ZUR THEORIE DER FUNCTIONEN $C_n^\nu(x)$.

VON

LEOPOLD GEGENBAUER.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 10. JÄNNER 1884.

In den folgenden Zeilen werde ich eine Reihe von neuen Sätzen über die Functionen $C_n^\nu(x)$, welche bekanntlich durch die Gleichung:

1) $$(1-2zx+z^2)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{n=\infty} C_n^\nu(x)z^n$$

definirt sind, mittheilen.

Aus der Gleichung:

$$1-2z\cos x+z^2=(1-z\cos x-iz\sin z)(1-z\cos x+iz\sin x)$$

folgt:

$$(1-2z\cos x+z^2)^{-\nu}=\sum_{\lambda,\,\mu=0}^{\lambda,\,\mu=\infty}\frac{\Pi(\nu+\lambda-1)\,\Pi(\nu+\mu-1)}{[\Pi(\nu-1)]^2\,\Pi(\lambda)\,\Pi(\mu)}\,z^{\lambda+\mu}\,\{\cos(\lambda-\mu)x+i\sin(\lambda-\mu)x\}$$

und daher ist:

2) $$C_n^\nu(\cos x)=\sum_{\lambda,\,\mu}\frac{\Pi(\nu+\lambda-1)\,\Pi(\nu+\mu-1)}{[\Pi(\nu-1)]^2\,\Pi(\lambda)\,\Pi(\mu)}\,\{\cos(\lambda-\mu)x+i\sin(\lambda-\mu)x\}$$

$$(\lambda,\mu=0,1,\ldots,n;\ \lambda+\mu=n)$$

oder auch, weil der imaginäre Bestandtheil auf der rechten Seite dieser Gleichung, wie man leicht erkennt, verschwindet:

3) $$C_n^\nu(\cos x)=\sum_{\lambda,\,\mu}\frac{\Pi(\nu+\lambda-1)\,\Pi(\nu+\mu-1)}{[\Pi(\nu-1)]^2\,\Pi(\lambda)\,\Pi(\mu)}\cos(\lambda-\mu)x$$

$$(\lambda,\mu=0,1,\ldots,n;\ \lambda+\mu=n)$$

und:

4) $$C_n^\nu(\cos x)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\frac{\Pi(\nu+\lambda-1)\,\Pi(\nu-\lambda+n-1)}{[\Pi(\nu-1)]^2\,\Pi(\lambda)\,\Pi(n-\lambda)}\cos(n-2\lambda)x.$$

Berücksichtigt man die Formel:

$$\frac{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}{2\Pi(\alpha+\beta-1)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\varphi\,d\varphi$$

so kann man die Gleichung 2) auch in folgender Form schreiben:

$$C_n^\nu(\cos x) = \frac{\Pi(n+2\nu-1)}{2^{2\nu}[\Pi(\nu-1)]^2\Pi(n)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\nu-1}2\varphi d\varphi \sum_{\lambda,\,\mu}\frac{\Pi(n)}{\Pi(\lambda)\Pi(\mu)}\{(\cos x \pm i\sin x)\sin^2\varphi\}^\lambda\{(\cos x\mp i \sin x)\cos^2\varphi\}^\mu$$

$(\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, n;\ \lambda+\mu = n$

$$= \frac{\Pi(n+2\nu-1)}{2^{2\nu}[\Pi(\nu-1)]^2\Pi(n)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x \pm i \sin x \cos 2\varphi)^n \sin^{2\nu-1} 2\varphi d\varphi$$

oder auch, wenn man für $\cos x$: x und für 2φ: φ schreibt:

$$5)\qquad C_n^\nu(x) = \frac{\Pi(n+2\nu-1)}{2^{2\nu-1}[\Pi(\nu-1)]^2\Pi(n)}\int_0^\pi (x\pm \cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n \sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi$$

welche Formel ich schon früher auf einem anderen Wege abgeleitet habe. („Über einige bestimmte Integrale". Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, II. Abtheilung, 70. Band.)

Entwickelt man die unter dem Integralzeichen auftretende $n$te Potenz, und beachtet, dass der imaginäre Bestandtheil auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwinden muss, so erhält man:

$$C_n^\nu(x) = \frac{\Pi(n+2\nu-1)}{2^{2\nu-1}[\Pi(\nu-1)]^2}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{x^{n-2\lambda}(x^2-1)^\lambda}{\Pi(2\lambda)\Pi(n-2\lambda)}\int_0^\pi \sin^{2\nu-1}\varphi \cos^{2\lambda}\varphi d\varphi$$

oder:

$$6)\qquad C_n^\nu(x) = \frac{\Pi(n+2\nu-1)\left[\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\right]^2}{\Pi(\nu-1)\Pi(2\nu-1)}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{x^{n-2\lambda}(x^2-1)^\lambda}{2^{2\lambda}\Pi(\lambda)\Pi(\nu+\lambda)\Pi(n-2\lambda)}$$

und:

$$7)\qquad C_n^\nu(\cos x) = \frac{\Pi(n+2\nu-1)\left[\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\right]^2}{\Pi(\nu-1)\Pi(2\nu-1)}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^\lambda\frac{\cos^{n-2\lambda}x\sin^{2\lambda}x}{2^{2\lambda}\Pi(\lambda)\Pi(\nu+\lambda)\Pi(n-2\lambda)}$$

Schreibt man in der Gleichung 5) für x: $\cos x$ und setzt:

$$\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang} x \cos\varphi$$

so verwandelt sich dieselbe in:

$$8)\qquad C_n^\nu(\cos x) = \frac{\Pi(n+2\nu-1)\cos^{n+1}x}{2^{2\nu-2}\Pi(n)[\Pi(\nu-1)]^2\sin^{2\nu-1}x}\int_0^x\frac{(\sin^2 x-\sin^2\psi)^{\nu-1}\cos n\psi d\psi}{\cos^{n+2\nu}\psi}$$

oder auch:

$$9)\qquad C_n^\nu(\cos x) = \frac{\Pi(n+2\nu-1)\cos^{n+1}x}{2^{3\nu-2}\Pi(n)[\Pi(\nu-1)]^2\sin^{2\nu-1}x}\int_0^x\frac{(\cos 2x-\cos 2\psi)^{\nu-1}\cos n\psi d\psi}{\cos^{n+2\nu}\psi}.$$

Multiplicirt man die Gleichung 5) mit $\frac{\varphi^{(n)}(y)}{\Pi(n+2\nu-1)}$ und summirt von $n=0$ bis $n=\infty$, so erhält man:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varphi^{(n)}(y)}{\Pi(n+2\nu-1)}C_n^\nu(x) = \frac{1}{2^{2\nu-1}[\Pi(\nu-1)]^2}\int_0^\pi \sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varphi^{(n)}(y)}{\Pi(n)}(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n$$

oder:

$$10)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varphi^{(n)}(y)}{\Pi(n+2\nu-1)}C_n^\nu(x) = \frac{1}{2^{2\nu-1}[\Pi(\nu-1)]^2}\int_0^\pi\varphi(y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})\sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi.$$

Aus dieser Gleichung folgt die Formel:

$$11)\quad \varphi^{(n)}(y) = \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 (n+\nu)\Pi(n)\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(x)dx\int_0^\pi \varphi(y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})\sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi.$$

Aus der Gleichung 1) folgt:

$$12)\quad z^n = \frac{(n+\nu)\Pi(n)}{2^{2\nu-1}\Pi(n+2\nu-1)}\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2\int_{-1}^{+1}\frac{C_n^\nu(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx}{(1-2zx+z^2)^\nu}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit:

$$\frac{\varphi^{(n)}(y)}{\Pi(n)(n+\nu)}$$

und summirt bezüglich n von 0 bis ∞, so ergibt sich die Relation:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varphi^{(n)}(y)}{(n+\nu)\Pi(n)}z^n = 2\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^\nu\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx}{(1-2zx+z^2)^\nu}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varphi^{(n)}(y)}{\Pi(n+2\nu-1)}C_n^\nu(x)$$

oder auch nach 10):

$$13)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varphi^{(n)}(y)}{(n+\nu)\Pi(n)}z^n = \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx}{(1-2zx+z^2)^\nu}\int_0^\pi\varphi(y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})\sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi.$$

Multiplicirt man die Gleichung 12) mit z^ν und differentiirt sodann in Bezug auf z, so ergibt sich die Formel:

$$14)\quad \frac{z^n}{1-z^2} = \frac{\Pi(n)\nu}{2^{2\nu-1}\Pi(n+2\nu-1)}\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2\int_{-1}^{+1}\frac{C_n^\nu(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx}{(1-2zx+z^2)^{\nu+1}}$$

Aus dieser Relation folgt sofort:

$$15)\quad \varphi(z+y) = \nu(1-z^2)\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx}{(1-2zx+z^2)^{\nu+1}}\int_0^\pi\varphi(y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})\sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi.$$

Nimmt man speciell in den Gleichungen 10), 11), 13), 15):

$$\varphi(y) = y^{-\frac{\mu}{2}}J^\mu(\sqrt{y})$$

$$\varphi(y) = y^{\frac{\mu}{2}}J^\mu(\sqrt{y})$$

und berücksichtigt, dass:

$$[y^{-\frac{\mu}{2}}J^\mu(\sqrt{y})]^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n y^{-\frac{\mu+n}{2}}J^{\mu+n}(\sqrt{y})$$

$$[y^{\frac{\mu}{2}}J^\mu(\sqrt{y})]^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n y^{\frac{\mu-n}{2}}J^{\mu-n}(\sqrt{y})$$

ist, so erhält man die Relationen:

16) $$\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n \frac{y^{-\frac{n}{2}} J^{\mu+n}(\sqrt{y})\, C_n^\nu(x)}{2^n \Pi(n+2\nu-1)} =$$

$$= \frac{y^{\frac{\mu}{2}}}{2^{2\nu-1}[\Pi(\nu-1)]^2}\int_0^\pi (y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{-\frac{\mu}{2}} J^\mu(\sqrt{y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}})\sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi$$

17) $$J^{\mu+n}(\sqrt{y}) = (-2)^n y^{\frac{\mu+n}{2}}(n+\nu)\Pi(n)\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 .$$

$$.\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(x)dx\int_0^\pi (y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{-\frac{\mu}{2}} J^\mu(\sqrt{y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}})\sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi$$

18) $$\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n \frac{y^{-\frac{n}{2}} J^{\mu+n}(\sqrt{y}) z^n}{2^n(n+\nu)\Pi(n)} = y^{\frac{\mu}{2}}\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 .$$

$$.\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx}{(1-2zx+z^2)^\nu}\int_0^\pi (y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{-\frac{\mu}{2}} J^\mu(\sqrt{y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}})\sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi$$

19) $$J^\mu(\sqrt{y+z}) = \nu(y+z)^{\frac{\mu}{2}}(1-z^2)\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 .$$

$$.\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx}{(1-2zx+z^2)^{\nu+1}}\int_0^\pi (y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{-\frac{\mu}{2}} J^\mu(\sqrt{y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}})\sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi$$

20) $$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{y^{-\frac{n}{2}} J^{\mu-n}(\sqrt{y})\, C_n^\nu(x)}{2^n \Pi(n+2\nu-1)} =$$

$$= \frac{1}{2^{2\nu-1}[\Pi(\nu-1)]^2 y^{\frac{\mu}{2}}}\int_0^\pi (y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{\frac{\mu}{2}} J^\mu(\sqrt{y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}})\sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi$$

21) $$J^{\mu-n}(\sqrt{y}) = 2^n y^{-\frac{\mu-n}{2}}(n+\nu)\Pi(n)\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 .$$

$$.\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(x)dx\int_0^\pi (y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{\frac{\mu}{2}} J^\mu(\sqrt{y+x+\cos\psi\sqrt{x^2-1}})\sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi$$

22) $$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{y^{-\frac{n}{2}} J^{\mu-n}(\sqrt{y}) z^n}{2^n(n+\nu)\Pi(n)} = y^{\frac{\mu}{2}}\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 .$$

$$.\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx}{(1-2zx+z^2)^\nu}\int_0^\pi (y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{\frac{\mu}{2}} J^\mu(\sqrt{y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}})\sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi$$

23) $$J^\mu(\sqrt{y+z}) = \frac{\nu(1-z^2)}{(y+z)^{\frac{\mu}{2}}}\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 .$$

$$.\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx}{(1-2zx+z^2)^{\nu+1}}\int_0^\pi (y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{\frac{\mu}{2}} J^\mu(\sqrt{y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}})\sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi$$

Setzt man in den Gleichungen 16), 17), 18), 19) und 23) $y=0$ und beachtet, dass:

$$[\alpha^{-\rho}J^\rho(\alpha)]_{\alpha=0}=\frac{1}{2^\rho\,\Pi(\rho)}$$

ist, so erhält man die Formeln:

$$24)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\frac{C_n^\nu(x)}{2^{2n}\,\Pi(n+2\nu-1)\,\Pi(n+\mu)}=$$

$$=\frac{1}{2^{2\nu-\mu-1}\,[\Pi(\nu-1)]^2}\int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{-\frac{\mu}{2}}J^\mu(\sqrt{x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}})\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi$$

$$25)\quad (-1)^n=2^\mu(n+\nu)\,\Pi(n)\,\Pi(n+\mu)\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu+n-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 .$$

$$.\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}C_n^\nu(x)\,dx\int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{-\frac{\mu}{2}}J^\mu(\sqrt{x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}})\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi$$

$$26)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{2n}(n+\nu)\,\Pi(n)\,\Pi(n+\mu)}=2^\mu\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 .$$

$$.\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx}{(1-2zx+z^2)^\nu}\int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{-\frac{\mu}{2}}J^\mu(\sqrt{x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}})\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi$$

$$27)\quad J^\mu(\sqrt{z})=\nu z^{\frac{\mu}{2}}(1-z^2)\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 .$$

$$.\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx}{(1-2zx+z^2)^{\nu+1}}\int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{-\frac{\mu}{2}}J^\mu(\sqrt{x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}})\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi$$

$$28)\quad J^\mu(\sqrt{z})=\frac{\nu(1-z^2)}{z^{\frac{\mu}{2}}}\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 .$$

$$.\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx}{(1-2zx+z^2)^{\nu+1}}\int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{\frac{\mu}{2}}J^\mu(\sqrt{x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}})\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi.$$

Setzt man in der Gleichung 26):

$$\mu=\nu-1$$

so verwandelt sie sich in:

$$29)\quad J^\nu(\sqrt{z})=2z^{\frac{\nu}{2}}\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 .$$

$$.\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx}{(1-2zx+z^2)^\nu}\int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{-\frac{\nu-1}{2}}J^{\nu-1}(\sqrt{x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}})\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi$$

welche Formel für $z=0$ in die folgende übergeht:

$$30)\quad \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx\int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{-\frac{\nu-1}{2}}J^{\nu-1}(\sqrt{x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}})\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi=$$

$$=2^{\nu+1}\,\Pi(\nu)\left[\frac{2^\nu\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu)}\right]^2 .$$

Setzt man in den Gleichungen 29) und 30) $\nu = \frac{1}{2}$ und beachtet, dass:

$$J^{\frac{1}{2}}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \sin \alpha$$

$$J^{-\frac{1}{2}}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \cos \alpha$$

ist, so erhält man folgende zwei Formeln:

31) $$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} \int_0^{\pi} \cos\left(\sqrt{x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}}\right) d\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{z}} \sin \sqrt{z}$$

32) $$\int_{-1}^{+1} dx \int_0^{\pi} \cos\left(\sqrt{x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}}\right) = 2\pi$$

welche man Herrn Catalan verdankt.

Setzt man in den Gleichungen 10), 11), 13), 15):

$$\varphi(y) = C_r^{\mu}(y)$$

und berücksichtigt, dass:

33) $$[C_r^{\mu}(y)]^{(n)} = \frac{2^n \Pi(\mu+n-1)}{\Pi(\mu-1)} C_{r-n}^{\mu+n}(y)$$

ist, so erhält man folgende Relationen:

34) $$\sum_{n=0}^{n=r} \frac{2^n \Pi(\mu+n-1)}{\Pi(n+2\nu-1)} C_{r-n}^{\mu+n}(y)\, C_n^{\nu}(x) = \frac{\Pi(\mu-1)}{2^{2\nu-1}[\Pi(\nu-1)]^2} \int_0^{\pi} C_r^{\mu}(y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}) \sin^{2\nu-1}\varphi\, d\varphi$$

35) $$C_{r-n}^{\mu+n}(y) = \frac{(n+\nu)\Pi(\mu-1)\Pi(n)}{2^n \Pi(\mu+n-1)} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 \cdot$$
$$\cdot \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^{\nu}(x)\, dx \int_0^{\pi} C_r^{\mu}(y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}) \sin^{2\nu-1}\varphi\, d\varphi$$

36) $$\sum_{n=0}^{n=r} \frac{2^n \Pi(\mu+n-1)}{(n+\nu)\Pi(n)} C_{r-n}^{\mu+n}(y) z^n = \Pi(\mu-1) \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 \cdot$$
$$\cdot \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\, dx}{(1-2zx+z^2)^{\nu}} \int_0^{\pi} C_r^{\mu}(y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}) \sin^{2\nu-1}\varphi\, d\varphi$$

37) $$C_r^{\mu}(y+z) = \nu(1-z^2) \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 \cdot$$
$$\cdot \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\, dx}{(1-2zx+z^2)^{\nu+1}} \int_0^{\pi} C_r^{\mu}(y+x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}) \sin^{2\nu-1}\varphi\, d\varphi.$$

Da:

$$C_{2m+1}^{\rho}(0) = 0,\ C_{2m}^{\rho}(0) = (-1)^m \frac{\Pi(m+\rho-1)}{\Pi(\rho-1)\Pi(m)}$$

$$C_m^{\rho}(+1) = \frac{\Pi(m+2\rho-1)}{\Pi(2\rho-1)\Pi(m)}$$

$$C_m^{\rho}(-1) = \frac{(-1)^m \Pi(m+2\rho-1)}{\Pi(2\rho-1)\Pi(m)}$$

ist, so erhält man als specielle Fälle dieser Formeln die Relationen:

$$38)\quad \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\left[\frac{r}{2}\right]} (-1)^\sigma \frac{\Pi(\mu+r-\sigma-1)}{2^{2\sigma}\,\Pi(r+2\nu-2\sigma-1)\,\Pi(\sigma)}\, C^\nu_{r-2\sigma}(x) = \frac{\Pi(\mu-1)}{2^{r+2\nu-1}\,[\Pi(\nu-1)]^2}\int_0^\pi C^\mu_r(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})\,\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi$$

$$39)\quad (-1)^\sigma \frac{2^{r-2\sigma}\,\Pi(\mu+r-\sigma-1)}{\Pi(\sigma)\,\Pi(\mu-1)\,\Pi(r-2\sigma)\,(r+\nu-2\sigma)}\left[\frac{2^{2\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2 =$$
$$= \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\, C^\nu_{r-2\sigma}(x)\,dx \int_0^\pi C^\mu_r(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})\,\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi$$

$$40)\quad \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\left[\frac{r}{2}\right]} \frac{\Pi(\mu+r-\sigma-1)\,z^n}{2^{2\sigma}\,\Pi(r-2\sigma)\,\Pi(\sigma)\,(\nu+r-2\sigma)} = \frac{\Pi(\mu-1)}{2^r}\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2.$$
$$.\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx}{(1-2zx+z^2)^\nu}\int_0^\pi C^\mu_r(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})\,\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi$$

$$41)\quad C^\mu_r(z) = \nu(1-z^2)\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx}{(1-2zx+z^2)^{\nu+1}}\int_0^\pi C^\mu_r(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})\,\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi$$

$$42)\quad 0 = \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\, C^\nu_{r-2\sigma-1}(x)\,dx\int_0^\pi C^\mu_r(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})\,\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi$$

$$43)\quad \sum_{n=0}^{n=r}\frac{2^n\,\Pi(\mu+n-1)\,\Pi(r+n+2\mu-1)}{\Pi(n+2\nu-1)\,\Pi(2n+2\mu-1)\,\Pi(r-n)}\, C^\nu_n(x) = \frac{\Pi(\mu-1)}{2^{2\nu-1}\,[\Pi(\nu-1)]^2}\int_0^\pi C^\mu_r(x+1+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})\,\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi$$

$$44)\quad \frac{2^n\,\Pi(\mu+n-1)\,\Pi(r+n+2\mu-1)}{(n+\nu)\,\Pi(r-n)\,\Pi(2n+2\mu-1)\,\Pi(\mu-1)\,\Pi(n)}\left[\frac{2^{2\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2 =$$
$$= \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\, C^\nu_n(x)\,dx\int_0^\pi C^\mu_r(x+1+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})\,\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi$$

$$45)\quad \sum_{n=0}^{n=r}\frac{2^n\,\Pi(\mu+n-1)\,\Pi(r+n+2\mu-1)}{(n+\nu)\,\Pi(n)\,\Pi(2n+2\mu-1)\,\Pi(r-n)}\, z^n = \Pi(\mu-1)\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2.$$
$$.\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx}{(1-2zx+z^2)^\nu}\int_0^\pi C^\mu_r(x+1+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})\,\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi$$

$$46)\quad \sum_{n=0}^{n=r}(-1)^{r-n}\frac{2^n\,\Pi(\mu+n-1)\,\Pi(r+n+2\mu-1)}{(n+\nu)\,\Pi(n)\,\Pi(2n+2\mu-1)\,\Pi(r-n)}\, z^n = \Pi(\mu-1)\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2.$$
$$.\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx}{(1-2zx+z^2)^\nu}\int_0^\pi C^\mu_r(x+1+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})\,\sin^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi.$$

Es ist ferner, wie ich gezeigt habe („Über die Bessel'schen Functionen", Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, II. Abtheilung, 69. Band, Märzheft, Jahrgang 1874):

$$47)\qquad C_n^\nu(x) = (-1)^n \frac{2^n \Pi(n+\nu-1)\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)\Pi(\nu-1)\Pi(2n+2\nu-1)} (1-x^2)^{-\frac{2\nu-1}{2}} \left[(1-x^2)^{n+\frac{2\nu-1}{2}}\right]^{(n)}$$

oder, da:

$$\left[(1-x)^{n+\frac{2\nu-1}{2}}(1+x)^{n+\frac{2\nu-1}{2}}\right]^{(n)} = (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} \Pi(n)\left[\Pi\left(\frac{2n+2\nu-1}{2}\right)\right]^2 .$$

$$. \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} (-1)^\lambda \frac{(1-x)^{n-\lambda}(1+x)^\lambda}{\Pi\left(\frac{2n+2\nu-2\lambda-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{2\nu+2\lambda-1}{2}\right)\Pi(\lambda)\,\Pi(n-\lambda)}$$

ist:

$$48)\quad C_n^\nu(x) = \frac{2^n \Pi(n+\nu-1)\Pi(n+2\nu-1)\left[\Pi\left(\frac{2n+2\nu-1}{2}\right)\right]^2}{\Pi(\nu-1)\Pi(2n+2\nu-1)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(x-1)^{n-\lambda}(x+1)^\lambda}{\Pi\left(\frac{2n+2\nu-2\lambda-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{2\nu+2\lambda-1}{2}\right)\Pi(\lambda)\,\Pi(n-\lambda)}$$

und, wenn man für x: $\cos x$ schreibt:

$$49)\quad C_n^\nu(\cos x) = \frac{(-1)^n 2^{2n}\Pi(n+\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)\left[\Pi\left(\frac{2n+2\nu-1}{2}\right)\right]^2}{\Pi(\nu-1)\Pi(2n+2\nu-1)}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} (-1)^\lambda \frac{\cos^{2\lambda}\frac{x}{2}\,\sin^{2n-2\lambda}\frac{x}{2}}{\Pi\left(\frac{2n+2\nu-2\lambda-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{2\nu+2\lambda-1}{2}\right)\Pi(\lambda)\,\Pi(n-\lambda)}.$$

Nun ist bekanntlich:

$$\frac{\pi\Pi(n+2\nu-1)}{2^{n+2\nu}\Pi\left(\frac{2n+2\nu-2\lambda-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{2\nu+2\lambda-1}{2}\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2\nu-1}\psi\,\cos(n-2\lambda)\,\psi d\psi$$

und daher kann man die Gleichung 48) auch in folgender Form schreiben:

$$50)\quad C_n^\nu(x) = \frac{2^{2n+2\nu}\Pi(n+\nu-1)\left[\Pi\left(\frac{2n+2\nu-1}{2}\right)\right]^2}{\pi\Pi(\nu-1)\Pi(n)\Pi(2n+2\nu-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2\nu-1}\psi d\psi \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{\Pi(n)(x-1)^{n-\lambda}(x+1)^\lambda\cos(n-2\lambda)\psi}{\Pi(\lambda)\Pi(n-\lambda)}.$$

Es ist aber:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{\Pi(n)(x-1)^{n-\lambda}(x+1)^\lambda\cos(n-2\lambda)\psi}{\Pi(\lambda)\Pi(n-\lambda)}$$

der reelle Bestandtheil von:

$$\{(1+x)e^{\psi i}-(1-x)e^{-\psi i}\}^n = 2^n\{x\cos\psi + i\sin\psi\}^n.$$

Setzt man:

$$\operatorname{tang}\psi = x\operatorname{tang}\varphi$$

so wird:

$$\{x\cos\psi + i\sin\psi\}^n = \frac{x^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}{(x^2\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)^{\frac{n}{2}}}$$

und daher kann man die Gleichung 50) auch in folgender Weise schreiben:

$$51)\qquad C_n^\nu(x) = \frac{2^{3n+2\nu}\Pi(n+\nu-1)\left[\Pi\left(\frac{2n+2\nu-1}{2}\right)\right]^2}{\pi\Pi(\nu-1)\Pi(n)\Pi(2n+2\nu-1)}\,x^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+2\nu-1}\varphi\,\cos n\varphi d\varphi}{\{x^2\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\}^{n+\nu+\frac{1}{2}}}$$

welche Formel für $\nu = \frac{1}{2}$ in die von Catalan mitgetheilte Relation:

52)
$$P_n(x) = \frac{(2x)^{n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n\varphi \cos n\varphi d\varphi}{\{x^2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\}^{n+1}}$$

übergeht.

Differentiirt man die Gleichung 1) nach z, multiplicirt das Resultat mit z und addirt zu der so entstehenden Relation die mit 2ν multiplicirte Gleichung 1), so erhält man:

$$\frac{1-zx}{(1-2zx+z^2)^{\nu+1}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n+2\nu}{2\nu}\, C_n^\nu(x) z^n$$

und daher hat man auch:

$$\frac{1}{2\nu}\sum_{m,n=0}^{m,n=\infty}(n+2\nu)z^{m+n}C_n^\nu(x)\,C_m^\mu(x) = \frac{1-zx}{(1-2zx+z^2)^{\mu+\nu+1}}$$

$$=(1-zx)\sum_{r=0}^{r=\infty} z^r\, C_r^{\mu+\nu+1}(x)$$

$$=\frac{1-zx}{2(\mu+\nu)}\sum_{r=0}^{r=\infty} z^r\,[C_{r+1}^{\mu+\nu}(x)]'$$

$$=\frac{1}{2(\mu+\nu)}\sum_{r=0}^{r=\infty} z^r\{[C_{r+1}^{\mu+\nu}(x)]' - x[C_r^{\mu+\nu}(x)]'\}$$

oder, weil:

$$[C_{r+1}^{\mu+\nu}(x)]' - x[C_r^{\mu+\nu}(x)]' = (r+2\mu+2\nu)\,C_r^{\mu+\nu}(x)$$

ist:

$$\frac{1}{2\nu}\sum_{m,n=0}^{m,n=\infty}(n+2\nu)z^{m+n}\,C_n^\nu(x)\,C_m^\mu(x) = \frac{1}{2(\mu+\nu)}\sum_{r=0}^{r=\infty}(r+2\mu+2\nu)z^r\,C_r^{\mu+\nu}(x).$$

Aus dieser Gleichung folgt die Relation:

53)
$$\frac{r+2\mu+2\nu}{\mu+\nu}\,C_r^{\mu+\nu}(x) = \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=r}(r+2\nu-\lambda)\,C_\lambda^\mu(x)\,C_{r-\lambda}^\nu(x).$$

Setzt man in dieser Gleichung $\nu = 0$ und beachtet, dass:

$$\left[\frac{1}{\nu}C_{r-\lambda}^\nu(x)\right]_{\nu=0} = \frac{2}{r-\lambda}\cos\{(r-\lambda)\arccos x\}$$

ist, so erhält man:

54)
$$\frac{r+2\mu}{2\mu}\,C_r^\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r} C_\lambda^\mu(x)\cos\{(r-\lambda)\arccos x\}$$

oder:

55)
$$\frac{r+2\mu}{2\mu}\,C_r^\mu(\cos x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r} C_\lambda^\mu(\cos x)\cos(r-\lambda)x.$$

Ein specieller Fall der Gleichung 53) ist die Relation:

56)
$$\frac{\Pi(r+\mu+\nu)\,\Pi(\mu-1)\,\Pi(\nu)}{\Pi(r)\,\Pi(\mu+\nu)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r}\frac{\Pi(\lambda+\mu-1)\,\Pi(r+\nu-\lambda)}{\Pi(\lambda)\,\Pi(r-\lambda)}.$$

Setzt man in der Gleichung 1):

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r$$

so erhält man:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} C_n^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_r}(x)\, z^n = \frac{1}{(1-2zx+z^2)^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_r}}\ .$$

$$= \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_r = 0}^{n_1, n_2, \ldots, n_r = \infty} C_{n_1}^{\nu_1}(x)\, C_{n_2}^{\nu_2}(x) \ldots C_{n_r}^{\nu_r}(x)\, z^{n_1+n_2+\cdots+n_r}$$

und daher:

57) $$C_n^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_r}(x) = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_r} C_{n_1}^{\nu_1}(x)\, C_{n_2}^{\nu_2}(x) \ldots C_{n_r}^{\nu_r}(x)$$

wo die Summation über alle ganzzahligen, nicht negativen Wertsysteme $n_1, n_2, \ldots, n_r$ auszudehnen ist, welche Lösungen der Gleichung:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$$

sind.

Für $x = 1$ verwandelt sich diese Formel in:

58) $$\frac{\Pi(n+2\nu_1+2\nu_2+\ldots+2\nu_r-1)\, \Pi(2\nu_1-1)\, \Pi(2\nu_2-1) \ldots \Pi(2\nu_r-1)}{\Pi(n)\, \Pi(2\nu_1+2\nu_2+\ldots+2\nu_r-1)} =$$

$$= \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_r} \frac{\Pi(n_1+2\nu_1-1)\, \Pi(n_2+2\nu_2-1) \ldots \Pi(n_r+2\nu_r-1)}{\Pi(n_1)\, \Pi(n_2) \ldots \Pi(n_r)}$$

$$(n_1 + n_2 + \ldots n_r = n).$$

Setzt man in dieser Relation:

$$\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_r = \frac{1}{2}$$

so wird jedes Glied der auf der rechten Seite auftretenden Summe gleich 1 und daher die Summe gleich der Anzahl der Lösungssysteme $n_1, n_2, \ldots, n_r$.

Ist ν eine rationale Zahl, also

$$\nu = \frac{p}{q}$$

und nimmt man:

$$\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_r = \nu$$

$$r = \alpha q + 1$$

wo α eine ganze Zahl sein soll, so erhält man aus der obigen Formel die Relation:

59) $$C_n^{\nu+\alpha p}(x) = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_{\alpha q+1}} C_{n_1}^{\nu}(x)\, C_{n_2}^{\nu}(x) \ldots C_{n_{\alpha q+1}}^{\nu}(x)$$

$$(n_1 + n_2 + \ldots + n_{\alpha q+1} = n)$$

welche man auch in folgender Form schreiben kann:

60) $$[C_{n+\alpha p}^{\nu}(x)]^{(\alpha p)} = \frac{2^{\alpha p}\, \Pi(\nu+\alpha p-1)}{\Pi(\nu-1)} \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_{\alpha q+1}} C_{n_1}^{\nu}(x)\, C_{n_2}^{\nu}(x) \ldots C_{n_{\alpha q+1}}^{\nu}(x)$$

$$(n_1 + n_2 + \ldots + n_{\alpha q+1} = n).$$

Den speciellen Fall:

$$\alpha = 1,\ p = 1,\ q = 2$$

hat schon Herr Catalan mitgetheilt.

Es soll nun der Werth des Integrals:

$$\int_{-1}^{+1} \{[C_n^\nu(x)]' + [C_{n+1}^\nu(x)]'\} x^p (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx$$

$$\left(n > 0,\ \nu \geqq \frac{1}{2},\ p \text{ ganzzahlig und } \leqq n\right)$$

ermittelt werden. Durch partielle Integration erhält man:

$$\int_{-1}^{+1} \{(C_n^\nu(x)]' + [C_{n+1}^\nu(x)]'\} x^p (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx = [x^p(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} \{C_n^\nu(x) + C_{n+\nu}^\nu(x)\}]_{x=-1}^{x=+1} - p$$

$$\int_{-1}^{+1} x^{p-1} (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} \{C_n^\nu(x) + C_{n+1}^\nu(x)\} dx + (2\nu-1) \int_{-1}^{+1} x^{p+1} \{C_n^\nu(x) + C_{n+1}^\nu(x)\} (1-x^2)^{\frac{2\nu-3}{2}} dx.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist aber:

61) $$\int_{-1}^{+1} x^{p-1} (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} \{C_n^\nu(x) + C_{n+1}^\nu\} dx = 0$$

und daher hat man:

62) $$\int_{-1}^{+1} \{[P_n(x)]' + [P_{n+1}(x)]'\} x^p dx = 2$$

63) $$\int_{-1}^{+1} \{[C_n^\nu(x)]' + [C_{n+1}^\nu(x)]'\} x^p (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx = (2\nu-1) \int_{-1}^{+1} x^{p+1} \{C_n^\nu(x) + C_{n+1}^\nu(x)\} (1-x^2)^{\frac{2\nu-3}{2}} dx$$

$$\left(\nu > \frac{1}{2}\right).$$

Die Relation 62) hat schon Herr Catalan abgeleitet.

Aus der Gleichung 61) folgt:

$$\int_{-1}^{+1} x^{p+1} \{C_n^\nu(x) + C_{n+1}^\nu(x)\} (1-x^2)^{\frac{2\nu-3}{2}} dx = \int_{-1}^{+1} x^{p-1} \{C_n^\nu(x) + C_{n+1}^\nu(x)\} (1-x^2)^{\frac{2\nu-3}{2}} dx$$

und daher ist für ein ungerades p:

$$\int_{-1}^{+1} x^{p+1} \{C_n^\nu(x) + C_{n+1}^\nu(x)\} (1-x^2)^{\frac{2\nu-3}{2}} dx = \int_{-1}^{+1} \{C_n^\nu(x) + C_{n+1}^\nu(x)\} (1-x^2)^{\frac{2\nu-3}{2}} dx$$

für ein gerades p hingegen:

$$\int_{-1}^{+1} x^{p+1} \{C_n^\nu(x) + C_{n+1}^\nu(x)\} (1-x^2)^{\frac{2\nu-3}{2}} dx = \int_{-1}^{+1} \{C_n^\nu(x) + C_{n+1}^\nu(x)\} x (1-x^2)^{\frac{2\nu-3}{2}} dx.$$

Nun ist aber:

64) $$C_n^{\mu+r}(x) = \frac{\Pi(\mu-1)}{\Pi(r-1)\,\Pi(\mu+r-1)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\Pi(\lambda+r-1)\,\Pi(n+r+\mu-\lambda-1)}{\Pi(\lambda)\,\Pi(n+\mu-\lambda)} (n+\mu-2\lambda)\, C_{n-2\lambda}^\mu(x)$$

und daher:

$$\int_{-1}^{+1} C_m^\nu(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-3}{2}} dx = 0$$

wenn m ungerade ist, hingegen:

$$\int_{-1}^{+1} C_m^\nu(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-3}{2}}\,dx = \frac{2^{2\nu-3}\left[\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)\right]^2}{(\nu-1)\,\Pi(2\nu-3)}$$

falls m gerade ist; während:

$$\int_{-1}^{+1} x\,C_m^\nu(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-3}{2}}\,dx = 0$$

ist für gerade m, für ungerade m aber durch die Gleichung:

$$\int_{-1}^{+1} x\,C_m^\nu(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-3}{2}}\,dx = \frac{2^{2\nu-3}\left[\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)\right]^2}{(\nu-1)\,\Pi(2\nu-3)}$$

bestimmt wird.

Es ist also schliesslich:

65) $$\int_{-1}^{+1}\{[C_n^\nu(x)]'+[C_{n+1}^\nu(x)]'\}\,x^p(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx = \frac{\left[2^\nu\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\right]^2}{\Pi(2\nu-1)}$$

Man hat daher das interessante Resultat, dass das Integral auf der linken Seite dieser Gleichung von n und p unabhängig ist. Für $\nu = \frac{1}{2}$ verwandelt sich diese Relation in die Gleichung 62).

Ist $f(x)$ eine ganze Function von x von nicht höherem als dem $n$ten Grade, so ist nach 65):

66) $$\int_{-1}^{+1}\{[C_n^\nu(x)]'+[C_{n+1}^\nu(x)]'\}f(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx = \frac{\left[2^\nu\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\right]^2}{\Pi(2\nu-1)}\,f(1).$$

Specielle Fälle dieser allgemeinen Relation sind die Formeln:

67) $$\int_{-1}^{+1}\{[C_n^\nu(x)]'+[C_{n+1}^\nu(x)]'\}\,\{[C_m^\mu(x)]'+[C_{m+1}^\mu(x)]'\}\,(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx =$$
$$= \frac{2\mu(2m+2\mu+1)\,\Pi(m+2\mu)}{\Pi(2\mu+1)\,\Pi(m)}\,\frac{\left[2^\nu\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\right]^2}{\Pi(2\nu-1)}$$
$(m \leqq n)$

68) $$\int_{-1}^{+1}\{[C_n^\nu(x)]'+[C_{n+1}^\nu(x)]'\}\,C_m^\mu(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx = \frac{\Pi(m+2\mu-1)}{\Pi(2\mu-1)\Pi(m)}\,\frac{\left[2^\nu\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\right]^2}{\Pi(2\nu-1)}.$$

Die Gleichung 64) kann man auch benützen, um die Coëfficienten zu bestimmen, welche bei der Entwicklung von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ nach den Functionen $C_n^\nu(x)$ auftreten. Da $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ eine gerade Function ist, so hat man:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_{2n}\,C_{2n}^\nu(x)$$

wo:

$$A_{2n} = \frac{(2n+\nu)\,\Pi(2n)}{2^{2\nu-1}\,\Pi(2n+2\nu-1)}\left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\nu-1}\,C_{2n}^\nu(x)\,dx$$

ist. Berücksichtigt man die Formel 64), so erhält man sofort:

$$A_{2n} = \frac{(2n+\nu)\,\Pi(2n)\,\Pi\left(\frac{2n-1}{2}\right)\Pi(n+\nu-1)\,\Pi(\nu-1)}{\sqrt{\pi}\,\Pi(2n+2\nu-1)\,\Pi(n)\,\Pi\left(\frac{2n+2\nu-1}{2}\right)}\left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^3$$

und hat daher die Entwicklung:

$$\text{69)}\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\Pi(\nu-1)}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^3 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(2n+\nu)\,\Pi(2n)\,\Pi\left(\frac{2n-1}{2}\right)\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(2n+2\nu-1)\,\Pi(n)\,\Pi\left(\frac{2n+2\nu-1}{2}\right)}\,C^{\nu}_{2n}(x)$$

welche für $\nu = \frac{1}{2}$ in die von Herrn G. Bauer abgeleitete Relation:

$$\text{70)}\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{n=\infty}(4n+1)\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 P_{2n}(x)$$

übergeht.

Setzt man $x = 0$, so erhält man die bemerkenswerte Formel:

$$\text{71)}\qquad \frac{1}{\pi} = \left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^3 \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n \frac{(2n+\nu)\,[\Pi(2n)]^4}{\Pi(2n+2\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2n+2\nu-1}{2}\right)[\Pi(n)]^5}\left[\frac{\Pi(n+\nu-1)}{2^{3n}\,\Pi\left(\frac{2n-1}{2}\right)}\right]^2$$

aus welcher für $\nu = \frac{1}{2}$ die interessante Gleichung Bauer's:

$$\text{72)}\qquad \frac{2}{\pi} = 1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3-13\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3+\ldots.$$

folgt.

Setzt man in der Gleichung 1) $z = x$, multiplicirt sodann mit $(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx$ und integrirt in Bezug auf x von $x = -1$ bis $x = +1$, so erhält man, wenn man die Relationen:

$$\int_{-1}^{+1} x^k(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C^{\nu}_{k-2r}(x)\,dx = \frac{\Pi(k)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(k-2r+2\nu-1)}{2^{k+1}\,\Pi(r)\,\Pi(k+\nu-r)\,\Pi(k-2r)}\left[\frac{2^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2$$

$$\int_{-1}^{+1} x^k(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C^{\nu}_{k-2r-1}(x)\,dx = 0$$

berücksichtigt:

$$\text{73)}\qquad 2\pi = \Pi(\nu-1)\left[\frac{2^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\Pi(n+2\nu-1)}{2^n\,\Pi(n+\nu)}$$

welche Formel für $\nu = \frac{1}{2}$ in die bekannte Relation:

$$\text{74)}\qquad \pi = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n+1)}$$

übergeht.

Man findet ferner leicht, dass:

$$\text{75)}\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C^{\nu}_{n}(x)\,dx}{(1-cx)^{\mu}} = \frac{\Pi(\nu-1)\,\Pi(\mu+n-1)\,\Pi(n+2\nu-1)}{2^{n+1}\,\Pi(n+\nu)\,\Pi(n)\,\Pi(\mu-1)}\left[\frac{2^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2 .$$

$$.\,c^n F\left(\frac{\mu+n}{2},\frac{\mu+n+1}{2},n+\nu+1,c^2\right)$$

ist. Von den speciellen Fällen dieser Formel mögen die folgenden besonders hervorgehoben werden:

$$76)\quad \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^{\nu}(x)dx}{(1-x)^{\mu}} = \frac{\Pi(\nu-1)\,\Pi(\mu+n-1)\,\Pi(2\nu+n-1)\,\Pi\left(\nu-\mu-\frac{1}{2}\right)}{2^{n+1}\,\Pi(\mu-1)\,\Pi(n)\,\Pi\left(\frac{n+2\nu-\mu}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+2\nu-\mu-1}{2}\right)} \left[\frac{2^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2$$

$$77)\quad \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^{\nu}(x)dx}{1+x} = (-1)^n \frac{\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)}{2^{n+1}\,\Pi\left(\frac{n+2\nu-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+2\nu-2}{2}\right)} \left[\frac{2^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2$$

$$78)\quad \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)x}{\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{2}}{2n+1}$$

welche letztere Formel man Herrn Catalan verdankt.

Aus der Gleichung 77) leitet man ferner ab:

$$79)\quad \int_{-1}^{+1} \log(1+x)\, C_n^{\nu}(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\, dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2\nu)} \left[\frac{2^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2 \qquad (n>0)$$

aus welcher Formel sich mit Hilfe der bekannten Relation:

$$80)\quad n\, C_n^{\nu}(x) - 2(n+\nu-1)x\, C_{n-1}^{\nu}(x) + (n+2\nu-2)\, C_{n-2}^{\nu}(x) = 0$$

die Gleichung:

$$81)\quad \int_{-1}^{+1} x\log(1+x)\, C_n^{\nu}(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\, dx = \frac{(-1)^n}{(n-1)(n+2\nu-1)} \left[\frac{2^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2 \qquad (n>1)$$

ergibt.

Specielle Fälle dieser Gleichung sind die bekannten Formeln:

$$82)\quad \int_{-1}^{+1} \log(1+x)\, P_n(x)\, dx = (-1)^{n-1} \frac{2}{n(n+1)}$$

$$83)\quad \int_{-1}^{+1} x\log(1+x)\, P_n(x)\, dx = (-1)^n \frac{2}{(n-1)(n+2)}.$$

Aus der Gleichung 79) folgt auch die Formel:

$$84)\quad \log\frac{1+x}{1-x} = \Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Pi(2n)(2n+\nu+1)}{2^{2n+1}\,\Pi\left(\frac{2n+2\nu+1}{2}\right)\Pi(n+\nu)} C_{2n+1}^{\nu}(x).$$

Herr F. Neumann hat in seinen „Beiträgen zur Theorie der Kugelfunctionen" (pag. 70 ff.) eine Reihe von merkwürdigen Beziehungen zwischen den Kugelfunctionen erster und zweiter Art aufgestellt. Dieselben sind specielle Fälle von Relationen, welche zwischen den Functionen $C_n^{\nu}(x)$ und $D_n^{\nu}(x)$ bestehen. Ich werde nun zwei Classen von Beziehungen zwischen den eben erwähnten Functionen ableiten, welche aus zwei verschiedenen Quellen entspringen. Die eine Classe von Relationen verdankt ihre Entstehung dem Umstande, dass die Functionen $C_n^{\nu}(x)$ und $D_{n+2\nu-2}^{1-\nu}(x)$ sich von den Näherungsnennern und Restfunctionen der regulären Kettenbruchentwicklung der Function $x^{-1}F(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2})$ nur um constante Factoren unterscheiden, die andere

Reihe folgt aus der Eigenschaft der Functionen $C_n^\nu(x)$ und $D_n^\nu(x)$, dass dieselben particuläre Integrale derselben linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind. Für $\nu = \frac{1}{2}$, d. i. für die Kugelfunctionen, verschmelzen diese beiden Sorten von Relationen in eine, da die Näherungsnenner und Restfunctionen der Kettenbruchentwicklung von $\log \frac{1+x}{1-x}$ particuläre Integrale derselben linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind.

Bezeichnet man die Näherungsnenner und Restfunctionen der Kettenbruchentwicklung:

$$x^{-1} F(1, \tfrac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}) = \cfrac{1}{x - \cfrac{\frac{1}{2(\nu+1)}}{x - \cfrac{\frac{2\nu+1}{2(\nu+1)(\nu+2)}}{x - \cdots \cfrac{\frac{(n-2)(n+2\nu-3)}{4(n+\nu-3)(n+\nu-2)}}{x - \cfrac{\frac{(n-1)(n+2\nu-2)}{4(n+\nu-2)(n+\nu-1)}}{x - \cdots}}}}}$$

mit $\psi_n(x)$ und $f_n(x)$, so ist:

$$C_n^\nu(x) = 2^n \frac{\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(n)\Pi(\nu-1)} \psi_n(x)$$

$$D^{1-\nu}_{n+2\nu-2}(x) = \frac{\Pi(n-1)\Pi(-\nu)}{2^{n+2\nu-1}\Pi(n+\nu-1)} f_n(x).$$

Nach einem bekannten Satze aus den Elementen der Theorie der Kettenbrüche ist:

$$\begin{vmatrix} f_n(x) & , f_{n+1}(x) \\ \psi_{n-1}(x), & \psi_n(x) \end{vmatrix} = \frac{\Pi(n-1)\,\Pi(n+2\nu-2)}{2^{2n-3}(n+\nu-1)\,\Pi(2\nu)} \left[\frac{\Pi(\nu)}{\Pi(n+\nu-2)}\right]^2$$

und daher:

$$85)\qquad \begin{vmatrix} n\, C_n^\nu(x) & , \ C_{n-1}^\nu(x) \\ (n+2\nu-1)\, D^{1-\nu}_{n+2\nu-1}(x), & D^{1-\nu}_{n+2\nu-2}(x) \end{vmatrix} = \frac{\Pi(-\nu)}{2^{2\nu-1}\,\Pi(\nu-1)}.$$

Verbindet man diese Relation mit der Gleichung 80) und der ihr entsprechenden Formel:

$$86)\qquad (n-1)\, D^{1-\nu}_{n+2\nu-3}(x) - 2(n+\nu-1)x\, D^{1-\nu}_{n+2\nu-2}(x) + (n+2\nu-1)\, D^{1-\nu}_{n+2\nu-1}(x) = 0$$

so erhält man sofort:

$$87)\qquad \begin{vmatrix} n\, C_n^\nu(x) & , \ (n+2\nu-2)\, C_{n-2}^\nu(x) \\ (n+2\nu-1)\, D^{1-\nu}_{n+2\nu-1}(x), & (n-1)\, D^{1-\nu}_{n+2\nu-3}(x) \end{vmatrix} = \frac{(n+\nu-1)\,\Pi(-\nu)}{2^{2\nu-2}\,\Pi(\nu-1)}\, x.$$

Aus den zwei Relationen 85) und 87) ergeben sich die folgenden:

$$88)\qquad D^{1-\nu}_{n+2\nu-1}(x) - \frac{\Pi(n)\,\Pi(2\nu-1)\,\Pi(-\nu)}{2^{2\nu}\,\Pi(n+2\nu-1)\,\Pi(\nu)}\, C_n^\nu(x)\, x^{-1}\, F(1, \tfrac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}) =$$

$$= -\frac{\Pi(-\nu)\,\Pi(n)\, C_n^\nu(x)}{2^{2\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{\Pi(n+2\nu-\lambda-2)}{\Pi(n-\lambda)\, C_{n-\lambda}^\nu(x)\, C_{n-\lambda-1}^\nu(x)}$$

89) $$D^{1-\nu}_{n+2\nu-1}(x) - \frac{\Pi(n)\,\Pi(2\nu-1)\,\Pi(-\nu)}{2^{2\nu}\,\Pi(n+2\nu-1)\,\Pi(\nu+1)}\,C^{\nu}_{n}(x)\,x^{-1}\,F\left(1,\frac{1}{2},\nu+1,x^{-2}\right) =$$

$$= -\frac{\Pi(-\nu)\,\Pi(n)\,x\,C^{\nu}_{n}(x)}{2^{2\nu-2}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n}{2}-1}\frac{(n+\nu-2\lambda-1)\,\Pi(n+2\nu-2\lambda-3)}{\Pi(n-2\lambda)\,C^{\nu}_{n-2\lambda}(x)\,C^{\nu}_{n-2\lambda-2}(x)}$$

(n gerade)

90) $$D^{1-\nu}_{n+2\nu-1}(x) - \frac{\Pi(n)\,\Pi(2\nu-1)\,\Pi(-\nu)}{2^{2\nu+1}\,\Pi(n+2\nu-1)\,\Pi(\nu+1)}\,C^{\nu}_{n}(x)\,x^{-3}\,F\left(1,\frac{3}{2},\nu+2,x^{-2}\right) =$$

$$= -\frac{\Pi(-\nu)\,\Pi(n)\,x\,C^{\nu}_{n}(x)}{2^{2\nu-2}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n-1}{2}-1}\frac{(n+\nu-2\lambda-1)\,\Pi(n+2\nu-2\lambda-3)}{\Pi(n-2\lambda)\,C^{\nu}_{n-2\lambda}(x)\,C^{\nu}_{n-2\lambda-2}(x)}$$

(n ungerade).

Die Functionen $C^{\nu}_{n}(x)$ und $D^{\nu}_{n}(x)$ sind particuläre Integrale der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

91) $$(1-x^2)y'' - (2\nu+1)xy' + n(n+2\nu)y = 0.$$

Man hat daher:

$$(1-x^2)\{[C^{\nu}_{n}(x)]''\,D^{\nu}_{n}(x) - [D^{\nu}_{n}(x)]''\,C^{\nu}_{n}(x)\} - (2\nu+1)x\{[C^{\nu}_{n}(x)]'\,D^{\nu}_{n}(x) - [D^{\nu}_{n}(x)]'\,C^{\nu}_{n}(x)\} = 0$$

und daraus:

$$[C^{\nu}_{n}(x)]'\,D^{\nu}_{n}(x) - [D^{\nu}_{n}(x)]'\,C^{\nu}_{n}(x) = \frac{c}{(x^2-1)^{\frac{2\nu+1}{2}}}$$

Bestimmt man den Coëfficienten von $x^{-(2\nu+1)}$ auf beiden Seiten dieser Gleichung, so erhält man:

$$c = \frac{\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)}$$

und hat deshalb die Relation:

92) $$[C^{\nu}_{n}(x)]'\,D^{\nu}_{n}(x) - [D^{\nu}_{n}(x)]'\,C^{\nu}_{n}(x) = \frac{\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)\,(x^2-1)^{\frac{2\nu+1}{2}}}$$

oder auch unter Berücksichtigung der Relation 33) und der ihr entsprechenden Gleichung:

93) $$[D^{\nu}_{n}(x)]^{(r)} = (-1)^r\,\frac{\Pi(\nu-1)}{2^r\,\Pi(\nu+r-1)}\,D^{\nu+r}_{n-r}(x)$$

die Formel:

94) $$4\nu^2\,C^{\nu+1}_{n-1}(x)\,D^{\nu}_{n}(x) + C^{\nu}_{n}(x)\,D^{\nu+1}_{n-1}(x) = \frac{2\nu\,\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)(x^2-1)^{\frac{2\nu+1}{2}}}$$

Setzt man:

$$\begin{vmatrix} C^{\nu}_{n}(x), & C^{\nu}_{n-1}(x) \\ D^{\nu}_{n}(x), & D^{\nu}_{n-1}(x) \end{vmatrix} = \Delta_n$$

so findet man leicht unter Benützung der Gleichungen 80) und 86):

$$\Delta_n = \frac{n+2\nu-2}{n}\,\Delta_{n-1}$$

so dass man hat:

$$\Delta_n = \frac{\Pi(n+2\nu-2)}{\Pi(n)\,\Pi(2\nu-1)}\,\Delta_1.$$

Nun ist aber:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} C_1^\nu(x), & C_0^\nu(x) \\ D_1^\nu(x), & D_0^\nu(x) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\Pi(2\nu-1)}{x^{2\nu-1}}\left[F\left(\nu, \frac{2\nu+1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right) - \frac{1}{2x^2(\nu+1)} F\left(\nu+1, \frac{2\nu+1}{2}, \nu+2, x^{-2}\right)\right]$$

oder nach einer bekannten Formel aus der Theorie der hypergeometrischen Reihen:

$$\Delta_1 = \frac{\Pi(2\nu-1)}{x^{2\nu-1}} F\left(\nu, \frac{2\nu-1}{2}, \nu, x^{-2}\right)$$

$$= \frac{\Pi(2\nu-1)}{(x^2-1)^{\frac{2\nu-1}{2}}}.$$

Es ist also:

95) $$\begin{vmatrix} C_n^\nu(x), & C_{n-1}^\nu(x) \\ D_n^\nu(x), & D_{n-1}^\nu(x) \end{vmatrix} = \frac{\Pi(n+2\nu-2)}{\Pi(n)(x^2-1)^{\frac{2\nu-1}{2}}}$$

Verbindet man diese Relation mit der Formel 92), so erhält man:

96) $$\begin{vmatrix} [C_n^\nu(x)]', & C_{n-1}^\nu(x) \\ [D_n^\nu(x)]', & D_{n-1}^\nu(x) \end{vmatrix} = -\frac{\Pi(n+2\nu-2)}{C_n^\nu(x)\Pi(n)(x^2-1)^{\frac{2\nu+1}{2}}} \begin{vmatrix} 1 & , C_{n-1}^\nu(x) \\ n+2\nu-1, & (1-x^2)[C_n^\nu(x)]' \end{vmatrix}.$$

Berücksichtigt man, dass:

$$(1-x^2)[C_n^\nu(x)]' = (n+2\nu-1)\, C_{n-1}^\nu(x) - nx C_n^\nu(x)$$

ist, so kann man diese Gleichung auch in folgender Form schreiben:

97) $$\begin{vmatrix} [C_n^\nu(x)]', & C_{n-1}^\nu(x) \\ [D_n^\nu(x)]', & D_{n-1}^\nu(x) \end{vmatrix} = \frac{\Pi(n+2\nu-2)x}{\Pi(n-1)(x^2-1)^{\frac{2\nu+1}{2}}}.$$

Man findet ferner leicht die Relation:

98) $$\begin{vmatrix} [C_n^\nu(x)]', & C_{n-2}^\nu(x) \\ [D_n^\nu(x)]', & D_{n-2}^\nu(x) \end{vmatrix} = \frac{2(n+\nu-1)\Pi(n+2\nu-3)x}{\Pi(n-1)(x^2-1)^{\frac{2\nu-1}{2}}}.$$

Aus den Relationen 95) und 98) folgen die Gleichungen:

99) $$D_n^\nu(x) - \frac{\Pi(2\nu-1)}{2\nu x^{2\nu}} C_n^\nu(x) F\left(\nu, \frac{2\nu+1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right) = -\frac{C_n^\nu(x)}{(x^2-1)^{\frac{2\nu-1}{2}}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{\Pi(n+2\nu-\lambda-2)}{\Pi(n-\lambda)\, C_{n-\lambda}^\nu(x)\, C_{n-\lambda-1}^\nu(x)}$$

100) $$D_n^\nu(x) - \frac{\Pi(2\nu-1)}{2\nu x^{2\nu}} C_n^\nu(x) F\left(\nu, \frac{2\nu+1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right) =$$

$$= -\frac{2x C_n^\nu(x)}{(x^2-1)^{\frac{2\nu-1}{2}}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n}{2}-1} \frac{(n+\nu-2\lambda-1)\Pi(n+2\nu-2\lambda-3)}{\Pi(n-2\lambda)\, C_{n-2\lambda}^\nu(x)\, C_{n-2\lambda-2}^\nu(x)}$$

[n gerade]

101) $$D_n^\nu(x) - \frac{\Pi(2\nu-1)}{4\nu(\nu+1)x^{2\nu+2}} C_n^\nu(x) F\left(\nu+1, \frac{2\nu+1}{2}, \nu+2, x^{-2}\right) =$$

$$= -\frac{2x C_n^\nu(x)}{(x^2-1)^{\frac{2\nu-1}{2}}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n-1}{2}-1} \frac{(n+\nu-2\lambda-1)\Pi(n+2\nu-2\lambda-3)}{\Pi(n-2\lambda)\, C_{n-2\lambda}^\nu(x)\, C_{n-2\lambda-2}^\nu(x)}$$

[n ungerade].

Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Functionen von x, welche sich nach den Functionen $C_n^\nu(x)$ entwickeln lassen, so dass:

102) $$\varphi(x) = \sum_\lambda a_\lambda C_\lambda^\nu(x)$$

103) $$\psi(x) = \sum_\lambda b_\lambda C_\lambda^\nu(x)$$

ist. Alsdann ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi(x_1), & \varphi(x_2), & \ldots, & \varphi(x_{n+1}) \\ C_0^\nu(x_1), & C_0^\nu(x_2), & \ldots, & C_0^\nu(x_{n+1}) \\ C_1^\nu(x_2), & C_1^\nu(x_2), & \ldots, & C_1^\nu(x_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n-1}^\nu(x_1), & C_{n-1}^\nu(x_2), & \ldots, & C_{n-1}^\nu(x_{n+1}) \end{vmatrix} = \sum_{\lambda=n}^{\lambda=\infty} a_\lambda \begin{vmatrix} C_\lambda^\nu(x_1), & C_\lambda^\nu(x_2), & \ldots, & C_\lambda^\nu(x_{n+1}) \\ C_0^\nu(x_1), & C_0^\nu(x_2), & \ldots, & C_0^\nu(x_{n+1}) \\ C_1^\nu(x_1), & C_1^\nu(x_2), & \ldots, & C_1^\nu(x_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n-1}^\nu(x_1), & C_{n-1}^\nu(x_2), & \ldots, & C_{n-1}^\nu(x_{n+1}) \end{vmatrix} =$$
$$= \sum_{\mu=1,\,\lambda=n}^{\mu=n+1,\,\lambda=\infty} A_\mu a_\lambda C_\lambda^\nu(x_\mu)$$

wo die Unterdeterminanten erster Ordnung A_μ ganze Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}, x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n$ sind, welche in Bezug auf jede der genannten Grössen von nicht höherem als dem Grade $n-1$ sind.

Es ist ferner:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \psi(x_1), & \psi(x_2), & \ldots, & \psi(x_{n+1}) \\ C_0^\nu(x_1), & C_0^\nu(x_2), & \ldots, & C_0^\nu(x_{n+1}) \\ C_1^\nu(x_1), & C_1^\nu(x_2), & \ldots, & C_1^\nu(x_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n-1}^\nu(x_1), & C_{n-1}^\nu(x_2), & \ldots, & C_{n-1}^\nu(x_{n+1}) \end{vmatrix} = \sum_{\lambda=n}^{\lambda=\infty} b_\lambda \begin{vmatrix} C_\lambda^\nu(x_1), & C_\lambda^\nu(x_2), & \ldots, & C_\lambda^\nu(x_{n+1}) \\ C_0^\nu(x_1), & C_0^\nu(x_2), & \ldots, & C_0^\nu(x_{n+1}) \\ C_1^\nu(x_1), & C_1^\nu(x_2), & \ldots, & C_1^\nu(x_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n-1}^\nu(x_1), & C_{n-1}^\nu(x_2), & \ldots, & C_{n-1}^\nu(x_{n+1}) \end{vmatrix} =$$
$$= \sum_{\mu=1,\,\lambda=n}^{\mu=n+1,\,\lambda=\infty} A_\mu b_\lambda C_\lambda^\nu(x_\mu)$$

und daher:

$$\Delta\Delta_1 = \sum_{\mu=1,\,\lambda=n}^{\mu=n+1,\,\lambda=\infty} a_\lambda b_\lambda A_\mu^2 [C_\lambda^\nu(x_\mu)]^2 + \sum_{\mu,\mu_1=1;\,\lambda,\lambda_1=n}^{\mu,\mu_1=n+1;\,\lambda,\lambda_1=\infty}{}' a_\lambda b_{\lambda_1} A_\mu A_{\mu_1} C_\lambda^\nu(x_\mu) C_{\lambda_1}^\nu(x_{\mu_1})$$

wo die Marke an dem Summenzeichen andeutet, dass ein Glied, in welchem $\lambda = \lambda_1$ und gleichzeitig $\mu = \mu_1$ ist, in der zweiten Summe nicht vorkommt.

Da keine der Grössen A_μ in Bezug auf irgend eine der Grössen x den Grad $n-1$ übersteigt, so ist nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Functionen $C_n^\nu(x)$:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\ldots\int_{-1}^{+1} \sum_{\mu,\mu_1=1;\,\lambda,\lambda_1=n}^{\mu,\mu_1=n+1;\,\lambda,\lambda_1=\infty} a_\lambda b_{\lambda_1} A_\mu A_{\mu_1} C_\lambda^\nu(x_\mu) C_{\lambda_1}^\nu(x_{\mu_1}) (1-x_1^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} (1-x_2^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} \ldots (1-x_{n+1}^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx_1 dx_2 \ldots dx_{n+1} = 0$$

und daher:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\ldots\int_{-1}^{+1} \Delta\Delta_1 (1-x_1^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} (1-x_2^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} \ldots (1-x_{n+1}^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx_1 dx_2 \ldots dx_{n+1} =$$
$$= 2^{2\nu-1} \left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2 (n+1)\, C \sum_{\lambda=n}^{\lambda=\infty} \frac{\Pi(\lambda+2\nu-1)}{(\lambda+\nu)\Pi(\lambda)} a_\lambda b_\lambda$$

wo:

$$C=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\cdots\int_{-1}^{+1}A^2_{n+1}(1-x_1^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}(1-x_2^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\cdots(1-x_n^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx_1dx_2\ldots dx_n$$

ist.

Entwickelt man die Determinante A_{n+1} nach den Elementen der letzten Horizontalreihe, so hat man:

$$A_{n+1}=\sum_{\mu=1}^{\mu=n}B_\mu C^\nu_{n-1}(x_\mu)$$

wo die Grösse B_μ eine ganze Function von $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}, x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n$ ist, welche in Bezug auf jede der genannten Grössen den Grad $n-2$ nicht übersteigt.

Man hat daher:

$$A^2_{n+1}=\sum_{\mu=1}^{\mu=n}B^2_\mu[C^\nu_{n-1}(x_\mu)]^2+\sum_{\lambda,\mu=1}^{\lambda,\mu=n}B_\lambda B_\mu C^\nu_{n-1}(x_\lambda)C^\nu_{n-1}(x_\mu)$$

und demnach:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\cdots\int_{-1}^{+1}A^2_{n+1}(1-x_1^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}(1-x_2^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\cdots(1-x_n^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx_1dx_2\ldots dx_n=nD\frac{2^{2\nu-1}\Pi(n+2\nu-2)}{(n+\nu-1)\Pi(n-1)}\left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2$$

wo:

$$D=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\cdots\int_{-1}^{+1}B^2_n(1-x_1^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}(1-x_2^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\cdots(1-x_{n-1}^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx_1dx_2\ldots dx_{n-1}$$

ist.

Durch wiederholte Anwendung des eben auseinandergesetzten Verfahrens erhält man schliesslich für die Constante C den folgenden Ausdruck:

$$C=\frac{\Pi(n)}{2^n\Pi(n+\nu-1)}\left[\frac{2^\nu\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^{2n}\prod_{\lambda=0}^{n-1}\frac{\Pi(\lambda+2\nu-1)}{\Pi(\lambda)}.$$

Man hat daher die Relation:

$$104)\quad\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\cdots\int_{-1}^{+1}\begin{vmatrix}\varphi(x_1), & \varphi(x_2), & \ldots, & \varphi(x_{n+1})\\ C^\nu_0(x_1), & C^\nu_0(x_2), & \ldots, & C^\nu_0(x_{n+1})\\ C^\nu_1(x_1), & C^\nu_1(x_2), & \ldots, & C^\nu_1(x_{n+1})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ C^\nu_{n-1}(x_1), & C^\nu_{n-1}(x_2), & \ldots, & C^\nu_{n-1}(x_{n+1})\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\psi(x_1), & \psi(x_2), & \ldots, & \psi(x_{n+1})\\ C^\nu_0(x_1), & C^\nu_0(x_2), & \ldots, & C^\nu_0(x_{n+1})\\ C^\nu_1(x_1), & C^\nu_1(x_2), & \ldots, & C^\nu_1(x_{n+1})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ C^\nu_{n-1}(x_1), & C^\nu_{n-1}(x_2), & \ldots, & C^\nu_{n-1}(x_{n+1})\end{vmatrix}\cdot$$

$$\cdot(1-x_1^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}(1-x_2^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\cdots(1-x_{n+1}^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx_1dx_2\ldots dx_{n+1}=$$

$$=\frac{\Pi(n+1)\Pi(\nu-1)}{2^{n+1}\Pi(n+\nu-1)}\left[\frac{2^\nu\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^{2n+2}\prod_{\lambda=0}^{n-1}\frac{\Pi(\lambda+2\nu-1)}{\Pi(\lambda)}\sum_{\mu=n}^{\mu=\infty}\frac{\Pi(\mu+2\nu-1)}{(\mu+\nu)\Pi(\mu)}a_\mu b_\mu$$

wo die Grössen a_μ, b_μ durch die Gleichungen 102) und 103) definirt sind.

Man sieht sofort, dass sich mit Hilfe des eben angewendeten Verfahrens leicht eine allgemeinere Formel ableiten lässt, in der die Gleichung 104) als specieller Fall enthalten ist und welche sich auf die Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrals:

$$\int_a^b \frac{f(z)dz}{x-z}$$

bezieht.

Ist speciell $\varphi(x)$ eine ganze Function $n$ten Grades, also:

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} c_\lambda x^\lambda$$

so hat man:

$$105)\quad \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\cdots\int_{-1}^{+1} \begin{vmatrix} \varphi(x_1) & \varphi(x_2) & \ldots, & \varphi(x_{n+1}) \\ C_0^\nu(x_1) & C_0^\nu(x_2) & \ldots, & C_0^\nu(x_{n+1}) \\ C_1^\nu(x_1) & C_1^\nu(x_2) & \ldots, & C_1^\nu(x_{n+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n-1}^\nu(x_1), & C_{n-1}^\nu(x_2), & \ldots, & C_{n-1}^\nu(x_{n+1}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi(x_1) & \psi(x_2) & \ldots, & \psi(x_{n+1}) \\ C_0^\nu(x_1) & C_0^\nu(x_2) & \ldots, & C_0^\nu(x_{n+1}) \\ C_1^\nu(x_1) & C_1^\nu(x_2) & \ldots, & C_1^\nu(x_{n+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n-1}^\nu(x_1), & C_{n-1}^\nu(x_2), & \ldots, & C_{n-1}^\nu(x_{n+1}) \end{vmatrix} .$$

$$. \;(1-x_1^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}(1-x_2^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\ldots(1-x_{n+1}^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx_1dx_2\ldots dx_{n+1} =$$

$$= c_n \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\cdots\int_{-1}^{+1} \begin{vmatrix} x_1^n & x_2^n & \ldots, & x_{n+1}^n \\ C_0^\nu(x_1) & C_0^\nu(x_2) & \ldots, & C_0^\nu(x_{n+1}) \\ C_1^\nu(x_1) & C_1^\nu(x_2) & \ldots, & C_1^\nu(x_{n+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n-1}^\nu(x_1), & C_{n-1}^\nu(x_2), & \ldots, & C_{n-1}^\nu(x_{n+1}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi(x_1) & \psi(x_2) & \ldots, & \psi(x_{n+1}) \\ C_0^\nu(x_1) & C_0^\nu(x_2) & \ldots, & C_0^\nu(x_{n+1}) \\ C_1^\nu(x_1) & C_1^\nu(x_2) & \ldots, & C_1^\nu(x_{n+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n-1}^\nu(x_1), & C_{n-1}^\nu(x_2), & \ldots, & C_{n-1}^\nu(x_{n+1}) \end{vmatrix} .$$

$$. \;(1-x_1^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}(1-x_2^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\ldots(1-x_{n+1}^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx_1dx_2\ldots dx_{n+1} =$$

$$= \frac{\Pi(n+1)}{2^{2n+1}(n+\nu)}\left[\frac{\Pi(\nu-1)}{\Pi(n+\nu-1)}\right]^2 \left[\frac{2^\nu\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^{2n+2} \prod_{\lambda=0}^{n}\frac{\Pi(\lambda+2\nu-1)}{\Pi(\lambda)}\, b_n c_n.$$

Von den speciellen Fällen der Gleichung 105) mögen die folgenden erwähnt werden:

$$106)\quad \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\cdots\int_{-1}^{+1} \begin{vmatrix} x_1^n & x_2^n & \ldots, & x_{n+1}^n \\ C_0^\nu(x_1) & C_0^\nu(x_2) & \ldots, & C_0^\nu(x_{n+1}) \\ C_1^\nu(x_1) & C_1^\nu(x_2) & \ldots, & C_1^\nu(x_{n+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n-1}^\nu(x_1), & C_{n-1}^\nu(x_2), & \ldots, & C_{n-1}^\nu(x_{n+1}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^{n+2s} & x_2^{n+2s} & \ldots, & x_{n+1}^{n+2s} \\ C_0^\nu(x_1) & C_0^\nu(x_2) & \ldots, & C_0^\nu(x_{n+1}) \\ C_1^\nu(x_1) & C_1^\nu(x_2) & \ldots, & C_1^\nu(x_{n+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n-1}^\nu(x_1), & C_{n-1}^\nu(x_2), & \ldots, & C_{n-1}^\nu(x_{n+1}) \end{vmatrix} .$$

$$. \;(1-x_1^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}(1-x_2^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\ldots(1-x_{n+1}^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dx_1dx_2\ldots dx_{n+1} =$$

$$= \frac{\Pi(n+1)\,\Pi(n+2s)\,[\Pi(\nu-1)]^3}{2^{3n+2s+1}\,\Pi(s)\,\Pi(n+\nu+s)[\Pi(n+\nu-1)]^2}\left[\frac{2^\nu\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^{2n+2} \prod_{\lambda=0}^{n}\frac{\Pi(\lambda+2\nu-1)}{\Pi(\lambda)}$$

$$107)\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\cdots\int_{-1}^{+1}\begin{vmatrix} e^{\alpha x_1 i}, & e^{\alpha x_2 i}, & \ldots, & e^{\alpha x_{n+1} i} \\ C_0^\nu(x_1), & C_0^\nu(x_2), & \ldots, & C_0^\nu(x_{n+1}) \\ C_1^\nu(x_1), & C_1^\nu(x_2), & \ldots, & C_1^\nu(x_{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n-1}^\nu(x_1), & C_{n-1}^\nu(x_2), & \ldots, & C_{n-1}^\nu(x_{n+1}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^n, & x_2^n, & \ldots, & x_{n+1}^n \\ C_0^\nu(x_1), & C_0^\nu(x_2), & \ldots, & C_0^\nu(x_{n+1}) \\ C_1^\nu(x_1), & C_1^\nu(x_2), & \ldots, & C_1^\nu(x_{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n-1}^\nu(x_1), & C_{n-1}^\nu(x_2), & \ldots, & C_{n-1}^\nu(x_{n+1}) \end{vmatrix} .$$

$$. (1-x_1^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}(1-x_2^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\ldots(1-x_{n+1}^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx_1 dx_2 \ldots dx_{n+1} =$$

$$= \frac{\Pi(n+1)[\Pi(\nu-1)]^3}{2^{2n-\nu+1}[\Pi(n+\nu-1)]^2}\left[\frac{2^\nu\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^{2n+2}\prod_{\lambda=0}^{n}\frac{\Pi(\lambda+2\nu-1)}{\Pi(\lambda)}\, i^n \alpha^{-\nu} J^{n+\nu}(\alpha)$$

$$108)\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\cdots\int_{-1}^{+1}\begin{vmatrix} x_1^n, & x_2^n, & \ldots, & x_{n+1}^n \\ C_0^\nu(x_1), & C_0^\nu(x_2), & \ldots, & C_0^\nu(x_{n+1}) \\ C_1^\nu(x_1), & C_1^\nu(x_2), & \ldots, & C_1^\nu(x_{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n-1}^\nu(x_1), & C_{n-1}^\nu(x_2), & \ldots, & C_{n-1}^\nu(x_{n+1}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} F(\alpha,\beta,\gamma,cx_1), & F(\alpha,\beta,\gamma,cx_2), & \ldots, & F(\alpha,\beta,\gamma,cx_{n+1}) \\ C_0^\nu(x_1), & C_0^\nu(x_2), & \ldots, & C_0^\nu(x_{n+1}) \\ C_1^\nu(x_1), & C_1^\nu(x_2), & \ldots, & C_1^\nu(x_{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n-1}^\nu(x_1), & C_{n-1}^\nu(x_2), & \ldots, & C_{n-1}^\nu(x_{n+1}) \end{vmatrix} .$$

$$. (1-x_1^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}(1-x_2^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\ldots(1-x_{n+1}^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx_1 dx_2 \ldots dx_{n+1} =$$

$$= \frac{\Pi(n+1)\,\Pi(\alpha+n-1)\,\Pi(\beta+n-1)\,\Pi(\gamma-1)[\Pi(\nu-1)]^3}{2^{3n+1}\,\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)\,\Pi(\gamma+n-1)\,\Pi(n+\nu)[\Pi(n+\nu-1)]^2}\left[\frac{2^\nu\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^{2n+2}\prod_{\lambda=0}^{n}\frac{\Pi(\lambda+2\nu-1)}{\Pi(\lambda)}\, c^n .$$

$$. F\left(\frac{\alpha+n}{2}, \frac{\alpha+n+1}{2}, \frac{\beta+n}{2}, \frac{\beta+n+1}{2}, n+\nu+1, \frac{\gamma+n}{2}, \frac{\gamma+n+1}{2}, c^2\right).$$

Aus der Differentialgleichung 91) ergibt sich, dass die Function:

$$z = C_n^\nu(\lambda \cos x + \mu \cos y)$$

wo:

$$\lambda = \cos^2\frac{\alpha}{2},\quad \mu = \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

ist, der partiellen Differentialgleichung:

$$109)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{2\nu-1}{2}\,\mathrm{cotang}\,x\left\{\frac{1}{\lambda}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial z}{\partial y}\right\} + 2\nu\,\mathrm{cotang}\,\alpha\frac{\partial z}{\partial\alpha} + n(n+2\nu)z = 0$$

genügt.

Setzt man nun:

$$z = \sum_{\rho,\sigma} A_{\rho,\sigma}^{n,\nu}\, C_\rho^{\frac{2\nu-1}{4}}(\cos x)\, C_\sigma^{\frac{2\nu-1}{4}}(\cos y)$$

und beachtet, dass die Function $C_\tau^{\frac{2\nu-1}{4}}(\cos\varphi)$ der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$u'' + \frac{2\nu-1}{2}\,\mathrm{cotang}\,\varphi\,.\,u' + \tau\left(\tau+\frac{2\nu-1}{4}\right)u = 0$$

genügt, so erhält man zur Bestimmung der nur von α abhängigen Grösse:

$$w = A_{\rho,\sigma}^{n,\nu}$$

die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$w'' + 2\nu w' \operatorname{cotang} \alpha + \left\{ n(n+2\nu) - \frac{\rho\left(\rho + \frac{2\nu-1}{4}\right)}{\lambda} - \frac{\sigma\left(\sigma + \frac{2\nu-1}{4}\right)}{\mu} \right\} w = 0$$

oder, wenn man:

$$w = \lambda^{\rho} \mu^{\sigma} v$$

setzt:

$$v'' + \frac{2}{\sin \alpha} \left\{ (\nu + \rho + \sigma) \cos \alpha + \sigma - \rho \right\} v' + (n - \rho - \sigma)(n + \rho + \sigma + 2\nu) v = 0$$

welche Gleichung, falls μ als unabhängige Variable eingeführt wird, in die folgende übergeht:

$$\mu(1-\mu) v'' - \left\{ \nu + 2\sigma + \frac{1}{2} - (2\nu + 2\rho + 2\sigma + 1)\mu \right\} v' + (n - \rho - \sigma)(n + \rho + \sigma + 2\nu) v = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort:

$$v = c_{\rho,\sigma}^{n,\nu} F\left(\rho + \sigma - n,\ \rho + \sigma + n + 2\nu,\ 2\sigma + \nu + \frac{1}{2},\ \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)$$

so dass man also hat:

$$110) \quad C_n^{\nu}(\lambda \cos x + \mu \cos y) = \sum_{\rho,\sigma} c_{\rho,\sigma}^{n,\nu} \lambda^{\rho} \mu^{\sigma} F\left(\rho + \sigma - n,\ \rho + \sigma + n + 2\nu,\ 2\sigma + \nu + \frac{1}{2},\ \mu\right) C_{\rho}^{\frac{2\nu-1}{4}}(\cos x)\, C_{\sigma}^{\frac{2\nu-1}{4}}(\cos y)$$

wo die Grössen $c_{\rho,\sigma}^{n,\nu}$ von α, x und y unabhängig sind.

Um die Constanten $c_{\rho,\sigma}^{n,\nu}$ zu bestimmen, multiplicire ich die Gleichung 110) mit $\sin^{\frac{2\nu-1}{2}} x \sin^{\frac{2\nu-1}{2}} y\, dx\, dy$ und integrire bezüglich x und y von 0 bis π. Dadurch ergibt sich die Relation:

$$111) \quad c_{\rho,\sigma}^{n,\nu} \lambda^{\rho} \mu^{\sigma} F\left(\rho + \sigma - n,\ \rho + \sigma + n + 2\nu,\ 2\sigma + \nu + \frac{1}{2},\ \mu\right) = \frac{(4\rho + 2\nu - 1)(4\sigma + 2\nu - 1)\, \Pi(\rho)\, \Pi(\sigma)}{2^{2\nu+1}\, \Pi\left(\rho + \frac{2\nu-3}{2}\right) \Pi\left(\sigma + \frac{2\nu-3}{2}\right)} \left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{2\nu-3}{4}\right)}\right]^4 .$$

$$. \int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\pi} C_n^{\nu}(\lambda \cos x + \mu \cos y)\, C_{\rho}^{\frac{2\nu-1}{4}}(\cos x)\, C_{\sigma}^{\frac{2\nu-1}{4}}(\cos y) \sin^{\frac{2\nu-1}{2}} x \sin^{\frac{2\nu-1}{2}} y\, dx\, dy.$$

Berücksichtigt man die von mir mitgetheilte Formel:

$$\int_0^{\pi} \varphi(\cos x)\, C_r^{\mu}(\cos x) \sin^{2\mu} x\, dx = \frac{2^r\, \Pi(r + \mu - 1)\, \Pi(r + 2\mu - 1)}{\Pi(r)\, \Pi(\mu - 1)\, \Pi(2r + 2\mu - 1)} \int_0^{\pi} \varphi^{(r)}(\cos x) \sin^{2r+\mu} x\, dx$$

so kann man diese Gleichung auch in folgender Gestalt schreiben:

$$112) \quad c_{\rho,\sigma}^{n,\nu} F\left(\rho + \sigma - n,\ \rho + \sigma + n + 2\nu,\ 2\sigma + \nu + \frac{1}{2},\ \mu\right) =$$

$$= \frac{2^{2\rho + 2\sigma - 2\nu + 3}\, \Pi(\nu + \rho + \sigma - 1)\, \Pi\left(\rho + \frac{2\nu-1}{4}\right) \Pi\left(\sigma + \frac{2\nu-1}{4}\right) \left[\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)\right]^4}{\Pi(\nu - 1)\, \Pi\left(2\sigma + \frac{2\nu-1}{2}\right) \Pi\left(2\rho + \frac{2\nu-1}{2}\right) \left[\Pi\left(\frac{2\nu-3}{4}\right)\right]^6} .$$

$$. \int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\pi} C_{n-\rho-\sigma}^{\nu+\rho+\sigma}(\lambda \cos x + \mu \cos y) \sin^{2\rho + \frac{2\nu-1}{2}} x \sin^{2\sigma + \frac{2\nu-1}{2}} y\, dx\, dy.$$

Aus dieser Formel ersieht man zunächst, dass $c_{\rho,\sigma}^{n,\nu}$ nur dann einen von Null verschiedenen Wert haben kann, wenn ρ und σ so beschaffen sind, dass $n-\rho-\sigma$ positiv und gerade ist.

Setzt man in der Gleichung 112):

$$\mu = 0$$

so verwandelt sich dieselbe in:

$$113)\quad c_{\rho,\sigma}^{n,\nu} = \frac{2^{2\rho+2\sigma-2\nu+3}\,\Pi(\nu+\rho+\sigma-1)\,\Pi\left(\rho+\frac{2\nu-1}{4}\right)\Pi\left(\sigma+\frac{2\nu-1}{4}\right)\left[\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)\right]^4}{\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(2\sigma+\frac{2\nu-1}{2}\right)\Pi\left(2\rho+\frac{2\nu-1}{2}\right)\left[\Pi\left(\frac{2\nu-3}{4}\right)\right]^6}\,.$$
$$\cdot\int_0^\pi \sin^{2\sigma+\frac{2\nu-1}{2}} y\,dy \int_0^\pi C_{n-\rho-\sigma}^{\nu+\rho+\sigma}(\cos x)\sin^{2\rho+\frac{2\nu-1}{2}} x\,dx$$

oder:

$$114)\quad c_{\rho,\sigma}^{n,\nu} = \frac{2^{2\rho+4\sigma-\frac{2\nu-5}{2}}\,\Pi(\nu+\rho+\sigma-1)\,\Pi\left(\rho+\frac{2\nu-1}{4}\right)\Pi\left(\sigma+\frac{2\nu-1}{4}\right)}{\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(2\rho+\frac{2\nu-1}{2}\right)\left[\Pi\left(2\sigma+\frac{2\nu-1}{2}\right)\right]^2}\left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{2\nu-3}{4}\right)}\right]^4 .$$
$$\cdot\int_0^\pi C_{n-\rho-\sigma}^{\nu+\rho+\sigma}(\cos x)\sin^{2\rho+\frac{2\nu-1}{2}} x\,dx$$

welche Gleichung, wenn man das Integral auf der rechten Seite nach einer bekannten Formel aus der Theorie der Functionen $C_n^\nu(x)$ berechnet, nach einigen Reductionen in die folgende übergeht:

$$115)\, c_{\rho,\sigma}^{n,\nu} = \frac{(4\rho+2\nu-1)\,\Pi(n-\rho+\sigma+2\nu-1)\,\Pi(n+\rho+\sigma+2\nu-1)}{2^{2n+3}\,\Pi\left(2\sigma+\frac{2\nu-3}{2}\right)\Pi\left(\frac{n-\rho-\sigma}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+\rho+\sigma+2\nu-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{n-\rho+\sigma}{2}+\frac{2\nu-1}{4}\right)\Pi\left(\frac{n+\rho-\sigma}{2}+\frac{2\nu-1}{4}\right)}\,.$$
$$\cdot\left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{2\nu-3}{4}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2 .$$

Man hat also schliesslich die Entwicklung:

$$116)\quad C_n^\nu(\lambda\cos x+\mu\cos y) = \frac{1}{2}\left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{2\nu-3}{4}\right)}{2^{n+1}\,\Pi(2\nu-1)}\right]^2 .$$
$$\cdot\sum_{\rho,\sigma}\frac{\Pi(n-\rho+\sigma+2\nu-1)\,\Pi(n+\rho+\sigma+2\nu-1)}{\Pi\left(2\sigma+\frac{2\nu-3}{2}\right)\Pi\left(\frac{n-\rho-\sigma}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+\rho+\sigma+2\nu-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{n-\rho+\sigma}{2}+\frac{2\nu-1}{4}\right)\Pi\left(\frac{n+\rho-\sigma}{2}+\frac{2\nu-1}{4}\right)}\,.$$
$$\cdot(4\rho+2\nu-1)\,\lambda^\rho\mu^\sigma\,F\left(\rho+\sigma-n,\ \rho+\sigma+n+2\nu,\ 2\sigma+\nu+\frac{1}{2},\ \mu\right)C_\rho^{\frac{2\nu-1}{4}}(\cos x)\,C_\sigma^{\frac{2\nu-1}{4}}(\cos y)$$

wo:

$$\lambda+\mu = 1$$

ist und die Summation über alle ganzzahligen positiven Wertsysteme ρ, σ auszudehnen ist, für welche $n-\rho-\sigma$ eine gerade, nicht negative Zahl ist.

Setzt man in der Gleichung 116):

$$\nu = \frac{1}{2}$$

und beachtet, dass:

$$\left[\frac{1}{\nu_1} C_r^{\nu_1}(\cos x)\right]_{\nu_1=0} = \frac{2}{r} \cos r\varphi$$

ist, so erhält man:

$$117)\quad P_n(\lambda \cos x + \mu \cos y) = \frac{\varepsilon}{2^{2n}} \sum_{\rho,\,\sigma} \frac{\Pi(n+\rho+\sigma)\,\Pi(n-\rho+\sigma)}{\Pi(2\sigma)\,\Pi\left(\frac{n+\rho+\sigma}{2}\right)\Pi\left(\frac{n-\rho-\sigma}{2}\right)\Pi\left(\frac{n-\rho+\sigma}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+\rho-\sigma}{2}\right)} \lambda^\rho \mu^\sigma \,.$$

$$.\, F(\rho+\sigma-n,\ \rho+\sigma+n+1,\ 2\sigma+1,\ \mu) \cos \rho x \cos \sigma y$$

wo ε den Werth 1 hat, wenn ρ und σ gleich Null sind, den Werth 2, wenn nur eine dieser Grössen den Werth 0 hat und in allen anderen Fällen gleich 4 ist. Die Formel 117) hat Herr F. Tisserand in den Schriften der Pariser Akademie mitgetheilt. („Note sur une formule de Hansen." C. R. Tome XCVII, No. 16, 15 octobre 1883.)