ÜBER

DETERMINANTEN HÖHEREN RANGES.

VON

LEOPOLD GEGENBAUER.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 18. NOVEMBER 1880.

Bildet man alle Producte von je n Elementen des Systems der n^2 Grössen $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{n,n}$, welche aus dem Ausdrucke $a_{1,1} \cdot a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ dadurch entstehen, dass die zweiten Indices auf jede mögliche Weise vertauscht werden, während die ersten ungeändert bleiben, versieht jedes dieser Producte mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem das System der zweiten Indices in demselben der Gruppe jener Permutationen angehört, welche die zweiwerthigen Functionen ungeändert lassen, oder nicht, d. h. je nachdem die Anzahl der Vertauschungen je zweier Indices, durch welche die betreffende Permutation entsteht, gerade oder ungerade ist, so nennt man die algebraische Summe dieser Producte bekanntlich eine Determinante $n$ter Ordnung.

In neuerer Zeit ist man zu einer Erweiterung des Begriffes der Determinanten gelangt, indem man ein System von n^3 Grössen $a_{1,1,1}, a_{1,1,2}, \ldots, a_{n,n,n}$ betrachtete, und aus denselben ein Aggregat von Producten von je n Factoren in der Weise bildete, dass niemals zwei Factoren eines Productes an derselben Stelle einen gleichen Index haben. Die algebraische Summe dieser nach einer bestimmten Regel mit dem positiven oder negativen Zeichen versehenen Producte nennt man zum Unterschiede von den gewöhnlichen oder quadratischen Determinanten cubische Determinanten.

Die Mathematiker de Gasparis, Armenante, Padova und Dahlander veröffentlichten eine Reihe von interessanten Sätzen über diese algebraischen Gebilde.

Im Jahre 1861 erschien eine gegenwärtig gänzlich vergriffene Schrift von de Gasparis und im Jahre 1868 eine Broschüre von Zehfuss, in welcher algebraische Gebilde untersucht werden, welche eine viel bedeutendere Erweiterung des Determinantenbegriffes sind, als die eben erwähnten cubischen Determinanten. Es wird in diesen Schriften nämlich ein in passender Weise gebildetes Aggregat von Producten aus je n Elementen des Systems der n^m Grössen $a_{1,1,\ldots,1_{(m)}}, a_{1,1,\ldots 1,2}, \ldots, a_{n,n,\ldots,n_{(m)}}$, welches eine Determinante $m$ten Ranges und $n$ter Ordnung genannt wird, betrachtet, und es werden einige elementare Sätze über diese Gebilde hergeleitet. Über diese allgemeinen Determinanten wurden in jüngster Zeit auch von Garbieri (1877) interessante Untersuchungen veröffentlicht.

Da die Determinanten höheren Ranges nicht nur an sich höchst interessant, sondern auch bei vielen Problemen der neueren Algebra und Geometrie eine nicht unwichtige Rolle zu spielen berufen sind, so will ich in den folgenden Zeilen eine Reihe von Sätzen aus der Theorie derselben auf einem höchst einfachen Wege entwickeln.

Es sei gegeben ein System von n^m Grössen $a_{1,1,\ldots,1_{(m)}}$, $a_{1,1,\ldots,2}, \ldots a_{n,n,\ldots,n_{(m)}}$.

Man bilde alle verschiedenen Producte von je n Elementen dieses Systems in der Weise, dass niemals zwei Factoren eines Productes an derselben Stelle einen gleichen Index (gleichen correspondirenden Index) haben, ordne die Factoren eines jeden Productes so, dass die ersten Indices in natürlicher Ordnung auf einander folgen. Jedes System correspondirender Indices ist alsdann eine Permutation der Grössen $1, 2, \ldots, n$, welche entweder der Gruppe jener Permutationen angehört, die die zweiwerthigen Functionen ungeändert lassen, oder nicht. Ist die Anzahl der Permutationen der zweiten Art, welche in den verschiedenen Systemen correspondirender Indices irgend eines Productes auftreten, gerade, so versehe man dieses Product mit dem positiven, ist dieselbe ungerade, so versehe man dasselbe mit dem negativen Zeichen. Die algebraische Summe dieser Producte ist eine Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges.

Die Anzahl der Factoren eines jeden Productes bestimmt also die Ordnung; die Anzahl der Indices jedes einzelnen Elementes des Systems den Rang der Determinante.

Eine solche Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges der n^m Elemente $a_{1,1,\ldots,1_{(m)}}$, $a_{1,1,\ldots,2}$, $\ldots a_{n,n,\ldots,n_{(m)}}$ soll, analog der von Herrn Kronecker für quadratische Determinanten eingeführten Bezeichnungsweise, mit:

$$\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \right| (i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, n)$$

bezeichnet werden.

Der gegebenen Definition einer solchen allgemeinen Determinante zufolge hat man also die Gleichung:

$$\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \right| (i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, n) = \sum_{\varkappa_1^{(1)}, \varkappa_2^{(1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(n)}} a_{1, \varkappa_1^{(1)}, \varkappa_2^{(1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(1)}} \cdot a_{2, \varkappa_1^{(2)}, \varkappa_2^{(2)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(2)}} \ldots$$

$$1) \qquad \ldots a_{n, \varkappa_1^{(n)}, \varkappa_2^{(n)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(n)}} \prod_{r,s} \frac{(\varkappa_1^{(r)} - \varkappa_1^{(s)})(\varkappa_2^{(r)} - \varkappa_2^{(s)}) \ldots (\varkappa_{m-1}^{(r)} - \varkappa_{m-1}^{(s)})}{(r-s)^{m-1}}$$

$$(\varkappa_1^{(1)}, \varkappa_2^{(1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(n)}, r, s = 1, 2, \ldots, n; \; r > s)$$

Es wäre für die $\varkappa$ nach der oben gegebenen Definition eigentlich noch die Bedingung $\varkappa_\mu^{(\lambda)} \gtrless \varkappa_\mu^{(\nu)}$ $(\lambda \gtrless \nu)$ hinzuzufügen, da jedoch jedesmal, wenn zwei $\varkappa$, welche denselben untern, aber verschiedene obere Indices haben, einander gleich werden, ein Factor des Productes, welches das Zeichen der einzelnen Glieder darstellt, verschwindet, so kann man diese Bedingung weglassen und in Bezug auf sämmtliche $\varkappa$ von $1, 2, \ldots, n$ summiren. Für Determinanten zweiten Ranges hat zuerst Herr Kronecker diese Summendarstellung verwendet.

Die Anzahl aller Glieder einer solchen Determinante ist, wie man sofort sieht, $(n!)^{m-1}$ und von diesen haben $\frac{(n!)^{m-1}}{2}$ das positive und $\frac{(n!)^{m-1}}{2}$ das negative Vorzeichen.

Aus der eben aufgeschriebenen Definitionsgleichung 1) gehen sofort folgende Sätze hervor:

Jede Determinante geraden Ranges ändert ihr Zeichen, wenn man zwei derselben Indexreihe angehörige Indices in allen Gliedern mit einander vertauscht, wenn man also für die Elemente

$$a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots \lambda_m}$$

die Elemente

$$a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}, \mu_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m}$$

$$[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m = 1, 2, \ldots, n, \lambda_r \gtrless \mu_r]$$

setzt.

Jede Determinante ungeraden Ranges ändert ihr Zeichen, wenn man zwei derselben veränderlichen Indexreihe angehörige Indices in allen Gliedern mit einander vertauscht; sie bleibt aber ungeändert, wenn man zwei der festen (ersten) Indexreihe angehörige Indices in allen Gliedern vertauscht, d. h. sie ändert ihr Zeichen, wenn man für die Elemente

$$a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m}$$

die Elemente

$$a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}, \mu_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m}$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m = 1, 2, \ldots, n, \lambda_r \gtrless \mu_r, r > 1)$$

setzt, sie bleibt aber ungeändert, wenn man für die Elemente

$$a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m}$$

die Elemente

$$a_{\mu_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m}$$

$$(\mu_1 \gtrless \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m = 1, 2, \ldots, n)$$

setzt.

Als Corollare folgen aus diesen Sätzen die folgenden:

Jede Determinante geraden Ranges ist gleich Null, wenn für zwei verschiedene, derselben Indexreihe angehörige Indices alle Elemente einander gleich sind, welche an den übrigen Stellen gleiche correspondirende Indices haben, wenn also für zwei bestimmte, von einander verschiedene Werthe λ_r, μ_r:

$$a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m} = a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}, \mu_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m}$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m = 1, 2, \ldots, n)$$

ist.

Jede Determinante ungeraden Ranges ist gleich Null, wenn für zwei verschiedene derselben veränderlichen Indexreihe angehörige Indices alle Elemente einander gleich sind, welche an den übrigen Stellen gleiche correspondirende Indices haben, wenn also für zwei bestimmte Werthe λ_r, μ_r $(r > 1, \lambda_r \gtrless \mu_r)$ jedes Element:

$$a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m} = a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}, \mu_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m}$$

ist.

Da eine Determinante ungeraden Ranges ihr Zeichen nicht ändert, wenn zwei der festen Indexreihe angehörige Indices in allen Gliedern mit einander vertauscht werden, so wird sie auch im Allgemeinen nicht verschwinden, wenn für zwei verschiedene, der festen Indexreihe angehörige Indices alle Elemente, welche an den übrigen Stellen gleiche correspondirende Indices haben, einander gleich werden.

Setzt man in einer Determinante ungeraden Ranges alle festen Indices einander gleich, so hat man eigentlich ein System von n^m Grössen, von denen aber nur n^{m-1} von einander verschieden sind. Da in diesem Falle, wie aus der obigen Definitionsgleichung sofort ersichtlich ist, stets je $n!$ Glieder der vorgelegten Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges einander gleich werden und diese $n!$ Glieder auch dasselbe Vorzeichen haben, so verwandelt sich die Determinante in eine Determinante $n$ter Ordnung und $(m-1)$ten Ranges der n^{m-1} verschiedenen Elemente multiplicirt mit $n!$.

Die Gleichung 1) zeigt ferner, dass jede Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges als eine Summe von $(n!)^{m-p}$ Determinanten $n$ter Ordnung und $p$ten Ranges für $m \gtreqless p$ dargestellt werden kann.

Summirt man nämlich in der oben angeführten Gleichung zuerst in Bezug auf $\varkappa_1^{(1)}, \varkappa_1^{(2)}, \ldots, \varkappa_1^{(n)}$, so erhält man $n!$ Glieder, und summirt man in jedem dieser Glieder sodann in Bezug auf die übrigen $\varkappa$, so erhält man ein Aggregat von $n!$ Determinanten $n$ter Ordnung und $(m-1)$ten Ranges, welches der ursprünglichen Determinante gleich ist.

Summirt man in jedem der vorhin erwähnten $n!$ Glieder in Bezug auf $\varkappa_2^{(1)}, \varkappa_2^{(2)}, \ldots, \varkappa_2^{(n)}$, so erhält man zunächst $(n!)^2$ Glieder, und wenn man sodann in jedem dieser Glieder bezüglich der noch übrigen $\varkappa$ summirt, so entsteht ein Aggregat von $(n!)^2$ Determinanten $n$ter Ordnung und $(m-2)$ten Ranges, welches der ursprünglichen Determinante gleich ist.

Man sieht, dass man, in dieser Weise fortfahrend, jede Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges als ein Aggregat von $(n!)^{m-p}$ Determinanten $n$ter Ordnung und $p$ten Ranges darstellen kann.

Aus der Gleichung 1) ersieht man auch, dass die Determinante sich nicht ändert, wenn man zwei Systeme von $\varkappa$, welche denselben unteren, aber verschiedene obere Indices haben, mit einander vertauscht. Man sieht ferner, dass eine Determinante geraden Ranges unverändert bleibt, wenn man ein System von $\varkappa$, welche denselben unteren, aber verschiedene obere Indices haben, mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ vertauscht, weil in diesem Falle $m-1$ ungerade ist, dass aber eine Determinante ungeraden Ranges bei einer solchen Vertauschung ihren Werth ändert, indem durch dieselbe eine gewisse Hälfte der Glieder der Determinante das Zeichen ändert, während die andere Hälfte das ursprüngliche Zeichen behält.

Eine Determinante geraden Ranges bleibt demnach ungeändert, wenn man in allen Gliedern sämmtliche zwei verschiedenen Indexreihen angehörige Indices mit einander vertauscht.

Eine Determinante ungeraden Ranges bleibt ungeändert, wenn man in allen Gliedern sämmtliche zwei verschiedenen, veränderlichen Indexreihen angehörige Indices mit einander vertauscht, sie ändert jedoch ihren Werth, wenn man in allen Gliedern die der festen Indexreihe angehörigen Indices mit dem entsprechenden Indices einer veränderlichen Indexreihe vertauscht.

Ein specieller Fall des ersten Satzes ist die bekannte Eigenschaft der gewöhnlichen oder quadratischen Determinanten, dass dieselben ungeändert bleiben, wenn man die Horizontal- zu Verticalreihen oder umgekehrt macht.

Man sieht aus den letzten Erörterungen, dass der Werth einer Determinante ungeraden Ranges (m) verschieden sein wird, je nachdem die eine oder die andere Indexreihe als feste Indexreihe gewählt wird. Da man die Wahl zwischen m Indexreihen hat, so hat eine Determinante ungeraden Ranges m verschiedene Werthe, entsprechend den m verschiedenen Festsetzungen, welche man über die feste Indexreihe machen kann.

Nach der auseinandergesetzten Bildungsweise der Determinanten $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges ist jede solche Determinante nicht nur eine lineare Function jedes einzelnen Elementes, sondern auch eine lineare, homogene Function aller jener Elemente, welche einen gleichen correspondirenden Index haben.

Sie hat also die Gestalt:

$$\text{2)}\quad \left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \right| (i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, n) = \sum_{\substack{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{\lambda-1}, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_m \\ (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_m = 1, 2, \ldots, n)}} a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{\lambda-1}, h, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_m} \times \alpha_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}, h, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_m}$$

Es ist nun sehr leicht, die Bedeutung der Grössen α zu ermitteln. Man erhält aus der Gleichung 1) sofort:

$$\alpha_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m} = \left[\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \right| (i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, n) \right]_{a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m}} =$$

$$= (-1)^{m\lambda_1 + \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=m} \lambda_\sigma} \sum_{\substack{\varkappa_1^{(1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(\lambda_1-1)}, \varkappa_1^{(\lambda_1+1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(n)} \\ (\varkappa_1^{(\tau)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(\tau)} = 1, 2, \ldots, \lambda_{\tau+1}-1, \lambda_{\tau+1}+1, \ldots, n;\ \tau, r, s = 1, 2, \ldots, \lambda_1-1, \lambda_1+1, \ldots, n;\ r > s)}} a_{1, \varkappa_1^{(1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(1)}} a_{2, \varkappa_1^{(2)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(2)}}, \ldots, a_{\lambda_1-1, \varkappa_1^{(\lambda_1-1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(\lambda_1-1)}}$$

$$a_{\lambda_1+1, \varkappa_1^{(\lambda_1+1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(\lambda_1+1)}}, \ldots a_{n, \varkappa_1^{(n)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(n)}} \left|\begin{matrix} r \\ s \end{matrix}\right| \frac{(\varkappa_1^{(r)} - \varkappa_1^{(s)})(\varkappa_2^{(r)} - \varkappa_2^{(3)}) \ldots (\varkappa_{m-1}^{(r)} - \varkappa_{m-s}^{(s)})}{(r-s)^{m-2}}$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Summe ist die Determinante $(n-1)$ter Ordnung und $m$ten Ranges, welche man erhält, wenn man alle Elemente der gegebenen Determinante, welche an der ersten Stelle den Index λ_1, an der zweiten den Index $\lambda_2, \ldots$, an der $m$ten den Index λ_m haben, weglässt und aus den noch übrigen $(n-1)^m$ Elementen eine Determinante $(n-1)$ter Ordnung und $m$ten Ranges in der durch die letzte Gleichung angegebenen Weise bildet.

Alle Determinanten $(n-1)$ter Ordnung und $m$ten Ranges, welche man auf die angegebene Weise erhält, wenn man den Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nach und nach alle Werthe aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ gibt, nennt man Unterdeterminanten erster Ordnung. Ihre Anzahl ist, wie man sofort sieht, n^m. Man hat auch die Relation:

$$\alpha_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m} = \frac{\partial \, | a_{i_1, i_2, \ldots, i_m} | \; (i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, n)}{\partial a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m}}$$

Es wurde in den obigen Zeilen der Coëfficient irgend eines Elementes in der entwickelten Determinante bestimmt. Man kann nun ebenso den Coëfficienten irgend eines Productes von r Elementen in der entwickelten Determinante bestimmen. Eine einfache Überlegung zeigt, dass der Coëfficient des Productes

$$a_{\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_m^{(1)}} \cdot a_{\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \ldots, \lambda_m^{(2)}}, \ldots, a_{\lambda_1^{(r)}, \lambda_2^{(r)}, \ldots, \lambda_m^{(r)}}$$

eine Determinante $m$ten Ranges und $(n-r)$ter Ordnung ist, welche man aus der ursprünglichen Determinante dadurch erhält, dass man aus dem Elementensysteme alle jene Elemente, welche mit dem angeführten Producte einen correspondirenden Index gleich haben, weglässt und die noch übrig bleibenden zu einer Determinante $m$ten Ranges und $(n-r)$ter Ordnung gleichsam zusammenschiebt. Das Vorzeichen dieser Determinante ist:

$$(-1)^{m \sum\limits_{\tau=1}^{\tau=r} \lambda_1^{(\tau)} + \sum\limits_{\tau=1,\,\sigma=1}^{\tau=r,\,\sigma=m} \lambda_\sigma^{(\tau)}} \left[\prod_{t,s=1}^{r} \frac{(\lambda_2^{(t)} - \lambda_2^{(s)})(\lambda_3^{(t)} - \lambda_3^{(s)}) \ldots (\lambda_m^{(t)} - \lambda_m^{(s)})}{(\lambda_1^{(t)} - \lambda_1^{(s)})^{m-1}} \right]$$

wo $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$ das Zeichen von $\frac{\alpha}{\beta}$ ist.

Alle Determinanten, welche man auf diese Weise erhält, nennt man Unterdeterminanten $r$ter Ordnung. Es gibt $\binom{n}{r}^m$ Unterdeterminanten $r$ter und ebenso viele $(n-r)$ter Ordnung. Die Unterdeterminanten $(n-1)$ter Ordnung sind die Elemente selbst.

Aus der oben aufgestellten Relation 2) folgen sofort folgende wichtige Sätze:

Wenn in einer Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges alle Elemente $a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m}$, welche denselben Index λ_r haben, gleich Null sind, mit Ausnahme eines einzigen, so verwandelt sich die Determinante in eine Determinante desselben Ranges nächst niedrigerer Ordnung, multiplicirt mit dem erwähnten, von Null verschiedenen Elemente.

Wenn demnach in einer Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges alle Elemente $a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m}$, welche denselben Index λ_r haben, gleich Null sind, so ist dieselbe identisch gleich Null.

Wenn man alle Elemente einer allgemeinen Determinante, welche an einer bestimmten Stelle denselben correspondirenden Index haben, mit einer Grösse B multiplicirt, so wird die Determinante mit dieser Grösse multiplicirt.

Sind sämmtliche Elemente einer Determinante, welche an einer bestimmten Stelle denselben correspondirenden Index haben, Polynome von r Gliedern, so ist dieselbe gleich der Summe von r Determinanten desselben Ranges und derselben Ordnung, welche man aus der vorgelegten dadurch erhält, dass man alle Elemente ungeändert lässt, und nur an Stelle der zusammengesetzten Elemente jedesmal einen der Summanden setzt.

Eine Determinante geraden Ranges bleibt ungeändert, wenn man zu den Elementen, welche an einer bestimmten Stelle denselben correspondirenden Index haben, die mit einer beliebigen Constante multiplicirten entsprechenden Elemente addirt, welche einen andern gleichen, derselben Indexreihe angehörigen Index haben.

Eine Determinante ungeraden Ranges bleibt ungeändert, wenn man zu den Elementen, welche in einer bestimmten, veränderlichen Indexreihe denselben correspondirenden Index haben, die mit einer beliebigen Constante B multiplicirten entsprechenden Elemente addirt, welche einen andern derselben Indexreihe angehörigen, gleichen correspondirenden Index haben. Addirt man hingegen zu den Elementen, welche denselben, der festen Indexreihe angehörigen Index haben, die mit einer beliebigen Constante B multiplicirten entsprechenden Elemente, welche einen andern, der festen Indexreihe angehörigen Index gemeinsam haben, so ist die neue Determinante im Allgemeinen von der ursprünglichen verschieden.

Es ist stets:

$$\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_m} a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}, h, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_m} \cdot a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}, k, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_m} = 0$$

$$[h \gtrless k;\ \lambda > 1;\ \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_m = 1, 2, \ldots, n]$$

$$\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{m-1}} a_{h, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{m-1}} \cdot a_{k, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{m-1}} = 0$$

$$[h \gtrless k;\ m = 2r;\ \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{m-1} = 1, 2, \ldots, n]$$

Sind alle Elemente einer allgemeinen Determinante, welche denselben ersten Index $\lambda_1^{(1)}$ haben mit Ausnahme des Elementes $a_{\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_m^{(1)}}$ gleich Null, sind ferner alle Elemente, welche mit diesem keinen correspondirenden Index gemein und denselben zweiten Index $\lambda_2^{(2)}$ haben, ausser $a_{\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \ldots, \lambda_m^{(2)}}$, gleich Null, sind ferner alle Elemente, welche mit den zwei oben genannten Elementen keinen correspondirenden Index gemein und denselben dritten Index $\lambda_3^{(3)}$ haben, gleich Null, ausser $a_{\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}, \ldots, \lambda_m^{(3)}}$, u. s. f., so verwandelt sich die Determinante in das Product:

$$(-1)^{m \sum\limits_{\tau=1}^{\tau=n} \lambda_1^{(\tau)} + \sum\limits_{\tau=1,\, \sigma=1}^{\tau=n,\, \sigma=m} \lambda_\sigma^{(\tau)}} \left[\prod_{\substack{r\\s\\1}}^{n} \frac{(\lambda_2^{(r)} - \lambda_2^{(s)})(\lambda_3^{(r)} - \lambda_3^{(s)}) \ldots (\lambda_m^{(r)} - \lambda_m^{(s)})}{(\lambda_1^{(r)} - \lambda_1^{(s)})^{m-1}}\right] \cdot a_{\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_m^{(1)}} \cdot a_{\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \ldots, \lambda_m^{(2)}} \ldots a_{\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_m^{(n)}}$$

Nun ist aber:

$$m \sum_{\tau=1}^{\tau=n} \lambda_1^{(\tau)} + \sum_{\tau=1,\, \sigma=1}^{\tau=n,\, \sigma=m} \lambda_\sigma^{(\tau)} = (m-1)\, n\, (n+1)$$

also stets gerade und daher haben wir schliesslich für die Determinante den Werth:

$$\left[\prod_{\substack{r\\s\\1}}^{n} \frac{(\lambda_2^{(r)} - \lambda_2^{(s)})(\lambda_3^{(r)} - \lambda_3^{(s)}) \ldots (\lambda_m^{(r)} - \lambda_m^{(s)})}{(\lambda_1^{(r)} - \lambda_1^{(s)})^{m-1}}\right] \cdot a_{\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_m^{(1)}} \cdot a_{\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \ldots, \lambda_m^{(2)}} \ldots a_{\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_m^{(n)}}$$

Hat man speciell:

$$\lambda_1^{(\tau)} = \lambda_2^{(\tau)} = \ldots = \lambda_m^{(\tau)} = \tau$$

so wird die Determinante, da in diesem Falle das angegebene Zeichen positiv ist, gleich dem Producte:

$$a_{1, 1, \ldots, 1_{(m)}}\, a_{2, 2, \ldots, 2_{(m)}}\, a_{n, n, \ldots, n_{(m)}}$$

Dieser Satz liefert uns auch ein Mittel, um einer Determinante $m$ten Ranges eine höhere Ordnung zu geben, ohne ihren Werth zu ändern. Will man nämlich eine Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges, ohne ihren Werth zu ändern, in eine Determinante von der Ordnung $(n+p)$ verwandeln, so hat man für alle Elemente

$$a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m}$$

in denen ein Index grösser, als n ist, Null zu nehmen, mit Ausnahme der Elemente

$$a_{n+\sigma, n+\sigma, \ldots\, n+\sigma},$$

denen man den Werth 1 zu geben hat.

Sind die Elemente einer Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges, so beschaffen, dass:

$$\frac{\beta_{h_1} a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}, h_1, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_m} + \beta_{h_2} a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}, h_2, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_m} + \ldots}{\delta_{g_1} a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}, g_1, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_m} + \delta_{g_2} a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}, g_2, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_m} + \ldots} = c$$

ist, wo die Zahlen $h_1, h_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots$ sämmtlich von einander verschieden sind, die β, δ und c beliebige Constante bezeichnen, so ist die Determinante, wenn sie von geradem Range ist, gleich Null für alle Werthe von λ, ist sie hingegen von ungeradem Range, so ist sie gleich Null für $\lambda > 2$.

Dieser Satz, welcher eine Verallgemeinerung eines von Herrn F. Studnička für quadratische Determinanten aufgestellten Theorems ist, ergibt sich leicht aus den früheren Sätzen.

Ebenso lässt sich mit Hilfe des oben aufgestellten Zerlegungstheorems leicht folgender Satz beweisen:

Ist für alle Werthe von s:

$$a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}, s, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_{\mu-1}, \varkappa_\mu, \varkappa_{\mu+1}, \ldots, \varkappa_m} = 0$$

wenn $\varkappa_\mu < s$ ist, so ist:

$$\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, n)} =$$

$$= \sum_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_{\mu-1}, \varkappa_{\mu+1}, \ldots, \varkappa_m} a_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}, s, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_{\mu-1}, s, \varkappa_{\mu+1}, \ldots, \varkappa_m} \times$$

$$\times\, a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}, s, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_{\mu-1}, s, \varkappa_{\mu+1}, \ldots, \varkappa_m}$$

$$(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\lambda-1}, \varkappa_{\lambda+1}, \ldots, \varkappa_{\mu-1}, \varkappa_{\mu+1}, \ldots, \varkappa_m = 1, 2, \ldots, n)$$

Als specielle Fälle dieses Theorems mögen die folgenden Sätze erwähnt werden:

Wenn in einer quadratischen Determinante alle Elemente, welche auf einer Seite der Hauptdiagonale stehen, gleich Null sind, so reducirt sich die Determinante auf ihr Diagonalglied.

Wenn in einer cubischen Determinante alle Elemente, welche auf einer Seite der Hauptdiagonalebene stehen, gleich Null sind, so reducirt sich die cubische Determinante auf ein Aggregat von n cubischen Determinanten nächst niedrigerer Ordnung.

Man theile die Elemente einer Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges in Gruppen in der Art, dass die erste Gruppe alle jene Elemente enthält, welche gegebene r_1 verschiedene erste Indices, die zweite Gruppe jene, welche gegebene r_2 verschiedene von den noch übrigbleibenden ersten Indices enthält u. s. f. Die Summe aller r sei gleich n. Alsdann bilde man aus jeder Gruppe alle möglichen Determinanten $m$ten Ranges und bezüglich $r_1$ter, $r_2$ter ... Ordnung, bei denen die ersten Indices ungeändert bleiben. Man erhält sodann aus der ersten Gruppe $\binom{n}{r_1}^{m-1}$, aus der zweiten $\binom{n-r_1}{r_2}^{m-1}$, aus der dritten $\binom{n-r_1-r_2}{r_3}^{m-1}$ ... Determinanten.

Es sei nun Δ_1 eine Determinante der ersten, Δ_2 eine Determinante der zweiten Gruppe u. s. f.

Alsdann ist:

$$|a_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \; (i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, n) = \sum \pm \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_\rho$$

wo die Summation sich über alle jene Producte zu erstrecken hat, welche man erhält, indem man ein beliebiges Δ_1 nimmt und alsdann Δ_2 so wählt, dass kein Element dieser Determinante einen gleichen correspondirenden Index mit einem Elemente von Δ_1 hat, Δ_3 so, dass seine Elemente mit keinem Elemente von Δ_1 und Δ_2 einen correspondirenden Index gemein haben u. s. f.

Es ist zunächst klar, dass jedes Glied dieses Aggregates einem Gliede der vorgelegten Determinante dem absoluten Betrage nach gleich ist. Man erhält ferner auch alle Glieder der Determinante, weil:

$$(r!)^{m-1} (r_2!)^{m-1} \ldots (r_\rho!)^{m-1} \binom{n}{r_1}^{m-1} \binom{n-r_1}{r_1}^{m-1} \binom{n-r_1-r_2}{r_2}^{m-1} \ldots \binom{n-r_1-\ldots-r_\rho}{r_\rho}^{m-1} = (n!)^{m-1}$$

ist und man kein Glied mehrfach erhält.

Damit nun alle diese Glieder auch das richtige Vorzeichen haben, muss jedem solchen Producte das positive oder negative Vorzeichen gegeben werden, je nachdem das Product der Hauptdiagonalglieder der betreffenden Determinanten Δ aus dem Hauptdiagonalgliede der vorgelegten Determinante

$$a_{1, 1, \ldots, 1_{(m)}}, \ldots, a_{2, 2, \ldots, 2_{(m)}}, \ldots, a_{n, n, \ldots, n_{(m)}}$$

durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen je zweier correspondirender Indices enstanden ist.

Aus diesem Satze folgt:

Wenn für r_1 erste Indices alle Elemente, in denen die andern Indices dieselben $n-r_1$ Werthe an denselben Stellen haben, gleich Null sind, so verwandelt sich die vorgelegte Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges in das Product einer Determinante $r_1$ter und $(n-r_1)$ter Ordnung und $m$ten Ranges.

Der oben entwickelte Satz ist, wie man sieht, die Ausdehnung des bekannten Lapace'schen Determinantensatzes auf Determinanten höheren Ranges.

Sind die Elemente einer Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges so beschaffen, dass:

$$a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_r} = a_{\mu_1, n-\lambda_2+\alpha_2, n-\lambda_3+\alpha_3, \ldots, n-\lambda_{r-1}+\alpha_{r-1}, \lambda_r, n-\lambda_{r+1}+\alpha_{r+1}, \ldots, n-\lambda_m+\alpha_m}$$

$$(\lambda_1 \gtrless \mu_1;\; \alpha_\sigma = 1, 2, \ldots, \lambda_\sigma)$$

für zwei bestimmte Werthe λ_1, μ_1 ist, so ist dieselbe identisch gleich Null.

Hat nämlich irgend ein Glied der gegebenen Determinante die Form:

$$\pm a_{1, \varkappa_1^{(1)}, \varkappa_2^{(1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(1)}} \cdot a_{2, \varkappa_1^{(2)}, \varkappa_2^{(2)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(2)}}, \ldots a_{\lambda_1-1, \varkappa_1^{(\lambda_1-1)}, \varkappa_2^{(\lambda_1-1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(\lambda_1-1)}} \cdot a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m} \cdots$$

$$\ldots a_{\mu_1-1, \varkappa_1^{(\mu_1-1)}, \varkappa_2^{(\mu_1-1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(\mu_1-1)}} \cdot a_{\mu_1, n-\lambda_2+\alpha_2, \ldots, n-\lambda_{r-1}+\alpha_{r-1}, k_r, n-\lambda_{r+1}+\alpha_{r+1}, \ldots, n-\lambda_m+\alpha_r} \cdot$$

$$a_{\mu_1+1, \varkappa_1^{(\mu_1+1)}, \varkappa_2^{(\mu_1+1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(\mu_1+1)}}, \ldots, a_{n, \varkappa_1^{(n)}, \varkappa_2^{(n)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(n)}} \cdot$$

so existirt stets auch in der entwickelten Determinante ein Glied von der Form:

$$\mp a_{1, \varkappa_1^{(1)}, \varkappa_2^{(1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(1)}} \cdot a_{2, \varkappa_1^{(2)}, \varkappa_2^{(2)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(2)}}, \ldots a_{\lambda_1-1, \varkappa_1^{(\lambda_1-1)}, \varkappa_2^{(\lambda_1-1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(\lambda_1-1)}} \cdot a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}, k_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m} \cdots$$

$$\ldots a_{\mu_1-1, \varkappa_1^{(\mu_1-1)}, \varkappa_2^{(\mu_1-1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(\mu_1-1)}} \cdot a_{\mu_1, n-\lambda_2+\alpha_2, n-\lambda_3+\alpha_3, \ldots, n-\lambda_{r-1}+\alpha_{r-1}, \lambda_r, n-\lambda_{r+1}+\alpha_{r+1}, \ldots, n-\lambda_m+\alpha_m} \cdot$$

$$a_{\mu_1+1, \varkappa_1^{(\mu_1+1)}, \varkappa_2^{(\mu_1+1)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(\mu_1+1)}}, \ldots, a_{n, \varkappa_1^{(n)}, \varkappa_2^{(n)}, \ldots, \varkappa_{m-1}^{(n)}} \cdot$$

Diese beiden Glieder haben das entgegengesetzte Vorzeichen, weil die Anzahl der Vertauschungen je zweier Indices, durch welche die zweite Indexcombination aus der Reihe 1, 2,..., n entstanden ist, sich von der Anzahl der Vertauschungen, durch welche die erste Combination entstand, um eine ungerade Zahl unterscheidet. Nun ist aber nach den über die Elemente der Determinante gemachten Voraussetzungen das zweite Product, absolut genommen, gleich dem ersten, daher heben sich je zwei Glieder der entwickelten Determinante auf, es ist demnach dieselbe gleich Null.

Für cubische Determinanten, welches die Determinanten niedrigsten Ranges sind, bei denen dieser Satz gilt, nimmt derselbe folgende elegante Gestalt an:

Sind in einer cubischen Determinante die Elemente zweier paralleler Horizontalebenen so beschaffen, dass die Elemente der ersten Zeile der ersten Ebene einander gleich und gleich den Elementen der letzten Zeile der zweiten Ebene, die Elemente der zweiten Zeile der ersten Ebene einander gleich und gleich den Elementen der vorletzten Zeile der zweiten Ebene sind u. s. f., so ist die cubische Determinante gleich Null.

Sind in einer Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges die einzelnen Elemente Producte von r Grössen $(r<m)$ in der Weise, dass:

$$a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m} = b^{(1)}_{\lambda_1, \lambda_{\rho_1}, \ldots, \lambda_{\sigma_1}} \cdot b^{(2)}_{\lambda_1, \lambda_{\rho_2}, \ldots, \lambda_{\sigma_2}} \cdots b^{(r)}_{\lambda_1, \lambda_{\rho_r}, \ldots, \lambda_{\sigma_r}}$$

ist, wo die Zahlen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_r$ verschiedene Zahlen aus der Reihe 2, 3,..., m und so beschaffen sind, dass $\rho_\varkappa \gtrless \rho_\tau$, $\sigma_\varkappa \gtrless \sigma_\tau$ ist, so zerfällt die Determinante in ein Product von r Determinanten derselben Ordnung und bezüglich von dem Range, welchen die Anzahl der Indices der betreffenden b angibt. Die Anzahl der Grössen $\lambda_{\rho_1}, \ldots, \lambda_{\sigma_r}$ ist natürlich gleich $m-1$. Man hat in diesem Falle nach der Definitionsgleichung 1)

$$\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, n)} = \sum_{\varkappa^{(1)}_{\rho_1} \ldots \varkappa^{(n)}_{\sigma_r}} b^{(1)}_{1, \varkappa^{(1)}_{\rho_1}, \ldots, \varkappa^{(1)}_{\sigma_1}} b^{(1)}_{2, \varkappa^{(2)}_{\sigma_1}, \ldots, \varkappa^{(2)}_{\sigma_1}} \cdots b^{(1)}_{n, \varkappa^{(n)}_{\rho_1}, \ldots, \varkappa^{(n)}_{\sigma_1}}$$

$$b^{(2)}_{1, \varkappa^{(1)}_{\rho_2}, \ldots, \varkappa^{(1)}_{\sigma_2}} b^{(2)}_{2, \varkappa^{(2)}_{\rho_2}, \ldots, \varkappa^{(2)}_{\sigma_2}} \cdots b^{(2)}_{n, \varkappa^{(n)}_{\rho_2}, \ldots, \varkappa^{(n)}_{\sigma_2}}$$

$$b^{(r)}_{1, \varkappa^{(1)}_{\rho_r}, \ldots, \varkappa^{(1)}_{\sigma_r}} b^{(r)}_{2, \varkappa^{(2)}_{\rho_r}, \ldots, \varkappa^{(2)}_{\sigma_r}} \cdots b^{(r)}_{n, \varkappa^{(n)}_{\rho_r}, \ldots, \varkappa^{(n)}_{\sigma_r}} \times$$

$$\left|{}^{r}_{s}\right| \frac{(\varkappa^{(t)}_1 - \varkappa^{(s)}_1)(\varkappa^{(t)}_2 - \varkappa^{(s)}_2) \ldots (\varkappa^{(t)}_{m-1} - \varkappa^{(s)}_{m-1})}{(t-s)^{m-1}}$$

$$(\varkappa^{(1)}_{\rho_1}, \ldots, \varkappa^{(n)}_{\sigma_r}, s, t = 1, 2 \ldots, n, t > s)$$

und daher:

$$\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, n)} = \left| b^{(1)}_{i, i_{\rho_1}, \ldots, i_{\sigma_1}} \right| \cdot \left| b^{(2)}_{i, i_{\rho_2}, \ldots, i_{\sigma_2}} \right| \cdots \left| b^{(r)}_{i, i_{\rho_r}, \ldots, i_{\sigma_r}} \right|$$

$$(i, i_{\rho_1}, \ldots, i_{\sigma_r} = 1, 2, \ldots, n)$$

Multiplicirt man die zwei Determinanten höheren Ranges:

$$\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \right| \cdot \left| b_{j_1, j_2, \ldots, j_q} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_p;\ j_1, j_2, \ldots, j_q = 1, 2, \ldots, n)}$$

von denen die erste vom Range p, die zweite vom Range q ist, mit einander, so erhält man:

$$\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \right| \cdot \left| b_{j_1, j_2, \ldots, j_q} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_p;\ j_1, j_2, \ldots, j_q = 1, 2, \ldots, n)} =$$

$$= \sum_{i^{(1)}_1, \ldots, i^{(n)}_{p-1};\ j^{(1)}_1, \ldots, j^{(n)}_{q-1}} a_{1, i^{(1)}_1, \ldots, i^{(1)}_{p-1}} b_{1, j^{(1)}_1, \ldots, j^{(1)}_{q-1}} \cdot a_{2, i^{(2)}_1, \ldots, i^{(2)}_{p-1}} \cdot b_{2, j^{(2)}_1, \ldots, j^{(2)}_{q-1}} \cdots$$

$$\ldots a_{n, i_1^{(n)}, \ldots, i_{p-1}^{(n)}} b_{n, j_1^{(n)}, \ldots, j_{q-1}^{(n)}} \prod_{s}^{r} \frac{(i_1^{(r)} - i_1^{(s)}) \ldots (i_{p-1}^{(r)} - i_{p-1}^{(s)}) (j_1^{(r)} - j_1^{(s)}) \ldots (j_{q-1}^{(r)} - j_{q-1}^{(s)})}{(r-s)^{p+q-2}}$$

$$(i_1^{(1)}, \ldots, i_{p-1}^{(n)}; j_1^{(1)}, \ldots, j_{q-1}^{(n)}, r, s = 1, 2, \ldots, n; r > s)$$

Man sieht also, dass das Product zweier Determinanten $n$ter Ordnung, von denen die eine vom Range p die andere vom Range q ist, eine Determinante $n$ter Ordnung vom Range $p+q-1$ ist.

Da, wie wir gesehen haben, die Ordnung jeder allgemeinen Determinante erhöht werden kann, ohne den Werth derselben zu ändern, so gilt dieser Satz auch für Determinanten verschiedener Ordnung.

Als specieller Fall dieses Theorems mag der folgende von Padova aufgestellte Satz erwähnt werden:

Das Product zweier quadratischer Determinanten ist eine cubische Determinante.

Es soll nun gezeigt werden, dass das Product zweier Determinanten $n$ter Ordnung, von denen die eine vom Range p, die andere vom Range q ist, sich als eine Determinante derselben Ordnung vom Range $p+q-2$ darstellen lässt.

Es ist nach den früheren Bemerkungen klar, dass die Annahme der Gleichheit der Ordnungen der Determinanten der Allgemeinheit der Untersuchung keinen Eintrag thut. Wir nehmen zunächst an, dass mindestens eine der beiden Zahlen p und q z. B. q gerade sei.

Setzt man nun:

$$c_{i_1, i_2, \ldots, i_{p+q-2}} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, \lambda} b_{\lambda, i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{p+q-2}}$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{p+q-2} = 1, 2, \ldots, n)$$

so erhält man:

$$\left| c_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{p+q-2}} \right|_{(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{p+q-2} = 1, 2, \ldots, n)} =$$

$$= \sum_{i_1^{(1)}, \ldots, i_{p+q-3}^{(n)}} c_{1, i_1^{(1)}, \ldots, i_{p+q-3}^{(1)}} \cdot c_{2, i_1^{(2)}, \ldots, i_{p+q-3}^{(2)}} \ldots c_{n, i_1^{(n)}, \ldots, i_{p+q-3}^{(n)}} \times$$

$$\times \prod_{s}^{r} \frac{(i_1^{(r)} - i_1^{(s)}) (i_2^{(r)} - i_2^{(s)}) \ldots (i_{p+q-3}^{(r)} - i_{p+q-3}^{(s)})}{(r-s)^{p+q-3}}$$

$$= \sum_{i_1^{(1)}, \ldots, i_{p+q-3}^{(n)}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n} a_{1, i_1^{(1)}, \ldots, i_{p-2}^{(1)}, \lambda_1} \cdot a_{2, i_1^{(2)}, \ldots, i_{p-2}^{(2)}, \lambda_2} \ldots$$

$$\ldots a_{n, i_1^{(n)}, \ldots, i_{p-2}^{(n)}, \lambda_n} \cdot b_{\lambda_1, i_{p-1}^{(1)}, i_p^{(1)}, \ldots, i_{p+q-5}^{(1)}} \cdot b_{\lambda_2, i_{p-1}^{(2)}, i_p^{(2)}, \ldots, i_{p+q-3}^{(2)}} \ldots$$

$$\ldots b_{\lambda_n, i_{p-1}^{(n)}, i_p^{(n)}, \ldots, i_{p+q-3}^{(n)}} \prod_{s}^{r} \frac{(i_1^{(r)} - i_1^{(s)}) (i_2^{(r)} - i_2^{(s)}) \ldots (i_{p+q-3}^{(r)} - i_{p+g-3}^{(s)})}{(r-s)^{p+g-3}}$$

$$(i_1^{(1)}, \ldots, i_{p+q-3}^{(n)}, r, s, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = 1, 1, \ldots, n; r > s)$$

Nun ist zu bemerken, dass in der entwickelten Determinante Glieder, in denen zwei der Grössen λ mit verschiedenem Index einander gleich sind, nicht vorkommen; denn hat man ein Glied:

$$\pm a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{p-1}, \tau} \cdot b_{\tau, \varkappa_p, \varkappa_{p+1}, \ldots, \varkappa_{p+q-2}} \cdot a_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}, \tau} \cdot b_{\tau, \mu_p, \mu_{p+1}, \ldots, \mu_{p+q-2}} \ldots$$

so existirt stets auch ein Glied von der Form

$$\mp a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{p-1}, \tau} \cdot b_{\tau, \mu_p, \mu_{p+1}, \ldots, \mu_{p+q-2}} \cdot a_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}, \tau} \cdot b_{\tau, \varkappa_p, \varkappa_{p+1}, \ldots, \varkappa_{p+q-2}} \ldots$$

wo die nicht aufgeschriebenen übrigen a und b in beiden Gliedern vollkommen identisch sind. Dieses Glied ist durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen aus dem obigen hervorgegangen, es haben daher beide das entgegengesetzte Vorzeichen. Man kann daher jedes Glied der Summe mit

$$\prod_s^r \left(\frac{\lambda_r - \lambda_s}{\lambda_r - \lambda_s}\right)^{q-1}$$

multipliciren.

Vollzieht man in der so umgestalteten Summe die Summation in Bezug auf die Indices $i_{p-1}, i_p, \ldots i_{p+q-3}$, so erhält man:

$$\left| c_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{p+q-2}} \right| = \left| b_{j_1, j_2, \ldots, j_q} \right| \cdot \sum_{i_1^{(1)}, \ldots, i_{p-2}^{(n)}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u} a_{1, i_1^{(1)}, \ldots, i_{p-2}^{(1)}, \lambda_1} \cdot a_{2, i_1^{(2)}, \ldots, i_{p-2}^{(2)}, \lambda_2} \ldots$$

$$\ldots a_{n, i_1^{(n)}, \ldots, i_{p-2}^{(n)}, \lambda_n} \prod_s^r \frac{(i_1^{(r)} - i_1^{(s)})(i_2^{(r)} - i_2^{(s)}) \ldots (i_{p-2}^{(r)} - i_{p-2}^{(s)})(\lambda_r - \lambda_s)^{q-1}}{(r-s)^{p+q-3}}$$

$$(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{p+q-2}; j_1, j_2, \ldots j_q; i_1^{(1)}, \ldots, i_{p-2}^{(n)}; \lambda_1, \ldots, \lambda_n; r, s = 1, 2, \ldots, n; r > s)$$

Nun ist, da q gerade ist:

$$\prod_s^r (\lambda_r - \lambda_s)^{q-2} = \prod_s^r (r-s)^{q-2}$$

Dividirt man daher Zähler und Nenner des Productes, welches das Zeichen der einzelnen Glieder darstellt, durch:

$$\prod_s^r (\lambda_r - \lambda_s)^{q-2}$$

und summirt sodann in Bezug auf sämmtliche i und λ, so erhält man sofort:

$$\left| c_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{p+q-2}} \right| = \left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \right| \cdot \left| b_{j_1, j_2, \ldots, j_q} \right| (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{p+q-2}; i_1, i_2, \ldots, i_p; j_1, j_2, \ldots j_q = 1, 2, \ldots n)$$

Als specielle Fälle des eben bewiesenen Satzes mögen die folgenden erwähnt werden:

Das Product aus einer Determinante $p$ten Ranges und einer quadratischen Determinante ist eine Determinante vom Range p.

Das Product zweier quadratischer Determinanten ist eine quadratische Determinante.

Es seien nun beide Zahlen p und q ungerade.

Man setze wieder:

$$c_{i_1, i_2, \ldots, i_{p+q-2}} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, \lambda} b_{\lambda, i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{p+q-2}}$$

Nimmt man nun aus dem Systeme der n^{p+q-2} Grössen c n^{p+q-3} heraus, welche man dadurch erhält, dass man für i_p irgend eine Combination der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ setzt und bildet aus derselben die Determinante $n$ter Ordnung und $(p+q-3)$ten Ranges:

$$\left| c_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, \overline{i_p}, i_{p+1}, \ldots, i_{p+q-2}} \right| (i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}, \ldots, i_{p+q-2} = 1, 2, \ldots, n)$$

wo durch das Überstreichen des Index i_p angedeutet werden soll, dass für die i_p eine bestimmte Combination der Zahlen $1, 2, \ldots n$ gesetzt ist, so ist diese Determinante nach dem eben entwickelten Satze gleich dem Producte der zwei Determinanten:

$$\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \right| \times \left| b_{j_1, i_p, j_2, \ldots, j_{q-1}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_p; j_1, j_2, \ldots, j_{q-1} = 1, 2, \ldots, n)}$$

da die zweite von diesen Determinanten eine Determinante geraden Ranges ist.

Bildet man nun alle $n!$ Determinanten $n$ter Ordnung und $(p+q-3)$ten Ranges der c, welche man erhält, wenn man für i_p alle $n!$ Anordnungen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ setzt, versieht jede dieser Determinanten mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem die betreffende Anordnung der Gruppe jener Permutationen angehört, welche die zweiwerthigen Functionen ungeändert lassen oder nicht, und bildet sodann die algebraische Summe dieser $n!$ Ausdrücke, so erhält man, nach einem früheren Satze die Determinante $n$ter Ordnung und $(p+q-2)$ten Ranges:

$$\left| c_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{p+q-2}} \right|_{(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{p+q-2} = 1, 2, \ldots, n)}$$

und hat daher, wenn man bedenkt, dass nach dem eben angeführten Satze auch die algebraische Summe der Determinanten der b gleich der Determinante $q$ten Ranges und $n$ter Ordnung:

$$\left| b_{j_1, j_2, \ldots, j_q} \right|_{(j_1, j_2, \ldots, j_q = 1, 2, \ldots, n)}$$

wird, die Gleichung:

$$\left| c_{i_1, i_2, \ldots, i_{p+q-2}} \right| = \left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \right| \cdot \left| b_{j_1, j_2, \ldots, j_q} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{p+q-2}; j_1, j_2, \ldots, j_q = 1, 2, \ldots, n)}$$

Als specieller Fall des eben abgeleiteten Theorems mag folgender Satz erwähnt werden:

Das Product zweier cubischer Determinanten ist eine Determinante vierten Ranges.

Durch die obigen Entwicklungen ist also der ursprünglich angeführte Satz allgemein bewiesen.

Wie man dadurch, dass man den Summationsbuchstaben λ in der Gleichung, welche die Grössen c definirt, an verschiedene Stellen rücken lässt, zu mannigfachen Darstellungen des Productes zweier Determinanten und dadurch zu einer Reihe von interessanten Identitäten gelangt, ist aus der vorigen Entwicklung leicht ersichtlich

Indem wir uns die weitere Entwicklung der Theorie der Determinanten höheren Ranges vorbehalten, wollen wir, um den Nutzen dieser interessanten Gebilde zu zeigen, in den folgenden Zeilen einige Anwendungen derselben anführen.

Es sei:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m} a_{i_1, i_2, \ldots, i_m} x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m} \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, n)$$

eine Form $m$ter Ordnung der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$. Wir wollen die aus den Coëfficienten dieser Form gebildete Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges:

$$\Delta_f = \left| a_{i_1, i_2, \ldots i_m} \right|_{(i_1, i_2, \ldots i_m = 1, 2, \ldots, n)}$$

die Determinante dieser Form nennen.

Transformirt man die gegebene Form durch die lineare Substitution:

$$x_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} b_{\lambda, \varkappa}\, y_\varkappa$$

so ist die Determinante der transformirten Form $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$\Delta_F = \sum_{i_1^{(1)},\ldots,i_m^{(n)},\,\varkappa_1^{(1)},\ldots,\varkappa_{m-1}^{(n)}} a_{i_1^{(1)},\ldots,i_m^{(1)}}\, b_{i_1^{(1)},1}\, b_{i_2^{(1)},\varkappa_1^{(1)}},\ldots, b_{i_m^{(1)},\varkappa_{m-1}^{(1)}} \cdot a_{i_1^{(2)},\ldots,i_m^{(2)}}\, b_{i_1^{(2)},2}\, b_{i_2^{(2)},\varkappa_1^{(2)}} \ldots$$

$$\ldots b_{i_m^{(2)},\varkappa_{m-1}^{(2)}},\ldots, a_{i_1^{(n)},\ldots,i_m^{(n)}},\, b_{i_1^{(n)},n}\, b_{i_2^{(n)},\varkappa_1^{(n)}},\ldots, b_{i_m^{(n)},\varkappa_{m-1}^{(n)}} \times$$

$$\times \prod_{s}^{r} \frac{(\varkappa_1^{(r)}-\varkappa_1^{(s)})\ldots(\varkappa_{m-1}^{(r)}-\varkappa_{m-1}^{(s)})}{(r-s)^{m-1}}$$

$$(i_1^{(1)},\ldots,i_m^{(n)},\varkappa_1^{(1)},\ldots,\varkappa_{m-1}^{(n)},\, r,s=1,2,\ldots,n;\ r>s)$$

Man sieht leicht, dass in der entwickelten Determinante niemals zwei Glieder vorkommen, in denen $i_\sigma^{(\lambda)} = i_\sigma^{(\mu)}\ \lambda \lessgtr \mu$ ist, und kann daher jedes einzelne Glied mit

$$\prod_{s}^{r} \frac{(i_2^{(r)}-i_2^{(s)})(i_3^{(r)}-i_3^{(s)})\ldots(i_m^{(r)}-i_m^{(s)})}{(i_2^{(r)}-i_2^{(s)})(i_3^{(r)}-i_3^{(s)})\ldots(i_m^{(r)}-i_m^{(s)})}$$

multipliciren. Führt man nun die Summation in Bezug auf die $\varkappa$ aus, so erhält man nach einem früheren Satze:

$$\Delta_F = \left| b_{j_1,j_2} \right|^{m-1} \sum_{i_1^{(1)},\, i_1^{(2)},\ldots,\, i_m^{(n)}} a_{i_1^{(1)},\ldots,i_m^{(1)}}\, b_{i_1^{(1)},1} \cdot a_{i_1^{(2)},\ldots,i_m^{(2)}}\, b_{i_1^{(2)},2} \cdots$$

$$\ldots a_{i_1^{(n)},\ldots,i_m^{(n)}}\, b_{i_1^{(n)}n} \prod_{s}^{r} \frac{(i_2^{(r)}-i_2^{(s)})(i_3^{(r)}-i_3^{(s)})\ldots(i_m^{(r)}-i_m^{(s)})}{(r-s)^{m-1}}$$

$$(i_1^{(1)},\ldots,i_m^{(n)},\, r,s;\ j_1 . j_2 = 1,2,\ldots,n;\ r>s)$$

Ist nun m eine gerade Zahl, so erhält man nach einem eben entwickelten Satze:

$$\Delta_F = \left| b_{j_1,j_2} \right|^m \Delta_{f\ (j_1,j_2=1,2,\ldots,n)}$$

Die Determinante einer Form von n Veränderlichen von gerader Ordnung ist demnach eine Invariante, deren Index gleich ist der Ordnung der gegebenen Form.

Man sieht, dass die Ordnung der Form den Rang, die Anzahl der Veränderlichen die Ordnung der Determinante bestimmt.

Es hat also jede Form gerader Ordnung eine Invariante, deren Ordnung gleich ist der Anzahl der Veränderlichen.

Ein specieller Fall dieses Satzes ist der folgende:

Jede binäre Form gerader Ordnung hat eine quadratische Invariante.

Nehmen wir ferner ein simultanes System von Formen:

$$f_1(x_1, x_2,\ldots,x_n) = \sum_{i_1^{(1)},\, i_2^{(1)},\ldots,\, i_m^{(1)}} a_{1,\, i_1^{(1)},\, i_2^{(1)},\ldots,\, i_m^{(1)}}\, x_{i_1^{(1)}}\, x_{i_2^{(1)}} \ldots x_{i_m^{(1)}}$$

$$f_2(x_1, x_2,\ldots,x_n) = \sum_{i_1^{(2)},\, i_2^{(2)},\ldots,\, i_m^{(2)}} a_{2,\, i_1^{(2)},\, i_2^{(2)},\ldots,\, i_m^{(2)}}\, x_{i_1^{(2)}}\, x_{i_2^{(2)}} \ldots x_{i_m^{(2)}}$$

. . . .

. . . .

$$f_n(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \sum_{i_1^{(n)},\, i_2^{(n)},\ldots,\, i_m^{(n)}} a_{n,\, i_1^{(n)},\, i_2^{(n)},\ldots,\, i_m^{(n)}}\, x_{i_1^{(n)}}\, x_{i_2^{(n)}} \ldots x_{i_m^{(n)}}$$

$$(i_1^{(1)},\, i_2^{(1)},\ldots,\, i_m^{(n)} = 1,2,\ldots,n)$$

in welchem die Anzahl der Formen gleich der Anzahl der Veränderlichen ist, und nennen die Determinante $n$ter Ordnung und $(m+1)$ten Ranges:

$$\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}} \right| \quad (i_1, i_2, \ldots, i_{m+1} = 1, 2, \ldots, n)$$

die Determinante dieses Systems, so ist dieselbe eine simultane Invariante des erwähnten Formensystems.

Man findet, indem man in analoger Weise, wie in dem letzten Falle vorgeht, dass die Determinante des transformirten Systems gleich der Determinante des ursprünglichen Systems multiplicirt, mit der $m$ten Potenz der Substitutionsdeterminante, dass also der Index dieser Invariante m ist.

Es hat also jedes Formensystem, in welchem die Anzahl der Formen gleich der Anzahl der Veränderlichen ist, eine Invariante, deren Ordnung gleich der Anzahl der Veränderlichen ist.

Ein specieller Fall dieses Theorems ist der aus den Elementen der Invariantentheorie bekannte Satz:

Die Determinante eines Systems von n linearen homogenen Functionen von n Veränderlichen ist eine Invariante.

Bildet man die $m$te Emanante einer Form $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n Veränderlichen, so ist jede Invariante derselben eine Covariante der Form $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Wir verstehen nun unter m eine gerade Zahl und setzen:

$$\frac{\partial^\mu f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\mu_1}, \partial x_2^{\mu_2}, \ldots \partial x_n^{\mu_n}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{1, 1, \ldots, 1_{(\mu_1)}, 2, 2, \ldots, 2_{(\mu_2)}, \ldots, n, n, \ldots, n_{(\mu_n)}}$$
$$(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = \mu)$$

Die Determinante $m$ten Ranges und $n$ter Ordnung:

$$\left| f(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{i_1, i_2, \ldots i_m} \right| \quad (i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, n)$$

ist eine Covariante der Form $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Diese Determinante ist nämlich nach dem früher bewiesenen Satze eine Invariante der $m$ten Emanante von $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und als solche eine Covariante der Originalform.

Für $m = 2$ erhält man die bekannte Hesse'sche Determinante.

Ist die Ordnung der Form gleich m, so hat man die früher erwähnte Invariante.

Ist die Ordnung der vorgelegten Form ungerade $= 2p+1$, so hat sie eine Reihe von Covarianten, deren Grad gleich ist der Anzahl der Veränderlichen, und deren Ordnung bez. $n, 3.n, 5 \cdot n, \ldots, (2p-1)n$ ist.

Man hat, um dies zu beweisen, nur $m = 2p, 2p-2, 2p-4, \ldots$ zu setzen; alsdann ist die $m$te Emanante eine Form gerader Ordnung, welche, wie oben bemerkt wurde, eine Invariante besitzt, deren Ordnung gleich der Anzahl der Veränderlichen, also gleich n ist. Die Coëfficienten der Emanante sind lineare Functionen der Coëfficienten der Originalform und in den Veränderlichen derselben bezüglich von den Graden 1, 3, 5,..., $2p-1$. Hiermit ist der eben ausgesprochene Satz bewiesen.

Jede Form ungeraden Grades von einer geraden Anzahl n von Veränderlichen hat eine Reihe von Invarianten von der Ordnung n^2.

Eine solche Form hat, wie eben bewiesen wurde, eine Covariante, welche in Bezug auf die Veränderlichen vom Grade $n(2\sigma+1)$ und in Bezug auf die Coëfficienten der Form vom Grade n ist. Ist nun n gerade, so hat diese Covariante eine Invariante, welche in Bezug auf die Coëfficienten derselben vom Grade n, also in Bezug auf die Coëfficienten der ursprünglichen Form vom Grade n^2 ist. Jede Invariante einer Covariante ist aber eine Invariante der Originalform, es hat also die vorgelegte Form eine Reihe von Invarianten vom Grade n^2.

Als speciellen Fall dieses Theorems erwähnen wir den Satz:

Binäre Formen ungerader Ordnung haben stets eine Invariante vierter Ordnung.

Hat man n Covarianten $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ..., $\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ einer Form von n Veränderlichen, deren Indices bezüglich $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sind, und bildet man aus den $m$ten Ableitungen derselben die Determinante $n$ter Ordnung und $(m+1)$ten Ranges:

$$\left| \varphi \underset{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}}{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| \quad i_1, i_2, \ldots, i_{m+1} = 1, 2, \ldots, n)$$

wo:

$$\frac{\partial^{\mu} \varphi_{\lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\mu'_1}\, \partial x_2^{\mu'_2} \ldots \partial x_n^{\mu'_n}} = \varphi \underset{\lambda,\, 1,\, 1,\, \ldots,\, 1_{(\mu'_1)}.\; 2,\, 2,\, \ldots,\, 2_{(\mu'_2)},\, \ldots,\, n,\, n,\, \ldots,\, n_{(\mu'_n)}}{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

$$(\mu'_1 + \mu'_2 + \ldots + \mu'_n = \mu)$$

gesetzt wurde, so ist dieselbe eine Covariante der Form mit dem Index $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n + m$.

Es sei:

$$\Phi_{i_1^{(\lambda)}, i_2^{(\lambda)}, \ldots, i_{m+1}^{(\lambda)}} = \Delta^{\mu_\lambda} \sum_{g=1}^{g=n} \alpha_{g,\, i_{m+1}^{(\lambda)}}\; p^{(1)}_{i_1^{(\lambda)}, i_2^{(\lambda)}, \ldots, i_m^{(\lambda)}, g}$$

$$(\lambda, i_1^{(\lambda)}, i_2^{(\lambda)}, \ldots, i_m^{(\lambda)} = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\Delta = \left| \alpha_{j_1, j_2} \right| (i_1, j_2 = 1, 2, \ldots, n)$$

dann ist:

$$\left| \Phi_{i_1, i_2, \ldots i_{m+1}} \right| = \Delta^{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n + 1} \left| p^{(1)}_{i_1, i_2, \ldots i_{m+1}} \right| (i_1, i_2, \ldots i_{m+1} = 1, 2, \ldots, n)$$

Setzt man ferner:

$$p^{(1)}_{i_1^{(\lambda)}, i_2^{(\lambda)}, \ldots, i_{m+1}^{(\lambda)}} = \sum_{g=1}^{g=n} \alpha_{g,\, i_m^{(\lambda)}}\; p^{(2)}_{i_1^{(\lambda)}, i_2^{(\lambda)}, \ldots, i_{m-1}^{(\lambda)}, g, i_{m+1}^{(\lambda)}}$$

so wird:

$$\left| p^{(1)}_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}} \right| = \Delta . \left| p^{(2)}_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}} \right| (i_1, i_2, \ldots i_{m+1} = 1, 2, \ldots, n)$$

Setzt man der Reihe nach:

$$p^{(2)}_{i_1^{(\lambda)}, i_2^{(\lambda)}, \ldots, i_{m+1}^{(\lambda)}} = \sum_{g=1}^{g=n} \alpha_{g,\, i_{m-1}^{(\lambda)}}\; p^{(3)}_{i_1^{(\lambda)}, i_2^{(\lambda)}, \ldots, i_{m-2}^{(\lambda)}, g, i_m^{(\lambda)}, i_{m+1}^{(\lambda)}}$$

$$p^{(3)}_{i_1^{(\lambda)}, i_2^{(\lambda)}, \ldots, i_{m+1}^{(\lambda)}} = \sum_{g=1}^{g=n} \alpha_{g,\, i_{m-2}^{(\lambda)}}\; p^{(4)}_{i_1^{(\lambda)}, i_2^{(\lambda)}, \ldots, i_{m-3}^{(\lambda)}, g, i_{m-1}^{(\lambda)}, i_m^{(\lambda)}, i_{m+1}^{(\lambda)}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p^{(m-1)}_{i_1^{(\lambda)}, i_2^{(\lambda)}, \ldots, i_{m+1}^{(\lambda)}} = \sum_{g=1}^{g=n} \alpha_{g,\, i_2^{(\lambda)}}\; \varphi \underset{i_1^{(\lambda)}, g, i_2^{(\lambda)}, \ldots, i_m^{(\lambda)}, i_{m+1}^{(\lambda)}}{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

so findet man:

$$\left| p^{(2)}_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}} \right| = \Delta \left| p^{(3)}_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}} \right|$$

$$\left| p^{(3)}_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}} \right| = \Delta \left| p^{(4)}_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}} \right|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left| p^{(m-1)}_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}} \right| = \Delta \left| \varphi \underset{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}}{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right|$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{m+1} = 1, 2, \ldots n)$$

Man hat daher:

$$\left| \Phi_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}} \right| = \Delta^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+m} \left| \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{i_1, i_2, \ldots i_{m+1}} \right| \quad (i_1, i_2, \ldots i_{m+1} = 1, 2, \ldots, n)$$

Nun ist:

$$\left| \Phi_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}} \right| \quad (i_1, i_2, \ldots, i_{m+1} = 1, 2, \ldots, n)$$

die aus den Ableitungen der Covarianten der transformirten Form gebildete Determinante; man sieht daher, dass wirklich die erwähnte, aus den $m$ten Ableitungen von n Covarianten der Form gebildete Determinante eine neue Covariante der Form mit dem Index $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+m$ ist.

Als speciellen Fall dieses Satzes erwähnen wir das folgende Theorem:

Die aus den ersten Ableitungen zweier Covarianten einer binären Form gebildete quadratische Determinante ist eine Covariante der Form. Der Index dieser Covariante ist $\mu+\nu+1$, wenn die Indices der erwähnten zwei Covarianten μ und ν sind.