methode in II) bedient, so gelangt man zu der nicht uninteressanten Gleichung

$$S^n = (\Sigma \pm \alpha_{11}\,\alpha_{22}\,\alpha_{33}\ldots)^2.$$

Zugleich kommt man zu Gleichungen, die das Verhältniss der Unterdeterminanten zu S geben und die für das Weitere von grosser Wichtigkeit sind. Sucht man nämlich die Proportionalfactoren von x_i für den Fall, dass die Elemente sich selbst entsprechen, so findet man sie als Wurzeln folgender algebraischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\mu & \alpha_{12} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\mu & \alpha_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn}-\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Die algebraische Gleichung des reciproken Systems

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\frac{S}{\mu} & \alpha_{12} & \cdot\;\cdot\;\alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\frac{S}{\mu} & \cdot\;\cdot\;\alpha_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdot\;\cdot\;\alpha_{nn}-\frac{S}{\mu} \end{vmatrix} = 0$$

muss für μ dieselben Wurzeln geben, d. h. die Gleichungen:

$$\mu^n-\mu^{n-1}\Sigma R_1+\mu^{n-2}\Sigma R_2 \pm + \pm R_n = 0$$

$$\mu^n R_n-\mu^{n-1} S\Sigma R_{n-1}+\mu^{n-2} S^2\Sigma R_2 \pm + \pm S^n = 0$$

haben dieselben Wurzeln. Es bestehen also die Gleichungen:

$$\frac{S\Sigma R_{n-1}}{R_n} = \Sigma R_1$$

$$\frac{S^2\Sigma R_{n-2}}{R_n} = \Sigma R_2$$

$$\frac{S^3\Sigma R_{n-3}}{R_n} = \Sigma R_3$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\frac{S^n}{R_n} = R_n.$$

IV.

Ein derartiges System von Gleichungen, wie im vorigen Abschnitte, in dessen Auflösung genau dieselben Coefficienten und in derselben Reihenfolge auftreten, kommt bei Aronhold in dessen berühmter Abhandlung:[1] „Theorie der homogenen Functionen dritten Grades“ vor. Bezeichnet man mit

$$U(x_1 x_2 x_3) = \Sigma\, U_{\iota\varkappa\lambda}\, x_\iota x_\varkappa x_\lambda$$

eine ternäre kubische Form und führt mit Aronhold die fundamentalen Verbindungen

$$(U_\rho\, U_\sigma)^{\varkappa\lambda}$$

ein, so beweist er folgende 36 Relationen zwischen denselben, welche sich in folgender Identität zusammenfassen lässt:

$$0 = \begin{vmatrix} \Sigma(U_1 U_1)^{\varkappa\lambda}(U_\varkappa U_\lambda)^{11}-S, & \Sigma(U_1 U_1)^{\varkappa\lambda}(U_\varkappa U_\lambda)^{22} & \cdot\;\cdot\;\Sigma(U_1 U_1)^{\varkappa\lambda}(U_\varkappa U_\lambda)^{12}-S \\ \Sigma(U_2 U_2)^{\varkappa\lambda}(U_\varkappa U_\lambda)^{11} & \Sigma(U_2 U_2)^{\varkappa\lambda}(U_\varkappa U_\lambda)^{22}-S. & \cdot\;\cdot\;\Sigma(U_2 U_2)^{\varkappa\lambda}(U_\varkappa U_\lambda)^{12} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \Sigma(U_1 U_2)^{\varkappa\lambda}(U_\varkappa U_\lambda)^{11} & \Sigma(U_1 U_2)^{\varkappa\lambda}(U_\varkappa U_\lambda)^{22} & \cdot\;\cdot\;\Sigma(U_1 U_2)^{\varkappa\lambda}(U_\varkappa U_\lambda)^{12}-S. \end{vmatrix}$$

[1] Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, B. 55, 97 ff.

Mit Hilfe dieser 36 Relationen leitet er folgende Systeme von Gleichungen ab:

$$
\mathrm{I)}\quad\left\{\begin{aligned}
\Theta_{11} &= (U_1 U_1)^{11} U_{11}+(U_1 U_1)^{22} U_{22}+(U_1 U_1)^{33} U_{33}+2(U_1 U_1)^{23} U_{23}+2(U_1 U_1)^{13} U_{13}+2(U_1 U_1)^{12} V_{12}\\
\Theta_{22} &= (U_2 U_2)^{11} U_{11}+(U_2 U_2)^{22} U_{22}+(U_2 U_2)^{33} U_{33}+2(U_2 U_2)^{23} U_{23}+2(U_2 U_2)^{13} U_{13}+2(U_2 U_2)^{12} V_{12}\\
\Theta_{33} &= (U_3 U_3)^{11} U_{11}+(U_3 U_3)^{22} U_{22}+(U_3 U_3)^{33} U_{33}+2(U_3 U_3)^{23} U_{23}+2(U_3 U_3)^{13} U_{13}+2(U_3 U_3)^{12} V_{12}\\
\Theta_{23} &= (U_2 U_3)^{11} U_{11}+(U_2 U_3)^{22} U_{22}+(U_2 U_3)^{33} U_{33}+2(U_2 U_3)^{23} U_{23}+2(U_2 U_3)^{13} U_{13}+2(U_2 U_3)^{12} V_{12}\\
\Theta_{13} &= (U_1 U_3)^{11} U_{11}+(U_1 U_3)^{22} U_{22}+(U_1 U_3)^{33} U_{33}+2(U_1 U_3)^{23} U_{23}+2(U_1 U_3)^{13} U_{13}+2(U_1 U_3)^{12} V_{12}\\
\Theta_{12} &= (U_1 U_2)^{11} U_{11}+(U_1 U_2)^{22} U_{22}+(U_1 U_2)^{33} U_{33}+2(U_1 U_2)^{23} U_{23}+2(U_1 U_2)^{13} U_{13}+2(U_1 U_2)^{12} V_{12}
\end{aligned}\right.
$$

$$
\mathrm{II)}\quad\left\{\begin{aligned}
S V_{11} &= (U_1 U_1)^{11} \Theta_{11}+(U_1 U_1)^{22} \Theta_{22}+(U_1 U_1)^{33} \Theta_{33}+2(U_1 U_1)^{23} \Theta_{23}+2(U_1 U_1)^{13} \Theta_{13}+2(U_1 U_1)^{12} \Theta_{12}\\
S V_{22} &= (U_2 U_2)^{11} \Theta_{11}+(U_2 U_2)^{22} \Theta_{22}+(U_2 U_2)^{33} \Theta_{33}+2(U_2 U_2)^{23} \Theta_{23}+2(U_2 U_2)^{13} \Theta_{13}+2(U_2 U_2)^{12} \Theta_{12}\\
S V_{33} &= (U_3 U_3)^{11} \Theta_{11}+(U_3 U_3)^{22} \Theta_{22}+(U_3 U_3)^{33} \Theta_{33}+2(U_3 U_3)^{23} \Theta_{23}+2(U_3 U_3)^{13} \Theta_{13}+2(U_3 U_3)^{12} \Theta_{12}\\
S V_{23} &= (U_2 U_3)^{11} \Theta_{11}+(U_2 U_3)^{22} \Theta_{22}+(U_2 U_3)^{33} \Theta_{33}+2(U_2 U_3)^{23} \Theta_{23}+2(U_2 U_2)^{13} \Theta_{13}+2(U_2 U_3)^{12} \Theta_{12}\\
S V_{13} &= (U_1 U_2)^{11} \Theta_{11}+(U_1 U_3)^{22} \Theta_{22}+(U_1 U_3)^{33} \Theta_{33}+2(U_1 U_3)^{23} \Theta_{23}+2(U_1 U_3)^{13} \Theta_{13}+2(U_1 U_3)^{12} \Theta_{12}\\
S V_{12} &= (U_1 U_2)^{11} \Theta_{11}+(U_1 U_2)^{22} \Theta_{22}+(U_1 U_2)^{33} \Theta_{33}+2(U_1 U_2)^{23} \Theta_{23}+2(U_1 U_2)^{13} \Theta_{12}+2(U_1 U_2)^{12} \Theta_{12};
\end{aligned}\right.
$$

hier bedeutet S die fundamentale Invariante der kubischen Form

$$S = \Sigma (U_\varkappa U_\lambda)^{\rho\rho} (U_\rho U_\rho)^{\varkappa\lambda}$$

Durch Vergleichung mit der gewöhnlichen Art der Auflösung des Systems I), bei welcher die Coefficienten in II) statt von der 2. von der 10. Ordnung und die Determinante von der 12. Ordnung sind, schliesst Aronhold,[1] dass die Unterdeterminanten mit der Determinante einen sich forthebenden Factor von der 8. Ordnung haben. Um diesen zu finden, bringt Aronhold den Beweis, dass die Determinante die dritte Potenz von S ist, und zwar in der Weise, dass er die kubische Form in der Hesse'schen Gestalt

$$U(x_1 x_2 x_3) = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + 6 a_4 x_1 x_2 x_3$$

annimmt, und für diese die Determinante sowohl als auch S geradezu ausrechnet. S^2 ergibt sich dann als der gemeinschaftliche Factor der Unterdeterminanten.

Nach unserer Methode im vorigen Abschnitt bedarf es nicht eines anderweitigen Beweises, sondern es genügt schon die Voraussetzung der Systeme I) und II), um beides zu beweisen, dass die Determinante die dritte Potenz von S ist, und dass die Minoren S^2 zum Factor haben. Die Formeln in III) gehen nämlich in diesem Falle in folgende über:

$$\frac{S \Sigma R_5}{R_6} = \Sigma R_1$$

$$\frac{S^2 \Sigma R_4}{R_6} = \Sigma R_2$$

$$\frac{S^3 \Sigma R_3}{R_6} = \Sigma R_3$$

$$\frac{S^6}{R_6} = R_6.$$

Die Vierte oder auch die Dritte gibt geradezu

$$R_6 = S^3$$

während die erste und zweite die Formeln geben:

$$\Sigma R_4 = S \Sigma R_2$$

$$\Sigma R_5 = S^2 \Sigma R_1.$$

[1] L. c. p. 114.

V.

Im vorigen Abschnitte ist die merkwürdige Formel:

$$
\text{I)}\qquad S^3(U)=\begin{vmatrix}
(U_1U_1)^{11} & (U_1U_1)^{22} & (U_1U_1)^{33} & 2(U_1U_1)^{23} & 2(U_1U_1)^{13} & 2(U_1U_1)^{12}\\
(U_2U_2)^{11} & (U_2U_2)^{22} & (U_2U_2)^{33} & 2(U_2U_2)^{23} & 2(U_2U_2)^{13} & 2(U_2U_2)^{12}\\
(U_3U_3)^{11} & (U_3U_3)^{22} & (U_3U_3)^{33} & 2(U_3U_3)^{23} & 2(U_3U_3)^{13} & 2(U_3U_3)^{12}\\
(U_2U_3)^{11} & (U_2U_3)^{22} & (U_2U_3)^{33} & 2(U_2U_3)^{23} & 2(U_2U_3)^{13} & 2(U_2U_3)^{12}\\
(U_1U_3)^{11} & (U_1U_3)^{22} & (U_1U_3)^{33} & 2(U_1U_3)^{23} & 2(U_1U_3)^{13} & 2(U_1U_3)^{12}\\
(U_1U_2)^{11} & (U_1U_2)^{22} & (U_1U_2)^{33} & 2(U_1U_2)^{23} & 2(U_1U_2)^{13} & 2(U_1U_2)^{12}
\end{vmatrix}=\rho(U_1U_2U_3)
$$

und die Sätze, dass die Minoren 5. und 4. Grades S^2, resp. S, zum Factor haben, unter der Voraussetzung der Gleichungssysteme I) und II) bewiesen worden. Es sollen nun diese Sätze ohne diese Voraussetzung bewiesen werden. Sind

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1x_2x_3)&=\Sigma a_{i\varkappa}x_ix_\varkappa\\
f_2(x_1x_2x_3)&=\Sigma b_{i\varkappa}x_ix_\varkappa\\
f_3(x_1x_2x_3)&=\Sigma c_{i\varkappa}x_ix_\varkappa
\end{aligned}
$$

drei homogene quadratische Formen und bildet man von dem Netze

$$\lambda_1f_1+\lambda_2f_2+\lambda_3f_3=F(x_1x_2x_3)$$

die adjungirte Form, so ist dieselbe quadratisch in den λ und in den neuen (contragredienten) Variabeln ξ. Die Determinante dieser bi-ternären Form ist die 6gliederige Determinante

$$
\rho(f_1f_2f_3)=\begin{vmatrix}
(aa)^{11} & (aa)^{22} & (aa)^{33} & 2(aa)^{23} & 2(aa)^{13} & 2(ab)^{12}\\
(bb)^{11} & (bb)^{22} & (bb)^{33} & 2(bb)^{23} & 2(bb)^{13} & 2(bb)^{12}\\
(cc)^{11} & (cc)^{22} & (cc)^{33} & 2(cc)^{23} & 2(cc)^{13} & 2(cc)^{12}\\
(bc)^{11} & (bc)^{22} & (bc)^{33} & 2(bc)^{23} & 2(bc)^{13} & 2(bc)^{12}\\
(ac)^{11} & (ac)^{22} & (ac)^{33} & 2(ac)^{23} & 2(ac)^{13} & 2(ac)^{12}\\
(ab)^{11} & (ab)^{22} & (ab)^{33} & 2(ab)^{23} & 2(ab)^{13} & 2(ab)^{12}
\end{vmatrix}
$$

Dieser Anschauungsweise bediente ich mich in einer früheren Abhandlung,[1] um zu beweisen, dass $\rho(f_1f_2f_3)$ eine Invariante ist. In einer zweiten Abhandlung[2] diente mir diese Anschauungsweise, zu zeigen, dass die Bedingung für das Vorhandensein e i n e r Doppelgeraden im Netze $\rho(f_1f_2f_3)=0$ ist und dass, wenn im Netze zwei Doppelgeraden vorhanden sind, mit der Determinante auch die Minoren 5. Grades und, wenn drei Doppelgeraden im Netze vorhanden sind, auch die Minoren 4. Grades verschwinden müssen. Führt man an Stelle der drei quadratischen Formen die drei Ableitungen einer kubischen Form $U(x_1x_2x_3)$ ein:

$$f_1=\frac{1}{3}\frac{dU(x_1x_2x_3)}{dx_1}=U_1$$

$$f_2=\frac{1}{3}\frac{dU(x_1x_2x_3)}{dx_2}=U_2$$

$$f_3=\frac{1}{3}\frac{dU(x_1x_2x_3)}{dx^3}=U_3,$$

[1] Sitzungsberichte der Wiener k. Akad. d. W. 1876.

[2] L. c. 1877.

so hat man statt eines allgemeinen Kegelschnitt-Netzes ein Netz konischer Polaren. Würden auch bei diesem Netze für die verschiedenen Singularitäten verschiedene Bedingungen nöthig sein, so würde $\rho(U_1 U_2 U_3) = 0$ anzeigen, dass im Netze eine Doppelgerade vorhanden ist. Für das Vorhandensein zweier oder dreier Doppelgeraden würde erforderlich sein, dass die Minoren 5. Grades von $\rho(U_1 U_2 U_3)$, respective die Minoren 5. und 4. Grades verschwinden.

Nach einem bekannten Satze entsprechen die Punkte der Hesse'schen Curve 3. Ordnung den Doppelpunkten im Netze der konischen Polaren eindeutig, indem sie den Ort derselben darstellt, folglich muss die Hesse'sche Curve, wenn eine konische Polare im Netze in eine Doppelgerade ausartet, d. h unendlich viele Doppelpunkte hat, diese Doppelgerade ganz enthalten. Wenn nun drei Doppelgeraden im Netze vorhanden sind, so muss demnach die Hesse'sche Curve in drei Linien zerfallen. Für das Ausarten der Curve in drei Geraden ist bekanntlich die einzige Bedingung hinreichend:

$$S = \Sigma (U_\varkappa U_\lambda)^{\rho\rho} (U_\rho U_\rho)^{\varkappa\lambda} = 0.$$

Die Minoren 4. Grades, deren Verschwinden das Vorhandensein dreier Doppelgeraden anzeigt, müssen daher S zum gemeinschaftlichen Factor haben. Würde nun $\rho(U_1 U_2 U_3) = 0$ nicht schon die Existenz von drei Doppelgeraden nach sich ziehen, so würde folgen, dass eine einzige Bedingung für das Vorhandensein dreier Doppelgeraden genügt — da mit den Minoren 4. Grades auch die Minoren 5. Grades und $\rho(U_1 U_2 U_3)$ selbst S zum Factor haben — während bekanntermassen mehrere Bedingungen dafür nöthig sind. Es kann daher nicht anders sein als dass in Folge von $\rho(U_1 U_2 U_3) = 0$ auch schon die Minoren 5. und 4. Grades verschwinden müssen. Soll aber aus dem Verschwinden von $\rho(U_1 U_2 U_3)$ nothwendig folgen, dass die Minoren 5. und 4. Grades verschwinden, so kann $\rho(U_1 U_2 U_3)$ keinen anderen Factor enthalten, und muss folglich

$$\rho(U_1 U_2 U_3) = S^3$$

sein. Q. e. d.

VI.

Bezeichnet man mit $J(abc)$ und $H(abc)$ die Jacobi'sche, resp. die Hermite'sche Curve eines Kegelschnittnetzes, so gehen dieselben, wenn man an Stelle der drei homogenen Formen die drei Ableitungen einer kubischen Form einführt, in die Hesse'sche, resp. Cayley'sche Curve der Curve dritter Ordnung über, d. h. in

$$\Delta U(x_1 x_2 x_3) = \frac{1}{36} \begin{vmatrix} \frac{d_2 U}{dx_1^2} & \frac{d^2 U}{dx_1 dx_2} & \frac{d^2 U}{dx_1 dx_3} \\ \frac{d^2 U}{dx_2 dx_1} & \frac{d^2 U}{dx_2^2} & \frac{d^2 U}{dx_2 dx_3} \\ \frac{d^2 U}{dx_3 dx_1} & \frac{d^2 U}{dx_3 dx_2} & \frac{d^2 U}{dx_3^2} \end{vmatrix}$$

$$[1] S_U = -6 \begin{vmatrix} U_{111} & U_{122} & U_{133} & 2U_{123} & 2U_{113} & 2U_{112} \\ U_{112} & U_{222} & U_{233} & 2U_{223} & 2U_{123} & 2U_{122} \\ U_{113} & U_{223} & U_{333} & 2U_{233} & 2U_{133} & 2U_{123} \\ \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 & \xi_2 \\ 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 & \xi_1 \\ 0 & 0 & \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 & 0. \end{vmatrix}$$

In einer früheren Arbeit habe ich bewiesen, dass die Discriminanten von $J(abc)$ und $H(abc)$ sich nur um einen Zahlenfactor von einander unterscheiden, daraus folgt auch, dass die Discriminanten der Hesse'schen und der Cayley'schen Curven sich nur um einen Zahlenfactor unterscheiden können.

---

[1] Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 55, p. 189.

VII.

Setzt man

$$\text{I)} \quad \begin{aligned} x_1 &= \Sigma a_{1i} y_i \\ x_2 &= \Sigma a_{2i} y_i \\ x_3 &= \Sigma a_{3i} y_i \end{aligned}$$

$$\text{II)} \quad \begin{aligned} y_1 &= \Sigma a_{1i} z_i \\ y_2 &= \Sigma a_{2i} z_i \\ y_3 &= \Sigma a_{3i} z_i, \end{aligned}$$

so ist

$$\text{III)} \quad \begin{aligned} x_1 &= b_{1i} z_i \\ x_2 &= b_{2i} z_i \\ x_3 &= b_{3i} z_i, \end{aligned}$$

wo die $b_{\iota\varkappa}$ in bekannter Weise aus den $a_{\iota\varkappa}$ zusammengesetzt sind. Bildet man die Determinante

$$\text{IV)} \quad \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

so ist diese, nachdem man die x und y durch z ausgedrückt, offenbar eine Curve dritter Ordnung. Es lässt sich aber mit Leichtigkeit zeigen, dass diese Curve in drei Gerade zerfällt.

Es ist bekannt, dass, wenn $\rho_1 \rho_2 \rho_3$ die Wurzeln der Gleichung

$$\text{V)} \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

sind, man die Collineation II) auf die Form bringen kann

$$\begin{aligned} y_1 &= \rho_1 Z_1 \\ y_2 &= \rho_2 Z_2 \\ y_3 &= \rho_3 Z_3, \end{aligned}$$

wo die Z_i die sich selbst entsprechenden Punkte der Collineation sind. Man überzeugt sich auch leicht, dass man die Gleichungen III) auf die Form:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho_1^2 Z_1 \\ x_2 &= \rho_2^2 Z_2 \\ x_3 &= \rho_3^2 Z_3 \end{aligned}$$

bringen kann. Denn die Gleichung

$$\text{VI)} \quad \begin{vmatrix} b_{11}-\rho & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\rho & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

ist identisch mit

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11}+\rho & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+\rho & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}+\rho \end{vmatrix} = 0$$

woraus man sieht, dass die Gleichung VI) die Quadrate der Wurzeln von der Gleichung V) zu Wurzeln hat. Die Determinante IV) geht daher in

$$\begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \rho_1 Z_1 & \rho_2^2 Z_2 & \rho_3 Z_3 \\ \rho_1^2 Z_1 & \rho_2^2 Z_2 & \rho_3^2 Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_1^2 & \rho_2^2 & \rho_3^2 \end{vmatrix} Z_1 . Z_2 . Z_3$$

über, was zu beweisen war.

Es scheint aber, dass man diesen Satz direct aus der Determinante nicht beweisen könnte.