ENTWICKELUNGEN

ZUM

LAGRANGE'SCHEN REVERSIONSTHEOREM,

UND

ANWENDUNG DERSELBEN AUF DIE LÖSUNG DER KEPPLER'SCHEN GLEICHUNG.

VON

Prof. Dr. E. WEISS,
WIRKLICHEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 20. NOVEMBER 1884.

§. 1.

Die Lagrange'sche Reversionsformel lässt in der Gestalt, in welcher man sie gewöhnlich aufschreibt, in theoretischer Beziehung an Eleganz, Einfachheit und Übersichtlichkeit wohl nichts zu wünschen übrig; wenn man aber in speciellen Fällen daran geht, eine grössere Anzahl von Reihengliedern nach dieser Formel wirklich nicht blos symbolisch zu entwickeln, gestaltet sich die Arbeit in der Regel so weitläufig und zeitraubend, dass sie thatsächlich so gut wie unausführbar wird. Ich erinnere in dieser Beziehung nur an die Keppler'sche Gleichung, eine der denkbar einfachsten Anwendungen des Lagrange'schen Theoremes. Schon bei der Lösung der Gleichung:

$$E = M + \varepsilon \sin E,$$

nämlich der Entwickelung der excentrischen Anomalie in Function der mittleren greift man, um bei der Ausführung der erforderlichen mehrfachen Differentiationen von Potenzgrössen nicht in allzu grosse Weitläufigkeiten zu verfallen, zu dem Kunstgriffe, zuerst die Potenzen des Sinus in Sinusse des vielfachen Bogens zu verwandeln, und erst dann die Differentiationen vorzunehmen, wird aber dadurch auf Reihen geführt, die zu einer effectiven Berechnung der excentrischen Anomalie ganz und gar unbrauchbar sind. Allein nicht blos die excentrische Anomalie, sondern auch jede beliebige Function derselben, wie:

$$\log\left(\frac{r}{a}\right) = \log(1 - \varepsilon \cos E)$$

$$v = \operatorname{arctg} \frac{\sin E . \sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos E - \varepsilon} = 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}\right)$$

lässt sich mit Hilfe des Lagrange'schen Lehrsatzes theoretisch mit gleicher Leichtigkeit als Function der mittleren Anomalie darstellen: praktisch indess ist ein solcher Versuch bisher noch nie unternommen

worden, und zwar einfach desshalb, weil es zu ganz unübersehbaren Rechnungen führen würde. Man wählte daher lieber den Umweg, diese Functionen zunächst nach anderen Methoden in Reihen nach den Cosinussen und Sinussen der excentrischen Anomalie zu entwickeln, dann diese Cosinusse und Sinusse mit Hilfe unseres Lehrsatzes in Functionen der mittleren Anomalie umzusetzen, und nun erst die so erhaltenen Werthe in die früheren Reihen zu substituiren.

Es ist mir nun gelungen, durch eine zweckmässige Gruppirung der Ausdrücke, welche bei einer wirklichen Ausführung der im Lagrange'schen Lehrsatze blos angezeigten Differentiationen auftreten, nicht nur die erforderlichen Operationen in expliciter Form übersichtlich darzustellen, sondern auch die ganze Gliedermasse in ein Conglomerat von Potenzreihen zu zerlegen, und den nach der Summirung dieser resultirenden Ausdruck, wieder so umzustellen, dass er abermals in eine Summe von Potenzreihen übergeht, u. s. w. Die auf diese Art gewonnenen Reihen besitzen daher die Eigenthümlichkeit, dass jedes weitere Glied, welches man berücksichtiget, auch noch einen Theil der Glieder höherer Ordnung mitnimmt, wodurch der Bau des Restes dieser letzteren sich successive immer mehr vereinfacht, und die Convergenz der Entwickelung nicht selten eine sehr namhafte Steigerung erfährt. Durch diesen Umstand unterscheiden sich auch die hier entwickelten Reihen sehr vortheilhaft von den meisten Formeln, die man zur näherungsweisen Berechnung von Functionen anwendet, bei denen in der Regel blos eine bestimmte Anzahl von Anfangsgliedern genau wiedergegeben wird, während der Gang der Glieder höherer Ordnung ein ganz verschiedener ist. Diese Entwickelungen sind daher auch sehr geeignet, einfache und interessante Näherungsformeln zur Berechnung der hierhergehörigen Functionen zu liefern

Um an einem speciellen Beispiele die Brauchbarkeit meiner Formeln nachzuweisen, habe ich sie auf die schon so vielfach bearbeitete Keppler'sche Gleichung und die damit im Zusammenhange stehenden Probleme angewendet, und glaube damit gezeigt zu haben, dass durch die vorliegenden Entwickelungen die Eingangs hervorgehobenen Schwierigkeiten, welche sich bisher einer allgemeineren Anwendung des Lagrange'schen Theorems entgegenstellten, — in vielen Fällen wenigstens — wesentlich vermindert worden sind. Ferner habe ich damit, wie mir scheint, die erste praktisch brauchbare directe Lösung der Aufgabe geliefert, in einer mässig excentrischen elliptischen Bahn, aus der mittleren Anomalie nicht nur die excentrische, sondern auch mit Umgehung derselben unmittelbar die wahre Anomalie und den Radius vector oder dessen Logarithmus zu finden.

Zum Schlusse habe ich noch ein paar einfache Näherungswerthe für die eben genannten Functionen angeführt, die aus meinen Formeln fliessen.

§. 2.

Der Lagrange'sche Reversionssatz lautet bekanntlich:

$$\varphi(z)=\varphi(x)+\frac{\alpha}{1}\cdot\varphi'(x)f(x)+\frac{\alpha^2}{1.2}\cdot\frac{d[\varphi'(x)f(x)^2]}{dx}+\ldots\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{d^n[\varphi'(x)f(x)^{n+1}]}{dx^n}+\ldots \qquad 1)$$

wenn z bestimmt ist durch die Gleichung:

$$z=x+\alpha f(z) \qquad 2)$$

Wir werden im Folgenden statt $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)\ldots$; $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)\ldots$ zur Vereinfachung blos schreiben: φ, φ', $\varphi''\ldots$; f, f', $f''\ldots$; ebenso werden wir uns für $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ der allgemein üblichen Bezeichnung $D^n f$ bedienen. Dies vorausgesetzt, ist die Form des allgemeinen Gliedes, abgesehen von dem Factor $\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}$:

$$D^n(\varphi' f^{n+1})=\varphi' D^n f^{n+1}+\binom{n}{1}\varphi'' D^{n-1} f^{n+1}+\binom{n}{2}\varphi''' D^{n-2} f^{n+1}+\ldots \qquad 3)$$

Führt man hier die angezeigten Differentiationen, welche allgemein die Form $D^r f^p$ haben, successive aus, so erhält man nach und nach:

$$
\begin{aligned}
D^r f^p &= p\, D^{r-1}[f^{p-1} f'] \\
&= p\, D^{r-2}\left[(p-1) f^{p-2} f'^2 + \binom{2}{2} F_2^{(p-1)}\right] \\
&= p\, D^{r-3}\left[(p-1)(p-2) f^{p-3} f'^3 + \binom{3}{2}(p-1) F_2^{(p-2)} f' + \binom{3}{3} F_3^{(p-1)}\right] \\
&= p\, D^{r-4}\left[(p-1)(p-2)(p-3) f^{p-4} f'^4 + \binom{4}{2}(p-1)(p-2) F_2^{(p-3)} f'^2 + \binom{4}{3}(p-1) F_3^{(p-2)} f' + F_4^{(p-1)}\right] \\
&= p\, D^{r-5}\Big[(p-1)(p-2)(p-3)(p-4) f^{p-5} f'^5 + \binom{5}{2}(p-1)(p-2)(p-3) F_2^{(p-4)} f'^3 + \\
&\qquad + \binom{5}{3}(p-1)(p-2) F_3^{(p-3)} f'^2 + \binom{5}{4}(p-1) F_4^{(p-2)} f' + F_5^{(p-1)}\Big] \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

also allgemein:

$$
\begin{aligned}
D^r f^p = p\, D^{r-q}\Big[&(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1) f^{p-q} f'^q + \binom{q}{2}(p-1)\ldots(p-q+2) F_2^{(p-q+1)} f'^{q-2} + \\
&+ \binom{q}{3}(p-1)\ldots(p-q+3) F_3^{(p-q+2)} f'^{q-3} + \binom{q}{4}(p-1)\ldots(p-q+4) F_4^{(p-q+3)} f'^{q-4} + \ldots \\
&+ \ldots \binom{q}{m}(p-1)\ldots(p-q+m) F_m^{(p-q+m-1)} f'^{q-m} + \ldots\Big] \qquad 4)
\end{aligned}
$$

wenn man abkürzungsweise setzt:

$$
\left.
\begin{aligned}
F_2^{(k)} &= f^k f'' \\
F_3^{(k)} &= f^k f''' \\
F_4^{(k)} &= f^k f^{IV} + 3k f^{k-1} f''^2 \\
F_5^{(k)} &= f^k f^{V} + 10k f^{k-1} f'' f''' \\
F_6^{(k)} &= f^k f^{VI} + 5k f^{k-1}(3 f'' f^{IV} + 2 f'''^2) + 15k(k-1) f^{k-2} f''^3 \\
F_7^{(k)} &= f^k f^{VII} + 7k f^{k-1}(3 f'' f^{V} + 5 f''' f^{IV}) + 105k(k-1) f^{k-2} f''^2 f'' \\
F_8^{(k)} &= f^k f^{VIII} + 7k f^{k-1}(4 f'' f^{VI} + 8 f''' f^{V} + 5 f^{IV\,2}) + 70k(k-1) f^{k-2}(3 f''^2 f^{IV} + 4 f'' f'''^2) + \\
&\qquad + 105k(k-1)(k-2) f^{k-3} f''^4 \\
F_9^{(k)} &= f^k f^{IX} + 6k f^{k-1}(6 f'' f^{VII} + 14 f''' f^{VI} + 21 f^{IV} f^{V}) + 14k(k-1) f^{k-2}(27 f''^2 f^{V} + 90 f'' f''' f^{IV} + 20 f'''^3) + \\
&\qquad + 1260k(k-1)(k-2) f^{k-3} f''^3 f''' \\
F_{10}^{(k)} &= f^k f^{X} + 3k f^{k-1}(15 f'' f^{VIII} + 40 f''' f^{VII} + 70 f^{IV} f^{VI} + 42 f^{V\,2}) + 105k(k-1) f^{k-2}(6 f''^2 f^{VI} + 24 f'' f''' f^{V} + \\
&\qquad + 15 f'' f^{IV\,2} + 20 f'''^2 f^{IV}) + 3150k(k-1)(k-2) f^{k-3}(f''^3 f^{IV} + 2 f''^2 f'''^2) + 945k(k-1)(k-2)(k-3) f^{k-4} f''^5 \\
F_{11}^{(k)} &= f^k f^{XI} + 11k f^{k-1}(5 f'' f^{IX} + 15 f''' f^{VIII} + 30 f^{IV} f^{VII} + 42 f^{V} f^{VI}) + 165k(k-1) f^{k-2}(6 f''^2 f^{VII} + 28 f'' f''' f^{VI} + \\
&\qquad + 42 f'' f^{IV} f^{V} + 28 f'''^2 f^{V} + 35 f''' f^{IV\,2}) + 770k(k-1)(k-2) f^{k-3}(9 f''^3 f^{V} + 45 f''^2 f''' f^{IV} + 20 f'' f'''^3) + \\
&\qquad + 17325k(k-1)(k-2)(k-3) f^{k-4} f''^4 f'''
\end{aligned}
\right\} \quad \mathrm{I}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Zwischen diesen F-Functionen besteht folgende, einfache Relation, nach welcher man sie successive sehr bequem berechnen kann.

$$
\left.
\begin{aligned}
F_4^{(k)} &= D F_3^{(k)} - k f' F_3^{(k-1)} + 3k f'' F_2^{(k-1)} \\
F_5^{(k)} &= D F_4^{(k)} - k f' F_4^{(k-1)} + 4k f'' F_3^{(k-1)} \\
F_6^{(k)} &= D F_5^{(k)} - k f' F_5^{(k-1)} + 5k f'' F_4^{(k-1)} \\
&\;\vdots \qquad\qquad \vdots \\
F_m^{(k)} &= D F_{m-1}^{(k)} - k f' F_{m-1}^{(k-1)} + (m-1) k f'' F_{m-2}^{(k-1)}
\end{aligned}
\right\} \quad \mathrm{I}^*
$$

Lässt man in der Gleichung 4) $q = r$ und $p = n+1$ sein, so wird:

$$
\begin{aligned}
D^r f^{n+1} = (n+1) n (n-1)\ldots(n-r+2) f^{n-r+1} f'^r &+ \binom{r}{2}(n+1)\ldots(n-r+3) F_2^{(n-r+2)} f'^{r-2} + \\
&+ \binom{r}{3}(n+1)\ldots(n-r+4) F_3^{(n-r+3)} f'^{r-3} + \ldots \binom{r}{m}(n+1)\ldots(n-r+m+1) F_m^{(n-r+m)} f'^{r-m} + \ldots
\end{aligned}
$$

Substituirt man hierin der Reihe nach $r = n, n-1, n-2 \ldots$, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
D^n f^{n+1} &= (n+1)\ldots 2 f f'^n + \binom{n}{2}(n+1)\ldots 3 f'^{n-2} F_2^{(2)} + \binom{n}{3}(n+1)\ldots 4 f'^{n-3} F_3^{(3)} + \\
&\qquad + \binom{n}{4}(n+1)\ldots 5 f'^{n-4} F_4^{(4)} + \ldots \\
D^{n-1} f^{n+1} &= (n+1)\ldots 3 f^2 f'^{n-1} + \binom{n-1}{2}(n+1)\ldots 4 f'^{n-3} F_2^{(3)} + \binom{n-1}{3}(n+1)\ldots 5 f'^{n-4} F_3^{(4)} + \\
&\qquad + \binom{n-1}{4}(n+1)\ldots 6 f'^{n-5} F_4^{(5)} + \ldots \\
D^{n-2} f^{n+1} &= (n+1)\ldots 4 f^3 f'^{n-2} + \binom{n-2}{2}(n+1)\ldots 5 f'^{n-4} F_2^{(4)} + \binom{n-2}{3}(n+1)\ldots 6 f'^{n-5} F_3^{(5)} + \\
&\qquad + \binom{n-2}{4}(n+1)\ldots 7 f'^{n-6} F_4^{(6)} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

also endlich mit Rücksicht auf 3) nach einigen leicht ersichtlichen Transformationen und Umstellungen:

$$\begin{aligned}
\frac{D^n(\varphi' f^{n+1})}{(n+1)!} &= \varphi' f f'^n + \frac{1}{2!}\binom{n}{1} f^2 f'^{n-1}\varphi'' + \binom{n}{2} f'^{n-2}\left[\frac{1}{3!} f^3 \varphi''' + \frac{1}{2!} F_2^{(2)}\varphi'\right] + \binom{n}{3} f'^{n-3}\left[\frac{1}{4!} f^4 \varphi^{IV} + \frac{1}{3!}(3F_2^{(3)}\varphi'' + F_3^{(3)}\varphi'\right] \\
&+ \binom{n}{4} f'^{n-4}\left[\frac{1}{5!} f^5 \varphi^{V} + \frac{1}{4!}(6F_2^{(4)}\varphi''' + 4F_3^{(4)}\varphi'' + F_4^{(4)}\varphi')\right] + \\
&+ \binom{n}{5} f'^{n-5}\left[\frac{1}{6!} f^6 \varphi^{VI} + \frac{1}{5!}(10F_2^{(5)}\varphi^{IV} + 10F_3^{(5)}\varphi''' + 5F_4^{(5)}\varphi'' + F_5^{(5)}\varphi'\right] + \\
&+ \binom{n}{6} f'^{n-6}\left[\frac{1}{7!} f^7 \varphi^{VII} + \frac{1}{6!}(15F_2^{(6)}\varphi^{V} + 20F_3^{(6)}\varphi^{IV} + 15F_4^{(6)}\varphi''' + 6F_5^{(6)}\varphi'' + F_6^{(6)}\varphi'\right] + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Führt man nun weiter die Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= f\varphi' \\
X_2 &= \frac{1}{2!} f^2 \varphi'' \\
X_3 &= \frac{1}{3!} f^3 \varphi''' + \frac{1}{2!} F_2^{(2)}\varphi' \\
X_4 &= \frac{1}{4!} f^4 \varphi^{IV} + \frac{1}{3!}(3F_2^{(3)}\varphi'' + F_3^{(3)}\varphi') \\
X_5 &= \frac{1}{5!} f^5 \varphi^{V} + \frac{1}{4!}(6F_2^{(4)}\varphi''' + 4F_3^{(4)}\varphi'' + F_4^{(4)}\varphi') \\
X_6 &= \frac{1}{6!} f^6 \varphi^{VI} + \frac{1}{5!}(10F_2^{(5)}\varphi^{IV} + 10F_3^{(5)}\varphi''' + 5F_4^{(5)}\varphi'' + F_5^{(5)}\varphi') \\
X_7 &= \frac{1}{7!} f^7 \varphi^{VII} + \frac{1}{6!}(15F_2^{(6)}\varphi^{V} + 20F_3^{(6)}\varphi^{IV} + 15F_4^{(6)}\varphi''' + 6F_5^{(6)}\varphi'' + F_6^{(6)}\varphi') \\
X_8 &= \frac{1}{8!} f^8 \varphi^{VIII} + \frac{1}{7!}(21F_2^{(7)}\varphi^{VI} + 35F_3^{(7)}\varphi^{V} + 35F_4^{(7)}\varphi^{IV} + 21F_5^{(7)}\varphi''' + 7F_6^{(7)}\varphi'' + F_7^{(7)}\varphi') \\
X_9 &= \frac{1}{9!} f^9 \varphi^{IX} + \frac{1}{8!}(28F_2^{(8)}\varphi^{VII} + 56F_3^{(8)}\varphi^{VI} + 70F_4^{(8)}\varphi^{V} + 56F_5^{(8)}\varphi^{IV} + 28F_6^{(8)}\varphi''' + 8F_7^{(8)}\varphi'' + F_8^{(8)}\varphi') \\
X_{10} &= \frac{1}{10!} f^{10} \varphi^{X} + \frac{1}{9!}(36F_2^{(9)}\varphi^{VIII} + 84F_3^{(9)}\varphi^{VII} + 126F_4^{(9)}\varphi^{VI} + 126F_5^{(9)}\varphi^{V} + 84F_6^{(9)}\varphi^{IV} + 36F_7^{(9)}\varphi''' + 9F_8^{(9)}\varphi'' + \\
&\qquad + F_9^{(9)}\varphi' \\
X_{11} &= \frac{1}{11!} f^{11} \varphi^{XI} + \frac{1}{10!}(45F_2^{(10)}\varphi^{IX} + 120F_3^{(10)}\varphi^{VIII} + 210F_4^{(10)}\varphi^{VII} + 252F_5^{(10)}\varphi^{VI} + 210F_6^{(10)}\varphi^{V} + 120F_7^{(10)}\varphi^{IV} + \\
&\qquad + 45F_8^{(10)}\varphi''' + 10F_9^{(10)}\varphi'' + F_{10}^{(10)}\varphi') \\
X_{12} &= \frac{1}{12!} f'^2 \varphi^{XII} + \frac{1}{11!}(55F_2^{(11)}\varphi^{X} + 165F_3^{(11)}\varphi^{IX} + 330F_4^{(11)}\varphi^{VIII} + 462F_5^{(11)}\varphi^{VII} + 462F_6^{(11)}\varphi^{VI} + 330F_7^{(11)}\varphi^{V} + \\
&\qquad + 165F_8^{(11)}\varphi^{IV} + 55F_9^{(11)}\varphi''' + 11F_{10}^{(11)}\varphi'' + F_{11}^{(11)}\varphi') \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad \text{II}$$

so wird:

$$\frac{D^n(\varphi' f^{n+1})}{(n+1)!} = X_1 \cdot f'^n + \binom{n}{1} X_2 f'^{n-1} + \binom{n}{2} X_3 f'^{n-2} + \binom{n}{3} X_4 f'^{n-3} + \binom{n}{4} X_5 f'^{n-4} + \ldots \qquad 6)$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit α^{n+1} und substituirt man dies dann in die Gleichung 1), so erhält das Resultat die Form:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(z) = \varphi &+ \alpha X_1 (1 + \alpha f' + \alpha^2 f'^2 + \alpha^3 f'^3 + \alpha^4 f'^4 + \alpha^5 f'^5 + \alpha^6 f'^6 + \alpha^7 f'^7 + \ldots) + \\
&+ \alpha^2 X_2 (1 + 2\alpha f' + 3\alpha^2 f'^2 + 4\alpha^3 f'^3 + 5\alpha^4 f'^4 + 6\alpha^5 f'^5 + 7\alpha^6 f'^6 + \ldots) + \\
&+ \alpha^3 X_3 (1 + 3\alpha f' + 6\alpha^2 f'^2 + 10\alpha^3 f'^3 + 15\alpha^4 f'^4 + 21\alpha^5 f'^5 + \ldots) + \\
&+ \alpha^4 X_4 (1 + 4\alpha f' + 10\alpha^2 f'^2 + 20\alpha^3 f'^3 + 35\alpha^4 f'^4 + \ldots) + \\
&+ \alpha^5 X_5 (1 + 5\alpha f' + 15\alpha^2 f'^2 + 35\alpha^3 f'^3 + \ldots) + \\
&+ \alpha^6 X_6 (1 + 6\alpha f' + 21\alpha^2 f'^2 + \ldots) + \\
&+ \alpha^7 X_7 (1 + 7\alpha f' + \ldots) + ,
\end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

d. h.

$$\varphi(z) = \varphi + X_1 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right) + X_2 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^2 + X_3 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^3 + \ldots X_n \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^n + \ldots \qquad 8)$$

Sucht man blos z, d. h. ist $\varphi(z) = z$, also $\varphi = x$, $\varphi' = 1$, $\varphi'' = \varphi''' = \varphi^{iv} = \ldots = 0$, so schrumpfen die X auf ihre letzten Glieder zusammen, und man hat einfach:

$$z = x + f\left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right) + \frac{1}{2!} F_2^{(2)} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^3 + \frac{1}{3!} F_3^{(3)} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^4 + \ldots \frac{1}{n!} F_n^{(n)} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^{n+1} + \ldots \qquad 9)$$

oder explicit geschrieben:

$$\left.\begin{aligned}
z = x &+ f\left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right) + \frac{1}{2!} f^2 f'' \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^3 + \frac{1}{3!} f^3 f''' \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^4 + \frac{1}{4!} f^3 (f f^{iv} + 12 f''^2) \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f_1}\right)^5 + \\
&+ \frac{1}{5!} f^3 (f f^{v} + 50 f'' f''') \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^6 + \frac{1}{6!} f^4 (f^2 f^{vi} + 30 f [3 f'' f^{iv} + 2 f''^2] + 450 f'^3) \left(\frac{\alpha}{1-\alpha f'}\right)^7 + \ldots
\end{aligned}\right\} \qquad 9^*)$$

Die Anwendung der hier entwickelten Formeln bietet besonders dann grosse Vortheile dar, wenn man mehrere Functionen von z zu suchen hat, weil dafür ein Theil der Arbeit, die Berechnung der F-Functionen, (Gleichungssystem I) nur einmal durchgeführt zu werden braucht.

Die X lassen sich wohl ohne Schwierigkeit aus dem Systeme der Gleichungen I und II zusammensetzen: für die X mit höherem Index ist es indess immerhin eine ziemlich zeitraubende Arbeit. Sie mögen daher hier, in expliciter Form gegeben, um so mehr einen Platz finden, als wir sie in dieser für die folgenden Untersuchungen benöthigen.

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{1!} f \varphi'. \\
X_2 &= \frac{1}{2!} f^2 \varphi''. \\
X_3 &= \frac{1}{3!} f^3 \varphi''' + \frac{1}{2!} f^2 f'' \varphi'. \\
X_4 &= \frac{1}{4!} f^4 \varphi^{iv} + \frac{1}{2!\,1!} f^3 f'' \varphi'' + \frac{1}{3!} f^3 f''' \varphi'. \\
X_5 &= \frac{1}{5!} f^5 \varphi^{v} + \frac{1}{2!\,2!} f^5 f'' \varphi''' + \frac{1}{3!\,1!} f^4 f''' \varphi'' + \frac{1}{4!} f^3 (f f^{iv} + 12 f''^2) \varphi'.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{III}$$

$$X_6 = \frac{1}{6!} f^6 \varphi^{vi} + \frac{1}{2!\,3!} f^5 f'' \varphi^{iv} + \frac{1}{3!\,2!} f^5 f''' \varphi''' + \frac{1}{4!\,1!} f^4 (f f^{iv} + 15 f''^2) \varphi'' + \frac{1}{5!} f^4 (f f^{v} + 50 f'' f''') \varphi'.$$

$$X_7 = \frac{1}{7!} f^7 \varphi^{vii} + \frac{1}{2!\,4!} f^6 f'' \varphi^{v} + \frac{1}{3!\,3!} f^6 f''' \varphi^{iv} + \frac{1}{4!\,2!} f^5 (f f^{vi} + 18 f''^2) \varphi''' + \frac{1}{5!\,1!} f^5 (f f^{v} + 60 f'' f''') \varphi'' +$$
$$+ \frac{1}{6!} f^4 [f^2 f^{vi} + 30 f (3 f'' f^{iv} + 2 f'''^2) + 450 f''^3] \varphi'.$$

$$X_8 = \frac{1}{8!} f^8 \varphi^{viii} + \frac{1}{2!\,5!} f^7 f'' \varphi^{vi} + \frac{1}{3!\,4!} f^7 f''' \varphi^{v} + \frac{1}{4!\,3!} f^6 (f f^{iv} + 21 f''^2) \varphi^{iv} + \frac{1}{5!\,2!} f^6 (f f^{iii} + 70 f'' f''') \varphi''' +$$
$$+ \frac{1}{6!\,1!} f^5 [f^2 f^{vi} + 35 f (3 f'' f^{iv} + 2 f'''^2) + 630 f''^3] \varphi'' + \frac{1}{7!} f^5 [f^2 f^{vii} + 49 f (3 f'' f^{v} + 5 f''' f^{iv}) +$$
$$+ 4410 f''^2 f''''] \varphi'.$$

$$X_9 = \frac{1}{9!} f^9 \varphi^{ix} + \frac{1}{2!\,6!} f^8 f'' \varphi^{vii} + \frac{1}{3!\,5!} f^8 f''' \varphi^{vi} + \frac{1}{4!\,4!} f^7 (f f^{iv} + 24 f''^2) \varphi^{v} + \frac{1}{5!\,3!} f^7 (f f^{v} + 80 f'' f''') \varphi^{iv} +$$
$$+ \frac{1}{6!\,2!} f^6 [f^2 f^{vi} + 40 f (3 f'' f^{iv} + 2 f'''^2) + 840 f''^3] \varphi''' + \frac{1}{7!\,1!} f^6 [f^2 f^{viii} + 56 f (3 f'' f^{v} + 5 f''' f^{iv}) +$$
$$+ 5880 f''^2 f'''] \varphi'' + \frac{1}{8!} f^5 [f^3 f^{viii} + 56 f^2 (4 f'' f^{vi} + 8 f''' f^{v} + 5 f^{iv\,2}) + 3920 f (3 f''^2 f^{iv} + 4 f'' f'''^2) +$$
$$+ 35280 f''^4] \varphi'.$$

$$X_{10} = \frac{1}{10!} f^{10} \varphi^{x} + \frac{1}{2!\,7!} f^9 f'' \varphi^{viii} + \frac{1}{3!\,6!} f^9 f''' \varphi^{vii} + \frac{1}{4!\,5!} f^8 (f f^{iv} + 27 f''^2) \varphi^{vi} + \frac{1}{5!\,4!} f^8 (f f^{v} +$$
$$+ 90 f'' f''') \varphi^{v} + \frac{1}{6!\,3!} f^7 [f^2 f^{vi} + 45 f (3 f'' f^{iv} + 2 f'''^3) + 1080 f''^3] \varphi^{iv} + \frac{1}{7!\,2!} f^7 [f^2 f^{vii} + 63 f (3 f'' f^{v} +$$
$$+ 5 f''' f^{iv}) + 7560 f''^2 f'''] \varphi''' + \frac{1}{8!\,1!} f^6 [f^3 f^{viii} + 63 f^2 (4 f'' f^{vi} + 8 f''' f^{v} + 5 f^{iv\,2}) + 5040 f (3 f''^2 f^{iv} +$$
$$+ 4 f'' f'''^2) + 52920 f''^4] \varphi'' + \frac{1}{9!} f^6 [f^3 f^{ix} + 54 f^2 (6 f'' f^{vii} + 14 f''' f^{vi} + 21 f^{iv} f^{v}) + 1008 f (27 f''^2 f^{v} +$$
$$90 f'' f''' f^{iv} + 20 f'''^3) + 635040 f''^3 f'''] \varphi'.$$

$$X_{11} = \frac{1}{11!} f^{11} \varphi^{xi} + \frac{1}{2!\,8!} f^{10} f'' \varphi^{ix} + \frac{1}{3!\,7!} f^{10} f''' \varphi^{viii} + \frac{1}{4!\,6!} f^9 (f f^{iv} + 30 f''^2) \varphi^{vii} + \frac{1}{5!\,5!} f^9 (f f^{v} +$$
$$+ 100 f'' f''') \varphi^{vi} + \frac{1}{6!\,4!} f^8 [f^2 f^{vii} + 50 f (3 f'' f^{iv} + 2 f'''^2) + 1350 f''^3] \varphi^{v} + \frac{1}{7!\,3!} f^8 [f^2 f^{viii} + 70 f (3 f'' f^{v} +$$
$$+ 5 f''' f^{iv}) + 9450 f''^2 f'''] \varphi^{iv} + \frac{1}{8!\,2!} f^7 [f^3 f^{viii} + 70 f^2 (4 f'' f^{vi} + 8 f''' f^{v} + 5 f^{iv\,2}) + 6300 f (3 f''^2 f^{iv} +$$
$$+ 4 f'' f'''^2) + 75600 f''^4] \varphi''' + \frac{1}{9!\,1!} f^7 [f^3 f^{ix} + 60 f^2 (6 f'' f^{vii} + 14 f''' f^{vi} + 21 f^{iv} f^{v}) + 1260 f (27 f''^2 f^{v} +$$
$$+ 90 f'' f''' f^{iv} + 20 f'''^3) + 907200 f''^3 f'''] \varphi'' + \frac{1}{10!} f^6 [f^3 f^{x} + 30 f^3 (15 f'' f^{viii} + 40 f''' f^{vii} + 70 f^{iv} f^{vi} +$$
$$+ 42 f^{v\,2}) + 9450 f (6 f''^2 f^{vi} + 24 f'' f''' f^{v} + 15 f'' f^{iv\,2} + 20 f'''^2 f^{iv}) + 2268000 f (f''^3 f^{iv} + 2 f''^2 f'''^2)$$
$$+ 4762800 f''^5] \varphi'.$$

$$X_{12} = \frac{1}{12!} f^{12} \varphi^{xii} + \frac{1}{2!\,9!} f^{11} f'' \varphi^{x} + \frac{1}{3!\,8!} f^{11} f''' \varphi^{ix} + \frac{1}{4!\,7!} f^{10} (f f^{iv} + 33 f''^2) \varphi^{viii} + \frac{1}{5!\,6!} f^{10} (f f^{v} +$$
$$+ 10 f'' f''') \varphi^{vii} + \frac{1}{6!\,5!} f^9 [f^2 f^{viii} + 55 f (3 f'' f^{iv} + 2 f'''^2) + 1650 f''^3] \varphi^{vi} + \frac{1}{7!\,4!} f^9 [f^2 f^{ix} + 77 f (3 f'' f^{v} +$$
$$+ 5 f''' f^{iv}) + 11550 f''^2 f'''] \varphi^{v} + \frac{1}{8!\,3!} f^8 [f^3 f^{viii} + 77 f^2 (4 f'' f^{vi} + 8 f''' f^{v} + 5 f^{iv\,2}) + 7700 f (3 f''^2 f^{iv} +$$

III

$$
\left.\begin{aligned}
&+4f''f'''^2)+103950f'^4]\varphi''+\frac{1}{9!\,2!}f^8[f^3f^{IX}+66f^2(6f''f^{VII}+14f'''f^{VI}+21f^{IV}f^{V})+1540f(27f'''^2f^{V}+\\
&+90f''f'''f^{IV}+20f'''^3)+1247400f''^3f'''\,]\varphi'''+\frac{1}{10!\,1!}f^7[f^4f^{X}+33f^3(15f''f^{VIII}+40f'''f^{VII}+70f^{IV}f^{VI}+\\
&+42f^{V\,2})+11550f^2(6f'''^2f^{VI}+24f''f'''f^{V}+15f''f^{IV\,2}+20f'''^2f^{IV})+3118500f(f''^3f^{IV}+2f'''^2f'''^2)+\\
&+7484400f''^5]\varphi''+\frac{1}{11!}f^7[f^4f^{XI}+121f^3(5f''f^{IX}+15f'''f^{VIII}+30f^{IV}f^{VII}+42f^{V}f^{VI})+\\
&+18150f^2(6f'''^2f^{VII}+28f''f'''f^{VI}+42f''f^{IV}f^{V}+28f'''^2f^{V}+35f'''f^{IV\,2})+762300f(9f''^3f^{V}+\\
&\qquad+45f''^2f'''f^{IV}+20f''f'''^3)+137214000f''^4f'''\,]\varphi'.
\end{aligned}\right\}\ \text{III}
$$

§. 3.

Die im vorigen Paragraph ausgeführten Summationen kann man leicht noch weiter treiben. Führt man nämlich Kürze halber die Bezeichnungen ein:

$$\zeta=\frac{\alpha}{1-\alpha f'}$$

$$\xi=\zeta f=\frac{\alpha f}{1-\alpha f'}$$

so gewinnt die Gleichung 8) die Gestalt:

$$\varphi(z)=\varphi+X_1\zeta+X_2\zeta^2+X_3\zeta^3+\ldots+X_n\zeta^n+\ \ldots \qquad 8^*)$$

Substituirt man darin die eben gegebenen Werthe der X, und setzt man für den Augenblick noch:

$$y=ff''\zeta^2=\frac{f''}{f}\xi^2,$$

so kann man die Glieder auch folgendermassen gruppiren:

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi(z)=\varphi&+\varphi'\xi\left[1+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2+\frac{5}{8}y^3+\frac{7}{8}y^4+\frac{21}{16}y^5+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{2!}\varphi''\xi^2\left[1+y+\frac{5}{4}y^2+\frac{7}{4}y^3+\frac{21}{8}y^4+\frac{33}{8}y^5+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{3!}\varphi'''\xi^3\left[1+\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}y^2+\frac{7}{2}y^3+\frac{45}{8}y^4+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{4!}\varphi^{IV}\xi^4\left[1+2y+\frac{7}{2}y^2+6y^3+\frac{165}{16}y^4+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{5!}\varphi^{V}\xi^5\left[1+\frac{5}{2}y+5y^2+\frac{75}{8}y^3+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{6!}\varphi^{VI}\xi^6\left[1+3y+\frac{27}{4}y^2+\frac{55}{4}y^3+\ldots\right]+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{1}{3!}f'''\varphi'\xi^3\zeta\left[1+\frac{5}{2}y+\frac{21}{4}y^2+\frac{21}{2}y^3+\frac{165}{8}y^4+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{4!}(f^{IV}\varphi'+4f'''\varphi'')\xi^4\zeta[1+3y+7y^2+15y^3+\ldots]+\\
&+\frac{1}{5!}(f^{V}\varphi'+5f^{IV}\varphi''+10f'''\varphi''')\xi^5\zeta\left[1+\frac{7}{2}y+9y^2+\frac{165}{8}y^3+\ldots\right]+
\end{aligned}\right\}\ 10)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+\frac{1}{6!}(f^{vi}\varphi'+6f^{v}\varphi''+15f^{iv}\varphi'''+20f'''\varphi^{iv})\xi^6\zeta\left[1+4y+\frac{45}{4}y^2+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{7!}(f^{vii}\varphi'+7f^{vi}\varphi''+21f^{v}\varphi'''+35f^{iv}\varphi^{iv}+35f'''\varphi^{v})\xi^7\zeta\left[1+\frac{9}{2}y+\frac{55}{4}y^2+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{8!}(f^{viii}\varphi'+8f^{vii}\varphi''+28f^{vi}\varphi'''+56f^{v}\varphi^{iv}+70f^{iv}\varphi^{v}+56f'''\varphi^{vi})\xi^8\zeta[1+5y+\ldots]+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{1}{72}f'''^2\varphi'\xi^5\zeta^2[6+28y+90y^2+\ldots]+\\
&+\frac{1}{144}(f'''f^{iv}\varphi'+2f'''^2\varphi'')\xi^6\zeta^2\left[7+36y+\frac{495}{4}y^2+\ldots\right]+\\
&+\frac{1}{5760}(\{8f'''f^{v}+5f^{iv2}\}\varphi'+40f'''f^{iv}\varphi''+40f'''^2\varphi''')\xi^7\zeta^2(8+45y+\ldots]+\\
&+\frac{1}{17280}(\{6f'''\varphi^{vi}+9f^{iv}f^{v}\}\varphi'+\{24f'''f^{v}+15f^{iv2})\varphi''+60f'''f^{iv}\varphi'''+40f'''^2\varphi^{iv})\xi^8\zeta^2[9+55y+\ldots]+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{1}{1296}f'''^3\varphi'\xi^7\zeta^3[72+495y+\ldots]+\\
&+\frac{1}{1728}(f'''^2f^{iv}\varphi'+\frac{4}{3}f'''^3\varphi'')\xi^8\zeta^3[90+\ldots]+\\
&+\frac{1}{34560}(\{4f'''^2f^{v}+5f'''f^{iv2}\}\varphi'+20f'''^2f^{iv}\varphi''+\frac{40}{3}f'''^3\varphi''')\xi^9\zeta^3[110+\ldots]+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\}\quad 10)
$$

Die in eckige Klammern eingeschlossenen Reihen sind, wie leicht ersichtlich, wieder Potenzreihen, und können demgemäss summirt werden. So ist:

$$1+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2+\frac{5}{8}y^3+\frac{7}{8}y^4+\frac{21}{16}y^5+\ldots=\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}=\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}$$

$$1+y+\frac{5}{4}y^2+\frac{7}{4}y^3+\frac{21}{8}y^4+\frac{33}{8}y^5+\ldots=\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^2=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^2$$

$$1+\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}y^2+\frac{7}{2}y^3+\frac{45}{8}y^4+\ldots=\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^3=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^3$$

$$1+2y+\frac{7}{2}y^2+6y^3+\frac{165}{16}y^4+\ldots=\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^4=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^4$$

$$1+\frac{5}{2}y+5y^2+\frac{75}{8}y^3+\ldots=\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^5=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^5$$

$$1+3y+\frac{27}{4}y^2+\frac{55}{4}y^3+\ldots=\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^6=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^6$$

. . . . . .

$$1+\frac{5}{2}y+\frac{21}{4}y^2+\frac{21}{2}y^3+\frac{165}{8}y^4+\ldots=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^3=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^3$$

$$1+3y+7y^2+15y^3+\ldots=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^4=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^4$$

$$1+\frac{7}{2}y+9y^2+\frac{165}{8}y^3+\ldots=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^5=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^5$$

$$1+4y+\frac{45}{4}y^2+\ldots=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^6=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^6$$

$$1+\frac{9}{2}y+\frac{55}{4}y^2+\ldots=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^7=\frac{1}{\sqrt{1-2y}}\cdot\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2y}}\right)^7$$

. . . . . .

$$6+28y+90y^2+\ldots=\frac{1+5\sqrt{1-2y}}{(1-2y)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^5$$

$$7+36y+\frac{495}{4}y^2+\ldots=\frac{1+6\sqrt{1-2y}}{(1-2y)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^6$$

$$8+45y+\ldots=\frac{1+7\sqrt{1-2y}}{(1-2y)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^7$$

$$9+55y+\ldots=\frac{1+8\sqrt{1-2y}}{(1-2y)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^8$$

. . . . . .

$$72+495y+\ldots=\frac{3+21\sqrt{1-2y}+48(1-2y)}{(1-2y)^{\frac{5}{2}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^7$$

$$90+\ldots=\frac{3+24\sqrt{1-2y}+63(1-2y)}{(1-2y)^{\frac{5}{2}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^8$$

$$110+\ldots=\frac{3+27\sqrt{1-2y}+80(1-2y)}{(1-2y)^{\frac{5}{2}}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-2y}}{y}\right)^9$$

. . . . . .

Unter Einführung der Bezeichnungen:

$$\left.\begin{aligned}
p &= \frac{2\xi}{1+\sqrt{1-2y}}=\frac{2\xi}{1+\sqrt{1-2ff''y^2}}=\frac{1-\sqrt{1-2ff''y^2}}{f''\zeta}\\
Q_n &= \frac{\zeta}{\sqrt{1-2y}}\,p^{n-1}\\
R_n &= \frac{\zeta^2}{(1-2y)^{\frac{3}{2}}}\left[(n-2)\sqrt{1-2y}+1\right].p^{n-2}\\
S_n &= \frac{\zeta^3}{(1-2y)^{\frac{5}{2}}}\left[(n-2)(n-4)(1-2y)+3(n-3)\sqrt{1-2y}+3\right]p^{n-3}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(y=ff''\zeta^2)
\end{aligned}\right\}\quad \text{IV}$$

geht daher die Gleichung 10) über in:

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi(z) = {} & \Big(\varphi + \frac{p}{1}\varphi' + \frac{p^2}{1.2}\varphi'' + \frac{p^3}{3!}\varphi''' + \frac{p^4}{4!}\varphi^{iv} + \frac{p^5}{5!}\varphi^{v} + \ldots\ldots\ldots\ldots\Big) + \\
& + \Big[\frac{1}{3!}Q_4 f'''\varphi' + \frac{1}{4!}Q_5(f^{iv}\varphi' + 4f'''\varphi'') + \frac{1}{5!}Q_6(f^{v}\varphi' + 5f^{iv}\varphi'' + 10f'''\varphi''') + \\
& \quad + \frac{1}{6!}Q_7(f^{vi}\varphi' + 6f^{v}\varphi'' + 15f^{iv}\varphi''' + 20f'''\varphi^{iv}) + \\
& \quad + \frac{1}{7!}Q_8(f^{vii}\varphi' + 7f^{vi}\varphi'' + 21f^{v}\varphi''' + 35f^{iv}\varphi^{iv} + 35f'''\varphi^{v}) + \ldots\Big] \\
& + \frac{1}{12}\Big[\frac{1}{3!}R_7 f'''^2\varphi' + \frac{4}{4!}R_8\Big(\frac{1}{2}f'''f^{iv}\varphi' + f'''^2\varphi''\Big) + \frac{10}{5!}R_9\Big(\frac{1}{40}\{8f'''f^{v} + f^{iv\,2}\}\varphi' + f'''f^{iv}\varphi'' + f'''^2\varphi'''\Big) + \\
& \quad + \frac{20}{6!}R_{10}\Big(\frac{1}{20}\{2f'''f^{vi} + 3f^{iv}f^{v}\}\varphi' + \frac{3}{40}\{8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2}\}\varphi'' + \frac{3}{2}f'''f^{iv}\varphi''' + f'''^2\varphi^{iv}\Big) + \\
& \quad + \frac{35}{7!}R_{11}\Big(\frac{1}{350}\{20f'''f^{vii} + 35f^{iv}f^{vi} + 21f^{v\,2}\}\varphi' + \frac{1}{5}(2f'''f^{vi} + 3f^{iv}f^{v})\varphi'' + \\
& \qquad\qquad + \frac{3}{20}(8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2})\varphi''' + 2f'''f^{iv}\varphi^{iv} + f'''^2\varphi^{v}\Big) + \\
& \quad + \frac{56}{8!}R_{12}\Big(\frac{1}{140}\{5f'''f^{viii} + 10f^{iv}f^{vii} + 14f^{v}f^{vi}\}\varphi' + \frac{1}{70}\{20f'''f^{vii} + 35f^{iv}f^{vi} + 21f^{v\,2}\}\varphi'' + \\
& \qquad\qquad + \frac{1}{2}\{2f'''f^{vi} + 3f^{iv}f^{v}\}\varphi''' + \frac{1}{4}\{8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2}\}\varphi^{iv} + \frac{5}{2}f'''f^{iv}\varphi^{v} + f'''^2\varphi^{vi}\Big) + \ldots\Big] \\
& + \frac{1}{216}\Big[\frac{1}{3!}S_{10}f'''^3\varphi' + \frac{1}{4!}S_{11}(3f'''^2f^{iv}\varphi' + 4f'''^3\varphi'') + \\
& \qquad\qquad \frac{1}{5!}S_{12}\Big(\frac{3}{4}\{4f'''^2f^{v} + 5f'''f^{iv\,2}\}\varphi' + 15f'''^2f^{iv}\varphi'' + 10f'''^3\varphi'''\Big) + \ldots\Big] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\} 10^*)
$$

Ehe wir weiter gehen, wollen wir vorher noch erwähnen, dass die P, Q, R, S, ... genannten Ausdrücke in folgendem Zusammenhange stehen:

$$
\left.
\begin{aligned}
Q_n &= \frac{\zeta^2}{n-1} \cdot \frac{d(p^{n-1})}{d\zeta} \\
R_n &= \zeta^2 \cdot \frac{d(Q_{n-1})}{d\zeta} \\
S_n &= \zeta^2 \cdot \frac{d(R_{n-1})}{d\zeta} \\
& \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\} \text{IV}^*
$$

Die Gleichung 10*) lässt sich noch wesentlich vereinfachen, worauf wir später zurückkommen werden. Vorläufig wollen wir sie nur noch auf eine für die Berechnung von $\varphi(z)$ bequemere Form, die der Gleichung 8*), zurückführen, d. h. sie nach steigenden Potenzen von p entwickeln und nach denselben ordnen. Dazu erinnern wir uns der Bedeutung von p:

$$
p = \frac{2f\zeta}{1 + \sqrt{1 - 2ff''\zeta^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 2ff''\zeta^2}}{f''\zeta}.
$$

Daraus folgt:

$$
\left.
\begin{aligned}
\zeta &= \frac{2p}{2f + f''p^2} \\
\sqrt{1 - 2ff''\zeta^2} &= 1 - f''p\zeta = \frac{2f - f''p^2}{2f + f''p^2} \\
\frac{\zeta}{\sqrt{1 - 2ff''\zeta^2}} &= \frac{2p}{2f - f''p^2}
\end{aligned}
\right\} \text{V}
$$

und damit ergibt sich vermöge der Gleichungen IV:

$$Q_n = \frac{p^n}{f}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{f''}{f}\right)p^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{f''}{f}\right)^2p^4+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{f''}{f}\right)^3p^6+\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{f''}{f}\right)^4p^8+\ldots\right]$$

$$R_n = \frac{p^n}{f^2}\left[(n-1)+n\left(\frac{f''}{f}\right)p^2+\frac{3}{4}(n+1)\left(\frac{f''}{f}\right)^2p^4+\ldots\right]$$

$$S_n = \frac{p^n}{f^3}\left[(n-1)(n-2)+\frac{3}{2}n(n-1)\left(\frac{f''}{f}\right)p^2+\ldots\right]$$

. . . . . .

Mit Hilfe dieser Formeln lässt sich nun die Gleichung 10*) leicht in die gewünschte Form:

$$\varphi(z) = \varphi + P_1p + P_2p^2 + P_3p^3 + P_4p^4 + \ldots \qquad 11)$$

umgestalten. Bei Ausführung der einfachen Rechnung ergeben sich für die P die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{1!}\varphi' \\
P_2 &= \frac{1}{2!}\varphi'' \\
P_3 &= \frac{1}{3!}\varphi''' \\
P_4 &= \frac{1}{4!}\varphi^{iv} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{f'''}{f}\varphi' \\
P_5 &= \frac{1}{5!}\varphi^{v} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{f}[f^{iv}\varphi' + 4f'''\varphi''] \\
P_6 &= \frac{1}{6!}\varphi^{vi} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{f^2}[(ff^{v} + 10f''f''')\varphi' + 5ff^{iv}\varphi'' + 10ff'''\varphi'''] \\
P_7 &= \frac{1}{7!}\varphi^{vii} + \frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{f^2}[(ff^{vi} + 15f''f^{iv} + 60f'''^2)\varphi' + 6(ff^{v} + 10f''f''')\varphi'' + 15ff^{iv}\varphi''' + 20ff'''\varphi^{iv}] \\
P_8 &= \frac{1}{8!}\varphi^{viii} + \frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{f^3}[(f^2f^{vii} + f\{21f''f^{v} + 245f'''f^{iv}\} + 210f''^2f''')\varphi' + 7f(ff^{vi} + 15f''f^{iv} + 70f'''^2)\varphi'' + \\
&\qquad + 21f(ff^{v} + 10f''f''')\varphi''' + 35f^2f^{iv}\varphi^{iv} + 35f^2f'''\varphi^{v}] \\
P_9 &= \frac{1}{9!}\varphi^{ix} + \frac{1}{8!}\cdot\frac{1}{f^3}[(f^2f^{viii} + f\{28f''f^{vi} + 448f'''f^{v} + 280f^{iv2}\} + 140\{3f''^2f^{iv} + 28f''f'''^2\})\varphi' + \\
&\qquad + 8(f^2f^{vii} + f\{21f''f^{v} + 280f'''f^{iv}\} + 1680f''^2f''')\varphi'' + 28f(ff^{vi} + 15f''f^{iv} + 80f'''^2)\varphi''' + \\
&\qquad + 56f(ff^{v} + 10f''f''')\varphi^{iv} + 70f^2f^{iv}\varphi^{v} + 56f^2f'''\varphi^{vi}] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \text{VI}$$

Die Gleichung 11) hat wieder ganz die Form von Gleichung 8*), indem sie sich von derselben nur dadurch unterscheidet, dass dort nach steigenden Potenzen von ζ, hier nach solchen von p entwickelt ist. Eine Vergleichung der Coëfficienten, hier der P, dort der X (§. 2, Gleichungssystem III) ist aber sehr lehrreich: sie zeigt, dass durch die neuerliche Summirung nicht nur der Bau der P wesentlich einfacher geworden ist, sondern dass sich auch durch das weitere Herausziehen eines Theiles der Glieder höherer Ordnung aus den späteren Gliedern, die in den Entwickelungen auftretenden numerischen Coëfficienten ganz bedeutend verkleinert haben. Die Gleichung (11) wäre daher der früheren (8*) in jeder Beziehung vorzuziehen, wenn nur die Grösse p nicht viel complicirter gebaut wäre als ζ. Indess kann man auch diesen Übelstand zum grossen Theile wenigstens durch folgende Betrachtung heben.

Führt man die Hilfsgrösse η ein, mittelst der Gleichung:

$$\eta^2 = \frac{\xi^2}{1-\left(\frac{f''}{f}\right)\xi^2}$$

$$\xi^2 = \frac{\eta^2}{1+\frac{f''}{f}\eta^2}$$

so wird:

$$p = \frac{2\xi}{1+\sqrt{1-2\frac{f''}{f}\xi^2}} = \frac{2\eta}{\sqrt{1+\frac{f''}{f}\eta^2}+\sqrt{1-\frac{f'}{f}\eta^2}} = \frac{f}{f'\eta}\left[\sqrt{1+\frac{f''}{f}\eta^2}-\sqrt{1-\frac{f''}{f}\eta^2}\right]$$

$$p = \eta\left(1+\frac{1}{8}\cdot\frac{f''^2}{f^2}\eta^4+\frac{7}{128}\frac{f''^4}{f^4}\eta^8+\frac{33}{1024}\cdot\frac{f''^6}{f^6}\eta^{12}+\ldots\right)$$

Betrachtet man also in Gleichung 2) die Grösse α als eine kleine Grösse, sagen wir als eine Grösse erster Ordnung, so sind ξ und η ebenfalls Grössen erster Ordnung und es unterscheidet sich p von η nur um eine Grösse fünfter Ordnung. Man kann daher in der Gleichung 11), ohne den Charakter derselben wesentlich zu ändern, p durch die einfachere Function η ersetzen: Der ganze Unterschied beschränkt sich darauf, dass die P von P_5 an, etwas complicirter ausfallen.

Die Berechnung von

$$\eta = \frac{\xi}{\sqrt{1-\frac{f''}{f}\xi^2}} = \frac{\alpha f}{\sqrt{(1-\alpha f')^2-ff''\alpha^2}}$$

lässt sich durch Einführung von trigonometrischen Functionen auf eine sehr einfache Weise bewerkstelligen. Sind nämlich:

a) f und f'' gleich bezeichnet, so wird für:

$$\sin\theta = \xi\sqrt{\frac{f''}{f}} = \frac{\alpha\sqrt{ff''}}{1-\alpha f'}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{f}{f''}}\,.\,\mathrm{tg}\,\theta.$$

b) f und f'' ungleich bezeichnet, so erhält man für:

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \xi\sqrt{-\frac{f''}{f}} = \frac{\alpha\sqrt{-ff''}}{1-\alpha f'}$$

$$\eta = \sqrt{-\frac{f}{f''}}\,.\,\sin\vartheta.$$

Bereits die zwischen den Grössen $p, Q, R, S, \ldots$ stattfindende Relation, noch deutlicher aber der Bau der obigen P-Functionen (System VI) lässt erkennen, dass man auf dem hier eingeschlagenen Wege mit der Summation schrittweise immer weiter fortfahren könnte. Ich bin auch überzeugt, dass es immerhin ein gewisses theoretisches Interesse hätte, diesen Gedanken weiter zu verfolgen. Doch erlaubt es mir meine sehr knapp zugemessene Zeit nicht, derartige zeitraubende Untersuchungen auszuführen; ich muss mich daher damit begnügen, dieselben hier angeregt zu haben, und deren Ausführung Mathematikern von Fach überlassen.

§. 4.

In der Gleichung 8*) (§. 2) können übrigens die Glieder nach dem Einsetzen der Werthe der X noch auf mannigfache andere Weise derart zusammengefasst werden, dass sich damit erhebliche Vereinfachungen

erzielen lassen. In theoretischer Beziehung eine der interessantesten und wichtigsten Gruppirungen dürfte aber die folgende sein:

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi(z) = {} & \left(\varphi + \frac{\xi}{1!}\varphi' + \frac{\xi^2}{2!}\varphi'' + \frac{\xi^3}{3!}\varphi''' + \ldots\right) + \\
& + \xi^2\zeta\left(\frac{1}{2!}f'' + \frac{\xi}{3!}f''' + \frac{\xi^2}{4!}f^{\text{iv}} + \frac{\xi^3}{5!}f^{\text{v}} + \ldots\right)\left(\varphi' + \frac{\xi}{1!}\varphi'' + \frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \frac{\xi^3}{1!}\varphi^{\text{iv}} + \ldots\right) + \\
& + \frac{3}{4!}f''^2\xi^3\zeta^2\left(4\varphi' + 5\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 6\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + 7\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{\text{iv}} + \ldots\right) + \\
& + \frac{10}{5!}f''f'''\xi^4\zeta^2\left(5\varphi' + 6\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 7\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + 8\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{\text{iv}} + \ldots\right) + \\
& + \frac{5}{6!}(3f''f^{\text{iv}} + 2f'''^2)\xi^5\zeta^2\left(6\varphi' + 7\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 8\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \ldots\right) + \\
& + \frac{7}{7!}(3f''f^{\text{v}} + 5f'''f^{\text{iv}})\xi^6\zeta^2\left(7\varphi' + 8\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 9\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \ldots\right) + \\
& + \frac{7}{8!}(4f''f^{\text{vi}} + 8f'''f^{\text{v}} + 5f^{\text{iv}2})\xi^7\zeta^2\left(8\varphi' + 9\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 10\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \ldots\right) + \\
& + \frac{6}{9!}(6f''f^{\text{vii}} + 14f'''f^{\text{vi}} + 21f^{\text{iv}}f^{\text{v}})\xi^8\zeta^2\left(9\varphi' + 10\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 11\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \ldots\right) + \\
& + \frac{3}{10!}(15f''f^{\text{viii}} + 40f'''f^{\text{vii}} + 70f^{\text{iv}}f^{\text{vi}} + 42f^{\text{v}2})\xi^9\zeta^2\left(10\varphi' + 11\frac{\xi}{1!}\varphi'' + \ldots\right) + \\
& + \frac{11}{11!}(5f''f^{\text{ix}} + 15f'''f^{\text{viii}} + 30f^{\text{iv}}f^{\text{vii}} + 42f^{\text{v}}f^{\text{vi}})\xi^{10}\zeta^2(11\varphi' + \ldots) + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{1}{4!}f'^3\xi^4\zeta^3\left(15\varphi' + 21\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 28\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + 36\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{\text{iv}} + 45\frac{\xi^4}{4!}\varphi^{\text{v}} + 55\frac{\xi^5}{5!}\varphi^{\text{vi}} + \ldots\right) + \\
& + \frac{1}{4!}f''^2f'''\xi^5\zeta^3\left(21\varphi' + 28\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 36\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + 45\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{\text{iv}} + 55\frac{\xi^4}{4!}\varphi^{\text{v}} + \ldots\right) + \\
& + \frac{140}{8!}(3f''^2f^{\text{iv}} + 4f''f'''^2)\xi^6\zeta^3\left(28\varphi' + 36\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 45\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + 55\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{\text{iv}} + \ldots\right) + \\
& + \frac{28}{9!}(27f''^2f^{\text{v}} + 90f''f'''f^{\text{iv}} + 20f'''^3)\xi^7\zeta^3\left(36\varphi' + 45\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 55\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \ldots\right) + \\
& + \frac{21}{9!}(6f''^2f^{\text{vi}} + 24f''f'''f^{\text{v}} + 15f''f^{\text{iv}2} + 20f'''^2f^{\text{iv}})\xi^8\zeta^3\left(45\varphi' + 55\frac{\xi}{1!}\varphi'' + \ldots\right) + \\
& + \frac{3}{9!}(6f''^2f^{\text{vii}} + 28f''f'''f^{\text{vi}} + 42f''f^{\text{iv}}f^{\text{v}} + 28f'''^2f^{\text{v}} + 35f'''f^{\text{iv}2})\xi^9\zeta^3(55\varphi' + \ldots) + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{630}{8!}f''^4\xi^5\zeta^4\left(56\varphi' + 84\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 120\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + 165\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{\text{iv}} + \ldots\right) + \\
& + \frac{15}{6!}f''^3f'''\xi^6\zeta^4\left(84\varphi' + 120\frac{\xi}{1!}\varphi'' + 165\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \ldots\right) + \\
& + \frac{210}{8!}(f''^3f^{\text{iv}} + 2f'''^2f''^2)\xi^7\zeta^4\left(120\varphi' + 165\frac{\xi}{1}\varphi'' + \ldots\right) + \\
& + \frac{42}{9!}(9f''^3f^{\text{v}} + 45f''^2f'''f^{\text{iv}} + 20f''f'''^3)\xi^8\zeta^4(165\varphi' + \ldots) + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{252}{8!}f''^5\xi^6\zeta^5\left(210\varphi' + 330\frac{\xi}{1}\varphi'' + \ldots\right) + \\
& + \frac{420}{8!}f''^4f'''\xi^7\zeta^5(330\varphi' + \ldots) + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\} \quad 12)
$$

Es ist aber bekanntlich:

$$\varphi(x+\xi) = \varphi + \frac{\xi}{1}\varphi' + \frac{\xi^2}{2!}\varphi'' + \frac{\xi^3}{3!}\varphi''' + \ldots$$

$$\varphi'(x+\xi) = \varphi' + \frac{\xi}{1}\varphi'' + \frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \ldots$$

Ferner hat man:

$$m\varphi' + \left[m + \binom{1}{1}\right]\frac{\xi}{1}\varphi'' + \left[m + \binom{2}{1}\right]\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \left[m + \binom{3}{1}\right]\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \ldots +$$
$$+ \left[m + \binom{r}{1}\right]\frac{\xi^r}{r!}\varphi^{(r+1)} + \ldots = m\varphi'(x+\xi) + \frac{\xi}{1}\varphi''(x+\xi)$$

$$m\varphi' + \left[m + \binom{1}{1}n\right]\frac{\xi}{1}\varphi'' + \left[m + \binom{2}{1}n + \binom{2}{2}\right]\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \left[m + \binom{3}{1}n + \binom{3}{2}\right]\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \ldots +$$
$$+ \left[m + \binom{r}{1}n + \binom{r}{2}\right]\frac{\xi^r}{r!}\varphi^{(r+1)} + \ldots = m\varphi'(x+\xi) + n\frac{\xi}{1}\varphi''(x+\xi) + \frac{\xi^2}{2!}\varphi'''(x+\xi)$$

$$m\varphi' + \left[m + \binom{1}{1}n\right]\frac{\xi}{1}\varphi'' + \left[m + \binom{2}{1}n + \binom{2}{2}p\right]\frac{\xi^2}{2!}\varphi''' + \left[m + \binom{3}{1}n + \binom{3}{2}p + \binom{3}{3}\right]\frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv} + \ldots +$$
$$+ \left[m + \binom{r}{1}n + \binom{r}{2}p + \binom{r}{3}\right]\frac{\xi^r}{r!}\varphi^{(r+1)} + \ldots = m\varphi'(x+\xi) + n\frac{\xi}{1}\varphi''(x+\xi) + p\frac{\xi^2}{2!}\varphi'''(x+\xi) + \frac{\xi^3}{3!}\varphi^{iv}(x+\xi)$$

u. s. w.

Mit Hilfe dieser Reductionsformeln erhält unsere Gleichung 12) die elegante Form:

$$\varphi(z) = \varphi(x+\xi) + L_1\varphi'(x+\xi) + L_2\varphi''(x+\xi) + L_3\varphi'''(x+\xi) + \ldots \qquad 12^*)$$

Dabei bedeutet:

$$L_1 = \frac{\xi^3}{f}\left[\frac{1}{2!}f'' + \frac{\xi}{3!}f''' + \frac{\xi^2}{4!}f^{iv} + \frac{\xi^3}{5!}f^{v} + \ldots\right] +$$
$$+ \frac{\xi^5}{f^2}\left[\frac{1}{2!}f''^2 + \frac{10}{4!}f''f'''\xi + \frac{1}{4!}(3f''f^{iv} + 2f'''^2)\xi^2 + \frac{7}{6!}(3f''f^{v} + 5f'''f^{iv})\xi^3 +\right.$$
$$+ \frac{1}{6!}(4f''f^{vi} + 8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2})\xi^4 + \frac{6}{8!}(6f''f^{vii} + 14f'''f^{vi} + 21f^{iv}f^{v})\xi^5 +$$
$$+ \frac{3}{9!}(15f''f^{viii} + 40f'''f^{vii} + 70f^{iv}f^{vi} + 42f^{v\,2})\xi^6 +$$
$$\left.+ \frac{11}{10!}(5f''f^{ix} + 15f'''f^{viii} + 30f^{iv}f^{vii} + 42f^{v}f^{vi})\xi^7 + \ldots\right] +$$
$$+ \frac{\xi^7}{f^3}\left[\frac{5}{8}f''^3 + \frac{7}{8}f''^2f'''\xi + \frac{7}{72}(3f''^2f^{iv} + 4f''f'''^2)\xi^2 + \frac{1}{360}(27f''^2f^{v} + 90f''f'''f^{iv} + 20f'''^3)\xi^3 +\right.$$
$$+ \frac{1}{384}(6f''^2f^{vi} + 24f''f'''f^{v} + 15f''f^{iv\,2} + 20f'''^2f^{iv})\xi^4 +$$
$$\left.+ \frac{11}{24192}(6f''^2f^{vii} + 28f''f'''f^{vi} + 42f''f^{iv}f^{v} + 28f'''^2f^{v} + 35f'''f^{iv\,2})\xi^5 + \ldots\right] +$$
$$+ \frac{\xi^9}{f^4}\left[\frac{7}{8}f''^4 + \frac{7}{4}f''^3f'''\xi + \frac{5}{8}(f''^3f^{iv} + 2f''^2f'''^2)\xi^2 + \frac{11}{576}(9f''^3f^{v} + 45f''^2f'''f^{iv} + 20f''f'''^3)\xi^3 + \ldots\right] +$$
$$+ \frac{\xi^{11}}{f^5}\left[\frac{21}{16}f''^5 + \frac{55}{16}f''^4f'''\xi + \ldots\right] + \ldots$$

$$L_2 = \frac{\xi^6}{f^2}\Big[\frac{3}{4!}f''^2 + \frac{2}{4!}f''f'''\xi + \frac{5}{6!}(3f''f^{\text{iv}} + 2f'''^2)\xi^2 + \frac{1}{6!}(3f''f^{\text{v}} + 5f'''f^{\text{iv}})\xi^3 + \frac{7}{8!}(4f''f^{\text{vi}} + 8f'''f^{\text{v}} + 5f^{\text{iv}\,2})\xi^4 +$$
$$+ \frac{6}{9!}(6f''f^{\text{vii}} + 14f'''f^{\text{vi}} + 21f^{\text{iv}}f^{\text{v}})\xi^5 + \frac{3}{10!}(15f''f^{\text{viii}} + 40f'''f^{\text{vii}} + 70f^{\text{iv}}f^{\text{vi}} + 42f^{\text{v}\,2})\xi^6 + \ldots\Big] +$$
$$+ \frac{\xi^8}{f^3}\Big[\frac{1}{4}f'''^3 + \frac{7}{24}f'''^2f'''\xi + \frac{1}{36}(3f'''^2f^{\text{iv}} + 4f''f'''^2)\xi^2 + \frac{1}{1440}(27f'''^2f^{\text{v}} + 90f''f'''f^{\text{iv}} + 20f'''^3)\xi^3 +$$
$$+ \frac{1}{1728}(6f'''^2f^{\text{vi}} + 24f''f'''f^{\text{v}} + 15f''f^{\text{iv}\,2} + 20f'''^2f^{\text{iv}})\xi^4 + \ldots\Big] +$$
$$+ \frac{\xi^{10}}{f^4}\Big[\frac{7}{16}f'''^4 + \frac{3}{4}f'''^3f'''\xi + \frac{15}{64}(f'''^3f^{\text{iv}} + 2f'''^2f'''^2)\xi^2 + \ldots\Big] +$$
$$+ \frac{\xi^{12}}{f^5}\Big[\frac{3}{4}f'''^5 + \ldots\Big] + \ldots$$

$$L_3 = \frac{\xi^9}{f^3}\Big[\frac{1}{48}f'''^3 + \frac{1}{48}f'''^2f'''\xi + \frac{1}{576}(3f'''^2f^{\text{iv}} + 4f''f'''^2)\xi^2 + \frac{1}{25920}(27f'''^2f^{\text{v}} + 90f''f'''f^{\text{iv}} + 20f'''^3)\xi^3 + \ldots\Big] +$$
$$+ \frac{\xi^{11}}{f^4}\Big[\frac{1}{16}f'''^4 + \frac{3}{32}f'''^3f'''\xi + \ldots\Big] + \ldots$$

$$L_4 = \frac{\xi^{12}}{f^4}\Big[\frac{1}{384}f'''^4 + \frac{1}{288}f'''^3f'''\xi + \frac{1}{1152}(f'''^3f^{\text{iv}} + 2f'''^2f'''^2)\xi^2 + \ldots\Big]$$

. . . . . .

Zwischen den einzelnen Gliedergruppen von $L_1, L_2, L_3 \ldots$ bestehen sehr merkwürdige einfache Relationen, die nicht nur deren Berechnung sehr erleichtern, sondern uns auch einen tieferen Einblick in das Wesen und die Bedeutung der ganzen Entwickelungen gewähren. Es ist nämlich:

$$\frac{3}{4!}f''^2 + \frac{2}{4!}f''f'''\xi + \frac{5}{6!}(3f''f^{\text{iv}} + 2f'''^2)\xi^2 + \frac{1}{6!}(3f''f^{\text{v}} + 5f'''f^{\text{iv}})\xi^3 + \frac{7}{8!}(4f''f^{\text{vi}} + 8f'''f^{\text{v}} + 5f^{\text{iv}\,2})\xi^4 + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2!}\Big(\frac{1}{2!}f'' + \frac{\xi}{3!}f''' + \frac{\xi^2}{4!}f^{\text{iv}} + \frac{\xi^3}{5!}f^{\text{v}} + \ldots\Big)^2$$

$$\frac{1}{48}f'''^3 + \frac{1}{48}f'''^2f'''\xi + \frac{1}{576}(3f'''^2f^{\text{iv}} + 4f''f'''^2)\xi^2 + \frac{1}{25920}(27f'''^2f^{\text{v}} + 90f''f'''f^{\text{iv}} + 20f'''^3)\xi^3 + \ldots =$$
$$= \frac{1}{3!}\Big(\frac{1}{2!}f'' + \frac{\xi}{3!}f''' + \frac{\xi^2}{4!}f^{\text{iv}} + \frac{\xi^3}{5!}f^{\text{v}} + \ldots\Big)^3$$

$$\frac{1}{384}f'''^4 + \frac{1}{288}f'''^3f'''\xi + \frac{1}{1152}(f'''^3f^{\text{iv}} + 2f'''^2f'''^2)\xi^2 + \ldots = \frac{1}{4!}\Big(\frac{1}{2!}f'' + \frac{\xi}{3!}f''' + \frac{\xi^2}{4!}f^{\text{iv}} + \ldots\Big)^4$$

. . . . . .

$$\frac{1}{2!}f''^2 + \frac{10}{4!}f''f'''\xi + \frac{1}{4!}(3f''f^{\text{iv}} + 2f'''^2)\xi^2 + \frac{7}{6!}(3f''f^{\text{v}} + 5f'''f^{\text{iv}})\xi^3 + \frac{1}{6!}(4f''f^{\text{vi}} + 8f'''f^{\text{v}} + 5f^{\text{iv}\,2})\xi^4 + \ldots =$$
$$= \Big(\frac{1}{2}f'' + \frac{\xi}{3!}f''' + \frac{\xi^2}{4!}f^{\text{iv}} + \frac{\xi^3}{5!}f^{\text{v}} + \ldots\Big)\Big(f'' + \frac{1}{2}f'''\xi + \frac{\xi^2}{3!}f^{\text{iv}} + \frac{\xi^3}{4!}f^{\text{v}} + \ldots\Big)$$

$$\frac{1}{4}f'''^3 + \frac{7}{24}f'''^2f'''\xi + \frac{1}{36}(3f'''^2f^{\text{iv}} + 4f''f'''^2)\xi^2 + \frac{1}{1440}(27f'''^2f^{\text{v}} + 90f''f'''f^{\text{iv}} + 20f'''^3)\xi^3 + \ldots =$$
$$= \Big(\frac{1}{2}f'' + \frac{\xi}{3!}f''' + \frac{\xi^2}{4!}f^{\text{iv}} + \frac{\xi^3}{5!}f^{\text{v}} + \ldots\Big)^2\Big(f'' + \frac{1}{2}f'''\xi + \frac{\xi^2}{3!}f^{\text{iv}} + \frac{\xi^3}{4!}f^{\text{v}} + \ldots\Big)$$

$$\frac{1}{16}f'''^4 + \frac{3}{32}f'''^3f'''\xi + \frac{5}{192}(f'''^3f^{\text{iv}} + 2f'''^2f'''^2)\xi^2 + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2!}f'' + \frac{\xi}{3!}f''' + \frac{\xi^2}{4!}f^{\text{iv}} + \ldots\Big)^3\Big(f'' + \frac{1}{2}f'''\xi + \frac{\xi^2}{3!}f^{\text{iv}} + \ldots\Big)$$

. . . . . .

$$\frac{5}{8}f'''^3+\frac{7}{8}f'''^2f'''\xi+\frac{7}{72}(3f'''^2f^{\text{iv}}+4f''f'''^2)\xi^2+\frac{1}{360}(27f'''^2f^{\text{v}}+90f''f'''f^{\text{iv}}+20f'''^3)\xi^3+\ldots=$$

$$=\left(\frac{1}{2}f''+\frac{\xi}{3!}f'''+\frac{\xi^2}{4!}f^{\text{iv}}+\ldots\right)\left(\frac{5}{4}f'''^2+\frac{4}{3}f''f'''\xi+\frac{1}{48}[23f''f^{\text{iv}}+16f'''^2]\xi^2+\frac{1}{240}[31f''f^{\text{v}}+55f'''f^{\text{iv}}]\xi^3+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1440}[40f''f^{\text{vi}}+86f'''f^{\text{v}}+55f^{\text{iv}2}]\xi^4+\frac{1}{5040}[25f''f^{\text{vii}}+63f'''f^{\text{vi}}+98f^{\text{iv}}f^{\text{v}}]\xi^5+\ldots\right)$$

$$\frac{7}{16}f'''^4+\frac{3}{4}f'''^3f'''\xi+\frac{15}{64}(f'''^3f^{\text{iv}}+2f'''^2f'''^2)\xi^2+\frac{11}{1728}(9f'''^3f^{\text{v}}+45f'''^2f'''f^{\text{iv}}+20f'''f'''^3)\xi^3+\ldots=$$

$$=\left(\frac{1}{2}f''+\frac{\xi}{3!}f'''+\frac{\xi^2}{4!}f^{\text{iv}}+\ldots\right)^2\left(\frac{7}{4}f'''^2+\frac{11}{6}f''f'''\xi+\frac{1}{48}[31f''f^{\text{iv}}+22f'''^2]\xi^2+\ldots\right)$$

. . . . . .

Schreibt man also abkürzungsweise:

$$\left.\begin{aligned}
\varkappa &= \frac{\xi^3}{f}\left(\frac{1}{2!}f''+\frac{\xi}{3!}f'''+\frac{\xi^2}{4!}f^{\text{iv}}+\frac{\xi^3}{5!}f^{\text{v}}+\ldots\right)=\frac{\xi}{f}[f(x+\xi)-f-\xi f'] \\
\lambda &= \frac{\xi^2}{f}\left(f''+\frac{1}{2}f'''\xi+\frac{\xi^2}{3!}f^{\text{iv}}+\frac{\xi^3}{4!}f^{\text{v}}+\ldots\right)=\frac{\xi}{f}[f'(x+\xi)-f'] \\
\mu &= \frac{\xi^4}{f^2}\left(\frac{5}{4}f'''^2+\frac{4}{3}f''f'''\xi+\frac{1}{48}[23f''f^{\text{iv}}+16f'''^2]\xi^2+\frac{1}{240}[31f''f^{\text{v}}+55f'''f^{\text{iv}}]\xi^3+\right. \\
&\qquad\left.+\frac{1}{1440}[40f''f^{\text{vi}}+86f'''f^{\text{v}}+55f^{\text{iv}2}]\xi^4+\frac{1}{5040}[25f''f^{\text{vii}}+63f'''f^{\text{vi}}+98f^{\text{iv}}f^{\text{v}}]\xi^5+\ldots\right) \\
\nu &= \frac{\xi^4}{f^2}\left(\frac{7}{4}f'''^2+\frac{11}{6}f''f'''\xi+\frac{1}{48}[31f''f^{\text{iv}}+22f'''^2]\xi^2+\ldots\right)=\frac{1}{2}\lambda^2+\mu
\end{aligned}\right\}\ \text{VII}$$

. . . . . .

so ist

$$\left.\begin{aligned}
L_1 &= \varkappa+\varkappa\lambda+\varkappa\mu+\ldots \\
L_2 &= \frac{1}{2!}\varkappa^2+\varkappa^2\lambda+\varkappa^2\nu+\ldots \\
L_3 &= \frac{1}{3!}\varkappa^3+\frac{1}{2!}\varkappa^3\lambda+\ldots \\
L_4 &= \frac{1}{4!}\varkappa^4+\ldots
\end{aligned}\right\}\ \text{VIII}$$

Damit kann man nun wieder die Gleichung 12*) wesentlich zusammenziehen. Ordnet man sie nämlich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\varphi(z)=&\left[\varphi(x+\xi)+\varkappa\varphi'(x+\xi)+\frac{1}{2!}\varkappa^2\varphi''(x+\xi)+\frac{1}{3!}\varkappa^3\varphi'''(x+\xi)+\frac{1}{4!}\varkappa^4\varphi^{\text{iv}}(x+\xi)+\ldots\right]+ \\
&+\varkappa\lambda\left[\varphi'(x+\xi)+\varkappa\varphi''(x+\xi)+\frac{1}{2!}\varkappa^2\varphi'''(x+\xi)+\ldots\right]+ \\
&+\varkappa\mu\varphi'(x+\xi)+\varkappa^2\nu\varphi''(x+\xi)+\ldots \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

so erkennt man auf den ersten Blick, dass sie nichts anderes vorstellt, als:

$$\varphi(z)=\varphi(x+\xi+\varkappa)+\varkappa\lambda\varphi'(x+\xi+\varkappa)+\varphi'(x+\xi)[\varkappa\mu+\ldots]+\varphi''(x+\xi)[\varkappa^2\nu+\ldots]+\ldots \qquad 13)$$

worin man auch $\xi+\varkappa$ ersetzen kann durch seinen Werth:

$$\frac{\xi}{f}[f(x+\xi)-\xi f'].$$

Die Deutung dieser Gleichung ist nicht schwer. Da für $\alpha = 0$, $z = x$ wird, kann man im Allgemeinen

$$\varphi(z) = \varphi[x + \psi(\alpha, x)]$$

setzen. Wir lernen daher durch unsere Entwickelung eine Form kennen, auf welche die ersten Glieder der Function ψ gebracht werden können, und zwar:

$\psi(\alpha, x) = \xi$, genau bis auf einschliesslich Glieder zweiter Ordnung

$\psi(\alpha, x) = \xi + k = \frac{\xi}{f}[f(x+\xi) - \xi f']$, „ „ „ „ „ vierter „ .

§. 5.

Wie bereits im §. 3 angedeutet wurde, ist die Gleichung 10*) dort noch bei weitem nicht in der einfachsten Form angesetzt, deren sie fähig ist. Sie wird schon dadurch noch viel durchsichtiger als sie ohnehin ist, wenn man sie auf die nachstehende Art gruppenweise nach den Functionen $\varphi', \varphi'', \varphi''' \ldots$ ordnet:

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = {} & \left(\varphi + \frac{1}{1!}p\varphi' + \frac{1}{2!}p^2\varphi'' + \frac{1}{3!}p^3\varphi''' + \frac{1}{4!}p^4\varphi^{iv} + \ldots\right) + \\
& + \varphi'\left[\frac{1}{3!}f'''Q_4 + \frac{1}{4!}f^{iv}Q_5 + \frac{1}{5!}f^{v}Q_6 + \frac{1}{6!}f^{vi}Q_7 + \ldots\right] + \\
& + \varphi''\left[\frac{1}{3!}f'''Q_5 + \frac{1}{4!}f^{iv}Q_6 + \frac{1}{5!}f^{v}Q_7 + \frac{1}{6!}f^{vi}Q_8 + \ldots\right] + \\
& + \frac{\varphi'''}{2!}\left[\frac{1}{3!}f'''Q_6 + \frac{1}{4!}f^{iv}Q_7 + \frac{1}{5!}f^{v}Q_8 + \frac{1}{6!}f^{vi}Q_9 + \ldots\right] + \\
& + \frac{\varphi^{iv}}{3!}\left[\frac{1}{3!}f'''Q_7 + \frac{1}{4!}f^{iv}Q_8 + \ldots\right] + \frac{\varphi^{v}}{4!}\left[\frac{1}{3!}f'''Q_8 + \frac{1}{4!}f^{iv}Q_9 + \ldots\right] + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \frac{1}{12}\varphi'\Big[& \frac{1}{3!}f'''^2R_7 + \frac{2}{4!}f'''f^{iv}R_8 + \frac{1}{4.5!}(8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2})R_9 + \frac{1}{6!}(2f'''f^{vi} + 3f^{iv}f^{v})R_{10} + \\
& + \frac{1}{10.7!}(20f'''f^{vii} + 35f^{iv}f^{vi} + 21f^{v\,2})R_{11} + \frac{2}{5.8!}(5f'''f^{viii} + 10f^{iv}f^{vii} + 14f^{v}f^{vi})R_{12} + \ldots\Big] + \\
+ \frac{1}{12}\varphi''\Big[& \frac{1}{3!}f'''^2R_8 + \frac{2}{4!}f'''f^{iv}R_9 + \frac{1}{4.5!}(8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2})R_{10} + \frac{1}{6!}(2f'''f^{vi} + 3f^{iv}f^{v})R_{11} + \\
& + \frac{1}{10.7!}(20f'''f^{vii} + 35f^{iv}f^{vi} + 21f^{v\,2})R_{12} + \ldots\Big] + \\
+ \frac{1}{12}\cdot\frac{\varphi'''}{2!}\Big[& \frac{1}{3!}f'''^2R_9 + \frac{2}{4!}f'''f^{iv}R_{10} + \frac{1}{4.5!}(8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2})R_{11} + \frac{1}{6!}(2f'''f^{vi} + 3f^{iv}f^{v})R_{12} + \ldots\Big] + \\
+ \frac{1}{12}\cdot\frac{\varphi^{iv}}{3!}\Big[& \frac{1}{3!}f'''^2R_{10} + \frac{2}{4!}f'''f^{iv}R_{11} + \frac{1}{4.5!}(8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2})R_{12} + \ldots\Big] + \\
+ \frac{1}{12}\cdot\frac{\varphi^{v}}{4!}\Big[& \frac{1}{3!}f'''^2R_{11} + \frac{2}{4!}f'''f^{iv}R_{12} + \ldots\Big] + \frac{1}{12}\cdot\frac{\varphi^{vi}}{5!}\Big[\frac{1}{3!}f'''^2R_{12} + \ldots\Big] + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \frac{1}{216}\varphi'\Big[& \frac{1}{3!}f'''^3S_{10} + \frac{3}{4!}f'''^2f^{iv}S_{11} + \frac{3}{4.5!}(4f'''^2f^{v} + 5f'''f^{iv\,2})S_{12} + \ldots\Big] + \\
+ \frac{1}{216}\varphi''\Big[& \frac{1}{3!}f'''^3S_{11} + \frac{3}{4!}f'''^2f^{iv}S_{12} + \ldots\Big] + \frac{1}{216}\cdot\frac{\varphi'''}{2!}\Big[\frac{1}{3!}f'''^3S_{12} + \ldots\Big] + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die erste Horizontalreihe lautet nun einfacher geschrieben: $\varphi(x+p)$; der ganze folgende mit den Functionen Q multiplicirte Gliedercomplex geht, wenn man nach System IV die Q durch ihre Werthe in p ausdrückt, über in:

$$\frac{p^3\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\left(\frac{1}{3!}f'''+\frac{1}{4!}f^{iv}p+\frac{1}{5!}f^{v}p^2+\ldots\right)\left(\varphi'+\frac{1}{1!}\varphi''p+\frac{1}{2!}\varphi'''p^2+\frac{1}{3!}\varphi^{iv}p^3+\ldots\right)=$$

$$=\frac{p^3\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\left(\frac{1}{3!}f'''+\frac{1}{4!}pf^{iv}+\frac{1}{5!}p^2f^{v}+\ldots\right)\varphi'(x+p)$$

Zwischen den $R, S, \ldots$ finden abermals nach System IV die Relationen statt:

$$R_{n+m}=p^m R_n+\frac{m\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\cdot p^{n+m-2}$$

$$S_{n+m}=p^m S_n+\frac{2m\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}p^{m-1}R_n+\frac{m\zeta^2}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}p^{m-1}R_m.$$

Damit kann man der mit den R multiplicirten Gliedergruppe bei entsprechender Zusammenfassung der einzelnen Parthien die Form ertheilen:

$$\frac{1}{12}\Big[\frac{1}{3!}f'''^2R_7+\frac{2}{4!}f'''f^{iv}R_8+\frac{1}{4.5!}(8f'''f^{v}+5f^{iv\,2})R_9+\frac{1}{6!}(2f'''f^{vi}+3f^{iv}f^{v})R_{10}+$$
$$+\frac{1}{10.7!}(20f'''f^{vii}+35f^{iv}f^{vi}+21f^{v\,2})R_{11}+\frac{2}{5.8!}(5f'''f^{viii}+10f^{iv}f^{vii}+14f^{v}f^{vi})R_{12}+\ldots\Big]\varphi'(x+p)+$$
$$+\frac{1}{12}\frac{\zeta^2p^6}{1-2ff''\zeta^2}\Big[\frac{1}{3!}f'''^2+\frac{2}{4!}f'''f^{iv}p+\frac{1}{4.5!}(8f'''f^{v}+5f^{iv\,2})p^2+\frac{1}{6!}(2f'''f^{vi}+3f^{iv}f^{v})p^3+$$
$$+\frac{1}{10.7!}(20f'''f^{vii}+35f^{iv}f^{vi}+21f^{v\,2})p^4+\ldots\Big]\varphi''(x+p).$$

Endlich kann man die letzte Gliedergruppe zunächst folgendermassen umbilden:

$$\frac{1}{216}\Big[\frac{1}{3!}f'''^3S_{10}+\frac{3}{4!}f'''^2f^{iv}S_{11}+\frac{3}{4.5!}(4f'''^2f^{v}+5f'''f^{iv\,2})S_{12}+\ldots\Big]\varphi'(x+p)+$$
$$+\frac{1}{216}\frac{2\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\Big[\frac{1}{3!}f'''^3R_{10}+\frac{3}{4!}f'''^2f^{iv}R_{11}+\frac{3}{4.5!}(4f'''^2f^{v}+5f'''f^{iv\,2})R_{12}+\ldots\Big]\varphi''(x+p)+$$
$$+\frac{1}{216}\cdot\frac{p^9\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\Big[\frac{1}{3!}f'''^3+\frac{3}{4!}f'''^2f^{iv}p+\frac{3}{4.5!}(4f'''^2f^{v}+5f'''f^{iv\,2})p^2+\ldots\Big]\times$$
$$\times\Big[\varphi''R_1+\frac{1}{1!}\varphi'''R_2+\frac{1}{2!}\varphi^{iv}R_3+\ldots\Big].$$

Drückt man jetzt in der letzten Horizontalreihe $R_1, R_2, R_3\ldots$ nach der obigen Formel noch durchwegs durch R_1 aus, welches gegeben ist, durch die Gleichung:

$$R_1=\frac{1-\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\zeta^2}{p}=\frac{f''\zeta^3}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

so gewinnt man die Formel:

$$R_1\varphi''+\frac{1}{1!}R_2\varphi'''+\frac{1}{2!}R_3\varphi^{iv}+\ldots=\frac{f''\zeta^3}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\varphi''(x+p)+\frac{\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\cdot\varphi'''(x+p).$$

Auf Grund dieser Umstellungen führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned}
K_1 = {} & \frac{p^3\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\left[\frac{1}{3!}f''' + \frac{1}{4!}f^{iv}p + \frac{1}{5!}f^{v}p^2 + \frac{1}{6!}f^{vi}p^3 + \dots\right] + \\
& + \frac{1}{12}\left[\frac{1}{3!}f'''^2R_7 + \frac{2}{4!}f'''f^{iv}R_8 + \frac{1}{4.5!}(8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2})R_9 + \frac{1}{6!}(2f'''f^{vi} + 3f^{iv}f^{v})R_{10} + \right. \\
& \qquad \left. + \frac{1}{10.7!}(20f'''f^{vii} + 35f^{iv}f^{vi} + 21f^{v\,2})R_{11} + \frac{2}{5.8!}(5f'''f^{viii} + 10f^{iv}f^{vii} + 14f^{v}f^{vi})R_{12} + \dots\right] + \\
& + \frac{1}{216}\left[\frac{1}{3!}f'''^3S_{10} + \frac{3}{4!}f'''^2f^{iv}S_{11} + \frac{3}{4.5!}(4f'''^2f^{v} + 5f'''f^{iv\,2})S_{12} + \dots\right] + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
K_2 = {} & \frac{1}{12}\cdot\frac{p^6\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\left[\frac{1}{3!}f'''^2 + \frac{2}{4!}f'''f^{iv}p + \frac{1}{4.5!}(8f'''f^{v} + 5f^{iv\,2})p^2 + \frac{1}{6!}(2f'''f^{vi} + 3f^{iv}f^{v})p^3 + \right. \\
& \qquad \left. + \frac{1}{10.7!}(20f'''f^{vii} + 35f^{iv}f^{vi} + 21f^{v\,2})p^4 + \dots\right] + \\
& + \frac{1}{108}\cdot\frac{\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\left[\frac{1}{3!}f'''^3R_{10} + \frac{3}{4!}f'''^2f^{iv}R_{11} + \frac{3}{4.5!}(4f'''^2f^{v} + 5f'''f^{iv\,2})R_{12} + \dots\right] + \\
& + \frac{1}{216}\frac{f''p^9\zeta^4}{(1-2ff''\zeta^2)^2}\left[\frac{1}{3!}f'''^3 + \frac{3}{4!}f'''^2f^{iv}p + \frac{3}{4.5!}(4f'''^2f^{v} + 5f'''f^{iv\,2})p^2 + \dots\right] + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
K_3 = {} & \frac{1}{216}\cdot\frac{p^9\zeta^3}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{3!}f'''^3 + \frac{3}{4!}f'''^2f^{iv}p + \dots\right] + \dots
\end{aligned}\right\}\ \text{IX}$$

Dies vorausgesetzt, haben wir:

$$\varphi(z) = \varphi(x+p) + K_1\varphi'(x+p) + K_2\varphi''(x+p) + K_3\varphi'''(x+p) + \dots \qquad 14)$$

Es erübrigt uns jetzt noch die Grössen K_1, K_2, K_3... nach steigenden Potenzen von p zu entwickeln, um sie in einer, zu ihrer Berechnung geeigneteren Form zu erhalten. Dazu dient uns das schon einmal (§. 3) zu demselben Zwecke verwendete Gleichungssystem $\mathfrak{V}$, mit Hilfe dessen sich R_n, S_n... leicht als Functionen von p darstellen lassen. Wir finden so durch eine leichte Rechnung:

$$\left.\begin{aligned}
R_n &= \frac{p^{n-3}\zeta^3}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(n-1)f - \frac{n-3}{2}f''p^2\right] \\
S_n &= \frac{p^{n-3}\zeta^5}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{5}{2}}}\left[(n-1)(n-2)f^2 - (n-1)(n-5)ff''p^2 + \frac{1}{4}(n-4)(n-5)f''^2p^4\right]
\end{aligned}\right\}\ \text{IV}^{**}$$

Durch Einsetzen dieser Werthe erzielt man die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
K_1 = {} & \frac{p^3\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\left[\frac{1}{3!}f''' + \frac{1}{4!}f^{iv}p + \frac{1}{5!}f^{v}p^2 + \frac{1}{6!}f^{vi}p^3 + \dots\right] + \\
& + \frac{1}{12}\cdot\frac{p^4\zeta^3}{(\sqrt{1-2ff''\zeta^2})^3}\left[ff'''^2 + \frac{7}{12}ff'''f^{iv}p + \frac{1}{60}(8ff'''f^{v} + 5ff^{iv\,2} - 20f''f'''^2)p^2 + \right. \\
& \qquad + \frac{1}{240}(6ff'''f^{vi} + 9ff^{iv}f^{v} - 50f''f'''f^{iv})p^3 + \\
& \qquad + \frac{1}{2.7!}(40ff'''f^{vii} + 70ff^{iv}f^{vi} + 42ff^{v\,2} - 504f''f'''f^{v} - 315f''f^{iv\,2})p^4 + \\
& \qquad \left. + \frac{1}{20.7!}(55ff'''f^{viii} + 110ff^{iv}f^{vii} + 154ff^{v}f^{vi} - 980f''f'''f^{vi} - 1470f''f^{iv}f^{v})p^5 + \dots\right] + \\
& + \frac{1}{18}\cdot\frac{p^5\zeta^5}{(\sqrt{1-2ff''\zeta^2})^5}\left[f^2f'''^3 + \frac{15}{16}f^2f'''^2f^{iv}p + \frac{1}{192}(44f^2f'''^2f^{v} + 55f^2f'''f^{iv\,2} - 120ff''f'''^3)p^2 + \dots\right] + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\}\ \text{IX}^{*}$$

$$\left.\begin{aligned}
K_2 &= \frac{1}{72}\cdot\frac{p^6\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\Big[f'''^2+\frac{1}{2}f'''f^{\text{iv}}p+\frac{1}{80}(8f'''f^{\text{v}}+5f^{\text{iv}\,2})p^2+\frac{1}{120}(2f'''f^{\text{vi}}+3f^{\text{iv}}f^{\text{v}})p^3+\\
&\qquad+\frac{1}{8400}(20f'''f^{\text{vii}}+35f^{\text{iv}}f^{\text{vi}}+21f^{\text{v}\,2})p^4+\ldots\Big]+\\
&\quad+\frac{1}{72}\cdot\frac{p^7\zeta^4}{(1-2ff''\zeta^2)^2}\Big[ff'''^3+\frac{5}{6}ff'''^2f^{\text{iv}}p+\frac{1}{240}(44ff'''^2f^{\text{v}}+55ff'''f^{\text{iv}\,2}-\frac{280}{3}f''f'''^3)p^2+\ldots\Big]+\\
&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
K_3 &= \frac{1}{1296}\cdot\frac{p^9\zeta^3}{(1-2ff''\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\Big[f'''^3+\frac{3}{4}f'''^2f^{\text{iv}}p+\frac{3}{80}(4f'''^2f^{\text{v}}+5f'''f^{\text{iv}\,2})p^2+\ldots\Big]+\ldots
\end{aligned}\right\}\quad \text{IX*}$$

Die Gleichung 14) hat wieder genau die Form der Gleichung 12*); es lohnt sich daher wohl der Mühe, eine nähere Vergleichung zwischen beiden anzustellen. Zunächst ist es abermals sehr auffallend, um wie viel einfacher die Grössen $K_1, K_2, K_3\ldots$ zusammengesetzt sind, als die analogen $L_1, L_2, L_3\ldots$, und um wie viel kleiner die numerischen Coëfficienten der ersteren Gleichung sind als die der letzteren. Gehen wir aber weiter und fassen wir α wieder als eine Grösse erster Ordnung auf, so ist die Ordnung der Grössen $L_1, L_2, L_3\ldots$ der Reihe nach: $3, 6, 9, \ldots$, die der Grössen $K_1, K_2, K_3, \ldots$: $4, 8, 12, \ldots$. Es ist also bereits K_1 um eine Ordnung kleiner als L_1, und es steigt überdies jedes folgende K gleich um vier Ordnungen, während die L nur um je drei Ordnungen ansteigen. Die Convergenz der jetzigen Entwickelung ist daher wesentlich stärker, als die der früheren. Allein noch mehr. Für ein und dasselbe L ist jede folgende Gliedergruppe nur um zwei Ordnungen kleiner als die früheren; bei den K hingegen, wenigstens in den Anfangsgruppen, um drei. Es convergirt daher die frühere Entwickelung nicht nur im Ganzen, sondern auch in ihren einzelnen Theilen erheblich langsamer. So braucht man beispielsweise, will man die Entwickelung einer Function so weit führen als es hier geschehen ist, nämlich bis einschliesslich zur 12. Potenz von α, von L_1 fünf, von K_1 nur drei Gliedergruppen, von L_2 vier, von K_2 hingegen nur zwei u. s. w. Aus diesen Bemerkungen ersieht man sehr deutlich, welchen Gewinn die zweite Summirung gebracht hat.

Aus dem Umstande, dass zwischen den einzelnen Gliedergruppen der L einfache Relationen bestehen, dürfen wir der Analogie nach wohl schliessen, dass auch zwischen den K ähnliche Beziehungen stattfinden werden. Dies ist auch in der That der Fall. Denn es ist:

$$\frac{1}{36}\Big[f'''^2+\frac{1}{2}f'''f^{\text{iv}}p+\frac{1}{80}(8f'''f^{\text{v}}+5f^{\text{iv}\,2})p^2+\frac{1}{120}(2f'''f^{\text{vi}}+3f^{\text{iv}}f^{\text{v}})p^3+\frac{1}{8400}(20f'''f^{\text{vii}}+35f^{\text{iv}}f^{\text{vi}}+21f^{\text{v}\,2})p^4+\ldots\Big]=$$
$$=\Big(\frac{1}{3!}f'''+\frac{1}{4!}f^{\text{iv}}p+\frac{1}{5!}f^{\text{v}}p^2+\frac{1}{6!}f^{\text{vi}}p^3+\ldots\Big)^2$$

$$\frac{1}{216}\Big[f'''^3+\frac{3}{4}f'''^2f^{\text{iv}}p+\frac{3}{80}(4f'''^2f^{\text{v}}+5f'''f^{\text{iv}\,2})p^2+\ldots\Big]=\Big(\frac{1}{3!}f'''+\frac{1}{4!}f^{\text{iv}}p+\frac{1}{5!}f^{\text{v}}p^2+\ldots\Big)^3$$

. . . . . .

$$\frac{1}{6}\Big[ff'''^2+\frac{7}{12}ff'''f^{\text{iv}}p+\frac{1}{60}(8ff'''f^{\text{v}}+5ff^{\text{iv}\,2}-20f''f'''^2)p^2+\frac{1}{240}(6ff'''f^{\text{vi}}+9ff^{\text{iv}}f^{\text{v}}-50f''f'''f^{\text{iv}})p^3+\ldots\Big]=$$
$$=\Big(\frac{1}{3!}f'''+\frac{1}{4!}f^{\text{iv}}p+\frac{1}{5!}f^{\text{v}}p^2+\frac{1}{6!}f^{\text{vi}}p^3+\ldots\Big)\Big[ff'''+\frac{1}{3}ff^{\text{iv}}p+\frac{1}{12}(ff^{\text{v}}-4f''f''')p^2+$$
$$+\frac{1}{120}(2ff^{\text{vi}}-15f''f^{\text{iv}})p^3+\frac{1}{360}(ff^{\text{vii}}-12f''f^{\text{v}})p^4+\frac{1}{5040}(2ff^{\text{viii}}-35f''f^{\text{vi}})p^5+\ldots\Big].$$

$$\frac{1}{36}\Big[ff'''^3+\frac{5}{6}ff'''^2f^{\text{iv}}p+\frac{1}{240}(44ff'''^2f^{\text{v}}+55ff'''f^{\text{iv}\,2}-\frac{280}{3}f''f'''^3)p^2+\ldots\Big]=$$
$$=\Big(\frac{1}{3!}f'''+\frac{1}{4!}f^{\text{iv}}p+\frac{1}{5!}f^{\text{v}}p^2+\ldots\Big)^2\Big[ff'''+\frac{1}{3}ff^{\text{iv}}p+\frac{1}{12}(ff^{\text{v}}-\frac{14}{3}f''f''')p^2+\ldots\Big]$$

. . . . . .

Es sei also:

$$\left.\begin{aligned}
k &= \frac{p^3\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\left[\frac{1}{3!}f''' + \frac{1}{4!}f^{\text{iv}}p + \frac{1}{5!}f^{\text{v}}p^2 + \ldots\right] = \frac{\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}\left[f(x+p) - f - pf' - \frac{p^2}{2}f''\right] \\
l &= \frac{1}{2}\cdot\frac{p\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\left[ff''' + \frac{1}{3}ff^{\text{iv}}p + \frac{1}{12}(ff^{\text{v}} - 4f''f''')p^2 + \frac{1}{120}(2ff^{\text{vi}} - 15f''f^{\text{iv}})p^3 + \ldots\right] = \\
&= \frac{p\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\left[f\left(\frac{1}{2!}f''' + \frac{1}{3!}f^{\text{iv}}p + \frac{1}{4!}f^{\text{v}}p^2 + \frac{1}{5!}f^{\text{vi}}p^3 + \ldots\right) - f''p^2\left(\frac{1}{6}f''' + \frac{1}{16}f^{\text{iv}}p + \frac{1}{60}f^{\text{v}}p^2 + \frac{1}{288}f^{\text{vi}}p^3 + \ldots\right)\right] = \\
&= \frac{f}{p}\cdot\frac{\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}[f'(x+p) - f' - pf''] - \frac{1}{6}\frac{f''p^3\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}\cdot\left[f''' + \frac{3}{8}f^{\text{iv}}p + \frac{1}{10}f^{\text{v}}p^2 + \frac{1}{48}f^{\text{vi}}p^3 + \ldots\right]
\end{aligned}\right\} \text{X}$$

so hat man:

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &= k + kl + \ldots \\
K_2 &= \frac{1}{2}k^2 + k^2l + \ldots \\
K_3 &= \frac{1}{3!}k^3 +
\end{aligned}\right\} \text{XI}$$

Dies in die Gleichung 14) eingeführt, ergibt:

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = &\left[\varphi(x+p) + k\varphi'(x+p) + \frac{k^2}{2}\varphi''(x+p) + \frac{k^3}{6}\varphi'''(x+p) + \ldots\right] + \\
&+ kl[\varphi'(x+p) + k\varphi''(x+p) + \ldots] + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(z) &= \varphi(x+p+k) + kl\varphi'(x+p+k) + \ldots \\
\varphi(z) &= \varphi(x+p+k+kl) + \ldots
\end{aligned}\right\} 14^*)$$

$$p + k = \frac{\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}[f(x+p) - pf' - p^2f'']$$

Diese Gleichung macht uns mit einer neuen Form der Anfangsglieder der am Ende von §. 4 $\psi(\alpha, x)$ genannten Function bekannt, nämlich:

$$\psi(\alpha, x) = p + k + kl + \ldots$$

Die Convergenz der Glieder ist aber hier eine viel raschere. Denn es ist:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(z) &= \varphi(x+p) && \text{bereits bis auf einschliesslich Glieder dritter Ordnung genau} \\
&= \varphi(x+p+k) && \text{„ „ „ „ „ sechster „ „} \\
&= \varphi(x+p+k+kl) && \text{„ „ „ „ „ neunter „ „}
\end{aligned}\right\} 15)$$

Behält man indess von l blos seinen ersten Theil

$$l_1 = \frac{pf'\zeta^2}{1-2ff''\zeta}\left[\frac{1}{2!}f''' + \frac{1}{3!}f^{\text{iv}}p + \frac{1}{4!}f^{\text{v}}p^2 + \ldots\right] = \frac{f}{p}\cdot\frac{\zeta^2}{1-2ff''\zeta^2}[f'(x+p) - f' - pf'']$$

bei, so ist:

$\varphi(x+p+k+kl_1)$ bis auf einschliesslich Glieder achter Ordnung genau.

Da übrigens p, wie §. 3 nachgewiesen wurde, von $\eta = \dfrac{\xi}{\sqrt{1-\left(\frac{f''}{f}\right)\xi^2}}$ blos um eine Grösse fünfter Ordnung abweicht, kann man ohne die Ordnung der Genauigkeit zu ändern in $\varphi(x+p)$, η statt p einsetzen. Allein auch wenn man $p+k$ abkürzt in:

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1-2ff''\zeta^2}}[f(x+\eta) - \eta f' - \eta^2 f''] = \eta + k'$$

begeht man nur einen Fehler siebenter Ordnung. Es ist desshalb auch noch mit diesen Vereinfachungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi(z) = \varphi(x+\eta) & \text{genau bis auf Grössen dritter Ordnung einschliesslich} \\ \varphi(z) = \varphi(x+\eta+k') & \text{„ „ „ „ sechster „ „} \end{array}\right\} 15^*)$$

Der ganze Unterschied besteht darin, dass jetzt ein etwas geringerer Theil der Glieder höherer Ordnung mitgenommen wird, als wenn man die ursprüngliche Form beibehält.

Aus dieser Darstellung erhellt wohl ohne weiteres, dass die Gleichungen 15) und 15*) zur näherungsweisen Berechnung der Functionen ganz vorzügliche Hilfsmittel darbieten werden. Es fällt übrigens hierbei, ausser der raschen Abnahme der successiven Reihenglieder noch das bereits in der Einleitung hervorgehobene Moment in die Wagschale, dass man, wenn man beim Gliede n-Ordnung stehen bleibt, nebst allen Gliedern einschliesslich der n. Ordnung, auch noch einen Theil der Glieder höherer Ordnungen mitnimmt und in Folge dessen der übrig bleibende Rest derselben im Allgemeinen einen geringeren Betrag erreicht. Von welcher Tragweite dies in speciellen Fällen werden kann, wird uns gleich das folgende Beispiel zeigen.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass auch die Grössen $L_1, L_2, L_3, \ldots; K_1, K_2, K_3, \ldots$, welche in den Gleichungen 12*) und 14) und den aus ihnen abgeleiteten auftreten, von der Form φ der zu suchenden Function unabhängig sind. Es gilt daher auch für diese Gleichungen die bei Gleichung 9*) gemachte Bemerkung.

§. 6.

Um die Einfachheit der soeben gewonnenen Formeln an einem concreten Beispiele nachzuweisen, wählen wir die Keppler'sche Gleichung:

$$\mathrm{E} = M + \varepsilon \sin \mathrm{E} \qquad 16)$$

und werden nacheinander als Functionen der mittleren Anomalie darstellen:

$$A \ldots \mathrm{E}$$

$$B \ldots \frac{r}{a} = 1 - \cos \mathrm{E}$$

$$C \ldots \log \frac{r}{a} = \log(1 - \varepsilon \cos \mathrm{E})$$

$$D \ldots v = 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\mathrm{E}}{2}\right).$$

Wir haben hier zu setzen $f = \sin M$, also:

$$\begin{aligned} \sin M &= f \quad = f^{IV} = f^{VIII} = \ldots \\ \cos M &= f' \quad = f^{V} \quad = f^{IX} \quad = \ldots \\ -\sin M &= f'' \quad = f^{VI} \quad = f^{X} \quad = \ldots \\ -\cos M &= f''' = f^{VII} = f^{XI} \quad = \ldots \end{aligned}$$

Damit werden die F-Functionen (System I):

$$\left.\begin{aligned} F_2^{(k)} &= -\sin M^{k+1}. \\ F_3^{(k)} &= -\sin M^{k} \cos M. \\ F_4^{(k)} &= +(3k+1) \sin M^{k+1}. \\ F_5^{(k)} &= +(10k+1) \sin M^{k} \cos M. \\ F_6^{(k)} &= -(15k^2+1) \sin M^{k+1} + 10k \sin M^{k-1} \cos^2 M. \\ F_7^{(k)} &= -(105k^2-49k+1) \sin M^{k} \cos M. \\ F_8^{(k)} &= +(105k^3-105k^2+63k+1) \sin M^{k+1} - 56k(5k-4) \sin M^{k-1} \cos^2 M. \end{aligned}\right\} \text{XII}$$

$$\left.\begin{aligned}
F_9^{(k)} &= +(1260k^3-2142k^2+1128k+1)\sin M^k\cos M-280k(k-1)\sin M^{k-2}\cos^3 M.\\
F_{10}^{(k)} &= -(945k^4-2520k^3+3150k^2-1320k+1)\sin M^{k+1}+6k(1050k^2-2380k+1371)\sin M^{k-1}\cos^2 M.\\
F_{11}^{(k)} &= -(17325k^4-62370k^3+84150k^2-38093k+1)\sin M^k\cos M+1540k(k-1)(10k-17)\sin M^{k-2}\cos M^3.\\
F_{12}^{(k)} &= +(10395k^5-51975k^4+117810k^3-124410k^2+49203k+1)\sin M^{k+1}-44k(3150k^3-13860k^2+\\
&\qquad +20739k-10006)\sin M^{k-1}\cos^2 M+15400k(k-1)(k-2)\sin M^{k-3}\cos M^4.\\
F_{13}^{(k)} &= +(270270k^5-1666665k^4+4169880k^3-4715139k^2+194573k+1)\sin M^k\cos M-\\
&\qquad -572k(k-1)(1050k^2-4270k+4433)\sin M^{k-2}\cos M^3.
\end{aligned}\right\}\ \text{XII}$$

. . . . . .

Substituirt man diese Werthe in II oder rechnet man direct nach III, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= \sin M.\varphi'.\\
X_2 &= \sin M^2.\frac{1}{2}\varphi''.\\
X_3 &= \sin M^3\left[\frac{1}{6}\varphi'''-\frac{1}{2}\varphi'\right].\\
X_4 &= \sin M^4\left[\frac{1}{24}\varphi^{IV}-\frac{1}{2}\varphi''-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}M\varphi'\right].\\
X_5 &= \sin M^5\left[\frac{1}{120}\varphi^{V}-\frac{1}{4}\varphi'''-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}M\varphi''+\frac{13}{24}\varphi'\right].\\
X_6 &= \sin M^6\left[\frac{1}{720}\varphi^{VI}-\frac{1}{12}\varphi^{IV}-\frac{1}{12}\operatorname{ctg}M\varphi'''+\frac{2}{3}\varphi''+\frac{17}{40}\operatorname{ctg}M\varphi'\right].\\
X_7 &= \sin M^7\left[\frac{1}{5040}\varphi^{VII}-\frac{1}{48}\varphi^{V}-\frac{1}{36}\operatorname{ctg}M\varphi^{IV}+\frac{19}{48}\varphi'''+\frac{61}{120}\operatorname{ctg}M\varphi''-\frac{1}{720}(541-60\operatorname{ctg}M^2)\varphi'\right].\\
X_8 &= \sin M^8\left[\frac{1}{40320}\varphi^{VIII}-\frac{1}{240}\varphi^{VI}-\frac{1}{144}\operatorname{ctg}M\varphi^{V}+\frac{11}{72}\varphi^{IV}+\frac{71}{240}\operatorname{ctg}M\varphi'''-\frac{1}{360}(368-35\operatorname{ctg}M^2)\varphi''-\right.\\
&\qquad \left.-\frac{1601}{1680}\operatorname{ctg}M\varphi'\right].\\
X_9 &= \sin M^9\left[\frac{1}{362880}\varphi^{IX}-\frac{1}{1440}\varphi^{VII}-\frac{1}{720}\operatorname{ctg}M\varphi^{VI}+\frac{25}{576}\varphi^{V}+\frac{9}{80}\operatorname{ctg}M\varphi^{IV}-\right.\\
&\qquad -\frac{1}{1440}(961-80\operatorname{ctg}^2M)\varphi'''-\frac{6329}{5040}\operatorname{ctg}M\varphi''+\frac{1}{40320}(47545-16128\operatorname{ctg}^2M)\varphi'\Big].\\
X_{10} &= \sin M^{10}\left[\frac{1}{3628800}\varphi^{X}-\frac{1}{10080}\varphi^{VIII}-\frac{1}{4320}\operatorname{ctg}M\varphi^{VII}+\frac{7}{720}\varphi^{VI}+\frac{91}{2880}\operatorname{ctg}M\varphi^{V}-\right.\\
&\qquad -\frac{1}{2160}(608-45\operatorname{ctg}^2M)\varphi^{IV}-\frac{1613}{2016}\operatorname{ctg}M\varphi'''+\frac{1}{5040}(8576-2583\operatorname{ctg}^2M)\varphi''+\\
&\qquad\qquad +\frac{1}{362880}(755191\operatorname{ctg}M-20160\operatorname{ctg}^3M)\varphi'\Big].\\
X_{11} &= \sin M^{11}\left[\frac{1}{39916800}\varphi^{XI}-\frac{1}{80640}\varphi^{IX}-\frac{1}{30240}\operatorname{ctg}M\varphi^{VIII}+\frac{31}{17280}\varphi^{VII}+\frac{101}{14400}\operatorname{ctg}M\varphi^{VI}-\right.\\
&\qquad -\frac{1}{17280}(1501-100\operatorname{ctg}^2M)\varphi^{V}-\frac{3337}{10080}\operatorname{ctg}M\varphi^{IV}+\frac{1}{80640}(95131-25760\operatorname{ctg}^2M)\varphi'''+\\
&\qquad +\frac{1}{362880}(1057081\operatorname{ctg}M-25200\operatorname{ctg}^3M)\varphi''-\frac{1}{3628800}(7231801-4954260\operatorname{ctg}^2M)\varphi'\Big].
\end{aligned}\right\}\ \text{XIII}$$

$$X_{12} = \sin M^{12}\Big[\frac{1}{479001600}\varphi^{XII} - \frac{1}{725760}\varphi^{X} - \frac{1}{241920}\operatorname{ctg} M\varphi^{IX} + \frac{17}{60480}\varphi^{VIII} + \frac{37}{28800}\operatorname{ctg} M\varphi^{VII} -$$
$$- \frac{1}{43200}(908 - 55\operatorname{ctg}^2 M)\varphi^{VI} - \frac{12167}{120960}\operatorname{ctg} M\varphi^{V} + \frac{1}{30240}(15968 - 3927\operatorname{ctg}^2 M)\varphi^{IV} +$$
$$+ \frac{1}{725760}(1430287\operatorname{ctg} M - 30800\operatorname{ctg}^3 M)\varphi''' - \frac{1}{1814400}(5424128 - 3373953\operatorname{ctg}^2 M)\varphi'' -$$
$$- \frac{1}{39916800}(180403983\operatorname{ctg} M - 15754200\operatorname{ctg}^3 M)\varphi'\Big] \qquad \text{XIII}$$

. . . . . .

Der Ausdruck: $\frac{\alpha}{1-\alpha f'}$, nach dessen steigenden Potenzen in Gleichung 8) entwickelt wurde, lautet in unserem speciellen Falle: $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\cos M}$, und da hier X_n mit dem Factor $\sin M^n$ behaftet ist, wird es sich empfehlen, zur Abkürzung einzuführen die, auch früher schon mit demselben Buchstaben bezeichnete Function:

$$\xi = \frac{\varepsilon \sin M}{1-\varepsilon\cos M} \qquad \text{XIV}$$

Die Gleichung 8) gestaltet sich dann folgendermassen:

$$\varphi(z) = \varphi + \left(\frac{X_1}{\sin M}\right)\xi + \left(\frac{X_2}{\sin M^2}\right)\xi^2 + \left(\frac{X_3}{\sin M^3}\right)\xi^3 + \ldots\left(\frac{X_n}{\sin M^n}\right)\xi^n + \ldots \qquad 17)$$

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich jetzt alle oben genannten Probleme mit grosser Leichtigkeit lösen. Sei nämlich zunächst:

$$A \ . \ . \ . \ \varphi(E) = E.$$

In diesem Falle haben wir zu setzen:

$$\varphi = M; \quad \varphi' = 1; \quad \varphi'' = \varphi''' = \varphi^{IV} = \ldots = 0$$

und erhalten dann aus dem Gleichungssysteme XIII, wenn wir unter Einem nach Potenzen von ctg M ordnen, unmittelbar:

$$E = M + \left(\xi - \frac{1}{2}\xi^3 + \frac{13}{24}\xi^5 - \frac{541}{720}\xi^7 + \frac{9509}{8064}\xi^9 - \frac{7231801}{3628800}\xi^{11} + \frac{1695106117}{479001600}\xi^{13} - \ldots\right) -$$
$$- \operatorname{ctg} M\left(\frac{1}{6}\xi^4 - \frac{17}{40}\xi^6 + \frac{1601}{1680}\xi^8 - \frac{755191}{362880}\xi^{10} + \frac{180403983}{39916800}\xi^{12} - \frac{20379134161}{2075673600}\xi^{14} + \ldots\right) +$$
$$+ \operatorname{ctg} M^2\left(\frac{1}{12}\xi^7 - \frac{2}{5}\xi^9 + \frac{82571}{60480}\xi^{11} - \frac{1843111}{453600}\xi^{13} + \ldots\right) - \qquad 18)$$
$$- \operatorname{ctg} M^3\left(\frac{1}{18}\xi^{10} - \frac{341}{864}\xi^{12} + \frac{1642849}{907200}\xi^{14} - \ldots\right) +$$
$$+ \operatorname{ctg} M^4\left(\frac{55}{1296}\xi^{13} - \ldots\right) - \ldots$$

Schreibt man nun abkürzungsweise:

$$E_0 = \xi - \frac{1}{2}\xi^3 + \frac{13}{24}\xi^5 - \frac{541}{720}\xi^7 + \frac{9509}{8064}\xi^9 - \frac{7231801}{3628800}\xi^{11} + \frac{1695106117}{479001600}\xi^{13} - \ldots$$
$$A_1 = \frac{1}{6}\xi^4 - \frac{17}{40}\xi^6 + \frac{1601}{1680}\xi^8 - \frac{755191}{362880}\xi^{10} + \frac{180403983}{39916800}\xi^{12} - \frac{20379134161}{2075673600}\xi^{14} + \ldots$$
$$A_2 = \frac{1}{12}\xi^7 - \frac{2}{5}\xi^9 + \frac{82571}{60480}\xi^{11} - \frac{1843111}{453600}\xi^{13} + \ldots \qquad \text{XV}$$
$$A_3 = \frac{1}{18}\xi^{10} - \frac{341}{864}\xi^{12} + \frac{1642849}{907200}\xi^{14} - \ldots$$
$$A_4 = \frac{55}{1296}\xi^{13} - \ldots$$

. . . . . .

so stellt sich E in der Form dar:

$$E = M + E_0 - A_1 \operatorname{ctg} M + A_2 \operatorname{ctg} M^2 - A_3 \operatorname{ctg} M^3 + A_4 \operatorname{ctg} M^4 - \ldots \qquad 18^*)$$

Die Einfachheit dieser Reihe, welche hier bis einschliesslich der 14. Potenz der Excentricität, also weiter als je bisher entwickelt wurde, wird wohl jeden überraschen, der sich mit diesem Probleme befasst hat, und sie ist, wie ich glaube, ein sprechender Beweis für die Eingangs gemachte Behauptung, dass das successive Mitnehmen von Theilen der Glieder höherer Ordnung den Bau des übrig bleibenden Restes derselben wesentlich vereinfacht.

Ein weiterer, sehr beachtenswerther Vortheil der Gleichung 18) besteht noch darin, dass die Ausdrücke $E_0, A_1, A_2, A_3 \ldots$ Functionen sind, die an Grösse sehr rasch abnehmen, da jede spätere gleich um drei Ordnungen in Bezug auf ξ, oder was auf dasselbe hinauskommt, in Bezug auf die Excentricität steigt. Es erreicht daher auch in der That die Summe aller auf das erste (E_0) folgenden Glieder selbst für die stärksten Excentricitäten, (etwa 0·35 bei Eva, Istria und Andromache), welche unter den Planetenbahnen unseres Sonnensystemes vorkommen, im Maximum kaum 6′. Man wird daher durch Anlegen einer Tafel mit einfachem Eingange, nämlich dem Argumente $\log \xi$ für das Hauptglied (E_0) und einer kleinen mit dem doppelten Eingange $\log \xi$ und M, oder noch bequemer ε und M die Berechnung der excentrischen Anomalie auf ein Minimum von Arbeit reduciren können. Die Berechnung einer solchen Tafel ist bereits in Angriff genommen, und ich hoffe, sie in einem Nachtrage zu dieser Abhandlung binnen kurzem veröffentlichen zu können. Sie soll bis $\log \xi = 9 \cdot 64$ ausgedehnt werden, um für alle Planeten unseres Systemes auszureichen. Denn da das Maximum ξ_m von ξ für $\cos M = \varepsilon$ eintritt und dieses Maximum:

$$\xi_m = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \operatorname{tg} \varphi$$

beträgt, wenn man unter φ den Excentricitätswinkel versteht, kann sie bis zu einer Excentricität $\varepsilon = 0 \cdot 4$ verwendet werden, — eine Excentricität, welche die grössten bisher bekannten noch um ein Geringes übertrifft.

Die oben (XV) für $E_0, A_1, \ldots$ gegebenen Reihen convergiren für grössere ξ sehr langsam; man kann aber diesen Uebelstand durch denselben Kunstgriff beseitigen, den ich schon bei einer anderen ähnlichen Gelegenheit[1] mit Vortheil angewendet habe, nämlich dadurch, dass man sie nicht nach steigenden Potenzen von ξ, sondern nach solchen von:

$$\eta = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{\varepsilon \sin M}{\sqrt{1-2\varepsilon \cos M + \varepsilon^2}}; \quad \xi = \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \qquad \text{XVI}$$

entwickelt; sie lauten dann:

$$\left.\begin{aligned}
E_0 &= \eta + \frac{1}{6}\eta^5 - \frac{1}{45}\eta^7 + \frac{83}{840}\eta^9 - \frac{947}{28350}\eta^{11} + \frac{613849}{7484400}\eta^{13} - \ldots \\
A_1 &= \frac{1}{6}\eta^4\left(1 - \frac{11}{20}\eta^2 + \frac{299}{280}\eta^4 - \frac{55351}{60480}\eta^6 + \frac{9064133}{6652800}\eta^8 - \frac{96774893}{69189120}\eta^{10} + \ldots\right) \\
A_2 &= \frac{1}{12}\eta^7\left(1 - \frac{13}{10}\eta^2 + \frac{13397}{5040}\eta^4 - \frac{549559}{151200}\eta^6 + \ldots\right) \\
A_3 &= \frac{1}{18}\eta^{10}\left(1 - \frac{101}{48}\eta^2 + \frac{250549}{50400}\eta^4 - \ldots\right) \\
A_4 &= \frac{55}{1296}\eta^{13}(1 - \ldots)
\end{aligned}\right\} \text{XV}^*$$

[1] Über die Berechnung der Differentialquotienten der wahren Anomalie und des Radius vector nach der Excentricität in stark excentrischen Bahnen. Sitzb. d. kais. Akad. d. Wiss. 83. Bd., II. Abth., p. 470.

Setzt man ferner:

$$A_1 = y \cos G$$
$$A_2 = y \sin G \qquad \text{XVII}$$

so erhält Gleichung 18) die Gestalt:

$$E = M + E_0 - y \frac{\sin (M - G)}{\sin M} \operatorname{ctg} M - A_3 \operatorname{ctg} M^3 + \ldots \qquad 18^{**})$$

in welcher sie bequemer zu berechnen ist.

Die Weiterentwickelung der Formel XVII liefert zunächst:

$$y = \frac{1}{6} \eta^4 \left(1 - \frac{11}{20} \eta^2 + \frac{299}{280} \eta^4 - \frac{47791}{60480} \eta^6 + \frac{7359353}{6652800} \eta^8 - \frac{55167041}{69189120} \eta^{10} + \ldots\right)$$
$$\operatorname{tg} G = \frac{1}{2} \eta^3 \left(1 - \frac{3}{4} \eta^2 + \frac{53}{45} \eta^4 - \frac{25219}{20160} \eta^6 + \ldots\right)$$

und hierauf unter m den Modul des Brigg'schen Logarithmensystemes verstanden:

$$\left.\begin{aligned} \log y &= \log \frac{1}{6} \eta^4 - m \left(\frac{11}{20} \eta^2 - \frac{5133}{5600} \eta^4 + \frac{195299}{756000} \eta^6 - \frac{1246784089}{3104640000} \eta^8 + \ldots\right) \\ G &= \frac{1}{2} \eta^3 \left(1 - \frac{3}{4} \eta^2 + \frac{53}{45} \eta^4 - \frac{26899}{20160} \eta^6 + \ldots\right) \end{aligned}\right\} \text{XVII*}$$

Das letzte Glied A_3 ctg M^3 in Gleichung 18**) beträgt selbst für $\varepsilon = 0 \cdot 4$ im Maximum nur wenige Bruchtheile einer Secunde es wurde daher eine weitere Transformation desselben nicht der Mühe werth gehalten.

Die Berechnung von η gestaltet sich sehr einfach, wenn man den Hilfswinkel y mittelst der Relation einführt:

$$\xi = \operatorname{tg} y.$$

Es wird dann:

$$\eta = \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \sin y.$$

Es wurde eben bemerkt, dass selbst für $\varepsilon = 0 \cdot 4$ das Glied A_3 ctg M^3 nur noch wenige Bruchtheile einer Bogensecunde erreicht. Bedenkt man nun, dass bei der gewöhnlichen Entwickelung der excentrischen Anomalie nach vielfachen des Sinus der mittleren Anomalie bereits bei $\varepsilon = 0 \cdot 25$ noch das Glied mit sin $12M$ mitgenommen werden muss, um eine ähnliche Genauigkeit zu erlangen, so sieht man daraus wohl aufs Deutlichste, wie vortheilhaft das successive Mitnehmen eines Theiles der Glieder höherer Ordnung auf die Convergenz der entstehenden Reihen wirkt. Ja wenn man einfach schreibt:

$$E = M + \eta = M + \sin y \quad \left(\operatorname{tg} y = \xi = \frac{\varepsilon \sin M}{1 - \varepsilon \cos M}\right)$$

so ist der Maximalfehler, den man begehen kann:

für $\varepsilon = 0 \cdot 25 : 0' 51''$ bei $M : \pm 46°$
$\varepsilon = 0 \cdot 30 : 1\ 51$ „ $M : \pm 44°$
$\varepsilon = 0 \cdot 35 : 3\ 35$ „ $M : \pm 41°$
$\varepsilon = 0 \cdot 40 : 6\ 25$ „ $M : \pm 38°$.

Suchen wir jetzt weiter:

$$B : \frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \cos E.$$

Hier ist:

$$\begin{aligned}
\varphi = 1 - \varepsilon \cos M \quad &+ \varepsilon \sin M = \varphi' = \varphi^{\text{v}} = \varphi^{\text{IX}} = \ldots \\
&+ \varepsilon \cos M = \varphi'' = \varphi^{\text{VI}} = \varphi^{\text{X}} = \ldots \\
&- \varepsilon \sin M = \varphi''' = \varphi^{\text{VII}} = \varphi^{\text{XI}} = \ldots \\
&- \varepsilon \cos M = \varphi^{\text{IV}} = \varphi^{\text{VIII}} = \varphi^{\text{XII}} = \ldots
\end{aligned}$$

Die Gleichungen XIII liefern daher sofort:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= + \varepsilon \sin^2 M \\
X_2 &= + \frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 M \cos M \\
X_3 &= - \frac{2}{3} \varepsilon \sin M^4 \\
X_4 &= - \frac{17}{24} \varepsilon \sin M^4 \cos M \\
X_5 &= + \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^2 M\right) \varepsilon \sin M^6 \\
X_6 &= + \frac{907}{720} \varepsilon \sin M^6 \cos M \\
X_7 &= - \left(\frac{368}{315} - \frac{223}{360} \operatorname{ctg}^2 M\right) \varepsilon \sin M^8 \\
X_8 &= - \left(\frac{98177}{40320} - \frac{7}{72} \operatorname{ctg}^2 M\right) \varepsilon \sin M^8 \cos M \\
X_9 &= + \left(\frac{1072}{567} - \frac{9199}{5040} \operatorname{ctg}^2 M\right) \varepsilon \sin M^{10} \\
X_{10} &= + \left(\frac{17802611}{3628800} - \frac{53}{90} \operatorname{ctg}^2 M\right) \varepsilon \sin M^{10} \cos M \\
X_{11} &= - \left(\frac{169504}{51975} - \frac{8966081}{1814400} \operatorname{ctg}^2 M + \frac{5}{72} \operatorname{ctg}^4 M\right) \varepsilon \sin M^{12} \\
X_{12} &= - \left(\frac{4852742017}{479001600} - \frac{4404983}{1814400} \operatorname{ctg}^2 M\right) \varepsilon \sin M^{12} \cos M \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \text{XVIII}$$

woraus, wenn man bedenkt, dass $\varepsilon \sin M = \xi(1 - \varepsilon \cos M)$, hervorgeht:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{r}{a} = (1 - \varepsilon \cos M) \Big[&\Big(1 + \xi^2 - \frac{2}{3} \xi^4 + \frac{4}{5} \xi^6 - \frac{368}{315} \xi^8 + \frac{1072}{567} \xi^{10} - \frac{169504}{51975} \xi^{12} + \ldots\Big) + \\
&+ \frac{1}{2} \xi^3 \operatorname{ctg} M \Big(1 - \frac{17}{12} \xi^2 + \frac{907}{360} \xi^4 - \frac{98177}{20160} \xi^6 + \frac{17802611}{1814400} \xi^8 - \\
&\qquad - \frac{4852742017}{239500800} \xi^{10} + \ldots\Big) - \\
&- \frac{1}{6} \xi^6 \operatorname{ctg}^2 M \Big(1 - \frac{223}{60} \xi^2 + \frac{9199}{840} \xi^4 - \frac{8966081}{302400} \xi^6 + \ldots\Big) + \\
&+ \frac{1}{24} \xi^9 \operatorname{ctg}^3 M \Big(\frac{7}{3} - \frac{212}{15} \xi^2 + \frac{4404983}{75600} \xi^4 - \ldots\Big) - \\
&- \frac{1}{120} \xi^{12} \operatorname{ctg} M^4 \Big(\frac{25}{3} - \ldots\Big) + \ldots \Big]
\end{aligned}\right\} 19)$$

Diese Reihe hat genau dasselbe Bildungsgesetz wie die Reihe für die excentrische Anomalie (Gleichung 18) und kann daher genau ebenso behandelt werden wie diese: man kann auch hier zur Vergrösserung der Convergenz die Grösse η statt ξ einführen und dann diese Gleichung ebenso wie Nr. 18 auf eine der Gleichung 18**) ähnliche Form bringen. Da indess der Radius vector selbst nur selten gebraucht wird, wollen wir uns dabei nicht aufhalten, sondern sogleich zur Entwickelung von dessen Logarithmus schreiten. Es sei also:

$$C \ldots \log \frac{r}{a} = \log(1 - \varepsilon \cos E).$$

Schreibt man in unseren Formeln $\varphi = \log(1 - \varepsilon \cos M)$, so wird:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi' &= +\xi.\\
\varphi'' &= +\xi \operatorname{ctg} M - \xi^2.\\
\varphi''' &= -\xi - 3 \operatorname{ctg} M \xi^2 + 2\xi^3.\\
\varphi^{iv} &= -\xi \operatorname{ctg} M + (4 - 3 \operatorname{ctg}^2 M)\xi^2 + 12 \operatorname{ctg} M \xi^3 - 6\xi^4.\\
\varphi^{v} &= +\xi + 15 \operatorname{ctg} M \xi^2 - 10(2 - 3 \operatorname{ctg}^2 M)\xi^3 - 60 \operatorname{ctg} M \xi^4 + 24\xi^5.\\
\varphi^{vi} &= +\xi \operatorname{ctg} M - (16 - 15 \operatorname{ctg}^2 M)\xi^2 - 30(5 \operatorname{ctg} M - \operatorname{ctg} M^3)\xi^3 + 30(4 - 9 \operatorname{ctg} M^2)\xi^4 + 360 \operatorname{ctg} M \xi^5 - 120\xi^6.\\
\varphi^{vii} &= -\xi - 63 \operatorname{ctg} M \xi^2 + 14(13 - 30 \operatorname{ctg}^2 M)\xi^3 + 210(7 \operatorname{ctg} M - 3 \operatorname{ctg} M^3)\xi^4 - 840(1 - 3 \operatorname{ctg}^2 M)\xi^5 -\\
&\qquad - 2520\xi^6 + \ldots\\
\varphi^{viii} &= -\xi \operatorname{ctg} M + (64 - 63 \operatorname{ctg}^2 M)\xi^2 + 84(18 \operatorname{ctg} M - 5 \operatorname{ctg} M^3)\xi^3 - 126(16 - 60 \operatorname{ctg} M^2 + 5 \operatorname{ctg} M^4)\xi^4 -\\
&\qquad - 5040(3 \operatorname{ctg} M - 2 \operatorname{ctg} M^3)\xi^5 + \ldots\\
\varphi^{ix} &= +\xi + 255 \operatorname{ctg} M \xi^2 - 10(164 - 441 \operatorname{ctg} M^2)\xi^3 - 1260(22 \operatorname{ctg} M - 15 \operatorname{ctg} M^3)\xi^4 + \ldots\\
\varphi^{x} &= +\xi \operatorname{ctg} M - (256 - 255 \operatorname{ctg}^2 M)\xi^2 - 30(475 \operatorname{ctg} M - 147 \operatorname{ctg} M^3)\xi^3 + \ldots\\
\varphi^{xi} &= -\xi - 1023 \operatorname{ctg} M \xi^2 + \ldots\\
\varphi^{xii} &= -\xi \operatorname{ctg} M + \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \text{XIX}$$

Dies in die Gleichungen XIII eingesetzt, liefert:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= +\xi \sin M\\
X_2 &= +\sin^2 M\left[\frac{1}{2} \operatorname{ctg} M \xi - \frac{1}{2}\xi^2\right]\\
X_3 &= -\sin M^3\left[\frac{2}{3}\xi + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} M \xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3\right]\\
X_4 &= -\sin M^4\left[\frac{17}{24} \operatorname{ctg} M \xi - \frac{1}{24}(16 - 3 \operatorname{ctg}^2 M)\xi^2 - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} M \xi^3 + \frac{1}{4}\xi^4\right]\\
X_5 &= +\sin M^5\left[\frac{1}{30}(24 - 5 \operatorname{ctg}^2 M)\xi + \frac{25}{24} \operatorname{ctg} M \xi^2 - \frac{1}{12}(8 - 3 \operatorname{ctg}^2 M)\xi^3 - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} M \xi^4 + \frac{1}{5}\xi^5\right]\\
X_6 &= +\sin M^6\left[\frac{907}{720} \operatorname{ctg} M \xi - \frac{1}{720}(736 - 375 \operatorname{ctg}^2 M)\xi^2 - \frac{1}{24}(33 \operatorname{ctg} M - \operatorname{ctg} M^3)\xi^3 +\right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{24}(16 - 9 \operatorname{ctg}^2 M)\xi^4 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} M \xi^5 - \frac{1}{6}\xi^6\right]\\
X_7 &= -\sin M^7\left[\frac{1}{2520}(2944 - 1561 \operatorname{ctg}^2 M)\xi + \frac{307 \operatorname{ctg} M - 12 \operatorname{ctg} M^3}{144}\xi^2 - \frac{448 - 375 \operatorname{ctg}^2 M}{360}\xi^3 -\right.\\
&\qquad \left. - \frac{1}{24}(41 \operatorname{ctg} M - 3 \operatorname{ctg}^3 M)\xi^4 + \frac{1}{6}(4 - 3 \operatorname{ctg}^2 M)\xi^5 + \frac{1}{2}\xi^6 \operatorname{ctg} M \ldots\right]
\end{aligned}\right\} \text{XX}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
X_8 &= -\sin M^8\Big[\frac{1}{5760}(11811\operatorname{ctg}M-560\operatorname{ctg}^3M)\xi-\frac{68608-64967\operatorname{ctg}^2M}{40320}\xi^2-\frac{4646\operatorname{ctg}M-495\operatorname{ctg}^3M}{1440}\xi^3+\\
&\qquad+\frac{1}{960}(1408-1660\operatorname{ctg}^2M+15\operatorname{ctg}M^4)\xi^4+\frac{1}{24}(49\operatorname{ctg}M-6\operatorname{ctg}M^3)\xi^5-\ldots\Big]\\
X_9 &= +\sin M^9\Big[\Big(\frac{1072}{567}-\frac{9199}{5040}\operatorname{ctg}^2M\Big)\xi+\Big(\frac{107063}{24192}\operatorname{ctg}M-\frac{21}{40}\operatorname{ctg}^3M\Big)\xi^2-\\
&\qquad-\Big(\frac{6616}{2835}-\frac{9433}{2880}\operatorname{ctg}M^2+\frac{1}{24}\operatorname{ctg}M^4\Big)\xi^3-\Big(\frac{3271}{720}\operatorname{ctg}M-\frac{83}{96}\operatorname{ctg}M^3\Big)\xi^4+\ldots\Big]\\
X_{10} &= +\sin M^{10}\Big[\Big(\frac{17802611}{3628800}\operatorname{ctg}M-\frac{53}{90}\operatorname{ctg}M^3\Big)\xi-\Big(\frac{42376}{14175}-\frac{1084109}{241920}\operatorname{ctg}^2M+\frac{1}{16}\operatorname{ctg}^4M\Big)\xi^2-\\
&\qquad-\Big(\frac{292897}{40320}\operatorname{ctg}M-\frac{1043}{640}\operatorname{ctg}M^3\Big)\xi^3+\ldots\Big]\\
X_{11} &= -\sin M^{11}\Big[\Big(\frac{169504}{51975}-\frac{8966081}{1814400}\operatorname{ctg}^2M+\frac{5}{72}\operatorname{ctg}M^4\Big)\xi+\Big(\frac{33783535}{3628800}\operatorname{ctg}M-\frac{80379}{36288}\operatorname{ctg}M^3\Big)\xi^2-\ldots\Big]\\
X_{12} &= -\sin M^{12}\Big[\Big(\frac{4852742017}{479001600}\operatorname{ctg}M-\frac{4404983}{1814400}\operatorname{ctg}M^3\Big)\xi-\ldots\Big]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\}\quad \text{XX}
$$

Damit erhält man ohne weitere Mühe (nach Formel 17), wenn man unter Einem wieder gleich nach Potenzen von $\operatorname{ctg}M$ ordnet und wie früher mit m den Modul des Logarithmensystems bezeichnet:

$$
\left.
\begin{aligned}
\log\left(\frac{r}{a}\right) = \log(1-\varepsilon\cos M)+m\Big[&\Big(\xi^2-\frac{7}{6}\xi^4+\frac{9}{5}\xi^6-\frac{87}{28}\xi^8+\frac{96169}{2835}\xi^{10}-\frac{1131437}{103950}\xi^{12}+\ldots\Big)+\\
&+\operatorname{ctg}M\Big(\frac{1}{2}\xi^3-\frac{29}{24}\xi^5+\frac{2017}{720}\xi^7-\frac{86579}{13440}\xi^9+\frac{53583581}{3628800}\xi^{11}-\\
&\qquad-\frac{16185378277}{479001600}\xi^{13}+\ldots\Big)-\\
&-\operatorname{ctg}M^2\Big(\frac{7}{24}\xi^6-\frac{1001}{720}\xi^8+\frac{195679}{40320}\xi^{10}-\frac{54168577}{3628800}\xi^{12}+\ldots\Big)+\\
&+\operatorname{ctg}M^3\Big(\frac{2}{9}\xi^9-\frac{2279}{1440}\xi^{11}+\frac{957367}{129600}\xi^{13}-\ldots\Big)-\\
&-\operatorname{ctg}M^4\Big(\frac{109}{576}\xi^{12}-\ldots\Big)\Big]
\end{aligned}
\right\}\quad 20)
$$

Wie man sieht, ist auch diese Gleichung den früheren (18 und 19) ganz analog gebaut; auch sie wird durch Einführung von η statt ξ viel convergenter, verhält sich überhaupt in jeder Beziehung ganz so wie die Reihe für die excentrische Anomalie. Es ist nämlich in η ausgedrückt:

$$
\left.
\begin{aligned}
\log\left(\frac{r}{a}\right) = \log(1-\varepsilon\cos M)+m\Big[&\Big(\eta^2-\frac{1}{6}\eta^4+\frac{7}{15}\eta^6-\frac{29}{140}\eta^8+\frac{1157}{2835}\eta^{10}-\frac{84961}{311850}\eta^{12}+\ldots\Big)+\\
&+\operatorname{ctg}M\Big(\frac{1}{2}\eta^3-\frac{11}{24}\eta^5+\frac{517}{720}\eta^7-\frac{6691}{8064}\eta^9+\frac{4134701}{3628800}\eta^{11}-\ldots\Big)-\\
&-\operatorname{ctg}M^2\Big(\frac{7}{24}\eta^6-\frac{371}{720}\eta^8+\frac{2801}{2688}\eta^{10}-\frac{5979427}{3628800}\eta^{12}+\ldots\Big)+\\
&+\operatorname{ctg}M^3\Big(\frac{2}{9}\eta^9-\frac{839}{1440}\eta^{11}+\frac{92831}{64800}\eta^{13}-\ldots\Big)-\\
&-\operatorname{ctg}M^4\Big(\frac{109}{576}\eta^{12}-\ldots\Big)+\ldots\ldots\Big]
\end{aligned}
\right\}\quad 20^*)
$$

Bereits das in ctg M^3 multiplicirte Glied hat für keinen der Planeten unseres Sonnensystems einen Einfluss auf die fünfte Decimale von $\log\left(\frac{r}{a}\right)$ und das in ctg M^4 auch keinen mehr auf die siebente. Schreibt man nun wieder:

$$\left.\begin{aligned}
r_0 &= m\left[\eta^2-\frac{1}{6}\eta^4+\frac{7}{15}\eta^6-\frac{29}{140}\eta^8+\frac{1157}{2835}\eta^{10}-\frac{84961}{311850}\eta^{12}+\ldots\right]\\
\gamma\sin\Gamma &= m\left[\frac{7}{24}\eta^6-\frac{371}{720}\eta^8+\frac{2801}{2688}\eta^{10}-\frac{5979427}{3628800}\eta^{12}+\ldots\right]\\
\gamma\cos\Gamma &= m\left[\frac{1}{2}\eta^3-\frac{11}{24}\eta^5+\frac{517}{720}\eta^7-\frac{6691}{8064}\eta^9+\frac{4134701}{3628800}\eta^{11}-\ldots\right]
\end{aligned}\right\}\text{XXI}$$

so wird:

$$\log\frac{r}{a}=\log(1-\varepsilon\cos M)+r_0+\gamma\frac{\sin(M-\Gamma)}{\sin M}\operatorname{ctg}M+\ldots \qquad 20^{**})$$

Entwickelt man auch hier, so wie früher, die letzten beiden Gleichungen von XXI weiter, so erhält man successive:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma &= m\left[\frac{1}{2}\eta^3-\frac{11}{24}\eta^5+\frac{517}{720}\eta^7-\frac{6005}{8064}\eta^9+\frac{415867}{453600}\eta^{11}-\ldots\right]\\
\operatorname{tg}\Gamma &= \frac{7}{12}\eta^3\left(1-\frac{17}{20}\eta^2+\frac{4789}{3528}\eta^4-\frac{3228163}{2116800}\eta^6+\ldots\right)\\
\log\gamma &= \log\left(\frac{m}{2}\eta^3\right)-m\left[\frac{11}{12}\eta^2-\frac{1463}{1440}\eta^4+\frac{19489}{45360}\eta^6-\frac{6784589}{14515200}\eta^8+\ldots\right]\\
\Gamma &= \frac{7}{12}\eta^3-\frac{119}{240}\eta^5-\frac{4789}{6048}\eta^7-\frac{3468263}{3628800}\eta^9+\ldots
\end{aligned}\right\}\text{XXI*}$$

Die bei der Bildung der Gleichung 20) gewählte Gruppirung der Glieder ist zweifellos die einfachste und naturgemässeste; doch erkennt man beim Betrachten des Systemes der Gleichungen XX auf den ersten Blick, dass auch das Zusammenfassen der Glieder nach anderen Principien zu brauchbaren Resultaten führt. Nimmt man beispielsweise aus dem Ausdrucke:

$$\left(\frac{X_1}{\sin M}\right)\xi+\left(\frac{X_2}{\sin^2 M}\right)\xi^2+\left(\frac{X_3}{\sin^3 M}\right)\xi^3+\ldots$$

zuerst die sämmtlichen letzten Glieder, hierauf die vorletzten, dann die drittletzten u. s. w. heraus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{r}{a}\right) = \log(1-\varepsilon\cos M) &+ \left(\xi^2-\frac{1}{2}\xi^4+\frac{1}{3}\xi^6-\frac{1}{4}\xi^8+\frac{1}{5}\xi^{10}-\frac{1}{6}\xi^{12}+\ldots\right)+\\
&+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}M(\xi^3-\xi^5+\xi^7-\xi^9+\xi^{11}-\xi^{13}+\ldots)-\\
&-\left[\frac{2}{3}(\xi^4-\xi^6+\xi^8-\xi^{10}+\xi^{12}-\ldots)+\frac{1}{8}\operatorname{ctg}M^2(\xi^6-2\xi^8+3\xi^{10}-4\xi^{12}+\ldots)\right]-\\
&-\left[\frac{1}{24}\operatorname{ctg}M(17\xi^5-25\xi^7+33\xi^9-41\xi^{11}+49\xi^{13}-\ldots)-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{24}\operatorname{ctg}M^3(\xi^9-3\xi^{11}+6\xi^{13}-\ldots)\right]+\\
&+\left[\frac{2}{45}(18\xi^6-23\xi^8+28\xi^{10}-33\xi^{12}+\ldots)-\right.\\
&\qquad\left.\frac{1}{48}\operatorname{ctg}^2M(8\xi^6-25\xi^8+50\xi^{10}-83\xi^{12}+\ldots)-\frac{1}{64}\operatorname{ctg}M^4(\xi^{12}-\ldots)\right]+
\end{aligned}$$

$$+\left[\frac{1}{720}\operatorname{ctg} M(907\xi^7-1535\xi^9+2323\xi^{11}-3271\xi^{13}+\ldots)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{96}\operatorname{ctg} M^3(8\xi^9-33\xi^{11}+83\xi^{13}-\ldots)\right]-$$
$$-\left[\frac{8}{2835}(414\xi^8-603\xi^{10}+827\xi^{12}-\ldots)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{5760}\operatorname{ctg} M^2(3568\xi^8-9281\xi^{10}+18866\xi^{12}-\ldots)+\frac{1}{24}\operatorname{ctg} M^4(\xi^{12}\ldots)\right]+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Führt man nun hierin die leicht ersichtlichen Summationen aus und geht man dabei zugleich von den natürlichen auf künstliche Logarithmen mit dem Modul m über, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\log\left(\frac{r}{a}\right) = \log(1-\varepsilon\cos M)+\log(1+\xi^2)+m\Big[&-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\xi^4}{1+\xi^2}-\frac{2}{45}\cdot\frac{18\xi^6+13\xi^8}{(1+\xi^2)^2}+\right.\\
&\left.+\frac{8}{2835}\cdot\frac{414\xi^8+639\xi^{10}+260\xi^{12}}{(1+\xi^2)^3}-\ldots\right)+\\
&+\operatorname{ctg} M\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\xi^3}{1+\xi^2}-\frac{1}{24}\cdot\frac{17\xi^5+9\xi^7}{(1+\xi^2)^2}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{720}\cdot\frac{907\xi^7+1186\xi^9+439\xi^{11}}{(1+\xi^2)^3}-\ldots\right)-\\
&-\operatorname{ctg} M^2\left(\frac{1}{8}\,\frac{\xi^6}{(1+\xi^2)^2}+\frac{1}{48}\cdot\frac{8\xi^6-\xi^8-\xi^{10}}{(1+\xi^2)^3}+\ldots\right)+\\
&+\operatorname{ctg} M^3\left(\frac{1}{24}\cdot\frac{\xi^9}{(1+\xi^2)^3}-\ldots\right)-\\
&-\operatorname{ctg} M^4\left(\frac{1}{64}\cdot\frac{\xi^{12}}{(1+\xi^2)^4}+\ldots\right)+\ldots\Big]+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad 21)$$

Diese Gleichung liesse sich jetzt wohl noch wesentlich reduciren; da sie jedoch im Grunde genommen nur eine andere Form der Entwickelung nach steigenden Potenzen von η vorstellt, wollen wir uns damit nicht weiter aufhalten. Ähnliche Bemerkungen liessen sich auch an die Gleichung 22) knüpfen.

Was endlich die Entwickelung der wahren Anomalie betrifft, so sei:

$$D.\ldots v = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin E\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos E-\varepsilon}\right)$$

Man hat jetzt $\varphi = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{M}{2}\right)$ zu setzen, und erhält damit:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi' &= \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos M}\\
\varphi'' &= -\varphi'\xi\\
\varphi''' &= -\varphi'[\xi\operatorname{ctg} M-2\xi^2]\\
\varphi^{\text{iv}} &= +\varphi'[\xi+6\xi^2\operatorname{ctg} M-6\xi^3]\\
\varphi^{\text{v}} &= +\varphi'[\xi\operatorname{ctg} M-2(4-3\operatorname{ctg}^2 M)\xi^2-36\operatorname{ctg} M\xi^3+24\xi^4]\\
\varphi^{\text{vi}} &= -\varphi'[\xi+30\xi^2\operatorname{ctg} M-30(2-3\operatorname{ctg} M^2)\xi^3-240\operatorname{ctg} M\xi^4+120\xi^5]\\
\varphi^{\text{vii}} &= -\varphi'[\xi\operatorname{ctg} M-2(16-15\operatorname{ctg} M^2)\xi^2-90(5\operatorname{ctg} M-\operatorname{ctg} M^3)\xi^3+120(4-9\operatorname{ctg} M^2)\xi^4+1800\operatorname{ctg} M\xi^5\ldots]\\
\varphi^{\text{viii}} &= +\varphi'[\xi+126\operatorname{ctg} M\xi^2-42(13-30\operatorname{ctg} M^2)\xi^3-840(7\operatorname{ctg} M-3\operatorname{ctg} M^3)\xi^4+\ldots]
\end{aligned}\right\}\quad \text{XXII}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi^{IX} &= +\varphi'[\xi \operatorname{ctg} M - 2(64-63 \operatorname{ctg} M^2)\xi^2 - 252(18 \operatorname{ctg} M - 5 \operatorname{ctg} M^3)\xi^3 + \ldots] \\
\varphi^{X} &= -\varphi'[\xi + 510 \operatorname{ctg} M \xi^2 - \ldots] \\
\varphi^{XI} &= -\varphi'[\xi \operatorname{ctg} M - \ldots] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \text{XXII}$$

Die X lauten nun:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= +\varphi' \sin M. \\
X_2 &= -\frac{1}{2}\xi . \varphi' \sin M^2. \\
X_3 &= -\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{ctg} M \xi - \frac{1}{3}\xi^2\right]\varphi' \sin M^3. \\
X_4 &= -\left[\frac{1}{6} \operatorname{ctg} M - \frac{13}{24}\xi - \frac{1}{4} \operatorname{ctg} M \xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3\right]\varphi' \sin M^4. \\
X_5 &= +\left[\frac{13}{24} + \frac{17}{40} \operatorname{ctg} M \xi - \frac{1}{60}(34-3 \operatorname{ctg} M^2)\xi^2 - \frac{3}{10} \operatorname{ctg} M \xi^3 + \frac{1}{5}\xi^4\right]\varphi' \sin M^5. \\
X_6 &= +\left[\frac{17}{40} \operatorname{ctg} M - \frac{1}{720}(541-60 \operatorname{ctg} M^2)\xi - \frac{17}{24} \operatorname{ctg} M \xi^2 + \frac{1}{24}(14-3 \operatorname{ctg} M^2)\xi^3 + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{3} \operatorname{ctg} M \xi^4 - \frac{1}{6}\xi^5\right]\varphi' \sin M^6. \\
X_7 &= -\left[\frac{1}{720}(541-60 \operatorname{ctg} M^2) + \frac{1601}{1680} \operatorname{ctg} M \xi - \frac{1}{2520}(2431-750 \operatorname{ctg} M^2)\xi^2 - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{168}(169 \operatorname{ctg} M - 3 \operatorname{ctg} M^3)\xi^3 + \frac{1}{42}(25-9 \operatorname{ctg} M^2)\xi^4 + \frac{5}{14} \operatorname{ctg} M \xi^5 - \ldots\right]\varphi' \sin M^7. \\
X_8 &= -\left[\frac{1601}{1680} \operatorname{ctg} M - \frac{1}{40320}(47545-16128 \operatorname{ctg} M^2)\xi - \frac{1}{2880}(4873 \operatorname{ctg} M - 120 \operatorname{ctg} M^3)\xi^2 + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{960}(1133-630 \operatorname{ctg} M^2)\xi^3 + \frac{1}{16}(21 \operatorname{ctg} M - \operatorname{ctg} M^3)\xi^4 - \ldots\right]\varphi' \sin M^8. \\
X_9 &= +\left[\frac{1}{40320}(47545-16128 \operatorname{ctg} M^2) + \frac{1}{362880}(755191 \operatorname{ctg} M - 20160 \operatorname{ctg} M^3)\xi - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{181440}(309268-201285 \operatorname{ctg} M^2)\xi^2 - \frac{1}{288}(762 \operatorname{ctg} M - 55 \operatorname{ctg} M^3)\xi^3 + \ldots\right]\varphi' \sin M^9. \\
X_{10} &= +\left[\frac{1}{362880}(755191 \operatorname{ctg} M - 20160 \operatorname{ctg} M^3) - \frac{1}{3628800}(7231801-4954260 \operatorname{ctg} M^2)\xi - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{120960}(466129 \operatorname{ctg} M - 38892 \operatorname{ctg} M^3)\xi^2 + \ldots\right]\varphi' \sin M^{10}. \\
X_{11} &= -\left[\frac{1}{3628800}(7231801-4954260 \operatorname{ctg} M^2) + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{39916800}(180403983 \operatorname{ctg} M - 15754200 \operatorname{ctg} M^3)\xi - \ldots\right]\varphi' \sin M^{11}. \\
X_{12} &= -\left[\frac{1}{39916800}(180403983 \operatorname{ctg} M - 15754200 \operatorname{ctg} M^3) - \ldots\right]\varphi' \sin M^{12}. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \text{XXIII}$$

Wir haben also schliesslich, wenn wir wieder gleich nach Potenzen von ctg M ordnen:

$$\left.\begin{aligned} v-2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{M}{2}\right) &= v-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin M\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos M-\varepsilon}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos M}\Big[\Big(\xi-\xi^3+\frac{17}{12}\xi^5-\frac{167}{72}\xi^7+\frac{5519}{1344}\xi^9-\frac{13848251}{1814400}\xi^{11}+\ldots\Big)- \\ &\quad -\operatorname{ctg} M\Big(\frac{1}{3}\xi^4-\frac{11}{10}\xi^6+\frac{102}{35}\xi^8-\frac{130519}{18144}\xi^{10}+\frac{28620439}{1663200}\xi^{12}-\ldots\Big)+ \\ &\quad +\operatorname{ctg} M^2\Big(\frac{13}{60}\xi^7-\frac{1027}{840}\xi^9+\frac{284887}{60480}\xi^{11}-\ldots\Big) \\ &\quad -\operatorname{ctg} M^3\Big(\frac{43}{252}\xi^{10}-\frac{2947}{2160}\xi^{12}-\ldots\Big)+\ldots\Big] \end{aligned}\right\} \quad 22)$$

Zieht man es vor, die Mittelpunktsgleichung zu berechnen, so erreicht man dies, die halben Winkel beibehaltend, mit Hilfe der Relation:

$$2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{M}{2}\right) = M+2\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon\sin M}{1-\varepsilon\cos M+\sqrt{1-\varepsilon^2}} = M+2\operatorname{arctg}\frac{\xi}{1+\dfrac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos M}}$$

Rechnet man aber lieber mit ganzen Winkeln, so würde die Abtrennung des Bogens M von

$$\operatorname{arctg}\frac{\sin M\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos M-\varepsilon}$$

auf einen ziemlich complicirten Ausdruck führen. Man bemerkt aber sofort, dass sich der Bogen

$$\operatorname{arctg}\frac{\sin M\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos M-\varepsilon}$$

von dem Bogen

$$\operatorname{arctg}\frac{\sin M}{\cos M-\varepsilon} = M+\operatorname{arctg}\xi$$

nur um eine Grösse zweiter Ordnung in Bezug auf die Excentricität unterscheidet; trennen wir daher diesen Bogen ab, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\frac{\sin M\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos M-\varepsilon} &= M+\operatorname{arctg}\xi-\operatorname{arctg}\frac{\sin M(\cos M-\varepsilon)(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})}{(\cos M-\varepsilon)^2+\sin^2 M\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \\ &= M+\operatorname{arctg}\xi-\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi^2}{1+(1+\xi^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}}\;\frac{\operatorname{cor} M-\varepsilon}{\sin M}\right). \end{aligned}$$

Die Reihe 22) hat ebenfalls genau dasselbe Bildungsgesetz wie die Reihen 18), 19) und 20) für die excentrische Anomalie und den Radiusvector; sie ist aber zur Berechnung der wahren Anomalie nicht bequem. Schon die Berechnung des Gliedes $2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{M}{2}\right)$ oder des gleichgeltenden $\operatorname{arctg}\frac{\sin M\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos M-\varepsilon}$ ist ziemlich lästig. Diese Arbeit kann man sich indess nicht unerheblich erleichtern, wenn man bemerkt, dass die interessante Beziehung stattfindet:

$$\operatorname{arctg}\frac{\sin M\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos M-\varepsilon} = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} M}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}+\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon\sin M}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Die ganze weitere Reihe ist jedoch überdies mit dem Factor $\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos M}$ multiplicirt, was die Berechnung nach derselben, selbst unter Anwendung von Hilfstafeln, abermals erschwert. Man kann zwar ohne Mühe alles nach steigenden Potenzen von ξ entwickeln, allein es ändert dadurch die Reihe ihren Charakter. Vermöge der Bedeutung von $\xi=\frac{\varepsilon\sin M}{1-\varepsilon\cos M}$ ist nämlich:

$$\varepsilon = \frac{\xi}{\sin M + \xi \cos M} \qquad 1 - \varepsilon \cos M = \frac{1}{1 + \xi \operatorname{ctg} M}$$

$$\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}} = \operatorname{ctg}\frac{M}{2}\,\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{M}{2}+\xi}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{M}{2}-\xi}}\,; \qquad \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos M} = \sqrt{1+2\xi\operatorname{ctg} M - \xi^2}$$

und damit wird:

$$2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{M}{2}\right) = 2 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{M}{2}+\xi}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{M}{2}-\xi}} = M + \xi - \frac{1}{2}\xi^2 \operatorname{ctg} M + \frac{1}{6}(1+3\operatorname{ctg} M^2)\xi^3 -$$

$$- \frac{1}{8}(3\operatorname{ctg} M + 5\operatorname{ctg} M^3)\xi^4 + \frac{1}{40}(3 + 30\operatorname{ctg} M^2 + 35\operatorname{ctg} M^4)\xi^5 -$$

$$- \frac{1}{48}(15\operatorname{ctg} M + 70\operatorname{ctg} M^3 + 63\operatorname{ctg} M^5)\xi^6 +$$

$$+ \frac{1}{112}(5 + 105\operatorname{ctg} M^2 + 315\operatorname{ctg} M^4 + 231\operatorname{ctg} M^6)\xi^7 -$$

$$- \frac{1}{128}(35\operatorname{ctg} M + 315\operatorname{ctg} M^3 + 693\operatorname{ctg} M^5 + 429\operatorname{ctg} M^7)\xi^8 + \ldots$$

$$\sqrt{1+2\xi\operatorname{ctg} M - \xi^2} = 1 + \xi\operatorname{ctg} M - \frac{1}{2}(1+\operatorname{ctg} M^2)\xi^2 + \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} M + \operatorname{ctg} M^3)\xi^3 - \frac{1}{8}(1 + 6\operatorname{ctg}^2 M + 5\operatorname{ctg} M^4)\xi^4 +$$

$$+ \frac{1}{8}(3\operatorname{ctg} M + 10\operatorname{ctg} M^3 + 7\operatorname{ctg} M^5)\xi^5 - \frac{1}{16}(1 + 17\operatorname{ctg} M^2 + 39\operatorname{ctg} M^4 + 23\operatorname{ctg} M^6)\xi^6 +$$

$$+ \frac{1}{16}(5\operatorname{ctg} M + 37\operatorname{ctg} M^3 + 67\operatorname{ctg} M^5 + 35\operatorname{ctg} M^7)\xi^7 - \ldots$$

Substituirt man dies in Gleichung 22), so entsteht nach den entsprechenden Reductionen:

$$\left.\begin{aligned} v - M = {} & \left(2\xi - \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{28}{15}\xi^5 - \frac{184}{63}\xi^7 + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{29}{24}\xi^4 + \frac{539}{240}\xi^6 - \frac{43301}{8064}\xi^8 + \ldots\right)\operatorname{ctg} M + \\ & + \left(\frac{1}{6}\xi^5 + \frac{16}{15}\xi^7 + \ldots\right)\operatorname{ctg} M^2 - \left(\frac{1}{8}\xi^4 + \frac{13}{24}\xi^6 + \frac{99}{128}\xi^8 + \ldots\right)\operatorname{ctg} M^3 + \\ & + \left(\frac{1}{4}\xi^5 + \frac{5}{6}\xi^7 + \ldots\right)\operatorname{ctg} M^4 - \left(\frac{7}{16}\xi^6 + \frac{727}{384}\xi^8 + \ldots\right)\operatorname{ctg} M^5 + \left(\frac{5}{8}\xi^7 + \ldots\right)\operatorname{ctg} M^6 - \\ & - \left(\frac{149}{128}\xi^8 + \ldots\right)\operatorname{ctg} M^7 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad 23)$$

Es wachsen also jetzt, abgesehen von dem mit $\operatorname{ctg} M^2$ multiplicirten Gliede, wo der Coëfficient von ξ^3 ausnahmsweise verschwindet, die Potenzexponenten von ξ bei jeder höheren Potenz von $\operatorname{ctg} M$ nicht mehr, wie dies früher überall der Fall war, um je drei Einheiten, sondern nur um je eine Einheit, und es tritt überdies der Factor $\operatorname{ctg} M$ bereits bei den Gliedern zweiter Ordnung auf. Wollte man daher die Berechnung der Mittelpunktsgleichung, so wie die der excentrischen Anomalie und die des Radius vectors blos auf zwei Tafeln, eine mit einfachem und eine mit doppeltem Eingange, zurückführen, so würde die letztere bereits Glieder

zweiter Ordnung enthalten, die an der Grenze der Tafel (bei $\varepsilon = 0{\cdot}4$) auf mehr als 3° ansteigen. Es ist desshalb vortheilhafter, zwei Tafeln mit einfachem Eingange anzulegen, welche mit dem Argumente $\log \xi$ geben:

$$\mu_0 = 2\xi - \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{28}{15}\xi^5 - \frac{184}{63}\xi^7 + \ldots$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{29}{24}\xi^4 + \frac{539}{240}\xi^6 - \frac{43301}{8064}\xi^8 + \ldots$$

und nur die Summe der übrigen Glieder, welche wir mit v_1 bezeichnen wollen, in eine Tafel mit doppeltem Eingange zu vereinigen. Die Berechnung stellt sich noch etwas einfacher, wenn man schreibt:

$$\left.\begin{aligned} \mu_0 &= v_0 \cos V \\ \mu_1 &= v_0 \sin V \end{aligned}\right\} \quad \text{XXIV}$$

Die Mittelpunktsgleichung lautet dann:

$$v - M = v_0 \frac{\sin(M+V)}{\sin M} + v_1 \qquad 23^*)$$

wobei $\log v_0$ und V einer Tafel mit dem Argumente $\log \xi$ und v_1 einer mit den Argumenten ε und M zu entnehmen sind. Was die Grösse von v_1 betrifft, übersteigt es bei den stärksten Excentricitäten, die unter den Asteroidenbahnen vorkommen, kaum 9′.

Die Ausdrücke für μ_0 und μ_1 convergiren beträchtlich rascher, wenn wir in denselben ξ wieder durch η ersetzen; sie werden dann:

$$\left.\begin{aligned} v_0 \cos V &= 2\eta - \frac{1}{3}\eta^3 + \frac{37}{60}\eta^5 - \frac{65}{504}\eta^7 + \ldots \\ v_0 \sin V &= \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{17}{24}\eta^4 + \frac{79}{240}\eta^6 - \frac{70849}{40320}\eta^8 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \text{XXIV}^*$$

Die Weiterentwickelung dieser Formeln liefert zunächst:

$$v_0 = 2\eta - \frac{13}{48}\eta^3 + \frac{6897}{15360}\eta^5 + \frac{379691}{10321920}\eta^7 \ldots$$

$$\operatorname{tg} V = \frac{1}{4}\eta - \frac{5}{16}\eta^3 + \frac{17}{480}\eta^5 - \frac{61303}{80640}\eta^7 + \ldots$$

und hierauf:

$$\left.\begin{aligned} \log v_0 &= \log(2\eta) - m\left(\frac{13}{96}\eta^2 - \frac{9923}{46080}\eta^4 + \frac{1114009}{22224320}\eta^6 - \ldots\right) \\ V &= \frac{1}{4}\eta - \frac{61}{192}\eta^3 + \frac{847}{15360}\eta^5 - \frac{581023}{737280}\eta^7 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \text{XXIV}^{**}$$

Die Gleichung 18) oder die ihr gleichgeltende 18**) liefert meiner Ansicht nach, unter der Voraussetzung der Construction geeigneter Hilfstafeln die erste praktisch brauchbare Lösung der Keppler'schen Gleichung. Auf das Aufsuchen bequemer Auflösungsmethoden für dieselbe, haben sich aber bisher alle Arbeiten auf diesem Gebiete beschränkt. Die Lösung des eigentlichen Problemes der Planetenbewegung, nämlich die Ermittelung des Radius vector und der wahren Anomalie unmittelbar aus der Epoche, hat man, so viel ich weiss, überhaupt noch nie versucht, wenn man von den bekannten Reihenentwickelungen nach Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der mittleren Anomalie absieht, die wohl ein gewisses theoretisches Interesse, aber gar keinen

praktischen Werth besitzen. Die hier vorgeführten Gleichungen 19), 20) und 23) geben uns aber das Mittel an die Hand, aus der Epoche die wahre Anomalie und den Radius vector ebenso einfach und leicht, wie die excentrische Anomalie zu berechnen. Diese Untersuchungen haben daher auch zu den ersten praktisch verwerthbaren Formeln zur unmittelbaren Berechnung des Ortes eines Planeten in seiner Bahn aus seiner mittleren Anomalie geführt.

§. 7.

Durch die Anwendung des Formelsystemes 11) und VI des §. 3 auf die Keppler'sche Gleichung würden wir keine von den obigen wesentlich verschiedenen Resultate erlangen, indem durch die Einführung der Grösse η, welche mit der am Ende des eben angezogenen Paragraphen mit demselben Buchstaben bezeichneten identisch ist, den dortigen Erörterungen zu Folge, dieses Formelsystem im Grunde schon in Verwendung kam. Die Einführung der Grösse p, die in unserem Falle übergeht in:

$$p = \frac{2\xi}{1+\sqrt{1+2\xi^2}} = \frac{\sqrt{1+\eta^2}-\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}$$

würde in den Reihenentwickelungen nur die Coëfficienten der höheren Potenzen, von der fünften angefangen beträchtlich verkleinern. So lautet bei der excentrischen Anomalie die E_0 genannte Grösse in η und p ausgedrückt:

$$E_0 = \eta + \frac{1}{6}\eta^5 - \frac{1}{45}\eta^7 + \frac{83}{840}\eta^9 - \frac{947}{28350}\eta^{11} + \frac{613849}{7484400}\eta^{13} - \ldots$$

$$= p + \frac{1}{24}p^5 - \frac{1}{45}p^7 + \frac{83}{4480}p^9 - \frac{1583}{103400}p^{11} +$$

Da indess die raschere Convergenz der höheren Glieder nur für Tafelrechnungen einen Werth hätte, bei diesen aber der hierdurch erzielte Gewinn mehr als vollständig dadurch compensirt wird, dass die Berechnung des Argumentes p viel zeitraubender ist, als die des Argumentes η, wollen wir die Umsetzung der Reihen nach Potenzen von p unterlassen, und nur noch ganz kurz ein paar Näherungswerthe angeben, die aus unseren Formeln fliessen. Wenden wir uns zu diesem Behufe an die Gleichungen 15) und 15*), so haben wir jetzt:

$$p = \frac{2\xi}{1+\sqrt{1+2\xi^2}} = \frac{\sqrt{1+2\xi^2}-1}{\xi}$$

$$p + k = \frac{1}{\sin M} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}} [\sin(M+p) - p\cos M + p^2 \sin M]$$

$$= \frac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}} \left[\frac{\sin(M+p)}{\sin M} - p \operatorname{ctg} M + p^2\right]$$

und ebenso:

$$\eta = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

$$\eta + k' = \frac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}} \left[\frac{\sin(M+\eta)}{\sin M} - \eta \operatorname{ctg} M + \eta^2\right] = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \left[\frac{\sin(M+\eta)}{\sin M} - \eta \operatorname{ctg} M + \eta^2\right]$$

Begnügen wir uns also mit einer Genauigkeit bis einschliesslich der dritten Potenzen der Excentricität, so ist sehr einfach

$$\left.\begin{array}{lll}
E = M+p & \text{oder auch} & E = M+\eta \;{}^{1} \\[2ex]
\dfrac{r}{a} = 1-\varepsilon\cos(M+p) & \text{„ „} & \dfrac{r}{a} = 1-\varepsilon\cos(M+\eta) \\[2ex]
\log\dfrac{r}{a} = \log[1-\varepsilon\cos(M+p)] & \text{„ „} & \log\dfrac{r}{a} = \log[1-\varepsilon\cos(M+\eta)] \\[2ex]
r = \operatorname{arctg}\dfrac{\sin(M+p).\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos(M+p)-\varepsilon} & \text{„ „} & r = \operatorname{arctg}\dfrac{\sin(M+\eta).\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\cos(M+\eta)-\varepsilon} \\[2ex]
= \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}(M+p)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \operatorname{arctg}\dfrac{\varepsilon\sin(M+p)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} & \text{„ „} & = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}(M+\eta)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \operatorname{arctg}\dfrac{\varepsilon\sin(M+\eta)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}
\end{array}\right\} \quad 24)$$

Dabei ist zu bemerken, dass die Gleichungen für $\frac{r}{a}$ und $\log\frac{r}{a}$ bis auf Grössen vierter Ordnung einschliesslich genau sind, da $\cos(M+p)$ oder $\cos(M+\eta)$ selbst mit einer Grösse erster Ordnung multiplicirt ist.

Wollen wir jedoch Näherungswerthe, die genauer sind, so haben wir bis einschliesslich sechster Potenz der Excentricität noch immer einfach genug:

$$\left.\begin{array}{l}
E = M + \dfrac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}}\left[\dfrac{\sin(M+p)}{\sin M} - p\operatorname{ctg} M + p^2\right] \\[2ex]
\dfrac{r}{a} = 1-\varepsilon\cos\left[M + \dfrac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}}\left(\dfrac{\sin(M+p)}{\sin M} - p\operatorname{ctg} M + p^2\right)\right]
\end{array}\right\} \quad 25)$$

oder einfacher

$$\left.\begin{array}{l}
E = M + \dfrac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\left(\dfrac{\sin(M+\eta)}{\sin M} - \eta\operatorname{ctg} M + \eta^2\right) \\[2ex]
\dfrac{r}{a} = 1-\varepsilon\cos\left[M + \dfrac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\left(\dfrac{\sin(M+\eta)}{\sin M} - \eta\operatorname{ctg} M + \eta^2\right)\right]
\end{array}\right\} \quad 25^*)$$

u. s. w.

Die Einfachheit und Übersichtlichkeit der Reihen 18), 19), 20), 20*) und 23) gestattet uns auch noch aus diesen für die durch sie dargestellten Functionen, interessante Näherungswerthe herzustellen. So ist:

$$\begin{array}{lll}
E = M+\xi-\dfrac{1}{2}\xi^3\left(1+\dfrac{1}{3}\xi\operatorname{ctg} M\right) & + \text{Glieder fünfter und höherer Ordnungen} \\[2ex]
\dfrac{r}{a} = (1-\varepsilon\cos M)\left[1+\xi^2\left(1+\dfrac{1}{2}\xi\operatorname{ctg} M\right)\right] & + \text{„ vierter „ „ „} \\[2ex]
\log\dfrac{r}{a} = \log(1-\varepsilon\cos M)+m\xi^2\left(1+\dfrac{1}{2}\xi\operatorname{ctg} M\right) & + \text{„ vierter „ „ „} \\[2ex]
v = 2\xi\left[1+\dfrac{1}{4}\xi\operatorname{ctg} M\right] & + \text{„ dritter „ „ „}
\end{array}$$

Erinnern wir uns nun, dass $1+\xi\operatorname{ctg} M = \dfrac{1}{1-\varepsilon\cos M}$, so können wir die obigen Gleichungen auch so stellen

$$\left.\begin{array}{lll}
E = M+\xi-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\xi^3}{\sqrt[3]{1-\varepsilon\cos M}} & \text{genau bis einschliesslich Glieder vierter Ordnung} \\[2ex]
\dfrac{r}{a} = (1-\varepsilon\cos M)+\xi^2\sqrt{1-\varepsilon\cos M} & \text{„ „ „ „ dritter „} \\[2ex]
\log\dfrac{r}{a} = \log(1-\varepsilon\cos M)+m\left(\dfrac{\xi}{\sqrt[4]{1-\varepsilon\cos M}}\right)^2 & \text{„ „ „ „ dritter „} \\[2ex]
v = M+\dfrac{2\xi}{\sqrt[4]{1-\varepsilon\cos M}} & \text{„ „ „ „ zweiter „}
\end{array}\right\} \quad 26)$$

---

[1] Auf diesen eigentlich ziemlich nahe liegenden Näherungswerth hat eigenthümlicher Weise erst vor Kurzem (Ast. Nach. B. 99, p. 31) Herr Dr. N. Herz aufmerksam gemacht. Alle anderen, hier angegebenen sind, so viel ich weiss, neu.

Noch etwas genauere Näherungswerthe erhalten wir, wenn wir von den Gleichungen ausgehen:

$$\frac{r}{a} = (1-\varepsilon\cos M)\left[1+\eta^2\left(1+\frac{1}{2}\xi\operatorname{ctg}M\right)\right]$$

$$\log\frac{r}{a} = \log(1-\varepsilon\cos M)+m\eta^2\left(1+\frac{1}{2}\xi\operatorname{ctg}M\right)$$

$$v = 2\eta\left(1+\frac{1}{4}\xi\operatorname{ctg}M\right)$$

Das System dieser Näherungswerthe ist dann:

$$\left.\begin{aligned} E &= M+\eta \\ \frac{r}{a} &= (1-\varepsilon\cos M)+\eta^2\sqrt{1-\varepsilon\cos M} \\ \log\frac{r}{a} &= \log(1-\varepsilon\cos M)+m\frac{\eta^2}{\sqrt{1-\varepsilon\cos M}} \\ v &= M+\frac{2\eta}{\sqrt[4]{1-\varepsilon\cos M}} \end{aligned}\right\} \quad 27)$$