ZUR

THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

VON

Dr. G. v. ESCHERICH,
CORRESPONDIRENDEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 15. MAI 1885.

Fast zur selben Zeit als Herr Appell in den Comptes rendus[1] ohne Beweis einen Satz über ganze Functionen, gebildet aus den particulären Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung veröffentlichte, erwähnte ich[2] gewisse Determinanten, welche in der Theorie der linearen Differentialgleichung dieselbe Bedeutung haben, wie die Potenzsummen in der Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Von diesen Determinanten wird man, wie ich in den folgenden Blättern zeige, geradezu von selbst auf den Satz des Herrn Appell geführt, der sich als die Umkehrung einer selbstverständlichen Bemerkung und nicht allein auf homogene lineare Gleichungen beschränkt darstellt. Von den vielen Anwendungen, die der Satz zulässt, habe ich nur einer grössere Aufmerksamkeit zugewandt: Den Determinanten, welche die nothwendige und hinreichende Bedingung ausdrücken, damit eine nach den Elementen eines Fundamentalsystems particulärer Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung ganze Function mit constanten Coëfficienten Null oder einer ganzen Function der Unabhängigen gleich ist. Die Wichtigkeit derselben für die Frage nach den algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichungen ist von selbst klar und wurde von Fuchs[3] bei den linearen Differentialgleichungen der dritten Ordnung in volles Licht gesetzt. Einer späteren Gelegenheit behalte ich es vor, die hier gegebenen Grundlinien der Theorie dieser Formen weiter auszuführen.

I.

Die nachfolgenden Entwickelungen beruhen auf einer Bemerkung, die sich in zwei früheren Arbeiten als unmittelbare Consequenz der Formeln für die Resultante zweier linearen Differentialgleichungen ergab. Es zeigte sich, dass:

1. wenn $y_1, y_2 \dots y_n$ linear unabhängige particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

[1] Comptes rendus, Bd. XC und XCI.

[2] Denkschriften dieser Akademie, Bd. XLVI und XLVII.

[3] Acta mathematica, Bd. II.

sind, jede der Matrix

$$\begin{vmatrix} y_1^{(\mu)}\,; & y_1^{(\mu-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & y_1 \\ y_2^{(\mu)}\,; & y_2^{(\mu-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(\mu)}\,; & y_n^{(\mu-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & y_n \end{vmatrix}$$

entnommenen Determinante n^{ten} Grades als ein Product aus $e^{-\int a_1 dx}$ in eine nach dem Coëfficienten a und deren Differentialquotienten ganze Function sich darstellt.

2. das Nämliche gilt für jede der Matrix

$$\begin{vmatrix} y_1^{(\mu)}\,; & y_1^{(\mu-1)}\,; & \cdot & \cdot & y_1 & 1 \\ y_2^{(\mu)}\,; & y_2^{(\mu-1)}\,; & \cdot & \cdot & y_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n+1}^{(\mu)}\,; & y_{n+1}^{(\mu-1)}\,; & \cdot & \cdot & y_n & 1 \end{vmatrix}$$

angehörige Determinante $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, wenn $y_1, y_2 \ldots y_{n+1}$ linearunabhängige Integrale der linearen Differentialgleichung:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y + a = 0$$

sind.

Diese, übrigens naheliegende Bemerkung und die auch etwas verborgenere Bildung der der Determinante äquivalenten ganzen Function sollen zunächst unabhängig vom Begriffe der Resultante zweier linearen Differentialgleichungen hergeleitet werden. Beide ergeben sich aus der Betrachtung gewisser allgemeinerer Determinanten, die durch Specialisirung der in ihnen enthaltenen Grössen eine sehr weitgehende Verwendung gestatten.

II.

Die Grössen $b_1, b_2 \ldots b_n$ seien Functionen der Variablen $y, y', y'' \ldots$ und mit diesen Grössen sollen n andere: $x_1, x_2 \ldots x_n$ durch das folgende System von Gleichungen zusammenhängen:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_2 = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n = 0 \end{array}$$

dessen Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ nicht verschwinde. Durch die Substitution eines bestimmten Werthsystems $y_l, y'_l, y''_l \ldots$ der Variabeln $y, y', y'' \ldots$ gehe b_λ über in $(b_\lambda)_l$ und infolge dessen x_k in $(x_k)_l$.

1. Es soll nun zunächst der Werth der Determinante

$$D_m = \begin{vmatrix} (x_{i_1})_1\,; & (x_{i_2})_1\,; & \cdot & \cdot & (x_{i_m})_1 \\ (x_{i_1})_2\,; & (x_{i_2})_2\,; & \cdot & \cdot & (x_{i_m})_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (x_{i_1})_m\,; & (x_{i_2})_m\,; & \cdot & \cdot & (x_{i_m})_m \end{vmatrix}$$

bestimmt werden.

Setzt man der Kürze halber $\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ und bezeichnet die Subdeterminante des Elementes $a_{i,k}$ in Δ mit $A_{i,k}$, so folgt aus (1)

$$-\Delta x_i = b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \quad . \quad . \quad . \quad + b_n A_{ni} = \sum_{\rho=1}^{n} b_\rho A_{\rho i}$$

Durch Substitution dieses Werthes von x_i in D_m erhält man:

$$D_m = \frac{(-1)^m}{\Delta^m} \begin{vmatrix} \sum\limits_{\rho=1}^{n} (b_\rho)_1 A_{\rho,i_1}; & \sum\limits_{\rho=1}^{n} (b_\rho)_1 A_{\rho,i_2} & \dots & \sum\limits_{\rho=1}^{n} (b_\rho)_1 A_{\rho,i_m} \\ \sum\limits_{\rho=1}^{n} (b_\rho)_2 A_{\rho,i_1}; & \sum\limits_{\rho=1}^{n} (b_\rho)_2 A_{\rho,i_2} & \dots & \sum\limits_{\rho=1}^{n} (b_\rho)_2 A_{\rho,i_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{\rho=1}^{n} (b_\rho)_m A_{\rho,i_1}; & \sum\limits_{\rho=1}^{n} (b_\rho)_m A_{\rho,i_2} & \dots & \sum\limits_{\rho=1}^{n} (b_\rho)_m A_{\rho,i_m} \end{vmatrix}$$

Um von dieser Formel aus zu dem hier gesteckten Ziele zu gelangen, muss man die b_ρ zuvörderst der Annahme unterwerfen:

$$b_\rho = \alpha_{\rho,1} y^{(m-1)} + \alpha_{\rho,2} y^{(m-2)} + \quad . \quad . \quad . \quad + \alpha_{\rho,m-1} y' + \alpha_{\rho,m} y + \alpha_\rho = \sum_{\lambda=1}^{m} \alpha_{\rho,\lambda} y^{m-\lambda} + \alpha_\rho$$

wo die α von den y unabhängig sind.

In dem hier zunächst zu behandelnden Falle $\alpha_\rho = 0$ für jedes ρ, geht durch die Einsetzung des Werthes für b die obige Determinante D_m über in

$$\frac{(-1)^m}{\Delta^m} \begin{vmatrix} \sum\limits_{\lambda=1}^{m} \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\lambda} A_{\rho,i_1} y_1^{(m-\lambda)}; & \sum\limits_{\lambda=1}^{m} \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\lambda} A_{\rho,i_2} y_1^{(m-\lambda)} & \dots & \sum\limits_{\lambda=1}^{m} \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\lambda} A_{\rho,i_m} y_1^{(m-\lambda)} \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{m} \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\lambda} A_{\rho,i_1} y_2^{(m-\lambda)}; & \sum\limits_{\lambda=1}^{m} \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\lambda} A_{\rho,i_2} y_2^{(m-\lambda)} & \dots & \sum\limits_{\lambda=1}^{m} \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\lambda} A_{\rho,i_m} y_2^{(m-\lambda)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{m} \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\lambda} A_{\rho,i_1} y_m^{(m-\lambda)}; & \sum\limits_{\lambda=1}^{m} \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\lambda} A_{\rho,i_2} y_m^{(m-\lambda)} & \dots & \sum\limits_{\lambda=1}^{m} \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\lambda} A_{\rho,i_m} y_m^{(m-\lambda)} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante nun stellt sich als Product der beiden Ausdrücke dar:

$$\frac{(-1)^m}{\Delta^m} \begin{vmatrix} y_1^{(m-1)}; & y_1^{(m-2)} & \dots & y_1 \\ y_2^{(m-1)}; & y_2^{(m-2)} & \dots & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_m^{(m-1)}; & y_m^{(m-2)} & \dots & y_m \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{\rho=1}^{n} A_{\rho,i_1}\alpha_{\rho,1}\,; & \sum\limits_{\rho=1}^{n} A_{\rho,i_1}\alpha_{\rho,2} & \cdots & \sum\limits_{\rho=1}^{n} A_{\rho,i_1}\alpha_{\rho,m} \\ \sum\limits_{\rho=1}^{n} A_{\rho,i_2}\alpha_{\rho,1}\,; & \sum\limits_{\rho=1}^{n} A_{\rho,i_2}\alpha_{\rho,2} & \cdots & \sum\limits_{\rho=1}^{n} A_{\rho,i_2}\alpha_{\rho,m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \sum\limits_{\rho=1}^{n} A_{\rho,i_m}\alpha_{\rho,1}\,; & \sum\limits_{\rho=1}^{n} A_{\rho,i_m}\alpha_{\rho,2} & \cdots & \sum\limits_{\rho=1}^{n} A_{\rho,i_m}\alpha_{\rho,m} \end{vmatrix}$$

von denen die letztere Determinante wieder das Product der beiden Matrices ist:

$$\begin{vmatrix} A_{1,i_1}\,; & A_{2,i_1} & \cdots & A_{n,i_1} \\ A_{1,i_2}\,; & A_{2,i_2} & \cdots & A_{n,i_2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1,i_m}\,; & A_{2,i_m} & \cdots & A_{n,i_m} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\,; & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n,1} \\ \alpha_{12}\,; & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{1,m}\,; & \alpha_{2,m} & \cdots & \alpha_{n,m} \end{vmatrix}$$

Jede Determinante aus der ersten dieser beiden Matrices ist aber eine Determinante der Adjuncten der Elemente von Δ und daher gleich ihrer adjungirten Determinante in Δ multiplicirt mit Δ^{m-1}. Abgesehen von diesem Factor ist also das Product der beiden Matrices gleich einer Determinante n^{ten} Grades, die aus

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,; & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2,1}\,; & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1}\,, & a_{n,2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

hervorgeht, wenn in den Colonnen mit den Indices $i_1, i_2 \ldots i_m$ a mit α vertauscht und dann $i_1 = 1, i_2 = 2 \ldots i_m = m$ gesetzt wird. Diese Determinante mit

$$\frac{(-1)^m}{\Delta} \Sigma \pm y_1^{(m-1)} y_2^{(m-2)} \cdots y_m$$

multiplicirt, gibt dann D_m. Man erhält also den Werth von D_m auch aus dem Ausdrucke

$$\frac{\Sigma \pm y_1^{(m-1)} y_2^{(m-2)} \cdots y_m}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11}\,; & a_{12}\,; & \cdots & a_{1n}\,; & \alpha_{11}\,; & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ a_{21}\,; & a_{22}\,; & \cdots & a_{2n}\,; & \alpha_{21}\,; & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1}\,; & a_{n,2}\,; & \cdots & a_{nn}\,; & \alpha_{n1}\,; & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{vmatrix}$$

wenn man in der Matrix die $i_1, i_2 \ldots i_m$te Colonne unterdrückt und dieselbe mit einer Potenz von (-1) multiplicirt, deren Exponent die Zahl der nothwendigen Vertauschungen angibt, um die übrigen n-Colonnen in unveränderter Aufeinanderfolge zu den n ersten der Matrix zu machen.

2. In ähnlicher Weise lässt sich unter den früheren Voraussetzungen auch die allgemeinere Determinante berechnen:

$$D_m = \begin{vmatrix} (x_{i_{\beta_1}})_1 \,; & \ldots & (x_{i_{\beta_k}})_1 \,; & y_1^{(m-\beta_{k+1})} \,; & y_1^{(m-\beta_{k+2})} & \ldots & y_1^{(m-\beta_m)} \\ (x_{i_{\beta_1}})_2 \,; & \ldots & (x_{i_{\beta_k}})_2 \,; & y_2^{(m-\beta_{k+1})} \,; & y_2^{(m-\beta_{k+2})} & \ldots & y_2^{(m-\beta_m)} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ (x_{i_{\beta_1}})_m \,; & \ldots & (x_{i_{\beta_k}})_m \,; & y_m^{(m-\beta_{k+1})} \,; & y_m^{(m-\beta_{k+2})} & \ldots & y_m^{(m-\beta_m)} \end{vmatrix}$$

wo $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k, \beta_{k+1} \ldots \beta_m$ eine Permutation von $1, 2 \ldots m$ ist. Man erhält zunächst

$$D_m = \frac{(-1)^k}{\Delta^k} \begin{vmatrix} \sum\limits_{\lambda=1}^{m}\sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\lambda} A_{\rho,i_{\beta_1}} y_1^{(m-\lambda)} & \ldots & \sum\limits_{\lambda=1}^{m}\sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\lambda} A_{\rho,i_{\beta_k}} y_1^{(m-\lambda)} \,; & y_1^{(m-\beta_{k+1})} & \ldots & y_1^{(m-\beta_m)} \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{m}\sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\lambda} A_{\rho,i_{\beta_1}} y_2^{(m-\lambda)} & \ldots & \sum\limits_{\rho=1}^{m}\sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\lambda} A_{\rho,i_{\beta_k}} y_2^{(m-\lambda)} \,; & y_2^{(m-\beta_{k+1})} & \ldots & y_2^{(m-\beta_m)} \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{m}\sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\lambda} A_{\rho,i_{\beta_1}} y_m^{(m-\lambda)} & \ldots & \sum\limits_{\lambda=1}^{m}\sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\lambda} A_{\rho,i_{\beta_k}} y_m^{(m-\lambda)} \,; & y_m^{(m-\beta_{k+1})} & \ldots & y_m^{(m-\beta_m)} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante lässt sich als das Product zweier Determinanten auffassen und D_m stellt sich hienach als das Product der beiden Ausdrücke dar:

$$\frac{(-1)^k}{\Delta^k} \begin{vmatrix} y_1^{(m-1)} \,; & y_1^{(m-2)} & \ldots & y_1', & y_1 \\ y_2^{(m-1)} \,; & y_2^{(m-2)} & \ldots & y_2', & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ y_m^{(m-1)} \,; & y_m^{(m-2)} & \ldots & y_m', & y_m \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,1} A_{\rho,i_{\beta_1}} \,; & \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,2} A_{\rho,i_{\beta_1}} & \ldots & \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\beta_{k+1}} A_{\rho,i_{\beta_1}} & \ldots & \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\beta_m} A_{\rho,i_{\beta_1}} & \ldots & \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,m} A_{\rho,i_{\beta_1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,1} A_{\rho,i_{\beta_k}} \,; & \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,2} A_{\rho,i_{\beta_k}} & \ldots & \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\beta_{k+1}} A_{\rho,i_{\beta_k}} & \ldots & \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,\beta_m} A_{\rho,i_{\beta_k}} & \ldots & \sum\limits_{\rho=1}^{n} \alpha_{\rho,m} A_{\rho,i_{\beta_k}} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\;0 & 1 & 0\;0 & 0 \end{vmatrix}$$

Diese letztere Determinante reducirt sich auf eine k^{ten} Grades, die aus ihr durch Unterdrückung der Colonnen mit den Zeigern $\beta_{k+1}, \beta_{k+2} \ldots \beta_m$ entsteht, multiplicirt mit einer Potenz ε von -1, deren Exponent die Anzahl der nöthigen Vertauschungen angibt, um die Permutation $1, 2 \ldots \beta_{k+1}, \ldots \beta_m \ldots m$ in $1, 2 \ldots m, \beta_{k+1} \ldots \beta_m$ überzuführen. Die Determinante selbst ist gleich dem Producte der Matrix

$$\begin{vmatrix} A_{1,i_{\beta_1}} \,; & A_{2,i_{\beta_1}} & \ldots & A_{n,i_{\beta_1}} \\ A_{1,i_{\beta_2}} \,; & A_{2,i_{\beta_2}} & \ldots & A_{n,i_{\beta_2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ A_{1,i_{\beta_k}} \,; & A_{2,i_{\beta_k}} & \ldots & A_{n,i_{\beta_k}} \end{vmatrix}$$

mit jener, die aus

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\,; & \alpha_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12}\,; & \alpha_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1m}\,; & \alpha_{2m} & \cdot & & & \alpha_{nm} \end{vmatrix}$$

durch Unterdrückung der Zeilen mit den Indices $i_{\beta_{k+1}}$, $i_{\beta_{k+2}} \ldots i_{\beta_m}$ entsteht. Berücksichtigt man nun wieder, dass jede, der ersten Matrix entnommene Determinante gleich einem Producte aus Δ^{k-1} und ihrer adjungirten Determinante in Δ ist, so ersieht man, dass die Determinante k^{ten} Grades aus

$$\varepsilon \begin{vmatrix} a_{11}\,; & a_{21} & \cdot & \cdot & a_{n1} \\ a_{21}\,; & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n}\,; & a_{2n} & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{vmatrix}$$

gewonnen wird, indem man hierin die Zeilen mit den Indices $i_{\beta_1}, i_{\beta_2} \ldots i_{\beta_k}$ bezüglich durch die 1, 2... k^{te} Zeile der eben festgestellten Matrix der α ersetzt. Dieser Ausdruck mit

$$(-1)^k \frac{\Sigma \pm y_1^{(m-1)} y_2^{(m-2)} \cdot \cdot \cdot y_m}{\Delta}$$

multiplicirt, gibt dann das gesuchte D_m.

Man erhält somit D_m auch aus dem Ausdruck

$$\frac{\Sigma \pm y_1^{(m-1)} y_2^{(m-2)} \cdot \cdot \cdot y_m}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11}\,; & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n}\,; & \alpha_{11}\,; & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \alpha_{1m} \\ a_{21}\,; & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n}\,; & \alpha_{21}\,; & \alpha_{22} & \cdot & \cdot & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}\,; & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn}\,; & \alpha_{n1}\,; & \alpha_{n2} & \cdot & \cdot & \alpha_{nm} \end{vmatrix}$$

wenn man in der Matrix desselben die $i_1, i_2 \ldots i_n^{\text{te}}$ Colonne der a und die $h_1, h_2 \ldots h_{m+k}^{\text{te}}$ der α unterdrückt, und denselben mit einer Potenz von -1 multiplicirt, deren Exponent die Zahl der nothwendigen Vertauschungen angibt, um die in der Matrix verbliebenen Colonnen in derselben Reihenfolge zu ihren n ersten zu machen.

Das Ergebniss der vorstehenden Bemerkungen lässt sich in folgenden Satz zusammenfassen:

Jede der Matrix

$$\begin{vmatrix} (x_1)_1\,; & (x_2)_1 & \cdot & \cdot & \cdot & (x_n)_1\,; & y_1^{(m-1)}\,; & y_1^{(m-2)} & \cdot & \cdot & \cdot & y_1 \\ (x_1)_2\,; & (x_2)_2 & \cdot & \cdot & \cdot & (x_n)_2\,; & y_2^{(m-1)}\,; & y_2^{(m-2)} & \cdot & \cdot & \cdot & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (x_1)_m\,; & (x_2)_m & \cdot & \cdot & \cdot & (x_n)_m\,; & y_m^{(m-1)}\,; & y_m^{(m-2)} & \cdot & & \cdot & y_m \end{vmatrix}$$

entnommenen Determinante m^{ten} Grades erhält man aus dem Ausdrucke

$$\frac{\Sigma \pm y_1^{(m-1)} y_2^{(m-2)} \cdot \quad y_m}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11}\,; & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}\,; & \alpha_{11}\,; & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1m} \\ a_{21}\,; & a_{22} & & \cdot & \cdot & a_{2n}\,; & \alpha_{21}\,; & \alpha_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}\,; & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn}\,; & \alpha_{n1}\,; & \alpha_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{nm} \end{vmatrix}$$

wenn man in dessen Matrix die mit den aus der ersten herausgehobenen gleichstelligen Colonnen unterdrückt, und ihn mit einer Potenz von (-1) multiplicirt, deren Exponent die Anzahl der nothwendigen Vertauschungen angibt, um die verbliebenen Colonnen in derselben Aufeinanderfolge zu den n ersten der Matrix zu machen.

2. In ganz derselben Weise lässt sich offenbar die Untersuchung führen, auch wenn man die frühere Voraussetzung, $\alpha_\rho = 0$, für jedes ρ, fallen lässt. Nur wird man in diesem Falle von der Bestimmung einer Determinante $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades ausgehen müssen und gelangt dann zu dem Resultate:

Jede der Matrix

$$\left|\begin{array}{llllllll} (x_1)_1 & ; (x_2)_1 & \cdots & (x_n)_1 & ; y_1^{(m-1)} & y_1^{(m-2)} & \cdots & y_1 \\ (x_1)_2 & ; (x_2)_2 & \cdots & (x_n)_2 & ; y_2^{(m-1)} & y_2^{(m-2)} & \cdots & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (x_1)_{m+1} & ; (x_2)_{m+1} & \cdots & (x_n)_{m+1} & ; y_{m+1}^{(m-1)} & y_{m+1}^{(m-2)} & \cdots & y_{m+1} \end{array}\right|$$

entnommenen Determinante $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades ist gleich dem Ausdrucke

$$\left|\begin{array}{llllllll} a_{11} & ; a_{12} & \cdots & a_{1n} & ; \alpha_{11} & ; \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{1m}, & \alpha_1 \\ a_{21} & ; a_{22} & \cdots & a_{2n} & ; \alpha_{21} & ; \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m}, & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & ; a_{n,2} & \cdots & a_{nn} & ; \alpha_{n,1} & ; \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{nm}, & \alpha_n \end{array}\right| \quad \frac{\Sigma \pm y\, y_1^{(m-1)} \cdots y_{m+1}\, 1}{\Delta}$$

wenn man in dessen Matrix die mit den aus der ersten herausgehobenen gleichstelligen Colonnen unterdrückt, und ihn mit einer Potenz von (-1) multiplicirt, deren Exponent die Zahl der Vertauschungen angibt, welche nöthig sind, um die übrigbleibenden Colonnen in unveränderter Aufeinanderfolge zu den n ersten der Matrix zu machen.

Vermöge dieser Sätze [1] erledigt sich unmittelbar der in I gestellte Vorwurf.

III.

Es wurde nun angenommen $y_1, y_2 \ldots y_m$ sei ein Fundamentalsystem particulärer Integrale der linearen homogenen Differentialgleichung

$$y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + \ldots + a_{m-1} y' + a_m y = 0.$$

Ist die ganze positive Zahl $\mu > m$ und etwa $\mu = m + k$, so hängen die Derivirten des y nach x von höherer als der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung mit denen niedrigerer Ordnung durch das Gleichungssystem zusammen:

$$\begin{array}{rllllll} y^{(\mu)} + a_{1,k} y^{(\mu-1)} + & \cdots & + a_{\mu-m,k} y^{(m)} & + a_{\mu-(m-1),k} y^{(m-1)} & + \cdot\cdot & + a_{\mu,k} y & = v \\ y^{(\mu-1)} + & \cdots & + a_{\mu-1-m,k-1} y^{(m)} & + a_{\mu-1-(m-1),k-1} y^{(m-1)} & + \cdot\cdot & + a_{\mu-1,k-1} y & = v \\ & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ & & y^{(m)} & + a_1 y^{(m-1)} & + \cdot\cdot & + a_m y & = v \end{array}$$

wo

$$a_{\rho,\sigma} = \sum_{\lambda=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{\lambda} a_{\rho-\lambda}^{(\lambda)}$$

gesetzt wurde und hierin (λ) einen Differentiationsindex bedeutet.

---

[1] Von ihren mannigfachen Anwendungen will ich hier nur erwähnen, dass aus ihnen sich sofort der Werth des Quotienten ergibt:

$$\frac{\Sigma \pm y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha m}}{\Sigma \pm y_1^0 y_2' \cdots y_m^{m-1}}$$

wo die oberen Indices ganzzahlige positive Exponenten bedeuten, ausgedrückt durch die Coëfficienten der Gleichung, deren Wurzeln $y_1, y_2 \ldots y_m$ sind.

Dieses Gleichungssystem hat aber die Form des in II, 1 behandelten, wenn man die Derivirten des y von höherer als der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung als die x und die anderen Derivirten, y eingeschlossen, als die y betrachtet. Die Determinante Δ ist in diesem speciellem Gleichungssysteme 1 und man hat somit den Satz:

Jede der Matrix

$$\left|\begin{matrix} y_1^{(\mu)}; & y_1^{(\mu-1)} & \cdot & \cdot & y_1'; & y_1 \\ y_2^{(\mu)}; & y_2^{(\mu-1)} & \cdot & \cdot & y_2'; & y_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m^{(\mu)}; & y_m^{(\mu-1)} & \cdot & \cdot & y_m'; & y_m \end{matrix}\right| \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

entnommene Determinante m^{ten} Grades ist, wenn $\mu = m + k$, gleich dem Producte aus

$$\left|\begin{matrix} y_1^{(m-1)}; & y_1^{(m-2)} & \cdot & \cdot & y_1 \\ y_2^{(m-1)}; & y_2^{(m-2)} & \cdot & \cdot & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m^{(m-1)}; & y_m^{(m-2)} & \cdot & \cdot & y_m \end{matrix}\right| \quad \ldots \ldots \ldots (y)$$

in die Determinante $(k+1)^{\text{ten}}$ Grades, die aus der Matrix

$$\left|\begin{matrix} 1, & a_{1,k}, & a_{2k} & \cdot\;\cdot\;\cdot & a_{\mu-m,k} & \cdot\;\cdot\;\cdot & a_{\mu,k} \\ & 1, & a_{1,k-1} & \cdot\;\cdot\;\cdot & a_{\mu-m-1,k-1} & \cdot\;\cdot\;\cdot & a_{\mu-1,k-1} \\ & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ & & & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ & & & & a_1 & \cdot\;\cdot & a_m \end{matrix}\right| \quad \ldots \ldots \ldots (a)$$

erhalten wird durch Unterdrückung der mit den aus (y) herausgehobenen gleichstelligen Colonnen, multiplicirt mit einer Potenz von (-1), deren Exponent die Zahl der Vertauschungen angibt, welche nöthig sind, um die in (a) übrigbleibenden Colonnen in unveränderter Reihenfolge zu den n ersten der Matrix zu machen.

In derselben Weise ergibt sich aus II, 2 der analoge Satz für nicht homogene Differentialgleichungen, die in der Folge zu berücksichtigen desshalb überflüssig sein dürfte.[1]

Jede der Matrix (a) entnommene Determinante lässt wegen der Bedeutung ihrer Elemente

$$a_{\nu,s} = \sum_{\lambda=0}^{s} \binom{s}{\lambda} a_{\nu-\lambda}^{(\lambda)},$$

wo die a mit negativem unterem Index gleich 0 zu setzen sind, in eine Summe von Determinanten sich auflösen. Bezeichnet man das Element in der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Colonne und $(s+1)^{\text{ten}}$ Zeile mit $\alpha_{\nu,k-s}$, so ist

$$\alpha_{\nu,k-s} = a_{\nu-s,k-s} = \sum_{\lambda=0}^{k-s} \binom{k-s}{\lambda} a_{\nu-s-\lambda}^{(\lambda)}.$$

Das Hauptglied der Determinante

$$A = \Sigma \pm \alpha_{i_0,k}\,\alpha_{i_1,k-1} \cdot\;\cdot\;\cdot\; \alpha_{i_k,0}$$

---

[1] Aus diesem Satze, der unabhängig vom Begriffe der Resultante zweier linearen Differentialgleichungen abgeleitet wurde, ergibt sich auch leicht der Ausdruck für dieselbe.

ist gleich dem Ausdrucke

$$\alpha_{i_0,k}\,\alpha_{i_1,k-1}\,\ldots\,\alpha_{i_k,0}=\sum_{\lambda_0=0}^{k}\binom{k}{\lambda_0}a^{(\lambda_0)}_{i_0-\lambda_0}\sum_{\lambda_1=0}^{k-1}\binom{k-1}{\lambda_1}a^{(\lambda_1)}_{i_1-1-\lambda_1}\;\ldots\;\sum_{\lambda_k=0}^{0}\binom{0}{\lambda_k}a_{i_k-k-\lambda_k}$$

$$=\sum_{\lambda_0=0}^{k}\sum_{\lambda_1=0}^{k-1}\ldots\sum_{\lambda_k=0}^{0}\left\{\binom{k}{\lambda_0}\binom{k-1}{\lambda_1}\binom{k-2}{\lambda_2}\ldots a^{(\lambda_0)}_{i_0-\lambda_0}a^{(\lambda_1)}_{i_1-1-\lambda_1}a^{(\lambda_2)}_{i_2-2-\lambda_2}\ldots\right\}$$

und hieraus ergibt sich

$$A=\sum_{\lambda_0=0}^{k}\sum_{\lambda_1=0}^{k-1}\sum_{\lambda_2=0}^{k-2}\ldots\binom{k}{\lambda_0}\binom{k-1}{\lambda_1}\binom{k-2}{\lambda_2}\ldots\Sigma\pm a^{(\lambda_0)}_{i_0-\lambda_0}a^{(\lambda_1)}_{i_1-1-\lambda_1}a^{(\lambda_2)}_{i_2-2-\lambda_2}\ldots a^{(\lambda_k)}_{i_k-k-\lambda_k}$$

wo die Determinante rechts durch Permutation der $i_0, i_1 \ldots i_k$ aus ihrem Hauptgliede entsteht und hiebei alle a mit negativem unterem Index Null zu setzen sind.

Aus dieser Formel ersieht man, dass

1. Die Determinante höchstens vom Grade k in den Coëfficienten der Gleichung und deren Differentialquotienten ist,

2. höchstens die k^{ten} Derivirte der Coëfficienten in ihr vorkommt,

3. da im Ausdrucke für $\alpha_{\nu,s}$ bei jedem $a^{(l)}_i$ die Summen des unteren und Derivationsindex, das sogenannte Gewicht desselben $i+l$, constant ν ist, so ist in jedem Gliede der Determinante die Summe der Gewichte ihrer einzelnen Factoren, das Gewicht des Gliedes selbst, dieselbe Constante, und zwar gleich

$$\Sigma i-1-2-\ldots-k=\Sigma i-\frac{1}{2}k(k+1).$$

IV.

Hat man eine ganze Function f der Coëfficienten einer homogenen linearen Differentialgleichung

$$y^{(m)}+a_1y^{(m-1)}+\ldots+a_{m-1}y'+a_my=0$$

und der Derivirten derselben, so lässt sich f, indem man jeden Coëfficienten durch die Elemente eines Fundamentalsystems: $y_1, y_2 \ldots y_m$ ausdrückt, in eine ganze Function F dieser Integrale und ihrer Derivirten, multiplicirt mit einer Potenz von $\Delta=\Sigma\pm y_1^{(m-1)}y_2^{(m-2)}\ldots y_m$ umsetzen. Da also F gleich einem Producte aus f in eine Potenz von Δ sich darstellt, so ändert sich F nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante, wenn man in ihr von dem angenommenen Fundamentalsysteme zu einem anderen übergeht. Somit ist diese Eigenschaft von F eine nothwendige Bedingung, damit sich eine ganze Function der Elemente eines Fundamentalsystems und ihrer Derivirten ausdrücken lasse durch das Product einer Potenz von Δ in eine ganze Function der a und ihrer Derivirten. Es soll nun untersucht werden, ob diese Bedingung auch hinreichend ist und hiebei der Weg eingeschlagen worden, den die oben gemachten Bemerkungen von selbst andeuten, nämlich F in ein Aggregat von Determinanten der in III betrachteten Form aufzulösen. Auf diese Weise wird man zu dem folgenden Satze geführt:

Wenn eine in den Elementen eines Fundamentalsystems einer linearen Differentialgleichung und deren Derivirten ganze Function beim Übergange von diesem Fundamentalsysteme zu einem anderen bloss um einen constanten Factor sich ändert, so lässt sie sich ausdrücken durch das Product einer Potenz der Determinante dieses Fundamentalsystems in eine nach den Coëfficienten der Differentialgleichung und ihren Derivirten ganze Function.[1]

Mit den Elementen $y_1, y_2 \dots y_m$ eines Fundamentalsystems der Gleichung (1) mögen die Elemente $u_1, u_2 \dots u_m$ eines anderen durch die Gleichungen zusammenhängen:

$$\begin{array}{l} u_1 = c_1^1 y_1 + c_2^1 y_2 + \dots + c_m^1 y_m \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_k = c_1^k y_1 + c_2^k y_2 + \dots + c_m^k y_m \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_m = c_1^m y_1 + c_2^m y_2 + \dots + c_m^m y_m \end{array}$$

Ist nun F eine nach $u_1, u_2 \dots u_m$; $u_1', u_2' \dots u_m' \dots u_1^{(n)}, u_2^{(n)} \dots u_m^{(n)}$ ganze Function der $(mr)^{\text{ten}}$ Dimension, welche kurz mit $F(u)$ bezeichnet werde, so ist

$$\frac{dF(u)}{dc_h^k} = \frac{dF}{du_k}\frac{du_k}{dc_h^k} + \frac{dF}{du_k'}\frac{du_k'}{dc_h^k} + \dots + \frac{dF}{du_k^{(n)}}\frac{du_k^{(n)}}{dc_h^k}$$

und daher wegen

$$u_k^{(i)} = c_1^k y_1^{(i)} + c_2^k y_2^{(i)} + \dots + c_m^k y_m^{(i)} = \sum_{h=1}^{m} c_h^k y_h^{(i)}$$

$$\frac{dF(u)}{dc_h^k} = \sum_{l=0}^{n} \frac{dF}{du_k^l} y_h^l$$

Somit ist

$$\frac{d^m F(u)}{dc_{h_1}^{k_1'} dc_{h_2}^{k_2'} \dots dc_{h_m}^{k_m'}} = \sum_{l'_1 = \dots = l'_m = 0}^{n} \frac{d^m F}{du_{k'_1}^{(l'_1)} du_{k'_2}^{(l'_2)} \dots du_{k'_m}^{(l'_m)}} y_{h_1}^{(l'_1)} y_{h_2}^{(l'_2)} \dots y_{h_m}^{(l'_m)}.$$

Permutirt man nun in dieser Gleichung die $h_1, h_2 \dots h_m$ und belässt bei jeder geraden Anzahl von Vertauschungen den sämmtlichen Gliedern ihr ursprüngliches Zeichen, während man dasselbe bei jeder ungeraden Anzahl von Vertauschungen in das entgegengesetzte verwandelt, so gibt die Addition aller auf diese Weise erhaltenen Gleichungen:

$$\Sigma \frac{d^m F(u)}{dc_{h_1}^{k'_1} dc_{h_2}^{k'_2} \dots dc_{h_m}^{k'_m}} = \sum_{l'_1 = \dots = l'_m = 0}^{n} \frac{d^m F}{du_{k'_1}^{(l'_1)} du_{k'_2}^{(l'_2)} \dots du_{k'_m}^{(l'_m)}} \Sigma \pm y_{h_1}^{(l'_1)} y_{h_2}^{(l'_2)} \dots y_{h_m}^{(l'_m)}$$

Damit nun die Summe links nicht verschwinde, müssen sowohl die h als auch die k unter einander verschieden angenommen werden; in der Summe rechts sind bloss die Glieder von Null verschieden, in welchen keine zwei l einander gleich sind: somit müssen sowohl die h, als auch die k und l eine Folge der Zahlen $1, 2 \dots m$ bilden.

Setzt man fest, dass in der Summe links das Glied $\frac{d^m F(u)}{dc_1^1 dc_2^2 \dots dc_m^m}$ das positive Zeichen haben soll, so erhält die obige Formel die Gestalt

[1] Appell, Comptes rendus, t. XC und XCI. Man kann die ganze Function auch als eine Invariante eines Systems linearer Formen auffassen, woraus die Richtigkeit des Satzes sofort einleuchtet. Der nachfolgende, durch die obigen Bemerkungen von selbst sich darbietende Beweis hat mit dem Clebsch's über die symbolische Darstellung der Invarianten (Journal für Mathematik, Bd. 59) den Grundgedanken gemein.

$$\Sigma e_{k'_1,k'_2\ldots k'_m}\frac{d^m F(u)}{dc_1^{k'_1}dc_2^{k'_2}\ldots dc_m^{k'_m}}=\sum_{l'_1=\ldots=l'_m=0}^{n}\frac{d^m F}{du_{k'_1}^{(l'_1)}du_{k'_2}^{(l'_2)}\ldots du_{k'_m}^{(l'_m)}}\Sigma\pm y_1^{(l'_1)}y_2^{(l'_2)}\ldots y_m^{(l'_m)}$$

wo $e_{k'_1,k'_2\ldots k'_m}$ die positive oder negative Einheit bezeichnet je nachdem $k'_1, k'_2\ldots k'_m$ aus $1, 2\ldots m$ durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen gewonnen wird. Die Summe links erstreckt sich hierbei über alle Permutationen $k'_1, k'_2\ldots k'_m$, die aus $1, 2\ldots m$ gebildet werden können und rechts hat man für $l'_1, l'_2\ldots l'_m$ alle Variationen zur $m$ten Classe ohne Wiederholung der Zahlen $1, 2\ldots n$ zu setzen. Fasst man in dieser Summe alle Glieder zusammen, deren l nur verschiedene Permutationen derselben Complexion darstellen, so erhält man für den Coëfficienten von

$$\Sigma\pm y_1^{(l'_1)}y_2^{(l'_2)}\ldots y_m^{(l'_m)}$$

den Ausdruck

$$\Sigma e_{k'_1,k'_2\ldots k'_m}\frac{d^m F}{du_{k'_1}^{(l'_1)}du_{k'_2}^{(l'_2)}\ldots du_{k'_m}^{(l'_m)}},$$

welche Summen man symbolisch auch durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{dF}{du_1^{(l'_1)}}; & \frac{dF}{du_2^{(l'_1)}} & \ldots & \frac{dF}{du_m^{(l'_1)}} \\ \frac{dF}{du_1^{(l'_2)}}; & \frac{dF}{du_2^{(l'_2)}} & \ldots & \frac{dF}{du_m^{(l'_2)}} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{dF}{du_1^{(l'_m)}}; & \frac{dF}{du_2^{(l'_m)}} & \ldots & \frac{dF}{du_m^{(l'_m)}} \end{vmatrix}$$

oder kürzer nach Cayley's Bezeichnungsweise mit $(l'_1, l'_2\ldots l'_m)$ darstellen kann.

Man erhält so für die rechte Seite der obigen Gleichung

$$\Sigma(l'_1 l'_2\ldots l'_m)\Sigma\pm y_1^{(l'_1)}y_2^{(l'_2)}\ldots y_m^{(l'_m)},$$

wo jetzt die Summe aus dem angeschriebenen Gliede erhalten wird, indem man für $l'_1, l'_2\ldots l'_m$ alle Combinationen ohne Wiederholung zur $m$ten Classe der Zahlen $1, 2\ldots n$ setzt.

Bezeichnet $k''_1, k''_2\ldots k''_m$ eine zweite Folge der Zahlen $1, 2\ldots m$, so erhält man durch Wiederholung dieser Überlegungen

$$\Sigma e_{k'_1,k'_2\ldots k'_m}e_{k''_1,k''_2\ldots k''_m}\frac{d^{2m}F}{dc_1^{k'_1}\ldots dc_m^{k'_m}dc_1^{k''_1}\ldots dc_m^{k''_m}}$$

$$=\Sigma\{(l'_1 l'_2\ldots l'_m)(l''_1 l''_2\ldots l''_m)\Sigma\pm y_1^{(l'_1)}\ldots y_m^{(l'_m)}\Sigma\pm y_1^{(l''_1)}\ldots y_m^{(l''_m)}\}.$$

In diesem Ausdrucke haben die k'' und l'' dieselben Werthe anzunehmen, als nach der vorhergehenden Angabe bezüglich die k' und l' und das Product der beiden Symbole $(l'_1, l'_2\ldots l'_m)$ $(l''_1, l''_2\ldots l''_m)$ ist in bekannter Weise zu berechnen. In der Summe links ändert sich nun der Differentialquotient nicht, wenn man zwei k mit demselben unteren Index vertauscht; fasst man nun alle die Differentialquotienten, die dem oben angeschriebenen gleich sind, zusammen, so erhält man als deren Summe:

$$\{S(e_{k'_1,k'_2\ldots k'_m}e_{k''_1,k''_2\ldots k''_m})\}\frac{d^{2m}F}{dc_1^{k'_1}\ldots dc_m^{k'_m}dc_1^{k''_1}\ldots dc_m^{k''_m}}\cdot$$

Der Coëfficient des Differentialquotienten ist die Summe der von einander verschiedenen Terme, die man aus dem angeschriebenen Gliede erhält, wenn man darin die k mit demselben unteren Index auf alle möglichen Arten vertauscht. Die obige Gleichung nimmt nunmehr die Gestalt an,

$$\Sigma\left\{\frac{d^{2m}F}{dc_1^{k'_1}\;.\;.\;.\;dc_m^{k'_m}dc_1^{k''_1}\;.\;.\;.\;dc_m^{k''_m}}S(c_{k'_1\ldots k'_m}c_{k''_1\ldots k''_m})\right\}=$$

$$\Sigma\{(l'_1l'_2\;.\;.\;.\;l'_m)(l''_1l''_2\;.\;.\;.\;l''_m)[\Sigma\pm y_1^{(l'_1)}\;.\;.\;.\;y_m^{(l'_m)}\Sigma\pm y_1^{(l''_1)}\;.\;.\;.\;y_m^{(l''_m)}]\}$$

wo im Differentialquotienten der linken Summe für die k' und k'' nur die Producte der Permutationen von $k'_1, k'_2\ldots k'_m$ und $k''_1, k''_2\ldots k''_m$ beizubehalten sind, die sich nicht etwa bloss durch Vertauschungen von k mit demselben unteren Index von einander unterscheiden.

Bezeichnen nun $k'''_1, k'''_2\ldots k'''_m\;.\;.\;.\;.\;k^r_1, k^r_2\ldots k^r_m$ ebenfalls Permutationen der Zahlen 1, $2\ldots m$, so ergibt sich

$$\Sigma[S(c_{k'_1\ldots k'_m}c_{k''_1\ldots k''_m}\;.\;.\;.\;c_{k^r_1\ldots k^r_m})]\frac{d^{mr}F(u)}{dc_1^{k'_1}\;.\;.\;.\;dc_m^{k'_m}\;.\;.\;.\;dc_1^{k^r_1}\;.\;.\;.\;dc_m^{k^r_m}}$$

$$=\Sigma\{(l'_1\ldots l'_m)(l''_1\ldots l''_m)\ldots(l^r_1\ldots l^r_m)\Sigma\pm y_1^{(l'_1)}\ldots y_m^{(l'_m)}\Sigma\pm y_1^{(l''_1)}\ldots y_m^{(l''_m)}\ldots\Sigma\pm y_1^{(l^r_1)}\ldots y_m^{(l^r_m)}\}$$

In der Summe rechts haben die einzelnen Gruppen der l mit demselben oberen Index die früher angegebene Bedeutung und die Invariante $(l'_1\,l'_2\ldots l'_m)\,(l''_1\,l''_2\ldots l''_m)\;.\;.\;.\;(l^r_1\,l^r_2\ldots l^r_m)$ wird in bekannter Weise aus dieser ihrer symbolischen Darstellung gewonnen; für die l sind alle von einander verschiedenen Producte aus je r Combinationen ohne Wiederholung zur m^{ten} Classe der Zahlen 1, $2\ldots n$ zu setzen. Links bezeichnet jede Gruppe der k mit demselben oberen Index eine Permutation von 1, $2\ldots m$; der Coëfficient des obigen Differentialquotienten wird durch Summirung aller von einander verschiedenen Terme erhalten, die sich aus

$$c_{k'_1\ldots k'_m}c_{k''_1\ldots k''_m}\;.\;.\;.\;c_{k^r_1\ldots k^r_m}$$

durch alle möglichen Vertauschungen der k mit demselben unteren Index ergeben; die Summe selbst wird aus dem angeschriebenen Gliede gewonnen, indem man die k jeder Gruppe auf alle möglichen Weisen permutirt, von diesen Gliedern aber nur jene beibehält, die nicht durch Vertauschungen von k mit demselben unteren Index in einander übergeführt werden können.

Der $(mr)^{\text{te}}$ Differentialquotient in der obigen Formel ist wegen der Voraussetzung, dass $F(u)$ nach den $u_1\ldots u_m\ldots u_1^{(n)}\ldots u_m^{(n)}$ von der $(mr)^{\text{ten}}$ Dimension sei, eine absolute Zahl. Ist nun $F[y_1\ldots y_m;\,y'_1\ldots y'_m;\,y_1^{(n)}\ldots y_m^{(n)}]$ von der Beschaffenheit, dass

$$F(u)=CF(y)$$

wo l bloss von den c abhängt, die darin bis zur $(mr)^{\text{ten}}$ Dimension ansteigen müssen, so ist

$$F(y)\Sigma[S(c_{k'_1\ldots k'_m}\;.\;.\;.\;c_{k^r_1\ldots k^r_m})]\frac{d^{mr}C}{dc_1^{k'_1}dc_2^{k'_2}\;.\;.\;.\;dc_m^{k'_m}\;.\;.\;.\;dc_1^{k^r_1}dc_2^{k^r_2}\;.\;.\;.\;dc_m^{k^r_m}} \tag{1}$$

$$=\Sigma\{(l'_1\ldots l'_m)(l''_1\ldots l''_m)\ldots(l^r_1\ldots l^r_m)\Sigma\pm y_1^{(l'_1)}\ldots y_m^{(l'_m)}\ldots\Sigma\pm y_1^{(l^r_1)}\ldots y_m^{(l^r_m)}\},$$

wo die Summen die früher angegebene Gestalt haben und der Differentialquotient von l und daher auch der ganze Coëfficient von $F(y)$ eine absolute Zahl ist. Bezeichnet man denselben etwa mit $\frac{1}{m}$, so ergibt sich

$$F(y)=m\Sigma\{(l'_1\ldots l'_m)\ldots(l^r_1\ldots l^r_m)\Sigma\pm y_1^{(l'_1)}\ldots y_m^{(l'_m)}\ldots\Sigma\pm y_1^{(l^r_1)}\ldots y_m^{(l^r_m)}\}.$$

Dies ist also die Form, in welche jede nach $y_1\ldots y_m;\;\ldots y_1^{(n)}\ldots y_m^{(n)}$ ganze Function der $(mr)^{\text{ten}}$ Dimension gebracht werden kann, wenn sie bei Vertauschung eines Fundamentalsystems mit einem anderen sich bloss um einen constanten Factor ändert. Der Werth des letzteren ergibt sich gleichfalls aus dieser Gleichung: er ist C^r, wo $C = \Sigma \pm c_1^1 c_2^2 \dots c_m^m$ die Substitutionsdeterminante bezeichnet.

Es hat nunmehr auch keine Schwierigkeit, den Werth von m in der obigen Formel zu bestimmen. Es ist nämlich

$$\frac{d^{mr} C}{dc_1^{k'_1} \dots dc_m^{k'_m} dc_1^{k''_1} \dots dc_m^{k''_m} \dots dc_1^{k^r_1} \dots dc_m^{k^r_m}} = \frac{d^{mr}[\Sigma \pm c_1^1 c_2^2 \dots c_m^m]^r}{dc_1^{k'_1} \dots dc_m^{k'_m} dc_1^{k''_1} \dots dc_m^{k''_m} \dots dc_1^{k^r_1} \dots dc_m^{k^r_m}} = r!\, S(c_{k'_1} \dots k'_m \dots c_{k^r_1} \dots k^r_m),$$

wo die hier auftretende Summe dieselbe wie oben ist. Somit ergibt sich

$$\frac{1}{m} = r!\, \Sigma [S(c_{k'_1} \dots k'_m \dots c_{k^r_1} \dots k^r_m)]^2$$

wo die Bedeutung der Summen aus den vorhergehenden Entwickelungen klar sind.

Jede in der Formel (1) vorkommende Determinante lässt sich nun nach (III) durch ein Product aus $\Sigma \pm y_1^{(m-1)} y_2^{(m-2)} \dots y_m$ in eine nach den Coëfficienten der Differentialgleichung und ihren Differentialquotienten ganze Function ausdrücken, womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

2) Enthielte F ausser den y in analoger Weise auch die Elemente $\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_\mu$ eines Fundamentalsystems einer anderen Differentialgleichung:

$$\zeta^{(\mu)} + \alpha_1 \zeta^{(\mu-1)} + \dots + \alpha_{\mu-1} \zeta' + \alpha_\mu \zeta = 0$$

und wäre F eine nach den Grössen $\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_\mu \dots \zeta_1^{(\nu)}, \zeta_2^{(\nu)} \dots \zeta_\mu^{(\nu)}$ ganze Function $(\mu\rho)$ten Grades, die sich beim Übergange von einem Fundamentalsysteme zu einem anderen bloss um einen constanten Factor ändert, so zeigt die Fortsetzung der eben auseinandergesetzten Überlegungen, dass F durch das Product aus

$$[\Sigma \pm y_1 y_2' \dots y_m^{(m-1)}]^r [\Sigma \pm \zeta_1 \zeta_2' \dots \zeta_\mu^{(\mu-1)}]^\rho$$

in eine nach den Coëfficienten der beiden Differentialgleichungen und ihren Differentialquotienten ganze Function sich ausdrücken lässt.

An Stelle der Formel erhält man nämlich

$$F(y, \zeta)\, r!\, \rho!\, \Sigma \{ [S(c_{k'_1} \dots k'_m \dots c_{k^r_1} \dots k^r_m)]^2 [S(c_{x'_1} \dots x'_\mu \dots c_{x^\rho_1} \dots x^\rho_\mu)]^2 \}$$
$$= \Sigma \{ (l'_1 \dots l'_m) \dots (l^r_1 \dots l^r_m)(\lambda'_1 \dots \lambda'_\mu) \dots (\lambda^\rho_1 \dots \lambda^\rho_\mu)$$
$$\Sigma \pm y_1^{(l'_1)} \dots y_m^{(l'_m)} \dots \Sigma \pm y_1^{(l^r_1)} \dots y_m^{(l^r_m)} \Sigma \pm \zeta_1^{(\lambda'_1)} \dots \zeta_\mu^{(\lambda'_\mu)} \dots \Sigma \pm \zeta_1^{(\lambda^\rho_1)} \dots \zeta_\mu^{(\lambda^\rho_\mu)} \}$$

wo die Bedeutung der einzelnen Zeichen nach dem Vorhergehenden keiner Erläuterung bedarf. Jede in der Summe rechts vorkommende Determinante lässt sich nun nach III durch ein Product aus der Determinante der Elemente des betreffenden Fundamentalsystems in eine nach den Coëfficienten der zugehörigen Differentialgleichung und ihren Differentialquotienten ganze Function ausdrücken.

Es braucht wohl nicht weiter ausgeführt zu werden, dass und wie sich diese Betrachtungen auf Functionen ausdehnen lassen, in welche die Elemente der Fundamentalsysteme mehrerer Differentialgleichungen eingehen.

V.

Von den vielen und wichtigen Anwendungen, welche der eben entwickelte Satz zulässt,[1] will ich hier nur eine behandeln, die für spätere Untersuchungen von Wichtigkeit sein wird: die Herleitung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter denen eine ganze Function der Elemente eines Fundamentalsystems einer homogenen linearen Differentialgleichung identisch Null oder gleich einer ganzen Function der

[1] Appell, Comptes rendus, Bd. XCI.

Unabhängigen ist. Diese Bedingung ergibt sich aus dem bekannten Satze, dass mehrere Functionen einer Veränderlichen in einer linearen Verbindung stehen, wenn deren Determinante verschwindet. Damit also die Elemente eines Fundamentalsystems einer homogenen linearen Differentialgleichung eine Gleichung bestimmten Grades mit constanten Coëfficienten bilden, ist es nothwendig und hinreichend, dass die Determinante der einzelnen Glieder dieser Gleichung verschwinde. Lässt sich nun zeigen, dass diese Determinante beim Übergange von dem angenommenen zu einem anderen Fundamentalsysteme sich nur um einen constanten Factor ändert, so kann ihr Verschwinden nach IV durch eine Relation zwischen den Coëfficienten der Differentialgleichung ausgedrückt werden, welcher Ausdruck dann die gesuchte hinreichende und nothwendige Bedingung ist. Durch wiederholte Differentiation lässt sich auf diesen Fall auch der allgemeinere zurückführen, dass eine ganze Function der Elemente eines Fundamentalsystems mit constanten Coëfficienten einer ganzen Function der Unabhängigen gleich sein soll.

Um die soeben angedeuteten Untersuchungen durchzuführen, will ich mit dem einfachsten Falle beginnen und annehmen, es bestehe zwischen den Elementen y_1, y_2 eines Fundamentalsystems einer homogenen linearen Differentialgleichung eine homogene ganze Relation n^{ten} Grades mit constanten Coëfficienten. Die nothwendige und hinreichende Bedingung hiefür gibt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} y_1^{n} & ; \; y_1^{n-1} y_2 & \ldots & y_2^{n} \\ (y_1^{n})' & ; \; (y_1^{n-1} y_2)' & \ldots & (y_2^{n})' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ (y_1^{n})^{(n)} & ; \; (y_1^{n-1} y_2)^{(n)} & \ldots & (y_2^{n})^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

Setzt man nun

$$u_1 = c_1' y_1 + c_2' y_2 \; ; \; u_2 = c_1'' y_1 + c_2'' y_2$$

so geht diese Determinante durch zeilenweise Multiplication mit

$$C = \begin{vmatrix} c_1'^{n} & ; & \binom{n}{1} c_1'^{n-1} c_2' & ; & \binom{n}{2} c_1'^{n-2} c_2'^{2} & \ldots & c_2'^{n} \\ c_1'^{n-1} c_2'' & ; & \left\{ \begin{matrix} \binom{n-1}{1} c_1'^{n-2} c_2' c_1'' \\ + c_1'^{n-1} c_2'' \end{matrix} \right. & ; & \left\{ \begin{matrix} \binom{n-1}{2} c_1'^{n-3} c_2'^{2} c_1'' \\ + \binom{n-1}{1} c_1'^{n-2} c_2' c_2'' \end{matrix} \right. & \ldots & c_2'^{n-1} c_2'' \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_1''^{n} & ; & \binom{n}{1} c_1''^{n-1} c_2'' & ; & \binom{n}{2} c_1''^{n-2} c_2''^{2} & \ldots & c_2''^{n} \end{vmatrix}$$

über in

$$\begin{vmatrix} u_1^{n} & ; \; u_1^{n-1} u_2 & \ldots & u_2^{n} \\ (u_1^{n})' & ; \; (u_1^{n-1} u_2)' & \ldots & (u_2^{n})' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ (u_1^{n})^{(n)} & ; \; (u_1^{n-1} u_2)^{(n)} & \ldots & (u_2^{n})^{(n)} \end{vmatrix} \quad \text{w. z. b. w.}$$

Dass die Determinante C, wie sich aus dem allgemeinen Satze in IV, 1 ergibt, die $\frac{1}{2}n(n+1)$ Potenz der Substitutionsdeterminante $(c_1' c_2'' - c_1'' c_2')$ ist, ersieht man auch unmittelbar, wenn man sie zeilenweise multiplicirt mit

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} C = \binom{n}{1}\binom{n}{2}\ldots\binom{n}{n} \begin{vmatrix} c_2''^{n} & ; & (-1)^1 c_2''^{n-1} c_1'' & ; & (-1)^2 c_2''^{n-2} c_1''^{2} & \ldots (-1)^n c_1''^{n} \\ c_2''^{n-1} c_2' & ; & \dfrac{(-1)^1}{\binom{n}{1}} \left\{ \begin{matrix} \binom{n-1}{1} c_2''^{n-2} c_1'' c_2' \\ + c_2''^{n-1} c_1' \end{matrix} \right. & ; & \dfrac{(-1)^2}{\binom{n}{2}} \left\{ \begin{matrix} \binom{n-1}{2} c_2''^{n-3} c_1'' c_1' \\ + \binom{n-1}{1} c_2''^{n-3} c_1'' c_1 \end{matrix} \right. & \ldots (-1)^n c_1''^{n-1} c_1' \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \ldots \quad \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \ldots \quad \cdot \\ c_2'^{n} & ; & (-1)^1 c_2'^{n-1} c_1' & ; & (-1)^2 c_2'^{n-2} c_1'^{2} & \ldots (-1)^n c_1'^{n} \end{vmatrix},$$

dann erhält man als Product:

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}C^2 = \begin{vmatrix} (c_1'c_2''-c_1''c_2')^n\,; & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ;\ -\frac{(c_1''c_2''-c_1''c_2')^n}{\binom{n}{1}} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & (-1)^n\frac{c_1'c_2''-c_1''c_2'}{\binom{n}{n}} \end{vmatrix} \binom{n}{1}\binom{n}{2}\dots\binom{n}{n}$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}(c_1'c_2''-c_1''c_2')^{n(n+1)}.$$

Daher

$$C = \pm(c_1'c_2''-c_1''c_2')^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

wo aber, wie die Entwickelung des Diagonalgliedes in C zeigt, das obere Zeichen zu nehmen ist.

In ganz derselben Weise verfährt man, um die nothwendige und hinreichende Bedingung zu erhalten, welche zwischen den Coëfficienten einer homogenen linearen Differentialgleichung stattfinden muss, damit die Elemente eines Fundamentalsystems derselben in einer homogenen Verbindung n^{ten} Grades zu einander stehen.

Ich will diese Behauptung an dem Falle einer linearen Differentialgleichung der III. Ordnung erläutern und zu diesem Behufe mit y_1, y_2, y_3 die Elemente eines Fundamentalsystems derselben bezeichnen, die aneinander durch eine homogene Gleichung n^{ten} Grades mit constanten Coëfficienten gebunden seien. Die Bedingung für die Existenz einer solchen Gleichung besteht in dem Verschwinden der Determinante der Glieder, die sich aus der Entwickelung von $(y_1+y_2+y_3)^n$ nach Unterdrückung des Polynomialcoëfficienten ergeben. Wird diese Determinante mit Y bezeichnet, so zeigt sich, dass beim Übergange vom Fundamentalsysteme y_1, y_2, y_3 zu

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_3'y_3 \\ u_2 &= c_1''y_1 + c_2''y_2 + c_3''y_3 \\ u_3 &= c_1'''y_1 + c_2'''y_2 + c_3'''y_3 \end{aligned}$$

dieselbe von der entsprechenden Determinante U der u_1, u_2, u_3 sich nur um einen constanten Factor unterscheidet Man erhält nämlich die Determinante U aus Y, indem man letztere mit einer Determinante D multiplicirt, die folgendermassen gebildet wird. Die Elemente der ersten Zeile sind der Reihe nach die Glieder der Entwickelung von

$$(c_1+c_2+c_3)^n;$$

die der zweiten Zeile ergibt die Entwickelung von

$$(c_1+c_2+c_3)^{n-1}(c_1'+c_2'+c_3')$$

wenn man hievon immer die Glieder zu einem Elemente vereinigt, die für $c_1'=c_1$, $c_2'=c_2$, $c_3'=c_3$ in das darüberstehende Element der ersten Zeile übergehen. So fortfahrend, erhält man die Elemente der $(n+1)^{\text{ten}}$ Zeile in derselben Weise aus

$$(c_1'+c_2'+c_3')^n,$$

die der $(n+2)^{\text{ten}}$ Zeile aus

$$(c_1+c_2+c_3)^{n-1}(c_1''+c_2''+c_3''),$$

die der $(n+3)^{\text{ten}}$ aus

$$(c_1+c_2+c_3)^{n-2}(c_1'+c_2'+c_3')(c_1''+c_2''+c_3''),$$

die der $(n+4)^{\text{ten}}$ aus

$$(c_1+c_2+c_3)^{n-3}(c_1'+c_2'+c_3')^2(c_1''+c_2''+c_3'') \quad \text{u. s. f.}$$

Man erhält also die Elemente der Zeilen von D, indem man alle Combinationen mit Wiederholung der Grössen

$$(c_1 + c_2 + c_3),\ (c'_1 + c'_2 + c'_3),\ c''_1 + c''_2 + c''_3)$$

zur n^{ten} Classe und aus den Gliedern der Entwickelung jeder einzelnen Complexion in der angegebenen Weise die Elemente einer Zeile bildet.

Es ist nun klar, dass die Elemente der ersten Zeile in Y multiplicirt mit den gleichstelligen Elementen irgend einer Zeile in D zur Summe einen Ausdruck haben, welcher aus der Complexion der

$$(c_1 + c_2 + c_3),\ (c'_1 + c'_2 + c'_3),\ c''_1 + c''_2 + c''_3),$$

welche die Elemente der Zeile in D lieferte, erhalten wird, wenn man darin für $c_1 : c_1 y_1$, $c_2 : c_2 y_2$, $c_3 : c_3 y_3$, ... $c''_1 : c''_1 y_1$, $c''_2 : c''_2 y_2$, $c''_3 : c''_3 y_3$ setzt. Folglich stellen die Elemente der ersten Zeile von U die sämmtlichen Combinationen mit Wiederholung zur n^{ten} Classe von u_1, u_2, u_3 dar und die Elemente jeder anderen Zeile werden durch Differentiation der Elemente der vorangehenden Zeile erhalten; somit ist

$$U = Y . D.$$

Da nun die Determinante Y beim Übergange vom Fundamentalsysteme y_1, y_2, y_3 zu u_1, u_2, u_3 bloss um einen constanten Factor sich ändert, so lässt sich auf sie der Satz IV anwenden. Nach demselben ist, nebenbei bemerkt, die Determinante D gleich der $\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$ Potenz von $\Sigma \pm c_1 c'_2 c''_3$, was sich auch, wie beim früheren Falle einer linearen homogenen Differentialgleichung der II^{ten} Ordnung, unmittelbar nachweisen liesse.

Es ist klar, dass die vorhergehende, für den Fall $m = 3$ gegebene Entwickelung sich verallgemeinern lässt und man wird so zur Erkenntniss geführt, dass die Determinante, deren Verschwinden die hinreichende und nothwendige Bedingung ausdrückt, damit die Elemente $y_1, y_2 \ldots y_m$ eines Fundamentalsystems einer linearen homogenen Differentialgleichung eine homogene Relation n^{ten} Grades mit constanten Coëfficienten erfüllen, sich bloss um einen constanten Factor ändert beim Übergange von $y_1, y_2 \ldots y_m$ zu einem anderen Fundamentalsysteme. Auf diese Determinante findet daher der Satz IV Anwendung, und somit lässt sich die erwähnte Bedingung durch eine Relation zwischen den Coëfficienten der Differentialgleichung und deren Differentialquotienten ausdrücken.

2) Bezeichnet man mit Y die eben angegebene und mit U die analog aus den Elementen $u_1, u_2 \ldots u_m$ eines anderen Fundamentalsystems gebildete Determinante, so ist nach dem Vorhergehenden

$$YD_n = U$$

wo D_n nach (IV, 1) die Potenz $\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{m!}$ der Substitutionsdeterminante ist. Diese Gleichung bleibt nun offenbar bestehen, wenn man in Y statt jedes Elementes der ersten Zeile seine k^{te} Derivirte setzt, wodurch in jeder Zeile von Y der Derivationsindex um k vermehrt wird. Nennt man die hiedurch aus Y erhaltene Determinante Y_k und die analog aus U entstandene U_k, so ist also

$$U_k = D_n Y_k$$

Die Determinante Y_k kann daher wieder nach (IV, 1) umgeformt werden und ihr Verschwinden somit durch eine Relation zwischen den Coëfficienten der Differentialgleichung und ihren Derivirten ausgedrückt werden. $Y_k = 0$ ist aber die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit eine homogene Function n^{ten} Grades zwischen $y_1, y_2 \ldots y_m$ mit constanten Coëfficienten einer ganzen Function $(k-1)^{\text{ten}}$ Grades der Unabhängigen gleich sei, und dieser Bedingung ist also die gewonnene Relation zwischen den Coëfficienten äquivalent.

3) Damit eine ganze Function n^{ten} Grades der Elemente $y_1, y_2 \ldots y_m$ eines Fundamentalsystemes verschwinde, ist es hinreichend und nothwendig, dass die Determinante verschwinde, deren Elemente die einzelnen Glieder der Entwickelung von $(y_1+y_2+\ldots+y_m)^n$, $(y_1+y_2+\ldots+y_m)^{n-1} \ldots (y_1+y_2+\ldots+y_m)^1$ nach Weglassung der Polynomialcoëfficienten sind. Bezeichnet man diese Determinante mit Y und die analog aus den Elementen $u_1, u_2 \ldots u_m$ eines anderen Fundamentalsystems gebildete mit U, so wird diese aus jener durch Multiplication mit der folgenden aus den Elementen der Substitutionsdeterminante zusammengesetzten Determinante D erhalten. Ihre von Null verschiedenen Elemente sind geordnet zu n-Quadraten, deren Diagonalen n an einander stossende Stücke der Hauptdiagonale von D sind und längs derselben der Reihe nach die Determinanten $D_n, D_{n-1} \ldots D_1$ der von (2) bilden. Es ist also [1]

$$U = DY.$$

Diese Gleichung bleibt nun offenbar erhalten, wenn man Y, statt es aus den eben verwendeten Functionen, aus ihren k^{ten} Derivirten bildet. Die Gleichung $Y=0$ drückt aber in diesem Falle aus, dass eine ganze Function n^{ten} Grades der Elemente dieses Fundamentalsystems $y_1, y_2 \ldots y_m$ mit constanten Coëfficienten gleich einer ganzen Function der Unabhängigen ist.

Wegen der oben bewiesenen Eigenschaft lässt sich in beiden Fällen auf die Determinante Y der Satz (IV, 1) anwenden, und man gelangt so zu dem Ergebnisse:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit eine ganze Function der Elemente eines Fundamentalsystems einer linearen Differentialgleichung gleich Null oder einer ganzen Function der Unabhängigen ist, lässt sich durch eine Relation zwischen den Coëfficienten der Differentialgleichung und ihren Derivirten mittelst IV, 1 ausdrücken.

4) In der vorhergehenden Determinante Y haben die Elemente jeder Zeile denselben Derivationsindex, es ist jedoch klar, dass die Beziehung

$$U = DY$$

bestehen bleibt, wenn man in Y die Derivationsindices irgend welcher Zeilen verändert und in U die analogen Veränderungen vornimmt. Also auch auf die so gebildeten Determinanten findet der Satz IV Anwendung.

VI.

Die Besonderheit der im Vorhergehenden besprochenen Determinanten, zumal der in V, 2 erwähnten, gestattet bei Anwendung der Formel III einige Vereinfachungen, die zunächst bemerkt werden mögen.

Die in Rede stehenden Determinanten haben die Form

$$\Sigma \pm (y_1^n)^{(k_0)} (y_1^{n-1} y_2)^{(k_1)} \; . \; . \; . \; (y_m^n)^{(k_{\mu-1})} = Y$$

wo die oberen Indices Derivationszeiger bedeuten und

$$\mu = \frac{m(m+1) \; . \; . \; . \; (m+n-1)}{n!}$$

ist.

Diese Determinante erhält man zunächst aus der Entwickelung von

$$(y_1^n)^{k'_0} (y_1^{n-1} y_2)^{k'_1} \; . \; . \; . \; (y_m^n)^{k'_{\mu-1}}$$

wo $k'_0, k'_1 \ldots k'_{\mu-1}$ eine Folge der Zahlen $k_0, k_1 \ldots k_{\mu-1}$ bezeichnen, wenn man darin die $k'_0, k'_1 \ldots k'_{\mu-1}$ auf alle möglichen Weisen permutirt und je nachdem diese Permutation aus $k_0, k_1 \ldots k_{\mu-1}$ durch eine gerade oder

[1] Zu demselben Ergebniss gelangt man durch Anwendung des La Place'schen Determinantensatzes, indem hiebei Y in ein Aggregat von Producten aus Determinanten der in (2) behandelten Form auflöst.

ungerade Anzahl von Vertauschungen gewonnen wird, den durch dieselbe erhaltenen Ausdruck mit dem positiven oder negativen Vorzeichen zu den anderen addirt. Um die einzelnen Differentialquotienten des obigen Productes zu berechnen, gebraucht man die symbolische Formel

$$(u_1+u_2+\ldots u_m)^{(p)}=\Sigma\frac{p!}{\rho_1!\,\rho_2!\cdots\rho_m!}\,u_1^{(\rho_1)}u_2^{(\rho_2)}\ldots u_m^{(\rho_m)},$$

wo

$$\rho_1+\rho_2+\ .\ .\ .\ +\rho_m=p.$$

Hieraus folgt, dass in der Entwickelung des obigen Productes die Summe der Derivationsindices der $y_1, y_2\ldots y_m$ in jedem Gliede gleich

$$k_0+k_1+\ .\ .\ .\ +k_{\mu-1}$$

ist.

Ist speciell, wie in V: $k_0=k,\ k_1=k+1\ldots\ k_{\mu-1}=k+\mu-1$, so ist

$$k'_0+k'_1+\ .\ .\ .\ +k'_\mu=\mu k+\tfrac{1}{2}\mu(\mu-1).$$

Bei Anwendung der Formel in IV auf den vorliegenden Fall haben also die $l'_1,\ l'_2\ldots l'_m\ .\ .\ .\ l_1^{(r)},\ l_2^{(r)}\ldots l_m^{(r)}$ die Gleichung zu befriedigen

$$\Sigma l'+\Sigma l''+\ .\ .\ .\ +\Sigma l^{(r)}=\mu k+\tfrac{1}{2}\mu(\mu-1),$$

wo $r=\frac{n\mu}{m}$ ist. Diese Gleichung ermöglicht es, bei gegebenem m und n die litterale Form des Ausdruckes herzustellen, dessen numerische Coëfficienten dann, ähnlich wie bei den symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung, auf verschiedene Weise bestimmt werden können.

2) Die Determinante Y lässt sich nach dem wiederholt citirten Satze umsetzen in

$$Y=M\Delta^r F(a_1,\ a_2\ .\ .\ .\ a_\mu^{(i)}\quad .\ .\ )$$

wo M eine reine Zahl, Δ die Determinante des Fundamentalsystems $y_1,\ y_2\ldots y_m$ der Differentialgleichung und F eine ganze Function ihrer Coëfficienten und deren Differentialquotienten bedeuten. Vom Baue dieser ganzen Function lässt sich nun leicht eine wesentliche Eigenschaft ermitteln.

Man bilde die der Y analoge Determinante $[Y]$ für die Differentialgleichung, die aus

$$\frac{d^m y}{dx^m}+a_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\ .\ .\ .\ +a_{m-1}\frac{dy}{dx}+a_m y=0$$

hervorgeht, wenn man hierin $x=p\xi$ setzt, wo ξ eine neue Variable und p eine beliebige Constante bezeichnen. Stellt

$$\frac{d^m y}{dx^m}+A_1\frac{d^{m-1}y}{d\xi^{m-1}}+\ .\ .\ .\ +A_{m-1}\frac{dy}{d\xi}+A_m y=0$$

diese Gleichung dar, so ist

$$A_\lambda=p^\lambda[a_\lambda],$$

wo die eckige Klammer anzeigt, dass in a_λ für $x:p\xi$ gesetzt wurde.

Für die Differentialquotienten des A_λ nach ξ erhält man aus

$$\frac{d^i a_\lambda}{d\xi^i}=p^i\frac{d^i a_\lambda}{dx^i}$$

$$\frac{d^i A_\lambda}{d\xi^i}=p^{i+\lambda}\frac{d^i a_\lambda}{dx^i}.$$

Nun ist

$$[Y] = \Sigma \pm \frac{d^{k_0}(y_1^n)}{d\xi^{k_0}} \frac{d^{k_1}(y_1^{n-1}y_2)}{d\xi^{k_1}} \cdot \cdot \cdot \frac{d^{k_{\mu-1}}(y_m^n)}{d\xi^{k_{\mu-1}}}$$

$$= p^{\Sigma k} \Sigma \pm \frac{d^{k_0}(y_1^n)}{dx^{k_0}} \frac{d^{k_1}(y_1^{n-1}y_2)}{dx^{k_1}} \cdot \cdot \cdot \frac{d^{k_{\mu-1}}(y_m^n)}{dx^{k_{\mu-1}}}$$

wo $\Sigma k = k_0 + k_1 + \ldots + k_{\mu-1}$ ist; ferner

$$\Sigma \pm y_1 \frac{dy_2}{d\xi} \cdot \cdot \cdot \frac{d^{m-1}y}{d\xi^{m-1}} = p^{\frac{1}{2}m(m-1)} \Sigma \pm y_1 \frac{dy_2}{dx} \cdot \cdot \cdot \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}}.$$

Somit erhält man, da

$$[Y] = M\left[\Sigma \pm y_1 \frac{dy_2}{d\xi} \cdot \cdot \cdot \frac{d^{m-1}y}{d\xi^{m-1}}\right]^{\rho} F(A_1, A_2 \ldots A_m \ldots A_\lambda^{(i)} \ldots)$$

$$F(A_1, A_2 \ldots A_m \ldots A_\lambda^{(i)} \ldots) = p^\sigma F(a_1, a_2 \ldots a_m \ldots a_\lambda^{(i)} \ldots)$$

wo

$$\sigma = k_0 + k_1 + \ldots + k_{\mu-1} - \frac{\rho}{2} m(m-1)$$

gesetzt wurde. Es ist also

$$F[pa_1, p^2 a_2 \ldots p^m a_m \ldots (p^{i+\lambda} a_\lambda^{(i)}) \ldots]$$
$$= p^\sigma F(a_1, a_2 \ldots a_m \ldots a_\lambda^{(i)} \ldots)$$

Da nun p eine willkürliche Grösse ist, so ist $F(a_1, a_2 \ldots a_m \ldots a_\lambda^{(i)} \ldots)$ jenem Aggregat von Gliedern in der Entwickelung links gleich, deren jedes mit p^σ multiplicirt erscheint. Die ganze Function

$$F(a_1, a_2 \ldots a_m \ldots a_\lambda^{(i)} \ldots)$$

hat also die Eigenschaft, dass p^σ als Factor in jedem ihrer Glieder heraustritt, wenn man in derselben für $a_1 : pa_1$, $a_2 : p^2 a_2 \ldots a_\lambda^{(i)} : p_{(i)}^{(i+\lambda)} a_\lambda^{(i)} \ldots$ setzt. Nennt man daher, wie in III, $i+\lambda$ das Gewicht von $a_\lambda^{(i)}$ und die Summe der Gewichte der einzelnen Factoren eines Productes dessen Gewicht, so hat man den Satz:

Die Glieder der obigen ganzen Function $F(a_1, a_2 \ldots a_\lambda^{(i)} \ldots)$ haben das nämliche Gewicht, und zwar beträgt dasselbe

$$\sigma = k_0 + k_1 + \ldots + k_{\mu-1} - \frac{r}{2} m(m-1)$$
$$= k_0 + k_1 + \ldots + k_{\mu-1} - \tfrac{1}{2}\mu n(m-1)$$

Ist speciell $k = 0$, $k_1 = 1 \ldots k_{\mu-1} = \mu - 1$, so ist das Gewicht

$$\tfrac{1}{2}[\mu(\mu-1) - \mu n(m-1)].$$

VII.

Ich will nun die vorangehenden allgemeinen Auseinandersetzungen auf einige specielle Fälle anwenden.

1) Es sei zunächst $m = 2$ und n eine beliebige ganze positive Zahl. Es soll nun auf die Determinante

$$\Sigma \pm y_1^n (y_1^{n-1} y_2)' \cdot \cdot \cdot (y_2^n)^{(n)}$$

zunächst die Formel IV angewandt werden.

Nach der Bemerkung in VI, 1 müssen die in dieser Formel auftretenden λ' und λ'' der Bedingung genügen

$$\left.\begin{matrix}\lambda'_1\\+\lambda'_2\end{matrix}\right\}+\left.\begin{matrix}\lambda''_1\\+\lambda''_2\end{matrix}\right\}+\;.\;\;.\;\;.\;+\begin{matrix}\lambda^r_1\\+\lambda^r_2\end{matrix}=\tfrac{1}{2}n(n+1)=r.$$

Da nun keine zwei λ mit demselben oberen Index einander gleich sein dürfen, so erhält man aus dieser Gleichung als Werthe der zulässigen λ:

$$\begin{aligned}\lambda'_1=\lambda''_1&=\;.\;\;.\;\;.\;\lambda^\nu_1=0;\quad \lambda^{\nu+1}_1=\;.\;\;.\;\;.\;=\lambda^r_1=1\\ \lambda''_1=\lambda''_2&=\;.\;\;.\;\;.\;\lambda^\nu_2=1;\quad \lambda^{\nu+1}_2=\;.\;\;.\;\;.\;=\lambda^r_2=0\end{aligned}$$

wo für ν alle Werthe von 1 bis $\frac{r}{2}$ oder $\frac{r+1}{2}$ zu setzen sind, je nachdem r gerade oder ungerade ist. Die Formel ergibt somit

$$\begin{aligned}&\Sigma\pm y^n_1(y^{n-1}_1y_2)'\;.\;\;.\;\;.\;(y^n_2)^{(n)}\\&=A(y_1y'_2-y'_1y_2)^r\end{aligned}$$

wo die Bedeutung des A klar ist. Statt A aus seiner durch die Formel gegebenen Definition zu berechnen, kann man es auch vermöge der obigen Gleichung durch specielle Annahmen des y_1 und y_2 bestimmen.

Zu diesem Behufe wähle man etwa

$$y_1=e^{\alpha_1x},\quad y_2=e^{\alpha_2x}.$$

Für diese Werthe wird

$$\begin{aligned}&\Sigma\pm y^n_1(y^{n-1}_1y_2)'\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;(y^n_2)^{(n)}\\&=1!\,2!\;.\;\;.\;\;.\;(m-1)!\,m!\,(\alpha_2-\alpha_1)^re^{r(\alpha_1+\alpha_2)x}\\&=A(\alpha_2-\alpha_1)^re^{r(\alpha_1+\alpha_2)x}\end{aligned}$$

daher ist

$$A=1!\,2!\;.\;\;.\;\;.\;m!$$

und

$$\begin{aligned}&\Sigma\pm y^n_1(y^{n-1}_1y_2)'\;.\;\;.\;\;.\;(y^n_2)^{(n)}\\&=1!\,2!\;.\;\;.\;\;.\;m!(y_1y'_2-y'_1y_2)^{\frac{1}{2}n(n+1)}\end{aligned}$$

Zu demselben Ergebnisse wäre man auch durch die Bemerkung 2) der vorigen Nummer gelangt. Nach IV ist nämlich

$$\Sigma\pm y^n_1(y^{n-1}_1y_2)'\;.\;\;.\;\;.\;(y^n_2)^{(n)}=(\Sigma\pm y_1y'_2)^rF(a_1,a_2\;.\;\;.\;\;.\;)$$

wo r dieselbe Bedeutung wie vorher besitzt und F eine in den Coëfficienten a_1, a_2 und deren Differentialquotienten ganze Function vom Gewichte $\sigma=0$ ist. Daher muss F eine Constante sein, deren Werth A sich wie vorher ermitteln lässt.

2) Es sei $m=3$, $n=2$ und $k=0$, also die Determinante

$$D=\Sigma\pm y^2_1(y_1y_2)'(y^2_2)''\;.\;\;.\;\;.\;(y^2_3)^{(5)}$$

vorgelegt. In diesem Falle ist $\mu=6$; $r=4$; $\frac{1}{2}\mu(\mu-1)=15$ und man erhält daher die für Anwendung der Formel erforderlichen λ aus der Gleichung

$$\left.\begin{matrix}\lambda'_1\\+\lambda'_2\\+\lambda'_3\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}+\lambda''_1\\+\lambda''_2\\+\lambda''_3\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}+\lambda'''_1\\+\lambda'''_2\\+\lambda'''_3\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}+\lambda^4_1\\+\lambda^4_2\\+\lambda^4_3\end{matrix}\right\}=15.$$

Somit ist die obige Determinante gleich der Summe folgender sechs Determinantenproducte, jedes multiplicirt mit einem numerischen Coëfficienten:

$$(\Sigma \pm y_1 y_2' y_3'')^3 \,\Sigma \pm y_1 y_2' y_3^{(5)}; \;\; (\Sigma \pm y_1 y_2' y_3'')^3 \,\Sigma \pm y_1 y_2'' y_3^{(4)}$$
$$(\Sigma \pm y_1 y_2' y_3'')^3 \,\Sigma \pm y_1' y_2'' y_3'''; \;\; (\Sigma \pm y_1 y_2' y_3'')^2 \,\Sigma \pm y_1 y_2' y_3''' \,\Sigma y_1 y_2' y_3^{(4)}$$
$$(\Sigma \pm y_1 y_2' y_3'')^2 (\Sigma \pm y_1 y_2' y_3''')(\Sigma \pm y_1 y_2'' y_3'''); \;\; \Sigma \pm y_1 y_2' y_3'' \,(\Sigma \pm y_1 y_2' y_3''')^3$$

Die numerischen Coëfficienten können entweder durch die Formel oder ähnlich wie vorher, durch specielle Annahmen der y_1, y_2, y_3 berechnet werden, welche sechs zwischen den Coëfficienten unabhängige Gleichungen liefern.

Die obige Determinante D ist nach III gleich einem Producte von der Form

$$D = (\Sigma \pm y_1 y_2' y_3'')^4 F(a_1, a_2, a_3 \,.\;.\;.\,)$$

wo F eine ganze Function der a_1, a_2, a_3 und ihrer Differentialquotienten ist, deren jedes Glied nach VI, 2 das Gewicht $\sigma = 3$ besitzt. Somit hat F die Form:

$$F = m_1 a_1^3 + m_2 a_1 a_2 + m_3 a_3 + m_4 a_1'' + m_5 a_1' a_1 + m_6 a_2',$$

wo die m numerische Coëfficienten bedeuten, die am einfachsten aus der Gleichung für D durch specielle Annahmen berechnet werden. Man erhält auf diese Weise

$$F = -8\cdot 2 a_1^3 + 8\cdot 9 a_1 a_2 - 8\cdot 27 a_3 + 4\cdot 9 a_1 a_1' - 4\cdot 27 a_2' - 4\cdot 9 a_1''.$$

Ist nun

$$\tfrac{2}{27} a_1^3 + \tfrac{1}{3} a_1 a_2 + a_3 - \tfrac{1}{6} a_1 a_1' - \tfrac{1}{2} a_2' + \tfrac{1}{6} a_1'' = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

so verschwindet die Determinante

$$\Sigma \pm y_1^2 (y_1 y_2)' (y_2^2)'' \;.\;.\;.\; (y_3^2)^{(5)},$$

welche die nothwendige und hinreichende Bedingung ausdrückt, damit zwischen y_1, y_2, y_3 eine homogene quadratische Relation mit constanten Coëfficienten besteht, also eine Gleichung von der Form:

$$c_{11} y_1^2 + 2c_{12} y_1 y_2 + c_{22} y_2^2 + 2c_{13} y_1 y_3 + 2c_{23} y_2 y_3 + c_{33} y_3^2 = 0.$$

Durch eine lineare Substitution kann man aber dieselbe immer überführen in die Relation

$$z_3^2 = z_1 z_2,$$

wo z_1, z_2, z_3, weil sie aus y_1, y_2, y_3 durch eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante erhalten werden, ebenfalls die Elemente eines Fundamentalsystems sind. Setzt man nun $z_1 = \eta_1^2$, $z_2 = \eta_2^2$, so wird $z_3 = \eta_1 \eta_2$. Nach dem Vorhergehenden lässt sich sowohl die Determinante von $\eta_1^2, \eta_1\eta_2, \eta_2^2$:

$$\begin{vmatrix} \eta_1^2 \;; & \eta_1\eta_2 \;; & \eta_2^2 \\ (\eta_1^2)' \;; & (\eta_1\eta_2)' \;; & (\eta_2^2)' \\ (\eta_1^2)'' \;; & (\eta_1\eta_2)'' \;; & (\eta_2^2)'' \end{vmatrix}$$

als auch jede aus ihr durch Differentiation irgend welcher Zeilen entstandene, durch die Determinante von η_1 und η_2 und durch die Coëfficienten der Differentialgleichung der IIten Ordnung ausdrücken, für welche η_1 und η_2 die Elemente eines Fundamentalsystems sind. Stellen also $z_1 = \eta_1^2$, $z_2 = \eta_2^2$, $z_3 = \eta_1\eta_2$ die Elemente eines Fundamentalsystems der Gleichung

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (2)$$

dar, so lassen sich a_1, a_2, a_3 durch die Coëfficienten der Gleichung

$$\eta'' = b_1 \eta' + b_2 \eta \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (3)$$

ausdrücken, welche η_1 und η_2 zu Elementen eines Fundamentalsystems hat. Man findet

$$a_1 = 3b_1;\ a_2 = b_1' + 4b_2 - 2b_1^2;\ a_3 = 2(b_2' - 2b_1 b_2),$$

woraus sich ergibt:

$$b_1 = -\tfrac{1}{3}a_1;\ b_2 = \tfrac{1}{4}(a_2 + \tfrac{2}{9}a_1^2 + \tfrac{1}{3}a_1');\ \text{und}$$
$$a_3 = \tfrac{1}{2}a_2' + \tfrac{1}{9}a_1 a_1' - \tfrac{1}{6}a_1'' - \tfrac{1}{3}a_1 a_2 - \tfrac{2}{27}a_1^3.$$

Die letzte Gleichung ist aber die früher erhaltene (1); die beiden anderen ergeben, dass η_1 und η_2 zwei particuläre Integrale der homogenen Differentialgleichung der IIten Ordnung:

$$\eta'' = -\tfrac{1}{3}a_1\eta' + \tfrac{1}{4}(a_2 + \tfrac{2}{9}a_1^2 + \tfrac{1}{3}a_1')\eta$$

sind. Die Relation (1) zwischen den Coëfficienten der Gleichung (2) zeigt somit an, dass die Elemente eines Fundamentalsystems derselben bezüglich gleich sind η_1^2, $\eta_1\eta_2$, η_2^2 wo η_1 und η_2 die Elemente eines Fundamentalsystems der Gleichung (3) der IIten Ordnung sind.[1]

[1] Fuchs l. c.