ZUR

THEORIE EINES SIMULTANEN SYSTEMS DREIER BINÄRER CUBISCHER FORMEN,

VON

DR. B. IGEL,

DOCENT AN DER K. K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 11. DECEMBER 1881.

Folgende Abhandlung ist die Fortsetzung meiner Arbeit[1] „Über ein Princip zur Erzeugung von Covarianten". Daselbst habe ich für ein System dreier binärer cubischer Formen zwei Systeme simultaner Covarianten aufgestellt, von denen das eine neun von der zweiten Ordnung und vom vierten Grade, das andere neun von der sechsten Ordnung und vom achten Grade enthält. Von dem Ersteren zeigte ich schon dort, dass sie sich aus bereits bekannten Formen zusammensetzen. Was das Letztere betrifft, so führte mich der Umstand, dass einerseits sechs derselben nur die Coëfficienten je zweier Grundformen enthalten, dieselben also nur simultane Covarianten eines Systems von zwei cubischen Formen sind, und dass andererseits zwei cubische Formen keine Covarianten von dieser Ordnung und diesem Grade besitzen, darauf, dass die Covarianten desselben ebenfalls zerlegbar sein müssen. Wie aber die Zerlegung durchzuführen ist und ob auch die übrigen drei, welche simultane Covarianten eines Systems dreier cubischer Formen sind, sich auf niedere Covarianten zurückführen lassen, konnte ich dort nicht ermitteln. Ebenso habe ich dort für dasselbe System von Formen vierundachtzig Invarianten vom zwölften Grade aufgestellt und auch von diesen konnte ich nur drei auf niedere Invarianten zurückführen. Erst in der letzten Zeit ist es mir durch eine andere Auffassung der dort zu Grunde gelegten Formen gelungen, eine Lösung eines Theiles der erwähnten Fragen zu erlangen.

Betreffs der Covarianten gibt die Lösung die vollständige Durchführung der Zerlegung der sechs Covarianten, welche, wie schon erwähnt, einem System von nur zwei Grundformen angehören. Von den übrigen drei, welche simultane Covarianten eines Systems von drei Grundformen sind, konnte ich bis jetzt keine Gewissheit erlangen, ob dieselben in niedere Covarianten zerlegbar sind oder nicht. Die Art der erwähnten Lösung scheint darauf zu führen, dass dieselben fundamentale Covarianten sind. In Bezug der erwähnten vierundachtzig Invarianten gibt die Lösung von sechs derselben ihre Zurückführung auf niedere Invarianten und von den übrigen die Zerlegung gewisser Summen je dreier derselben. Diese letzteren Beziehungen sind keineswegs als

[1] Denkschriften der mathem.-naturw. Cl. XLVI. Bd.

erschöpft zu betrachten, aber ich glaube, dass die Methode, welche zu ihnen geführt hat, hinreicht, um die noch etwa vorhandenen Beziehungen zu ermitteln. Damit habe ich in Kürze das Ziel folgender Arbeit gezeichnet.

Schon an dieser Stelle will ich darauf aufmerksam machen, dass in Folge der in dieser Arbeit erlangten Resultate sich die geometrische Interpretation in §. 10 der citirten Arbeit als unrichtig erweist. Ich werde darauf, wie sie in Wirklichkeit zu lauten hat, an anderer Stelle zurückkommen.

§. 1.

Sind:

$$f_1(x_1 x_2) = a_0 x_1^n + \frac{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots + a_n x_2^n$$

$$f_2(x_1 x_2) = b_0 x_1^n + \frac{n}{1} b_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{1.2} b_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots + b_n x_2^n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_n(x_1 x_2) = c_0 x_1^n + \frac{n}{1} c_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{1.2} c_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots + c_n x_2^n$$

n binäre Formen der $n$ten Ordnung und bildet man die Combinante:[1]

1) $$M = \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} f_1}{dx_1^{n-1}} & \frac{d^{n-1} f_1}{dx_1^{n-2} dx_2} & \dots & \frac{d^{n-1} f_1}{dx_2^{n-1}} \\ \frac{d^{n-1} f_2}{dx_1^{n-1}} & \frac{d^{n-1} f_2}{dx_1^{n-2} dx_2} & \dots & \frac{d^{n-1} f_2}{dx_2^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n-1} f_n}{dx_1^{n-1}} & \frac{d^{n-1} f_n}{dx_1^{n-2} dx_2} & \dots & \frac{d^{n-1} f_n}{dx_2^{n-1}} \end{vmatrix}$$

so lässt sich M, wenn n ungerade ist, linear durch die f ausdrücken, so dass es etwa folgende Form hat:

2) $$M = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n$$

Für ein gerades n ist diese Darstellung nicht möglich.

Beweis.

Die Form M lässt sich auch auf folgende Weise darstellen:

3) $$M = \begin{vmatrix} x_2^n, & -x_2^{n-1} x_1, & x_2^{n-2} x_1^2 & \dots & (-1)^n x_1^n \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_0 & l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{vmatrix}.$$

Um die Identität von 1) und 3) zu beweisen, mache ich von einer sehr bekannten Transformation Gebrauch.

[1] Die Combinante M und ihr Ausdruck 3) kommt in einer Arbeit von Sturm in Crelle's Journal, Bd. LXXXVI vor.

Es ist nämlich:

$$\begin{vmatrix} x_2^n, -x_2^{n-1}x_1 & \dots & (-1)^n x_1^n \\ a_0 \quad a_1 & \dots & a_n \\ b_0 \quad b_1 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots \\ i_0 \quad i_1 & \dots & i_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \\ x_1 & x_2 & & & \\ & x_1 & x_2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & x_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2^n & 0 & 0 & \\ 0 & a_0x_1+a_1x_2 & a_1x_1+a_2x_2 & \dots a_{n-1}x_1+a_nx_n \\ 0 & b_0x_1+b_1x_2 & b_1x_1+b_2x_2 & \dots b_{n-1}x_1+b_nx_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Dividirt man auf beiden Seiten durch x_2^n, so folgt die Identität von 1) und 3).

Die Quadrate des Rechteckes:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \dots a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 \dots b_n \\ \dots & \dots & \dots \\ i_0 & i_1 & i_2 \dots i_n \end{vmatrix},$$

welche die Coëfficienten von M sind, bezeichnen wir der Kürze wegen durch die folgenden Buchstaben:

$$A_0, A_1, A_2 \dots A_n,$$

so dass:

$$A_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \dots a_{n-1} \\ b_0 & b_1 & b_2 \dots b_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ i_0 & i_1 & i_2 \dots i_{n-1} \end{vmatrix} \dots \quad A_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \dots a_n \\ b_1 & b_2 \dots b_n \\ \dots & \dots \\ i_1 & i_2 \dots i_n \end{vmatrix}.$$

Wenn wir nun setzen:

$$\lambda_0 = A_0 \quad \lambda_1 = - \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \dots A_n \\ a_1 & a_2 \dots a_n \\ c_1 & c_2 \dots c_n \\ \dots & \dots \\ i_1 & i_2 \dots i_n \end{vmatrix}$$

$$\lambda_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \dots A_n \\ a_1 & a_2 \dots a_n \\ c_1 & c_2 \dots c_n \\ \dots & \dots \\ i_1 & i_2 \dots i_n \end{vmatrix}, \quad \lambda_n = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \dots A_n \\ a_1 & a_2 \dots a_n \\ b_1 & b_2 \dots b_n \\ d_1 & d_2 \dots d_n \\ \dots & \dots \end{vmatrix},$$

so besteht die Identität:

4) $$\lambda_0 M + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0.$$

Um dies einzusehen, entwickeln wir:

$$-\lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 - \lambda_3 f_3 \dots - \lambda_n f_n$$

nach Potenzen der x. Der Coëfficient von x^n hat, wie man leicht sieht, die Form:

$$\Sigma(A_\iota A'_\varkappa - A'_\iota A_\varkappa) + A_n A_0$$

und eine kleine Überlegung zeigt, dass:

$$A_\iota = A'_\iota$$
$$A_\varkappa = A'_\varkappa$$

ist, so dass der Coëfficient von x

$$A_0\, A_n$$

ist. Was die übrigen Coëfficienten von M betrifft, so sieht man sehr leicht, dass das Aggregat der Producte der Adjungirten irgend eines A in die entsprechenden Coëfficienten der Formen immer verschwindet, wenn der Index dieser Coëfficienten mit demjenigen des A nicht übereinstimmt. Es bleibt daher in jedem Coëfficienten nur ein A zurück, welches mit der Summe der Producte seiner Adjungirten in die Coëfficienten der Formen multiplicirt ist und denselben Index, wie diese, hat.

Es ist also z. B. der Coëfficient von

$$x_1^{n-1} x_2\,,\quad x_1^{n-2} x_2^2$$

$$A_1\, A_n \qquad A_2\, A_n$$

Somit ist der erste Theil des Satzes bewiesen.

Der Grund, warum bei geradem n eine solche Darstellung nicht möglich ist, liegt darin, dass der Coëfficient von x_1^n in diesem Falle ausser $A_0\, A_n$ ein Product $A_\iota\, A_\varkappa$ enthält, welches nicht verschwindet.

§. 2.

Für den speciellen Fall von drei binären cubischen Formen habe ich den obigen Satz in der schon oft citirten Arbeit bewiesen. Ist nämlich:

$$5)\qquad M = \begin{vmatrix} x_2^3, & -x_2^2 x_1, & x_2 x_1^2, & -x_1^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

die Combinante der drei cubischen Formen, so dass die Coëfficienten derselben

$$A_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad A_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

sind, so besteht die Identität

$$6)\qquad \lambda_0 M + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0,$$

wo:

$$\lambda_0 = 9 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \lambda_1 = -\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \lambda_3 = -\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Eine leichte Überlegung führt darauf, dass die drei Verhältnisse:

$$\lambda_1 : \lambda_0,\ \lambda_2 : \lambda_0,\ \lambda_3 : \lambda_0$$

Invarianten sein müssen, was man durch eine leichte Rechnung in folgender Weise bestätigt.

Entwickelt lautet die Determinante für λ_1:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = & -3\,\{a_0(b_1c_3-b_3c_1)+a_1(b_3c_0-b_0c_3)+a_3(b_0c_1-b_1c_0)\}\,(b_2c_3-b_3c_2) \\
& -3\,\{a_0(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_0-b_0c_3)+a_3(b_0c_2-b_2c_0)\}\,(b_3c_1-b_1c_3) \\
& -9\,\{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\}\,(b_1c_2-b_2c_1) \\
= & +3a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_0 \end{vmatrix}\left\{\begin{vmatrix} b_0 & b_3 \\ c_0 & c_3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} b_1 & h_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right\} + 3a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_2 & c_1 \end{vmatrix}\left\{\begin{vmatrix} b_0 & b_3 \\ c_0 & c_3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right\} \\
& -3a_3(b_0c_1-b_1c_0)(b_2c_3-b_3c_2)-3a_3(b_0c_2-b_2c_0)(b_3c_1-b_1c_3) \\
& -9a_3(b_1c_2-b_2c_1)^2.
\end{aligned}$$

Wegen der Identität:

$$\begin{aligned}
& (b_0c_1-b_1c_0)(b_2c_3-b_3c_2)+(b_0c_2-b_2c_0)(b_3c_1-b_1c_3) \\
& = (b_1c_2-b_2c_1)(b_3c_0-b_0c_3)
\end{aligned}$$

geht das letzte Glied über in:

$$3a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\left\{\begin{vmatrix} b_0 & b_3 \\ c_0 & c_3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right\},$$

folglich der ganze Ausdruck für λ_1 in

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 3\left\{\begin{vmatrix} b_0 & b_3 \\ c_0 & c_3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right\}\left\{a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right\} \\
&= 3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} . P_1,
\end{aligned}$$

wo P_1 die einfachste Invariante von f_2 und f_3 ist.

Für λ_2 und λ_3 findet man ebenso:

$$\lambda_2 = 3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} . P_2,\quad \lambda_3 = 3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\; P_3$$

Dividirt man 6) durch A_3, so erhält man:

7) $$3M = P_1f_1+P_2f_2+P_3f_3.$$

Diese Identität findet sich, wie ich erst kürzlich erinnert wurde, bei Clebsch.[1]

§. 3.

Bildet man aus den drei cubischen Formen folgende Formen:

$$X_1 = \frac{f_2(x_1x_2)f_3(y_1y_2)-f_2(y_1y_2)f_3(x_1x_2)}{x_1y_2-x_2y_1} = \varphi_1x_1^2+\varphi_2x_1x_2+\varphi_3x_2^2$$

$$X_2 = \frac{f_3(x_1x_2)f_1(y_1y_2)-f_3(y_1y_2)f_1(x_1x_2)}{x_1y_2-x_2y_1} = \psi_1x_1^2+\psi_2x_1x_2+\psi_3x_2^2$$

$$X_3 = \frac{f_1(x_1x_2)f_2(y_1y_2)-f_1(y_1y_2)f_2(x_1x_2)}{x_1y_2-x_2y_1} = \chi_1x_1^2+\chi_2x_1x_2+\chi_3x_2^2,$$

[1] Theorie der binären algebraischen Formen, p. 449.

so ist, wie ich l. c. nachgewiesen habe,

$$\pi = \begin{vmatrix} \varphi_1(y_1 y_2) & \varphi_2(y_1 y_2) & \varphi_3(y_1 y_2) \\ \psi_1(y_1 y_2) & \psi_2(y_1 y_2) & \psi_3(y_1 y_2) \\ \chi_1(y_1 y_2) & \chi_2(y_1 y_2) & \chi_3(y_1 y_2) \end{vmatrix}$$

eine simultane Covariante der drei cubischen Formen. Ich will nun zeigen, dass dieselbe identisch verschwindet. Es ist nämlich:

$$9)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1(y_1 y_2) &= (10)_{23} y_1^2 + (20)_{23} y_1 y_2 + (30)_{23} y_2^2 \\ \varphi_2(y_1 y_2) &= (20)_{23} y_1^2 + \{(30)_{23} + (21)_{23}\} y_1 y_2 + (31)_{23} y_2^2 \\ \varphi_3(y_1 y_2) &= (30)_{23} y_1^2 + (31)_{23} y_1 y_2 + (32)_{23} y_2^2 \end{aligned} \right.$$

$$10)\quad \left\{ \begin{aligned} \psi_1(y_1 y_2) &= (10)_{31} y_1^2 + (20)_{31} y_1 y_2 + (30)_{31} y_2^2 \\ \psi_2(y_1 y_2) &= (20)_{31} y_1^2 + \{(30)_{31} + (21)_{31}\} y_1 y_2 + (31)_{31} y_2^2 \\ \psi_3(y_1 y_2) &= (30)_{31} y_1^2 + (31)_{31} y_1 y_2 + (32)_{31} y_2^2 \end{aligned} \right.$$

$$11)\quad \left\{ \begin{aligned} \chi_1(y_1 y_2) &= (10)_{12} y_1^2 + (20)_{12} y_1 y_2 + (30)_{12} y_2^2 \\ \chi_2(y_1 y_2) &= (20)_{12} y_1^2 + \{(30)_{12} + (21)_{12}\} y_1 y_2 + (31)_{12} y_2^2 \\ \chi_3(y_1 y_2) &= (30)_{12} y_1^2 + (31)_{12} y_1 y_2 + (32)_{12} y_2^2, \end{aligned} \right.$$

folglich ist der Coëfficient von y_1^6 in π folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} (b_1 c_0 - b_0 c_1) & (b_2 c_0 - b_0 c_2) & (b_3 c_0 - b_0 c_3) \\ (c_1 a_0 - c_0 a_1) & (c_2 a_0 - c_0 a_2) & (c_3 a_0 - c_0 a_3) \\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) & (a_2 b_0 - a_0 b_2) & (a_3 b_0 - a_0 b_3) \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man die erste Reihe dieser Determinante mit a_2, die zweite und dritte resp. mit b_0 und c_0 und addirt die letzteren zur ersten, so erhält man als Elemente derselben folgende Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{vmatrix},$$

welche sämmtlich Null sind. Der nächste Coëfficient in π ist:

$$\begin{vmatrix} (b_1 c_0 - b_0 c_1) & (b_2 c_0 - b_0 c_2) & (b_3 c_1 - b_1 c_3) \\ (c_1 a_0 - c_0 a_1) & (c_2 a_0 - c_0 a_2) & (c_3 a_1 - c_1 a_3) \\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) & (a_2 b_0 - a_0 b_2) & (a_3 b_1 - a_1 b_3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (b_1 a_0 - b_0 a_1) & (b_2 a_1 - b_1 a_2) & (b_3 a_0 - b_0 a_3) \\ (c_1 a_0 - c_0 a_1) & (c_2 a_1 - c_1 a_2) & (c_3 a_0 - c_0 a_3) \\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) & (a_2 b_1 - a_1 b_2) & (a_3 b_0 - a_0 b_3) \end{vmatrix}$$

Transformirt man diese Determinanten durch das eben angegebene Verfahren, so verschwindet in der ersten Determinante das erste und zweite Element der ersten Zeile und das dritte Element derselben wird:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix},$$

so dass die ganze Determinante in die folgende übergeht:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (c_1 a_0 - c_0 a_1) & (c_2 a_0 - c_0 a_2) \\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) & (a_2 b_0 - a_0 b_2) \end{vmatrix}.$$

Die zweite Determinante geht ebenso in:

$$\begin{vmatrix} a_0\, b_0\, c_0 \\ a_2\, b_2\, c_2 \\ a_1\, b_1\, c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (c_1 a_0 - c_0 a_1) & (c_3 a_0 - c_0 a_3) \\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) & (c_3 b_0 - c_0 b_3) \end{vmatrix}$$

über. Da aber bekanntlich:

$$\begin{vmatrix} (c_1 a_0 - c_0 a_1) & (c_2 a_0 - c_0 a_2) \\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) & (a_2 b_0 - a_0 b_2) \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} a_0\, b_0\, c_0 \\ a_2\, b_2\, c_2 \\ a_1\, b_1\, c_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (c_1 a_0 - c_0 a_1) & (c_3 a_0 - c_0 a_3) \\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) & (a_3 b_0 - a_0 b_3) \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} a_0\, b_0\, c_0 \\ a_3\, b_3\, c_3 \\ a_1\, b_1\, c_1 \end{vmatrix}$$

so folgt unmittelbar, dass auch der zweite Coëfficient von π identisch verschwindet. In gleicher Weise könnte man zeigen, dass alle Coëfficienten verschwinden; ich will aber einen originellen Beweis für das Verschwinden der Covariante π geben, der nur die Kenntniss, dass der erste Coëfficient von π verschwindet, voraussetzt. Um diesen Beweis führen zu können, muss ich einige Bemerkungen vorausschicken.

Bildet man die drei Jakobi'schen Determinanten der drei Formen und von ihnen wiederum die Jakobi'schen Determinanten, so ist bekanntlich:

$$\begin{aligned} J(J_{12} J_{13}) &= M.f_1 \\ J(J_{12} J_{23}) &= M.f_2 \\ J(J_{13} J_{23}) &= M.f_3, \end{aligned}$$

wo M die oben angegebene Combinante der drei Formen ist. Betrachtet man die Jakobi'schen Determinanten als Grundformen und bildet von den drei Jakobi'schen Covarianten derselben wiederum die Jakobi'schen Covarianten, so bestehen die Identitäten:

$$12) \quad \left\{ \begin{aligned} J\big(J(J_{12} J_{13}),\ J(J_{12} J_{23})\big) &= k_1 . M^2 . J_{12} \\ J\big(J(J_{12} J_{13}),\ J(J_{13} J_{23})\big) &= k_2 . M^2 . J_{13} \\ J\big(J(J_{12} J_{23}),\ J(J_{13} J_{23})\big) &= k_3 . M^2 . J_{23}, \end{aligned} \right.$$

wo die $\varkappa_i$ etwaige bestimmte Zahlen bedeuten, auf die es hin nicht weiter ankommt. Diese Bemerkung, an sich einleuchtend, lässt sich leicht verificiren.

Es ist nämlich:

$$J\big(J(J_{12} J_{13}), J(J_{12} J_{23})\big) = \begin{vmatrix} \dfrac{d(Mf_1)}{dx_1} & \dfrac{d(Mf_1)}{dx_2} \\ \dfrac{d(Mf_2)}{dx_1} & \dfrac{d(Mf_2)}{dx_2} \end{vmatrix}$$

$$= M^2 J_{12} + \begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx_1} & f_1 \\ \dfrac{df_2}{dx_1} & f_2 \end{vmatrix} M \frac{dM}{dx_2} + \begin{vmatrix} f_1 & \dfrac{df_1}{dx_2} \\ f_2 & \dfrac{df_2}{dx_2} \end{vmatrix} M \frac{dM}{dx_1}$$

Entwickelt man f_1 und f_2 nach dem bekannten Euler'schen Satze, so findet man die Richtigkeit der Behauptung. Für drei binäre Formen dritter Ordnung, z. B.:

$$13)\qquad J(J(J_{12}J_{13}),\ J(J_{12}J_{23})) = \begin{vmatrix} \frac{d^2J_{12}}{dx_1^2} & \frac{d^2J_{12}}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2J_{12}}{dx_2^2} \\ \frac{d^2J_{13}}{dx_1^2} & \frac{d^2J_{13}}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2J_{13}}{dx_2^2} \\ \frac{d^2J_{23}}{dx_1^2} & \frac{d^2J_{23}}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2J_{23}}{dx_2^2} \end{vmatrix} \cdot J_{12}.$$

Wir erhalten daher die Identität:

$$14)\qquad \begin{vmatrix} \frac{d^2J_{12}}{dx_1^2} & \frac{d^2J_{12}}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2J_{12}}{dx_2^2} \\ \frac{d^2J_{13}}{dx_1^2} & \frac{d^2J_{13}}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2J_{13}}{dx_2^2} \\ \frac{d^2J_{23}}{dx_1^2} & \frac{d^2J_{23}}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2J_{23}}{dx_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d^2f_1}{dx_1^2} & \frac{d^2f_1}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2f_1}{dx_2^2} \\ \frac{d^2f_2}{dx_1^2} & \frac{d^2f_2}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2f_2}{dx_2^2} \\ \frac{d^2f_3}{dx_1^2} & \frac{d^2f_3}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2f_3}{dx_2^2} \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} x_2^3, & -x_2^2x_1, & x_2x_1^2, & -x_1^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2$$

Nun ist, wie leicht zu sehen:

$$15)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}\,\frac{d^2J_{12}}{dx_1^2} &= 2\chi_1(x_1x_2) - P_3\,x_2^2 \\ \frac{1}{2}\,\frac{d^2J_{12}}{dx_1\,dx_2} &= \chi_2(x_1x_2) + P_3\,x_1x_2 \\ \frac{1}{2}\,\frac{d^2J_{12}}{dx_2^2} &= 2\chi_3(x_1x_2) - P_3\,x_1^2\,, \end{aligned} \right.$$

folglich erhalten wir, wenn wir diese Ausdrücke in die Determinante links einsetzen, folgende Identität:

$$16)\qquad \begin{vmatrix} 2\chi_1 - P_3x_2^2 & \chi_2 + P_3x_1x_2 & 2\chi_3 - P_3x_1^2 \\ 2\psi_1 - P_2x_2^2 & \psi_2 + P_2x_1x_2 & 2\psi_3 - P_2x_1^2 \\ 2\varphi_1 - P_1x_2^2 & \varphi_2 + P_1x_1x_2 & 2\varphi_3 - P_1x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \chi_1 & \chi_2 & -P_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & -P_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & -P_1 \end{vmatrix} x_1^2 + 4\begin{vmatrix} \chi_1 & P_3 & \chi_3 \\ \psi_1 & P_2 & \psi_3 \\ \varphi_1 & P_1 & \varphi_3 \end{vmatrix} x_1x_2 + 2\begin{vmatrix} -P_3 & \chi_2 & \chi_3 \\ -P_2 & \psi_2 & \psi_3 \\ -P_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix} x_2^2$$

$$= 4\begin{vmatrix} \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix} - 2\left\{ \begin{vmatrix} \chi_1 & \chi_2 & P_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & P_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & P_1 \end{vmatrix} x_1^2 + 2\begin{vmatrix} \chi_1 & \chi_3 & P_3 \\ \psi_1 & \psi_3 & P_2 \\ \varphi_1 & \varphi_3 & P_1 \end{vmatrix} x_1x_2 + \begin{vmatrix} P_3 & \chi_2 & \chi_3 \\ P_2 & \psi_2 & \psi_3 \\ P_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix} x_2^2 \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2^3, & -x_2^2x_1, & x_2x_1^2, & -x_1^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2.$$

Entwickeln wir die Determinanten, welche die P enthalten nach diesen und fassen alle Glieder, die mit demselben P multiplicirt sind, zusammen, so erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
&-2P_3\left\{\begin{vmatrix}\psi_1 & \psi_2\\ \varphi_1 & \varphi_2\end{vmatrix}x_1^2+2\begin{vmatrix}\psi_1 & \psi_3\\ \varphi_1 & \varphi_3\end{vmatrix}x_1x_2+\begin{vmatrix}\psi_2 & \psi_3\\ \varphi_2 & \varphi_3\end{vmatrix}x_2^2\right\}\\
&-2P_2\left\{\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\ \chi_1 & \chi_2\end{vmatrix}x_1^2+2\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_3\\ \chi_1 & \chi_3\end{vmatrix}x_1x_2+\begin{vmatrix}\varphi_2 & \varphi_3\\ \chi_2 & \chi_3\end{vmatrix}x_2^2\right\}\\
&-2P_1\left\{\begin{vmatrix}\chi_1 & \chi_2\\ \psi_1 & \psi_2\end{vmatrix}x_1^2+2\begin{vmatrix}\chi_1 & \chi_3\\ \psi_1 & \psi_3\end{vmatrix}x_1x_2+\begin{vmatrix}\chi_2 & \chi_3\\ \psi_2 & \psi_3\end{vmatrix}x_2^2\right\}
\end{aligned}
$$

17)
$$
=-2\left\{P_3\begin{vmatrix}x_2^2, & -2x_1x_2, & x_1^2\\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3\\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\end{vmatrix}+P_2\begin{vmatrix}x_2^2, & -2x_1x_2, & x_1^2\\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3\end{vmatrix}+P_1\begin{vmatrix}x_2^2, & -2x_1x_2, & x_1^2\\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3\\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3\end{vmatrix}\right\}.
$$

Achtet man darauf, dass man die Jakobi'sche Covariante irgend zweier Formen Φ_1 Φ_2 auch auf folgende Weise bilden kann, indem man die Formen folgendermassen schreibt:

$$
\Phi_1=\frac{1}{n}\left\{\frac{d^2\Phi_1}{dx_1^2}x_1^2+2\frac{d^2\Phi_1}{dx_1\,dx_2}x_1x_2+\frac{d^2\Phi_1}{dx_2^2}x_2^2\right\}
$$

$$
\Phi_2=\frac{1}{n}\left\{\frac{d^2\Phi_2}{dx_1^2}x_1^2+2\frac{d^2\Phi_2}{dx_1\,dx_2}x_1x_2+\frac{d^2\Phi_2}{dx_2^2}x_2^2\right\}
$$

und dieselben wie quadratische Formen ansieht, so findet man:

18)
$$
J(J_{12}J_{13})=\begin{vmatrix}x_2^2, & -x_1x_2, & x_1^2\\ \dfrac{d^2J_{12}}{dx_1^2} & \dfrac{d^2J_{12}}{dx_1\,dx_2} & \dfrac{d^2J_{12}}{dx_2^2}\\ \dfrac{d^2J_{13}}{dx_1^2} & \dfrac{d^2J_{13}}{dx_1\,dx_2} & \dfrac{d^2J_{13}}{dx_2^2}\end{vmatrix}\quad \text{u. s. w.}
$$

Drückt man in dieser Determinante die zweiten Differentialquotienten durch die χ_i, ψ_i und P aus und zieht die erste Zeile, nachdem man dieselbe resp. mit P_3 und P_2 multiplicirt hat, von der zweiten und dritten Zeile ab, so erhält man, von einem etwaigen Zahlenfactor abgesehen,

19)
$$
J(J_{12}J_{13})=4\begin{vmatrix}x_2^2, & -2x_1x_2, & x_1^2\\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3\\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3\end{vmatrix}.
$$

Ebenso findet man für:

$$
J(J_{12}J_{23})\,,\quad J(J_{13}J_{23})
$$

20)
$$
J(J_{12}J_{23})=4\begin{vmatrix}x_2^2, & -2x_1x_2, & x_1^2\\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3\\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\end{vmatrix}\quad J(J_{13}J_{23})=4\begin{vmatrix}x_2^2, & -2x_1x_2, & x_1^2\\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3\end{vmatrix}.
$$

Die Identität 14) lautet also jetzt:

21)
$$
\begin{aligned}
&\Sigma\pm\frac{d^2J_{12}}{dx_1^2}\,\frac{d^2J_{13}}{dx_1\,dx_2}\,\frac{d^2J_{23}}{dx_2^2}\\
&=4\Sigma\pm\chi_1\psi_2\varphi_3-\frac{1}{2}\left\{P_1J(J_{12}J_{31})+P_2J(J_{12}J_{23})+P_3J(J_{13}J_{23})\right\}\\
&=4\Sigma\pm\chi_1\psi_2\varphi_3-\frac{1}{2}\left\{P_1f_1+P_2f_2+P_3f_3\right\}.M\\
&=4\Sigma\pm\chi_1\psi_2\varphi_3-\frac{1}{2}M^2=\mu.M^2.
\end{aligned}
$$

Aus dieser Formel folgt, dass

$$\pi = \Sigma \pm \chi_1 \psi_2 \varphi_3$$

entweder auch ein vollständiges Quadrat von M ist oder aber identisch verschwindet. Dass Ersteres nicht der Fall sein kann, zeigt der Umstand, dass der erste Coëfficient in π identisch verschwindet, es muss letzteres der Fall sein. Q. e. d.

Wenn man betrachtet, dass die drei Jakobi'schen Determinanten sich auf folgende Weise darstellen lassen:

22) $$\begin{cases} J_{12} = \chi_1(x_1 x_2)\, x_1^2 + \chi_2(x_1 x_2)\, x_1 x_2 + \chi_3(x_1 x_2)\, x_2^2 \\ J_{31} = \psi_1(x_1 x_2)\, x_1^2 + \psi_2(x_1 x_2)\, x_1 x_2 + \psi_3(x_1 x_2)\, x_2^2 \\ J_{23} = \varphi_1(x_1 x_2)\, x_1^2 + \varphi_2(x_1 x_2)\, x_1 x_2 + \varphi_3(x_1 x_2)\, x_2^2 \end{cases}$$

so bemerkt man sofort, dass π die zweite Überschiebung von:

$$J_{12} \quad \text{über} \quad J(J_{13} J_{23})$$

oder

$$J_{13} \quad \text{über} \quad J(J_{12} J_{23})$$

oder

$$J_{23} \quad \text{über} \quad J(J_{12} J_{31}),$$

wenn man dieselben als quadratische Formen betrachtet. Wir können daher das obige Resultat folgendermassen aussprechen:

Satz.

Bildet man von einem System dreier cubischer Formen die ersten Überschiebungen, von dieser wiederum die ersten Überschiebungen, stellt erstere in der Form 22) und letztere in der Form 19) 20) dar und betrachtet beide Systeme als quadratische Formen, so ist die zweite Überschiebung je einer der ersteren über je eine der letzteren identisch Null.

§. 4.

Es sollen nun noch zwei Formeln abgeleitet werden, welche in Verbindung mit den bisherigen Resultaten uns in den Stand setzen werden, die in der Einleitung erwähnten Covarianten auf niedere Formen zurückzuführen. Diese Formeln betreffen die zweiten Überschiebungen irgend einer Form oder deren Quadrat über die Jakobi'sche Covariante zweier Formen. Was die erste Formel angeht, so werden wir sie, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, aus der symbolischen Gestalt der Formen ableiten, wobei wir auf etwaige Zahlenfactoren keine Rücksicht nehmen werden.

Setzen wir:

$$f_1(x_1 x_2) = a_x^n \qquad f_2(x_1 x_2) = b_x^n$$

und bilden die zweite Polare von J_{12}, so erhalten wir:

$$\Delta^2(J) = (n-1)(n-2)(ab)\, a_x^{n-3} a_y^2 b_x^{n-1} + 2(n-1)^2 (ab)\, a_x^{n-2} a_y b_x^{n-2} b_y$$
$$+ (n-1)(n-2)(ab)\, a_x^{n-1} b_x^{n-3} b_y^2.$$

Setzt man $y_1 = y_2$, $y_2 = -y_1$ und multiplicirt mit der entsprechenden Potenz von g_x, so erhält man:

23) $$(Jg)^2 = (n-1)(n-2)\{(ab)(ag)^2 a_x^{n-3} b_x^{n-1} g_x^{n-2} + (ab)(bg)^2 a_x^{n-1} b_x^{n-3} g_x^{n-2}\}$$
$$+ 2(n-1)^2 (ab)(ag)(bg)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} g_x^{n-2}$$
$$= (n-1)(n-2)(ab)\, a_x^{n-3} b_x^{n-3} g_x^{n-2} \{(ag)^2 b_x^2 + (bg)^2 a_x^2\}$$
$$+ 2(n-1)^2 (ab)(ag)(bg)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} g_x^{n-2}.$$

Es besteht aber bekanntlich die Identität:

$$(ag)^2 b_x^2 + (bg)^2 a_x^2 = (ab)^2 g_x^2 + 2(ga)(gb)\, a_x b_x,$$

folglich ist:

24) $$(Jg)^2 = (n-1)(n-2)(ab)a_x^{n-3}b_x^{n-3}g_x^{n-2}\{(ab)^2g_x^2 + 2(ga)(gb)a_xb_x\}$$
$$+ 2(n-1)^2(ab)(ag)(bg)a_x^{n-2}b_x^{n-2}g_x^{n-2}$$
$$= (n-1)(n-2)g_x^n.(ab)^3a_x^{n-3}b_x^{n-3}$$
$$+ 2\{(n-1)(n-2)+(n-1)^2\}(ab)(ag)(bg)a_x^{n-2}b_x^{n-2}g_x^{n-2}.$$

für $n=3$ geht diese Formel in folgende über:

25) $$(Jg)^2 = 2(ab)^3.g_x^3 + 12(ab)(ag)(bg)a_xb_xg_x.$$

Diese Formel besagt, dass die zweite Überschiebung dieser Form g_x^3 über die Jakobi'sche Covariante zweier Formen a_x^3, b_x^3 sich als Summe darstellt, deren erster Summand aus der einfachsten Invariante der Formen a_x^3, b_x^3 multiplicirt in g_x^3 besteht und deren zweiter Summand die Combinante M der drei Formen a_x^3, b_x^3 und g_x^3 ist. Fällt g_x^3 mit a_x^3 oder mit b_x^3 zusammen, so ist:

26) $$(Ja)^2 = 2(ab)^3.a_x^3$$
$$(Jb)^2 = 2(ab)^3.b_x^3.$$

Die zweite Überschiebung des Quadrates von g_x^n über die Jakobi'sche Covariante von a_x^n, b_x^n ermitteln wir auf folgende Weise. Es ist:

27) $$(Jg^2)^2 = \frac{d^2J}{dx_1^2}\left(2g\frac{d^2g}{dx_2^2} + 2\left(\frac{dg}{dx_2}\right)^2\right) - 2\frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\left(2g\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2} + 2\frac{dg}{dx_1}\frac{dg}{dx_2}\right)$$
$$+ \frac{d^2J}{dx_2^2}\left(2g\frac{d^2g}{dx_1^2} + 2\left(\frac{dg}{dx_1}\right)^2\right)$$
$$= -2g\left\{\frac{d^2J}{dx_1^2}\frac{d^2g}{dx_2^2} - 2\frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2} + \frac{d^2J}{dx_2^2}\frac{d^2g}{dx_1^2}\right\}$$
$$+ 2\left\{\frac{d^2J}{dx_1^2}\left(\frac{dg}{dx_2}\right)^2 - 2\frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\frac{dg}{dx_1}\frac{dg}{dx_2} + \frac{d^2J}{dx_2^2}\left(\frac{dg}{dx_1}\right)^2\right\}$$
$$= 2g_x^n.(Jg)^2 + 2\left\{\frac{d^2J}{dx_1^2}\left(\frac{dg}{dx_2}\right)^2 - 2\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}\frac{dg}{dx_1}\frac{dg}{dx_2} + \frac{d^2J}{dx_2^2}\left(\frac{dg}{dx_1}\right)^2\right\}.$$

Den Ausdruck in der Klammer wollen wir nun umformen. Er lässt sich folgendermassen schreiben:

$$\left\{\frac{d^2J}{dx_1^2}\frac{dg}{dx_2} - \frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\frac{dg}{dx_1}\right\}\frac{dg}{dx_2} + \left\{\frac{d^2J}{dx_2^2}\frac{dg}{dx_1} - \frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\frac{dg}{dx_2}\right\}\frac{dg}{dx_1}$$
$$= \begin{vmatrix} \frac{d^2J}{dx_1^2} & \frac{d^2J}{dx_1\,dx_2} \\ \frac{dg}{dx_1} & \frac{dg}{dx_2} \end{vmatrix}\frac{dg}{dx_2} + \begin{vmatrix} \frac{d^2J}{dx_2^2} & \frac{d^2J}{dx_1\,dx_2} \\ \frac{dg}{dx_2} & \frac{dg}{dx_1} \end{vmatrix}\frac{dg}{dx_1}.$$

Benützt man die Identitäten:

$$\frac{dg}{dx_1} = \frac{1}{(n-1)}\left\{\frac{d^2g}{dx_1^2}x_1 + \frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}x_2\right\}$$
$$\frac{dg}{dx_2} = \frac{1}{(n-1)}\left\{\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}x_1 + \frac{d^2g}{dx_2^2}x_2\right\},$$

so geht der letzte Ausdruck in den folgenden über:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2J}{dx_1^2} & \frac{d^2g}{dx_1^2} & x_1 \\ \frac{d^2J}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2g}{dx_1\,dx_2} & x_1 \end{vmatrix} \frac{dg}{dx_2} + \begin{vmatrix} \frac{d^2J}{dx_1^2} & \frac{d^2g}{dx_1\,dx_2} & x_2 \\ \frac{d^2J}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2g}{dx_2^2} & x_2 \end{vmatrix} \frac{dg}{dx_2}$$

$$+ \begin{vmatrix} \frac{d^2J}{dx_2^2} & \frac{d^2g}{dx_1\,dx_2} & x_1 \\ \frac{d^2J}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2g}{dx_1^2} & x_1 \end{vmatrix} \frac{dg}{dx_1} + \begin{vmatrix} \frac{d^2J}{dx_2^2} & \frac{d^2g}{dx_2^2} & x_2 \\ \frac{d^2J}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2g}{dx_1\,dx_2} & x_2 \end{vmatrix} \frac{dg}{dx_1}$$

$$= \frac{d^2J}{dx_1^2}\left(\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}x_1 + \frac{d^2g}{dx_2^2}x_2\right)^2 - 2\frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\left(\frac{d^2g}{dx_1^2}x_1 + \frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}x_2\right)\left(\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}x_1 + \frac{d^2g}{dx_2^2}x_2\right)$$

$$+ \frac{d^2J}{dx_2^2}\left(\frac{d^2g}{dx_1^2}x_1 + \frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}x_2\right)^2.$$

Dieser Ausdruck lässt sich wie folgt schreiben:

$$\frac{d^2J}{dx_1^2}\left(\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}\right)^2 x_1^2 + \frac{d^2J}{dx_2^2}\left(\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}\right)^2 x_2^2 + 2\frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\left(\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}\right)^2 x_1 x_2$$

$$-2\frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\left(\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}\right)^2 x_1 x_2$$

$$-2\frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\frac{d^2g}{dx_1^2}\frac{d^2g}{dx_2^2}x_1 x_2 - \frac{d^2J}{dx_1^2}\frac{d^2g}{dx_1^2}\frac{d^2g}{dx_2^2}x_1^2 - \frac{d^2J}{dx_2^2}\frac{d^2g}{dx_1^2}\frac{d^2g}{dx_2^2}x_2^2$$

$$+\frac{d^2J}{dx_1^2}\frac{d^2g}{dx_2^2}\left\{\frac{d^2g}{dx_1^2}x_1^2 + 2\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}x_1 x_2 + \frac{d^2g}{dx_2^2}x_2^2\right\}.$$

$$+\frac{d^2J}{dx_2^2}\frac{d^2g}{dx_1^2}\left\{\frac{d^2g}{dx_1^2}x_1^2 + 2\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}x_1 x_2 + \frac{d^2g}{dx_2^2}x_2^2\right\}$$

$$-2\frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}\left\{\frac{d^2g}{dx_1^2}x_1^2 + \frac{d^2g}{dx_2^2}x_2^2 + \frac{d^2g}{dx_1\,dx_2}x_1 x_2\right\}.$$

Die erste und dritte Reihe zusammen geben:

$$-J.H(g),$$

wo $H(g)$ die Hesse'sche Determinante von g bedeutet, alle übrigen Glieder zusammengefasst liefern den Ausdruck:

$$g\cdot\left\{\frac{d^2J}{dx_1^2}\frac{d^2g}{dx_2^2} - 2\frac{d^2J}{dx_1\,dx_2}\frac{d^2g}{dx_1\,dx_2} + \frac{d^2J}{dx_2^2}\frac{d^2g}{dx_1^2}\right\}$$

$$= g\cdot(Jg)^2.$$

Wir erhalten daher folgende Formel für die zweite Überschiebung von J über das Quadrat einer Form g.

28) $$(Jg^2)^2 = a\,g\,.(Jg)^2 + b\,J.\,H(g).$$

Wenn wir jetzt für:

$$(Jg)^2$$

seinen Ausdruck aus 25) einsetzen, so kommt endlich:

29) $$(Jg^2)^2 = a\,P_3\,.\,g^2 + b\,g\,.\,M + c\,J.\,H(g),$$

wo a, b, c bestimmte Zahlen sind.

§. 5.

Bevor wir zu unserem eigentlichen Gegenstande übergehen, wollen wir noch einen Rückblick auf die Art wie die Covarianten, deren Reducirung wir anstreben, entstanden sind, werfen. Aus einer Form X_i in § 3, welche von zwei Reihen von Variabeln abhängt, und einer Grundform f_i haben wir y eliminirt, es entstand eine Form ψ von der sechsten Ordnung in x. Von dieser haben wir l. c. bewiesen, dass sie die Invarianteneigenschaft besitzt und aus ihr, da sie als Resultante zweier Formen von der dritten, resp. zweiten Ordnung sich in niedere Formen zerlegen lässt, die in Frage stehenden Covarianten hergestellt. Es ist nämlich:

$$\psi = R(X_i f_k) = -2DA_0 + A_1,$$

wo D die Discriminante von X_i ist und A_0, A_1 die simultanen Invarianten von X_i und f_i sind. Wie sich D und A_0 in bereits bekannte Covarianten zerlegen, habe ich l. c. gezeigt. Um auch die Covarianten, die aus A_1 entstehen, aus niederen Covarianten abzuleiten, gehe ich von einer anderen Auffassung von ψ aus. Ich lasse nämlich in den X_i die zwei Reihen von Variabeln zusammenfallen, in Folge dessen sie nach 22) die Jakobi'schen Covarianten darstellen. Fasst man diese als quadratische Formen der explicite auftretenden Variabeln auf, und eliminirt aus einer derselben und irgend einer Grundform die expliciten Variabeln, so ist diese Resultante nach einem bekannten Principe eine Covariante. Nach dieser Auffassung wird es mit Hilfe unserer früheren Betrachtung leicht sein, die Covarianten auf niedere Formen zurückzuführen, wenn wir nur auf die Entstehung von A_1 Rücksicht nehmen. Nun entsteht A_1 dadurch, dass man die lineare Covariante, welche die zweite Überschiebung der Form dritter Ordnung über die Form zweiter Ordnung ist, auf's Quadrat erhebt und dieses Quadrat noch zweimal über die Form zweiter Ordnung schiebt. In unserem Falle, wo die Form zweiter Ordnung die Jakobi'sche Covariante in der Gestalt 22) ist, kommt es also darauf an, in der zweiten Überschiebung der Jakobi'schen Form über eine Grundform die zweiten Differentialquotienten der Jakobi'schen Covariante als constant zu betrachten, und diese zweite Überschiebung, welche also wie eine lineare Covariante zu betrachten ist, nachdem man sie aufs Quadrat erhoben hat, wiederum zweimal über die Jakobi'sche Covariante zu schieben. Bevor wir dieses durchführen, wollen wir sehen, wie sich die Sache verhält, wenn wir die zweite Überschiebung von J über eine der Grundformen als cubische Covariante betrachten, weil sich in den Resultaten eine merkwürdige Ähnlichkeit zeigt.

Es ist nach dem Früheren:

$$(Jf_i)^2 = \alpha P_i f_i + \beta M.$$

Erhebt man diesen Ausdruck aufs Quadrat und berücksichtigt die oben angeführte Formel für M, so erhält man:

$$\begin{aligned}[(Jf_i)^2]^2 = {} & \alpha^2 P_k^2 f_i^2 + 2\alpha\beta P_k f_i \{P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3\} \\ & + \beta^2 \{P_1 f_1 (P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3) + P_2 f_2 (P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3) \\ & + P_3 f_3 (P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3)\}.\end{aligned}$$

Schiebt man jetzt wiederum J über diesen Ausdruck zweimal, so erhält man:

30) $$\begin{aligned}& \alpha^2 P_k (Jf_i^2)^2 + 2\alpha\beta \{P_k P_1 (J, f_1 f_i)^2 + P_2 P_k (J, f_2 f_i)^2 + P_3 P_k (J, f_3 f_i)^2\} \\ & + \beta^2 \{P_1^2 (J, f_1^2)^2 + P_2^2 (J, f_1 f_2^2)^2 + P_3^2 (J, f_1 f_3^2)^2 + 2 P_1 P_2 (J, f_1 f_2)^2 \\ & + 2 P_1 P_3 (J, f_1 f_3)^2 + 2 P_2 P_3 (J, f_2 f_3)^2\}.\end{aligned}$$

Ist f_i eine der zwei Formen, aus denen die Jakobi'sche Covariante gebildet ist, so verschwindet in diesem Falle M und bleibt:

31) $$\alpha' P_i^3 f_i^2 + \beta' P_k^2 . J . H(f_i). —$$

Um nun auch den Fall, wo die zweite Überschiebung der Jakobi'schen Covariante über eine der Grundformen als lineare Covariante betrachtet wird, zu erledigen, führe ich folgende Bezeichnungen ein. Ich bezeichne mit α die Jakobi'sche Covariante als Form zweiter Ordnung betrachtet, so dass:

$$\alpha = \alpha_x^2$$

ist, ferner die lineare Covariante mit p, so dass:

$$p = (a\alpha)^2 a_x.$$

Das Quadrat derselben ist nun:

$$p^2 = (a\alpha)^2 a_x . (a'\alpha')^2 a'_x = \mu = \mu_x^2.$$

Bilde ich die zweite Überschiebung von μ über J, also:

$$(\mu J)^2 J_x^2,$$

so ist nun die Aufgabe, die Symbole von μ und α durch die Symbole der Grundformen auszudrücken. Nun entsteht $(\mu J)^2 J_x^2$ aus:

$$\mu_y^2 = (a\alpha)^2 a_y . (a'\alpha')^2 a'_y,$$

wenn man $y_1 = J_2$, $y_2 = -J_1$ setzt und mit J_x^2 multiplicirt, folglich erhalte ich:

32)
$$\begin{aligned} (\mu J)^2 J_x^2 &= (a\alpha)^2 (aJ)\,(a'\alpha)^2 (a'J) . J_x^2 \\ &= (a\alpha)\,(a'\alpha') . (a\alpha)\,(aJ)\,(a'\alpha)\,(a'J) . J^x_2 \\ &\doteq \frac{1}{2}(a\alpha)\,(a'\alpha)\,\{(a\alpha)^2 (a'J)^2 + (a'\alpha)^2 (aJ)^2 - (aa')^2 (\alpha J)^2\}\, J_x^2. \end{aligned}$$

Um nun auch die Symbole von J herauszuschaffen, gehe ich von der Identität aus:

$$J_x^2 J_y^2 = (ab)\, a_x^2 b_y^2 + 2(ab)\, a_x a_y . b_x b_y + (ab)\, a_y^2 . b_x^2.$$

Setzt man $y_1 = a'_2$, $y_2 = -a'_1$, so erhält man:

33)
$$(a'J)^2 J_x^2 = (ab)\,(ba')^2 a_x^2 + (ab)\,(aa')^2 b_x^2.$$

setzt man ferner:

$$y_1 = a_2 \qquad y_2 = -a_1$$

so erhält man:

34)
$$(aJ)^2 J_x^2 = (ab)\,(ba)^2 a_x^2,$$

und setzt man endlich:

$$y_1 = \alpha_2 \qquad y_2 = -\alpha_1$$

so erhält man schliesslich:

35)
$$\begin{aligned} (\alpha J)^2 J_x^2 = (ab)\,(b\alpha)^2 a_x^2 + 2(ab)\,(a\alpha)\,(b\alpha) . a_x b_x \\ + (ab)\,(a\alpha)^2 b_x^2. \end{aligned}$$

Dies in 32) eingesetzt ergibt:

36)
$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(ab)^3 . [(a\alpha)^2 a_x]^2 + \frac{1}{2}(aa')^2 (a\alpha)\,(a'\alpha) . (ab)\,(a\alpha)^2 b_x^2 \\ &+ \frac{1}{2}(ab)^3 [(a\alpha)^2 a_x]^2 \\ &- \frac{1}{2}(aa')^2 (a\alpha)\,(a'\alpha) . (ab)\,(b\alpha)^2 a_x^2 - (aa')^2 (a\alpha)\,(a'\alpha) . (ab)\,(a\alpha)\,(a'\alpha)\, a_x b_x \\ &- \frac{1}{2}(aa')^2 (a\alpha)\,(a'\alpha) . (ab)\,(b\alpha)^2 a_x^2 \\ &= (ab)^3 . [(a\alpha)^2 a_x]^2 - (aa')^2 (a\alpha)\,(a'\alpha) . (ab)\,(a\alpha)\,(b\alpha)\, a_x b_x \\ &\qquad - \frac{1}{2}(aa')^2 (a\alpha)\,(a'\alpha) . (ab)\,(b\alpha)^2 a_x^2. \end{aligned}$$

Benützt man die Identität:

$$(a\alpha)(b\alpha)a_x b_x = \frac{1}{2}\{(a\alpha)^2 b_x^2 + (b\alpha)^2 a_x^2 - (ab)^2 \alpha_x^2\}$$

so bekommt man:

$$(\mu J)^2 J_x^2 = (ab)^3 . [(a\alpha)^2 a_x]^2 + \frac{1}{2}(a\alpha')^2 (a\alpha)(a'\alpha) . (ab)^3 . \alpha_x^2 \tag{37}$$

$$- (aa')^2 (a\alpha)(a'\alpha)\left\{(ab)(b\alpha)^2 a_x^2 + \frac{1}{2}(ab)(a\alpha)^2 b_x^2\right\}$$

Drückt man endlich die Symbole der α durch die Symbole der J aus und transformirt in der mehrfach erwähnten Weise, so erhält man schliesslich:

$$(\mu J)^2 J_x^2 = r . P^3 . f_i^2 + s . J . (JH)^2 . P. \tag{38}$$

Aus dieser Formel ersieht man also, wie die l. c. gefundenen Covarianten, sofern bei ihrer Bildung nur zwei der Grundformen in Betracht kommen, sich durch die Formen selbst, ihren Jakobi'schen Covarianten und den einfachsten Invarianten ausdrücken. Kommen bei der Bildung der Covarianten alle drei Grundformen in Verwendung, so kann man dieselben auf die angegebene Weise nicht zerlegen, und ich vermuthe, dass sie überhaupt fundamentale Covarianten sind. Ich will nur noch aufmerksam machen auf die Ähnlichkeit der Formeln 31) und 38) und bemerken, dass ich bei denselben auf die bestimmten Zahlen keine Rücksicht genommen habe.

§. 6.

Zwischen den drei Formen:

$$\begin{aligned}
I_{23} &= 2\{\varphi_1(\eta_1\eta_2)x_1^2 + \varphi_2(\eta_1\eta_2)x_1 x_2 + \varphi_3(\eta_1\eta_2)x_2^2\} \\
I_{31} &= 2\{\psi_1(\eta_1\eta_2)x_1^2 + \psi_2(\eta_1\eta_2)x_1 x_2 + \psi_3(\eta_1\eta_2)x_2^2\} \\
I_{12} &= 2\{\chi_1(\eta_1\eta_2)x_1^2 + \chi_2(\eta_1\eta_2)x_1 x_2 + \chi_3(\eta_1\eta_2)x_2^2\}
\end{aligned}$$

muss, da:

$$\pi = \begin{vmatrix} \varphi_1(\eta_1\eta_2) & \varphi_2(\eta_1\eta_2) & \varphi_3(\eta_1\eta_2) \\ \psi_1(\eta_1\eta_2) & \psi_2(\eta_1\eta_2) & \psi_3(\eta_1\eta_2) \\ \chi_1(\eta_1\eta_2) & \chi_2(\eta_1\eta_2) & \chi_3(\eta_1\eta_2) \end{vmatrix} = 0$$

ist, die Identität:

$$\lambda_1 I_{23} + \lambda_2 I_{31} + \lambda_3 I_{12} = 0$$

bestehen, wo:

$$\lambda_1 = \varphi \begin{vmatrix} \psi_2 \chi_2 \\ \psi_3 \chi_3 \end{vmatrix}, \quad \lambda_2 = \varphi \begin{vmatrix} \chi_2 \varphi_2 \\ \chi_3 \varphi_3 \end{vmatrix}, \quad \lambda_3 = \varphi \begin{vmatrix} \varphi_2 \psi_2 \\ \varphi_3 \psi_3 \end{vmatrix}$$

ist, Es ist demnach:

$$J(I_{23} I_{12}) = J\left(I_{23} - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} I_{23} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} I_{31}\right) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} J(I_{23} I_{31})$$

$$J(I_{31} I_{12}) = J\left(I_{31} - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} I_{23} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} I_{31}\right) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} J(I_{31} I_{23})$$

oder:

$$\left\{\begin{aligned}
J(I_{23} I_{12}) &= \begin{vmatrix} \varphi_2 \chi_2 \\ \varphi_3 \chi_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi_2 \chi_2 \\ \varphi_3 \chi_3 \end{vmatrix} \times J(I_{23} I_{31}) \\
J(I_{31} I_{12}) &= \begin{vmatrix} \psi_2 \chi_2 \\ \psi_3 \chi_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi_2 \psi_2 \\ \varphi_3 \psi_3 \end{vmatrix} \times J(I_{23} I_{31}).
\end{aligned}\right. \tag{39}$$

Ersetzt man y durch x, so gehen:

$$I_{23}, I_{31}, I_{13} \text{ in } J_{23}, J_{31}, J_{12}$$

über, die Relationen in 39) also in:

$$
40)\quad \begin{cases} J(J_{23}J_{12}) = M.f_2 = \dfrac{(\varphi_2\chi_3)}{(\varphi_2\psi_3)}.M.f_3 \\[2ex] J(J_{31}J_{12}) = M.f_1 = \dfrac{(\psi_2\chi_3)}{(\varphi_2\psi_3)}.M.f_3. \end{cases}
$$

Daraus folgt, dass die drei Unterdeterminanten in folgender Form darstellbar sein müssen:

$$
\begin{aligned}
(\varphi_2\chi_3) &= \mathrm{M}.f_2 \\
(\varphi_2\psi_3) &= \mathrm{M}.f_3 \\
(\psi_2\chi_3) &= \mathrm{M}.f_1
\end{aligned}
$$

wo M eine lineare Function ist.

Die wirkliche Ausrechnung ergibt folgende Ausdrücke für die Unterdeterminante von π:

$$
41)\quad (\varphi_1\psi_2) = f_3 . \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\}
$$

$$
(\varphi_1\chi_2) = f_2 . \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\}
$$

$$
(\psi_1\chi_2) = f_1 . \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\}
$$

$$
(\varphi_2\psi_3) = f_3 . \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\}
$$

$$
(\varphi_2\chi_3) = f_2 . \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\}
$$

$$
(\psi_2\chi_3) = f_1 . \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\}
$$

$$
(\varphi_1\psi_3) = f_3 . \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\}
$$

$$
(\varphi_1\chi_3) = f_2 . \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\}
$$

$$
(\psi_1\chi_3) = f_1 . \left\{ \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_0 b_0 c_0 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x_2 \right\}.
$$

Ein flüchtiger Blick auf diese Ausdrücke zeigt, dass dieselben die zweiten Differentialquotienten von M sind. —

Multiplicirt man in π die erste Kolonne mit x_1^2, die zweite und dritte resp. mit $x_1 x_2$ und x_2^2 und addirt die letzteren zur ersten, so bekommt man die bekannte Relation:

$$f_1 J_{23} + f_2 J_{31} + f_3 J_{12} = 0.$$

An Stelle dieser Relation kann man aber drei andere viel durchsichtigere setzen, denn aus der Entwicklung von π folgt unmittelbar:

42) $$\left\{\begin{aligned} \varphi_1 f_1 - \psi_1 f_2 + \chi_1 f_3 &= 0 \\ \varphi_2 f_1 - \psi_2 f_2 + \chi_2 f_3 &= 0 \\ \varphi_3 f_1 - \psi_3 f_2 + \chi_3 f_3 &= 0. \end{aligned}\right.$$

§. 7.

Mit Hilfe der vorigen Auseinandersetzungen können wir folgende Covariante leicht in niedere Formen zerlegen:

$$N = \begin{vmatrix} (J_{12} H_1)^2, & (J_{31} H_1)^2, & (J_{23} H_1)^2 \\ (J_{12} H_2)^2, & (J_{31} H_2)^2, & (J_{23} H_2)^2 \\ (J_{12} H_3)^2, & (J_{31} H_3)^2, & (J_{23} H_3)^2 \end{vmatrix}$$

Es ist nämlich:

43) $$N = \begin{vmatrix} (X_3 H_1)^2 - P_3 H_1, & (X_2 H_1)^2 - P_2 H_1, & (X_1 H_1)^2 - P_1 H_1 \\ (X_3 H_2)^2 - P_3 H_2, & (X_2 H_2)^2 - P_2 H_2, & (X_1 H_1)^2 - P_1 H_2 \\ (X_3 H_3)^2 - P_3 H_3, & (X_2 H_3)^2 - P_2 H_3, & (X_1 H_3)^2 - P_1 H_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (X_3 H_1)^2, & (X_2 H_1)^2, & (X_1 H_1)^2 \\ (X_3 H_2)^2, & (X_2 H_2)^2, & (X_1 H_2)^2 \\ (X_3 H_3)^2, & (X_2 H_2)^2, & (X_1 H_3)^2 \end{vmatrix} - P_3 \begin{vmatrix} H_1 & (X_2 H_1)^2 & (X_1 H_1)^2 \\ H_2 & (X_2 H_2)^2 & (X_1 H_2)^2 \\ H_3 & (X_2 H_3)^2 & (X_1 H_3)^2 \end{vmatrix}$$

$$- P_2 \begin{vmatrix} (X_3 H_1)^2 & H_1 & (X_1 H_1)^2 \\ (X_3 H_2)^2 & H_2 & (X_1 H_2)^2 \\ (X_3 H_3)^2 & H_3 & (X_1 H_3)^2 \end{vmatrix} - P_1 \begin{vmatrix} (X_3 H_1)^2 & (X_2 H_1)^2 & H_1 \\ (X_3 H_2)^2 & (X_2 H_2)^2 & H_2 \\ (X_3 H_3)^2 & (X_2 H_3)^2 & H_3 \end{vmatrix}.$$

Die erste Determinante verschwindet identisch, da sie in zwei Factoren zerlegbar ist, von denen einer die Form π ist, folglich bleibt, indem man zugleich die übrig bleibenden Determinanten nach den H_i entwickelt:

44) $$N = -H_1 \left\{ P_3 \begin{vmatrix} (X_2 H_2)^2 & (X_1 H_2)^2 \\ (X_2 H_3)^2 & (X_1 H_3)^2 \end{vmatrix} + P_2 \begin{vmatrix} (X_1 H_2)^2 & (X_3 H_2)^2 \\ (X_1 H_3)^2 & (X_3 H_3)^2 \end{vmatrix} + P_1 \begin{vmatrix} (X_3 H_2)^2 & (X_2 H_2)^2 \\ (X_3 H_3)^2 & (X_2 H_3)^2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$- H_2 \left\{ P_3 \begin{vmatrix} (X_2 H_3)^2 & (X_1 H_3)^2 \\ (X_2 H_1)^2 & (X_1 H_1)^2 \end{vmatrix} + P_2 \begin{vmatrix} (X_3 H_3)^2 & (X_1 H_3)^2 \\ (X_3 H_1)^2 & (X_1 H_1)^2 \end{vmatrix} + P_1 \begin{vmatrix} (X_3 H_3)^2 & (X_2 H_3)^2 \\ (X_3 H_1)^2 & (X_2 H_1)^2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$- H_3 \left\{ P_3 \begin{vmatrix} (X_2 H_1)^2 & (X_1 H_1)^2 \\ (X_2 H_2)^2 & (X_1 H_2)^2 \end{vmatrix} + P_2 \begin{vmatrix} (X_3 H_1)^2 & (X_1 H_1)^2 \\ (X_3 H_2)^2 & (X_1 H_2)^2 \end{vmatrix} + P_1 \begin{vmatrix} (X_3 H_1)^2 & (X_2 H_1)^2 \\ (X_3 H_2)^2 & (X_2 H_2)^2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Nun ist z. B.:

45) $$\begin{vmatrix} (X_2 H_2)^2 & (X_1 H_2)^2 \\ (X_2 H_3)^2 & (X_1 H_3)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_1 B_2 - \frac{1}{2}\psi_2 B_1 + \psi_3 B_0, & \varphi_1 B_2 - \frac{1}{2}\varphi_2 B_1 + \varphi_3 B_0 \\ \psi_1 C_2 - \frac{1}{2}\psi_2 C_1 + \psi_3 C_0, & \varphi_1 C_2 - \frac{1}{2}\varphi_2 C_1 + \varphi_3 C_0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\psi_1 \varphi_2) & (\psi_1 \varphi_3) & (\psi_2 \varphi_3) \\ B_2 & -\frac{1}{2} B_1 & B_0 \\ C_0 & -\frac{1}{2} C_2 & C_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_1 \psi_2 \psi_3 \\ \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_2 - \frac{1}{2} B_1 & C_0 \\ C_2 - \frac{1}{2} C_1 & C_0 \end{vmatrix},$$

folglich findet man, wenn man an die Ausdrücke, die wir oben für die zweigliedrigen Determinanten des ersten Rechteckes gegeben haben, denkt;

46) $$\begin{vmatrix} (X_2 H_2)^2 & (X_1 H_2)^2 \\ (X_2 H_3)^2 & (X_1 H_3)^2 \end{vmatrix} = -f_3 \left\{ \frac{d^2M}{dx_1^2} \begin{vmatrix} B_2 & -\frac{1}{2} B_1 \\ C_2 & -\frac{1}{2} C_1 \end{vmatrix} + \frac{d^2M}{dx_1 dx_2} \begin{vmatrix} B_2 & B_0 \\ C_2 & C_0 \end{vmatrix} + \frac{d^2M}{dx_2^2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} B_1 & B_0 \\ -\frac{1}{2} C_1 & C_0 \end{vmatrix} \right\}.$$

Überlegt man ferner, dass der Ausdruck in der Klammer die zweite Überschiebung der Form M über die Jakobi'sche Determinante der zwei Hesse'schen Covarianten H_2 und H_3 ist, so erhält man schliesslich, wenn wir dieselbe mit L_1 bezeichnen:

47) $$\begin{vmatrix} (X_2 H_2)^2 & (X_1 H_2)^2 \\ (X_2 H_3)^2 & (X_1 H_3)^2 \end{vmatrix} = -L_1 . f_3$$

zerlegt man auf diese Weise alle zweigliedrigen Determinanten in 44), so gelangt man schliesslich zu folgendem Resultat:

48) $$\begin{aligned} N = {} & H_1 \{P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3\} . L_1 \\ & + H_2 \{P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3\} . L_2 \\ & + H_3 \{P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3\} . L_3 \\ = {} & \{H_1 L_1 + H_2 L_2 + H_3 L_3\} . M. \end{aligned}$$

§. 8.

Bildet man aus je drei quadratischen Covarianten des folgenden Systems:

$$\begin{matrix} (X_1 H_1)^2, & (X_1 H_2)^2, & (X_1 H_3)^2 \\ (X_2 H_1)^2, & (X_2 H_2)^2, & (X_2 H_3)^2 \\ (X_3 H_1)^2, & (X_3 H_2)^2, & (X_3 H_3)^2 \end{matrix}$$

die Combinanten, so ergeben sich deren vierundachtzig. Es sollen jetzt die Beziehungen zwischen denselben aufgesucht werden. Zu diesem Behufe führe ich der besseren Übersicht wegen für die Combinanten kurze Bezeichnungen ein, von deren Richtigkeit man sich sofort überzeugt. Ich schreibe z. B. die Combinante, welche aus den drei in der ersten Horizontalreihe stehenden Formen gebildet ist, folgendermassen:

$$D_1 = \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \end{vmatrix}.$$

Es bestehen nun, wie l. c. gezeigt habe, die folgenden Beziehungen:

49)
$$\left\{\begin{aligned}
D_1 &= \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} = R(f_2 f_3)\cdot R\{H_1 H_2 H_3\} \\[2ex]
D_2 &= \begin{vmatrix} (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_2)^2, & (\psi_2 H_2)^2, & (\psi_3 H_2)^2 \\ (\psi_1 H_3)^2, & (\psi_2 H_3)^2, & (\psi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} = R(f_1 f_3)\cdot R\{H_1 H_2 H_3\} \\[2ex]
D_3 &= \begin{vmatrix} (\chi_1 H_1)^2, & (\chi_2 H_1)^2, & (\chi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_2)^2, & (\chi_2 H_2)^2, & (\chi_3 H_2)^2 \\ (\chi_1 H_3)^2, & (\chi_2 H_3)^2, & (\chi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} = R(f_1 f_2)\cdot R\{H_1 H_2 H_3\}
\end{aligned}\right.$$

wo $R(f_i f_k)$ die Resultante der Formen f_i und f_k und $R\{H_1 H_2 H_3\}$ die Combinante der drei Hesse'schen Determinanten bedeutet.

Die Formeln 49) besagen, dass die Combinanten aus je drei in einer Reihe stehenden Formen des Systems sich in Producte aus den Resultaten je zweier der drei Grundformen in die Combinante der drei Hesse-schen Determinanten zerlegen. Bildet man die Combinanten aus je drei in einer Kolonne befindlichen Formen des Systems, entwickelt dieselben nach den Coëfficienten von H_1, H_2, H_3 und transformirt sie mit Hülfe der aus der Identität:

$$\pi = 0$$

folgenden Identitäten, so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit folgender Beziehungen:

50)
$$D_1' = \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2 & (\varphi_2 H_1)^2 & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2 & (\psi_2 H_1)^2 & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2 & (\chi_2 H_1)^2 & (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \Bigg[A_2 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_2 \\ b_0 b_1 b_2 \\ c_0 c_1 c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix}^2 \right\} - A_1 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_2 \\ b_0 b_1 b_2 \\ c_0 c_1 c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix} \right\}$$

$$+ A_0 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix}^2 \right\} \Bigg] \cdot (H_1 H_1')^2$$

$$D_2' = \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\psi_1 H_2)^2, & (\psi_2 H_2)^2, & (\psi_3 H_2)^2 \\ (\chi_1 H_2)^2, & (\chi_2 H_2)^2, & (\chi_3 H_2)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \Bigg[B_2 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_2 \\ b_0 b_1 b_2 \\ c_0 c_1 c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix}^2 \right\} - B_1 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_2 \\ b_0 b_1 b_2 \\ c_0 c_1 c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix} \right\}$$

$$+ B_0 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix}^2 \right\} \Bigg] \cdot (H_2 H_2')^2$$

$$D'_3 = \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \\ (\psi_1 H_3)^2, & (\psi_2 H_3)^2, & (\psi_3 H_3)^2 \\ (\chi_1 H_3)^2, & (\chi_2 H_3)^2, & (\chi_3 H_3)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[C_2 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_2 \\ b_0 b_1 b_2 \\ c_0 c_1 c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix}^2 \right\} - C_1 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_2 \\ b_0 b_1 b_2 \\ c_0 c_1 c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix} \right\} \right.$$

$$\left. + C_0 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_3 \\ b_0 b_1 b_3 \\ c_0 c_1 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_2 a_3 \\ b_0 b_2 b_3 \\ c_0 c_2 c_3 \end{vmatrix}^2 \right\} \right] . (H_3 H'_3)^2.$$

Diese Formeln lehren, dass die Combinanten, welche aus je drei in derselben Colonne stehenden Formen des Systems gebildet sind, gleich dem Producte aus der zweiten Überschiebung der Hesse'schen Covariante von M über die bezüglichen Hesse'schen Covarianten der Grundformen in die resp. zweiten Überschiebungen der Hesse'schen Formen über sich selbst sind. Es ist aber, von einem Zahlenfactor abgesehen;

$$M = P_1 f_1 + P_2 f_2 + P_3 f_3$$

die zweite Überschiebung von M über sich selbst also:

$$(MM')^2 = P_1^2 H_1 + P_2^2 H_2 + P_3^2 H_3 + 2 P_1 P_2 H_{12} + 2 P_1 P_3 H_{13} + 2 P_2 P_3 H_{23},$$

wenn man mit H_{ik} die zweite Überschiebung zweier der Grundformen bezeichnet, folglich ist:

$$D'_1 = (H_1 H'_1)^2 \{ P_1^2 (H_1 H'_1)^2 + P_2^2 (H_1 H_2)^2 + P_3^2 (H_1 H_3) + 2 P_1 P_2 (H_1 H_{12})^2$$
$$+ 2 P_1 P_3 (H_1 H_{13})^2 + 2 P_2 P_3 (H_1 H_{23})^2 \}$$

$$D'_2 = (H_2 H'_2)^2 \{ P_1^2 (H_1 H_2)^2 + P_2^2 (H_2 H'_2)^2 + P_3^2 (H_2 H_3)^2 + 2 P_1 P_2 (H_2 H_{12})^2$$
$$+ 2 P_1 P_3 (H_2 H_{13})^2 + 2 P_2 P_3 (H_2 H_{23})^2 \}$$

$$D'_3 = (H_3 H'_3)^2 \{ P_1^2 (H_1 H_3)^2 + P_2^2 (H_2 H_3)^2 + P_3^2 (H_3 H'_3)^2 + 2 P_1 P_2 (H_3 H_{12})^2$$
$$+ 2 P_1 P_3 (H_3 H_{13})^2 + 2 P_2 P_3 (H_3 H_{23})^2 \}.$$

Aus den Relationen 49) und 50), welche Combinanten betreffen, die entweder aus drei Formen in einer Zeile oder aus drei Formen in einer Colonne gebildet sind, lassen sich nun auch Relationen zwischen den übrigen Combinanten herleiten. Versteht man nämlich unter:

$$\Delta^B (D'_1)$$

folgende Operation:

$$\Delta^B (D) = \frac{dD}{dA_0} B_0 + \frac{dD}{dA_1} B_1 + \frac{dD}{dA_2} B_2$$

so erhält man:

$$51) \quad \Delta^B (D'_1) = \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, & (\chi_2 H_1)^2, & (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_2)^2, & (\psi_2 H_2)^2, & (\psi_3 H_2)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, & (\chi_2 H_1)^2, & (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_2)^2, & (\chi_2 H_2)^2, & (\chi_3 H_2)^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta^C (D'_1) = \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, & (\chi_2 H_1)^2, & (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_3)^2, & (\psi_2 H_3)^2, & (\psi_3 H_3)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, & (\chi_2 H_1)^2, & (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_3)^2, & (\chi_2 H_3)^2, & (\chi_3 H_3)^2 \end{vmatrix}$$

u. s. w., d. h. die Summe dreier Combinanten, von denen jede aus zwei Formen in einer Colonne und einer dritten mit ihnen weder in einer Zeile noch in einer Colonne stehenden Form gebildet sind, lässt sich durch niedere Invarianten ausdrücken. Setzen wir ferner:

$$\Delta^B(D') = N,$$

so ist:

52)
$$\Delta^c(N) = \frac{dN}{dA_0} C_0 + \frac{dN}{dA_1} C_1 + \frac{dN}{dA_2} C_2$$

$$= \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\psi_1 H_3)^2, & (\psi_2 H_3)^2, & (\psi_3 H_3)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, & (\chi_2 H_1)^2, & (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_3)^2, & (\chi_2 H_3)^2, & (\chi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \\ (\psi_1 H_2)^2, & (\psi_2 H_2)^2, & (\psi_3 H_2)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, & (\chi_2 H_1)^2, & (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_2)^2, & (\psi_2 H_2)^2, & (\psi_3 H_2)^2 \\ (\chi_1 H_3)^2, & (\chi_2 H_3)^2, & (\chi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_2)^2, & (\chi_2 H_2)^2, & (\chi_3 H_2)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_3)^2, & (\psi_2 H_3)^2, & (\psi_3 H_3)^2 \\ (\chi_1 H_2)^2, & (\chi_2 H_2)^2, & (\chi_3 H_2)^2 \end{vmatrix}$$

d. h. die Summe von sechs Combinanten, von denen keine die Coëfficienten von zwei Formen in einer Zeile oder einer Colonne vorkommt, lässt sich durch niedere Invarianten ausdrücken.

Berücksichtigt man, dass die Relationen 49) bestehen, was auch A, B, C sein mögen, und bildet die Form:

$$\Delta^c(D) = \frac{dD}{da_0} c_0 + \frac{dD}{da_1} c_1 + \frac{dD}{da_2} c_2 + \frac{dD}{da_3} c_3$$

so erhält man:

53)
$$\Delta^c(D_1) = \begin{vmatrix} (\psi_1 H_1)^2, & (\psi_2 H_1)^2, & (\psi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_2)^2, & (\psi_2 H_2)^2, & (\psi_3 H_2)^2 \\ (\varphi_1 H_3)^2, & (\varphi_2 H_3)^2, & (\varphi_3 H_3)^2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, & (\varphi_2 H_1)^2, & (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_2)^2, & (\varphi_2 H_2)^2, & (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\psi_1 H_3)^2, & (\psi_2 H_3)^2, & (\psi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} = \Delta^c R(f_2 f_3) \cdot R\{H_1 H_2 H_3\}'$$

d. h. die Summe von drei Combinanten, deren jede aus zwei Formen in einer Reihe und einer dritten, welche mit diesen weder in einer Reihe noch in einer Colonne steht, gebildet ist, ist durch niedere Invarianten ausdrückbar.

Was die Combinanten betrifft, die aus je drei Formen gebildet sind, von denen zwei in einer Reihe und zwei in einer Colonne stehen, so konnte ich bei denselben ähnliche einfache Relationen nicht auffinden, und ich muss mich daher beschränken, den Typus folgender Relationen anzugeben, die man mit Hilfe eines bekannten Determinantensatzes leicht verificiren kann. Es ist:

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, (\varphi_2 H_1)^2, (\varphi_1 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_2)^2, (\varphi_2 H_2)^2, (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, (\psi_2 H_1)^2, (\psi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, (\varphi_2 H_1)^2, (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_3)^2, (\varphi_2 H_3)^2, (\varphi_3 H_3)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, (\chi_2 H_1)^2, (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, (\varphi_2 H_1)^2, (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_2)^2, (\varphi_2 H_2)^2, (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, (\chi_2 H_1)^2, (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, (\varphi_2 H_1)^2, (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, (\psi_2 H_1)^2, (\psi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_3)^2, (\varphi_2 H_3)^2, (\varphi_3 H_3)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, (\varphi_2 H_1)^2, (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\varphi_1 H_2)^2, (\varphi_2 H_2)^2, (\varphi_3 H_2)^2 \\ (\varphi_1 H_3)^2, (\varphi_2 H_3)^2, (\varphi_3 H_3)^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\varphi_1 H_1)^2, (\varphi_2 H_1)^2, (\varphi_3 H_1)^2 \\ (\psi_1 H_1)^2, (\psi_2 H_1)^2, (\psi_3 H_1)^2 \\ (\chi_1 H_1)^2, (\chi_2 H_1)^2, (\chi_3 H_1)^2 \end{vmatrix}$$

$$= R(f_2 f_3) \cdot R\{H_1 H_2 H_3\} \times$$

$$(H_1 H_1')^2 \{P_1^2 (H_1 H_1')^2 + P_2^2 (H_1 H_2)^2 + P_3^2 (H_1 H_3)^2 + 2 P_1 P_2 (H_1 H_{12})^2$$
$$+ 2 P_1 P_3 (H_1 H_{13})^2 + 2 P_2 P_3 (H_1 H_{23})^2\}.$$