BEITRAG

ZUR

AUSMITTLUNG DES WERTHES BESTIMMTER INTEGRALE.

VON

REINHARD MILDNER,

REALSCHULPROFESSOR.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 3. JÄNNER 1884.

Es sollen in Folgendem die Werthe der nachstehenden Integrale ermittelt werden:

$$J = \int_0^\infty \operatorname{arc\,cotg} x^2 \sin(\lg x^b)\, dx$$

und:

$$J' = \int_0^\infty \operatorname{arc\,cotg} x^2 \cos(\lg x^b)\, dx.$$

Durch Einführung einer neuen Veränderlichen $\lg x = z$ gehen die zwei Integrale über in:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^z \operatorname{arc\,cotg} e^{2z} \sin bz\, dz$$

und:

$$J' = \int_{-\infty}^{+\infty} e^z \operatorname{arc\,cotg} e^{2z} \cos bz\, dz.$$

Das erste Integral J lässt sich in eine Summe von zwei Integralen zerlegen, nämlich:

$$J = \int_{-\infty}^{0} e^z \operatorname{arc\,cotg} e^{2z} \sin bz\, dz + \int_0^\infty e^z \operatorname{arc\,cotg} e^{2z} \sin bz\, dz = J_1 + J_2$$

wenn man die aufeinanderfolgenden Integrale mit J_1 und J_2 bezeichnet. Wird in J_1 $-z$ statt z gesetzt, so nimmt J_1 die Form an:

$$J_1 = -\int_0^\infty e^{-z} \operatorname{arc\,cotg} e^{-2z} \sin bz\, dz = -\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} e^{-2z}\right). e^{-z} \sin bz\, dz$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-z} \sin bz\, dz + \int_0^\infty e^{-z} \operatorname{arc\,tg} e^{-2z} \sin bz\, dz$$

und da:

$$\int_0^\infty e^{-z} \sin bz\,dz = \frac{b}{1+b^2},$$

so folgt für J, wenn man zuvor $\operatorname{arc\,cotg} e^{2z}$ im Integrale J_2 durch $\operatorname{arc\,tg} e^{-2z}$ ersetzt, der Ausdruck:

$$J = -\frac{b\pi}{2(1+b^2)} + \int_0^\infty e^{z} \operatorname{arc\,tg} e^{-2z} \sin bz\,dz + \int_0^\infty e^{-z} \operatorname{arc\,tg} e^{-2z} \sin bz\,dz. \qquad \text{B)}$$

Wird hier in beiden Integralen $\operatorname{arc\,tg} e^{-2z}$ in eine Reihe entwickelt, so hat man:

$$\int_0^\infty e^{z} \operatorname{arc\,tg} e^{-2z} \sin bz\,dz = \int_0^\infty \left(e^{-z} - \frac{1}{3} e^{-5z} + \frac{1}{5} e^{-9z} - \ldots\right) \sin bz\,dz.$$

Werden die einzelnen Glieder dieser Reihe nach der bekannten Formel

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

berechnet, so ist das obige Integral durch die unendliche Reihe bestimmt:

$$\int_0^\infty e^{z} \operatorname{arc\,tg} e^{-2z} \sin bz\,dz = b\left[\frac{1}{1^2+b^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^2+b^2} + \frac{1}{5(9^2+b^2)} - \cdots\right].$$

Auf demselben Wege gelangt man zu dem Resultate:

$$\int_0^\infty e^{-z} \operatorname{arc\,tg} e^{-2z} \sin bz\,dz = b\left[\frac{1}{3^2+b^2} - \frac{1}{3(7^2+b^2)} + \frac{1}{5(11^2+b^2)} - \frac{1}{7(15^2+b^2)} + \cdots\right].$$

Dies beachtend, folgt für J der Werth:

$$\frac{J}{b} = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{3^2+b^2} - \frac{1}{3(7^2+b^2)} + \frac{1}{5(11^2+b^2)} - \frac{1}{7(15^2+b^2)} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{1^2+b^2} - \frac{1}{3(5^2+b^2)} + \frac{1}{5(9^2+b^2)} - \frac{1}{7(13^2+b^2)} + \cdots \qquad \alpha)$$

Die Glieder dieser zwei Reihen haben die allgemeine Form:

$$\frac{1}{x[(2x\pm1)^2+b^2]}$$

und können also in Partialbrüche zerlegt werden:

$$\frac{1}{x[(2x+1)^2+b^2]} = \frac{2}{1+b^2}\left[\frac{1}{2x} - \frac{2x+1}{(2x+1)^2+b^2} - \frac{1}{(2x+1)^2+b^2}\right] \qquad \beta)$$

$$\frac{1}{x[(2x-1)^2+b^2]} = \frac{2}{1+b^2}\left[\frac{1}{2x} - \frac{2x-1}{(2x-1)^2+b^2} + \frac{1}{(2x-1)^2+b^2}\right]. \qquad \gamma)$$

Dies berücksichtigend geht die Gleichung α) durch Multiplication mit $\frac{1+b^2}{2}$ über in:

$$\frac{1+b^2}{2b} \cdot J = -\frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{3^2+b^2} - \frac{1}{3^2+b^2} - \frac{1}{6} + \frac{7}{7^2+b^2} + \frac{1}{7^2+b^2} + \frac{1}{10}\right.$$
$$\left. - \frac{11}{11^2+b^2} - \frac{1}{11^2+b^2} - \cdots\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1^2+b^2} + \frac{1}{1^2+b^2} - \frac{1}{6} + \frac{5}{5^2+b^2} - \frac{1}{5^2+b^2} + \frac{1}{10} - \frac{9}{9^2+b^2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{9^2+b^2} - \cdots\right],$$

oder, wenn man beachtet:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\ldots=\frac{\pi}{8}$$

so ist:

$$\frac{1+b^2}{2b}\,.\,J=\left[\frac{1}{1^1+b^2}-\frac{1}{3^2+b^2}-\frac{1}{5^2+b^2}+\frac{1}{7^2+b^2}+\frac{1}{9^2+b^2}-\ldots\right] \qquad \text{A)}$$

$$-\left[\frac{1}{1^2+b^2}+\frac{3}{3^2+b^2}-\frac{5}{5^2+b^2}-\frac{7}{7^2+b}+\frac{9}{9^2+b^2}+\frac{11}{11^2+b^2}-\ldots\right].$$

Es handelt sich nun um die Auswerthung der Reihen in den eckigen Klammern, und diese kann auf nachstehende Weise bewerkstelligt werden. Es ist bekanntermassen:

$$\varphi(x,b)=\frac{\cos x}{1^2+b^2}-\frac{\cos 2x}{2^2+b^2}+\frac{\cos 3x}{3^2+b^2}-\frac{\cos 4x}{4^2+b^2}+\ldots=\frac{1}{2b^2}-\frac{\pi}{2b}\cdot\frac{e^{bx}+e^{-bx}}{e^{b\pi}-e^{-b\pi}}.$$

Wird hier x durch $\pi-x$ ersetzt, so hat man für die Reihe mit lauter positiven Gliedern:

$$\frac{\cos x}{1^2+b^2}+\frac{\cos 2x}{2^2+b^2}+\frac{\cos 3x}{3^2+b^2}+\frac{\cos 4x}{4^2+b^2}+\ldots=-\varphi(\pi-x,b).$$

Es ist ferner die Summe der geraden Glieder:

$$\frac{\cos 2x}{2^2+b^2}+\frac{\cos 4x}{4^2+b^2}+\frac{\cos 6x}{6^2+b^2}+\ldots=\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 2x}{1^2+\frac{b^2}{4}}+\frac{\cos 4x}{2^2+\frac{b^2}{4}}+\frac{\cos 6x}{3^2+\frac{b^2}{4}}+\ldots\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\varphi\left(\pi-2x,\frac{b}{2}\right).$$

Die zwei letzten Gleichungen durch Subtraction vereinigt, geben:

$$\frac{\cos x}{1^2+b^2}+\frac{\cos 3x}{3^2+b^2}+\frac{\cos 5x}{5^2+b^2}+\ldots=\frac{1}{4}\varphi\left(\pi-2x,\frac{b}{2}\right)-\varphi(\pi-x,b) \qquad \delta)$$

$$=\frac{\pi}{4b}\cdot\frac{e^{b\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}-e^{-b\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{e^{\frac{b\pi}{2}}+e^{-\frac{b\pi}{2}}}$$

und durch Differentiation der letzten Gleichung nach x erhält man alsogleich:

$$\frac{\sin x}{1^2+b^2}+\frac{3\sin 3x}{3^2+b^2}+\frac{5\sin 5x}{5^2+b^2}+\ldots=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{e^{b\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)}+e^{-b\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{e^{\frac{b\pi}{2}}+e^{-\frac{b\pi}{2}}}. \qquad \varepsilon)$$

Aus den Gleichungen δ) und ε) gehen durch Substitution von $x=\frac{\pi}{4}$ die Werthe der zwei eingeklammerten Reihen ohne Mühe hervor. Es ist nämlich:

$$\frac{1}{1^2+b^2}-\frac{1}{3^2+b^2}-\frac{1}{5^2+b^2}+\frac{1}{7^2+b^2}+\frac{1}{9^2+b^2}-\ldots=\frac{\pi}{2b\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{\frac{b\pi}{4}}-e^{\frac{b\pi}{4}}}{e^{\frac{b\pi}{2}}+e^{-\frac{b\pi}{2}}} \qquad \lambda)$$

$$\frac{1}{1^2+b^2}+\frac{3}{3^2+b^2}-\frac{5}{5^2+b^2}-\frac{7}{7^2+b^2}+\ldots=\frac{\pi}{2b\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{\frac{b\pi}{4}}+e^{-\frac{b\pi}{4}}}{e^{\frac{b\pi}{2}}+e^{-\frac{b\pi}{2}}}. \qquad \mu)$$

Diese Werthe, in Gleichung A) eingesetzt, geben für das zu berechnende Integral den Ausdruck:

$$\int_0^\infty \operatorname{arc\,cotg} x^2 \sin(b \lg x)\, dx = \int_0^\infty \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} \cdot \sin(b \lg x) dx$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}(1+b^2)} \cdot \frac{(1-b)e^{\frac{b\pi}{4}} - (1+b)e^{-\frac{b\pi}{4}}}{e^{\frac{b\pi}{2}} + e^{-\frac{b\pi}{2}}}. \qquad 1)$$

Aus Gleichung B) findet man noch den Werth des Integrals:

$$\int_0^\infty (e^x + e^{-x}) \operatorname{arc\,tg} e^{-2x} \sin bx\, dx = J + \frac{b\pi}{2(1+b^2)}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}(1+b^2)} \left[\frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{(1-b)e^{\frac{b\pi}{4}} - (1+b)e^{-\frac{b\pi}{4}}}{e^{\frac{b\pi}{2}} + e^{-\frac{b\pi}{2}}} \right], \qquad 2)$$

für $b = 1$ erhält man die einfachen Resultate:

$$\int_0^\infty \operatorname{arc\,ctg} x^2 \sin(\lg x)\, dx = \int_0^\infty \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x^2} \cdot \sin(\lg x)\, dx$$

$$= -\frac{\pi e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}\right)} \qquad 3)$$

$$\int_0^\infty (e^x + e^{-x}) \operatorname{arc\,tg} e^{-2x} \sin x\, dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}}}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}} \right). \qquad 4)$$

Das zweite Integral J' kann durch Einführung einer neuen Variablen $\lg x = z$ ähnlich wie das erste auf die Form gebracht werden:

$$J' = \int_0^\infty \operatorname{arc\,cotg} x^2 \cos(b \lg x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-z} \cos bz\, dz$$

$$+ \int_0^\infty e^z \operatorname{arc\,tg} e^{-2z} \cos bz\, dz - \int_0^\infty e^{-z} \operatorname{arc\,tg} e^{-2z} \cos bz\, dz. \qquad C)$$

Ersetzt man $\operatorname{arc\,tg} e^{-2z}$ durch eine unendliche Reihe und entwickelt die einzelnen Integrale nach der Formel:

$$\int_0^\infty e^{-az} \cos bz\, dz = \frac{a}{a^2+b^2},$$

so folgt:

$$J' = \frac{\pi}{2(1+b^2)} + \left[\frac{1}{1^2+b^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{5^2+b^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{9^2+b^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{13}{13^2+b^2} + \cdots \right]$$

$$- \left[\frac{1}{3^2+b^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{7^2+b^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{11}{11^2+b^2} - \cdots \right]$$

Die Glieder der eingeklammerten Reihen haben die Form:

$$\frac{2x \pm 1}{x\left[(2x \pm 1)^2 + b^2\right]}\,.$$

und lassen sich, wie folgt, in Partialbrüche zerlegen:

$$\frac{2x-1}{x\left[(2x-1)^2+b^2\right]} = \frac{1}{1+b^2}\left[-\frac{1}{x} + 2\cdot\frac{2x-1}{(2x-1)^2+b^2} + 2b^2\,\frac{1}{(2x-1)^2+b^2}\right] \qquad \text{m)}$$

$$\frac{2x+1}{x\left[(2x+1)^2+b^2\right]} = \frac{1}{1+b^2}\left[\frac{1}{x} - 2\cdot\frac{2x+1}{(2x+1)^2+b^2} + 2b^2\,\frac{1}{(2x+1)^2+b^2}\right]. \qquad \text{n)}$$

Nach ausgeführter Zerlegung der einzelnen Theile in Partialbrüche erhält man alsogleich:

$$\frac{1+b^2}{2}\,.\,J' = b^2\left[\frac{1}{1^2+b^2} - \frac{1}{3^2+b^2} - \frac{1}{5^2+b^2} + \frac{1}{7^2+b^2} + \frac{1}{9^2+b^2} - \cdots\right]$$

$$+\left[\frac{1}{1^2+b^2} + \frac{3}{3^2+b^2} - \frac{5}{5^2+b^2} - \frac{7}{7^2+b^2} + \cdots\right].$$

Es sind dies dieselben Reihen, deren Werthe bereits unter λ) und μ) ermittelt wurden. Man findet daher mit Berücksichtigung dieser zwei Gleichungen nach kurzer Rechnung für das Integral J' den Ausdruck:

$$J' = \int_0^\infty \operatorname{arc\,cotg} x^2 \cos(b \lg x)\,dx = \int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x^2}\cos(b\lg x)\,dx$$

$$= \frac{\pi\left[(1+b)e^{\frac{b\pi}{4}} + (1-b)e^{-\frac{b\pi}{4}}\right]}{\sqrt{2}(1+b^2)\left(e^{\frac{b\pi}{2}} + e^{-\frac{b\pi}{2}}\right)}. \qquad 5)$$

Aus Gleichung C) erhält man noch das Resultat:

$$\int_0^\infty (e^z - e^{-z}) \operatorname{arc\,tg} e^{-2z} \cos bz\,dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}(1+b^2)}\left[\frac{(1+b)e^{\frac{b\pi}{4}} + (1-b)e^{-\frac{b\pi}{4}}}{e^{\frac{b\pi}{2}} + e^{-\frac{b\pi}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad 6)$$

und für $b = 1$ folgt noch aus 5) und 6):

$$\int_0^\infty \operatorname{arc\,cotg} x^2 \cos(\lg x)\,dx = \int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x^2}\,.\cos(\lg x)\,dx$$

$$= \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}(1+e^{-\pi})} \qquad \text{r)}$$

$$\int_0^\infty (e^z - e^{-z}) \operatorname{arc\,tg} e^{-2z} \cos z\,dz = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{2e^{-\frac{\pi}{4}}}{1+e^{-\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]. \qquad 8)$$

Ähnlich wie die Integrale J und J' lassen sich auch noch die folgenden Integrale behandeln:

$$P = \int_0^\infty \lg\frac{1+x^2}{x^2}\cos(b\lg x)\,dx$$

und:

$$Q=\int_0^\infty \lg\frac{1+x^2}{x^2}\sin(b\lg x)\,dx.$$

Durch Substitution von $\lg x = z$ nehmen die Integrale P und Q die Form an:

$$P=\int_{-\infty}^{+\infty} e^z \lg(1+e^{-2z})\cos bz\,dz \qquad Q=\int_{-\infty}^{+\infty} e^z \lg(1+e^{-2z})\sin bz\,dz.$$

Das Integral P lässt sich in zwei Theile zerlegen:

$$P=\int_{-\infty}^{0} e^z \lg(1+e^{-2z})\cos bz\,dz+\int_0^\infty e^z \lg(1+e^{-2z})\cos bz\,dz.$$

Wird im ersten Integral $-z$ durch z ersetzt, so hat man dafür:

$$\int_{-\infty}^{0} e^z \lg(1+e^{-2z})\cos bz\,dz=\int_0^\infty e^{-z}\lg(1+e^{+2z})\cos bz\,dz=\int_0^\infty e^{-z}\lg\frac{1+e^{-2z}}{e^{-2z}}\cos bz\,dz$$

$$=\int_0^\infty e^{-z}\lg(1+e^{-2z})\cos bz\,dz+2\int_0^\infty ze^{-z}\cos bz\,dz$$

und es zerfällt demnach P in die drei Integrale:

$$P=\int_0^\infty e^z\lg(1+e^{-2z})\cos bz\,dz+\int_0^\infty e^{-z}\lg(1+e^{-2z})\cos bz\,dz+2\int_0^\infty ze^{-z}\cos bz\,dz. \qquad \text{D)}$$

Wird der Logarithmus unterm Integralzeichen durch eine Reihe ersetzt, so hat man für das erste Integral:

$$\int_0^\infty e^z\lg(1+e^{-2z})\cos bz\,dz=\int_0^\infty\left(e^{-z}-\frac{1}{2}e^{-3z}+\frac{1}{3}e^{-5z}-\ldots\right)\cos bz\,dz$$

$$=\frac{1}{1^2+b^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3^2+b^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{5^2+b^2}\ldots-$$

Desgleichen ist auch das zweite Integral durch die Reihe bestimmt:

$$\int_0^\infty e^{-z}\lg(1+e^{-2z})\cos bz\,dz=\frac{3}{3^2+b^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5^2+b^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{7^2+b^2}-\ldots$$

und für das dritte Integral ergibt sich durch Anwendung der theilweisen Integration:

$$\int_0^\infty ze^{-z}\cos bz\,dz=\frac{1-b^2}{(1+b^2)^2}.$$

Die einzelnen Glieder der zwei Reihen können nach m) und n) in Partialbrüche zerlegt werden, und es folgt dann für das ursprüngliche Integral P nach kurzer Rechnung:

$$\int_0^\infty\lg\frac{1+x^2}{x^2}\cos(b\lg x)\,dx=\frac{2\pi}{(1+b^2)\left(e^{\frac{b\pi}{2}}+e^{-\frac{b\pi}{2}}\right)}, \qquad \text{9)}$$

ferner geht aus Gleichung D) das Resultat hervor:

$$\int_0^\infty (e^x+e^{-x}) \lg(1+e^{-2x}) \cos bx\,dx = P-2\int_0^\infty xe^{-x}\cos bx\,dx$$

$$= \frac{2}{1+b^2}\left[\frac{\pi}{e^{\frac{b\pi}{2}}+e^{-\frac{b\pi}{2}}}+\frac{b^2-1}{b^2+1}\right] \qquad 10)$$

Durch dasselbe Verfahren wie bei P kann das Integral Q durch die nachstehenden drei Integrale dargestellt werden, nämlich:

$$Q = \int_0^\infty e^z \lg(1+e^{-2z}) \sin bz\,dz - \int_0^\infty e^{-z} \lg(1+e^{-2z}) \sin bz\,dz - 2\int_0^\infty ze^{-z} \sin bz\,dz. \qquad E)$$

Die zwei ersten Integrale, durch unendliche Reihen ausgedrückt, geben:

$$\int_0^\infty e^z \lg(1+e^{-2z}) \sin bz\,dz = b\left[\frac{1}{1^2+b^2}-\frac{1}{2(3^2+b^2)}+\frac{1}{3(5^2+b^2)}-\frac{1}{4(7^2+b^2)}+\cdots\right]$$

$$\int_0^\infty e^{-z} \lg(1+e^{-2z}) \sin bz\,dz = b\left[\frac{1}{3^2+b^2}-\frac{1}{2(5^2+b^2)}+\frac{1}{3(7^2+b^2)}-\frac{1}{3(9^2+b^2)}+\cdots\right]$$

und das dritte Integral hat bekanntlich den Werth:

$$\int_0^\infty ze^{-z} \sin bz\,dz = \frac{2b}{(1+b^2)^2}.$$

Durch eine Partialbruchzerlegung der einzelnen Glieder der zwei Reihen nach den Formeln β) und γ) erhält man nach kurzer Rechnung für Q:

$$Q = -\frac{4b}{1^2+b^2}\left[\frac{1}{1^2+b^2}-\frac{3}{3^2+b^2}+\frac{5}{5^2+b^2}-\cdots\right],$$

oder, wenn die Reihe in der Klammer summirt wird:

$$Q = \int_0^\infty \lg\frac{1+x^2}{x^2}\cdot\sin(b\lg x)\,dx = -\frac{2b\pi}{(1+b^2)\left(e^{\frac{b\pi}{2}}+e^{-\frac{b\pi}{2}}\right)} \qquad 11)$$

und aus Gleichung E) folgt alsogleich:

$$\int_0^\infty (e^x-e^{-x}) \sin bx \lg(1+e^{-2x})\,dx = \frac{2b}{1+b^2}\left[\frac{2}{1+b^2}-\frac{\pi}{e^{\frac{b\pi}{2}}+e^{-\frac{b\pi}{2}}}\right]. \qquad 12)$$

Durch eine ähnliche Behandlung gelangt man noch zu den nachfolgenden Resultaten:

$$\int_0^\infty (e^x+e^{-x}) \lg(1-e^{-2x}) \cos bx\,dx = \frac{2}{1+b^2}\left[\frac{b^2-1}{1+b^2}+\frac{b\pi}{2}\cdot\frac{1-e^{b\pi}}{1+e^{b\pi}}\right] \qquad 13)$$

$$\int_0^\infty (e^x-e^{-x}) \sin bx \lg(1-e^{-x})\,dx = \frac{1}{1+b^2}\left[\frac{4b}{1+b^2}-\pi\cdot\frac{e^{b\pi}-1}{e^{b\pi}+1}\right]. \qquad 14)$$

Im Übrigen können alle Integrale mit Ausnahme der zwei letzten aus allgemeineren Resultaten ohne Zuhilfenahme von unendlichen Reihen hergeleitet werden, wenn man von dem bekannten Integrale ausgeht:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^r}\,dx = \frac{\pi}{r\sin\frac{m\pi}{r}};\ r>m>1.$$

Durch theilweise Integration kann das folgende Integral auf nachstehende Form gebracht werden:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc tg} x^p}{x^{k+1}}\,dx = -\frac{\operatorname{arc tg} x^p}{kx^k}\Big\}_0^\infty + \frac{p}{k}\int_0^\infty \frac{x^{p-k-1}}{1+x^{2p}}\,dx.$$

Der erste Theil verschwindet, sobald $p>k>0$ vorausgesetzt wird, und das Integral rechter Hand kann nach obiger Formel bestimmt werden. Es ist also:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc tg} x^p}{x^{k+1}}\,dx = \frac{\pi}{2k\sin\frac{p-k}{2p}\pi} = \frac{\pi}{2k\cos\frac{k\pi}{2p}};\ p>k>0.$$

Setzt man hier im Integral $k=a+bi$, wobei der reelle Theil positiv und $p>a$ sein muss, so kann die Potenz im Nenner auf die Form gebracht werden:

$$x^{k+1} = x^{a+1}\,.\,x^{bi} = x^{a+1}\,.\,e^{bi\lg x}$$

und:

$$\frac{1}{x^{k+1}} = \frac{1}{x^{a+1}}\,.\,e^{-bi\lg x} = \frac{1}{x^{a+1}}\left[\cos(b\lg x) - i\sin(b\lg x)\right],$$

und es zerfällt das vorliegende Integral nach ausgeführter Substitution in die zwei Theile:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc tg} x^p \cos(\lg x^b)\,dx}{x^{a+1}} - i\int_9^\infty \frac{\operatorname{arc tg} x^p \sin(\lg x^b)}{x^{a+1}}\,dx =$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(a+bi)\cos\frac{(a+bi)\pi}{2p}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-bi}{(a^2+b^2)\cos\frac{(a+bi)}{2p}\pi}.$$

$$= P - Qi.$$

Es ist aber bekanntlich:

$$\frac{1}{\cos(z+iy)} = 2\,.\,\frac{\cos z(e^y+e^{-y}) + i(e^y-e^{-y})\sin z}{e^{2y}+e^{-2y}+2\cos 2z}$$

und man erhält mit Rücksicht auf die letzte Gleichung nach Trennung des reellen Theiles vom imaginären für P und Q, das ist für die vorliegenden Integrale die Werthe:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc tg} x^p \cos(\lg x^b)}{x^{a+1}}\,dx = \frac{\pi[a\cos a\lambda(e^{b\lambda}+e^{-b\lambda}) + b\sin a\lambda(e^{b\lambda}-e^{-b\lambda})]}{(a^2+b^2)(e^{2b\lambda}+e^{-2b\lambda}+2\cos 2a\lambda)} \qquad 15)$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc tg} x^p \sin(\lg x^b)}{x^{a+1}}\,dx = \frac{\pi[b\cos a\lambda(e^{b\lambda}+e^{-b\lambda}) - a\sin a\lambda(e^{b\lambda}-e^{-b\lambda})]}{(a^2+b^2)(e^{2b\lambda}+e^{-2b\lambda}+2\cos 2a\lambda)}, \qquad 16)$$

wobei $\lambda = \frac{\pi}{2p}$ gesetzt wurde, und nebstdem $p > a > 0$ vorausgesetzt ist. Insbesondere ergeben sich für $p = 2$ und $a = 1$ aus den letzten zwei Gleichungen, da hier $\lambda = \frac{\pi}{4}$ ist, die einfacheren Resultate:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x^2 \cos(\lg x^b)}{x^2} dx = \frac{\pi \left[(1+b) e^{\frac{b\pi}{4}} + (1-b) e^{-\frac{b\pi}{4}}\right]}{\sqrt{2}(1+b^2)\left(e^{\frac{b\pi}{2}} + e^{-\frac{b\pi}{2}}\right)} \tag{17}$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x^2 \sin(b \lg x)}{x^2} dx = \frac{\pi \left[(b-1) e^{\frac{b\pi}{4}} + (b+1) e^{-\frac{b\pi}{4}}\right]}{\sqrt{2}(1+b^2)\left(e^{\frac{b\pi}{2}} + e^{-\frac{b\pi}{2}}\right)} \tag{18}$$

Durch Einführung einer neuen Variablen $x = \frac{1}{y}$ gehen die beiden Integrale über in:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x^2 \cos(b \lg x)}{x^2} dx = \int_0^\infty \operatorname{arc} \operatorname{cotg} y^2 . \cos(b \lg y)\, dy$$

und:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x^2 \sin(b \lg x)}{x^2} dx = -\int_0^\infty \operatorname{arc} \operatorname{cotg} y^2 . \sin(b \lg y)\, dy.$$

welch' letztere Resultate mit denen der Gleichung 1) und 5) übereinstimmen, wenn man die Ergebnisse der Gleichungen 17) und 18) beachtet.

Um noch weitere allgemeinere Integrale auszuwerthen, benützen wir das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\lg(1+x^p)}{x^{k+1}} dx,$$

welches durch partielle Integration in die zwei Theile zerfällt:

$$\int_0^\infty \frac{\lg(1+x^p)}{x^{k+1}} dx = \left.\frac{-\lg(1+x^p)}{k x^k}\right\}_0^\infty + \frac{p}{k}\int_0^\infty \frac{x^{p-k-1}}{1+x^p} dx.$$

Wird hier, wie vorher $p > k > 0$ vorausgesetzt, so geht der erste Theil in Null über, und es ist dann, wenn das Integral rechter Hand nach der Formel vom vorigen Beispiel berechnet wird:

$$\int_0^\infty \frac{\lg(1+x^p)}{x^{k+1}} dx = \frac{\pi}{k \sin \frac{k\pi}{p}}; \quad \text{für } p > k > 0. \tag{19}$$

Setzt man in Formel 19) $k = a+bi$, wobei wir $p > a > 0$ annehmen, so zerfällt das Integral in die zwei Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{\lg(1+x^p)\cos(\lg x^b)}{x^{a+1}} dx - i\int_0^\infty \frac{\lg(1+x^p)\sin(\lg x^b)}{x^{a+1}} dx$$

und der Ausdruck rechter Hand geht dann über in:

$$\frac{\pi}{(a+bi)\sin(a+bi)\frac{\pi}{p}} = \frac{\pi(a-bi)}{(a^2+b^2)\sin(a+bi)\frac{\pi}{p}} = P - Qi,$$

wobei P den reellen und Qi den imaginären Theil bedeutet.

Zur Ausrechnung soll die Formel benutzt werden:

$$\frac{1}{\sin(x+iy)} = 2 \,.\, \frac{(e^y+e^{-y})\sin x - i(e^y-e^{-y})\cos x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x},$$

alsdann ergeben sich für die zwei Integrale nachstehende Werthe:

$$P = \int_0^\infty \frac{\lg(1+x^p)}{x^{a+1}} \,.\, \cos(\lg x^b)\,dx = \tag{20}$$

$$\frac{2\pi[a\sin a\lambda(e^{b\lambda}+e^{-b\lambda}) - b\cos a\lambda(e^{b\lambda}-e^{-b\lambda})]}{(a^2+b^2)(e^{2b\lambda}+e^{-2b\lambda}-2\cos 2a\lambda)}$$

$$Q = \int_0^\infty \frac{\lg(1+x^p)}{x^{a+1}} \,.\, \sin(b\lg x)\,dx = \tag{21}$$

$$\frac{2\pi[b\sin a\lambda(e^{b\lambda}+e^{-b\lambda}) + a\cos a\lambda(e^{b\lambda}-e^{-b\lambda})]}{(a^2+b^2)(e^{2b\lambda}+e^{-2b\lambda}-2\cos 2a\lambda)},$$

wenn man zur Abkürzung

$$\lambda = \frac{\pi}{p}$$

setzt, und nebstdem

$$p > a > 0$$

vorausgesetzt wird.

Für $p=2$ und $a=1$ folgen aus den letzten zwei Gleichungen die speciellen Resultate:

$$\int_0^\infty \frac{\lg(1+x^2)}{x^2} \,.\, \cos(b\lg x)\,dx = \frac{2\pi\left(e^{\frac{b\pi}{2}}+e^{-\frac{b\pi}{2}}\right)}{(1+b^2)(e^{b\pi}+e^{-b\pi}+2)} \tag{22}$$

$$= \frac{2\pi}{(1+b^2)\left(e^{\frac{b\pi}{2}}+e^{-\frac{b\pi}{2}}\right)};$$

$$\int_0^\infty \frac{\lg(1+x^2)}{x^2} \,.\, \sin(b\lg x)\,dx = \frac{2b\pi}{(1+b^2)\left(e^{\frac{b\pi}{2}}+e^{-\frac{b\pi}{2}}\right)}. \tag{23}$$

Ersetzt man in 22) und 23) x durch die neue Veränderliche $\frac{1}{y}$, so ergibt sich sofort:

$$\int_0^\infty \lg\frac{1+y^2}{y^2} \,.\, \cos(b\lg y)\,dy = \int_0^\infty \frac{\lg(1+x^2)}{x^2} \cos(b\lg x)\,dx$$

$$\int_0^\infty \lg\frac{y^2}{1+y^2} \,.\, \sin(b\lg y)\,dy = \int_0^\infty \frac{\lg(1+x^2)}{x^2} \,.\, \sin(b\lg x)\,dx.$$

übereinstimmend mit den Ergebnissen in 9) und 11), wenn die Werthe der Integrale rechter Hand aus den Gleichungen 22) und 23) entnommen werden. Um noch zu Integralen zu gelangen, von denen 2) und 6) als specielle Fälle erscheinen, setze man in die Gleichungen 15) und 16) $p = 1$ und führe gleichzeitig die neue Veränderliche z mittelst der Gleichung $x = e^{-z}$ ein, so nehmen die Integrale die Form an:

$$P = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x \cos(b \lg x)}{x^{a+1}}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{az} \operatorname{arc\,tg} e^{-z} \cos bz\, dz$$

und:

$$Q = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x \sin(b \lg x)}{x^{a+1}}\, dx = \int_{+\infty}^{-\infty} e^{az} \operatorname{arc\,tg} e^{-z} \sin bz\, dz.$$

Das Integral P kann in die folgenden zwei Integrale zerlegt werden:

$$P = \int_{-\infty}^{0} e^{az} \operatorname{arc\,tg} e^{-z} \cos bz\, dz + \int_0^{+\infty} e^{az} \operatorname{arc\,tg} e^{-z} \cos bz\, dz = J_1 + J_2. \qquad \text{F)}$$

J_1 geht durch Vertauschung von $-z$ mit z über in:

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-az} \operatorname{arc\,tg} e^{z} \cos bz\, dz = \int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cotg} e^{z}\right) e^{-az} \cos bz\, dz$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{a^2+b^2} - \int_0^\infty e^{-az} \operatorname{arc\,tg} e^{-z} \cos bz\, dz.$$

Der Werth von J_1 in Gleichung $F)$ gesetzt, gibt:

$$\int_0^\infty (e^{az} - e^{-az}) \operatorname{arc\,tg} e^{-z} \cos bz\, dz = \qquad 24)$$

$$\frac{\pi}{a^2+b^2}\left[\frac{a \cos\frac{a\pi}{2}\left(e^{\frac{b\pi}{2}} + e^{-\frac{b\pi}{2}}\right) + b\left(e^{\frac{b\pi}{2}} - e^{-\frac{b\pi}{2}}\right)\sin\frac{a\pi}{2}}{e^{b\pi} + e^{-b\pi} + 2\cos a\pi} - \frac{a}{2}\right].$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man:

$$\int_0^\infty (e^{az} + e^{-az}) \operatorname{arc\,tg} e^{-z} \sin bz\, dz = \qquad 25)$$

$$\frac{\pi}{a^2+b^2} \cdot \left[\frac{b}{2} - \frac{b \cos\frac{a\pi}{2}\left(e^{\frac{b\pi}{2}} + e^{-\frac{b\pi}{2}}\right) - a \sin\frac{a\pi}{2}\left(e^{\frac{b\pi}{2}} - e^{-\frac{b\pi}{2}}\right)}{e^{b\pi} + e^{-b\pi} + 2\cos a\pi}\right].$$

Selbstverständlich muss hier $1 > a > 0$ vorausgesetzt werden.

Ersetzt man in 24) und 25) a durch $\frac{1}{2}$ und b durch $\frac{b}{2}$, und führt alsdann in den zwei letzten Integralen eine neue Variable mittelst der Gleichung $z = 2y$ ein, so stimmen die Resultate mit denen aus Gleichung 2) und 6) vollkommen überein.

Ähnlich gelangt man durch Substitution von $p = 1$ und gleichzeitiger Einführung der neuen Variablen $\lg x = -z$ in die Formeln 20) und 21) zu Resultaten, von denen wieder die Integrale in 10) und 12) als specielle Fälle betrachtet werden können. Durch diese Umformung erhalten die beiden Integrale die Gestalt:

$$P = \int_0^\infty \frac{\lg(1+x)}{x^{a+1}} \cdot \cos(b \lg x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{az} \lg(1+e^{-z}) \cos bz\, dz\,,$$

$$Q = \int_0^\infty \frac{\lg(1+x)}{x^{a+1}} \cdot \sin(b \lg x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{az} \lg(1+e^{-z}) \sin bz\, dz\,;$$

P lässt sich in die zwei Integrale zerlegen:

$$P = \int_{-\infty}^{0} e^{az} \lg(1+e^{-z}) \cos bz\, dz + \int_0^\infty e^{az} \lg(1+e^{-z}) \cos bz\, dz = J_1 + J_2\,.$$

Wird in $J_1 \ldots z$ durch $-z$ ersetzt, so folgt:

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-az} \lg(1+e^{z}) \cos bz\, dz = \int_0^\infty e^{-az} \lg \frac{1+e^{-z}}{e^{-z}} \cdot \cos bz\, dz$$

$$= \int_0^\infty e^{-az} \lg(1+e^{-z}) \cos bz\, dz + \int_0^\infty z e^{-az} \cos bz\, dz\,.$$

Der Werth von J_1 berücksichtigt gibt für P:

$$P = \int_0^\infty (e^{az} + e^{-az}) \lg(1+e^{-z}) \cos bz\, dz + \int_0^\infty z e^{-az} \cos bz\, dz$$

Das letzte Integral ist bekanntermassen durch den Ausdruck gegeben:

$$\int_0^\infty z e^{-az} \cos bz\, dz = \frac{a^2 - b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

und man hat schliesslich, wenn der Werth für P aus Gleichung 20) eingesetzt wird:

$$\int_0^\infty (e^{az} + e^{-az}) \lg(1+e^{-z}) \cos bz\, dz = \tag{26}$$

$$\frac{1}{a^2+b^2} \left[2\pi \cdot \frac{a \sin a\pi\, (e^{b\pi} + e^{-b\pi}) - b \cos a\pi\, (e^{b\pi} - e^{-b\pi})}{e^{2b\pi} + e^{-2b\pi} - 2\cos 2a\pi} + \frac{b^2 - a^2}{a^2+b^2} \right].$$

Dessgleichen folgt noch für Q der Ausdruck:

$$Q = \int_0^\infty (e^{-az} - e^{az}) \lg(1+e^{-z}) \sin bz\, dz + \int_0^\infty z e^{-az} \sin bz\, dz\,,$$

und daraus ergibt sich:

$$\int_0^\infty (e^{-az}-e^{az})\lg(1+e^{-z})\sin bz\,dz = \tag{27}$$

$$\frac{2}{a^2+b^2}\left[\pi\cdot\frac{b\sin a\pi(e^{b\pi}+e^{-b\pi})+a\cos a\pi(e^{b\pi}-e^{-b\pi})}{e^{2b\pi}+e^{-2b\pi}-2\cos 2a\pi}-\frac{ab}{a^2+b^2}\right].$$

In 26) und 27) muss a positiv und kleiner als 1 vorausgesetzt werden.

Das nachstehende Integral:

$$J=\int_0^\infty e^{-bx}\lg(1+e^{-x-ai})\,dx,$$

aus welchem eine Reihe anderer Integrale abgeleitet werden kann, lässt sich leicht ermitteln, wenn der Logarithmus unter dem Integralzeichen durch eine unendliche Reihe ausgedrückt wird. Es ist dann:

$$\lg(1+e^{-x+\alpha i})=e^{-x+\alpha i}-\frac{1}{2}e^{-2x+2\alpha i}+$$

$$\frac{1}{3}e^{-3x+3\alpha i}-\frac{1}{4}e^{-4x+4\alpha i}+\frac{1}{5}e^{-5x+5\alpha i}+\ldots$$

Werden hier die Exponentialfunctionen mit imaginären Exponenten durch trigonometrische Functionen ersetzt, so geht J über in:

$$J=\int_0^\infty e^{-bx}\left(e^{-x}\cos\alpha-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 2\alpha+\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 3\alpha-\ldots\right)dx+$$

$$i\int_0^\infty e^{-bx}\left(e^{-x}\sin\alpha-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 3\alpha-\ldots\right)dx$$

$$=\left[\frac{\cos\alpha}{1+b}-\frac{\cos 2\alpha}{2(2+b)}+\frac{\cos 3\alpha}{3(3+b)}-\frac{\cos 4\alpha}{4(4+b)}+\ldots\right]+$$

$$i\left[\frac{\sin\alpha}{1+b}-\frac{\sin 2\alpha}{2(2+b)}+\frac{\sin 3\alpha}{3(3+b)}-\frac{\sin 4\alpha}{4(4+b)}+\ldots\right].$$

Der Logarithmus unter dem Integralzeichen lässt sich bekanntlich folgendermassen umgestalten:

$$\lg(1+e^{-x+\alpha i})=\lg(1+e^{-x}\cos\alpha+ie^{-x}\sin\alpha)=$$

$$\frac{1}{2}\lg(1+2e^{-x}\cos\alpha+e^{-2x})+i\operatorname{arc tg}\frac{e^{-x}\sin\alpha}{1+e^{-x}\cos\alpha}.$$

Daraus ergeben sich alsogleich die Werthe der zwei Integrale:

$$\int_0^\infty e^{-bx}\lg(1+2e^{-x}\cos\alpha+e^{-2x})\,dx= \tag{1}$$

$$2\left[\frac{\cos\alpha}{1+b}-\frac{\cos 2\alpha}{2(2+b)}+\frac{\cos 3\alpha}{3(3+b)}-\frac{\cos 4\alpha}{4(4+b)}+\ldots\right]$$

$$\int_0^\infty e^{-bx}\operatorname{arc tg}\frac{\sin\alpha}{e^x+\cos x}\,dx=\frac{\sin\alpha}{1+b}-\frac{\sin 2\alpha}{2(2+b)}+\frac{\sin 3\alpha}{3(3+b)}-\frac{\sin 4\alpha}{4(4+b)}+\ldots \tag{2}$$

In 1) und 2) muss: $-1<b<+\infty$ angenommen werden.

Wird in diesen zwei Gleichungen $-b$ mit b vertauscht, so hat man für alle zwischen $+1$ und $-\infty$ liegenden b:

$$\int_0^\infty e^{bx} \lg(1+2e^{-x}\cos\alpha+e^{-2x})\,dx = \tag{3}$$

$$2\left[\frac{\cos\alpha}{1-b}-\frac{\cos 2\alpha}{2(2-b)}+\frac{\cos 3\alpha}{3(3-b)}-\frac{\cos 4\alpha}{4(4-b)}+\ldots\right];$$

$$\int_0^\infty e^{bx} \operatorname{arctg} \frac{\sin\alpha}{e^x+\cos\alpha}\,dx = \frac{\sin\alpha}{1-b}-\frac{\sin 2\alpha}{2(2-b)}+\frac{\sin 3\alpha}{3(3-b)}-\frac{\sin 4\alpha}{4(4-b)}+\ldots \tag{4}$$

Die Gleichungen 1) und 3) durch Addition vereinigt geben für alle zwischen $+1$ und -1 liegenden b:

$$\int_0^\infty (e^{bx}+e^{-bx}) \lg(1+2e^{-x}\cos\alpha+e^{-2x})\,dx =$$

$$4\left[\frac{\cos\alpha}{1^2-b^2}-\frac{\cos 2\alpha}{2^2-b^2}+\frac{\cos 3\alpha}{3^2-b^2}-\frac{\cos 4\alpha}{4^2-b^2}+\ldots\right].$$

Nun ist aber für $-\pi \leqq \alpha \leqq +\pi$ bekanntermassen die Reihe in der eckigen Klammer durch den Ausdruck bestimmt:

$$\frac{\cos\alpha}{1^2-b^2}-\frac{\cos 2\alpha}{2^2-b^2}+\frac{\cos 3\alpha}{3^2-b^2}-\frac{\cos 4\alpha}{4^2-b^2}+\ldots- = \frac{1}{2b}\left(\frac{\pi\cos b\alpha}{\sin b\pi}-\frac{1}{b}\right);$$

daher folgt:

$$\int_0^\infty (e^{bx}+e^{-bx}) \lg(1+2e^{-x}\cos\alpha+e^{-2x})\,dx = \frac{2}{b}\left(\frac{\pi\cos b\alpha}{\sin b\pi}-\frac{1}{b}\right). \tag{5}$$

Für $\alpha \ldots . (\pi-\alpha)$ gesetzt gibt:

$$\int_0^\infty (e^{bx}+e^{-bx}) \lg(1-2e^{-x}\cos\alpha+e^{-2x})\,dx = \frac{2}{b}\left[\frac{\pi\cos b(\pi-\alpha)}{\sin b\pi}-\frac{1}{b}\right]. \tag{6}$$

Durch Subtraction der letzten zwei Gleichungen ergibt sich:

$$\int_0^\infty (e^{bx}+e^{-bx}) \lg \frac{e^x+e^{-x}+2\cos\alpha}{e^x+e^{-x}-2\cos\alpha}\,dx = \frac{2\pi \sin b\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{b\cos\frac{b\pi}{2}} \tag{7}$$

und für $\alpha = 0$ gibt die Formel 7):

$$\int_0^\infty (e^{bx}+e^{-bx}) \lg \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx = \frac{\pi}{b}\operatorname{tg}\frac{b\pi}{2} \tag{8}$$

Verbindet man Gleichung 1) und 3) durch Subtraction, so ist für

$$-1 < b < +1$$

$$\int_0^\infty (e^{bx}-e^{-bx}) \lg(1+2e^{-x}\cos\alpha+e^{-2x})\,dx = \tag{9}$$

$$-4b\left[\frac{\cos\alpha}{1(1^2-b^2)}-\frac{\cos 2\alpha}{2(2^2-b^2)}+\frac{\cos 3\alpha}{3(3^2-b^2)}-\frac{\cos 4\alpha}{4(4^2-b^2)}+\ldots\right].$$

Werden die Gleichungen 2) und 4) durch Subtraction vereinigt, so hat man:

$$\int_0^\infty (e^{bx}-e^{-bx}) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin\alpha}{e^x+\cos\alpha}\, dx =$$

$$2b\left[\frac{\sin\alpha}{1^2-b^2}-\frac{\sin 2\alpha}{2(2^2-b^2)}+\frac{\sin 3\alpha}{3(3^2-b^2)}-\frac{\sin 4\alpha}{4(4^2-b^2)}+\ldots\right].$$

Um den Werth der eingeklammerten Reihe zu finden, gehe man von der bekannten Gleichung aus:

$$\frac{\cos\alpha}{1^2-b^2}-\frac{\cos 2\alpha}{2^2-b^2}+\frac{\cos 3\alpha}{3^2-b^2}-\frac{\cos 4\alpha}{4^2-b^2}+\ldots=\frac{1}{2b}\left(\frac{\pi\cos b\alpha}{\sin b\pi}-\frac{1}{b}\right)$$

und integrire von 0 bis α nach α, so folgt alsogleich für die zu berechnende Reihe der Ausdruck:

$$\frac{\sin\alpha}{1(1^2-b^2)}-\frac{\sin 2\alpha}{2(2^2-b^2)}+\frac{\sin 3\alpha}{3(3^2-b^2)}-\frac{\sin 4\alpha}{4(4^2-b^2)}+\ldots=\frac{1}{2b^2}\left(\frac{\pi\sin b\alpha}{\sin b\pi}-\alpha\right)$$

und das vorliegende Integral hat den einfachen Werth:

$$\int_0^\infty (e^{bx}-e^{-bx}) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin\alpha}{e^x+\cos\alpha}\, dx = \frac{1}{b}\left(\frac{\pi\sin b\alpha}{\sin b\pi}-\alpha\right);\quad -\pi \lesseqgtr \alpha \lesseqgtr +\pi. \qquad 10)$$

Die letzte Gleichung geht durch Vertauschung von $(\pi-\alpha)$ mit α über in:

$$\int_0^\infty (e^{bx}-e^{-bx}) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin\alpha}{e^x-\cos\alpha}\, dx = \frac{1}{b}\left[\frac{\pi\sin b(\pi-\alpha)}{\sin b\pi}-\pi+\alpha\right]; \qquad 11)$$

10) und 11) durch Addition verbunden geben:

$$\int_0^\infty (e^{bx}-e^{-bx}) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\sin\alpha}{e^x-e^{-x}}\, dx = \frac{\pi}{b}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)b}{\cos\frac{b\pi}{2}}-1\right]. \qquad 12)$$

Für $\alpha=\frac{\pi}{2}$ und für $\alpha=\frac{\pi}{6}$ folgen beziehungsweise aus den Gleichungen 10) und 12) die einfachen Resultate:

$$\int_0^\infty (e^{bx}-e^{-bx}) \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{-x}\, dx = \frac{\pi}{2b}\left(\sec\frac{b\pi}{2}-1\right) \qquad 13)$$

und:

$$\int_0^\infty (e^{bx}-e^{-bx}) \operatorname{arc} \operatorname{cotg} (e^x-e^{-x})\, dx = \frac{\pi}{b}\left[\frac{\cos\frac{b\pi}{3}}{\cos\frac{b\pi}{2}}-1\right]. \qquad 14)$$

Durch Addition der Gleichungen 2) und 4) erscheint das nachfolgende Integral durch eine unendliche Reihe ausgedrückt, welche sich ebensowenig wie die Reihen in 1), 2), 3), 4), und 9) durch einen geschlossenen Ausdruck darstellen lassen. Es ist also:

$$\int_0^\infty (e^{bx}+e^{-bx}) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin\alpha}{e^x+\cos\alpha}\, dx = \qquad 15)$$

$$2\left[\frac{\sin\alpha}{1^2-b}-\frac{\sin 2\alpha}{2^2-b^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2-b^2}-\frac{\sin 4\alpha}{4^2-b^2}+\ldots\right].$$

Substituirt man in den Gleichungen 5), 9), 10) und 15) bi statt b, so erhält man die Werthe der folgenden Integrale, die den Ausgangspunkt für einige specielle Resultate bilden. Es ist also:

$$\int_0^\infty \cos bx \lg(1+2e^{-x}\cos\alpha+e^{-2x})dx = \frac{1}{b^2}-\frac{\pi(e^{b\alpha}+e^{-b\alpha})}{b(e^{b\pi}-e^{-b\pi})}, \tag{16}$$

$$\int_0^\infty \sin bx \lg(1+2e^{-x}\cos\alpha+e^{-2x})\,dx = \tag{17}$$

$$2b\left[\frac{\cos\alpha}{1^2+b^2}-\frac{\cos 2\alpha}{2(2^2+b^2)}+\frac{\cos 3\alpha}{3(3^3+b^2)}-\ldots\right],$$

$$\int_0^\infty \sin bx \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\alpha}{e^x+\cos\alpha}\,dx = \frac{1}{2b}\left[\alpha-\pi\cdot\frac{e^{b\alpha}-e^{-b\alpha}}{e^{b\pi}-e^{-b\pi}}\right], \tag{18}$$

$$\int_0^\infty \cos bx \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\alpha}{e^x+\cos\alpha}\,dx = \tag{19}$$

$$\frac{\sin\alpha}{1^2+b^2}-\frac{\sin 2\alpha}{2^2+b^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2+b^2}-\frac{\sin 4\alpha}{4^2+b^2}+\ldots$$

In 16) und 18) muss α der Relation genügen:

$$-\pi \leqq x \leqq +\pi$$

Die vier letzten Resultate können im Übrigen auch direct aus den zwei vorliegenden Integralen:

$$\int_0^\infty \cos bx \lg(1+e^{-x+\alpha i})\,dx$$

und:

$$\int_0^\infty \sin bx \lg(1+e^{-x+\alpha i})\,dx$$

hergeleitet werden, sobald der Logarithmus durch eine unendliche Reihe ersetzt wird.

Die Gleichung 16) nimmt durch Substitution von $\pi-\alpha$ statt α die Form an:

$$\int_0^\infty \cos bx \lg(1-2e^{-x}\cos\alpha+e^{-2x})\,dx = \frac{1}{b^2}-\frac{\pi}{b}\cdot\frac{e^{b(\pi-\alpha)}+e^{-b(\pi-\alpha)}}{e^{b\pi}-e^{-b\pi}} \tag{20}$$

Für $\alpha=0$ und $\alpha=\pi$ erhält man aus der letzten Gleichung, nachdem man zuvor die neue Veränderliche $x=\lambda y$ einführt, und schliesslich statt $b\lambda\ldots c$ setzt, die speciellen Resultate:

$$\int_0^\infty \cos cx \lg(1+e^{-\lambda x})\,dx = \frac{1}{c}\left(\frac{\lambda}{2c}-\frac{\pi}{e^{\frac{c\pi}{\lambda}}-e^{-\frac{c\pi}{\lambda}}}\right);\quad \lambda>0 \tag{21}$$

$$\int_0^\infty \cos cx \lg(1-e^{-\lambda x})\,dx = \frac{1}{2c}\left(\frac{\lambda}{c}-\pi\cdot\frac{e^{\frac{2c\pi}{\lambda}}+1}{e^{\frac{2c\pi}{\lambda}}-1}\right);\quad \lambda>0. \tag{22}$$

Durch Subtraction der zwei letzten Gleichungen folgt:

$$\int_0^\infty \cos cx \lg \frac{e^{\lambda x}+1}{e^{\lambda x}-1}\,dx = \frac{\pi}{2c}\cdot\frac{e^{\frac{c\pi}{\lambda}}-1}{e^{\frac{c\pi}{\lambda}}+1}. \qquad 23)$$

Lässt man in den Gleichungen 16), 20) und 21), 22) b und c in Null übergehen, so folgen noch die einfachen in einer anderen Form bekannten Formeln:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \lg(1+2e^{-x}\cos\alpha+e^{-2x})\,dx = \frac{\pi^2-3\alpha^2}{6} && 24)\\ &\int_0^\infty \lg(1-2e^{-x}\cos\alpha+e^{-2x})\,dx = -\left(\frac{\pi^2}{3}-\pi\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right) && 25)\end{aligned}\right\}-\pi\leqq\alpha\leqq\pi,$$

$$\int_0^\infty \lg(1+e^{-\lambda x})\,dx = \frac{\pi^2}{12\lambda}, \qquad 26)$$

$$\int_0^\infty \lg(1-e^{-\lambda x})\,dx = -\frac{\pi^2}{6\lambda}. \qquad 27)$$

Verbindet man 21) und 26) sowohl durch Addition als auch durch Subtraction, so erhält man, nachdem zuvor c durch $2c$ ersetzt worden:

$$\int_0^\infty \cos^2 cx \lg(1+e^{-\lambda x})\,dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{4c^2}+\frac{\pi}{6\lambda}-\frac{1}{c\left(e^{\frac{2c\pi}{\lambda}}-e^{-\frac{2c\pi}{\lambda}}\right)}\right] \qquad 28)$$

und:

$$\int_0^\infty \sin^2 cx \lg(1+e^{-x\lambda})\,dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{6\lambda}-\frac{1}{4c^2}+\frac{1}{c\left(e^{\frac{2c\pi}{\lambda}}-e^{-\frac{2c\pi}{\lambda}}\right)}\right]. \qquad 29)$$

Durch Vertauschung von $\pi-\alpha$ mit α geht die Gleichung 18) über in:

$$\int_0^\infty \sin bx \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\alpha}{e^x-\cos\alpha}\,dx = \frac{1}{2b}\left[\pi-\alpha-\pi\cdot\frac{e^{b(\pi-\alpha)}-e^{-b(\pi-\alpha)}}{e^{b\pi}-e^{-b\pi}}\right]. \qquad 30)$$

Wird das letzte Resultat mit Gleichung 18) durch Addition verbunden, so ist:

$$\int_0^\infty \sin bx \operatorname{arc\,tg}\frac{2\sin\alpha}{e^x-e^{-x}}\,dx = \frac{\pi}{2b}\left[1-\frac{e^{b\alpha}+e^{b(\pi-\alpha)}}{e^{b\pi}+1}\right]; \qquad 31)$$

für $\alpha=\frac{\pi}{6}$ gibt Gleichung 31):

$$\int_0^\infty \sin bx \operatorname{arc\,cotg}(e^x-e^{-x})\,dx = \frac{\pi}{2b}\left[1-\frac{e^{\frac{b\pi}{3}}+e^{-\frac{b\pi}{3}}}{e^{\frac{b\pi}{2}}+e^{-\frac{b\pi}{2}}}\right]. \qquad 32)$$

Setzt man in Gleichung 30) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so gibt diese Substitution die einfache Formel:

$$\int_0^\infty \sin bx \operatorname{arc\,tg} e^{-x}\, dx = \frac{\pi}{4b}\left[1 - \frac{2}{e^{\frac{b\pi}{2}} + e^{-\frac{b\pi}{2}}}\right]. \tag{33}$$

Für $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ folgen aus den Gleichungen 17) und 19) die Resultate:

$$\int_0^\infty \sin bx \lg(1+e^{-x})\, dx = b\left[\frac{1}{1^2+b^2} - \frac{1}{2\,(2^2+b^2)} + \frac{1}{3\,(3^2+b^2)} + \ldots\right] \tag{34}$$

$$\int_0^\infty \sin bx \lg(1-e^{-x})\, dx = -b\left[\frac{1}{1^2+b^2} + \frac{1}{2\,(2^2+b^2)} + \frac{1}{3\,(3^2+b^2)} + \ldots\right], \tag{35}$$

$$\int_0^\infty \cos bx \operatorname{arc\,tg} e^{-x}\, dx = \frac{1}{1^2+b^2} - \frac{1}{3^2+b^2} + \frac{1}{5^2+b^2} - \frac{1}{7^2+b^2} + \ldots. \tag{36}$$