

DIE
DETERMINANTEN HÖHEREN RANGES
UND
IHRE VERWENDUNG ZUR BILDUNG VON INVARIANTEN.

VON
GUSTAV v. ESCHERICH.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 22. APRIL 1880.

In einem kleinen, interessanten Aufsätze, betitelt: „Über eine Erweiterung des Begriffes der Determinanten“ untersucht Zehfuss gewisse analytische Gebilde, die nach ähnlichen Regeln aus Elementen mit mehr als zwei Indices zusammengesetzt wurden, wie die Determinanten, aus denen mit zwei Indices. Die Lectüre dieser Broschüre veranlasste mich, diese Gebilde, welche Zehfuss Determinanten höheren Ranges nennt, einer eingehenderen Betrachtung zu unterwerfen und insbesondere ihren, bisher mehr geahnten als erkannten, Bezügen zur Invariantentheorie nachzuspüren. Bei der überraschenden Einfachheit, welche die Theorie der Determinanten durch die combinatorische Multiplication erlangt, lag der Gedanke nahe, nach einer analytischen Definition dieser Determinanten höheren Ranges zu suchen, welche auch sie den Methoden der Ausdehnungslehre unterwirft.¹ Diese Definition erwies sich wirklich fruchtbringend, indem sie nicht nur die ganze Theorie dieser Gebilde unmittelbar offenlegte, sondern auch, geradezu ungesucht, eine Reihe invarianter Bildungen lieferte. Dieselben sind, wie ich gleich hier erwähnen will, nicht blos bei Functionen mit einer Reihe, sondern auch mit mehreren Reihen Variablen, die aber alle denselben beiden Classen dualistischer Variablen entnommen, ohne übrigens denselben oder nur transponirten Transformationen unterworfen sein zu müssen, anwendbar, gehören also zu jenen Bildungen, die seit ihrem Auftreten in der Theorie der Connexe unsere Aufmerksamkeit in immer höherem Grade fesseln dürften. Durch zweckmässige Wahl gewisser Grössen kann man aus ihnen auch Invarianten mit Reihen verschiedenartiger Variablen ableiten. Bei Beschränkung auf Functionen mit nur

¹ Dasselbe gilt für die Theorie der zusammengesetzten Determinanten und die Bemerkung Borchardt's (Journal für Mathem. Bd. LXXXIX, p. 82) veranlasst mich schon jetzt zur Mittheilung, dass mittelst der Methoden der Ausdehnungslehre die Vorwürfe Sylvester's (ibidem, Bd. LXXXVIII, p. 49) sich fast spielend bewältigen lassen. Ich bin auf diesem Wege bald nach Bekanntmachung dieser Abhandlung zu den richtigen Resultaten gelangt, und werde sie gelegentlich zum Gegenstand einer Arbeit machen.

einer Reihe Variablen sind diese Bildungen nach der Benennung Aronhold's „Functionalvarianten“; sie umfassen die Bildungen Cayley's und sind darunter also auch die von Clebsch und Gordan als „Überschiebungen“ hervorgehobenen enthalten.

Diesen Behauptungen sind die folgenden Blätter gewidmet. Ich musste mich hierbei der äussersten Kürze befleissigen und zunächst auf jede bedeutendere Anwendung verzichten.

I.

$$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)} \dots \alpha_n^{(1)}; \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)} \dots \alpha_n^{(2)}, \dots; \dots \alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)} \dots \alpha_n^{(m)}$$

seien m Gruppen von einander unabhängiger Grössen I. Stufe. Die Grössen derselben Gruppe werden in der Folge stets combinatorisch — was nach Grassmann durch Einschliessung des Productes in eckige Klammern angezeigt werde — und die verschiedener Gruppen algebraisch mit einander multiplicirt.

Das combinatorische Product aus den m Factoren

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1^{(m)}} \alpha_{k_1^{(m)}}^{(m)} \dots \sum_{k_1^{(2)}} \alpha_{k_1^{(2)}}^{(2)} \sum_{k_1^{(1)}} A_{k_1^{(1)} k_1^{(2)} \dots k_1^{(m)}}^{(1)} \alpha_{k_1^{(1)}}^{(1)} \\ & \sum_{k_2^{(m)}} \alpha_{k_2^{(m)}}^{(m)} \dots \sum_{k_2^{(2)}} \alpha_{k_2^{(2)}}^{(2)} \sum_{k_2^{(1)}} A_{k_2^{(1)} k_2^{(2)} \dots k_2^{(m)}}^{(2)} \alpha_{k_2^{(1)}}^{(1)} \\ & \dots \dots \dots \\ & \sum_{k_n^{(m)}} \alpha_{k_n^{(m)}}^{(m)} \dots \sum_{k_n^{(2)}} \alpha_{k_n^{(2)}}^{(2)} \sum_{k_n^{(1)}} A_{k_n^{(1)} k_n^{(2)} \dots k_n^{(m)}}^{(n)} \alpha_{k_n^{(1)}}^{(1)}, \end{aligned} \quad (1)$$

wo jedes k alle Werthe von 1 bis n annimmt, ist äquivalent der m fachen Summe

$$\begin{aligned} & \sum \sum \dots \sum A_{k_1^{(1)} k_1^{(2)} \dots k_1^{(m)}}^{(1)} A_{k_2^{(1)} k_2^{(2)} \dots k_2^{(m)}}^{(2)} \dots A_{k_n^{(1)} k_n^{(2)} \dots k_n^{(m)}}^{(n)} \left[\alpha_{k_1^{(1)}}^{(1)} \alpha_{k_2^{(1)}}^{(1)} \dots \alpha_{k_n^{(1)}}^{(1)} \right] \left[\alpha_{k_1^{(2)}}^{(2)} \alpha_{k_2^{(2)}}^{(2)} \dots \alpha_{k_n^{(2)}}^{(2)} \right] \\ & \dots \left[\alpha_{k_1^{(m)}}^{(m)} \alpha_{k_2^{(m)}}^{(m)} \dots \alpha_{k_n^{(m)}}^{(m)} \right]. \end{aligned}$$

Der Spielraum der k verfäht aber hier durch den Umstand eine Beschränkung, dass jedes Glied, wo zwei k mit demselben oberen Index gleiche Werthe besitzen, verschwindet. Die k mit demselben oberen Index bilden somit in dieser Summe nur die verschiedenen Permutationen der Zahlen 1, 2, $\dots$, n und jedes Glied besitzt daher den Factor:

$$[\alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \dots \alpha_n^{(1)}] [\alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(2)} \dots \alpha_n^{(2)}] \dots [\alpha_1^{(m)} \alpha_2^{(m)} \dots \alpha_n^{(m)}].$$

Der Zahlencoefficient, der mit diesem Producte multiplicirt die Entwicklung von (1) darstellt, lässt sich leicht durch die Bemerkung finden, dass zu jedem Gliede

$$A_{k_1^{(1)} k_1^{(2)} \dots k_1^{(m)}}^{(1)} A_{k_2^{(1)} k_2^{(2)} \dots k_2^{(m)}}^{(2)} \dots A_{k_n^{(1)} k_n^{(2)} \dots k_n^{(m)}}^{(n)} \left[\alpha_{k_1^{(1)}}^{(1)} \alpha_{k_2^{(1)}}^{(1)} \dots \alpha_{k_n^{(1)}}^{(1)} \right] \left[\alpha_{k_1^{(2)}}^{(2)} \alpha_{k_2^{(2)}}^{(2)} \dots \alpha_{k_n^{(2)}}^{(2)} \right] \dots \left[\alpha_{k_1^{(m)}}^{(m)} \alpha_{k_2^{(m)}}^{(m)} \dots \alpha_{k_n^{(m)}}^{(m)} \right] \quad (2)$$

der Entwicklung sich ein anderes vorfindet, welches aus diesem durch Vertauschung zweier k mit demselben oberen Index hervorgeht und das entgegengesetzte Zeichen besitzt.

Der Coefficient wird also aus

$$A_{1,1\dots1}^{(1)} A_{2,2\dots2}^{(2)} A_{m,m\dots m}^{(n)}$$

gebildet, indem man die gleichstelligen unteren Indices auf alle möglichen Weisen mit einander vertauscht und jedes dieser Glieder je nachdem es aus dem ursprünglichen durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen hervorging, mit dem positiven oder negativen Zeichen versehen.

Der so gewonnene Ausdruck ist also eine Determinante $(m+1)$ ten Ranges und n ter Ordnung und soll mit

$$\Sigma^{(m+1)} \pm A_{1,1\dots1}^{(1)} A_{2,2\dots2}^{(2)} A_{n,n\dots n}^{(n)}$$

bezeichnet werden.

II.

1. Den beiden früheren Bemerkungen kann man jetzt die Fassung geben:

Die Determinante verschwindet, wenn eine Reihe gleichstelliger unterer Indices einer zweiten gleich ist, und sie ändert ihr Zeichen, sobald man in ihr zwei Indices zweier unteren Reihen mit einander vertauscht.

Vertauscht man hingegen zwei obere Indices, so zeigt (2), dass sich jedes Glied um den Factor $(-1)^m$ ändert, und es ändert sich somit die ganze Determinante durch Vertauschung zweier oberen Indices um diesen Factor. Es verschwinden daher und bloß die Determinanten geraden Ranges, wenn in ihnen zwei obere Indices gleich sind.

Aus der Form des Productes (1) folgt, dass, wenn die Elemente irgend einer Reihe mit demselben oberen Index aus einer gleichen Anzahl Summanden bestehen, die Determinante in eine Summe eben so vieler Determinanten gleichen Ranges und gleicher Ordnung sich zerlegen lässt.

2. Lässt man das Product (1) dadurch entstehen, dass man zunächst die g ersten Gruppen der k mit demselben oberen Index alle Werthe von 1 bis n durchlaufen lässt, so ist offenbar der Coefficient von

$$[a_1^{(1)} a_2^{(1)} \dots a_n^{(1)}] [a_1^{(2)} a_2^{(2)} \dots a_n^{(2)}] \dots [a_1^{(g)} a_2^{(g)} \dots a_n^{(g)}] a_{k_2^{(g+1)}}^{(g+1)} a_{k_2^{(g+1)}}^{(g+1)} \dots a_{k_n^{(g+1)}}^{(g+1)} \dots a_{k_1^{(m)}}^{(m)} a_{k_2^{(m)}}^{(m)} \dots a_{k_n^{(m)}}^{(m)}$$

eine Determinante $(g+1)$ ten Ranges und n ter Ordnung. Aus derselben erhält man die ursprüngliche Determinante m ten Ranges, indem man nunmehr den k der übrigen $(n-g)$ Gruppen die Werthe von 1 bis n in allen möglichen Vertauschungen beilegt. Hiedurch geht aber aus der Determinante $(g+1)$ ten Ranges eine Summe von $(n!)^{m-g}$ solcher Determinanten hervor.

Für den Fall $g=1$ ergibt sich hieraus, dass jede Determinante (m) ten Ranges einer Summe von $(n!)^{m-1}$ quadratischen Determinanten gleich ist, deren Summanden aus

$$\Sigma \pm A_{1, k_1^{(2)} \dots k_1^{(m)}}^{(1)} A_{2, k_2^{(2)} \dots k_2^{(m)}}^{(2)} \dots A_{n, k_n^{(2)} \dots k_n^{(m)}}^{(m)}$$

erhalten werden, indem man den Gruppen der k mit demselben oberen Index die Permutationen der Zahlen 1 bis n in allen möglichen Anordnungen beilegt.

III.

Die den Minoren der quadratischen Determinanten entsprechenden Sätze findet man ebenfalls leicht und auf ganz dieselbe Weise wie bei diesen.

Um den Coëfficienten von

$$A_{k_1^{(1)} k_1^{(2)} \dots k_1^{(m)}}^{(\lambda)}$$

in der Determinante zu finden, mache man jene der n -Summen in (1) in welcher dieses Element vorkommt, zum ersten Factor des Productes; der gesuchte Coëfficient ist somit:

$$\begin{aligned} & (-1)^{m\lambda + k_1^{(1)} + k_1^{(2)} + \dots + k_1^{(m)}} \sum_{k_1^{(m)}} a_{k_1^{(m)}}^{(m)} \dots \sum_{k_1^{(2)}} a_{k_1^{(2)}}^{(2)} \sum_{k_1^{(1)}} A_{k_1^{(1)} k_1^{(2)} \dots k_1^{(m)}}^{(\lambda)} a_{k_1^{(1)}}^{(1)} \\ & \sum_{k_2^{(m)}} a_{k_2^{(m)}}^{(m)} \dots \sum_{k_2^{(2)}} a_{k_2^{(2)}}^{(2)} \sum_{k_2^{(1)}} A_{k_2^{(1)} k_2^{(2)} \dots k_2^{(m)}}^{(\lambda)} a_{k_2^{(1)}}^{(1)} \\ & \dots \dots \dots \\ & \sum_{k_{\lambda+1}^{(m)}} a_{k_{\lambda+1}^{(m)}}^{(m)} \dots \sum_{k_{\lambda+1}^{(2)}} a_{k_{\lambda+1}^{(2)}}^{(2)} \sum_{k_{\lambda+1}^{(1)}} A_{k_{\lambda+1}^{(1)} k_{\lambda+1}^{(2)} \dots k_{\lambda+1}^{(m)}}^{(\lambda)} a_{k_{\lambda+1}^{(1)}}^{(1)} \\ & \sum_{k_{\lambda+1}^{(m)}} a_{k_{\lambda+1}^{(m)}}^{(m)} \dots \sum_{k_{\lambda+1}^{(2)}} a_{k_{\lambda+1}^{(2)}}^{(2)} \sum_{k_{\lambda+1}^{(1)}} A_{k_{\lambda+1}^{(1)} k_{\lambda+1}^{(2)} \dots k_{\lambda+1}^{(m)}}^{(\lambda)} a_{k_{\lambda+1}^{(1)}}^{(1)} \\ & \dots \dots \dots \\ & \sum_{k_n^{(m)}} a_{k_n^{(m)}}^{(m)} \dots \sum_{k_n^{(2)}} a_{k_n^{(2)}}^{(2)} \sum_{k_n^{(1)}} A_{k_n^{(1)} k_n^{(2)} \dots k_n^{(m)}}^{(\lambda)} a_{k_n^{(1)}}^{(1)} . \end{aligned}$$

Auch das Analogon des La Place'schen Satzes bei den quadratischen Determinanten ergibt sich hier auf dieselbe Weise wie dort, indem man die Factoren des Productes (1) in Gruppen theilt und die entwickelten Producte der einzelnen Gruppen mit einander multiplicirt.

Es gilt nämlich für die Entwicklung eines combinatorischen Productes aus λ -Factoren von (1), wo $\lambda < n$ eine ganz ähnliche Regel wie bei Producten, in denen jeder der λ -Factoren aus n von einander unabhängigen Grössen erster Stufe numerisch abgeleitet ist.

Man bilde aus den Grössen jeder Reihen:

$$a_1^{(1)}, a_2^{(1)} \dots a_n^{(1)}$$

$$a_1^{(2)}, a_2^{(2)} \dots a_n^{(2)}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_1^{(m)}, a_2^{(m)} \dots a_n^{(m)}$$

die multiplicativen Combinationen zur λ ten Classe und multiplicire je m dieser Combinationen, die verschiedenen Reihen angehören, mit einander. Das gesuchte Product ist dann aus diesen Producten multiplicativer Combinationen numerisch ableitbar und der zu irgend einem derselben gehörige Coëfficient ist die Determinante λ ten Ranges und n ter Ordnung aus den Coëfficienten, welche zu den Factoren dieses Productes gehören.

Entwickelt man nun jede der Gruppe, in welche man die Factoren des Productes (1) getheilt hat, nach diesem Satze und beachtet, dass bei der weiteren Multiplication dieser Gruppen nur jene Glieder nicht verschwinden, in welchen alle a von einander verschieden sind, so hat man das Analogon des La Place'schen Satzes für diese Determinanten.

IV.

Gehören die n einfachen von einander unabhängigen Grössen $b_1, b_2 \dots b_n$ dem Systeme der $a_1^{(1)}, a_2^{(1)} \dots a_n^{(1)}$ an, so sind die a aus den b numerisch ableitbar und es soll diese Abhängigkeit durch die Relationen

$$a_1^{(1)} = \alpha_{11} b_1 + \alpha_{12} b_2 + \dots + \alpha_{1n} b_n$$

$$a_2^{(1)} = \alpha_{21} b_1 + \alpha_{22} b_2 + \dots + \alpha_{2n} b_n$$

$$\dots$$

$$a_n^{(1)} = \alpha_{n1} b_1 + \alpha_{n2} b_2 + \dots + \alpha_{nn} b_n$$

ausgedrückt werden. Da das Product $[a_1^{(1)} a_2^{(1)} \dots a_n^{(1)}] = \sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \dots \alpha_{nn} [b_1 b_2 \dots b_n]$, so lehrt die Substitution in das Product (1) eine Determinante höheren Ranges mit einer quadratischen multipliciren. Die Elemente der Productdeterminante erhält man aus ihrem allgemeinen Gliede

$$B_{\lambda, k_1^{(2)} \dots k_1^{(m)}}^{(\mu)} = \sum_{k_1^{(1)}} A_{k_1^{(1)} k_1^{(2)} \dots k_1^{(m)}}^{(\mu)} \alpha_{k_1^{(1)} \lambda}^{(1)}$$

wo $k_1^{(1)}$ alle Werthe von 1 bis n durchläuft.

Umgekehrt: Haben die Elemente einer Determinante $(m+1)$ ten Ranges die obige Form, so ist die Determinante das Product:

$$\sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \dots \alpha_{nn}^{(m+1)} \sum \pm A_{11 \dots 1}^{(1)} A_{22 \dots 2}^{(2)} \dots A_{n, n \dots n}^{(n)}.$$

Nach der Darstellung der quadratischen Determinanten als combinatorisches Product bedarf es keiner Erläuterung, dass das Product von m quadratischen Determinanten n ten Grades auch als eine Determinante $(m+1)$ ten Ranges und n ter Ordnung aufgefasst werden kann. Ist umgekehrt

$$A_{k_1^{(1)} k_1^{(2)} \dots k_1^{(m)}}^{(\lambda)} = \alpha_{\lambda k_1^{(1)}}^{(\lambda)} \alpha_{\lambda k_1^{(2)}}^{(\lambda)} \dots \alpha_{\lambda k_1^{(m)}}^{(\lambda)}$$

so ist die Determinante gleich

$$\sum \pm \alpha_{11}^{(1)} \alpha_{22}^{(1)} \dots \alpha_{nn}^{(1)} \sum \pm \alpha_{11}^{(2)} \alpha_{22}^{(2)} \dots \alpha_{nn}^{(2)} \dots \sum \pm \alpha_{11}^{(m)} \alpha_{22}^{(m)} \dots \alpha_{nn}^{(m)}.$$

V.

Anwendung zur Bildung von Invarianten.

Um invariante Bildungen mittelst der Determinanten höheren Ranges zu erhalten, hat man offenbar die Elemente der Determinante bloß so zu wählen, dass die a irgend einer Gruppe durch dieselben Relationen in n neue extensive Grössen übergeführt werden, durch welche die ursprünglichen Variablen in die neuen transformirt werden. Dies kann auf mehrfache Weise bewerkstelligt werden.

Sind in $F_\lambda(x_1, x_2 \dots x_n)$ die Variablen durch die Relationen

$$x_1 = \alpha_{11} \xi_1 + \alpha_{12} \xi_2 + \dots + \alpha_{1n} \xi_n$$

$$x_2 = \alpha_{21} \xi_1 + \alpha_{22} \xi_2 + \dots + \alpha_{2n} \xi_n$$

$$\dots$$

$$x_n = \alpha_{n1} \xi_1 + \alpha_{n2} \xi_2 + \dots + \alpha_{nn} \xi_n$$

in die ξ zu transformiren und bildet man aus den Elementen

$$A_{k_\lambda^{(1)} k_\lambda^{(2)} \dots k_\lambda^{(m)}}^{(\lambda)} = \frac{\partial^m F_\lambda}{\partial \xi_{k_\lambda^{(1)}} \partial \xi_{k_\lambda^{(2)}} \dots \partial \xi_{k_\lambda^{(m)}}}$$

die λ te Summe des Productes (1), so geht durch die Transformation

$$\sum_{k_\lambda^{(m)}} a_{k_\lambda^{(m)}}^{(m)} \dots \sum_{k_\lambda^{(2)}} a_{k_\lambda^{(2)}}^{(2)} \sum_{k_\lambda^{(1)}} A_{k_\lambda^{(1)} k_\lambda^{(2)} \dots k_\lambda^{(m)}}^{(\lambda)} a_{k_\lambda^{(1)}}^{(1)}$$

über in

$$\sum_{k_\lambda^{(m)}} b_{k_\lambda^{(m)}}^{(m)} \dots \sum_{k_\lambda^{(2)}} b_{k_\lambda^{(2)}}^{(2)} \sum_{k_\lambda^{(1)}} B_{k_\lambda^{(1)} k_\lambda^{(2)} \dots k_\lambda^{(m)}}^{(\lambda)} b_{k_\lambda^{(1)}}^{(1)},$$

wo

$$B_{k_\lambda^{(1)} k_\lambda^{(2)} \dots k_\lambda^{(m)}}^{(\lambda)} = \frac{\partial^m F'_\lambda}{\partial x_{k_\lambda^{(1)}} \partial x_{k_\lambda^{(2)}} \dots \partial x_{k_\lambda^{(m)}}}$$

und

$$b_{k_\lambda^{(p)}}^{(p)} = \alpha_{p1} a_{k_\lambda^{(p)}}^{(p)} + \alpha_{p2} a_{k_\lambda^{(p)}}^{(2)} + \dots + \alpha_{pn} a_{k_\lambda^{(p)}}^{(n)}.$$

Hat man daher n solche Functionen der $x_1, x_2 \dots x_n$, so ist

$$\sum \pm A_{11 \dots 1}^{(1)} A_{22 \dots 2}^{(2)} \dots A_{nn \dots n}^{(n)} = \left(\sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \dots \alpha_{nn} \right)^m \sum \pm B_{11 \dots 1}^{(1)} B_{22 \dots 2}^{(2)} \dots B_{nn \dots n}^{(n)}.$$

Statt der obigen Form kann man dem Elemente $A_{k_\lambda^{(1)} k_\lambda^{(2)} \dots k_\lambda^{(m)}}^{(\lambda)}$ auch andere ertheilen, die ebenfalls zu dem angestrebten Ziele führen.

Setzt man

$$A_{k_\lambda^{(1)} k_\lambda^{(2)} \dots k_\lambda^{(m)}}^{(\lambda)} = \frac{\partial^p F_{k_\lambda^{p+1} k_\lambda^{p+2} \dots k_\lambda^{(m)}}}{\partial \xi_{k_\lambda^{(1)}} \partial \xi_{k_\lambda^{(2)}} \dots \partial \xi_{k_\lambda^{(p)}}},$$

so wird durch die Transformation

$$\sum_{k_\lambda^{(m)}} a_{k_\lambda^{(m)}}^{(m)} \dots \sum_{k_\lambda^{(2)}} a_{k_\lambda^{(2)}}^{(2)} \sum_{k_\lambda^{(1)}} A_{k_\lambda^{(1)} k_\lambda^{(2)} \dots k_\lambda^{(m)}}^{(\lambda)} a_{k_\lambda^{(1)}}^{(1)}$$

in

$$\sum_{k_\lambda^{(m)}} a_{k_\lambda^{(m)}}^{(m)} \dots \sum_{k_\lambda^{(p+1)}} a_{k_\lambda^{(p+1)}}^{(p+1)} \sum_{k_\lambda^{(p)}} b_{k_\lambda^{(p)}}^{(p)} \dots \sum_{k_\lambda^{(2)}} b_{k_\lambda^{(2)}}^{(2)} \sum_{k_\lambda^{(1)}} B_{k_\lambda^{(1)} k_\lambda^{(2)} \dots k_\lambda^{(m)}}^{(\lambda)} b_{k_\lambda^{(1)}}^{(1)},$$

übergeführt, wo

$$B_{k_{\lambda}^{(1)} k_{\lambda}^{(2)} \dots k_{\lambda}^{(m)}}^{(\lambda)} = \frac{\partial^p F'_{k_{\lambda}^{(1)} k_{\lambda}^{(2)} \dots k_{\lambda}^{(m)}}}{\partial x_{k_{\lambda}^{(1)}} \partial x_{k_{\lambda}^{(2)}} \dots \partial x_{k_{\lambda}^{(p)}}}$$

F aus F' durch die Transformation der x in die ξ erhalten wird und

$$b_{k_{\lambda}^{(p)}}^{(p)} = \alpha_{\rho_1}^{(p)} a_1^{(p)} + \alpha_{\rho_2}^{(p)} a_2^{(p)} + \dots + \alpha_{\rho_n}^{(p)} a_n^{(p)}$$

ist.

Das Element $A_{k_{\lambda}^{(1)} k_{\lambda}^{(2)} \dots k_{\lambda}^{(m)}}^{(\lambda)}$ kann auch als Product der Differentialquotienten mehrerer Functionen der $x_1, x_2 \dots x_n$ die gestellten Bedingungen erfüllen. Es müssen hiebei blos im allgemeinen Gliede die vorkommenden Differentiationen nach den einzelnen Variablen $x_{k_{\lambda}^{(1)}}, x_{k_{\lambda}^{(2)}} \dots x_{k_{\lambda}^{(p)}}$ einfache sein und müssen sich die variablen Indices $k_{\lambda}^{(1)}, k_{\lambda}^{(2)} \dots k_{\lambda}^{(m)}$ sowohl auf die Indices der Functionen als der Differentialquotienten vollständig vertheilen.

Nimmt man z. B. die ersteren als fest an, so genügt

$$\frac{\partial^{m_1} F_1}{\partial x_{k_{\lambda}^{(1)}} \partial x_{k_{\lambda}^{(2)}} \dots \partial x_{k_{\lambda}^{(m_1)}}} \cdot \frac{\partial^{m_2} F_2}{\partial x_{k_{\lambda}^{(m_1+1)}} \dots \partial x_{k_{\lambda}^{(m_1+m_2)}}} \dots \frac{\partial^{m_p} F_p}{\partial x_{k_{\lambda}^{(m_2+m_1+\dots+m_{p-1}+1)}} \dots \partial x_{k_{\lambda}^{(m)}}}$$

den gestellten Forderungen.

2. Aus der Art und Weise, wie durch die lineare Transformation der vorhergehenden Differentialausdrücke einzelne Gruppen der a in Gruppen neuer extensiver Grössen übergeführt wurden, erhellt unmittelbar, dass sich die Verwendbarkeit der Determinanten höheren Ranges zur Bildung invarianter Formen auch auf Formen mit mehreren Reihen Variablen, die verschiedenen Transformationen unterworfen sind, erstreckt.

Hiebei kann man wieder dem $A_{k_{\lambda}^{(1)} k_{\lambda}^{(2)} \dots k_{\lambda}^{(m)}}^{(\lambda)}$ die oben erwähnten drei Formen geben, also entweder dem m ten Differentialquotienten einer fixen Function, oder dem m ten einer mit $m-m_1$ veränderlichen Indices versehenen Function, oder dem Producte der Differentialquotienten mehrerer Functionen, die selbst mit veränderlichen Indices behaftet sind, gleichsetzen. Doch gelten auch hier wieder die obigen Einschränkungen, dass erstens die vorkommenden Differentiationen im allgemeinen Gliede einfache und zweitens die variablen Indices $k_{\lambda}^{(1)}, k_{\lambda}^{(2)} \dots k_{\lambda}^{(m)}$ sich vollständig sowohl auf die Indices der Functionen, als der Variablen vertheilen müssen.

Enthält somit eine Function die Variablenreihen

$$\begin{aligned} & x_1^{(1)}, x_2^{(1)} \dots x_n^{(1)} \\ & x_1^{(2)}, x_2^{(2)} \dots x_n^{(2)} \\ & \dots \dots \dots \\ & x_1^{(m_1)}, x_2^{(m_1)} \dots x_n^{(m_1)}, \end{aligned}$$

so genügt z. B.

$$A_{k_{\lambda}^{(1)} k_{\lambda}^{(2)} \dots k_{\lambda}^{(m)}}^{(\lambda)} = \frac{\partial^m F}{\partial x_{k_{\lambda}^{(1)}}^{(\sigma_1)} \partial x_{k_{\lambda}^{(2)}}^{(\sigma_2)} \dots \partial x_{k_{\lambda}^{(m_1)}}^{(\sigma_{m_1})} \partial x_{k_{\lambda}^{(m_1+1)}}^{(\sigma_{m_1+1})} \partial x_{k_{\lambda}^{(m_2+2)}}^{(\sigma_{m_2+2})} \dots \partial x_{k_{\lambda}^{(m)}}^{(\sigma_m)}}$$

wo die $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_m$ Zahlen der Reihe 1 bis m_1 bezeichnen, den gestellten Bedingungen. Transformirt man die Variablen durch die Relationen

$$\begin{aligned}
 x_1^{(1)} &= \alpha_{11}^{(1)} \xi_1^{(1)} + \alpha_{12}^{(1)} \xi_2^{(1)} + \dots + \alpha_{1n}^{(1)} \xi_n^{(1)}; \quad \dots \quad x_1^{(m_1)} = \alpha_{11}^{(m_1)} \xi_1^{(m_1)} + \alpha_{12}^{(m_1)} \xi_2^{(m_1)} + \dots + \alpha_{1n}^{(m_1)} \xi_n^{(m_1)} \\
 x_2^{(1)} &= \alpha_{21}^{(1)} \xi_1^{(1)} + \alpha_{22}^{(1)} \xi_2^{(1)} + \dots + \alpha_{2n}^{(1)} \xi_n^{(1)}; \quad \dots \quad x_2^{(m_1)} = \alpha_{21}^{(m_1)} \xi_1^{(m_1)} + \alpha_{22}^{(m_1)} \xi_2^{(m_1)} + \dots + \alpha_{2n}^{(m_1)} \xi_n^{(m_1)} \\
 &\dots \dots \dots \\
 x_n^{(1)} &= \alpha_{n1}^{(1)} \xi_1^{(1)} + \alpha_{n2}^{(1)} \xi_2^{(1)} + \dots + \alpha_{nn}^{(1)} \xi_n^{(1)}; \quad \dots \quad x_n^{(m_1)} = \alpha_{n1}^{(m_1)} \xi_1^{(m_1)} + \alpha_{n2}^{(m_1)} \xi_2^{(m_1)} + \dots + \alpha_{nn}^{(m_1)} \xi_n^{(m_1)},
 \end{aligned}$$

so geht

$$\sum_{k_\lambda^{(m)}} \alpha_{k_\lambda^{(m)}}^{(m)} \dots \sum_{k_\lambda^{(2)}} \alpha_{k_\lambda^{(2)}}^{(2)} \sum_{k_\lambda^{(1)}} \alpha_{k_\lambda^{(1)}}^{(1)} \frac{\partial^m F'}{\partial \xi_{k_\lambda^{(1)}}^{(1)} \partial \xi_{k_\lambda^{(2)}}^{(2)} \dots \partial \xi_{k_\lambda^{(m_1)}}^{(m_1)} \partial \xi_{k_\lambda^{(m_1+1)}}^{(\sigma_1)} \partial \xi_{k_\lambda^{(m_1+2)}}^{(\sigma_2)} \dots \partial \xi_{k_\lambda^{(\sigma_{m-m_1})}}^{(\sigma_{m-m_1})}} \alpha_{k_\lambda^{(1)}}^{(1)},$$

wo F' die in die ξ transformirte Function F bezeichne, über in

$$\sum_{k_\lambda^{(m)}} b_{k_\lambda^{(m)}}^{(m)} \dots \sum_{k_\lambda^{(2)}} b_{k_\lambda^{(2)}}^{(2)} \sum_{k_\lambda^{(1)}} b_{k_\lambda^{(1)}}^{(1)} \frac{\partial^m F'}{\partial x_{k_\lambda^{(1)}}^{(1)} \partial x_{k_\lambda^{(2)}}^{(2)} \dots \partial x_{k_\lambda^{(m_1)}}^{(m_1)} \partial x_{k_\lambda^{(m_1+1)}}^{(\sigma_1)} \partial x_{k_\lambda^{(m_1+2)}}^{(\sigma_2)} \dots \partial x_{k_\lambda^{(\sigma_{m-m_1})}}^{(\sigma_{m-m_1})}} b_{k_\lambda^{(1)}}^{(1)},$$

wo

$$b_{k_\lambda^{(1)}}^{(1)} = \sum_{\rho} \alpha_{k_\lambda^{(1)}, \rho}^{(1)} a_{\rho}^{(1)}; \quad b_{k_\lambda^{(2)}}^{(2)} = \sum_{\rho} \alpha_{k_\lambda^{(2)}, \rho}^{(2)} a_{\rho}^{(2)} \dots b_{k_\lambda^{(m_1)}}^{(m_1)} = \sum_{\rho} \alpha_{k_\lambda^{(m_1)}, \rho}^{(m_1)} a_{\rho}^{(m_1)}$$

und

$$b_{k_\lambda^{(m_1+1)}}^{(m_1+1)} = \sum_{\rho} \alpha_{k_\lambda^{(m_1+1)}, \rho}^{(\sigma_1)} a_{\rho}^{(m_1+1)}; \quad b_{k_\lambda^{(m_1+2)}}^{(m_1+2)} = \sum_{\rho} \alpha_{k_\lambda^{(m_1+2)}, \rho}^{(\sigma_2)} a_{\rho}^{(m_1+2)} \dots b_{k_\lambda^{(m)}}^{(m)} = \sum_{\rho} \alpha_{k_\lambda^{(m)}, \rho}^{(\sigma_{m-m_1})} a_{\rho}^{(m)}$$

ist.

VI.

Ich will nun an einigen wenigen Beispielen die Anwendbarkeit der eben aneinandergesetzten Bildungen, die offenbar etwas allgemeiner sind, als die von Cayley durch die symbolische Multiplication der Functional-determinanten hergeleiteten,¹ zeigen.

Zunächst fällt in die Augen, dass jede Überschiebung zweier binärer Formen, abgesehen von einem numerischen Factor, eine Determinante höheren Ranges ist. Denn sind

$$f = a_x^n; \quad \varphi = b_x^m$$

zwei binäre Formen bezüglich des n ten und m ten Grades, so ist ihre k te Überschiebung

$$(ab)^k a_x^{n-k} b_x^{m-k} = (n_k)(m_k) \sum \pm f_{11\dots 1} \varphi_{22\dots 2}^{(k+1)},$$

wo

$$(n_k) = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

und

$$m_k = m(m-1)\dots(m-k+1)$$

und die unteren Indices 1 und 2 von f und φ Differentiationen bezüglich nach x_1 und x_2 bezeichnen, da

$$\sum f_{11\dots 1} \varphi_{22\dots 2}^{(k+1)} = \frac{\partial^k f}{\partial x_1^k} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^k} - \binom{k}{1} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-1} \partial x_2} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1 \partial x_2^{k-1}} + \dots + (-1)^k \frac{\partial^k f}{\partial x_1 \partial x_2^{k-1}} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^{k-1} \partial x_1}$$

¹ Dies ist evident, sobald man jede dieser Functional-determinanten als combinatorisches Product darstellt und sie symbolisch multiplicirt.

Sind die beiden Formen f und φ identisch, so müssen nach (II) alle Determinanten $(k+1)$ ten Ranges

$$\sum^{(k+1)} f_{11...1} f_{22...2}$$

für ein ungerades k verschwinden, was vollständig damit übereinstimmt, dass alle ungeraden Überschiebungen einer Form über sich selbst identisch Null sind.

Schiebt man über eine Überschiebung wieder eine Form, so stellt sich die neue Überschiebung abermals, wie man sich leicht überzeugt, als ein Aggregat von Determinanten höheren Ranges dar. Da nun jede Covariante binärer Formen als ein Aggregat von Überschiebungen, so ist sie auch als ein Aggregat von Determinanten höheren Ranges darstellbar.

Mittelst der angegebenen Methoden lassen sich fast alle bisher bekannten Invarianten, Covarianten, zugehörigen Formen und Zwischenformen ableiten.

Um zugehörige Formen und Zwischenformen zu erhalten, hat man blos in der angegebenen Weise invariante Bildungen aus dem um die Form

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n$$

vergrösserten Systeme herzustellen. Bezeichnet so z. B. f eine kubische ternäre Form und

$$U = (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3),$$

so ist, abgesehen von dem Factor $-\frac{1}{18}$

$$\sum^{(3)} \pm f_{11} f_{22} (U^2)_{33}$$

nichts Anderes als die von Aronhod und Clebsch mit Θ bezeichnete Zwischenform, und man erhält sie durch Entwicklung nach den Elementen von U in der Gestalt

$$\sum^{(3)} \pm f_{11} f_{22} (U^2)_{33} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & u_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & u_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Aus

$$U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

f und Θ erhält man durch

$$\sum^3 \pm f_{11} \Theta_{22} (U^2)_{33}$$

die Zwischenform Q bei Clebsch und Gordan.

Durch Combination von Θ und U kann man eine zugehörige Form 4ten Grades in den Coefficienten von f und 6ten Grades nach u ableiten. Dieselbe wird dargestellt durch

$$\sum^3 \pm \Theta_{11} \Theta_{22} (U^2)_{33},$$

wo überall die unteren Indices 1, 2, 3 Differentiationen nach den Variablen x_1, x_2, x_3 bedeuten.

Auf diese Weise lassen sich durch Benützung der schon gewonnenen Covarianten, zugehörigen und Zwischenformen immer neue invariante Bildungen der ternären kubischen Formen und durch Zerlegung derselben die Fundamentalformeln selbst herleiten.

Ganz dasselbe Verfahren ist auch bei den quaternären und Formen höheren Ranges zu verfolgen. Sind z. B. f und φ zwei quaternäre quadratische Formen, so stellen

$$\sum^{(3)} \pm f_{11} f_{22} f_{33} \varphi_{44}, \quad \sum^{(3)} \pm f_{11} f_{22} \varphi_{33} \varphi_{44}, \quad \sum^{(3)} \pm f_{11} \varphi_{22} \varphi_{33} \varphi_{44},$$

wo die unteren Indices 1, 2, 3 und 4 wieder Differentiationen bezüglich nach x_1, x_2, x_3 und x_4 anzeigen, die simultanen Invarianten Θ, H, Θ_1 , oder nach Salmon's Bezeichnung Θ, Φ und Θ' dar.

Die Verbindung von f mit

$$U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4$$

liefert die zugehörige Form

$$\sum^{(3)} \pm f_{11} f_{22} f_{33} (U^2)_{44},$$

die vom dritten Grade in den Coefficienten von f und vom zweiten in den u_1, u_2, u_3, u_4 ist.

$$\sum^{(3)} \pm f_{11} f_{22} \varphi_{33} U_{44}$$

und

$$\sum^{(3)} \pm \varphi_{11} \varphi_{22} f_{33} U_{44}$$

sind zwei simultane zugehörige Formen der f und φ .

Bezeichnet man mit $F=0$ und $\Phi=0$ die Gleichungen der Flächen $f=0$ und $\varphi=0$ in Ebenen-Coordinationen u_1, u_2, u_3, u_4 und mit

$$X = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4,$$

so sind

$$\sum^{(3)} \pm F_{11} \Phi_{22} \Phi_{33} (X^2)_{44} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_4}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_4}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_4}, & 0 \end{vmatrix}$$

und das analoge

$$\sum^{(3)} \pm \Phi_{11} F_{22} F_{33} (X^2)_{44},$$

wo die Indices 1, 2, 3 und 4 Differentiationen nach den u_1, u_2, u_3 und u_4 bedeuten, simultane Covarianten der beiden Formen f und φ .

Es lassen sich mittelst der Determinanten höheren Ranges — nach dem obigen Verfahren — bei den quaternären Formen auch in den Liniencoordinaten invariante Bildungen herleiten.

Ist z. B. f irgend eine quaternäre Form und setzt man der Kürze halber

$$U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4$$

$$V = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4,$$

so ist

$$\Sigma \pm f_{11} f_{22} (U^2)_{33} (V^2)_{44}$$

eine zugleich in den Liniencoordinaten, und zwar hierin quadratisch covariante Form. Man kann ihr auch durch Zerlegung nach dem La Place'schen Satze die Gestalt geben:

$$F^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4} & u_1 & v_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4} & u_2 & v_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_4} & u_3 & v_3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_4} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2} & u_4 & v_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Die Form

$$\Phi = \Sigma \pm f_{11} (U^2)_{22} (U^2)_{33} (V^2)_{44}$$

stellt ein covariantes Gebilde mit allen drei Arten Coordinaten dar.

Verbindet man F oder Φ mit U und V durch

$$\Sigma \pm F_1 f_2 U_3 V_4 \quad \text{oder} \quad \Sigma \pm \Phi_1 f_2 U_3 V_4,$$

so erhält man covariante Formen, die in den Linien-Coordinaten vom 3ten Grade sind u. s. w.

Es lässt sich, wie ohne weiters einleuchtet, das obige Verfahren auf Formen mit Reihen von n Variablen ausdehnen und mittelst desselben Gebilde ableiten, die in Ansehung der Coordinaten verschiedener Classen covariant sind.

Um z. B. Gebilde für ein System von Formen aufzustellen, die auch in den Coordinaten der Classe $(n-k, k)$ covariant sind, wird man blos bei der Darstellung der Covariante höheren Ranges mittelst des combinatorischen Productes (1) zu den k ersten Factoren die folgenden wählen:

¹ Im Falle f eine Fläche 2ten Grades darstellt, ist $F=0$ ihre Gleichung in Liniencoordinaten.

$$\begin{aligned}
& (u_1^{(1)} a_1^{(1)} + u_2^{(1)} a_2^{(1)} + \dots + u_n^{(1)} a_n^{(1)}) (u_1^{(1)} a_1^{(2)} + u_2^{(1)} a_2^{(2)} + \dots + u_n^{(1)} a_n^{(2)}) \dots (u_1^{(1)} a_1^{(m)} + u_2^{(1)} a_2^{(m)} + \dots + u_n^{(1)} a_n^{(m)}) \\
& (u_1^{(2)} a_1^{(1)} + u_2^{(2)} a_2^{(1)} + \dots + u_n^{(2)} a_n^{(1)}) (u_1^{(2)} a_1^{(2)} + u_2^{(2)} a_2^{(2)} + \dots + u_n^{(2)} a_n^{(2)}) \dots (u_1^{(2)} a_1^{(m)} + u_2^{(2)} a_2^{(m)} + \dots + u_n^{(2)} a_n^{(m)}) \\
& \dots \dots \dots \\
& (u_1^{(k)} a_1^{(1)} + u_2^{(k)} a_2^{(1)} + \dots + u_n^{(k)} a_n^{(1)}) (u_1^{(k)} a_1^{(2)} + u_2^{(k)} a_2^{(2)} + \dots + u_n^{(k)} a_n^{(2)}) \dots (u_1^{(k)} a_1^{(m)} + u_2^{(k)} a_2^{(m)} + \dots + u_n^{(k)} a_n^{(m)})
\end{aligned}$$

wo die u Coordinaten von k linearen Mannigfaltigkeiten $(n-2)$ ter Ordnung bedeuten. Die übrigen Factoren des Productes (1) müssen dann derart gewählt werden, dass durch die Transformation der Coordinaten $(1, n-1)$ auch die a in diesen Factoren in derselben Weise in neue extensive Grössen übergeführt, wie die ursprünglichen Variablen der Classe $(1, n-1)$ in die neuen transformirt werden.

Es ist klar, wie auf diesem Wege durch fortwährende Benützung der schon gewonnenen Formen sich allmählig Covarianten des gegebenen Systems herstellen lassen, die auch in Ansehung der Reihen verschiedenartiger Coordinaten covariant sind.

Eine eingehende Untersuchung dieser Gebilde und Erläuterung ihrer Verwendbarkeit behalte ich einer späteren Gelegenheit vor.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.](#)

Jahr/Year: 1882

Band/Volume: [43_2](#)

Autor(en)/Author(s): Escherich Gustav von

Artikel/Article: [Die Determinanten höheren Ranges und ihre Verwendung zur Bildung von Invarianten. 1-12](#)