EIN NEUER SATZ AUS DER THEORIE DER DETERMINANTEN.

VON

PHIL. DR. ANTON PUCHTA,

PRIVATDOCENT DER PRAGER UNIVERSITÄT UND DEUTSCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 1. DECEMBER 1881.

Im XXXVIII. Bande der Denkschriften der mathem. naturwissenschaftlichen Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften findet sich von mir ein Determinantensatz, der, wie ich eben fand, ein sehr specieller Fall des folgenden, viel allgemeineren ist. Ich zeigte nämlich in dem erwähnten Aufsatze, dass gewisse Determinanten vom Grade 2^m gleich sind einem Producte von 2^m, in den Elementen der Determinante linearen Factoren und ich will nun zeigen, dass dieser Satz sich dahin verallgemeinern lässt, dass gewisse Determinanten vom Grade $m^\alpha n^\beta n^\gamma\ldots$ gleich sind einem ganz ähnlichen Producte von $m^\alpha n^\alpha n^\gamma\ldots$ in den Elementen linearen Factoren. Dass dieser, wie ich glaube, neue Satz eine ganz wesentliche Verallgemeinerung des erwähnten ist, liegt zu Tage, da $m, n, p\ldots$ $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ beliebige ganze Zahlen sind. Man gelangt zu diesem Satze auf folgende Weise, immer vom Einfacheren zum Zusammengesetzten aufsteigend.

A) Ich notire für das Nachstehende, behufs Erläuterung, die Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -(a+b+c)(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha) \qquad \ldots 1)$$

worin

$$\alpha = \sqrt[3]{1} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

ist.

Von der analogen Determinante 4ten Grades, nämlich

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$$

wird später die Rede sein.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \\ c & d & e & a & b \\ d & e & a & b & c \\ e & a & b & c & d \end{vmatrix} = +(a+b+c+d+e)(a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3+e\alpha^4)(a+b\alpha^2+c\alpha^4+d\alpha+e\alpha^3) \times(a+b\alpha^3+c\alpha+d\alpha^4+c\alpha^2)(a+b\alpha^4+c\alpha^3+d\alpha^2+e\alpha) \qquad \ldots 2)$$

wobei

$$\alpha = \sqrt[5]{1},$$

jedoch von $+1$ verschieden ist.

Allgemein erhält man, wenn man die Elemente $a_1, a_2 \ldots a_m$ nimmt, wobei m eine Primzahl, und zwar die erste Potenz sein soll, und auf sie die cyklische Substitution $S = (a_1, a_2 \ldots a_m)$, sowie ihre $(m-1)$ Potenzen anwendet $S^1, S^2 \ldots S^{m-1}$, dann die Resultate, immer mit jenem Elemente beginnend, das a_1 ersetzt, die erste, zweite ... $m$te Zeile einer Determinante sein lässt, folgende Determinante $m$ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m-1} & a_m \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m-1} & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m-2} & a_{m-1} \end{vmatrix} \qquad \ldots 4)$$

Diese Determinante behaupte ich, ist gleich $(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}$ mal dem Producte der m linearen Factoren, welche aus $a_1 + a_2\,\alpha + a_3\,\alpha^2 + \ldots + a_m\,\alpha^{m-1}$ entstehen, wenn man hierin α, das eine beliebige von $+1$ verschiedene Wurzel der Gleichung $x^m = 1$ ist, durch $\alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{-1}$, $\alpha^m = 1$ ersetzt.

Der Beweis hiefür kann in nachstehender Weise geführt werden. Multiplicirt man die erste, zweite ... $m$te Colonne obiger Determinante mit $1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{m-1}$ resp. und addirt alle Colonnen zur ersten, wodurch bekanntlich die Determinante nicht verändert wird, so lautet das $n$te Element der ersten Colonne, wegen der früher angegebenen Bildungsart der Determinante:

$$a_n + a_{n+1}\,\alpha + a_{n+2}\,\alpha^2 + \ldots + a_m\,\alpha^{m-n} + a_1\,\alpha^{m-n+1} + a_2\,\alpha^{m-n+2} + \ldots + a_{n-1}\,\alpha^{m-1}$$

oder

$$\alpha^{m-n+1}\left[a_1 + a_2\,\alpha + a_3\,\alpha^2 + \ldots + a_m\,\alpha^{m-1}\right],$$

so dass hiedurch ersichtlich die Existenz des obigen Factors in allen Elementen der ersten Colonne dargethan ist. Ebenso erhält man, da α eine beliebige von 1 verschiedene Wurzel der Gleichung $z^m = 1$ ist, die übrigen $(m-2)$ Factoren, und die Existenz des Factors, wenn $\alpha^m = 1$ genommen wird, folgt unmittelbar durch Addition aller Colonnen zur ersten. Nimmt man weiter aus dem Producte rechts das Glied a_m^m heraus, so besitzt dieses z. B. in 2) den Coëfficienten $+1$, da $1 . \alpha . \alpha^2 . \alpha^3 . \alpha^4 = +1$ ist, in der Determinante dagegen den Factor $(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}$ weil man ebenso viele Colonnenvertauschungen vornehmen muss, um es zum Anfangsgliede zu machen, und hiemit ist der Beweis für die obige Behauptung, wenn m eine erste Potenz einer Primzahl ist, erbracht.

B) Erste Verallgemeinerung des gefundenen Satzes.

Ich notire zunächst wieder die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i \\ b & c & a & e & f & d & h & i & g \\ c & a & b & f & d & e & i & g & h \\ d & e & f & g & h & i & a & b & c \\ e & f & d & h & i & g & b & c & a \\ f & d & e & i & g & h & c & a & b \\ g & h & i & a & b & c & d & e & f \\ h & i & g & b & c & a & e & f & d \\ i & g & h & c & a & b & f & d & e \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a+b+c+d+e+f+g+h+i) \times \\ (a+b\alpha+c\alpha^2+d+e\alpha+f\alpha^2+g+h\alpha+i\alpha^2) \times \\ (a+b\alpha^2+c\alpha+d+e\alpha^2+f\alpha+g+h\alpha^2+i\alpha) \times \\ (a+b+c+d\alpha+e\alpha+f\alpha+g\alpha^2+h\alpha^2+i\alpha^2) \times \\ (a+b+c+d\alpha^2+e\alpha^2+f\alpha^2+g\alpha+h\alpha+i\alpha) \times \\ (a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha+e\alpha^2+f+g\alpha^2+h+i\alpha) \times \\ (a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^2+e+f\alpha+g\alpha+h\alpha^2+i) \times \\ (a+b\alpha^2+c\alpha+d\alpha+e+f\alpha^2+g\alpha^2+h\alpha+i) \times \\ (a+b\alpha^2+c\alpha+d\alpha^2+e\alpha+f+g\alpha+h+i\alpha^2). \end{array} \qquad \ldots 3)$$

Was das Bildungsgesetz dieser Determinante anbelangt, so gelangt man hiezu auf die folgende Weise, wobei ich die Substitutionstheorie umgehe, obgleich diese ebenfalls hier benützt werden könnte. Ist nämlich die nach A) gebildete Determinante 3ten Grades gegeben

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}$$

und ersetzt man in ihr $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ respective durch die drei nach dem in A) gegebenen Gesetze gebildeten Determinanten

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d & e & f \\ e & f & d \\ f & d & e \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} g & h & i \\ h & i & g \\ i & g & h \end{vmatrix}$$

so entsteht die Determinante in 3).

Allgemein erhält man, wenn m eine Primzahl in der ersten Potenz ist, dadurch, dass man jedes Element in einer nach A) gebildeten Determinante $m$ten Grades durch eine ganz analog gebildete Determinante desselben Grades ersetzt, eine Determinante vom Grade m^2, gebildet aus den Elementen $a_1\ a_2 \ldots a_{m^2}$. Jede derartig gebildete Determinante, behaupte ich, ist gleich einem Producte von m^2, in den Elementen linearen Factoren welche zu Coëfficienten die m Wurzel der Gleichung $z^m = 1$ haben. Um das Gesetz fü die Coëfficienten zu erhalten, bemerke ich, an die Gleichung 3) anknüpfend, dass in der Determinante α_1 die Coëfficienten nach A) durch folgendes System gegeben sind:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{matrix} \qquad \ldots\lambda)$$

Man erhält hieraus die Coëfficienten der neun Factoren rechts in 3) in der Art, dass man den Elementen $a\,b\,c$ diese Coëfficienten gibt, den Elementen $d\,e\,f$, dieselben Coëfficienten vorsetzt, wenn man sie noch, entsprechend der zweiten Colonne in λ) einmal mit 1, dann α, schliesslich α^2 multiplicirt. Endlich erhalten die Elemente $g\,h\,i$ dieselben Coëfficienten λ, nur entsprechend der dritten Colonne in λ) resp. mit $1, \alpha^2, \alpha$ noch multidlicirt. Man kann also so auch die Coëfficienten der neun Factoren in 3) zu folgendem System vereinigt denken:

$$\begin{matrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \alpha\lambda & \alpha^2\lambda \\ \lambda & \alpha^2\lambda & \alpha\lambda \end{matrix} \qquad \ldots\lambda')$$

und damit dürfte das die Coëfficienten in 3) beherrschende Gesetz klar sein. Allgemein also erhält man, wenn das System der Coëfficienten einer nach A) gebildeten Determinante mit μ bezeichnet wird, bei seiner nach dem obigen Gesetze gebildeten Determinante, z. B. $5^2 = 25$ten Grades das System der Coëfficienten aus dem Schema:

$$\begin{matrix} \mu, & \mu, & \mu, & \mu, & \mu, \\ \mu, & \mu\alpha, & \mu\alpha^2, & \mu\alpha^3, & \mu\alpha^4 \\ \mu, & \mu\alpha^2, & \mu\alpha^4, & \mu\alpha, & \mu\alpha^3 \\ \mu, & \mu\alpha^3, & \mu\alpha, & \mu\alpha^4, & \mu\alpha^2 \\ \mu, & \mu\alpha^4, & \mu\alpha^3, & \mu\alpha^2, & \mu\alpha \end{matrix} \qquad \ldots\nu)$$

wobei α eine von $+1$ verschiedene 5te Einheitswurzel ist, u. s. w. bis zu einer Determinante vom Grade m^2.

Was den Beweis dieser Behauptung anbelangt, so wird derselbe wörtlich in derselben Weise geführt, wie in A), wenn man die Bildungsart dieser Determinanten, sowie das Gesetz der Coëfficienten beachtet, so dass ich ihn, um nicht zu wiederholen, übergehe, und nur bemerke, dass wegen $m^2-1 = (m-1)(m+1)$ der Factor

$(-1)^{\frac{m^2(m^2-1)}{2}}$ stets $+1$ ist, weil m eine ungerade Primzahl ist. Genau in derselben Weise kann man von Determinanten m^2ten Grades, die eben erhalten wurden, zu Determinanten vom Grade m^3 u. s. w. allgemein von solchen des Grades m^n zu denen vom Grade m^{n+1} übergehen und findet diese letzteren stets gleich einem ganz ähnlichen Producte von Factoren, wobei die einzelnen Summanden dieser Factoren zu Coëfficienten die Wurzeln der Gleichung $z^m = 1$ haben. So hat man z. B. bei einer Determinante vom Grade $3^3 = 27$ nach obigem Gesetze gebildet, für die Coëfficienten der 27 Factoren das Schema

$$\begin{matrix} \lambda' \, \lambda' \, \lambda' \\ \lambda' \, \lambda' \alpha \, \lambda' \alpha^2 \\ \lambda' \, \lambda' \alpha^2 \, \lambda' \alpha \quad \text{u. s. w.} \end{matrix} \qquad \ldots \lambda'')$$

Hiemit ist auch klar, dass der von mir früher publicirte Fall, wo $m = 2$ ist, hier völlig ausser Acht zu lassen ist, da bisher immer m eine ungerade Primzahl in der ersten Potenz war.

Allein mit dem Gesagten ist noch nicht die grösstmögliche Verallgemeinerung des neuen Satzes erreicht, sondern man gelangt zu derselben auf die folgende Weise.

C) Weitere Verallgemeinerung.

Ich nehme eine nach A) gebildete Determinante vom Grade 5, sie möge sein

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \alpha \\ \gamma & \delta & \varepsilon & \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma \\ \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

und ersetze in ihr jedes Element durch eine nach A) gebildete Determinante dritten Grades, so gelange ich zur folgenden:

$$\begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\
a_2 & a_3 & a_1 & a_5 & a_6 & a_4 & a_8 & a_9 & a_7 & a_{11} & a_{12} & a_{10} & a_{14} & a_{15} & a_{13} \\
a_3 & a_1 & a_2 & a_6 & a_4 & a_5 & a_9 & a_7 & a_8 & a_{12} & a_{10} & a_{11} & a_{15} & a_{13} & a_{14} \\
a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_1 & a_2 & a_3 \\
a_5 & a_6 & a_4 & a_8 & a_9 & a_7 & a_{11} & a_{12} & a_{10} & a_{14} & a_{15} & a_{13} & a_2 & a_3 & a_1 \\
a_6 & a_4 & a_5 & a_9 & a_7 & a_8 & a_{12} & a_{10} & a_{11} & a_{15} & a_{13} & a_{14} & a_3 & a_1 & a_2 \\
a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
a_8 & a_9 & a_7 & a_{11} & a_{12} & a_{10} & a_{14} & a_{15} & a_{13} & a_2 & a_3 & a_1 & a_5 & a_6 & a_4 \\
a_9 & a_7 & a_8 & a_{12} & a_{11} & a_{11} & a_{15} & a_{13} & a_{14} & a_3 & a_1 & a_2 & a_6 & a_4 & a_5 \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\
a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{14} & a_{15} & a_{13} & a_2 & a_3 & a_1 & a_5 & a_6 & a_4 & a_8 & a_9 & a_7 \\
a_{12} & a_{10} & a_{11} & a_{15} & a_{13} & a_{14} & a_3 & a_1 & a_2 & a_6 & a_4 & a_5 & a_9 & a_7 & a_8 \\
a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\
a_{14} & a_{15} & a_{13} & a_2 & a_3 & a_1 & a_5 & a_6 & a_4 & a_8 & a_9 & a_7 & a_{11} & a_{12} & a_{10} \\
a_{15} & a_{13} & a_{14} & a_3 & a_1 & a_2 & a_6 & a_4 & a_5 & a_9 & a_7 & a_8 & a_{12} & a_{10} & a_{11}
\end{vmatrix} \qquad \ldots D)$$

Diese Determinante vom Grade 15 ist gleich 15 in $a_1 \, a_2 \ldots a_{15}$ linearen Factoren, deren Summanden Coëfficienten haben, die aus dem Schema π) zu entnehmen sind.

$$\begin{matrix} 1 \; 1 \; 1 \\ 1 \; \alpha \; \alpha^2 \\ 1 \; \alpha^2 \; \alpha \end{matrix} \quad \ldots x) \qquad \begin{matrix} x \;\; x \;\; x \;\; x \;\; x \\ x \;\; x\beta \;\; x\beta^2 \;\; x\beta^3 \;\; x\beta^4 \\ x \;\; x\beta^2 \;\; x\beta^4 \;\; x\beta \;\; x\beta^3 \\ x \;\; x\beta^3 \;\; x\beta \;\; x\beta^4 \;\; x\beta^2 \\ x \;\; x\beta^4 \;\; x\beta^3 \;\; x\beta^2 \;\; x\beta \end{matrix} \quad \ldots \pi)$$

Dieses Product von 15 Factoren, welches gleich D) ist, hat aus dem früher angegebenen Grunde noch den Factor $(-1)^{\frac{15.(15-1)}{2}} = -1$ zu erhalten.

Der Beweis für diese Determinante D) soll hier wegen des Abschlusses völlig gegeben werden. Jede Zeile in π gibt drei Factoren, weil x selbst drei Zeilen enthält, da jedoch die fünf Zeilen in π aus der zweiten hervorgehen, wenn man unter Beachtung, dass $\beta^5 = 1$ ist, β durch β^2, β^3, β^4, β^5 ersetzt, so genügt es offenbar für die Existenz aller 15 Factoren, den Nachweis für die drei der zweiten Zeile in π zu führen. Diese drei Factoren der zweiten Zeile entstehen aber aus dem zweiten von ihnen, nämlich aus

$$a_1 + a_2\alpha + a_3\alpha^2 + a_4\beta + a_5\alpha\beta + a_6\alpha^2\beta + a_7\beta^2 + a_8\alpha\beta^2 + a_9\alpha^2\beta^2 + a_{10}\beta^3 + a_{11}\alpha\beta^3 + a_{12}\alpha^2\beta^3 + a_{13}\beta^4 + a_{14}\alpha\beta^4 + \\ + a_{15}\alpha^2\beta^4$$

wenn man α durch α^2, α^3 ersetzt unter Beachtung von $\alpha^3 = 1$, demnach ist der Nachweis aller 15 Factoren auf die Existenz dieses einzigen Factors reducirt. Allein auch für die Existenz dieses einen Factors kann die Beweisart noch reducirt werden. Multiplicirt man nämlich die 15 Colonnen der Reihe nach mit $1, \alpha, \alpha^2, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \beta^2, \beta^2\alpha, \beta^2\alpha^2, \beta^3, \alpha\beta^3, \alpha^2\beta^3, \beta^4, \alpha\beta^4, \alpha^2\beta^4$ und addirt sie sämmtlich zur ersten, so entsteht im ersten Gliede dieser Colonne der Factor, welchen ich P heissen will, offenbar, und in dem zweiten Gliede derselben Colonne $\alpha^2 P$, im dritten αP u. s. w. es erscheint in den sämmtlichen Gliedern nach dem Bildungsgesetze der Determinante P nur resp. multiplicirt mit

$$1, \alpha^2, \alpha, \beta^4, \beta^4\alpha^2, \beta^4\alpha, \beta^3, \beta^3\alpha^2, \beta^3\alpha, \beta^2, \beta^2\alpha^2, \beta^2\alpha, \beta, \beta\alpha^2, \beta\alpha,$$

und zwar mit zwingender Nothwendigkeit, womit der Beweis völlig erbracht ist.

Es ist jedoch zu beachten, dass man dieselbe Determinante D), also auch dasselbe Product für sie erhält, wenn man von der Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

ausgeht, und in ihr $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$ durch die nachstehenden Determinanten 5ten Grades ersetzt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_4 & a_7 & a_{10} & a_{13} \\ a_4 & a_7 & a_{10} & a_{13} & a_1 \\ a_7 & a_{10} & a_{13} & a_1 & a_4 \\ a_{10} & a_{13} & a_1 & a_4 & a_7 \\ a_{13} & a_1 & a_4 & a_7 & a_{10} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_5 & a_8 & a_{11} & a_{14} \\ a_5 & a_8 & a_{11} & a_{14} & a_2 \\ a_8 & a_{11} & a_{14} & a_2 & a_5 \\ a_{11} & a_{14} & a_2 & a_5 & a_8 \\ a_{14} & a_2 & a_5 & a_8 & a_{11} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_3 & a_6 & a_9 & a_{12} & a_{15} \\ a_6 & a_9 & a_{12} & a_{15} & a_3 \\ a_9 & a_{12} & a_{15} & a_3 & a_6 \\ a_{12} & a_{15} & a_3 & a_6 & a_9 \\ a_{15} & a_3 & a_6 & a_9 & a_{12} \end{vmatrix}$$

Der Grund hiefür ist eben, dass ich aus der ersten Zeile

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}$$

alle folgenden durch die Anwendung der Substitution

$$S = (a_1\ a_2\ a_3)(a_4\ a_5\ a_6)(a_7\ a_8\ a_9)(a_{10}\ a_{11}\ a_{12})(a_{13}\ a_{14}\ a_{15}),$$

und ihrer Potenzen, mit daran schliessender Anwendung der Substitution

$$\Sigma = (a_1\ a_4\ a_7\ a_{10}\ a_{13})(a_2\ a_5\ a_8\ a_{11}\ a_{14})(a_3\ a_6\ a_9\ a_{12}\ a_{15})$$

herleitete, ich jedoch ebenso hätte von der Aufeinanderfolge der Elemente wie in Σ ausgehen können, und nach Σ erst S und die Potenzen hätte benützen können.

Ich habe nur bisher in Determinanten von einem ungeraden Grade ganz analoge substituirt behufs Bildung von Determinanten höheren Grades. Ebenso gut jedoch hätte ich Determinanten von geradem Grade benützen können, wie das folgende Beispiel, das ich schliesslich noch hinzufüge, zeigt

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_5 & a_6 & a_4 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_6 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_5 & a_6 & a_4 & a_2 & a_3 & a_1 \\ a_6 & a_4 & a_5 & a_3 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)(a_1+a_2\,\alpha+a_3\,\alpha^2+a_4+a_5\,\alpha+a_6\,\alpha^2)\times \\ &(a_1+a_2\,\alpha^2+a_3\,\alpha+a_4+a_5\,\alpha^2+a_6\,\alpha)(a_1+a_2+a_3-a_4-a_5-a_6)\times \\ &(a_1+a_2\,\alpha+a_3\,\alpha^2-a_4-a_5\,\alpha-a_6\,\alpha^2)(a_1+a_2\,\alpha^2+a_3\,\alpha-a_4-a_5\,\alpha^2-a_6\,\alpha) \end{aligned}$$

welche Determinante durch Substitution von kubischen Determinanten in eine quadratische gebildet wurde, so dass die Coëfficienten aus dem Schema σ herzuleiten sind.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{matrix} \qquad \ldots\rho) \qquad\qquad \begin{matrix} \rho & \rho \\ \rho & -\rho \end{matrix} \qquad \ldots\sigma)$$

Wie man so zu Determinanten vom Grade $m^\alpha n^\beta p^\gamma \ldots$ u. s. w. fortschreiten kann durch Substitution von nach A) gebildeten Determinanten *m*ten, *n*ten, *p*ten… Grades liegt auf der Hand und soll desshalb, da auch das Herleitungsgesetz für die $m^\alpha n^\beta p^\gamma \ldots$ Factoren, deren Producte die so enthaltene Determinante gleich ist, ganz klar sein dürfte, nicht weiter ausgeführt werden, um nicht wiederholen zu müssen. Nur die Bemerkung mag hinzugefügt werden, dass man durch diesen allgemeinen Satz, wenn die Elemente einer derartigen Determinante gegebene numerische Zahlen sind, die Berechnung derselben mit geringer Mühe durchführen kann, was sonst bei einigermassen hohem Grade unmöglich sein dürfte. Alles Weitere, sowie die Umkehrung dieses Satzes in Analogie zu dem früher von mir publicirten Satze, mag übergangen werden.

Zeitschrift/Journal: Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.

Jahr/Year: 1882

Band/Volume: 44_2

Autor(en)/Author(s): Puchta Anton

Artikel/Article: Ein neuer Satz aus der Theorie der Determinanten. 277-282