DAS OKTAËDER UND DIE GLEICHUNG VIERTEN GRADES.

VON

PHIL. DR. ANTON PUCHTA,
PRIVATDOCENTEN AN DER PRAGER UNIVERSITÄT

(Mit 2 Tafeln.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 6. MÄRZ 1879.

Einleitung.

Der vorliegende Aufsatz hat die Aufgabe, die Untersuchungen, welche Prof. Felix Klein in München in den mathematischen Annalen, Bd. IX, XII etc. über das Ikosaëder publicirte, in entsprechender Weise — wobei selbstverständlich neben grosser Analogie auch manche Verschiedenheit auftritt — auf das Oktaëder und Tetraëder auszudehnen, um hiedurch, da auch hier der Würfel von selbst hinzutritt, und das Pentagondodekaëder schon im Ikosaëder subsummirt ist, in gewissem Sinne einerseits alle Archimedeischen Körper, sofern sie regulär sind, vom Standpunkte der Klein'schen Arbeit zu betrachten, und andererseits auch die Theorie der Gleichung dritten und vierten Grades in Analogie mit der Gleichung fünften Grades, soweit dies möglich ist, zu bringen. Schon hieraus erhellt, dass der vorliegende Aufsatz sowohl als Einleitung zum Klein'schen, insofern er sich mit den einfacheren regulären Körpern befasst, als auch als Ergänzung im bezeichneten Sinne aufgefasst werden kann. Dass mir dabei Herr Prof. Klein, zumal in den ersteren Partien, welche ich im Grossen und Ganzen noch im Sommersemester 1878 in München ausarbeitete, stets auf die zuvorkommendste Weise mit Rath und Belehrung zur Seite stand, und mich auch in dieser Richtung sehr verpflichtete, muss ich sofort bemerken, da hieraus schon erhellt, welcher Dank von meiner Seite Herrn Prof. Klein gebührt.

Vielleicht darf ich noch bemerken, dass die grosse Ausführlichkeit und Breite in der nachstehenden Auseinandersetzung einmal in dem Bestreben begründet ist, mir selbst jeden einzelnen Punkt zur allseitigen Überlegung zu bringen, als auch andererseits dem mit den hier gebrauchten Vorstellungen und Schlüssen nicht Vertrauten das Verständniss derselben zu erleichtern.

Was nun die oben erwähnten regulären Körper selbst betrifft, so besteht ihre Haupteigenschaft darin, dass ihr analytischer Ausdruck, ihre Gleichungen, durch gewisse lineare Substitutionen, welche sich geometrisch als Rotationen im gewöhnlichen Sinne interpretiren, und darum auch die Covarianten dieser Grundformen in sich selbst übergehen, und hiedurch zu gewissen Gruppen von Substitutionen im Galois'schen

Sinne Anlass geben, was zur Folge hat, dass jede homogene Gleichung zwischen Covarianten gleichfalls Transformationen in sich selbst gestattet, wodurch man nothwendiger Weise zur Untersuchung, resp. Lösung derartiger Gleichungen veranlasst wird. Mit Rücksicht hierauf gliedert sich das Nachfolgende in vier Abschnitte, von denen der erste die Aufstellung der erwähnten Gruppe von Substitutionen verfolgt, der zweite die Lösungen der Oktaëdergleichung enthält, während der dritte die Aufstellung der wichtigsten beim Oktaëder auftretenden Resolventen zum Zwecke hat, und der letzte die entwickelte Theorie auf die allgemeine Gleichung vierten Grades anwendet, und so dieselbe von diesem neuen Standpunkte lösen lehrt.

Als Quellen benützte ich ausser den Vorträgen von Prof. Klein und seinen zahlreichen Arbeiten in den „Mathematischen Annalen" besonders folgende: Clebsch's „Binäre Formen"; Schwarz's Aufsatz „Über hypergeometrische Reihen" im 75. Bande von Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik; Hermité's Aufsatz: „Sur la resolution de l'équation du cinquième degré" in den Comptes rendus, 1858 etc.

Erster Abschnitt.

§. 1. Das Oktaëder und Tetraëder mit ihren Covarianten.

Als Interpretationsgebiet, d. h. als Träger sämmtlicher Werthe der complexen Variabeln $\xi = x + yi$ denke ich mir im Folgenden stets eine Kugel vom Radius $\frac{1}{2}$, welche die xy-Ebene der analytischen Geometrie auf Seite der positiven z im Coordinatenanfangspunkte berührt. Um dann nämlich den Punkt zu finden, welcher auf der Kugel durch $\xi_1 = x_1 + y_1 i$ dargestellt ist, suche man den Schnittpunkt des Strahles, welcher die beiden Punkte von den Coordinaten ($x = 0$, $y = 0$, $z = 1$) und ($x = x_1$, $y = y_1$, $z = 0$) verbindet, mit der bezeichneten Kugel, wodurch man den Repräsentanten des Werthes $\xi_1 = x_1 + y_1 i$ erhält. Zur grösseren Symmetrie werde ich mich zugleich der homogenen Schreibweise bedienen, und also statt ξ immer $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ schreiben, woraus sich z. B. sofort ergibt, dass $\xi_1 = 0$ den Südpol und $\xi_2 = 0$ den Nordpol der Einheitskugel bedeutet etc. Ist ferner im Folgenden von einem regelmässigen Körper die Rede, so ist derselbe immer als der Kugel eingeschrieben zu betrachten, und jeder Punkt, der auf einer Seitenfläche eines solchen Körpers liegt, ist durch einen Radius der Kugel auf die Oberfläche derselben zu projiciren, so dass also strenge genommen unter einem Würfel im Folgenden der Complex jener acht Punkte der Einheitskugel zu verstehen ist, welche die Ecken eines eingeschriebenen Würfels bestimmen.

Aus dem Gesagten ergibt sich nun sofort, dass die Function

$$F \equiv \xi_1 \xi_2 (\xi_1^4 - \xi_2^4),$$

welche gleich Null gesetzt, die sechs Wurzeln 0, ∞ (entsprechend dem $\xi_2 = 0$), $+1$, -1, $+i$, $-i$ gibt, durch die sechs Eckpunkte eines Oktaëders dargestellt wird, indem ja 0, ∞ den Nord- und Südpol der Kugel und ± 1, $\pm i$ vier Punkte des Äquators bezeichnen, welche von einander um einen Winkel $\frac{\pi}{2}$ abstehen. Es handelt sich jetzt zunächst um die Bildung des vollständigen Formensystems von F. Was zuerst die Invarianten betrifft, so besitzt F nur eine, da ja alle Oktaëder ähnlich sind und zur Deckung gebracht werden können, wenn der Radius der umgeschriebenen Kugel gleich ist in beiden Fällen; sie ist hier, wie sich aus

$$(ab)^6 \equiv \frac{1}{(6!)^2} \left\{ \frac{\partial^6 F(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1^6} \frac{\partial^6 F(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2^6} - 6 \frac{\partial^6 F(\xi_1, \xi_2)}{\partial^5 \xi_1 \, \partial \xi_2} \frac{\partial^6 F(\eta_1 \eta_2)}{\partial \eta_1 \, \partial^5 \eta_2} + \ldots \right\}$$

ergibt, gleich $\frac{1}{3}$.

Als Hess'sche Form erhält man weiter

$$H = \frac{2}{6^2\, 5^2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_2^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1\, \partial \xi_2} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{2}{6_6} \left(\xi_1^8 + 14\, \xi_1^4 \xi_2^4 + \xi_2^8 \right),$$

wofür ich immer schreibe:

$$H = \xi_1^8 + 14\, \xi_1^4\, \xi_2^4 + \xi_2^8.$$

Als Jacobi'sche Form von F und H resultirt nach geeigneter Wahl eines constanten Factors aus

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial F}{\partial \xi_2} \\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial H}{\partial \xi_2} \end{vmatrix}$$

der Ausdruck

$$T = \xi_1^{12} + \xi_2^{12} - 33\, \xi_1^4 \xi_2^4 (\xi_1^4 + \xi_2^4) = (\xi_1^8 - 34\, \xi_1^4 \xi_2^4 + \xi_2^8)(\xi_1^4 + \xi_2^4),$$

und mit den drei Formen F, H und T ist das vollständige Formensystem der Grundform F erschöpft, wie ich im folgenden Paragraphe zeigen werde. Aus dem Ausdrucke von H folgt, dass ich auch schreiben kann

$$H = (\xi_1^4 + 2\sqrt{-3}\, \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4)(\xi_1^4 - 2\sqrt{-3}\, \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4),$$

wobei man leicht bemerkt, dass der zweite Factor aus dem ersten fliesst, wenn ξ_1, ξ_2, resp. durch $i\xi_1$, ξ_2 ersetzt werden, d. h. in der xy-Ebene tritt an Stelle von $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ $i\xi$, oder geometrisch ausgedrückt, die xy-Ebene wird in sich selbst um den Anfangspunkt der Coordinaten als Drehpunkt durch einen Winkel $\frac{\pi}{2}$ verschoben, so dass man auch sagen kann, indem man wieder zur Kugel übergeht: „Der Complex der vier Punkte des zweiten Factors entsteht aus dem Complex der vier Punkte der ersten, wenn man den letzteren um die Axe Nord-Süd der Kugel durch den Winkel $\frac{\pi}{2}$ dreht.“ Nun ist aber das Oktaëder — und darum auch jede Covariante desselben — symmetrisch gegen die drei Axen, welche die Punktpaare $0, \infty$; $+1, -1$ und $+i, -i$ verbinden, demnach muss auch eine Rotation um die beiden anderen durch $\frac{\pi}{2}$ den Complex der vier Punkte des ersten Factors in den des zweiten überführen, und weiter eine Drehung durch π um eine der drei bezeichneten Axen die Totalität der vier Punkte je eines der beiden Factoren ungeändert lassen, u. s. w., woraus man sehr leicht folgert, dass

$$f = \xi_1^4 + 2\sqrt{-3}\, \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4$$

$$h = \xi_1^4 - 2\sqrt{-3}\, \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4$$

je ein Tetraëder darstellen und beide zusammen einen Würfel, was von einem anderen Gesichtspunkte aus auch das Folgende lehren wird; erwähnen will ich hier nur, dass man durch eine leichte Rechnung oder auch durch dem Nachstehenden analoge geometrische Überlegungen zur Einsicht gelangt, dass h die Hess'sche Form von f ist, und findet dann als Jacobi'sche Form beider

$$t = \xi_1 \xi_2 (\xi_3^4 - \xi_2^4) \equiv F,$$

ein Resultat, das auch leicht geometrisch in Evidenz zu bringen ist.

In Analogie zum Oktaëder bilden auch die Formen f, h und t das vollständige Formensystem von f, wie sich sogleich ergeben wird, und in einem späteren Paragraphe werde ich analytisch zeigen, dass man statt F

auch H hätte als Grundform zu Grunde legen können, um F und T als Covarianten von H nachzuweisen; ein Gleiches gilt von h, f und t, und nur die grössere Einfachheit der Interpredation bewog mich, F als Ausgangspunkt der Entwicklung zu nehmen. Überhaupt hätte es keine Mühe, nachzuweisen, dass z. B. F, H und T in Bezug auf das Verhältniss als Covarianten von einander als ganz gleichberechtigt zu betrachten sind.

§. 2. Gruppe der Substitutionen von F und f.

Durch die Symmetrie-Ebenen des Oktaëders erhalten wir folgende zwei Complexe von symmetrisch vertheilten Punkten:

A. Acht Punkte, welche den Mittelpunkten der Seitenflächen des Oktaëders auf der Kugel entsprechen; es sind dies die acht Punkte H, welche offenbar einen Würfel oder zwei Tetraëder f und h bilden und in ihrer Totalität sich decken, wenn das Oktaëder, d. h. die sechs, durch $F=0$ auf der Kugel bestimmten Punkte sich decken, was bei gewissen Substitutionen, zu denen wir gleich gelangen, offenbar der Fall ist, und umgekehrt.

B. Zwölf Punkte auf der Kugel, welche den Kantenmittelpunkten des Oktaëders entsprechen; es sind dies die zwölf Punkte von T, von welchen das Gleiche gilt, wie von den acht H-Punkten. Eine leichte Überlegung ergibt ferner, dass h und t resp. durch die Mittelpunkte der Seitenflächen oder Kanten des Tetraëders f dargestellt werden, und hiedurch erhellt einerseits die oben erwähnte Gleichberechtigung der betrachteten Formen und andererseits die Nothwendigkeit der Congruenz von t und F. Selbstverständlich kann man auch rechnerisch auf sehr einfache Weise sich die Behauptung klar machen, was ich jedoch übergehe. Aus dem Späteren wird sich ergeben, dass die vier Punkte f, resp. h auf die xy-Ebene sich in der Weise projiciren, wie es Fig. 1 angibt, wobei der unendlich ferne Punkt der z-Axe als Projectionspunkt angenommen wurde, und die stärker markirten Punkte oberhalb der Äquatorebene der Kugel liegen, die anderen aber unterhalb derselben; in ihrer Totalität bilden sie offenbar den Würfel H.

Ich denke mir nun die genannten drei Gruppen von Punkten beim Oktaëder, also von sechs, acht, resp. zwölf Punkten, immer zu je zweien auf einem Durchmesser der Kugel liegend, und bezeichne die letzteren bezüglich mit F_1, F_2, F_3, $H_1 \ldots H_4$, $T_1 \ldots T_6$. Dann ist klar, dass F_2, welches die Axe $(+1, -1)$ sein soll, während $F_1 \equiv (0, \infty)$ und $F_3 \equiv (+i, -i)$ ist, auf der Ebene der vier Punkte 0, $+i$, $-\infty$, $-i$ im Mittelpunkte derselben senkrecht steht, und desshalb eine Rotation durch $\frac{\pi}{2}$, $2\frac{\pi}{2}$, $3\frac{\pi}{2}$ diese vier Punkte cyklisch vertauscht, während $F_2 \equiv (+1, -1)$ festbleibt, das Oktaëder jedoch in seiner Totalität ungeändert bleibt, und ebenso desshalb auch seine Covarianten H und T und die ausser diesen noch möglichen. Man beachte jedoch hiebei, dass ausser den bezeichneten drei Gruppen symmetrisch vertheilter Punkte keine weiteren existiren. Nimmt man desshalb die drei Axen F_1, F_2, F_3, so geben diese im Ganzen zu $3.3 = 9$ Rotationen von der Periode 4 Anlass, da eine solche, 4mal wiederholt, ohne Einfluss ist, wobei jedoch drei davon, welche durch π drehen, nur die Periode 2 haben, da schon die zweifache Anwendung derselben die Identität gibt. Ebenso erhellt, dass die Axen $H_1 \ldots H_4$ zu je zwei Substitutionen der Periode 3 Anlass geben, indem man um sie durch $\frac{2\pi}{3}$, resp. $2\frac{2\pi}{3}$ drehen kann, und dabei das Oktaëder wieder mit sich selbst zur Deckung bringt; dies gibt $4.2 = 8$ Substitutionen. Ausserdem geben die Axen $T_1 \ldots T_6$ zu je einer Substitution von der Periode 2 Anlass, durch Drehungen um π, so dass wir zusammen nach Hinzufügung der Identität, welche einer Drehung durch 2π um eine beliebige Axe entspricht, im Ganzen 24 Substitutionen beim Oktaëder erhalten, welche dasselbe mit sich selbst zur Deckung bringen. Dass es nicht mehrere gibt, folgt aus der obigen Bemerkung, dass es nur die drei Gruppen symmetrisch vertheilter Punkte, F, H und T gibt.

Beim Tetraëder erhält man zunächst vier Axen, welche je einen Eckpunkt desselben mit dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seitenfläche verbinden; es sind dies die vier Geraden $H_1 \ldots H_4$ vom Oktaëder, in Figur 1: $f_1 h_1 \ldots f_4 h_4$, d. h. die Diagonalen des Würfels H, und da man um jede durch $\frac{2\pi}{3}$, resp. $2\frac{2\pi}{3}$ drehen kann, um das Tetraëder wieder mit sich zur Deckung zu bringen, so resultiren zunächst acht Substitutionen der Periode 3. Ausser diesen finden sich noch die oben mit F_1, F_2, F_3 bezeichneten Axen, welche je zwei Punkte t verbinden und Träger je einer Substitution der Periode 2 sind, welche wir oben schon hervorhoben; somit existiren beim Tetraëder einschliesslich der Identität im Ganzen 12 Substitutionen, welche alle unter den 24 Oktaëdersubstitutionen enthalten sind, also genau die Hälfte derselben, welcher Umstand darin seinen Grund hat, dass wir von F ausgehend, die Covariante H durch Adjunction einer Quadratwurzel — $2\sqrt{-3}$ trat bei der Spaltung von H auf — in die zwei ganz äquivalenten Tetraëder h und t zerlegten, und in Folge dessen nur jene von den 24 Oktaëdersubstitutionen beim Tetraëder f betrachteten, welche f immer nur in f, und darum auch h immer nur in h überführten, also alle jene ausschlossen, welche f in h überführen und umgekehrt, so dass also die Adjunction der Quadratwurzel der analytische Grund ist, ein Umstand, der ja bekanntlich in der Theorie der Gleichungen bei der Reduction nach Galois immer auftritt.

Nun gibt das Gesagte, dass aus einem beliebigen Punkte der Kugel durch die Anwendung der 24 Oktaëder — resp. der 12 Tetraëdersubstitutionen — immer ein Complex von je 24, resp. 12 zusammengehörigen Punkten wird, und dass der Grad der Vielfachheit für die Punktgruppen F, H, T; f, h, t bezüglich folgender ist: 4, 3, 2; 3, 3, 2, d. h. F wird bei den 24 Oktaëdersubstitutionen 4fach aus einem seiner Punkte erzeugt etc. In Folge dessen kann jede solche Gruppe von je 24 zusammengehörigen Punkten, resp. 12 beim Tetraëder, durch $F^4 + \lambda H^3$, $H^3 + x T^2$, $F^4 + \mu T^2$, resp. durch $f^3 + \lambda h^3$, $f^3 + x' t^2$, $h^3 + \mu' t^2$ dargestellt werden, wenn nur die Constanten $\lambda \ldots \mu'$ in geeigneter Weise bestimmt werden. Wird nämlich z. B. λ so bestimmt, dass einer von den 24 Punkten einer derartigen Gruppe in $F^4 + \lambda H^3$ enthalten ist, so erhellt, dass wegen der Invarianz von $F^4 + \lambda H^3$ bei Substitutionen der Determinante $+1$ auch alle übrigen 23 Punkte nothwendiger Weise in $F^4 + \lambda H^3$ enthalten sind. Hieraus folgt, dass man, weil T^2, resp. t^2 auch zwei solche Complexe sind, folgende zwei Gleichungen aufstellen kann, welche für das Folgende sehr wichtig sind:

$$T^2 = x H^3 + \lambda F^4 \qquad \ldots 1)$$

$$t^2 = x' h^3 + \lambda' f^3, \qquad \ldots 2)$$

wenn nur die Constanten x, λ, x', λ' passend bestimmt werden. Um dies zu bewirken, vergleiche ich die Coëfficienten der Glieder von ξ_1^{24}, $\xi_1^{20}\,\xi_2^4$ in 1) und von ξ_1^{12}, $\xi_1^{10}\,\xi_2^2$ in 2) auf beiden Seiten, und erhalte so für 1) folgende zwei Gleichungen:

$$1 = x.1 + \lambda.0$$

$$-2.33 = x.33.14 + \lambda.1,$$

demnach ist $x = 1$, $\lambda = -108$ und die erste Gleichung lautet

$$T^2 = H^3 - 108\,F^4. \qquad \ldots \mathrm{I})$$

Ebenso ergibt sich für die zweite

$$t^2 = \frac{f^3 - h^3}{12\sqrt{-3}}. \qquad \ldots \mathrm{II})$$

Dass nun mit F, H und T z. B. das vollständige Formensystem von T erschöpft ist, d. h. jede andere noch mögliche Covariante ausser ihnen sich aus F, H und T rational und ganz zusammensetzt, liegt auf der Hand, indem jede Covariante ein Multiplum von 24 Punkten enthalten muss — mehrfach zählende Gruppen ausser F, H, T existiren nach dem Obigen nicht —, allein jeder solche Complex von 24 zusammengehörigen Punkten lässt sich in der Form z. B. schreiben $F^4 + x H^3 = P$, wenn nur x geeignet bestimmt ist, in Folge dessen ist jede Covariante beim Oktaëder einem Producte von Factoren äquivalent, welche wie P aus F und

H sich aufbauen etc. Ein Gleiches gilt offenbar auch vom Tetraëder f mit seinem Covariantensystem f, h und t. Bezüglich des Verhältnisses von f und h zu F bemerke ich hier nur, dass f und h als irrationale Covarianten des Oktaëders aufzufassen sind, und sich dann nothwendiger Weise aus dem Formensystem von F durch eine Gleichung, die leicht aufzustellen wäre, was ich aber übergehe, berechnen lassen. Da hiemit der Beweis für die Vollständigkeit des Formensystems erbracht ist, so übergehe ich nun zur analytischen Oktaëder-, resp. Tetraëdersubstitution.

§. 3. Analytischer Ausdruck sämmtlicher Oktaëder-, resp. Tetraëdersubstitutionen.

Ich will nun bei dem expliciten Ausdrucke der einzelnen Substitutionen zunächst die nicht homogene Form anwenden, und eine Bezeichnungsweise derselben einführen, welche die Axen der betreffenden Substitution ohne Weiteres erkennen lässt. Ich bezeichne nämlich mit

$$S_{0\infty},\ S^2_{0\infty},\ S_{+1-1},\ S_{+i-i}\dots$$

etc. diejenigen Substitutionen, resp. durch den Exponenten ihre Wiederholung, welche um die Axen (0∞), $(+1, -1)$ etc. drehen. $S_{\frac{0+1+i}{3}}$ ist dann eine Substitution um eine Axe, welche einen Endpunkt im Mittelpunkte des Dreieckes $(0, 1, i)$ hat, der andere ist Mittelpunkt des Dreieckes $(\infty, -1, -i)$, und also wie hienach selbstverständlich

$$S_{\frac{0+1+i}{3}} = S_{\frac{\infty-1-2}{3}}.$$

Hieraus ergibt sich auch sehr einfach, dass ich mit

$$S_{\frac{0+2}{3}} = S_{\frac{\infty-2}{2}}$$

diejenige Substitution der Periode 2 bezeichne, welche zu festen Punkten die Mittelpunkte der Kanten $(0, 1)$ resp. $(-1, \infty)$ hat.

Ist jetzt z. B.

$$\xi' = \frac{a\xi + b}{\xi + c}$$

eine derartige Substitution, welche aus dem Punkte ξ den Punkt ξ' macht, also a, b, c Constanten, so sind die festbleibenden Elemente derselben offenbar durch

$$\xi = \frac{a\xi + b}{\xi + c} \quad \text{oder} \quad \xi^2 + (c-a)\,\xi - b = 0, \qquad \dots A)$$

oder homogen geschrieben, durch

$$\xi_1^2 + (c-a)\,\xi_1\,\xi_2 - b\,\xi_2^2 = 0$$

gegeben.

Um jetzt die Substitutionen der Periode 4 zu berechnen, so hat man zunächst für die Substitution $S_{0\infty}$, weil diese einer Drehung durch $\frac{\pi}{2}$ um die Axe 0∞ äquivalent ist, offenbar

$$S_{0\infty} \equiv i\xi,\ S^2_{0\infty} = -\xi,\ S^3_{0\infty} \equiv -i\xi, \qquad \dots B)$$

d. h., wendet man die Substitution $S_{0\infty}$ auf den Punkt ξ an, so wird aus dem Repräsentanten desselben auf der Einheitskugel ein anderer Punkt, dem der Werth $i\xi$ zukommt, und durch wiederholte Anwendung dieser Substitution übergeht der betrachtete Punkt in die Punkte $i\xi$, $-\xi$, $-i\xi$, ξ, also in seine ursprüngliche Lage nach vierfacher Wiederholung. Um S_{+1-1} zu finden, hat man als Gleichung der festbleibenden Punkte

$$\xi^2 - 1 = 0,$$

und demnach ergibt sich durch Vergleichung von dieser Gleichung mit A) Folgendes:

$$b = 1 \qquad c - a = 0,$$

so dass die gesuchte Substitution statt $\frac{a\xi+b}{\xi+c}$ jetzt lautet:

$$\xi' = \frac{a\xi + 1}{\xi + a},$$

also a allein zu bestimmen ist. Um a zu finden, beachte man, dass durch die Substitution S_{+1-1} aus ∞ der Punkt $-i$ wird, also $\xi = \infty$, $\xi' = -i$ sich entsprechen, woraus $a = -i$ folgt, so dass sich ergibt:

$$S_{+1-1} = \frac{-i\xi + 1}{\xi - i}, \quad S^2_{+1-1} = \frac{1}{\xi} \quad S^3_{+1+1} = \frac{i\xi + 1}{\xi + i}, \qquad \ldots C')$$

denn setzt man in S_{+1-1} statt ξ den Werth von ξ' ein, d. h., bildet man S^2_{+1-1}, so ergibt sich $\frac{1}{\xi}$ etc. Ganz ähnlich findet man

$$S_{+i-i} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \quad S^2_{+i-i} = -\frac{1}{\xi}, \quad S^3_{i-i} = \frac{-\xi - 1}{\xi - 1}, \qquad \ldots D)$$

von deren Richtigkeit man sich auch z. B. durch Verification leicht überzeugen kann; denn aus ∞ wird durch S_{+i-i} offenbar $+1$, aus $+1$ wird 0, aus 0 entsteht -1, und aus -1 wird ∞, d. h. $\infty, +1, 0, -1$ vertauschen sich cyklisch, wobei $+i$ und $-i$ in sich selbst übergehen, also festbleiben u. s. w. Um die Substitutionen der Periode 2 zu erhalten, beachte man, dass durch $S_{\frac{0+1}{2}} = S_{\frac{\infty-1}{2}}$ aus ∞ wird -1, was $a = -1$ gibt; ferner übergeht -1 in ∞, d. h. $c = +1$ und aus 0 wird $+1$, d. h. $b = 1$, somit hat man für die fragliche Substitution und analog für die übrigen fünf Substitutionen der Periode 2 folgende Ausdrücke:

$$S_{\frac{0+1}{2}} = \frac{-\xi + 1}{\xi + 1}, \quad S_{\frac{0+i}{2}} = \frac{-i\xi - 1}{\xi + i} \qquad \ldots D')$$

$$S_{\frac{0-1}{2}} = \frac{\xi + 1}{\xi - 1}, \quad S_{\frac{0-i}{2}} = \frac{i\xi - 1}{\xi - i}$$

$$S_{\frac{1+1}{2}} = \frac{i}{\xi}, \quad S_{\frac{1-2}{2}} = -\frac{i}{\xi}.$$

Es erübrigen noch die acht Substitutionen der Periode 3; man könnte, um sie zu erhalten, etwa in folgender Weise vorgehen. Um z. B. $S_{\frac{0+1+i}{3}}$ zu finden, hat man nur zu beachten, dass durch diese Substitution die drei Punkte 0, 1, 2 sich cyklisch vertauschen, was drei zusammengehörigen Werthepaaren von ξ und ξ' äquivalent ist, z. B. $\xi = 0$, $\xi' = 1$ etc., wodurch für a, b, c drei lineare Gleichungen resultiren, aus denen sich also a, b, c selbst ergeben. Eine zweite Methode, welche mehr der Formentheorie sich anschliesst, ist folgende. Man bildet

$$\varphi = \xi_1 (\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - i\xi_2),$$

welche Form die drei Punkte 0, 1, i zu Wurzeln hat, dann stellt ihre Hess'sche Form, welche quadratisch ist, die beiden Pole des Kreises durch 0, 1, i dar, also die bei der behandelten Substitution festbleibenden zwei Punkte; sie lautet

$$\xi_1^2 + (1 + i)\,\xi_1 \xi_2 - i\xi_2$$

und gibt also mit A) verglichen zu den Gleichungen

$$b = i \quad c - a = 1 + i$$

Anlass, so dass die verlangte Substitution zunächst lautet:

$$\frac{a\xi + i}{\xi + a + 1 + i}$$

und wenn man beachtet, dass aus ∞ wird $-i$, so hat sofort $a=-i$, und es ist daher

$$S_{\frac{0+1+i}{3}} = i\frac{-\xi+1}{\xi+1}, \quad S^2_{\frac{0+1+i}{3}} = \frac{-\xi+i}{\xi+i}, \qquad \ldots E)$$

und selbstverständlich

$$S^3_{\frac{0+1+1}{3}} = \xi.$$

Bemerken will ich hier, dass man z. B. $S_{\frac{0+i}{2}}$ auch hätte in analoger Weise durch einen Covariantenprocess finden können, indem man die Punktpaare von F $(0, \infty)$ und $(+1, -1)$ betrachtet, die resp. durch

$$\varphi_1 = \xi_2^2 - \xi_2^2 \quad \text{und} \quad \psi_1 = 2\xi_1\xi_2$$

gegeben sind, und wobei φ_1 und ψ_1 die Discriminante $+1$ haben, was nothwendiger Weise statthaben muss, damit die Anwendung erlaubt ist, wie eine leichte Überlegung lehrt. Dann sind nämlich $\varphi_1+\psi_1$ und $\varphi_1-\psi_1$ Covarianten des Systems von φ_1 und ψ_1, also sogenannte simultane Covarianten, und man erkennt ohne Mühe, dass sie die Winkel zwischen den Geraden $\varphi_1 = F_2$ (§. 2), $\psi_1 = F_1$ (§. 2) halbiren, und in der That ist, wie in Fig. 2 ersichtlich ist, $\varphi_1-\psi_1$ diejenige Gerade, welche bei der Substitution $S_{\frac{0-1}{2}}$, und $\varphi_1+\psi_1$ diejenige, welche bei $S_{\frac{0+1}{2}}$ festbleibt. Hieraus würde sich der Werth von b und $c-a$ bei den letztgenannten zwei Substitutionen ergeben u. s. w. Ebenso könnte man natürlich auch die übrigen vier Substitutionen der Periode 2 ermitteln.

Dass übrigens $\varphi_1+\psi_1$ in $\varphi_1-\psi_1$ übergeht, wenn man um die Axe 0∞ durch π dreht, d. h. die Substitution $S^2_{0\infty} = -\xi$ (B) anwendet, erhellt sofort, denn dadurch wird aus

$$\varphi_1 + \psi_1 = \xi^2 - 1 + 2\xi$$

ohne Weiteres

$$\xi^2 - 1 - 2\xi = \varphi_1 - \psi_1$$

u. s. w.

Es gibt aber noch einen dritten Weg, um die Substitution H aus $S_{0\infty}$ und $S_{\frac{0-1}{2}}$ allein, oder alle 22 übrigen Oktaëdersubstitutionen zu berechnen, und dieser scheint mir der wichtigste aus dem Grunde zu sein, weil er die meiste Einsicht bietet in das gegenseitige Verhältniss und den Zusammenhang nicht blos aller Oktaëder-, sondern auch aller Tetraëdersubstitutionen und selbstverständlich fast wörtlich beim Ikosaëder auch angewendet werden kann, man könnte ihn als kinematischen kurz bezeichnen, wenn dieses Wort hier erlaubt ist.

Ich denke mir nämlich jedes der acht gleichseitigen Kugeldreiecke des Oktaëders — und entsprechend die vier des Tetraëders — in je sechs congruente und symmetrische Elementardreiecke zerlegt, deren Eckpunkte von den sämmtlichen Punkten H, F und T gebildet werden. Ein solches Dreieck, dessen Eckpunkte 1, i und ∞ sind, ist in Fig. 3 dargestellt, nur habe ich statt grösster Kreise der Kugel gerade Linien gezeichnet. Darin sind also A, B, C drei von den 12 T-Punkten, D aber ein H-Punkt; zugleich habe ich zu den Punkten immer diejenige Substitution hinzugesetzt, von der immer ein Fixpunkt mit ihm zusammenfällt, so dass also D die Substitution $S_{\frac{1+i+\infty}{3}}$ trägt, die man mittelst des Dreieckes EAD sehr einfach durch $S_{0\infty}$ und $S_{\frac{0-1}{2}}$ ausdrücken kann. Denn durch $S_{\frac{0-1}{2}}$ wird aus A wieder A, aus D aber D', wo D' rechts von EJ liegt und mit D symmetrisch liegt in Bezug auf EJ, also der Winkel $DED' = \frac{\pi}{2}$ ist; wendet man jetzt $S_{0\infty}$ an, so wird aus A jetzt C und aus D' wieder D, d. h. die Combination von $S_{\frac{0-1}{2}}$ und $S_{0\infty}$, wenn man die der ersteren beginnt, macht aus A den Punkt C, lässt aber D fest, und da ein Ähnliches von dem Gegendreieck von EAD gilt, so hat man

$$S_{\frac{1+1+\infty}{3}} = S_{\frac{-1-i+0}{3}} = S_{\frac{0-1}{2}}\; S_{0\infty} = \frac{i\xi+1}{\xi-1},$$

denn $S_{\frac{0-1}{2}}$ macht aus ξ nach D) $\frac{\xi+1}{\xi-1}$ und $S_{0\infty}$ hieraus $i\frac{\xi+1}{\xi-1}$, was behauptet wurde, und in der That überzeugt man sich sehr leicht, dass $S_{\frac{1+i+\infty}{3}}$ die drei Punkte ∞, i, 1 cyklisch permutirt. Um jetzt $S^2_{\frac{1+i+\infty}{3}}$ zu finden, kann man entweder die bereits gefundene Substitution mit sich selbst combiniren, oder auch in nachstehender Weise vorgehen. Da $S_{\frac{1+i+\infty}{3}}$ von der Periode 3 ist, so ist diejenige Substitution, welche die Wirkung von ihr aufhebt., $S^2_{\frac{1+i+\infty}{3}}$, und daher hat man

$$S^2_{\frac{1+i+\infty}{3}} = S^3_{0\infty}\, S_{\frac{0-1}{2}} = \frac{(-i\xi)+1}{(-i\xi)-1} = \frac{\xi+i}{\xi-i}.$$

Denn um $S_{\frac{0-1}{2}}\, S_{0\infty}$ aufzuheben, habe ich zuerst den Einfluss von $S_{0\infty}$ zu beseitigen, und dann den von $S_{\frac{0-1}{2}}$; dies geschieht resp. durch $S^3_{0\infty}$, weil $S_{0\infty}$ von der Periode 4 ist, und durch $S_{\frac{0-1}{2}}$, weil diese letzte Substitution die Periode 2 hat; man erhält dadurch dann aus ξ zunächst $-i\xi$ nach B), und hieraus auch D′) den oben gefundenen Werth. Es erhellt, wie ich so hätte weiter gehen können, denn aus den zwei Substitutionen der Eckpunkte E und A fand ich mit Hilfe des Dreieckes EAD diejenige Substitution, deren einer Fixpunkt D ist, und ich gelange, dieselbe Überlegung fortsetzend, mit Hilfe des Dreieckes ADJ zur Kenntniss der Substitution, welche in J einen Fixpunkt hat, u. s. w.; der weitere Gang liegt auf der Hand, und kann also übergangen werden.

Für die gesuchten Substitutionen H ergeben sich folgende Werthe:

$$\begin{aligned}
S_{\frac{1+i+\infty}{3}} &= S_{\frac{-1-i+0}{3}} = i\,\frac{\xi+1}{\xi-1}; & S^2_{\frac{1+i+\infty}{3}} &= \frac{\xi+i}{\xi-i}\\
S_{\frac{1+i+0}{3}} &= S_{\frac{-1-i+\infty}{3}} = i\,\frac{-\xi+1}{\xi+1}; & S^2_{\frac{1+i+0}{3}} &= \frac{-\xi+i}{\xi+i}\\
S_{\frac{1-i+\infty}{3}} &= S_{\frac{-1+i+0}{3}} = -i\,\frac{\xi+1}{\xi-1}; & S^2_{\frac{1-i+\infty}{3}} &= \frac{\xi-i}{\xi+i}\\
S_{\frac{1-i+0}{3}} &= S_{\frac{-1+i-\infty}{3}} = -i\,\frac{-\xi+1}{\xi+1}; & S^2_{\frac{1-i+0}{3}} &= \frac{-\xi-i}{\xi-i},
\end{aligned} \qquad \ldots \mathrm{F})$$

so dass also mit Hinzunahme der Identität, welche aus ξ wieder ξ macht, durch B), C), D), D′) und F) alle 24 Oktaëdersubstitutionen analytisch dargestellt sind.

Die bei den acht Substitutionen F festbleibenden Elemente sind z. B. bei $S_{\frac{1+i+\infty}{3}}$ gegeben durch

$$\xi = i\,\frac{\xi+1}{\xi-1} \quad \text{oder} \quad \xi^2-(1+i)\,\xi-i=0,$$

so dass sie in homogener Form geschrieben, lauten:

$$\begin{aligned}
\xi_1^2-(1+i)\,\xi_1\xi_2-i\xi_2^2&=0\\
\xi_1^2+(1+i)\,\xi_1\xi_2-i\xi_2^2&=0\\
\xi_1^2-(1-i)\,\xi_1\xi_2+i\xi_2^2&=0\\
\xi_1^2+(1-i)\,\xi_1\xi_2+i\xi_2^2&=0,
\end{aligned} \qquad \ldots \mathrm{G})$$

Man beachte, dass man diese auch auseinander erhalten kann mit Hilfe der Substitution $i\xi$, da sie ja in der That geometrisch bei Rotationen um die Axe 0∞ durch $\frac{\pi}{2}$ ineinander übergehen. Von der Richtigkeit der Rechnung kann man sich übrigens dadurch überzeugen, dass sämmtliche quadratische Formen von G) zum Product H geben müssen, was zutrifft, da man hiefür erhält:

$$(\xi_1^4-\xi_2^4-4i\xi_1^2\xi_2^2)(\xi_1^4-\xi_2^4+4i\xi_1^2\xi_2^2)$$
$$=\xi_1^8+\xi_2^8+14\xi_1^4\xi_2^4=H.$$

§. 4. Fortsetzung und homogene Schreibweise der Substitutionen.

Die zunächst sich darbietende Frage nach Aufstellung der Oktaëdersubstitutionen wäre die, ob und warum die gefundenen 24 Substitutionen eine Gruppe bilden, d. h. dass irgend zwei beliebige in beliebiger Reihenfolge combinirt, wieder zu einer der 24 Substitutionen führen. Ich will den Gang, den man hiebei einschlagen könnte, andeuten, ohne den berührten Nachweis, der dann keine Schwierigkeit in der vollständigen Ausführung mehr besitzt, in extenso zu führen. Man würde zu diesem Zwecke eine Substitution der Periode 4 und eine der Periode 2, z. B. $S_{0\infty}$ und $S_{0+\frac{1}{2}}$ nehmen können, und durch sie in der früher angegebenen Weise alle anderen 22 ausdrücken, wodurch die ganze Aufgabe, die noch zu leisten ist, darauf zurückgeführt ist, zu zeigen, dass es unter Beachtung von

$$S^2_{0-\frac{1}{2}}=S^4_{0\infty}=\xi$$

nur 24 von einander verschiedene Substitutionen gibt, was mit Rücksicht auf die zur Berechnung von $S_{1+\frac{i}{3}+\infty}$ angewandte Methode keine Schwierigkeit hat. Schreibt man statt

$$\xi'=\frac{a\xi+b}{c\xi+d}$$

in homogener Form

$$\xi_1'=a\xi_1+b\xi_2 \quad \xi_2'=c\xi_1+d\xi_2,$$

und bestimmt a, b, c, d so, dass die Substitutionsdeterminante $ad-bc$ den Werth $+1$ erhält, so erhält man, da Zähler und Nenner auch gleichzeitig negativ genommen werden kann, statt der obigen 24 Substitutionen folgende 48; es wird nämlich aus ξ_1 und ξ_2 resp., wobei der erste Werth sich auf ξ_1, der zweite auf ξ_2 bezieht:

$$\pm i^{\frac{1}{2}}\xi_1,\ \pm i^{-\frac{1}{2}}\xi_2\ \ldots 1)\qquad \pm i\xi_1,\ \pm i^{-1}\xi_1\ \ldots 2)\qquad \pm i^{\frac{3}{2}}\xi_1,\ \pm i^{-\frac{3}{2}}\xi_2\ \ldots 3)$$

$$\pm\frac{1}{\sqrt{-2}}(-i\xi_1+\xi_2),\quad \pm\frac{1}{\sqrt{-2}}(\xi_1-i\xi_2)\ \ldots 4)\qquad \pm\frac{\xi_2}{i},\ \pm\frac{\xi_1}{i}\ \ldots 5)$$

$$\pm\frac{1}{\sqrt{-2}}(i\xi+\xi_2),\quad \pm\frac{1}{\sqrt{-2}}(\xi_1+i\xi_2)\qquad \ldots 6)$$

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1-\xi_2),\quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1+\xi_2)\qquad \ldots 7)$$

$$\mp\xi_2,\ \pm\xi_1\ \ldots 8)\qquad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1+\xi_2),\quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(-\xi_1+\xi_2)\ \ldots 9)$$

$$\frac{\xi_1-\xi_2}{\pm\sqrt{-2}},\quad \frac{\xi_1+\xi_2}{\mp\sqrt{-2}}\ \ldots 10)\qquad \frac{i\xi_1+\xi_2}{\pm\sqrt{2}},\quad \frac{\xi_1+i\xi_2}{\pm\sqrt{2}}\ \ldots 11)$$

$$\frac{\xi_1+\xi_2}{\pm\sqrt{2}},\quad \frac{\xi_1-\xi_2}{\pm\sqrt{2}}\ \ldots 12)\qquad \frac{i\xi_1-\xi_2}{\pm\sqrt{2}},\quad \frac{\xi_1-i\xi_2}{\pm\sqrt{2}}\ \ldots 13)$$

$$\frac{i\xi_2}{\pm\sqrt{-i}},\quad \frac{\xi_1}{\pm\sqrt{-i}}\ \ldots 14)\qquad \frac{i\xi_2}{\pm\sqrt{i}},\quad \frac{-\xi_1}{\pm\sqrt{i}}\ \ldots 15)$$

$$\frac{i}{\pm\sqrt{-2i}}(\xi_1+\xi_2),\quad \frac{1}{\pm\sqrt{-2i}}(\xi_1-\xi_2)\qquad \ldots 16)$$

$$\frac{\xi_1+i\xi_2}{\pm\sqrt{+2i}},\quad \frac{\xi_1-i\xi_2}{\pm\sqrt{-2i}} \qquad \ldots 17)$$

$$\frac{-i}{\pm\sqrt{2i}}(\xi_1+\xi_2),\quad \frac{1}{\pm\sqrt{2i}}(\xi_1-\xi_2) \qquad \ldots 18)$$

$$\frac{1}{\pm\sqrt{2i}}(\xi_1-i\xi_2),\quad \frac{1}{\pm\sqrt{2i}}(\xi_1+i\xi_2) \qquad \ldots 19)$$

$$\frac{i}{\pm\sqrt{-2i}}(-\xi_1+\xi_2),\quad \frac{1}{\pm\sqrt{-2i}}(\xi_1+\xi_2) \qquad \ldots 20)$$

$$\frac{1}{\pm\sqrt{-2i}}(-\xi_1+i\xi_2),\quad \frac{1}{\mp\sqrt{-2}}(\xi_1+i\xi_2) \qquad \ldots 21)$$

$$\frac{-i}{\pm\sqrt{2i}}(-\xi+\xi_2),\quad \frac{1}{\pm\sqrt{2i}}(\xi_1+\xi_2) \qquad \ldots 22)$$

$$\frac{-1}{\pm\sqrt{2i}}(\xi_1+i\xi_2),\quad \frac{1}{\pm\sqrt{2i}}(\xi_1-i\xi_2) \qquad \ldots 23)$$

$$\pm\xi_1,\ \pm\xi_2, \qquad \ldots 24)$$

wobei die letzte sich auf die Identität bezieht. Ich habe dabei dieselbe Reihenfolge eingehalten, wie sie oben durch B), C), D), D′) und F) gegeben ist.

Um jetzt die Tetraëdersubstitutionen für f als Grundform zu erhalten, hat man aus der Tabelle nur folgende herauszufassen:

α) 2), 5) und 8), welche die t-Substitutionen des Tetraëders bilden, also die Periode 2 haben, indem die festbleibenden Elemente die Halbirungspunkte der Kanten sind, welche offenbar mit den Hauptaxen des Oktaëders zusammenfallen.

β) 16) bis 23), welche die acht Substitutionen der Periode 3 liefern, wobei immer zwei aufeinanderfolgende dieselbe Drehungsaxe haben.

γ) Die Identität 24, wodurch man in der That 12 nicht homogene, oder 24 homogene Tetraëdersubstitutionen erhält.

Hier würde wieder die Frage zuerst Erledigung fordern, welche bei der späteren Resolventenbildung von Wichtigkeit ist, nämlich: Gelingt es nicht dadurch, dass man einigen der homogen geschriebenen Substitutionen die Substitutionsdeterminate $+1$, anderen -1 gibt, die Gesammtzahl derselben beim Oktaëder unter 48, resp. beim Tetraëder unter 24 herabzudrücken? Diese Frage muss, wie ich zeigen werde, verneint werden. Zunächst bemerke ich, dass der Umstand, warum man andere Einheitswurzeln als ± 1 für die Substitutionsdeterminante verwirft, darin seinen Grund hat, dass z. B. bei $\alpha=\sqrt[3]{1}$ als Substitutionsdeterminante die Zahl der Substitutionen sich mit 6 multiplicirt, wie man sofort erhält. Um jedoch auch bei -1 die Nothwendigkeit der Verwerfung einzusehen, sowohl für das Oktaëder als Tetraëder, nehme man z. B. eine Substitution der Periode 3, also in nicht homogener Schreibweise etwa

$$\sigma'=\frac{\xi-i}{\xi+i},$$

oder homogen geschrieben

$$\frac{1}{\pm\sqrt{2i}}(\xi_1-i\xi_2)\quad \frac{1}{\pm\sqrt{2i}}(\xi_1+i\xi_2), \qquad \ldots\delta)$$

so erhält man hieraus eine Substitution σ der Periode 3 von der Substitutionsdeterminante -1 als gegeben durch

$$\frac{1}{\pm\sqrt{2i}}(\xi_1 - i\xi_2) \quad \frac{1}{\mp\sqrt{2i}}(\xi_1 + i\xi_2),$$

und es ist σ^2 nach einem bekannten Satze für die Multiplication von zwei Determinanten eine Substitution mit der Determinante $= (-1)^2 = +1$, und auch jede Wiederholung von σ^2, also z. B. σ^4 ist eine Substitution der Periode 3 und von der Substitutionsdeterminante $+1$, die mit δ) desshalb zusammenfallen muss, und $\sigma\sigma'$ ist eine Substitution der Determinante $+1$, die mit σ^2 auf gleiche Linie zu stellen ist, so dass wir also jetzt von σ ausgehend, folgende acht Substitutionen haben (wegen des doppelten Vorzeichens in Zähler und Nenner zählt nämlich jede doppelt): σ^1, σ'^2, σ, σ^2, während wir früher bei der Determinante $+1$ nur die vier σ, σ^2 hatten u. s. w., womit der Nachweis geliefert ist. Diese Überlegung gilt natürlich auch beim Ikosaëder.

Bezüglich der Zusammensetzung der Substitutionen will ich noch bemerken, dass man z. B. folgende Gleichungen hat:

$$S^2_{0\infty} S^2_{1-1} S^2_{i-i} = S^2_{1-1} S^2_{0\infty} S^2_{i-i} = \ldots \xi = \xi,$$

wobei nämlich die Reihenfolge der Combinationen für die einzelnen Substitutionen gleichgiltig ist u. s. w., wie sich geometrisch sehr einfach ergibt.

Ich übergehe nun zur Untersuchung des Verhaltens von F, H, T, f, h, t gegenüber sämmtlichen Substitutionen der Gruppen, wobei es z. B. selbstverständlich ist, dass aus $F(\xi_1, \xi_2) = 0$ durch irgend eine Substitution wieder $F(\xi_1, \xi_2) = 0$ nach der Substitution wird, aber es kann F vielleicht einen constanten Factor, etwa eine Einheitswurzel in Folge der Substitution erhalten haben, und in ähnlicher Weise können sich die anderen notirten Covarianten möglicher Weise verhalten, und diese Frage, welche bei der späteren Resolventenbildung wichtig ist, muss zunächst erledigt werden, da F z. B. sich ändern kann, um eine Einheitswurzel als Factor dagegen z. B. F^2 sich vollkommen identisch erhält.

§. 5. Verhalten der beiden Formensysteme gegenüber den homogenen Substitutionen der Determinante +1.

Ich notire zuvörderst die Zerfällung jeder Form in ihre quadratischen Factoren, welche auf der Kugel durch je ein Paar Gegenpunkte gebildet sind, und versehe dieselben mit solchen Factoren, dass die Discriminante derselben, welche bei

$$a\xi_1^2 + 2b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2$$

durch $b^2 - ac$ gegeben ist, den Werth $+1$ annimmt, was damit zusammenhängt, dass ich auch die Substitutionsdeterminante überall als vom Werthe $+1$ annahm, wodurch jetzt auch nach der Transformation der quadratischen Form die Discriminante derselben den Werth $+1$ beibehält. Bemerken will ich weiter, dass ich die quadratischen Factoren von H und T nicht durch Berechnung, sondern aus den Substitutionen D') und F) finde, indem ich ξ statt ξ' schreibe, um die festen Elemente zu finden, welche eben die gewünschten quadratischen Factoren sind; so hat man z. B. aus D') bei $S_{0+\frac{i}{2}}$

$$\xi = \frac{-i\xi - 1}{\xi + i} \quad \text{oder} \quad \xi^2 + 2i\xi + 1 = 0,$$

wofür ich nach Herstellung der Homogenität schreibe:

$$\chi_3^1 = \frac{1}{\sqrt{-2}}\left\{\xi_1^2 + 2i\xi_1\xi_2 + \xi_2^2\right\}$$

u. s. w., so dass man also hat:

$$2iF = 2\xi_1\xi_2(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\xi_1^2 + \xi^2)i = 2t = \psi_1'\psi_2'\psi_3',$$

wo demnach die ψ der Reihe nach die entsprechenden quadratischen Formen sind

$$\frac{4}{9}H = \frac{2}{\sqrt{6i}}\left\{\xi_1^2 - (1+i)\xi_2 - i\xi_2^2\right\} \cdot \frac{2}{\sqrt{-6i}}\left\{\xi_1^2 - (1-i)\xi_1\xi_2 + i\xi_2^2\right\}$$

$$\times \frac{2}{\sqrt{6i}}\left\{\xi_1^2 + (1+i)\xi_1\xi_2 - i\xi_2^2\right\} \cdot \frac{2}{\sqrt{-6i}}\left\{\xi_1^2 + (1-i)\xi_1\xi_2 + i\xi_2^2\right\}$$

$$\varphi_1'\varphi_2'\varphi_3'\varphi_4' = h.f$$

$$\frac{1}{4i}.T = \frac{1}{\sqrt{i}}(\xi_1^2 - i\xi_2^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{-i}}(\xi_1^2 + i\xi_2^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2)$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{-2}}(\xi_1^2 + 2i\xi_1\xi_2 + \xi_2^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{-2}}(\xi_1^2 - 2i\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)$$

$$= \chi_1' \cdot \chi_2' \cdot \chi_3' \cdot \chi_4' \cdot \chi_5' \cdot \chi_6' \cdot$$

Die Spaltung von h und f in lineare Factoren übergehe ich, weil sie später nicht angewendet wird, und übrigens die Aufstellung derselben keinerlei Schwierigkeiten hat.

Um nun den Einfluss sämmtlicher Substitutionen auf irgend eine der bezeichneten Formen, gleichgiltig, ob Grundform oder ein quadratischer Factor, leicht zu übersehen und langwierige Rechnungen zu vermeiden, erinnere man sich an Fig. 3 und die hieran geknüpfte Zusammensetzung sämmtlicher Substitutionen aus irgend zwei derselben, z. B. aus $S_{0\infty}$ und $S_{0-\frac{1}{2}}$. Wie wir nämlich in dem Dreieck EDA von den bekannten Substitutionen um die Punkte E und A — natürlich mit Hinzunahme ihrer Gegenpunkte — zur Substitution um D gelangten, so können wir fortfahrend etwa in dem Dreiecke ADJ zu der Substitution von J gelangen, dann zu B, K, C etc., woraus folgt, dass der Einfluss sämmtlicher Substitutionen aus dem von $S_{0\infty}$ und $S_{0+\frac{1}{2}}$ erkannt werden kann, demnach die constanten Factoren in Folge irgend einer Oktaëdersubstitution aus denen von $S_{0\infty}$ und $S_{0+\frac{1}{2}}$ gefolgert werden können. Sonach sind $S_{0\infty}$ und $S_{0+\frac{1}{2}}$ allein zu betrachten, und selbst $S_{0\infty}^2$ z. B. ist schon aus zu Tage liegendem Grunde ausser Acht zu lassen. Durch diese Betrachtung ist die Rechnung nun ungemein abgekürzt. Es ist aber die erste der beiden fraglichen Substitutionen durch

$$\pm i^{\frac{1}{2}}\xi_1, \quad \pm i^{-\frac{1}{2}}\xi_2$$

und die zweite durch

$$\frac{1}{\pm\sqrt{2}}(\xi_1 + \xi_2), \quad \frac{1}{\pm\sqrt{2}}(-\xi_1 + \xi_2)$$

gegeben, und wendet man die erste auf

$$F = \xi_1\xi_2(\xi_1^4 - \xi_2^4)$$

an, so ergibt sich als Resultat derselben bei beiden genannten Substitutionen $-F$, also der constante Factor ± 1, so dass also z. B. $S_{0\infty}$, $S_{0+\frac{1}{2}}$ auf F angewendet, $+F = -(-F)$ geben muss, also alle Oktaëdersubstitutionen entweder $+1$ oder -1 einführen, so dass man behaupten kann: „F^2 bleibt bei allen Oktaëdersubstitutionen völlig ungeändert."

Wesentlich verschieden verhält sich H, welches schon in der ersten Potenz sich nicht ändert, und darum ist z. B. auch H^3 so beschaffen, was nach meinem Erachten darin begründet ist, dass H eine Anzahl von quadratischen Factoren, welche eine Potenz von 2 ist, nämlich 2^2, enthält.

Untersucht man T, so findet sich, dass erst T^2 sich völlig identisch bei allen Substitutionen reproducirt, was ja von einem anderen Standpunkte aus wieder gefordert ist, nämlich durch die Covariantenrelation 1) des §. 2:

$$T^2 = H^3 - 108\,F^4,$$

deren rechte Seite ja nach dem über F und H Gesagten ungeändert bleibt.

Untersucht man die notirten quadratischen Formen, so erkennt man, dass sie sich bei einer Substitution entweder untereinander vertauschen bis auf hinzutretende Einheitswurzeln als Factoren, wobei -1 immer einer Umklappung, d. h. einer Drehung durch π, so dass sich das durch die quadratische Form gegebene Punktepaar in der neuen Lage wieder mit sich selbst deckt, entspricht etc.; überhaupt lässt sich geometrisch, wie ich im dritten Abschnitte durch ein Beispiel zeigen werde, wenn man die Rotationsaxe und die Lage einer beliebigen Form ins Auge fasst, sofort sowohl die Art der gegenseitigen Vertauschungen als der hinzutretende Factor unmittelbar angeben, wobei es eben wichtig ist, die Form an sich und nicht sofern als sie gleich Null gesetzt ist, zu betrachten. Das Resultat ist, wie man sich sehr leicht überzeugt, folgendes. Um statt der quadratischen obigen Formen, solche zu erhalten, welche in ihrer Totalität ungeändert bleiben und einzeln auch keine constanten Factoren erhalten, hat man statt $\varphi'_1 \ldots \psi'_1 \ldots \chi'_1$ zu gebrauchen:

$$\psi_1 = 4\xi_1^2\xi_2^2, \quad \psi_2 = (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2, \quad \psi_3 = -(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 \qquad \ldots \mathrm{I})$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{2}{3i}\left\{\xi_1 - (1+i)\,\xi_1\xi_2 - i\xi_2^2\right\}^2\\
\varphi_2 &= \frac{2}{-3i}\left\{\xi_1 - (1-i)\,\xi_1\xi_2 + i\xi_2^2\right\}^2\\
\varphi_3 &= \frac{2}{3i}\left\{\xi_1^2 + (1+i)\,\xi_1\xi_2 - i\xi_2^2\right\}^2\\
\varphi_4 &= \frac{2}{-3i}\left\{\xi_1^2 + (1-i)\,\xi_1\xi_2 + i\xi_2^2\right\}^2
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots \mathrm{II})$$

und für T:

$$\left.\begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{1}{i}\,(\xi_1^2 - i\xi_2^2)^2, \quad \chi_2 = \frac{1}{-i}\,(\xi_1^2 + i\xi_2^2)^2\\
\chi_3 &= \frac{1}{2}\,(\xi_1^2 - 2\,\xi_1\xi_2 - \xi_2^2)^2\\
\chi_4 &= \frac{1}{2}\,(\xi_1^2 + 2\,\xi_1\xi_2 - \xi_2^2)^2\\
\chi_5 &= \frac{1}{-2}\,(\xi_1^2 + 2i\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)\\
\chi_6 &= \frac{1}{-2}\,(\xi_1^2 - 2i\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)^2.
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots \mathrm{III})$$

Hieran würde sich die Aufgabe reihen, die eben aufgestellten Formen, welche in ihrer Totalität je drei Gruppen zusammengehöriger irrationaler Covarianten bilden, durch F, H und T darzustellen, d. h. als Wurzeln einer Gleichung aufzufassen, deren Coëfficienten ganz und rational in F, H und T sind; diese Aufgabe wird mich im dritten Abschnitte beschäftigen, und ich verlasse für einige Zeit die unmittelbar an das Vorhergehende sich anreihenden Schlüsse, um eine viel allgemeinere Gleichung, als die erwähnten aufzustellen und zu lösen, um dann den Faden wieder aufzunehmen.

Zweiter Abschnitt.

Die Oktaëdergleichung und ihre Lösungen.

§. 1. Aufstellung der Oktaëdergleichung und Charakterisirung derselben.

Im ersten Abschnitte habe ich die Gleichung aufgestellt:

$$H^3 - 108\,F^4 = T^2$$

und finde aus ihr:

$$\frac{H^3(\xi_1,\ \xi_2)}{108\,F^4(\xi_1,\ \xi_2)} = 1 + \frac{T^2(\xi,\ \xi)}{108\,F^4(\xi_1,\ \xi_2}.$$

Denkt man sich nun für F, H und T specielle Werthe gegeben, also etwa

$$F(\xi_1, \xi_2) = A, \quad B = H(\xi_1 \xi_2),\ T(\xi_1 \xi_2) = C,$$

wobei die Relation gilt:

$$C^2 = B^3 - 108 A^4,$$

so kann man sich die Aufgabe stellen, welches sind die Werthe von ξ_1, ξ_2, die den A, B, C entsprechen?

Die Beantwortung dieser Frage kommt offenbar auf die Lösung der Gleichung

$$\frac{H^3(\xi)}{108 F^4(\xi)} = X \qquad \ldots \mathrm{I})$$

zurück, worin

$$\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2} \quad \text{und} \quad X = \frac{B^3}{108 A^4}$$

ist. Denn, ist hieraus ξ berechnet, so erhält man aus der Gleichung

$$\xi_2^8 [\xi^8 + 14 \xi^4 + 1] - B$$

den Werth von ξ_2 und dann $\xi_1 = \xi \xi_2$ Die Gleichung I) nun, der man leicht eine andere analoge für das Tetraëder an die Seite stellen kann, heisst die Oktaëdergleichung, und zwar in der Normalform, weil das Oktaëder nach dem ersten Abschnitte in der gebrauchten Form die numerische Invariante $\frac{1}{3}$ hat. (Vergl. Klein, Math. Annalen, IX.) Die wesentliche Eigenschaft der Oktaëdergleichung besteht nach dem Früheren darin, dass alle 24 Wurzeln aus einer beliebigen derselben durch die 24 Oktaëdersubstitutionen hergeleitet werden können; denn ist ξ' z. B. eine solche, und man wendet auf I) die Oktaëdersubstitution $\frac{a\xi + b}{\xi + c}$ an, so bleibt H und F^2 ungeändert, und desshalb ist auch $\frac{a\xi' + b}{\xi' + c}$ eine von ξ' verschiedene Wurzel derselben u. s. w. Hiemit ist I) als eine sogenannte Abel'sche Gleichung charakterisirt, und lässt sich hierauf die eine algebraische Lösung derselben aufbauen, wie ich bald zeigen werde. In Bezug auf eine zweite Lösung, durch hypergeometrische Reihen, bemerke ich Folgendes, das auch für den letzten Abschnitt besonders wichtig ist. Nach Klein, Math. Annalen, IX. Bd. und Gordan, XII. Bd., gibt es nur drei Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen, welche 24 Substitutionen enthält. Die erste ist die oben aufgestellte Oktaëdergruppe, die zweite entspricht dem Kreistheilungstypus und ist durch

$$\xi,\ \alpha\xi,\ \alpha^2\xi,\ \alpha^3\xi \ldots \alpha^{23}\xi$$

gegeben, wobei

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12}$$

ist, und die dritte Gruppe ist durch die Substitutionen

$$\xi,\ \beta\xi,\ \beta^2\xi,\ \ldots \beta^{11}\xi,\ -\frac{1}{\xi},\ -\frac{\beta}{\xi},\ -\frac{\beta^2}{\xi} \ldots -\frac{\beta^{11}}{\xi}$$

dargestellt, worin

$$\beta = \cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}$$

ist, und diese trägt den Doppelpyramidentypus. Das Wesentliche der Oktaëdergruppe besteht daher in der Eigenschaft, keine Substitution zu besitzen, deren Periode grösser als 4 ist, und hieraus erfliesst der Satz:

„Wenn eine Grösse λ durch eine Gleichung vom Grade 24 dargestellt ist, die von den gegebenen Grössen A, B, C... so abhängt, dass sich jeder Werth von λ aus einem beliebigen der 24 Werthe durch die obigen 24 linearen Oktaëdersubstitutionen ergibt, so hängt bei geeigneter Wahl von λ, d. h. indem man λ eventuell durch einen geeigneten linearen Ausdruck

$$\frac{a'\lambda+b'}{c'\lambda+d'}$$

ersetzt, dasselbe von einer Oktaëdergleichung ab, welche in der Form geschrieben werden kann:

$$\frac{H^3(\lambda)}{108\,F^4(\lambda)} = \varphi\,(A,\ B,\ C\ \ldots).\text{“}$$

Zu dieser Form werde ich diesen Satz im letzten Abschnitte gebrauchen, um die allgemeine Gleichung vierten Grades mit der Oktaëdergleichung in Zusammenhang zu bringen und so zu lösen.

Völlig identisch mit der obigen Aufgabe ist die folgende, welche die Oktaëdergleichung auf dem Gebiete der simultanen Invarianten von

$$F(x_1,\ x_2),\ H(x_1,\ x_2) \ \text{ und } \ T(x_1,\ x_2)$$

mit der linearen Form

$$\xi_x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$$

entstehen lässt; es ist nämlich dann

$$A = (F,\ \xi_x^6)_6 = F(\xi_1,\ \xi_2)$$
$$B = (H,\ \xi_x^8)_8 = H(\xi_1,\ \xi_2)$$
$$(T,\ \xi_x^{12})_{12} = T(\xi_1,\ \xi_2) = C$$

in der Gordan'schen Bezeichnung (Gordan: Programm etc.) und A, B, C gegeben, ξ_1, ξ_2 aber zu finden.

Ich fügte diese formentheoretische Entstehung des Problems desshalb hinzu, weil es sich in dieser Fassung (vergl. Klein, Ikosaëder) erweitern lässt durch Adjunction einer quadratischen Form, welches Problem ich in einem späteren Aufsatze lösen werde.

§. 2. Galois'sche Gruppe und conforme Abbildung.

Da in Folge der 24 Oktaëdersubstitutionen alle Wurzeln der Gleichung I, §. 1 als lineare Functionen einer beliebigen dargestellt werden können, so besteht die Galois'sche Gruppe der Oktaëdergleichung aus den 24 Permutationen, welche sich ergeben, wenn man alle 24 Wurzeln durch eine derselben ausdrückt, und auf die so erhaltene Function alle 24 Substitutionen anwendet; dies hat zur Folge, dass es z. B. sechswerthige Functionen von ξ gibt, nämlich die im ersten Abschnitte gefundenen quadratischen Functionen $\chi_1 \cdots \chi_6$, welche einzeln vierfach zählen und in der That bei vier sehr einfach angebbaren Substitutionen ungeändert bleiben. Auf diesen Umstand komme ich im dritten Abschnitte wieder zurück.

Eine ganz deutliche Übersicht über die Vertheilung der Wurzeln der Oktaëdergleichung hat man durch die nachstehende Überlegung (Confer. Schwarz l. c.), welche die conforme Abbildung der X-Ebene auf die Kugel mit Hilfe der Oktaëdergleichung gibt. Um sich die Verknüpfung von ξ und X durch die Gleichung I) klar zu machen, denke man sich jeden Octanten der Kugel durch die Symmetrie-Ebenen in die schon erwähnten congruenten sechs Elementardreiecke zerlegt und dieselben abwechselnd straffirt, dann stossen in jedem T-Punkte immer je vier dieser Elementardreiecke zusammen etc., und man erhält auf der nördlichen Halbkugel beistehendes Bild der Fig. 4, wo man nur statt der Geraden immer grösste Kugelkreise zu denken hat. Gesetzt nämlich, man hätte eine Wurzel von I) gefunden, ξ', so soll dieser Punkt auf der Kugel 1 dem Werthe ξ' entsprechen, dann folgt, weil die Oktaëdersubstitutionen sich als Drehungen durch $\frac{\pi}{2}$, $2\frac{\pi}{3}$ und π interpretiren, dass auch den Punkten 2, 3... 12 Wurzeln der Gleichung I) entsprechen, und analog ist es auf der südlichen Halbkugel, woraus man ersieht, dass die sämmtlichen 24 Wurzeln sich entweder gleichzeitig auf lauter straffirte oder nicht straffirte Dreiecke vertheilen. Wir werden sehen, wann das Eine oder Andere statthat; es wird sich nämlich ergeben, dass sie sämmtlich bei geeigneter Festsetzung auf den 24 straffirten Dreiecken liegen, wenn $X = x+yi$ auf der positiven Halbebene des X liegt, also y positiv ist, sonst auf den nicht straffirten Dreiecken. Für $y = 0$ liegt also gewiss eine und darum alle 24 Wurzeln auf den gemeinsamen Seiten der verschieden bezeichneten Dreiecke, und nach Späterem, wenn gleichzeitig $1 < x < +\infty$ ist, so sind gleichzeitig acht und nur acht Wurzeln reell, also z. B. a, b, c und d der oberen Halbkugel in Fig. 4. Hieraus lässt sich weiter folgern, dass, wenn zwei Wurzeln gleich sind, im Ganzen 12 Paare von je zwei gleichen Wurzeln existiren, und dass dieses nur der Fall ist für $X = 1$ u. s. w., sowie dass die Oktaëdergleichung keine Wurzeln von einer höheren Multiplicität hat, als vier etc.

Der Grund, warum nur zwei Gruppen von je 12 Dreiecken bei der Tetraëdergleichung

$$\frac{h^3 \xi}{f^3(\xi)} = X$$

oder 24, resp. 60 beim Ikosaëder auftreten, ist der, dass die X-Ebene durch die Gerade $y = 0$ in nur zwei Dreiecke zerfällt wird, deren gemeinsame Endpunkte für I) bezüglich 0, ∞, 1 sind, nämlich die positive und negative Halbebene des X, das im Allgemeinen natürlich als complex zu denken ist. Nach Gauss genügt aber die hypergeometrische Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma.(\gamma+1)} x^2 + \ldots$$

als particuläres Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2\eta}{dX} + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)X}{X(1-X)} \frac{d\eta}{dX} - \frac{\alpha . \beta}{X(1-X)} \eta = 0 \qquad \ldots \text{II)}$$

und diese letztere besitzt in den Punkten 0, 1, ∞ Singularitäten, wie sich sehr einfach ergibt. Sind weiter η_1, η_2 die beiden particulären Integrale von II), und man bildet, da auch $a\eta_1 + b\eta_2$, $c\eta_1 + d\eta_2$, wobei a, b, c, d ganz beliebige Constanten sind, particuläre Integrale von II) sind, für $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ oder gleich allgemein für

$$\frac{a\frac{\eta_1}{\eta_2} + b}{c\frac{\eta_1}{\eta_2} + d}$$

die Differentialgleichung dritter Ordnung, welche den letztgenannten Bruch als allgemeines Integral hat, so ist $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ nach Schwarz l. c. eine solche Function von X, welche die positive X-Halbebene conform abbildet, mit Ausnahme der berührten drei singulären Punkte 1, 0, ∞, in welchen Knickungen stattfinden, indem statt der drei Winkel π in der Abbildung folgende auftreten:

$$(1-\gamma)\pi, \ (\alpha-\beta)\pi, \ (\gamma-\alpha-\beta)\pi, \qquad \ldots \text{III)}$$

so dass also die positive X-Halbebene auf ein Dreieck von den Winkeln III) auf der Kugel abgebildet wird. Spiegelt man mit Schwarz dieses Dreieck gegen irgend eine Seite, so ergibt sich ein anderes Dreieck, welches die negative X-Halbebene abbildet etc., und damit der Spiegelungsprocess sich schliesse, also die durch Spiegelung gefundenen Kugeldreiecke sich lückenlos aneinander reihen und die Kugel nur einfach überdecken, ist nur erforderlich und ausreichend, dass sie mit den erwähnten Elementardreiecken der regelmässigen Körper zusammenfallen, so dass wir zu der Behauptung gelangen, welche unmittelbar die zweite Lösung der Oktaëdergleichung bieten wird:

„Bestimmt man α, β, γ so, dass die Winkel III) mit denen der Elementardreiecke übereinstimmen, so ist die Oktaëdergleichung durch den Quotienten $\frac{\eta_1(X)}{\eta_2(X)}$ von zwei passend gewählten Integralen von II) gelöst, und also

$$\xi = \frac{\eta_1(X)}{\eta_2(X)}$$

die Umkehrung von I)."

Ich komme auf diese Lösung nach Auseinandersetzung der algebraischen, auf welche ich jetzt übergehe, zurück.

§. 3. Algebraische Lösung der Oktaëdergleichung.

Ich will nun zunächst den Einfluss sämmtlicher Oktaëdersubstitutionen auf f und h angeben, und transformire darum diese beiden Formen mit Hilfe der beiden Substitutionen von der Periode 4, resp. 2, nämlich

$$S_{0\infty} = i\xi \quad \text{und} \quad S_{0\frac{-1}{2}} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1},$$

oder homogen geschrieben

$$\pm i^{\frac{1}{2}}\xi_1, \quad i^{-\frac{1}{2}}\xi_2; \quad \text{und} \quad \frac{1}{\pm\sqrt{-2}}(\xi_1 - \xi_2), \quad \frac{1}{\pm\sqrt{-2}}(\xi_1 + \xi_2),$$

dann erhält man folgendes Resultat durch Ausführung dieser Substitutionen:

„Durch die Substitution $S_{0\infty}$ übergehen f und h resp. in $-h$ und $-f$, und durch die Substitution $S_{0\frac{-1}{2}}$ übergehen f und h resp. in $-\alpha h$ und $-\alpha^2 f$, wo $\alpha = \sqrt[3]{1}$ ist."

Hieraus folgt nämlich weiter: Die sämmtlichen Werthe, welche f und h bei allen Oktaëdersubstitutionen annehmen können, sind folgende:

$$\pm f, \ \pm h; \ \pm\alpha f, \ \pm\alpha^2 h; \ \pm\alpha^2 f, \ \pm\alpha h,$$

wobei immer je zwei aufeinanderfolgende, also z. B. $\alpha^2 f$ und αh zusammengehören, so dass also $f.h$ bei allen Oktaëdersubstitutionen in sich selbst übergeht, dagegen von f und h erst f^6 und h^6, welche sich aber noch gegenseitig vertauschen können, was ohne Belang ist, da sie sich ja nur durch $\pm 2\sqrt{-3}$ von einander unterscheiden und darum in gewissem Sinne als ganz coordinirt aufzufassen sind. Das erste Resultat, die Invarianz von fh ist eigentlich von früher her schon bekannt, da ja H als invariant nachgewiesen wurde, und H das Product von f und h ist; das zweite Resultat der Invarianz des Systems f^6, h^6 jedoch ist hier zuerst gefunden und führt direct zur Auflösung der Oktaëdergleichung. Da nämlich die Oktaëdergleichung bei allen Oktaëdersubstitutionen in sich übergeht, so muss sie sich durch die drei Functionen fh, f^6, h^6, und zwar in Bezug auf die beiden letzten, weil diese ja ineinander übergehen, symmetrisch ausdrücken lassen, was in der That zutrifft, denn an Stelle von

$$\frac{H^3(\xi)}{108\,F^4(\xi)}\,X \qquad \ldots \text{I})$$

erhält man, wenn man die früher aufgestellten Gleichungen

$$H = f.h \quad F^2 = t^2 = \frac{f^3 - h^3}{12\sqrt{-3}} \quad \text{(I. Absch., §. 2)}$$

berücksichtigt, folgende, welche die verlangte Eigenschaft hat:

$$\frac{-4f^3h^3}{(f^3 - h^3)^2} = X,$$

oder

$$f^6 - \left(2 - \frac{4}{X}\right)f^3h^3 + h^6 = 0, \qquad \ldots \text{I}')$$

und an Stelle dieser Gleichung kann man jetzt nach einer kleinen Rechnung folgendes System von zwei Gleichungen setzen:

$$\frac{f^3(\xi)}{h^3(\xi)} = \frac{X - 2 + 2\sqrt{1 - X}}{X} \qquad \ldots \text{I}^a)$$

$$\frac{h^3(\xi)}{f^3(\xi)} = \frac{X - 2 + 2\sqrt{1 - X}}{X}, \qquad \ldots \text{I}'^a)$$

was zu erwarten war, wenn man das obige Ergebniss beachtet, wonach $\frac{f^3}{h^3}$ eine zweiwerthige Function ist, indem sie bei allen Oktaëdersubstitutionen entweder unverändert bleibt oder in $\frac{h^3}{f^3}$ übergeht, woraus folgt, dass die Oktaëdergleichung eben durch eine quadratische Hilfsgleichung in die zwei Tetraëdergleichungen Ia) und $\mathrm{I}^{a'}$) zerfällt werden kann, deren Lösung jetzt keine Schwierigkeit mehr hat, indem an ihre Stelle das System der sechs Gleichungen tritt:

$$\frac{\xi^4 \pm 2\sqrt{-3}\,\xi^2+1}{\xi^4 \mp 2\sqrt{-3}\,\xi^2+1} = \alpha^\nu \sqrt[3]{\frac{X-2+2\sqrt{1-X}}{X}}, \qquad \ldots \mathrm{I}^b)$$

wo immer die beiden oberen und beiden unteren Vorzeichen der linken Seite zusammengehören, und für ν die Werthe 0, 1, 2 einzusetzen sind, α aber eine dritte Einheitswurzel ist, wie schon früher. Auch dieses Resultat, das System der sechs Gleichungen I^b) an Stelle der Oktaëdergleichung, liess sich unmittelbar als nothwendig erkennen, wenn man bei der nothwendigen Homogenität von I) in Bezug auf f und h beachtet, dass der Quotient $\frac{f(\xi)}{h(\xi)}$ nach dem Obigen eine sechswerthige Function ist, nämlich folgende sechs Werthe annehmen kann:

$$\frac{f}{h},\ \alpha\frac{f}{h},\ \alpha^2\frac{f}{h},\ \frac{h}{f},\ \alpha\frac{h}{f},\ \alpha^2\frac{h}{f},$$

woraus sich z. B. ergibt, dass I) in Bezug auf h und f symmetrisch ist u. s. w. Die Auflösung des Systems I^b) durch Benützung zweier quadratischer Gleichungen, und damit die Ermittelung der 24 Wurzeln ξ auf algebraischem Wege hat gar keine Schwierigkeit mehr und wird desshalb übergangen. Obgleich hiedurch die Nothwendigkeit der algebraischen Lösung schon vollkommen klar zu Tage tritt, so halte ich es dennoch nicht für überflüssig, auch noch von einem anderen Gesichtspunkte aus sich dieselbe klar zu machen, indem ich die Galois'sche Theorie herbeiziehe, und dadurch einmal den ersten Abschnitt in Bezug auf den Nachweis ergänze, dass irgend zwei Oktaëdersubstitutionen zusammengesetzt, wieder eine der 24 Substitutionen liefern, also eine Gruppe bilden, was ich dort nur andeutete, wodurch die Natur des Oktaëders, oder besser gesagt, der Oktaëdersubstitutionen, ganz durchsichtig wird, und ich andererseits im letzten Abschnitte leicht die Gleichung vierten Grades und ihre Gruppe von Substitutionen ganz analog behandeln kann.

§. 4. Aufbau der Oktaëdergruppe aus einfacheren Gruppen.

Der Übergang von der Oktaëdergruppe zur Tetraëdergruppe wurde schon im §. 2 des ersten Abschnittes als bedingt durch die Adjunction einer Quadratwurzel nachgewiesen, indem geometrisch genommen, um die drei Hauptaxen des Oktaëders, wenn die Drehungen zur Tetraëdergruppe gehören sollten, nur Drehungswinkel durch π zugelassen werden, bei der Oktaëdergruppe aber auch solche durch $\frac{\pi}{2}$, welcher Übergang von π zu $\frac{\pi}{2}$ aber die Lösung einer quadratischen Gleichung erfordert, also die Adjunction einer Quadratwurzel. Ich will nun die Oktaëdergruppe aus einfacheren durch Multiplication auf einer Seite herleiten, wodurch der Nachweis der so erhaltenen Oktaëdergruppe als Gruppe erwiesen ist (Confer. Petersen, Algebr. Gleichung, p. 273). Ich gehe dabei von den beiden Gruppen aus:

$$\xi,\ -\xi; \ \text{ und } \ \xi,\ \frac{1}{\xi},$$

dann geben diese, weil sie nur die Identität ξ gemeinsam haben, durch Multiplication die Gruppe, welche aus vier Substitutionen vom Doppelpyramidentypus besteht (§. 1):

$$\xi,\ -\xi,\ \frac{1}{\xi},\ -\frac{1}{\xi}, \qquad \ldots \mathrm{A})$$

k*

und deren Axen die erwähnten drei Hauptaxen des Oktaëders sind. Zu dieser Gruppe A) nehme ich die Gruppe

$$\xi,\quad i\frac{\xi+1}{\xi-1},\quad \frac{\xi+i}{\xi-i} \qquad \ldots B)$$

welche also die Periode 3 hat und eine der H-Substitutionen ist. Multiplicire ich B) rechts mit A), so erhalte ich ausser A) und B) noch folgende sechs Substitutionen C):

$$-i\frac{\xi+1}{\xi-1},\quad \frac{\xi-i}{\xi+i},\quad \frac{-\xi-i}{\xi+i},\quad -i\frac{\xi-1}{\xi+1},\quad \frac{-\xi+i}{\xi-i},\quad i\frac{\xi-1}{\xi+1}, \qquad \ldots C)$$

welche mit B) zusammengenommen alle H-Substitutionen vom ersten Abschnitt geben. Nimmt man nun noch die Gruppe der Periode 4:

$$\xi,\quad i\xi,\quad -\xi,\quad -i\xi, \qquad \ldots D)$$

welche um die Axe $(0, \infty)$ dreht, und an deren Stelle man eine auch z. B. um $(+1, -1)$ hätte nehmen können, so hat D) mit der Gruppe von 12 Substitutionen, der Tetraëdergruppe A), B), C) die beiden Substitutionen ξ und $-\xi$ gemeinsam, und wenn man daher die Tetraëdergruppe mit der Gruppe D) rechts multiplicirt, so erhält man nur $\frac{12.4}{1.2}$ von einander verschiedene Substitutionen, welche, wie man sich durch die kurze Ausführung überzeugt, in der That mit der früher gefundenen Oktaëdergruppe zusammenfällt, und hiedurch ist also die letztere aus den bezeichneten einfachen Gruppen aufgebaut und als Gruppe nachgewiesen.

Von diesem Standpunkte aus ist es nun selbstverständlich, dass die algebraische Lösung der Oktaëdergleichung gelingen musste, denn da die Oktaëdergruppe jetzt eine Untergruppe von 12 Substitutionen, also der Hälfte der sämmtlichen Substitutionen enthält, so muss die Reduction der Oktaëdergleichung mit Hilfe einer quadratischen Hilfsgleichung auf zwei andere

$$(\xi_1,\ \xi_2,\ \pm\sqrt{A}) = 0 \qquad \ldots 1)$$

möglich sein, worin A rational aus X gebildet ist; es sind dies die Gleichungen $I^{a})$ und $I^{a'})$ des vorhergehenden Paragraphen. Die Tetraëdergruppe selbst ist aber wieder aus B) und A) zusammengesetzt, und enthält desshalb die Gruppe A) als Untergruppe mit nur dem dritten Theile sämmtlicher Substitutionen, und desshalb kann 1) mittelst einer Hilfsgleichung dritten Grades, welche hier aus einem naheliegenden Grunde eine reine sein muss, auf die sechs Gleichungen $I^{b})$ des vorigen Paragraphen reducirt werden, welche nur noch die Gruppe A) haben. Da jedoch auch diese noch die Untergruppe ξ, $-\xi$ enthält, so kann das System $I^{b})$ noch weiter durch Hinzunahme einer quadratischen Hilfsgleichung auf das System von 12 reinen quadratischen Gleichungen mit der Gruppe $+\xi$, $-\xi$ reducirt werden, welche schliesslich die 24 Wurzeln ξ geben. Fassen wir Alles zusammen, so können wir sagen: „Von den 24 Drehungen, welche das Oktaëder in sich überführen, schlossen wir bei der Lösung der Oktaëdergleichung successive aus: 1. Die Drehungen durch $\frac{\pi}{2}$ um irgend eine der drei F-Axen — und damit um alle drei —, dadurch erübrigten nur mehr die Tetraëderdrehungen, von denen wir 2. irgend eine der Drehungen durch $\frac{2\pi}{3}$ und damit gleich alle ausschlossen; in Folge dessen waren nur noch die drei Drehungen durch π, entsprechend den t-Substitutionen des Tetraëders gestattet, von welchen wir wieder 3. zwei ausschlossen, so dass nur mehr die Drehung durch π um die Axe $(0, \infty)$ übrig blieb, also lauter reine quadratische Gleichungen. Damit ist die Lösung auch von diesem Standpunkte begreiflich gemacht und als möglich nachgewiesen.

Im vierten Abschnitte werde ich die Deutung der Substitutionen in Bezug auf die Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 der allgemeinen Gleichung vierten Grades geben, und zwar in einem sehr einfachen und schönen Resultate.

Dass die soeben gegebene Analyse auch eine Darstellung der Lösung der Oktaëdergleichung nach dem Verfahren von Abel (Confer. Abel, Oeuvres complètes par Holmboe, p. 114) geliefert hatte, liegt auf der

Hand und soll desshalb übergangen werden; dagegen will ich auf den wesentlichen Unterschied zwischen Oktaëder und Ikosaëder hinweisen, der sich in der völlig verschiedenen Beschaffenheit der zugehörigen Gruppen äussert, und dessen geometrische Erfassung direct zum bekannten Abel'schen Satze über die Unmöglichkeit einer algebraischen Lösung bei Gleichungen vom fünften und höheren Grade hinleitet; man vergleiche in dieser Beziehung die modificirte Galois'sche Beweisart dieses Satzes, wie sie Petersen, p. 114—117 u. 314—316 gibt, und erkennt ohne Mühe dort nur die abstracte Fassung der Theorie für die Gleichung fünften und vierten Grades, deren geometrisches Bild, wie ich in Bezug auf die Gleichung vierten Grades im letzten Abschnitte zeigen werde, geradezu das Oktaëder ist, ebenso wie nach Klein's Arbeit das Ikosaëder mit der Gleichung fünften Grades sich völlig deckt.

§. 5. Lösung der Oktaëdergleichung durch hypergeometrische Reihen.

In §. 2 dieses Abschnittes habe ich bereits gesagt, dass die Oktaëdergleichung durch den Quotienten von zwei passend gewählten Integralen der Differentialgleichung II) desselben Paragraphen gelöst wird, und will diese Lösung nunmehr völlig entwickeln, indem ich mir jetzt die Aufgabe stelle, diejenige Wurzel ξ der Oktaëdergleichung I), §. 1, zu finden, welche die positive Halbebene X auf das Kugeldreieck EAD der Fig. 3 abbildet, aus welcher Wurzel sich dann durch die Oktaëdersubstitutionen alle übrigen sehr einfach ergeben. Da dann die Winkel des genannten Elementardreieckes $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ sind, so hat man nach §. 2 folgende drei Gleichungen zur Bestimmung von α, β, γ:

$$1-\gamma=\frac{1}{3} \quad \alpha-\beta=\frac{1}{4} \quad \gamma-\alpha-\beta=\frac{1}{2},$$

und hieraus folgt

$$\alpha=\frac{5}{24}, \quad \beta=-\frac{1}{24}, \quad \gamma=\frac{2}{3}$$

und erhält, da nach einem bekannten Aufsatze von Kummer im 15. Bande von Crelle's Journal die Differentialgleichung II) des §. 2 unter anderen auch folgende sechs Integrale hat:

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ X), \quad X^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ X) \qquad \ldots A)$$

$$F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta-\gamma+1,\ 1-X), \quad (1-X)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-X) \qquad \ldots B)$$

$$X^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{X}\right), \quad X^{-\beta}F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{X}\right), \qquad \ldots C)$$

welche sich resp. auf den Punkt 0, 1 und ∞ beziehen, für welch' letztere man noch hat:

$$\left.\begin{aligned}&(1-X)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{1-X}\right)\\ &(1-X)^{-\beta}F\left(\beta,\ \gamma-\alpha,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{1-X}\right),\end{aligned}\right\} \qquad \ldots C')$$

im vorliegenden Falle folgende vier Paare zusammengehöriger Integrale:

$$F\left(\frac{5}{24},\ -\frac{1}{24},\ \frac{2}{3},\ X\right), \quad X^{\frac{1}{3}}F\left(\frac{13}{24},\ \frac{7}{24},\ \frac{4}{3},\ X\right) \qquad \ldots A)$$

$$F\left(\frac{5}{24},-\frac{1}{24},\ \frac{1}{2},\ 1-X\right), \quad (1-X)^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{17}{24},\ \frac{11}{24},\ \frac{3}{2},\ 1-X\right) \qquad \ldots B)$$

$$X^{-\frac{5}{24}}F\left(\frac{5}{24},\ \frac{13}{24},\ \frac{5}{4},\ \frac{1}{X}\right), \quad X^{\frac{1}{24}}F\left(-\frac{1}{24},\ \frac{7}{24},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{X}\right) \qquad \ldots C)$$

$$(1-X)^{-\frac{5}{24}}F\left(\frac{5}{24},\ \frac{17}{24},\ \frac{5}{4},\ \frac{1}{1-X}\right), \quad (1-X)^{\frac{1}{24}}F\left(-\frac{1}{24},\ \frac{11}{24},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{1-X}\right), \qquad \ldots C')$$

wo man natürlich jedes der notirten acht particulären Integrale noch mit einer beliebigen Constanten multipliciren kann.

Nun beachte man, dass dem Punkte E in Fig. 3 als einem F-Punkte der Werth $X = \infty$, dem Punkte A als einem T-Punkte der Werth $X = 1$, und dem Punkte D als H-Punkt der Werth $X = 0$ zukommt, sowie dass der Punkt A und D resp. die Substitution

$$\frac{\xi+1}{\xi-1}, \quad \frac{\xi+i}{\xi-i}$$

trägt, und man daher die zu $X = 1$, resp. $X = 0$ gehörigen Werthe von ξ aus den Gleichungen findet:

$$\xi^2 - 2\xi - 1 = 0, \quad \xi^2 - (1+i)\,\xi - i = 0.$$

Hieraus folgt

$$\xi = 1 \pm \sqrt{2}, \quad \xi = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \, \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2} = e^{\frac{\pi i}{4}} \, \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2},$$

und eine ganz einfache Überlegung ergibt, dass man, weil A und D oberhalb des Äquators liegen, nur die oberen Vorzeichen zu berücksichtigen hat, indem die unteren den zugehörigen Gegenpunkten auf der Kugel entsprechen; damit also ξ die X-Ebene auf das Elementardreieck EAD abbilde, hat man folgende zwei Paare zusammengehöriger X- und ξ-Werthe:

$$\begin{aligned} X &= 1 \quad \xi = 1 + \sqrt{2} = 2{\cdot}41421\ldots \\ X &= 0 \quad \xi = e^{\frac{\pi i}{4}} \, \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} = e^{\frac{\pi i}{4}} \, 1{\cdot}93185, \end{aligned} \qquad \ldots D)$$

und daher ergeben sich nach §. 2 dieses Abschnittes folgende zwei Gleichungen als Umkehrung oder Lösung der Oktaëdergleichung:

$$\xi = C \, \frac{X^{\frac{1}{24}} F\left(-\frac{1}{24}, \frac{7}{24}, \frac{3}{4}, \frac{1}{X}\right)}{X^{-\frac{5}{24}} F\left(\frac{5}{24}, \frac{13}{24}, \frac{5}{4}, \frac{1}{X}\right)} \qquad \ldots E)$$

$$\xi = C \, \frac{\varepsilon (1-X)^{\frac{1}{24}} F\left(-\frac{1}{24}, \frac{11}{24}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1-X}\right)}{\varepsilon^{-5} (1-X)^{-\frac{5}{24}} F\left(\frac{5}{24}, \frac{17}{24}, \frac{5}{4}, \frac{1}{1-X}\right)}, \qquad \ldots F)$$

worin $\varepsilon = e^{\frac{\pi i}{12}}$ ist, und die Constante C noch so zu bestimmen ist, dass das System der zwei Werthepaare von X und ξ, wie es durch D) gegeben ist, wirklich zusammengehört. In Folge dessen erhält man aus E) und F) unter Beachtung von D) und der Gleichung

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}$$

folgende zwei Gleichungen für C:

$$C = (1+\sqrt{2}) \, \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{11}{24}\right) \Gamma\left(\frac{19}{24}\right)}{\Gamma\left(\frac{25}{24}\right) \Gamma\left(\frac{17}{24}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$\frac{C = \sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \, \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7}{24}\right) \Gamma\left(\frac{19}{24}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{25}{24}\right) \Gamma\left(\frac{13}{24}\right)},$$

welche, wenn man z. B. die Tafel von Legendre's Traité des fonctions elliptiques, Tom. II, p. 490, benützt, in der That für C in beiden Fällen denselben Werth liefern, wenn man noch Gebrauch macht von der Formel

$$\Gamma(1-\lambda)=\frac{\lambda\pi}{\sin\lambda\pi}\,\frac{1}{\Gamma(1+\lambda)}\quad 0<\lambda<',$$

denn dann findet man

$$C=3\cdot 22378\ldots, \qquad \ldots \mathrm{H})$$

welchen Werth man in E) und F) noch einzuführen hat, um dadurch für den grösseren Theil der positiven X-Ebene die Oktaëdergleichung durch E), F) und H) gelöst zu haben.

Ist nämlich im Allgemeinen

$$X=x+yi,$$

und wird X in der X-Ebene als ein Punkt mit den rechtwinkeligen Coordinaten (x, y) interpretirt, so convergiren nach bekannten Regeln (man vergleiche hiezu z. B. Gauss' Originalabhandlung über die hypergeometrische Reihe), die beiden hypergeometrischen Reihen, welche in E) vorkommen, für jedes X, welches auf der Peripherie eines Kreises vom Radius 1 und dem Centrum in $(x=0,\ y=0)$ liegt und ausserhalb desselben, also in jenem Raum, welcher in Fig. 5 straffirt ist. Ebenso convergiren die beiden hypergeometrischen Reihen in F) für jedes X, welches auf oder ausserhalb eines Kreises vom Radius 1 und dem Centrum in $x=1,\ y=0$ liegt, also in dem straffirten Theile der Fig. 6. Überhaupt bemerke ich, dass Zähler und Nenner von F) mit dem Zähler und Nenner von E) übereinstimmen, bis auf den Convergenzbereich, und also nur als eine andere Schreibweise aufzufassen sind, so dass sie also für einen Punkt X, welcher in dem gemeinsamen Convergenzbereiche liegt, denselben Werth für ξ liefern müssen, aus leicht angebbaren Gründen. Es ist fast selbstverständlich, dass die 24ten Wurzeln so zu wählen sind, dass ξ immer eine Amplitude gleich oder kleiner als $\frac{\pi}{4}$ hat, damit der Punkt ξ eben in dem Dreiecke AED, Fig. 3, liegt.

Aus dem Gesagten ergibt sich, dass ich, um für ein beliebiges X das ξ durch convergente hypergeometrische Reihen zu erhalten, nur die analytische Fortsetzung von E) und F) in demjenigen Gebiete von X zu geben habe, welches in Fig. 7 straffirt ist, denn für dieses ist sowohl E) als F), weil divergent, unbrauchbar.

Um nun auch hiefür convergente Reihen zu erhalten, benütze ich die beiden Integrale in A) und B), nämlich

$$F\left(\frac{5}{24},\ -\frac{1}{24},\ \frac{2}{3},\ X\right) \quad \text{und} \quad F\left(\frac{5}{24},\ -\frac{1}{24},\ \frac{1}{2},\ 1-X\right),$$

welche für das bisher noch ausgeschlossene Gebiet gleichzeitig convergent sind, und setze zu diesem Behufe

$$X^{\frac{1}{24}}F\left(-\frac{1}{24},\ \frac{7}{24},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{X}\right)=x\,F\left(\frac{5}{24},\ -\frac{1}{24},\ \frac{2}{3},\ X\right)+\lambda\,F\left(\frac{5}{24},\ -\frac{1}{24},\ \frac{1}{2},\ 1-X\right) \qquad \ldots \mathrm{I})$$

$$\varepsilon(1-X^{\frac{1}{24}}F\left(-\frac{1}{24},\ \frac{11}{24},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{1-X}\right)=x\,F\left(\frac{5}{24},\ -\frac{1}{24},\ \frac{2}{3},\ X\right)+\lambda\,F\left(\frac{5}{24},\ -\frac{1}{24},\ \frac{1}{2},\ 1-X\right) \qquad \ldots \mathrm{K})$$

$$X^{-\frac{5}{24}}F\left(\frac{5}{24},\ \frac{13}{24},\ \frac{5}{4},\ \frac{1}{X}\right)=x'\,F\left(\frac{5}{24},\ -\frac{1}{24},\ \frac{2}{3};\ X\right)+\lambda'\,F\left(\frac{5}{24},\ -\frac{1}{24},\ \frac{1}{2},\ 1-X\right) \qquad \ldots \mathrm{L})$$

$$\varepsilon^{-5}\ (1-X^{-\frac{5}{24}}F\left(\frac{5}{24},\ \frac{17}{24},\ \frac{5}{4},\ \frac{1}{1-X}\right)=x'\,F\left(\frac{5}{24},\ -\frac{1}{24},\ \frac{2}{3},\ X\right)+\lambda'\,F\left(\frac{5}{24},\ -\frac{1}{24},\ \frac{1}{2},\ 1-X\right) \ldots \mathrm{M})$$

und bestimme die Constanten $x\lambda$, $x'\lambda'$ durch die Bedingungen, dass ich in I) und L) $X=1$ setze, und in K) und M) $X=0$, welche Werthe eben durch die oben bezeichneten Convergenzbereiche gefordert und zulässig sind, dann wird nämlich die analytische Fortsetzung von E) und F) durch die Formel gegeben:

$$\xi=C\,\frac{x\,F_1+\lambda\,F_2}{x'\,F_1+\lambda'\,F_2}, \qquad \ldots \mathrm{P})$$

wo C durch H) gegeben ist und zur Abkürzung gesetzt ist:

$$F_1 = F\left(\frac{5}{24}, -\frac{1}{24}, \frac{2}{3}, X\right), \quad F_2 = F\left(\frac{5}{24}, -\frac{1}{24}, \frac{1}{2}, 1-X\right).$$

Für x, x', λ, λ' erhält man desshalb folgende Bestimmungsgleichungen aus L), K), M), N):

$$\varepsilon \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{19}{24}\right)\Gamma\left(\frac{7}{24}\right)} = x + \lambda \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{24}\right)\Gamma\left(\frac{13}{24}\right)}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{19}{24}\right)\Gamma\left(\frac{11}{24}\right)} = x \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{24}\right)\Gamma\left(\frac{13}{24}\right)} + \lambda \qquad \ldots Q)$$

$$\varepsilon^{-5} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{25}{24}\right)\Gamma\left(\frac{13}{24}\right)} = x' + \lambda' \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{24}\right)\Gamma\left(\frac{13}{24}\right)}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{25}{24}\right)\Gamma\left(\frac{17}{24}\right)} = x' \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{24}\right)\Gamma\left(\frac{17}{24}\right)} + \lambda' \qquad \ldots R)$$

Berechnet man hieraus $x \ldots \lambda'$ und berücksichtigt man dabei noch, dass z. B.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \text{und} \quad \Gamma(1-\lambda)\,\Gamma(1+\lambda) = \frac{\lambda\pi}{\sin\lambda\pi},$$

sowie

$$\Gamma(\lambda)\,\Gamma(1-\lambda) = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi}$$

ist, für

$$0 < \lambda < 1,$$

so übergeht die Formel P) in folgende:

$$\xi = C \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{25}{24}\right)}{\Gamma\left(\frac{19}{24}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \cdot \frac{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{24}\right)}\left(\varepsilon - \sin\frac{11\pi}{24}\right)F_1 + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{24}\right)}\left(1 - \varepsilon\frac{\sin\frac{7\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)F_2}{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{13}{24}\right)}\left(\varepsilon^{-5} - \sin\frac{7\pi}{24}\right)F_1 + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{24}\right)}\left(1 - \varepsilon^{-5}\frac{\sin\frac{11\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)F_2} \qquad \ldots Q')$$

oder, wenn man hierein die wirklichen Werthe der constanten Coëfficienten einsetzt, so ergibt sich schliesslich

$$\xi = 0\cdot75626 \frac{(-0\cdot01571 + 0\cdot15938\,i)\,F_1 + (0\cdot57198 - 0\cdot11781\,i)\,F_2}{(-0\cdot04002 - 0\cdot72320\,i)\,F_1 + (0\cdot28580 + 0\cdot44486\,i)\,F_2}. \qquad \ldots R')$$

Durch die Gleichungen E), F) und R') ist die Aufgabe, die Oktaëdergleichung durch hypergeometrische Reihen jetzt für ein beliebiges X der positiven Halbebene gelöst, und um aus diesen Formeln auch ξ für ein negatives y, wenn $X = x + yi$ ist, zu berechnen, hat man nur die Rechnung für ein positives y nach den obigen Formeln zu führen, und im Endresultate überall $-i$ statt $+i$, einzuführen, wodurch die Aufgabe nach jeder Richtung hin als gelöst zu betrachten ist.

Dass man die Oktaëdergleichung auch auf eine andere Weise durch hypergeometrische Reihen lösen kann, liegt auf der Hand, denn nach §. 3 dieses Abschnittes ist die Oktaëdergleichung dem Systeme von folgenden zwei Tetraëdergleichungen äquivalent:

$$\frac{h^3(\xi)}{f^3(\xi)} = \frac{X-2+2\sqrt{1-X}}{X}$$

$$\frac{f^3(\xi)}{h^3(\xi)} = \frac{X-2+2\sqrt{1-X}}{X},$$

und jede derselben lässt sich in analoger Weise wie die Oktaëdergleichung durch hypergeometrische Reihen lösen, wobei der Umstand, dass man nach Legendre's Fonctions elliptiques, II, p. 455, die Werthe von $\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)$ bis $\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)$ auf 14 Decimalstellen genau kennt, höchst wahrscheinlich eine weit genauere Rechnung von ξ gestattet.

Man vergleiche zu diesem Abschnitte die Lösung der Oktaëdergleichung durch elliptische Functionen, wie sie Klein in dem XIV. Bande der Mathem. Ann., p. 157 gibt, indem er ξ als einen Quotienten zweier unendlicher Producte, welche $q = e^{i\pi\omega}$ enthalten, finden lehrt.

§. 6. Rationale Transformation der Oktaëdergleichung in eine andere Oktaëdergleichung.

Bevor ich diesen Abschnitt schliesse, will ich noch in möglichster Kürze Einiges über die rationale Transformation der Oktaëdergleichung in eine andere hinzufügen, da dasselbe das Frühere, zumal die Oktaëdergruppe, von einem anderen Standpunkte aus beleuchtet und zu anderen Lösungen der Oktaëdergleichung durch hypergeometrische Reihen benützt werden kann. Denkt man sich nämlich eine rationale Function von ξ_1, ξ_2 von der Dimension 0, also

$$\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = -\frac{\varphi_2(\xi_1, \xi_2)}{\varphi_1(\xi_1, \xi_2)}, \qquad \ldots\mathrm{I})$$

so entspricht jedem Werthe von $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ ein Werth von $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ und den 24 Werthen von $\frac{\xi_1}{\xi_2}$, welche einer Oktaëdergleichung genügen, 24 Werthe von $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$, welche als Wurzeln einer Gleichung

$$\chi(\zeta) = 0 \qquad \ldots\mathrm{II})$$

betrachtet werden können; es entsteht nun die Frage, wann lässt sich II) als eine Oktaëdergleichung mit dem Parameter X' betrachten, welcher eine rationale Function von X, dem Parameter in der Oktaëdergleichung für $\frac{\xi_1}{\xi_2}$, ist? Dann hat also II) die Form

$$\frac{H^3(\zeta)}{108\,F^4(\zeta)} = X' = \psi(X), \qquad \ldots\mathrm{II'})$$

wo $\psi(X)$ eine rationale Function von X ist.

Ist dies nun der Fall, so entsprechen den 24 Substitutionen für $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$, welche ich mit $S\xi$ bezeichnen will, 24 Substitutionen $S\zeta$, welche sich auf ζ beziehen, und deren Totalitäten natürlich als Oktaëdersubstitutionen übereinstimmen müssen, deren einzelne Substitutionen aber sich noch nicht einzeln zu entsprechen brauchen, in der Weise, dass dieselbe Substitution auf ξ und ζ gleichzeitig angewendet werden muss, um sich gegenseitig zu entsprechen. Allein so viel ist klar, dass die Substitutionen, welche um Punktepaare von F, H und T drehen, auch nur solchen Substitutionen entsprechen können, welche um Punkte aus derselben Punktgruppe drehen, also den F-Substitutionen für ξ können nur F-Substitutionen für ζ entsprechen u. s. w., da sonst die beiderseitigen Gruppen different wären. Dieser Umstand führt ohne Mühe zu den rationalen Transformationen I). Denn überlegen wir, welche Substitution für ζ kann der Substitution $i\xi$ zugeordnet werden? Da nämlich $i\xi$ eine primitive Substitution um die Axe $(0\,\infty)$ ist, von der Periode 4, während ihre zweifache Wiederholung $-\xi$ nun die Periode 2 hat, so kann ihr auch nur eine primitive Substitution von der Periode 4 entsprechen, z. B. $i\zeta$ oder $-i\zeta$, welche aber als gleichwerthig zu betrachten sind, da sie sich nur durch den Drehungssinn unterscheiden, und dieser hier offenbar ohne Belang ist, so dass ich also der Substitution $i\xi$ die Substitution $-i\zeta$ entsprechen lassen kann. Das Bedenken nämlich, dass wir ihr eine andere Substitution der Periode 4, z. B. $\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$, welche um $(+i, -i)$ dreht, hätten entsprechen lassen können, erledigt sich dadurch, dass dieser Fall und ebenso jeder andere durch eine lineare Substitution für ζ, die man auch sofort geometrisch wieder angeben kann, in den früheren übergeht; denn nimmt man statt ζ $\frac{\eta+i}{-\eta+i}$, so wird aus $\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$ einfach $-i\eta$, und der Substitution $i\xi$ entspricht also $-i\eta$, womit dieser Punkt erledigt ist. Es wurde bereits gesagt, dass die F-, H- und T-Substitutionen für ξ wieder F-, H- und T-Substitutionen als entsprechende haben, wenn die Substitution I) die verlangte Eigenschaft hat, und dies hat zur Folge, dass die bei der Transformation I) festbleibenden Punkte, welche durch

$$\xi_1\varphi_1+\xi_2\varphi_2=0 \qquad \ldots \text{II)}$$

gegeben sind, sich aus $F(\xi_1\ \xi_2)$, $H(\xi_1\ \xi_2)$ und $T(\xi_1\ \xi_2)$ ganz und rational zusammensetzen, man also die Gleichung hat:

$$\xi_1\varphi_1+\xi_2\varphi_2=\Sigma\alpha_i F^{a i} H^{b i} T+\Sigma\beta_i F^{c i} H^{d i}+\gamma F^e+\delta H^f, \qquad \ldots \text{III)}$$

wo die constanten Coëfficienten noch gewissen aus der Homogenität leicht erfliessenden Bedingungen genügen müssen, und die zweite Potenz von T wegen einer wiederholt benützten Covariantenrelation übergangen werden kann. Ich will die allgemeinste Lösung jedoch übergehen und nur die einfachsten und interessantesten Fälle hervorheben, welche in III) enthalten sind. Es sind dies offenbar folgende:

$$\xi_1\varphi_1+\xi_2\varphi_2=F(\xi_1,\ \xi_2), \qquad \ldots 1)$$

$$\xi_1\varphi_1+\xi_2\varphi_2=H(\xi_1,\ \xi_2) \qquad \ldots 2)$$

$$\xi_1\varphi_1+\xi_2\varphi_2=T(\xi_1,\ \xi_2), \qquad \ldots 3)$$

aus denen vermöge des Euler'schen Satzes über homogene Functionen, dem zufolge 1) z. B. auch geschrieben werden kann:

$$\xi_1\varphi_1+\xi_2\varphi_2=\frac{1}{6}\xi_1\frac{\partial F}{\partial \xi_1}+\frac{1}{6}\xi_2\frac{\partial F}{\partial \xi_2}$$

folgt, dass

$$\zeta=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \xi_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}} \ldots \text{a)} \qquad \zeta=-\frac{\dfrac{\partial H}{\partial \xi_2}}{\dfrac{\partial H}{\partial \xi_1}} \ldots \text{b)} \qquad \zeta=-\frac{\dfrac{\partial T}{\partial \xi_2}}{\dfrac{\partial T}{\partial \xi_1}} \ldots \text{c)}$$

Substitutionen von der Eigenschaft sind, die Oktaëdergleichung für ξ in eine solche für ζ zu überführen. Ich will dieses für a) und b) ausführlich nachweisen; für c) wird der Beweis ganz genau so geführt.

Ich nehme desshalb zuerst a) und finde hiefür

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_2}=\xi_1^5-5\,\xi_1\xi_2^4, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_1}=5\,\xi_1^4\xi_2-\xi_2^5,$$

so dass, wenn ich auf ξ die Substitution $i\xi$ anwende, also homogen geschrieben ξ_1 und ξ_2 resp. übergehen in

$$\xi_1'=i^{\frac{1}{2}}\xi_1, \quad \xi_2'=i^{-\frac{1}{2}}\xi_2$$

und ζ in ζ', so ist

$$\zeta'=-\frac{\dfrac{\partial F'}{\partial \xi_2'}}{\dfrac{\partial F'}{\partial \xi_1'}}=-\frac{i^{-\frac{3}{2}}\dfrac{\partial F}{\partial \xi_2}}{i^{\frac{3}{2}}\dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}}=i\,\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \xi_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}}=-i\zeta;$$

demnach entspricht der Substitution $i\xi$ die Substitution $-i\zeta$.

Bei einer Substitution der Periode 2, z. B. bei $S_{0\infty 1}$, durch welche man erhält:
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 2$

$$\xi_1' = \frac{\xi_1 + \xi_2}{\sqrt{-2}}, \quad \xi_2' = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\sqrt{-2}},$$

findet man für den zugehörigen Werth von ζ:

$$\zeta' = -\frac{\dfrac{\partial F'}{\partial \xi_2'}}{\dfrac{\partial F'}{\partial \xi_1'}} = -\frac{\dfrac{1}{(\sqrt{-2})}\, 5\cdot 4\left[-\dfrac{\partial F}{\partial \xi_2} + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}\right]}{\dfrac{1}{(\sqrt{-2})}\, 5\cdot 4\left[\dfrac{\partial F}{\partial \xi_2} + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}\right]}$$

$$= \frac{-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial \xi_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}} + 1}{-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial \xi_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}} + 1} = \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1},$$

also erleidet auch ζ eine Substitution der Periode 2, und hieraus folgt unter Beachtung des in §. 3 des ersten Abschnittes über die Zusammensetzung der Substitutionen Gesagten, die Richtigkeit der Behauptung, dass a) wieder zu einer Oktaëdergleichung für ζ führt.

Für die Substitution b) hat man

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_2} = 8\,[7\,\xi_1^4 \xi_2^3 + \xi_2^7] \quad \frac{\partial H}{\partial \xi_1} = 8\,[\xi_1^7 + 7\,\xi_1^3 \xi_2^4],$$

und also bei der Substitution $\xi_1' = i^{\frac{1}{2}}\,\xi_1 \quad \xi_2' = i^{-\frac{1}{2}}\xi_2$

$$\frac{\partial H'}{\partial \xi_2'} = i^{\frac{1}{2}} \frac{\partial H}{\partial \xi_2} \quad \frac{\partial H'}{\partial \xi_1'} = i^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial H}{\partial \xi_1},$$

und demnach für ζ:

$$\zeta' = i\zeta,$$

also gleichfalls eine Substitution der Periode 4.

Bei der Substitution

$$\frac{\xi_1 + \xi_2}{\sqrt{-2}}, \quad \frac{\xi_1 - \xi_2}{\sqrt{-2}}$$

hat man ferner

$$\frac{\partial H'}{\partial \xi_2'} = \frac{1}{(\sqrt{-2})^7}\left(-\frac{\partial H}{\partial \xi_2} + \frac{\partial H}{\partial \xi_1}\right), \quad \frac{\partial H'}{\partial \xi_1'} = \frac{1}{(\sqrt{-2})^7}\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_2} + \frac{\partial H}{\partial \xi_1}\right),$$

und darum für ζ:

$$\zeta' = \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}$$

u. s. w., womit der Beweis für die obige Behauptung erbracht ist.

In Folge der Substitutionen a), b), c) erhält man also für ζ die Oktaëdergleichung der Form II'), wo ich die Function auf der rechten Seite jedoch nicht wirklich bilden will, sondern nur noch die drei Dreiecke auf der Kugel angeben will, welche zufolge der drei Gleichungen II'), die den drei Transformationen a), b) und c) entsprechen, die X-Ebene abbilden, und die also dem Dreiecke EAD der Fig. 2 analog sind.

Man erhält nämlich aus a) für

$$\xi = \infty, \quad \xi = 1 + \sqrt{2}, \quad \xi = \frac{1+i}{2}(1+\sqrt{3})$$

folgende Werthe:

$$\zeta = \infty, \quad \zeta = 1 - \sqrt{2}, \quad \zeta = \frac{1+i}{2}(1-\sqrt{3}),$$

und demnach entspricht dem Dreiecke ABC in Fig. 8 das Dreieck $A'B'C'$ der Fig. 9, welche die positive X-Halbebene abbilden, und ABD, sowie $A'B'D'$ bilden die negative X-Halbebene auf der Kugel ab. Die Vertheilung der H-Punkte, denen die mit gleicher Ziffer bezeichneten Werthe entsprechen, gibt Fig. 10:

$$\frac{1+i}{2}(1+\sqrt{3}) \quad \ldots 1) \qquad \frac{-1+i}{2}(1+\sqrt{3}) \quad \ldots 2)$$

$$\frac{-1-i}{2}(1+\sqrt{3}) \quad \ldots 3) \qquad \frac{1-i}{2}(1+\sqrt{3}) \quad \ldots 4)$$

$$\frac{1+i}{2}(1-\sqrt{3}) \quad \ldots \mathrm{I}) \qquad \frac{-1+i}{2}(1-\sqrt{3}) \quad \ldots \mathrm{II})$$

$$\frac{-1-i}{2}(1-\sqrt{3}) \quad \ldots \mathrm{III}) \qquad \frac{1-i}{2}(1-\sqrt{3}) \quad \ldots \mathrm{IV});$$

ebenso gibt die Fig. 11 Aufschluss über die Vertheilung der T-Punkte und dadurch die beiden obigen Dreiecke $A'B'C'$ und $A'B'D'$. Man erkennt sofort, dass die beiden letztgenannten Dreiecke durch dieselben Kreise auf der Kugel begrenzt werden, sowie dass die Fläche eines derselben das Fünffache von ABC der Fig. 8 ist, und dass desshalb die aus a) entstehende Oktaëdergleichung für ζ durch solche hypergeometrische Reihen gelöst wird, welche Gauss als „contiguae“ oder benachbarte bezeichnet hat.

Setzt man ferner in b) für ξ folgende drei Werthe ein:

$$\xi = \infty, \quad 1 + \sqrt{2}, \quad \frac{1+i}{2}(1+\sqrt{3}),$$

so resultirt für ξ die Reihe

$$\xi = 0, \quad 1 - \sqrt{2}, \quad \frac{1+i}{2}(1+\sqrt{3}),$$

so dass durch die in Folge von b) entstehende Oktaëdergleichung für ξ das Dreieck ABC auf $A''B''C''$ der Fig. 12 abgebildet wird, und $A''B''D''$ also die negative X-Halbebene auf die Kugel abbildet, — das so erhaltene Dreieck ist das siebenfache von ABC, und wird von denselben grössten Kreisen begrenzt wie jenes etc.

In Bezug auf die Substitution c) ergeben sich folgende zwei Reihen entsprechender Werthe von ξ und ζ:

$$\xi = \infty, \quad 1 + \sqrt{2}, \quad \frac{1+i}{2}(1+\sqrt{3})$$

$$\xi = 0, \quad 1 + \sqrt{2}, \quad \frac{1+i}{2}(1-\sqrt{3}),$$

und also entspricht hier dem Dreiecke ABC, resp. ABD, das Dreieck $A'''B'''C'''$ und $A'''B'''D'''$ in Fig 13, welches die eilffache Fläche von ABC hat, und zwar bildet das erstere die positive X-Halbebene ab, und das letztere die negative u. s. w. Da wir in Folge des Vorhergehenden die Werthsysteme von ξ und X für die singulären Punkte der Differentialgleichung II), §. 2 dieses Abschnittes wissen, so liesse sich hierauf die Auflösung der aus II') dieses Paragraphen durch die Transformationen a), b), c) folgenden Oktaëdergleichungen geben, ohne dass es nothwendig wäre, die Function $\psi(X)$ ausführlich zu geben, — was übrigens kaum wesentliche Schwierigkeiten darbieten dürfte. — Damit will ich die Lösung der Oktaëdergleichung beschliessen.

Dritter Abschnitt.

Resolventen des Oktaëders.

§. 1. Resolventen für F und H.

Ich kehre nun zu dem Gesichtspunkte des §. 2 im zweiten Abschnitte zurück, wonach es beim Oktaëder Functionen, oder besser gesagt, binäre Formen gibt, welche bei allen Oktaëdersubstitutionen in einander übergehen, oder auch einzeln ungeändert bleiben; es sind dies irrationale Covarianten des Oktaëders von der Art, dass immer mehrere zusammengehören, also ein System bilden, z. B. die drei Hauptaxen des Oktaëders oder die vier Würfeldiagonalen, oder auch die sechs quadratischen Formen χ des §. 5 im ersten Abschnitte, welche immer einzeln völlig coordinirt sind.

Ausser diesen gibt es natürlich noch unzählig viele andere irrationale Covarianten des Oktaëders, welche ganz ähnlich sich verhalten.

Da nun im ersten Abschnitte gezeigt wurde, dass F, H und T das vollständige Formensystem von F bilden, so muss es gelingen, jedes zusammengehörige System solcher Covarianten als Wurzeln einer Gleichung darzustellen, deren Coëfficienten in F, H und T rational und ganz sind. Dies also ist der Grund für die Möglichkeit derartiger Resolventenbildungen, wobei ich noch bemerke, dass in solchen Gleichungen nur T^2 und keine höhere Potenz derselben aufzutreten braucht, und selbst diese noch wegen

$$T^2 = H^3 - 108\,F^4$$

eliminirt werden kann, also in die Coëfficienten der Resolvente nur H und seine Potenzen, sowie F^2 und seine Potenzen eingehen, denn H bleibt in einer beliebigen ganzen Potenz ungeändert, dagegen von F nur die geraden Potenzen desselben.

Ehe ich jedoch einen Schritt weiter gehe, will ich noch darauf hinweisen, dass man geometrisch die Wirkung einer Oktaëdersubstitution auf eine solche irrationale Covariante, z. B. die Würfeldiagonalen φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 des §. 5 im ersten Abschnitte von vornherein angeben kann, wenn man sich die Anordnung derselben und ihre Lage gegen die Axe der betreffenden Substitution zuvor klar gemacht hat, da hieraus sofort sich erkennen lässt, in welcher Weise die $\varphi_1 \dots \varphi_4$ sich vertauschen oder ungeändert bleiben. Projicirt man z. B. die H- und T-Punkte von einem unendlich fernen Punkte der positiven z-Axe auf die Zeichnungsebene, so erhält man für die Lage von $\varphi_1 \dots \varphi_4$ und $\chi_1 \dots \chi_6$ die Figur 14 und erkennt hieraus sofort, dass bei der Substitution $i\xi$, welche um den Nullpunkt der Kugel wie der Uhrzeiger dreht, also um den Unendlichkeitspunkt entgegengesetzt, die φ sich cyklisch vertauschen müssen, was zutrifft, denn dadurch übergeht φ_1 in φ_2, letzteres in φ_3, dieses in φ_4 und aus φ_4 wird φ_1, also hat man die Substitution $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$. Um auf die χ zu kommen, so erkennt man, dass dieselben bei derselben Substitution zwei Cyklen von vier und zwei Gliedern bilden, nämlich $(\chi_3, \chi_5, \chi_4, \chi_6)$ und (χ_1, χ_2), und schon hieraus lässt sich folgern, dass z. B. die Gleichung sechsten Grades für die χ, weil ihre Galois'sche Gruppe keine Substitution von einer höheren Periode als 4 enthält, algebraisch lösbar ist u. s. w., welches Verhalten von den $\chi_1 \cdots \chi_6$ die Ausführung der Substitutionen natürlich bestätigt.

Ich will nun wirklich die Resolventen für H und F bilden, und beginne mit F, indem ich die früher gegebenen drei quadratischen Formen ψ als Wurzeln einer Gleichung dritten Grades darstelle, und dabei, wie im Folgenden, durchwegs zunächst die einzelnen Potenzsummen der Wurzeln für die zu bildende Gleichung aufstelle, um erst hieraus mit Hilfe der bekannten Newton'schen Formeln die Coëfficienten der gesuchten Gleichung herzuleiten.

Um also F zu spalten, hat man folgende Ansätze, welche sich immer durch Abzählung der Grade in Bezug auf ξ_1, ξ_2 und Zusammensetzung einer Function desselben Grades in Bezug auf ξ_1, ξ_2 aus F, H und T sofort ergeben:

$$\psi_1+\psi_2+\psi_3=0$$
$$\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2=x\,.\,H$$
$$\psi_1\psi_2\psi_3=-4F^2,$$

wo die erste Gleichung daraus folgt, dass der Grad von F, H und T den vierten übersteigt, die letzte sich unmittelbar ergibt, und die zweite desshalb so lautet, weil H die einzige der genannten drei Functionen ist, welche den Grad 8 besitzt. Durch Vergleichung des Coëfficienten von ξ_1^8 auf beiden Seiten der zweiten Gleichung ergibt sich $x=2$, und man erhält damit für die ψ folgende kubische Gleichung:

$$\psi^3-H\psi+4F^2=0,$$

welche schon Klein im 9. Bande der Mathem. Annalen aufstellte, und mit welcher ich die Cardan'sche Formel herleiten werde, wodurch die Lösung der allgemeinen Gleichung dritten Grades vom Standpunkte des Oktaëders neu gewonnen und alle Substitutionen der Wurzel einer Gleichung dritten Grades ihre geometrische Deutung finden; man vergleiche hiezu die geometrische Interpretation von Klein in den Mathem. Annalen, wo die kubische binäre Form durch drei äquidistante Punkte des Äquators interpretirt wird. Um sich von der Richtigkeit der letzten Gleichung zu überzeugen, bilde man die Discriminante derselben, und findet für die letztere:

$$\frac{8}{27}(H^3-108F^4)=\frac{8}{27}T^2,$$

ein Resultat, dessen Nothwendigkeit andererseits aus dem Umstande erhellt, dass die Discriminante das Product aus den Quadranten der Wurzeldifferenzen ist, also z. B. den Factor $(\psi_2-\psi_1)^2$ enthalten muss, welch' letzterer sich aber wegen

$$(\psi_2-\psi_1)^2=[(\xi_1^2-\xi_2^2)^2-4\xi_1^2\xi_2^2]^2=(\xi_1^2+2\xi_1\xi_2-\xi_2^2)^2(\xi_1^2-2\xi_1\xi_2-\xi_2^2)^2$$

als identisch mit $\frac{1}{4}\chi_3\chi_4$ erweist u. s. w., womit die Richtigkeit des Resultates dargethan ist.

Um jetzt H zu zerfällen, mache ich folgende Ansätze:

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=0$$
$$\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\varphi_4^2=x\,.\,H$$
$$\varphi_1^3+\varphi_2^3+\varphi_3^3+\varphi_4^3=x'\,.\,T+\lambda F^2$$
$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4=\frac{16}{81}H^2.$$

Um nun die Constanten x, x' und λ zu finden, vergleiche man die Coëfficienten der höchsten, resp. der zwei höchsten Potenzen von ξ_1 auf beiden Seiten der aufgestellten Gleichungen; dadurch ergibt sich sofort folgendes System:

$$x=-\frac{16}{9}\quad x'=0\quad \lambda=-\frac{8\cdot 96}{27},$$

und in Folge dessen lautet die biquadratische Gleichung für die φ folgendermassen:

$$\varphi^4+\frac{8}{9}H\varphi^2+\frac{256}{27}F^2\varphi+\frac{16}{81}H^2=0,$$

auf welche Gleichung man wieder die Lösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades bauen kann, nachdem dieselbe durch eine lineare Transformation auf die Form der letzteren Gleichung gebracht worden ist, also die Invarianten von beiden übereinstimmen.

Dass die Constante x' den Werth Null annimmt, ist nicht etwa zufällig, sondern dies war von Vornherein zu erwarten, da, wenn x' nicht den Werth Null hätte, in der Gleichung für φ die Covariante T in der ersten Potenz auftreten würde, was nicht sein darf, da T wegen der Gleichung

$$T^2 = H^3 - 108\,F^4$$

eine irrationale und zwar zweiwerthige Covariante von F ist, von der ja in der That nach dem Früheren erst das Quadrat bei sämmtlichen Oktaëdersubstitutionen ungeändert bleibt, so dass ich bei Aufstellung der Gleichung für $\Sigma\varphi^3$ das Glied mit T hätte sofort übergehen können. Diese Bemerkung liesse sich bei der Aufstellung von anderen Resolventen beim Oktaëder dahin verallgemeinern, dass in keiner derselben ungerade Potenzen von F und T auftreten dürfen, also F^3 z. B., falls es irgendwo angenommen würde, durch wirkliche Ausführung der Berechnung seines Coëfficienten den Factor Null erhält u. s. w. Um sich von der Richtigkeit der Gleichung für φ zu überzeugen, bilde man die beiden Invarianten dieser biquadratischen Form, nämlich die quadratische i und die kubische j, und aus ihnen mittelst der Formel

$$D = \frac{1}{27}(i^3 - 6j^2) \quad \text{(Clebsch: Binäre Formen)}$$

die Discriminante der letzteren. Für diese findet man dann bis auf einen numerischen Factor $F^4\,T^2$, welches Resultat wieder von einer anderen Seite her zu erwarten war. Denn die Discriminante muss z. B. auch den Factor $(\varphi_1 - \varphi_3)^2$ enthalten, welcher sich wegen der Gleichung

$$\varphi_1 - \varphi_3 = -\frac{8(1+i)}{3}\,\xi_1\,\xi_2(\xi_1^2 - i\,\xi_2^2),$$

wenn ich von einem numerischen Factor absehe, auf ψ_1, χ_1 reducirt, u. s. w., woraus die Richtigkeit erhellt.

Ausser den beiden für F und H gebildeten Resolventen kann man natürlich noch unzählig viele andere aufstellen, denn da z. B. F in die sechs linearen Formen

$$\xi_1,\ \ \xi_2,\ \ \xi_1 \pm \xi_2,\ \ \xi_1 \pm i\,\xi_2$$

zerfällt, so könnte man die numerischen Vielfachen von geeigneten Potenzen derselben als Wurzeln einer Gleichung sechsten Grades auffassen, deren Coëfficienten in F, H und T rational und ganz sind u. s. w., und ein Gleiches gilt natürlich auch von den acht linearen Factoren von H etc.

§. 2. Zerfällung von T in seine quadratischen Factoren.

Um T in seine quadratischen Factoren $\chi_1 \ldots \chi_6$ zu zerfällen, hat man folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}
&\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5 + \chi_6 = 0\\
&\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + \chi_4^2 + \chi_5^2 + \chi_6^2 = x\,.\,H\\
&\chi_1^3 + \chi_2^3 + \chi_3^3 + \chi_4^3 + \chi_5^3 + \chi_6^3 = \mu\,T + \lambda\,F^2\\
&\chi_1^4 + \chi_2^4 + \chi_3^4 + \chi_4^4 + \chi_5^4 + \chi_6^4 = \rho\,.\,H^2\\
&\chi_1^5 + \chi_2^5 + \chi_3^5 + \chi_4^5 + \chi_5^5 + \chi_6^5 = \sigma\,H\,T + \tau\,H\,F^2\\
&\chi_1\,\chi_2\,\chi_3\,\chi_4\,\chi_5\,\chi_6 = \frac{1}{16}\,T^2.
\end{aligned}$$

Durch Vergleichung der Coëfficienten von den höchsten Potenzen der Variabeln ξ_1, ξ_2 auf beiden Seiten der Gleichungen ergibt sich

$$x = -1,\ \ \lambda = 39,\ \ \rho = \frac{9}{4},\ \ \tau = \frac{95}{4},$$

und was nach dem Früheren selbstverständlich ist, $\mu = \sigma = 0$.

In Folge dessen lautet die Gleichung sechsten Grades für die χ:

$$\chi^6 + \frac{H}{2}\chi^4 - \frac{101}{8}F^2\chi^3 - \frac{H^2}{16}\chi^2 - \frac{45}{4}F^2 H\chi + \frac{T^2}{16} = 0.$$

Von dieser Gleichung kann man nun behaupten, dass sie algebraisch lösbar ist, und erkennt dies einmal dadurch, dass bei gegebenem H und F, also auch T^2 aus der Oktaëdergleichung ξ algebraisch gefunden werden kann, nach dem im zweiten Abschnitte Gesagten, wodurch $\chi_1 \dots \chi_6$ gegeben sind, und andererseits durch die Überlegung, dass die Gleichung sechsten Grades für die χ sich auf eine Gleichung dritten Grades und drei Gleichungen zweiten Grades zurückführen lässt, wodurch die algebraische Lösbarkeit ebenfalls zu Tage tritt. Da nämlich sich die sechs quadratischen Formen χ in drei Ebenen zu je zweien vertheilen lassen, so können wir immer ein solches Paar von χ als Unbekannte einführen, und gelangen dadurch zu den Gleichungen

$$X_1 = \chi_1\chi_2 = (\xi_1^4 + \xi_2^4)^2$$

$$X_2 = \chi_3\chi_4 = \frac{1}{4}(\xi_1^4 - 6\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4)^2$$

$$X_3 = \chi_5\chi_6 = \frac{1}{4}(\xi_1^4 + 6\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4)^2$$

und hat dann

$$X_1 + X_2 + X_3 = \frac{3}{2}H$$

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = \frac{9}{8}H^2$$

$$X_1 X_2 X_3 = \frac{1}{16}T^2$$

und daher die Gleichung

$$X^3 - \frac{3}{2}HX^2 + \frac{9}{16}H^2 X - \frac{1}{16}T^2 = 0,$$

Von der Richtigkeit dieser Gleichung kann man sich wieder leicht durch Bildung der Discriminante überzeugen, welche hier bis auf einen numerischen Factor gleich $T^2 F^4$ gefunden wird, worauf auch die Differenzen der Wurzeln, z. B. $X_3 - X_2$ hinleitet; man hat nämlich:

$$X_3 - X_2 = \frac{1}{4}(2\xi_1^4 + 2\xi_2^4)\cdot 12\xi_1^2\xi_2^2 = 6\xi_1^2\xi_2^2(\xi_1^2 + i\xi_2^2)(\xi_1^2 - i\xi_2^2)$$

u. s. w. — Ist nun die kubische Gleichung für die X aufgelöst, so hat man, um z. B. $\chi_1\chi_2$ zu finden, schliesslich den Ansatz

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = -2(\xi_1^8 - 6\xi_1^4\xi_2^4 + \xi_2^8) = -\frac{2}{9}(13X_1 - 4X_2 - 4X_3), \quad \chi_1^2\chi_2^2 = X_1^2,$$

und also für χ_1 und χ_2 die quadratische Gleichung

$$\chi^2 + \frac{2}{9}(13X_1 - 4X_2 - 4X_3)\chi + X_1^2 = 0$$

und zwei entsprechende Gleichungen für $\chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6$.

Der eigentliche Grund, warum es gelingen muss, die Gleichung sechsten Grades für die χ algebraisch zu lösen, liegt in folgenden Relationen ihrer Wurzeln, die sich aus dem ersten obigen Ansatze ergeben:

$$\Sigma\chi^4 = \frac{9}{4}(\Sigma\chi^2)^2$$

$$\Sigma\chi^5 = -\frac{95}{4.39}\Sigma\chi^2\Sigma\chi^3$$

u. s. w., denen man analoge Relationen für die Spaltung von H an die Seite stellen kann. Noch genanere

Einsicht gibt die Anwendung des im vorhergehenden Paragraphen Gesagten, wonach in Folge der geometrischen Betrachtung die Gleichung sechsten Grades in ihrer Galois'schen Gruppe keine Substitution einer höheren Periode als 4 enthält u. s. w.

Da man ferner die Oktaëdergleichung auch durch hypergeometrische Reihen lösen kann, so ist die Gleichung für $\chi_1 \cdots \chi_6$ auch durch solche Reihen lösbar neben der algebraischen Lösung.

Was weiter das Tetraëder betrifft, so könnte man sich auch bei ihm die Aufgabe stellen, die linearen Factoren von f, h und t z. B. in geeigneten Potenzen als Wurzeln einer Gleichung aufzufassen, welche ihre Coëfficienten aus f, h und t ganz und rational aufbaut, doch will ich hierauf nicht weiter eingehen und verweise hier nur auf ein derartiges Beispiel, das Klein im 14. Bande der Mathem. Annalen, p. 154 gibt, wobei er allerdings eine andere Form der Tetraëdergleichung voraussetzt.

§. 3. Lösung der allgemeinen Gleichung dritten Grades, Cardanische Formel.

Nimmt man die allgemeine Gleichung dritten Grades an in der Form

$$x^3+ax+b=0,$$

und setzt ihre Wurzeln folgenden Functionen von ξ_1, ξ_2 gleich:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4\,\xi_1^2\xi_2^2 \\ x_2 &= (\xi_1^2-\xi_2^2)^2 \\ x_3 &= -(\xi_1^2+\xi_2^2)^2, \end{aligned}$$

so kann man x_1, x_2, x_2 als die drei Hauptaxen eines Oktaëders auffassen, und bringt die Lösung der obigen Gleichung dritten Grades sofort auf eine Oktaëder- oder Tetraëdergleichung, wenn man sie mit der Gleichung für ψ vergleicht und also setzt:

$$H=-a, \qquad 4F^2=b,$$

denn dann wird X, der Parameter der Oktaëdergleichung, den Werth $-\frac{4a^3}{27b^2}$ haben, und die Gleichung 1ᵃ) des §. 3 im zweiten Abschnitte lautet jetzt:

$$\frac{\xi_1^4+2\sqrt{-3}\,\xi_1^2\xi_2^2+\xi_2^4}{\xi_1^4-2\sqrt{-3}\,\xi_1^2\xi_2^2+\xi_2^4}=\sqrt[3]{1+\frac{27b^2}{a^3}\pm\frac{27b}{a^3}\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3+\left(\frac{b}{2}\right)^2}},$$

aus welcher Gleichung bei geeigneter Wahl des Werthes von ξ_2 für eine Wurzel x sofort nach Auflösung einer quadratischen Gleichung der Werth

$$\alpha^\nu\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\alpha^{2\nu}\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2}}$$

fliessen muss, wo $\alpha=\sqrt[3]{1}$ ist.

Man vergleiche hiezu die berühmte Abhandlung von Lagrange aus dem 2. Bande der neuen Memoiren der königl. Akademie der Wissenschaften, wie sie in Euler's Analysis des Unendlichen, herausgegeben von Michelsen, sich findet, 3. Buch, p. 277. Damit will ich diesen Abschnitt schliessen und übergehe dazu, die allgemeine Gleichung vierten Grades mit dem Oktaëder zu verknüpfen, wobei ich nur noch bemerke, dass die cyklische Permutation zweier Wurzeln oder dreier als

$$(x_1x_2), \quad (x_1x_3)\,(x_2x_3) \quad \text{und} \quad (x_1x_2x_3)\,(x_1x_3x_2)$$

ihr geometrisches Bild in den Drehungen durch π um irgend eine der drei Axen $(0\,\infty)$, $(+1\;-1)$, $(+i\;-i)$, resp. durch $2\frac{\pi}{3}$, $4\frac{\pi}{3}$ um irgend eine Diagonale des Würfels II, welche einander völlig coordinirt sind, finden.

Vierter Abschnitt.

Die Gleichung vierten Grades.

§. 1. Transformation derselben.

Ich nehme die allgemeine Gleichung vierten Grades gleich in der Form an:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

weil dann die Rechnung bedeutend einfacher wird, und transformire dieselbe mittels der Tschirnhausen'schen Substitution

$$y = \alpha + \beta x + 2x^2 \qquad \ldots \text{I)}$$

in die folgende

$$y^4 + My^3 + Ny^2 + Ay + B = 0.$$

Die Constanten α und β bestimme ich nun so, dass M und N verschwinden, und gewinne daher folgende zwei Gleichungen:

$$M = -\Sigma y = -4\alpha - \beta\Sigma x - 2\Sigma x^2$$
$$= -4\alpha - 4a = 0,$$

also $\alpha = -a$ und dann wird

$$2N = (\Sigma y)^2 - \Sigma y^2 = -\Sigma y^2 = 2a\beta^2 + 12b\beta + 16c - 12a^2 = 0,$$

also

$$\beta = \frac{-3b \pm \sqrt{9b^2 + 2a^3 - 8ac}}{a}$$

Hiedurch ist also die Transformation I) bestimmt und die Gleichung für y lautet:

$$y^4 + Ay + B = 0. \qquad \ldots \text{II)}$$

Diese Form II) der Gleichung vierten Grades werde ich nun immer voraussetzen und die Congruenz derselben mit der Theorie des Oktaëders nachweisen. Den Grund, warum ich zuerst Σy und Σy^2 auf Null brachte, werden die folgenden Paragraphen erkennen lassen; es ist dies der Umstand, dass ich jetzt die vier Wurzeln y als Punkte des Kegelschnittes $\Sigma y^2 = 0$ betrachten kann, und zwar darum, weil die sämmtlichen Oktaëdersubstitutionen sich als Collineationen in der y-Ebene jetzt deuten lassen; dies wird durch das Folgende noch klarer werden.

§. 2. Congruenz des Oktaëders mit der Gleichung vierten Grades.

Die Einsicht, dass die Theorie der Gleichung vierten Grades mit dem Oktaëder sich völlig deckt, ergibt sich durch nachstehende Überlegung. Ich bezeichne die vier Wurzeln der Gleichung II) des vorigen Paragraphen mit y_1, y_2, y_3, y_4, oder auch kurz mit 1, 2, 3, 4, und bediene mich des bekannten Sprachgebrauches einer Substitution im allgemeineren Sinne, um den Übergang von der Function $f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ zu $f(y_1, y_3, y_2, y_4)$ z. B. zu bezeichnen, wobei auf die Reihenfolge der Elemente wohl zu achten ist. Es ist desshalb in diesem Beispiele y_2 durch y_3 und umgekehrt, ersetzt worden, während die übrigen Elemente ungeändert blieben.

Eine nochmalige Anwendung dieses Processes führt zur ursprünglichen Function, wesshalb ich sage, die benützte Substitution habe die Periode 2, und da hier 2 und 3 cyklich sich vertauschten, bezeichne ich sie in bekannter Weise mit (23). Untersuchen wir, wie viele derartige Substitutionen der Periode 2 aus vier Elementen sich bilden lassen, so erhält man offenbar $\binom{4}{2} = 6$, nämlich folgende:

$$(12),\ (13),\ (14),\ (23),\ (24),\ (34) \qquad \ldots a)$$

und diese entsprechen den sechs T-Substitutionen des Oktaëders, sowohl der Zahl als der Periode nach.

Substitutionen der Periode 3 gibt es weiter offenbar $\binom{4}{3} \cdot 2 = 8$, weil ich 4 mal drei Elemente herausfassen kann und jede hieraus gebildete Substitution wegen der Periode 3 zu zweien Anlass gibt; die acht Substitutionen entsprechen den acht H-Substitutionen und sind folgende:

$$(123),\ (124),\ (134),\ (234), \qquad \ldots b)$$

wo die erste z. B. folgende zwei Anordnungen der Wurzel bedingt:

$$y_2 y_3 y_1 y_4,\ y_3 y_1 y_2 y_4.$$

Endlich Substitutionen der Periode 4 erhält man neun, wovon aber drei die Periode 2 haben, durch sie werden folgende Anordnungen der Wurzeln bedingt:

$$y_2 y_3 y_4 y_1,\ y_3 y_4 y_1 y_2,\ y_4 y_1 y_2 y_3, \qquad \ldots c)$$

hervorgerufen durch die Substitution (1, 2, 3, 4) und ihre Wiederholungen, wobei die mittlere die Periode 2 hat und durch (13) (24) zu bezeichnen ist; die Anordnungen

$$y_2 y_4 y_3 y_1,\ y_4 y_3 y_1 y_2,\ y_3 y_1 y_2 y_4$$

sind durch die Substitution (1 2 4 3) und ihre Wiederholungen bedingt, die mittlere entspricht der Substitution (14) (23), und endlich ist

$$y_3 y_2 y_4 y_1,\ y_2 y_4 y_1 y_3,\ y_4 y_1 y_3 y_2$$

durch (1 3 2 4) hervorgerufen und (12) (34) die mittlere.

Man erkennt diese Anordnungen sofort, wenn man sich die vier Elemente äquidistant auf einem Kreise in der Reihenfolge der Substitution angeordnet denkt, und dann um eine verticale Axe durch das Centrum um $\frac{\pi}{2}$ dreht; dass dieses in der That so zu denken ist, ergibt sich daraus, dass diese neun Substitutionen den F-Substitutionen entsprechen, und wie sich später zeigen wird, die y mit den vier Würfeldiagonalen in Analogie treten, wodurch die bezeichneten Anordnungen sofort auf einmal zu Tage treten.

Dass keine anderen Substitutionen von einer Periode unter fünf existiren und auch keine einer höheren Periode existirt, ergibt sich daraus, dass man von der Anordnung $y_1 y_2 y_3 y_4$ ausgehend, zu einer beliebigen der 24 möglichen durch die oben bezeichnete Substitution übergehen kann. In Folge dessen ist die Congruenz der Gruppen von Substitutionen beim Oktaëder und der Gleichung vierten Grades evident, und aus dieser Betrachtung ergibt sich auch, dass vom Standpunkte der Substitutionen aus die Lösung der Gleichung vierten Grades mittelst der kubischen Gleichung, welche die Wurzeln

$$\begin{aligned} w_1 &= (y_1 + y_2 - y_3 - y_4)^2 & \qquad & W_1 = (y_1 y_2 - y_3 y_4)^2 \\ w_2 &= (y_1 + y_3 - y_2 - y_4)^2 & \text{oder} \quad & W_2 = (y_1 y_3 - y_2 y_4)^2 \\ w_3 &= (y_1 + y_4 - y_2 - y_4)^2 & & W_3 = (y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 \end{aligned}$$

hat, eigentlich identisch ist in beiden Fällen, und man kann nach einem bekannten sehr allgemeinen Satze von **Lagrange** in der That rational und ganz von den w zu den W übergehen, welcher Satz für die Gleichung vierten Grades sich höchst wahrscheinlich einfach geometrisch beweisen lässt, doch will ich hierauf nicht weiter eingehen. Diese Congruenz der beiden Gruppen will ich nun in Bezug auf $\Sigma y = 0$ und $\Sigma y^2 = 0$ noch klarer machen. Fasst man nämlich die y als plane Vierlinien-Coordinaten, so hat dies zur Folge, dass jeder Punkt des genannten Kegelschnittes, d. h. seine Coordinaten $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ als rationale Functionen eines Parameters aufgefasst werden können, wodurch die 24 Oktaëdersubstitutionen — einschliesslich der Identität — ihr Analogon in 24 Collineationen haben, so dass wir für die ganze Betrachtung in der y-Ebene wieder eine geometrische Anschaulichkeit erhalten, indem immer 24 Punkte zusammengehören, die sämmtlich aus einem durch die genannten 24 Collineationen entstehen, und welche Gruppe nur in besonderen Fällen, die leicht angebbar sind, weniger aber darum mehrfach zählende enthalten. Für diese letzteren erhält

m*

man im Ganzen drei Gruppen, und zwar folgende: Eine vierfach zählende Gruppe von sechs Punkten — analog den F-Punkten —, eine dreifach zählende Gruppe von acht, und eine zweifach zählende Gruppe von 12 zusammengehörigen Punkten. Die Coordinaten der ersten Gruppe werden gefunden, wenn man 1, i, -1, $-i$ auf alle möglichen Weisen permutirt und nur die verschiedenen herausgreift, denn 1, i, -1, $-i$ und -1, $-i$, 1, i sind wegen der Homogenität identisch. Hieraus ergeben sich für die Coordinaten $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ der vielfach zählenden Gruppe folgende Werthe:

$$\begin{array}{llll} 1 \quad i \; -1 \; -i & \ldots 1) \qquad & 1 \; -i \; -1 \quad i & \ldots 2) \\ 1 \; -1 \quad i \; -i & \ldots 3) \qquad & 1 \; -1 \; -i \quad i & \ldots 4) \\ 1 \quad i \; -i \; -1 & \ldots 5) \qquad & 1 \; -i \quad i \; -1 & \ldots 6), \end{array}$$

und die Gleichungen der drei Geraden, welche je zwei aufeinanderfolgende verbinden, sind

$$\begin{array}{lcll} y_1+y_3=0 & & y_2+y_4=0 & \ldots \mathrm{I}) \\ y_1+y_2=0 & \text{oder} & y_3+y_4=0 & \ldots \mathrm{II}) \\ y_1+y_4=0 & & y_2+y_3=0. & \ldots \mathrm{III}) \end{array}$$

Mehr symmetrisch kann man für diese drei Geraden auch schreiben:

$$y_1+y_3-y_2-y_4=0 \quad \text{oder} \quad iy_1+y_2+iy_3+y_4=0, \qquad \ldots \mathrm{d})$$

für die erste z. B., wenn man $\Sigma y=0$ berücksichtigt u. s. w.

Selbstverständlicher Weise entsprechen diesen Geraden beim Oktaëder die drei Hauptaxen desselben. Diese sechs Punkte 1)…6) bestimmen ein Sechseck, welches z. B. 8mal ein Brianchon'sches ist u. s. w. Für die Form F' als Product der drei Hauptaxen erhält man folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} F' &\equiv (y_1+y_2)(y_2+y_3)(y_3+y_1) \equiv (y_2+y_3)(y_3+y_4)(y_4+y_1) \\ &\equiv (y_3+y_4)(y_4+y_1)(y_1+y_3) \equiv (y_4+y_1)(y_1+y_2)(y_2+y_4), \end{aligned}$$

wofür man mehr symmetrisch auch schreiben kann:

$$F' \equiv \frac{1}{2^3}(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1+y_3-y_2-y_4)(y_1+y_4-y_3-y_2),$$

um sofort zu erkennen, dass F'^2 — früher F^2 — bei allen Collineationen nicht verändert wird. Die notirte vierfache Schreibweise von F' entspricht dem Umstande, dass durch drei Gerade, welche sich in einem Punkte schneiden, vier congruente dreiseitige Ecken entstehen, indem beim Oktaëder acht Octanten auftreten u. s. w. Als Coordinaten der acht dreifach zählenden Punkte erhält man unter Berücksichtigung der beiden Bedingungen:

$$\Sigma y=0 \quad \Sigma y^2=0$$

durch eine kurze Überlegung folgende:

$$\begin{array}{llll} 1 \quad \alpha \quad \alpha^2 \quad 0 & \ldots 1) \qquad & 1 \quad \alpha^2 \quad \alpha \quad 0 & \ldots 2) \\ \alpha \quad \alpha^2 \quad 0 \quad 1 & \ldots 3) \qquad & \alpha^2 \quad \alpha \quad 0 \quad 1 & \ldots 4) \\ \alpha^2 \quad 0 \quad 1 \quad \alpha & \ldots 5) \qquad & \alpha \quad 0 \quad 1 \quad \alpha & \ldots 6) \\ 0 \quad 1 \quad \alpha \quad \alpha^2 & \ldots 7) \qquad & 0,\; 1,\; \alpha^2,\; \alpha & \ldots 8). \end{array}$$

Dass so nicht mehr als acht erhalten werden, ergibt sich wieder daraus, dass z. B 0α, $1\alpha^2$ mit dem letzten identisch ist, wie man durch Multiplication mit α^2 sofort erhält.

Sucht man hier die Gleichungen der vier Geraden, welche gegenüberliegende Punkte verbinden, so ergeben sich für diese Gleichungen

$$y_1=0, \quad y_2=0, \quad y_3=0, \quad y_4=0,$$

oder auch

$$y_2+y_3+y_4=0, \quad y_1+y_3+y_4=0, \quad y_1+y_2+y_3=0.$$

Demnach hat man hier

$$H' = y_1 y_2 y_3 y_4 = (y_1+y_2+y_3)(y_1+y_2+y_4)(y_1+y_3+y_4)(y_2+y_3+y_4).$$

Dieses Ergebniss hätte man voraussehen können, denn da H' z. B. bei den Substitutionen (123) unverändert bleibt, so muss es, weil ein Factor sowohl in $y_1 y_2 y_3$ symmetrisch als linear ist, den Factor

$$a(y_1+y_2+y_3)+dy_4$$

oder kürzer, wegen $\Sigma y = 0$, den Factor y_4 enthalten, etc.

Was die Coordinaten der 12 doppelt zählenden Punkte betrifft, so findet man für sie die Werthe

y_1	y_2	y_3	y_4
$-1 \mp \sqrt{-2}$,	1,	1,	$-1 \pm \sqrt{-2}$
$-1 \mp \sqrt{-2}$,	$-1 \pm \sqrt{-2}$,	1,	1
$-1 \mp \sqrt{-2}$,	1,	$-1 \pm \sqrt{-2}$,	1
1,	1,	$-1 \mp \sqrt{-2}$,	$-1 \pm \sqrt{-2}$
1,	$-1 \mp \sqrt{-2}$,	1,	$-1 \pm \sqrt{-2}$
1,	$-1 \mp \sqrt{-2}$,	$-1 \pm \sqrt{-2}$,	1.

und hieraus folgen die Gleichungen der Geraden, welche gegenüberliegende Punkte verbinden, in der Form

$$y_1 - y_2 = 0 \quad y_1 - y_3 = 0 \quad y_1 - y_4 = 0 \quad y_2 - y_3 = 0 \quad y_2 - y_3 = 0 \quad y_3 - y_4 = 0,$$

darum lautet hier T'

$$T' = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) y_2 - y_3)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4)$$

und man erkennt, dass T'^2 nichts Anderes ist, als die Discriminante der Gleichung für y.

In Analogie zu der Covariantenrelation

$$T^2 \equiv H^3 - 108 F^4$$

schreibe ich auch hier

$$T'^2 \equiv \mu H'^3 + x F'^4,$$

wobei man natürlich die Gleichungen $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$ zu berücksichtigen hat. Um x und μ zu bestimmen, setze ich statt $y_1 y_2 y_3 y_4$ einmal $1, -1, i, -i$ und dann $1, \alpha, \alpha^3, 0$; im ersten Falle wird $F' = 0$, $H' = -1$, $T' = 16$, also $\mu = 16^2 = 2^8$ und im zweiten ist $H' = 0$, $F' = -1$, $T' = -3\sqrt{-3}$ daher $x = -27$ und desshalb ist

$$T'^2 \equiv 2^8 H'^3 - 3^3 F'^4,$$

und zwar für alle F- und H-Punkte zunächst wegen der Symmetrie und darum dann für alle y, mit Beachtung der zwei Bedingungsgleichungen zwischen denselben, giltig. Ich werde diese Relation später noch auf eine andere Weise herleiten, wo sofort die allgemeine Giltigkeit derselben erhellt. Vielleicht darf ich hier auf die Analogie im Baue der Factoren von T hinweisen, von denen einer lautete:

$$\chi_1 = \frac{1}{i}(\xi_1^2 - i\xi_2^2) \quad \text{oder} \quad \chi_4 = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2),$$

während ich hier für die Factoren von T' fand unter anderen $y_1 - y_2$ oder $y_1 + 2y_2 + y_4 - y_2 - y_4$, und welcher Übergang durch eine quadratische Transformation, die der nächste Paragraph angibt, bewirkt wird, die aber auch aus dem Gesagten schon folgt, indem sich herausstellte, das wegen

$$H' = y_1 y_2 y_3 y_4,$$

die einzelnen y den Würfeldiagonalen proportional sind, was durch das Spätere noch deutlicher wird.

Auch meine früher benützte Schreibweise von $S_{\frac{1+i}{2}}$ z. B. zur Bezeichnung der Substitution von der Periode 2, welche um eine Axe dreht, die den Winkel zwischen $(+1, -1)$ und $(+i, -i)$ halbirt, oder einer Substitution der Periode 3, z. B. $S_{\frac{0+1+i}{3}}$, welche durch $2\frac{\pi}{3}$ um einen Durchmesser der Kugel dreht, der durch den Schwerpunkt der drei Punkte 0, 1, i geht, rechtfertigt sich hier, denn nimmt man das Dreieck mit den Seiten $y_1+y_2=0$, $y_2+y_3=0$, $y_3+y_1=0$, so erhält man das bei der ersten, resp. zweiten festbleibende Element als gegeben durch

$$\frac{(y_1+y_2)+(y_2+y_3)}{2}=\frac{y_2-y_4}{2}=0$$

und

$$\frac{(y_1+y_2)+(y_2+y_3)+(y_3+y_1)}{3}=\frac{2}{3}y_4=0.$$

Man vergleiche, um die Nothwendigkeit dieses Ergebnisses einzusehen, hiemit das im §. 3 des ersten Abschnittes Gesagte.

§. 3. Eindeutiges Entsprechen zwischen ξ und $y_1 y_2 y_3 y_4$.

Ist $\xi=\frac{\xi_1}{\xi_2}$ der Parameter, welcher den 24 Oktaëdersubstitutionen unterworfen wird, so behaupte ich die Existenz einer in den Wurzeln $y_1 y_2 y_3 y_4$ linearen rationalen Function $f\,(y_1 y_2 y_3 y_4)$, welche so mit ξ in Beziehung steht, dass durch die in vorhergehenden Paragraphen angegebenen 24 Vertauschungen der y das ξ sämmtliche Oktaëdersubstitutionen erfährt.

Man gelangt zur Einsicht in die Richtigkeit dieser Behauptung und zugleich zur Kenntniss der Function f auf folgende Weise. Nimmt man den Kegelschnitt

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=0,$$

so lautet, wie man sehr einfach erhält, die Tangente im Punkte 1) F' (§. 2), mit den Coordinaten 1, i, -1, $-i$

$$y_1+iy_2-y_3-iy_4=0.$$

Die Gerade ferner, welche den Punkt 1) mit 2), der die Coordinaten 1, $-i$, -1, i hat, verbindet, lautet nach α) des §. 2

$$iy_1+y_2+iy_3+y_4=0.$$

Diese beiden Geraden schneiden sich also im Punkte 1) von dem Kegelschnitte $\Sigma y=0$ und können daher zur Bildung des Strahlenbüschels durch den genannten Punkt als Scheitel benützt werden:

$$y_1+iy_2-y_3-iy_4-\xi(iy_1+y_2+iy_3+y_4)=0,$$

oder

$$\xi=\frac{y_1+iy_2-y_3-iy_4}{iy_1+y_2+iy_3+y_0}, \qquad \ldots\alpha)$$

und dadurch, behaupte ich, ist die oben bezeichnete Function $f\,(y_1 y_2 y_3 y_4)$ gefunden; denn da alle Strahlen des Büschels α) durch einen gemeinsamen Punkt des Kegelschnittes, nämlich den Punkt 1) desselben gehen, so ist der zweite Schnittpunkt mit demselben also $y_1 y_2 y_3 y_4$ eindeutig auf ξ bezogen, und da die Gruppe des Oktaëders und der Gleichung vierten Grades als congruent sich erweisen, so erhellt die Richtigkeit der Behauptung.

Ich bemerke aber ferner, dass durch α) gleichzeitig das Oktaëder in der Normalform gegeben ist, denn setzt man in α) für $y_1 y_2 y_3 y_4$ successive die Coordinaten der sechs F'-Punkte des vorigen Paragraphen, so erhält man für ξ die Werthe

$$0,\ \infty,\ i,\ -i,\ +1,\ -1,$$

also in der That die sechs F-Punkte des Oktaëders.

Ebenso kann man sich von dem Entsprechen der H und H', bezüglich T und T'-Punkte überzeugen und dieses Entsprechen sogar ohne Rechnung angeben, wenn man über die Lage der F und F' klar ist.

Um nur ein Beispiel hiefür zu geben, so setze ich für die y, resp. $-1-\sqrt{-2}$, 1, 1, $-1+\sqrt{-2}$, die Coordinaten eines T'-Punktes und finde dann für ξ den Werth $i(1-\sqrt{2})$, welches in der That ein T-Punkt ist u. s. w.

§. 4. Zusammengehörigkeit der Substitution für die y und den Parameter ξ.

Bezeichnet man die rechte Seite von α) kurz mit 1234, wobei auf die Reihenfolge der y wohl zu achten ist, also

$$\frac{y_2+iy_1-y_3-iy_4}{iy_2+y_1+iy_3+y_4}$$

mit 2134 zu bezeichnen ist, indem die so erhaltene Function aus der ursprünglichen durch die Substitution (12) hervorgeht, so erhält man aus α) folgendes System von Gleichungen:

$$\xi=1234, \quad \ldots 1) \qquad i\xi=2341, \quad \ldots 2) \qquad -\xi=3412 \quad \ldots 3)$$

$$-i\xi=4123; \quad \ldots 4) \qquad \frac{\xi-1}{\xi+1}=3421 \quad \ldots 5)$$

$$-\frac{1}{\xi}=2143, \quad \ldots 6) \qquad \frac{\xi+1}{\xi-1}=4312 \quad \ldots 7)$$

$$\frac{-i\xi+1}{\xi-i}=2413 \quad \ldots 8) \qquad \frac{1}{\xi}=4321 \quad \ldots 9)$$

$$\frac{i\xi+1}{\xi+i}=3142 \quad \ldots 10) \qquad \frac{i}{\xi}=1432 \quad \ldots 11)$$

$$-\frac{i}{\xi}=3214 \quad \ldots 12) \qquad \frac{\xi+1}{\xi-1}=1243 \quad \ldots 13)$$

$$\frac{-\xi+1}{\xi+1}=2134 \quad \ldots 14) \qquad \frac{i\xi-1}{\xi-i}=1324 \quad \ldots 15)$$

$$\frac{-i\xi-1}{\xi+i}=4231 \quad \ldots 16) \qquad \frac{-i\xi+1}{i\xi+1}=3241 \quad \ldots 17)$$

$$\frac{i(\xi-1)}{\xi+1}=4213 \quad \ldots 18) \qquad \frac{i(\xi+1)}{\xi-1}=2431 \quad \ldots 19)$$

$$\frac{\xi+i}{\xi-i}=4132 \quad \ldots 20) \qquad \frac{-\xi+i}{\xi+1}=1423 \quad \ldots 21)$$

$$\frac{i(-\xi+1)}{\xi+1}=1342 \quad \ldots 22) \qquad \frac{i\xi+1}{i\xi-1}=2314 \quad \ldots 23)$$

$$\frac{\xi+1}{i(\xi-1)}=3124. \quad \ldots 24)$$

Um die Richtigkeit dieser Gleichungen einzusehen, bemerke ich, dass z. B.

$$2341=\frac{-i(y_1+iy_2-y_3-iy_4)}{iy_2+y_3+iy_4+y_1}$$

und andererseits

$$i\xi=\frac{i(y_1+iy_2-y_3-iy_4)}{iy_1+y_2+iy_3+y_4}$$

ist, damit also

$$i\xi=2341$$

sei, ist erforderlich, dass

$$iy_1 + y_3 + iy_3 + y_4 = -(iy_2 + y_3 + iy_4 + y_1)$$

sei, oder

$$(1+i)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 0,$$

was ja in der That zutrifft, da $\Sigma y = 0$ ist. Aus dieser Gleichung $i\xi = 2341$ folgen dann sofort durch Wiederholung 3) und 4). Um dann 5) zu beweisen, hat man nur $\Sigma y = 0$ und $\Sigma y^2 = 0$ zu beachten, und aus 2) und 5) folgen alle übrigen durch Multiplication, denn man hat z. B., da 6) und 7) nur Potenzen von 5) sind, für 8), und zwar für die linke Seite zunächst, das Product von den drei Substitutionen

$$-i\xi, \quad \frac{\xi+1}{-\xi+1}, \quad i\xi,$$

wobei ich immer mit der Substitution links beginne, denn dann ist

$$(-i\xi)\left(\frac{\xi+1}{-\xi+1}\right)(i\xi) = \left(\frac{-i\xi+1}{i\xi+1}\right)(i\xi) = \frac{-i\xi+1}{\xi-i}.$$

Andererseits macht das Product von (4123), (4312), (2341) aus 1234, zunächst (3241), (2341) oder 2413, was zu beweisen war. Ebenso überzeugt man sich von der Richtigkeit aller übrigen Gleichungen. Übrigens kann man auch durch geometrische Betrachtungen sofort die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Substitutionsgruppen angeben, den löst man z. B. drei beliebige der Gleichungen 1) bis 7) nach $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ auf, so findet man bei geeigneter Wahl des constanten Proportionalitätsfactors, in homogener Schreibweise:

$$\begin{aligned}
y_1 &= -\frac{2}{\sqrt{6i}}(\xi_1^2 - (1+i)\xi_1\xi_2 - i\xi_2^2) \\
y_2 &= +\frac{2i}{\sqrt{6i}}(\xi_1^2 - (1-i)\xi_1\xi_2 + i\xi_2^2) \\
y_3 &= +\frac{2}{\sqrt{6i}}(\xi_1^2 + (1+i)\xi_1\xi_2 - i\xi_2^2) \\
y_4 &= -\frac{2i}{\sqrt{6i}}(\xi_1^2 + (1-i)\xi_1\xi_2 + i\xi_2^2),
\end{aligned} \qquad \ldots\beta)$$

d. h. die y werden geradezu die oben im ersten und zweiten Abschnitte mit φ bezeichneten vier Würfeldiagonalen, und jetzt kann man leicht angeben, welche Oktaëdersubstitution gefunden wird, wenn man auf die rechte Seite von α) z. B. die Substitution (123) anwendet, denn hiebei bleibt y_4 fest, also muss ξ so transformirt werden, dass das festbleibende Punktepaar durch

$$\xi_1^2 + (1-i)\xi_1\xi_2 + i\xi_2^2 = 0$$

bestimmt ist u. s. w.

§. 4. Fortsetzung.

In Folge der Gleichungen β) ist man nun auch im Stande, die früher auf einem anderen Wege gefundene Covariantenrelation zwischen F', H' und T' direct aus der zwischen F, H und T geltenden herzuleiten. Man erhält nämlich hiefür zunächst folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
y_1 + y_2 &= \frac{2(i-1)}{\sqrt{6i}}(\xi_1^2 + \xi_2^2) \\
y_2 + y_3 &= \frac{2(i+1)}{\sqrt{6i}}(\xi_1^2 - \xi_2^2) \\
y_3 + y_1 &= 4\,\frac{1+i}{\sqrt{6i}}\,\xi_1\xi_2,
\end{aligned}$$

und daher ist

$$F = -\frac{3\sqrt{-3}}{2^4} F',$$

und analog ergibt sich

$$H = -\frac{3^2}{2^2} H'$$

$$T = \frac{3^3}{2^7} T',$$

und wenn man diese Werthe in die früher aufgestellte Gleichung

$$T^2 = H^3 - 108\, F^4$$

einsetzt, so ergibt sich sofort die Gleichung

$$T'^2 = 2^8 H'^3 - 3^3 F'^4,$$

welche ich schon im §. 2 aufstellte.

Nimmt man nun die biquadratische Form

$$y_1'^4 + A y_1' y_2'^3 + B y_2'^4$$

und bildet die beiden Invarianten derselben, so hat man in der Clebsch'schen Schreibweise

$$i = 2B, \quad j = -\frac{3}{8} A^2,$$

und dann für die Discriminante der bezeichneten Form

$$D = \frac{1}{27}(i^3 - 6j^2) = \frac{1}{3^3 . 2^5}(2^8 B^3 - 27 A^4),$$

und daher ist T'^2, welches das Product aus den Quadraten der Wurzeldifferenzen ist, durch die Gleichung

$$T'^2 = \frac{\text{Const.}}{27 \cdot 2^5}(2^8 B^3 - 3^3 A^4),$$

wo die Constante noch zu bestimmen ist, mit A und B verbunden. Um diese Constante zu finden, setze ich z. B.

$$y_1 = 1, \ y_2 = -1, \ y_3 = i, \ y_4 = -i,$$

und erhalte dann

$$\text{Const.} = 27 . 2^5,$$

also ist

$$T'^2 = 2^8 B^3 - 3^3 A^4,$$

und weil

$$H' = y_1 y_2 y_3 y_4 = B$$

st, so hat man

$$H = -\frac{3^2}{2^2} B, \quad F = -\frac{3\sqrt{-3}}{2^4} A. \qquad \ldots\gamma)$$

§. 5. Lösung der biquadratischen Gleichung. Schluss.

Mit Hilfe der Gleichungen γ) erhält man nun die Oktaëdergleichung

$$\frac{H^3 \xi}{108\, F^4(\xi)} = -\frac{2^{12}}{3^3} \frac{B^3}{A^4}, \qquad \ldots\delta)$$

so dass also der Parameter X in der Oktaëdergleichung des zweiten Abschnittes den Werth hat

$$-\frac{2^{12}}{3^3} . \frac{B^3}{A^4}.$$

Löst man nun nach dem Früheren die Oktaëdergleichung δ algebraisch oder mittelst hypergeometrischer Reihen, so findet man ξ und nach geeigneter Normirung von ξ_2 dann ξ_1, und durch die Formeln β) des dritten Paragraphen dann die vier Wurzeln $y_1 y_2 y_3 y_4$.

Selbstverständlich kann man auch die Resolvente für die φ benützen, indem man für F und H die durch γ) gegebenen Werthe in die Gleichung für φ einsetzt.

Beachtet man die geometrische Anschaulichkeit der ganzen Betrachtung und dass mit Hilfe von f und h die quadratische Gleichung gelöst werden kann, wie es selbstverständlich ist, so ergibt sich als Schlussresultat der Satz: Die Theorie der Gleichungen vom zweiten, dritten und vierten Grade ist völlig durch das Oktaëder gegeben, welches demnach das geometrische Bild aller dieser Gleichungen ist.

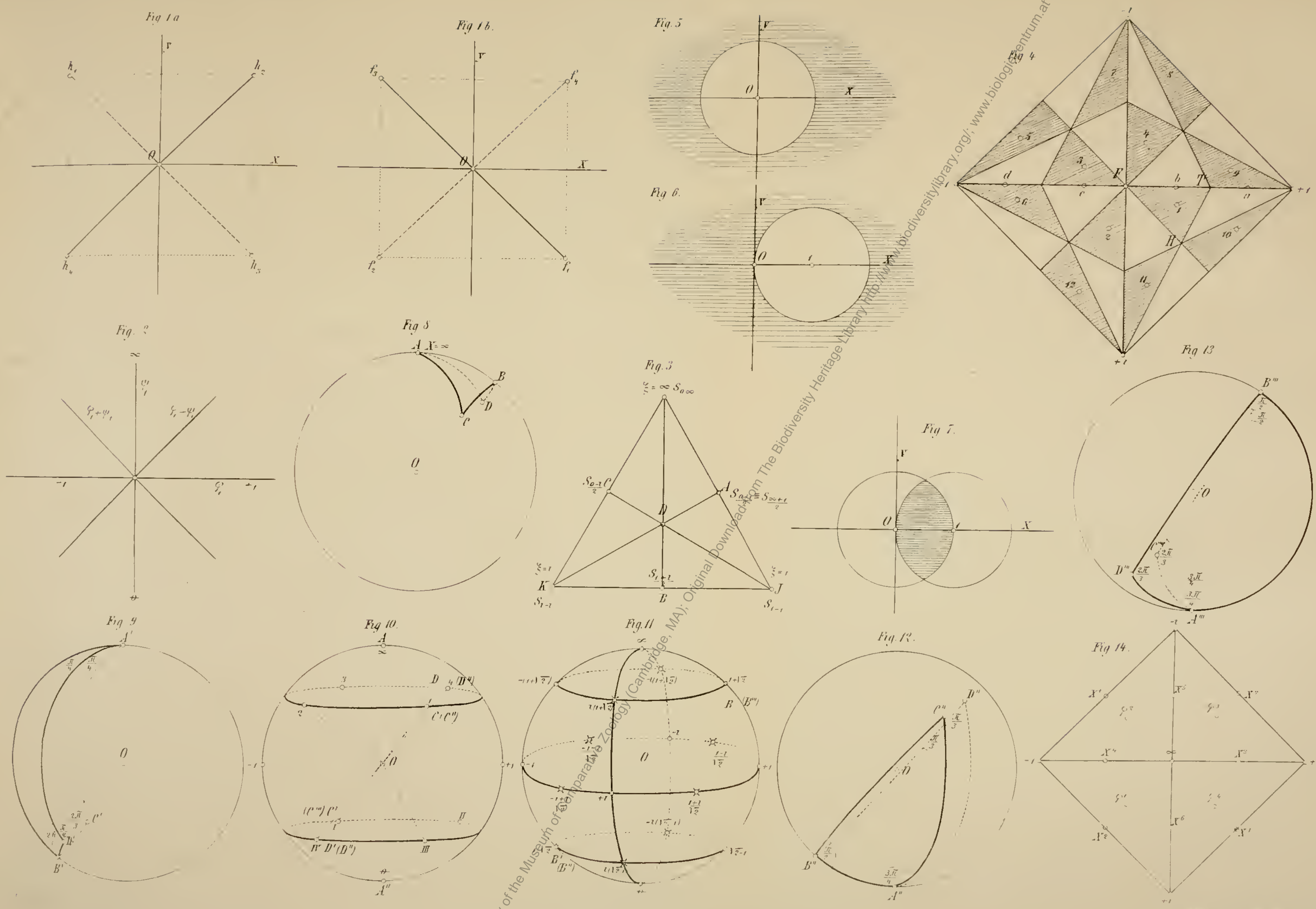
Fig. 1a
Fig. 1b.
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 4
Fig. 2
Fig. 8
Fig. 3
Fig. 7.
Fig. 13
Fig. 9
Fig. 10.
Fig. 11
Fig. 12.
Fig. 14.