ENTWURF EINER MONDTHEORIE.

VON

Hofrath Prof. THEODOR Ritter v. OPPOLZER,

WIRKLICHEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 5. NOVEMBER 1885.

1. Einleitende Bemerkungen.

Die Ermittlung der Bewegung des Mondes gehört zu den schwierigsten Aufgaben der theoretischen Astronomie; es fehlt nicht an zahlreichen Versuchen, die Schwierigkeiten der Mondtheorie zu überwinden, doch nur wenige der bislang befolgten Methoden sind vorwurfsfrei, und selbst diese lassen in manchen Stücken Etwas zu wünschen übrig; es scheint mir daher immerhin als eine dankbare Aufgabe, das Problem in einer solchen Weise zu lösen, dass, so weit ich die Sachlage zu beurtheilen vermag, ein stichhältiger Einwurf gegen die Richtigkeit und Convergenz der Entwicklungen nicht erhoben werden kann, und ich will hoffen, dass sich mein subjectives Urtheil über die vorliegende Methode objectiv bestätigen möge. Auf dieses Problem näher einzugehen, wurde ich durch die noch immer nicht endgiltig behobene Schwierigkeit veranlasst, die sich der Ermittlung der Säcularacceleration des Mondes entgegenstellt; die vorliegende Methode, einmal praktisch durchgeführt, wird wohl einen wesentlichen Beitrag zur Entscheidung dieser schwierigen Frage liefern, indem bei derselben niemals eine hypothetische Annahme über die Form der Argumente, oder eine die Convergenz vermindernde Auflösung der Integrationsdivisoren auftritt. Ich werde nicht zögern, diese theoretischen Grundlagen in der nächsten Zeit der praktischen Verwerthung zuzuführen; die hiefür erforderlichen Operationen erhalten, wenn man eine genügende Annäherung erreichen will, einen derartigen Umfang, dass die dazu erforderliche Arbeitszeit nach Jahren bemessen werden muss; doch wird es für die definitive Beurtheilung der Leistungsfähigkeit der Methode genügen, zunächst als Beispiel eine, mit einem mässigen Grade der Annäherung durchgeführte Rechnung vorzulegen, und ich hoffe binnen kurzer Zeit jene vorläufigen Resultate, die etwa alle Glieder 5. Ordnung mitnehmen, welche in den störenden Kräften auftreten, zu erlangen.[1]

2. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Bezeichnet man mit $[x]$, $[y]$, $[z]$ die geocentrischen Coordinaten des Mondes, bezogen auf eine fixe Ekliptik, mit $[x_1]$, $[y_1]$ und $[z_1]$ die analogen Sonnencoordinaten, und setzt weiter:

$$r^2 = [x]^2 + [y]^2 + [z]^2, \qquad r_1^2 = [x_1]^2 + [y_1]^2 + [z_1]^2,$$

$\odot =$ die anziehende Wirkung der Sonne in der Zeiteinheit und in der Einheit der Entfernung,

$\mu =$ die vereinigte anziehende Wirkung der Erde und des Mondes in der Zeiteinheit und in der Einheit der Entfernung,

[1] Diese Rechnungen sind bereits begonnen; es mag hier zur Empfehlung der folgenden Methode kurz erwähnt werden, dass bei Mitnahme der Glieder fünfter Ordnung die erste Näherung die Knotenbewegung etwa bis auf den 72. Theil, die Bewegung des Mondperigäums auf den 85. Theil richtig ergab.

so bestehen, so lange man die in Betracht kommenden Körper als materielle Punkte betrachtet, daher vorläufig die von der Massenvertheilung der Erde und des Mondes abhängigen Störungsglieder vernachlässigt und überdies von der directen störenden Einwirkung der Planeten absieht, unter Annahme des Newton'schen Attractionsgesetzes die folgenden Differentialgleichungen für die Bewegung des Mondes:

$$\frac{\partial^2[x]}{\partial t^2}+\mu\frac{[x]}{r^3}=\frac{\odot\{[x_1]-[x]\}}{\{r^2+r_1^2-2[x][x_1]-2[y][y_1]-2[z][z_1]\}^{3/2}}-\odot\frac{[x_1]}{r_1^3}$$

$$\frac{\partial^2[y]}{\partial t^2}+\mu\frac{[y]}{r^3}=\frac{\odot\{[y_1]-[y]\}}{\{r^2+r_1^2-2[x][x_1]-2[y][y_1]-2[z][z_1]\}^{3/2}}-\odot\frac{[y_1]}{r_1^3}$$

$$\frac{\partial^2[z]}{\partial t^2}+\mu\frac{[z]}{r^3}=\frac{\odot\{[z_1]-[z]\}}{\{r^2+r_1^2-2[x][x_1]-2[y][y_1]-2[z][z_1]\}^{3/2}}-\odot\frac{[z_1]}{r_1^3}.$$

Setzt man abkürzend

$$W=\odot\{r^2+r_1^2-2[x][x_1]-2[y][y_1]-2[z][z_1]\}^{-3/2}-\odot r_1^{-3}, \tag{1}$$

so wird man die eben aufgestellten Differentialgleichungen in der folgenden Gestalt ansetzen dürfen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2[x]}{\partial t^2}+\mu\frac{[x]}{r^3}&=[x_1]\,W-[x]\left\{W+\frac{\odot}{r_1^3}\right\}\\
\frac{\partial^2[y]}{\partial t^2}+\mu\frac{[y]}{r^3}&=[y_1]\,W-[y]\left\{W+\frac{\odot}{r_1^3}\right\}\\
\frac{\partial^2[z]}{\partial t^2}+\mu\frac{[z]}{r^3}&=[z_1]\,W-[z]\left\{W+\frac{\odot}{r_1^3}\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

welche Gleichungen die Grundlage für die folgenden Untersuchungen bilden.

3. Einführung eines beweglichen Coordinatensystems in den Differentialgleichungen.

Bei der Mondbewegung sind die Elemente ☊ (Länge des mittleren aufsteigenden Mondknotens) und ω (Abstand des mittleren Mondperigäums vom aufsteigenden Mondknoten) raschen säcularen Änderungen unterworfen, während i (die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik), so lange man die Sonnenbewegung in ihrer ungestörten Form in Betracht zieht, keine solchen Glieder enthält; die von den säcularen Störungen der Sonnenbahn abhängigen Glieder, die hier (da die zu erhaltenden Resultate in Bezug auf ihre Anwendung nur auf Abstände von mehreren Jahrtausenden von der Gegenwart in Betracht kommen) nach Potenzen der Zeit entwickelt gedacht sind, werden in der Mondbewegung Glieder veranlassen, welche die Zeit ausserhalb der periodischen Functionen, also als Factor der Coëfficienten, enthalten; diese Entwicklung wird mit Rücksicht auf die gedachte Einschränkung zulässig erscheinen.

Es sollen demnach die Coordinaten des Mondes und der Sonne auf ein bewegliches System bezogen werden, dessen XY-Ebene mit der jeweiligen mittleren Mondbahnebene zusammenfällt, dessen positive X-Achse nach dem mittleren Mondperigäum gerichtet ist; die positive Y-Achse liegt in der Richtung der wahren Anomalie 90°, die positive Z-Achse ist nach dem nördlichen Pol der Mondbahn gerichtet; in Bezug auf die Definition, was unter mittleren Elementen verstanden werden soll, verweise ich auf den siebenten Abschnitt; hier kommt es eigentlich auf die genauere Definition nicht an, da nur die Bewegungen als solche in Betracht gezogen werden.

Bezeichnet man die auf das bewegliche System bezogenen Mondcoordinaten mit x, y und z, die Sonnencoordinaten mit x_1, y_1 und z_1, so wird man zur Verbindung der auf das bewegliche System bezogenen Coordinaten mit jenen, die sich auf die gewählte fixe Ekliptik beziehen, die folgenden Relationen aufstellen können:

$$\left.\begin{aligned}
x&=\alpha[x]+\alpha'[y]+\alpha''[z]\\
y&=\beta[x]+\beta'[y]+\beta''[z]\\
z&=\gamma[x]+\gamma'[y]+\gamma''[z]
\end{aligned}\right\} \tag{1}
\qquad
\left.\begin{aligned}
x_1&=\alpha[x_1]+\alpha'[y_1]+\alpha''[z_1]\\
y_1&=\beta[x_1]+\beta'[y_1]+\beta''[z_1]\\
z_1&=\gamma[x_1]+\gamma'[y_1]+\gamma''[z_1],
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

in welchen Gleichungen die Übertragungscoëfficienten α, α', α'', β, ... die folgende Bedeutung haben:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \cos(\Omega+\omega)\cos\tfrac{1}{2}i^2+\cos(\Omega-\omega)\sin\tfrac{1}{2}i^2, & \beta &= -\sin(\Omega+\omega)\cos\tfrac{1}{2}i^2+\sin(\Omega-\omega)\sin\tfrac{1}{2}i^2, & \gamma &= \sin\Omega\sin i \\
\alpha' &= \sin(\Omega+\omega)\cos\tfrac{1}{2}i^2+\sin(\Omega-\omega)\sin\tfrac{1}{2}i^2, & \beta' &= \cos(\Omega+\omega)\cos\tfrac{1}{2}i^2-\cos(\Omega-\omega)\sin\tfrac{1}{2}i^2, & \gamma' &= -\cos\Omega\sin i \\
\alpha'' &= \sin\omega\sin i, & \beta'' &= \cos\omega\sin i, & \gamma'' &= \cos i.
\end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Zwischen den neun Übertragungscoëfficienten, die bekanntlich Cosinusfunctionen darstellen, bestehen gewisse Relationen, welche, weil in der Folge mehrfach nöthig, hier übersichtlich zusammengestellt werden:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{aligned} \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2&=1\\ \beta^2+\beta'^2+\beta''^2&=1\\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2&=1 \end{aligned}\right\}\text{a)} \qquad
\left.\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=1\\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2&=1\\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2&=1 \end{aligned}\right\}\text{b)} \\
\left.\begin{aligned} \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''&=0\\ \alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''&=0\\ \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''&=0 \end{aligned}\right\}\text{c)} \qquad
\left.\begin{aligned} \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'&=0\\ \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''&=0\\ \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''&=0 \end{aligned}\right\}\text{d)} \\
\left.\begin{aligned} \beta'\gamma''-\gamma'\beta''&=\alpha\\ \gamma'\alpha''-\alpha'\gamma''&=\beta\\ \alpha'\beta''-\beta'\alpha''&=\gamma \end{aligned}\right\}\text{e)} \qquad
\left.\begin{aligned} \gamma\beta''-\beta\gamma''&=\alpha'\\ \alpha\gamma''-\gamma\alpha''&=\beta'\\ \beta\alpha''-\alpha\beta''&=\gamma' \end{aligned}\right\}\text{f)} \qquad
\left.\begin{aligned} \beta\gamma'-\gamma\beta'&=\alpha''\\ \gamma\alpha'-\alpha\gamma'&=\beta''\\ \alpha\beta'-\beta\alpha'&=\gamma''. \end{aligned}\right\}\text{g)}
\end{array}\right\} \quad 4)$$

Die Störungsgleichungen beziehen sich auf ein fixes Coordinatensystem; um in denselben das bewegliche Coordinatensystem einzuführen, muss der Zusammenhang der zweiten Differentialquotienten der Coordinaten des fixen und beweglichen Systems ermittelt werden; hiebei sind der Voraussetzung nach Ω und ω als Veränderliche, dagegen i als Constante zu betrachten; man erhält so leicht nach 3):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \beta\frac{\partial\omega}{\partial t}-\alpha'\frac{\partial\Omega}{\partial t}, & \frac{\partial\beta}{\partial t} &= -\alpha\frac{\partial\omega}{\partial t}-\beta'\frac{\partial\Omega}{\partial t}, & \frac{\partial\gamma}{\partial t} &= -\gamma'\frac{\partial\Omega}{\partial t} \\
\frac{\partial\alpha'}{\partial t} &= \beta'\frac{\partial\omega}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\Omega}{\partial t}, & \frac{\partial\beta'}{\partial t} &= -\alpha'\frac{\partial\omega}{\partial t}+\beta\frac{\partial\Omega}{\partial t}, & \frac{\partial\gamma'}{\partial t} &= \gamma\frac{\partial\Omega}{\partial t} \\
\frac{\partial\alpha''}{\partial t} &= \beta''\frac{\partial\omega}{\partial t}, & \frac{\partial\beta''}{\partial t} &= -\alpha''\frac{\partial\omega}{\partial t}, & \frac{\partial\gamma''}{\partial t} &= 0;
\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

aus 4) und den Gleichungen 5) folgt weiter:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial\alpha''}{\partial t}=0 \\
&\beta\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\beta''\frac{\partial\alpha''}{\partial t}=\frac{\partial\omega}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial\Omega}{\partial t} \\
&\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial\alpha''}{\partial t}=-\beta''\frac{\partial\Omega}{\partial t} \\
&\frac{\partial\alpha}{\partial t}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\alpha''}{\partial t}=\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2+(\alpha\alpha+\alpha'\alpha')\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2+2\gamma''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t}=\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2+(\beta''\beta''+\gamma''\gamma'')\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2+ \\
&\qquad\qquad +2\gamma''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t} \\
&\frac{\partial\alpha}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta''}{\partial t}=(\alpha\beta+\alpha'\beta')\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2=-\alpha''\beta''\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2 \\
&\frac{\partial\alpha}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma''}{\partial t}=(\alpha\gamma+\alpha'\gamma')\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2-\alpha''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t}=-\alpha''\gamma''\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2-\alpha''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \quad 6x)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\right\}=0\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\beta\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\beta''\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\right\}=\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}+\gamma''\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\right\}=-\beta''\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}+\alpha''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t};
\end{aligned}\right\} \quad 6x)$$

dann:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha\frac{\partial\beta}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial\beta''}{\partial t}=-\frac{\partial\omega}{\partial t}-\gamma''\frac{\partial\Omega}{\partial t}\\
&\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\beta''\frac{\partial\beta''}{\partial t}=0\\
&\gamma\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial\beta''}{\partial t}=\alpha''\frac{\partial\Omega}{\partial t}\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta''}{\partial t}=(\alpha\beta+\alpha'\beta')\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2=-\alpha''\beta''\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2\\
&\frac{\partial\beta}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\beta'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\frac{\partial\beta''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta''}{\partial t}=\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2+(\beta\beta+\beta'\beta')\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2+2\gamma''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t}=\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2+(\alpha''\alpha''+\gamma''\gamma'')\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2+\\
&\qquad\qquad+2\gamma''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t}\\
&\frac{\partial\gamma}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta''}{\partial t}=(\beta\gamma+\beta'\gamma')\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2-\beta''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t}=-\beta''\gamma''\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2-\beta''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t}\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\alpha\frac{\partial\beta}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial\beta''}{\partial t}\right\}=-\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}-\gamma''\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\beta''\frac{\partial\beta''}{\partial t}\right\}=0\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\gamma\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial\beta''}{\partial t}\right\}=\alpha''\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}+\beta''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t};
\end{aligned}\right\} \quad 6y)$$

und schliesslich:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial\gamma''}{\partial t}=\beta''\frac{\partial\Omega}{\partial t}\\
&\beta\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\beta''\frac{\partial\gamma''}{\partial t}=-\alpha''\frac{\partial\Omega}{\partial t}\\
&\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial\gamma''}{\partial t}=0\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma''}{\partial t}=(\alpha\gamma+\alpha'\gamma')\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2-\alpha''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t}=-\alpha''\gamma''\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2-\alpha''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t}\\
&\frac{\partial\beta}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial\beta'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\frac{\partial\beta''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma''}{\partial t}=(\beta\gamma+\beta'\gamma')\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2-\beta''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t}=-\beta''\gamma''\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2-\beta''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t}\\
&\frac{\partial\gamma}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma''}{\partial t}=(\gamma\gamma+\gamma'\gamma')\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2=(\alpha''\alpha''+\beta''\beta'')\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2
\end{aligned}\right\} \quad 6z)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\right\}=-\beta''\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}-\alpha''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t}\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\beta\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\beta''\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\right\}=-\alpha''\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}-\beta''\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial t}\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\right\}=0.
\end{aligned}\right\} \quad 6z)$$

Durch zweimalige Differentiation der Gleichungen 1) (pag. 2 unten) nach der Zeit erhält man zunächst:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}&=\alpha\frac{\partial^2[x]}{\partial t^2}+2\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial[x]}{\partial t}+[x]\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}+\alpha'\frac{\partial^2[y]}{\partial t^2}+2\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\frac{\partial[y]}{\partial t}+[y]\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}+\\
&\quad+\alpha''\frac{\partial^2[z]}{\partial t^2}+2\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\frac{\partial[z]}{\partial t}+[z]\frac{\partial^2\alpha''}{\partial t^2},\\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}&=\beta\frac{\partial^2[x]}{\partial t^2}+2\frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\partial[x]}{\partial t}+[x]\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}+\beta'\frac{\partial^2[y]}{\partial t^2}+2\frac{\partial\beta'}{\partial t}\frac{\partial[y]}{\partial t}+[y]\frac{\partial^2\beta'}{\partial t^2}+\\
&\quad+\beta''\frac{\partial^2[z]}{\partial t^2}+2\frac{\partial\beta''}{\partial t}\frac{\partial[z]}{\partial t}+[z]\frac{\partial^2\beta''}{\partial t^2},\\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}&=\gamma\frac{\partial^2[x]}{\partial t^2}+2\frac{\partial\gamma}{\partial t}\frac{\partial[x]}{\partial t}+[x]\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}+\gamma'\frac{\partial^2[y]}{\partial t^2}+2\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\frac{\partial[y]}{\partial t}+[y]\frac{\partial^2\gamma'}{\partial t^2}+\\
&\quad+\gamma''\frac{\partial^2[z]}{\partial t^2}+2\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\frac{\partial[z]}{\partial t}+[z]\frac{\partial^2\gamma''}{\partial t^2}.
\end{aligned}\right\} \quad 7)$$

Aus den Gleichungen 1) und 3) erhält man auch leicht:

$$\left.\begin{aligned}
[x]&=\alpha\ x+\beta\ y+\gamma\ z\\
[y]&=\alpha' x+\beta' y+\gamma' z\\
[z]&=\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z.
\end{aligned}\right\} \quad 8)$$

Führt man nun in die Gleichungen 7) rechts vom Gleichheitszeichen die aus den Gleichungen 8) resultirenden Werthe für $[x]$, $[y]$ und $[z]$ und deren erste Ableitungen ein, so erhält man zunächst für die letzteren:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[x]}{\partial t}&=\alpha\frac{\partial x}{\partial t}+\beta\frac{\partial y}{\partial t}+\gamma\frac{\partial z}{\partial t}+x\frac{\partial\alpha}{\partial t}+y\frac{\partial\beta}{\partial t}+z\frac{\partial\gamma}{\partial t}\\
\frac{\partial[y]}{\partial t}&=\alpha'\frac{\partial x}{\partial t}+\beta'\frac{\partial y}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial z}{\partial t}+x\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+y\frac{\partial\beta'}{\partial t}+z\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\\
\frac{\partial[z]}{\partial t}&=\alpha''\frac{\partial x}{\partial t}+\beta''\frac{\partial y}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial z}{\partial t}+x\frac{\partial\alpha''}{\partial t}+y\frac{\partial\beta''}{\partial t}+z\frac{\partial\gamma''}{\partial t},
\end{aligned}$$

und dann:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}&=\alpha\frac{\partial^2[x]}{\partial t^2}+\alpha'\frac{\partial^2[y]}{\partial t^2}+\alpha''\frac{\partial^2[z]}{\partial t^2}+\\
&+2\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial t}+2\left(\beta\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\beta''\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial t}+2\left(\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial t}+\\
&+\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\right)+\frac{\partial\alpha}{\partial t}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\right\}x+\\
&+\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\beta''\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\right)+\frac{\partial\alpha}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta''}{\partial t}\right\}y+\\
&+\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\right)+\frac{\partial\alpha}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\right\}z.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \beta\frac{\partial^2[x]}{\partial t^2}+\beta'\frac{\partial^2[y]}{\partial t^2}+\beta''\frac{\partial^2[z]}{\partial t^2}+\\
&+2\left(\alpha\frac{\partial\beta}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial\beta''}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial t}+2\left(\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\beta''\frac{\partial\beta''}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial t}+2\left(\gamma\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial\beta''}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial t}+\\
&+\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha\frac{\partial\beta}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial\beta''}{\partial t}\right)+\frac{\partial\alpha}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta''}{\partial t}\right\}x+\\
&+\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\beta''\frac{\partial\beta''}{\partial t}\right)+\frac{\partial\beta}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\beta'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\frac{\partial\beta''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta''}{\partial t}\right\}y+\\
&+\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial\beta''}{\partial t}\right)+\frac{\partial\gamma}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta'}{\partial t}+\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\beta''}{\partial t}\right\}z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \gamma\frac{\partial^2[x]}{\partial t^2}+\gamma'\frac{\partial^2[y]}{\partial t^2}+\gamma''\frac{\partial^2[z]}{\partial t^2}+\\
&+2\left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial t}+2\left(\beta\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\beta''\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial t}+2\left(\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial t}+\\
&+\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\right)+\frac{\partial\alpha}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial\alpha'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\frac{\partial\alpha''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\right\}x+\\
&+\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\beta''\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\right)+\frac{\partial\beta}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial\beta'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\frac{\partial\beta''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\right\}y+\\
&+\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\right)+\frac{\partial\gamma}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial\gamma'}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma'}{\partial t}+\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma''}{\partial t}\right\}z.\end{aligned}$$

Ersetzt man nun in diesen Gleichungen die einzelnen Differentialfactoren nach den Gleichungen $6x$), $6y$) und $6z$), so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \alpha\frac{\partial^2[x]}{\partial t^2}+\alpha'\frac{\partial^2[y]}{\partial t^2}+\alpha''\frac{\partial^2[z]}{\partial t^2}+2\left\{\gamma''\frac{\partial y}{\partial t}-\beta''\frac{\partial z}{\partial t}\right\}\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\\
&+2\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial t}+\left\{(\beta''\beta''+\gamma''\gamma'')x-\alpha''\beta''y-\alpha''\gamma''z\right\}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2+\\
&+2\gamma''x\frac{\partial\Omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial t}+x\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2+(\gamma''y-\beta''z)\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \beta\frac{\partial^2[x]}{\partial t^2}+\beta'\frac{\partial^2[y]}{\partial t^2}+\beta''\frac{\partial^2[z]}{\partial t^2}+2\left\{-\gamma''\frac{\partial x}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial z}{\partial t}\right\}\frac{\partial\Omega}{\partial t}-\\
&-2\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial t}+\left\{(\alpha''\alpha''+\gamma''\gamma'')y-\alpha''\beta''x-\beta''\gamma''z\right\}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2+\\
&+2\gamma''y\frac{\partial\Omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial t}+y\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2+(-\gamma''x+\alpha''z)\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}-x\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \gamma\frac{\partial^2[x]}{\partial t^2}+\gamma'\frac{\partial^2[y]}{\partial t^2}+\gamma''\frac{\partial^2[z]}{\partial t^2}+2\left\{\beta''\frac{\partial x}{\partial t}-\alpha''\frac{\partial y}{\partial t}\right\}\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\\
&+\left\{(\alpha''\alpha''+\beta''\beta'')z-\alpha''\gamma''x-\beta''\gamma''y\right\}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2+\\
&+2\left\{-\alpha''x-\beta''y\right\}\frac{\partial\Omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial t}+(\beta''x-\alpha''y)\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Substituirt man nun für die zweiten Differentialquotienten der geklammerten Coordinaten die Werthe nach den Gleichungen 2) des Abschnittes 2) (pag. 2 oben) und setzt abkürzend, indem man sich nach der eben erwähnten Substitution in den Gleichungen beiderseits der Reihe nach $\mu'\frac{x}{r^3}$, $\mu'\frac{y}{r^3}$, $\mu'\frac{z}{r^3}$ addirt denkt, in welchen Ausdrücken μ' einen vorerst willkürlichen, aber constanten Factor darstellt:

$$\left.\begin{aligned}
(X) &= x_1 W - x\left\{W + \frac{\odot}{r_1^3}\right\} + \mu'\frac{x}{r^3} + 2\left(\gamma''\frac{\partial y}{\partial t} - \beta''\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial \Omega}{\partial t} + 2\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial t} + \\
&\quad + \left\{(\beta''\beta''+\gamma''\gamma'')x - \alpha''\beta''y - \alpha''\gamma''z\right\}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)^2 + 2\gamma''x\frac{\partial \Omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial t} + \\
&\quad + x\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 + (\gamma''y - \beta''z)\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} + y\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \\
(Y) &= y_1 W - y\left\{W + \frac{\odot}{r_1^3}\right\} + \mu'\frac{y}{r^3} + 2\left(-\gamma''\frac{\partial x}{\partial t} + \alpha''\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial \Omega}{\partial t} - 2\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial t} + \\
&\quad + \left\{-\alpha''\beta''x + (\alpha''\alpha''+\gamma''\gamma'')y - \beta''\gamma''z\right\}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)^2 + 2\gamma''y\frac{\partial \Omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial t} + \\
&\quad + y\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 + (-\gamma''x + \alpha''z)\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} - x\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \\
(Z) &= z_1 W - z\left\{W + \frac{\odot}{r_1^3}\right\} + \mu'\frac{z}{r^3} + 2\left(\beta''\frac{\partial x}{\partial t} - \alpha''\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \left\{-\alpha''\gamma''x - \beta''\gamma''y + (\alpha''\alpha''+\beta''\beta'')z\right\}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)^2 + \\
&\quad + 2(-\alpha''x - \beta''y)\frac{\partial \Omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\beta''x - \alpha''y)\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2},
\end{aligned}\right\} \quad 10)$$

so erhält man schliesslich die für die beweglichen Coordinaten geltenden Differentialgleichungen in der Form

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + (\mu+\mu')\frac{x}{r^3} &= (X) \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (\mu+\mu')\frac{y}{r^3} &= (Y) \\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + (\mu+\mu')\frac{z}{r^3} &= (Z).
\end{aligned}\right\} \quad 11)$$

Die Grössen (X), (Y) und (Z) kann man als störende Kräfte bezeichnen, und die Entwicklung derselben in bekannte Functionen der Zeit wird die nächste Aufgabe sein.

4. Einführung der Proportionalcoordinaten.

In den Ausdrücken für (X), (Y) und (Z) treten selbst die gestörten Coordinaten des Mondes und der Sonne auf; es stellt sich die Aufgabe, entsprechende Substitutionen für dieselben auszuführen, die in bequemer Weise die von der ungestörten Bewegung abhängigen und die durch die Störungen veranlassten Werthe abtrennen lassen.

Setzt man für die Mondcoordinaten die folgenden Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
x^\circ &= (1+\gamma)x \\
y^\circ &= (1+\gamma)y \\
z^\circ &= (1+\gamma)z \\
r^\circ &= (1+\gamma)\sqrt{r^2 - z^2} = (1+\gamma)(r)
\end{aligned}\right\} \quad 1)$$

fest, so werden die mit dem Nullindex versehenen Coordinaten untereinander in demselben Verhältnisse stehen wie die gestörten Coordinaten, man kann demnach dieselben als Proportionalcoordinaten bezeichnen; dieselben wurden zuerst von Hansen in die Analyse eingeführt. Aus den Gleichungen 1) folgt weiter, dass ist:

$$r^{\circ 2} = x^{\circ 2} + y^{\circ 2}. \tag{2}$$

Denkt man sich in den Gleichungen 11) des vorangehenden Absatzes statt r den Werth (r) eingeführt durch:

$$r^2 = (r)^2 \left\{1 + \left(\frac{z^\circ}{r^\circ}\right)^2\right\}, \tag{3}$$

so wird man setzen können:

$$\left.\begin{aligned} X &= (X) + x\,\varepsilon' \\ Y &= (Y) + y\,\varepsilon' \\ Z &= (Z) + z\,\varepsilon', \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

in welchen Ausdrücken offenbar:

$$\varepsilon' = \frac{3}{2}(\mu + \mu')\,\frac{z^2}{(r)^5}\left\{1 - \frac{5}{4}\left(\frac{z^\circ}{r^\circ}\right)^2 + \frac{35}{24}\left(\frac{z^\circ}{r^\circ}\right)^4 - \frac{105}{64}\left(\frac{z^\circ}{r^\circ}\right)^6 + \ldots\right\} \tag{5}$$

angenommen ist und die Gleichungen 11) erhalten sohin die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + (\mu + \mu')\frac{x}{(r)^3} &= X \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (\mu + \mu')\frac{y}{(r)^3} &= Y \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + (\mu + \mu')\frac{z}{(r)^3} &= Z \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

denen die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x^\circ}{\partial \zeta^2} + (\mu + \mu')\,\frac{x^\circ}{r^{\circ 3}} &= 0 \\ \frac{\partial^2 y^\circ}{\partial \zeta^2} + (\mu + \mu')\,\frac{y^\circ}{r^{\circ 3}} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

gegenüber gestellt werden sollen; diese letzteren Gleichungen haben die Form der ungestörten Bewegung und deren Integration wird daher alle jene Relationen ergeben, welche sich für die ungestörte Bewegung aufstellen lassen, nur wird statt der Zeit t die Grösse ζ als unabhängig Variable eintreten; es sind sonach x°, y° und z° als Coordinaten zu betrachten, welche zur Zeit ζ gehören. Den gemachten Voraussetzungen nach werden sich die Coordinaten x, y, so lange die Sonnenbahn ungestört belassen gedacht wird, von den Coordinaten x° und y° nur um rein periodische Störungen unterscheiden, und ebenso wird z selbst eine solche Function werden. Die Zurückführung der Gleichungen 6) auf Quadraturen und die Bestimmung der Störungen des Mondes durch ein System von simultanen Differentialgleichungen wird der Gegenstand des 6. und 7. Abschnittes der vorliegenden Abhandlung sein.

Für die Sonnencoordinaten sollen ähnliche Relationen eingeführt werden. Bezieht man die Coordinaten der Sonne x_1', y_1' und z_1' auf die gleichzeitige mittlere Ekliptik, diese selbst als XY-Ebene betrachtend und legt die X-Achse in das mittlere Sonnenperigäum, so werden die gestörten Coordinaten mit den Coordinaten ξ, η und ζ, die Proportionalcoordinaten für die Sonne darstellen sollen, durch die folgenden Relationen verbunden gedacht:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (1+\gamma_1)x_1' \\ \eta &= (1+\gamma_1)y_1' \\ \zeta &= (1+\gamma_1)z_1' \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

und ähnlich wie früher:

$$\left.\begin{aligned} r_1^0 &= (1+\gamma_1)\sqrt{r_1^2 - z_1'^2} = (1+\gamma_1)(r_1) \\ r_1^2 &= (r_1)^2 \left\{1 + \frac{z_1'^2}{(r_1)^2}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad 9)$$

ξ und η sollen zu einer Zeit ζ' gehören, die so zu bestimmen ist, dass dieselben Coordinaten als Proportional-coordinaten erscheinen.

Bezeichnet man mit P' die jeweilige mittlere Länge des Sonnenperigäums, mit v_1 den Abstand der Sonne von demselben in der Ekliptik gezählt, so sind die Coordinaten x_1' und y_1' bestimmt durch:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= (r_1)\cos v_1\,, \quad y_1' = (r_1)\sin v_1 \\ \xi &= (1+\gamma_1)(r_1)\cos v_1\,, \quad \eta = (1+\gamma_1)(r_1)\sin v_1\,, \end{aligned}\right\} \quad 10)$$

und die auf das zugehörige Äquinoctium bezogenen Ekliptikal-Coordinaten $[x_1']$, $[y_1']$, $[z_1']$ werden sein:

$$\left.\begin{aligned} [x_1'] &= (r_1)\cos(v_1+P') \\ [y_1'] &= (r_1)\sin(v_1+P') \\ [z_1'] &= z_1'\,; \end{aligned}\right\} \quad 11)$$

um nun diese Coordinaten auf die fixe Ekliptik zu beziehen, zu der die Coordinaten $[x_1]$, $[y_1]$ und $[z_1]$ gehören, wird man die bekannten Präcessionsgrössen π und Π benützen; es stellt nämlich Π die Länge des aufsteigenden Knotens der beweglichen Ekliptik in der fixen vor, und π die gegenseitige Neigung; man hat dann mit l die allgemeine Präcession, mit l_0 und b_0 die Länge und Breite der Sonne in Bezug auf die fixe Ekliptik, mit l_1 und b_1 auf die bewegliche Ekliptik bezeichnend, die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} \cos b_0 \cos(l_0-\Pi) &= \cos b_1 \cos(l_1-\Pi-l) \\ \cos b_0 \sin(l_0-\Pi) &= \cos b_1 \sin(l_1-\Pi-l)\cos\pi - \sin b_1 \sin\pi \\ \sin b_0 &= \sin b_1 \cos\pi + \cos b_1 \sin(l_1-\Pi-l)\sin\pi\,, \end{aligned}\right\} \quad 12)$$

und es ist den gemachten Annahmen nach:

$$\left.\begin{aligned} [x_1'] &= r_1 \cos b_1 \cos l_1 \\ [y_1'] &= r_1 \cos b_1 \sin l_1 \\ [z_1'] &= r_1 \sin b_1\,, \end{aligned}\right\} \quad 13) \qquad \left.\begin{aligned} [x_1] &= r_1 \cos b_0 \cos l_0 \\ [y_1] &= r_1 \cos b_0 \sin l_0 \\ [z_1] &= r_1 \sin b_0\,. \end{aligned}\right\} \quad 14)$$

Wenn man die obigen Gleichungen 12) beiderseits mit r_1 multiplicirt und sich erinnert, dass die Relation:

$$r_1 \cos b_1 = (r_1)$$

besteht, so findet sich nach einer entsprechenden Transformation:

$$\left.\begin{aligned} [x_1] &= (r_1)\{\cos(l_1-\Pi-l)\cos\Pi - \sin(l_1-\Pi-l)\sin\Pi\cos\pi\} + z_1'\sin\Pi\sin\pi \\ [y_1] &= (r_1)\{\cos(l_1-\Pi-l)\sin\Pi + \sin(l_1-\Pi-l)\cos\Pi\cos\pi\} - z_1'\cos\Pi\sin\pi \\ [z_1] &= (r_1)\ \sin(l_1-\Pi-l)\sin\pi + z_1'\cos\pi\,. \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

Nun ist aber:

$$l_1 = v_1 + P',$$

setzt man daher:

$$P = P' - l, \qquad 16)$$

so wird P die um die allgemeine Präcession verminderte Länge des tropischen Sonnenperigäums sein, ist also mit seiner siderischen Länge identisch, und man hat auch:

$$l_1 - l = v_1 + P\,. \tag{17}$$

Setzt man in den Gleichungen 15):

$$1 = \cos\frac{1}{2}\pi^2 + \sin\frac{1}{2}\pi^2$$

$$\cos\pi = \cos\frac{1}{2}\pi^2 - \sin\frac{1}{2}\pi^2\,,$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned}
[x_1] &= (r_1)\left\{\cos\frac{1}{2}\pi^2\cos(v_1+P)+\sin\frac{1}{2}\pi^2\cos(v_1+P-2\Pi)\right\}+z_1'\sin\Pi\sin\pi\\
[y_1] &= (r_1)\left\{\cos\frac{1}{2}\pi^2\sin(v_1+P)-\sin\frac{1}{2}\pi^2\sin(v_1+P-2\Pi)\right\}-z_1'\cos\Pi\sin\pi\\
[z_1] &= (r_1)\sin\pi\sin(v_1+P-\Pi)+z_1'\cos\pi\,.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Weiter ist [vergl. 2) und 3) des 3. Absatzes, pag. 70 u. 71]:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \cos\frac{1}{2}i^2\{+\cos(\Omega+\omega)[x_1]+\sin(\Omega+\omega)[y_1]\}+\\
&+\sin\frac{1}{2}i^2\{+\cos(\Omega-\omega)[x_1]+\sin(\Omega-\omega)[y_1]\}+\\
&+\sin i\sin\omega[z_1]\,,\\
y_1 &= \cos\frac{1}{2}i^2\{-\sin(\Omega+\omega)[x_1]+\cos(\Omega+\omega)[y_1]\}+\\
&+\sin\frac{1}{2}i^2\{+\sin(\Omega-\omega)[x_1]-\cos(\Omega-\omega)[y_1]\}+\\
&+\sin i\cos\omega[z_1]\,,\\
z_1 &= \sin i\sin\Omega[x_1]-\sin i\cos\Omega[y_1]+\cos i[z_1]\,,
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

und setzt man abkürzend, indem mit ω_1 der Abstand des Sonnenperigäums vom aufsteigenden Mondknoten bezeichnet wird:

$$\left.\begin{aligned}
P-\Omega &= \omega_1\,, & \Pi-\Omega &= \omega_1+\Sigma\\
\Pi-P &= \Sigma\,, & 2\Pi-P-\Omega &= \omega_1+2\Sigma
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

so findet man schliesslich die in den obigen Gleichungen auftretenden Sonnencoordinaten x_1, y_1 und z_1 durch deren Proportionalcoordinaten ξ, η, $\zeta = z_1' : (1+\gamma_1)$ wie folgt ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 = \frac{x_1^0}{(1+\gamma_1)} &= \cos\frac{1}{2}i^2\Big\{\cos\frac{1}{2}\pi^2\cos(-\omega+\omega_1)\frac{\xi}{(1+\gamma_1)}-\cos\frac{1}{2}\pi^2\sin(-\omega+\omega_1)\frac{\eta}{(1+\gamma_1)}+\\
&\quad+\sin\frac{1}{2}\pi^2\cos(-\omega+\omega_1+2\Sigma)\frac{\xi}{(1+\gamma_1)}+\sin\frac{1}{2}\pi^2\sin(-\omega+\omega_1+2\Sigma)\frac{\eta}{(1+\gamma_1)}-\\
&\quad-\sin\pi z_1'\sin(\omega-\omega_1-\Sigma)\Big\}+\\
&+\sin\frac{1}{2}i^2\Big\{\cos\frac{1}{2}\pi^2\cos(-\omega-\omega_1)\frac{\xi}{(1+\gamma_1)}+\cos\frac{1}{2}\pi^2\sin(-\omega-\omega_1)\frac{\eta}{(1+\gamma_1)}+\\
&\quad+\sin\frac{1}{2}\pi^2\cos(-\omega-\omega_1-2\Sigma)\frac{\xi}{(1+\gamma_1)}-\sin\frac{1}{2}\pi^2\sin(-\omega-\omega_1-2\Sigma)\frac{\eta}{(1+\gamma_1)}+\\
&\quad+\sin\pi z_1'\sin(\omega+\omega_1+\Sigma)\Big\}+
\end{aligned}\right\} \tag{21x}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+\sin i\left\{\frac{1}{2}\sin\pi\cos(-\omega-\Sigma)\frac{\xi}{(1+\gamma_1)}-\frac{1}{2}\sin\pi\sin(-\omega-\Sigma)\frac{\eta}{(1+\gamma_1)}-\right.\\
&\quad-\frac{1}{2}\sin\pi\cos(-\omega+\Sigma)\frac{\xi}{(1+\gamma_1)}-\frac{1}{2}\sin\pi\sin(-\omega+\Sigma)\frac{\eta}{(1+\gamma_1)}+\\
&\quad\left.+\cos\pi z'_1\sin\omega\right\},
\end{aligned}\right\}\tag{21x}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
y_1=\frac{y_1^0}{(1+\gamma_1)}=&\cos\frac{1}{2}i^2\left\{\cos\frac{1}{2}\pi^2\sin(-\omega+\omega_1)\frac{\xi}{(1+\gamma_1)}+\cos\frac{1}{2}\pi^2\cos(-\omega+\omega_1)\frac{\eta}{(1+\gamma_1)}+\right.\\
&\quad+\sin\frac{1}{2}\pi^2\sin(-\omega+\omega_1+2\Sigma)\frac{\xi}{(1+\gamma_1)}-\sin\frac{1}{2}\pi^2\cos(-\omega+\omega_1+2\Sigma)\frac{\eta}{(1+\gamma_1)}-\\
&\quad\left.-\sin\pi z'_1\cos(\omega-\omega_1-\Sigma)\right\}+\\
&+\sin\frac{1}{2}i^2\left\{\cos\frac{1}{2}\pi^2\sin(-\omega-\omega_1)\frac{\xi}{(1+\gamma_1)}-\cos\frac{1}{2}\pi^2\cos(-\omega-\omega_1)\frac{\eta}{(1+\gamma_1)}+\right.\\
&\quad+\sin\frac{1}{2}\pi^2\sin(-\omega-\omega_1-2\Sigma)\frac{\xi}{(1+\gamma_1)}+\sin\frac{1}{2}\pi^2\cos(-\omega-\omega_1-2\Sigma)\frac{\eta}{(1+\gamma_1)}+\\
&\quad\left.+\sin\pi z'_1\cos(\omega+\omega_1+\Sigma)\right\}+\\
&+\sin i\left\{\frac{1}{2}\sin\pi\sin(-\omega-\Sigma)\frac{\xi}{(1+\gamma_1)}+\frac{1}{2}\sin\pi\cos(-\omega-\Sigma)\frac{\eta}{(1+\gamma_1)}-\right.\\
&\quad-\frac{1}{2}\sin\pi\sin(-\omega+\Sigma)\frac{\xi}{(1+\gamma_1)}+\frac{1}{2}\sin\pi\cos(-\omega+\Sigma)\frac{\eta}{(1+\gamma_1)}+\\
&\quad\left.+\cos\pi z'_1\cos\omega\right\},
\end{aligned}\right\}\tag{21y}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
z_1=\frac{z_1^0}{1+\gamma_1}=&\sin i\left\{\cos\frac{1}{2}\pi^2\sin(-\omega_1)\frac{\xi}{(1+\gamma_1)}-\cos\frac{1}{2}\pi^2\cos(-\omega_1)\frac{\eta}{(1+\gamma_1)}+\right.\\
&\quad+\sin\frac{1}{2}\pi^2\sin(-\omega_1-2\Sigma)\frac{\xi}{(1+\gamma_1)}+\sin\frac{1}{2}\pi^2\cos(-\omega_1-2\Sigma)\frac{\eta}{(1+\gamma_1)}+\\
&\quad\left.+\sin\pi z'_1\cos(-\omega_1-\Sigma)\right\}+\\
&+\cos i\left\{\sin\pi\sin(-\Sigma)\frac{\xi}{(1+\gamma_1)}+\sin\pi\cos(-\Sigma)\frac{\eta}{(1+\gamma_1)}+\cos\pi z'_1\right\}.
\end{aligned}\right\}\tag{21z}
$$

Diese Ausdrücke geben daher die Möglichkeit, die in den Differentialgleichungen in den Grössen X, Y und Z auftretenden Sonnencoordinaten mit Hilfe der Entwicklungen des folgenden Abschnittes als Functionen der gestörten mittleren Sonnenanomalie M_1^0 auszudrücken.

5. Entwicklung der in das Problem eintretenden Grössen nach Potenzen der kleinen Parameter.

Die störenden Kräfte X, Y und Z sind nach periodischen Functionen der Zeit zu entwickeln; die Coëfficienten dieser periodischen Functionen selbst aber lassen sich nach steigenden Potenzen gewisser Parameter entwickeln, deren Ordnungsbestimmung aber ziemlich willkürlich ist und den wunden Punkt der analytischen Entwicklung der Mondstörungen bildet; denn die Parameter sind nicht sehr klein und oft in Folge der Entwicklung mit grossen, oder auch, was dann für die zu erlangende Genauigkeit unschädlich ist, mit sehr kleinen numerischen Coëfficienten verbunden, so dass die Ordnungsbestimmung eines Coëfficienten nach den Dimensionen der Parameter allein immerhin etwas Missliches enthält. Bei der Ordnungsbestimmung habe ich mich an die allgemein üblichen Normen gehalten und angenommen als:

1. Ordnung. $e =$ die Excentricität der Mondbahn,
$e_1 =$ „ „ „ Sonnenbahn,
$i =$ die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik.

2. Ordnung. $\frac{\odot}{a_1^3} = f =$ die störende Kraft der Sonne,
$\frac{a}{a_1} =$ das Verhältniss der grossen Halbachsen der Mondbahn (a) und der Sonnenbahn (a_1),
$\gamma =$ die Störung in dem zur gestörten mittleren Anomalie des Mondes gehörenden Radius vector im Sinne: $(r) = r^0 : (1+\gamma)$,
$z^0 =$ die Störung der auf der beweglichen Bahnebene senkrechten Proportionalcoordinate,
$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \Omega' =$ die mittlere Knotenbewegung des Mondes,
$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \omega' =$ die mittlere Bewegung des Abstandes des Mondperigäums vom aufsteigenden Mondknoten.

3. Ordnung. Die durch die störende Wirkung der Planeten bedingten Lageveränderungen der Ekliptik: $\operatorname{tg} \pi = \sigma$,

4. Ordnung. $\frac{z'_1}{a_1}$ ist adäquat den periodischen Breitenstörungen der Sonne.

5. Ordnung. $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$ sind die Säcularvariationen in der Ω- und ω-Bewegung.

Bei der Vornahme einer Entwicklung nach der vorliegenden Methode wird man zuerst schlüssig werden müssen, bis zu welcher Ordnung die beabsichtigten Entwicklungen durchgeführt werden sollen; ohne dass hier thatsächlich an die Entwicklung der Mondstörungen geschritten werden kann, möge vorausgesetzt werden, um einen gewissen Abschluss in der Ausführung der folgenden Formeln zu erlangen, dass die störenden Kräfte bis auf Grössen achter Ordnung inclusive richtig bestimmt werden sollen.

Um nicht mehrfach auf eine Erläuterung der benützten Bezeichnungen zurückgreifen zu müssen, soll hier, ausser den bereits oben bei der Ordnungsbestimmung der Parameter gegebenen Erklärungen, die folgende Übersicht über die gewählten Bezeichnungen gegeben werden:

$M^0 =$ die gestörte mittlere Anomalie des Mondes,
$M_1^0 =$ „ „ „ „ der Sonne,
$\omega =$ Abstand des Mondperigäums vom aufsteigenden Mondknoten,
$\omega_1 =$ „ „ Sonnenperigäums „ „ „

$c = \cos \frac{1}{2} i$

$s = \sin \frac{1}{2} i$

$\left.\begin{array}{l}\sigma = \operatorname{tg} \pi \\ \Sigma = \Pi - P' + l\end{array}\right\}$ die oben (pag. 77) eingeführten Präcessionsgrössen.

Die erste Aufgabe wird darin bestehen, die W-Grösse zu ermitteln. Da W von der Lage des Coordinatensystems unabhängig ist, so kann für dasselbe sofort gesetzt werden:

$$\frac{W}{\odot} = \{r^2 + r_1^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1\}^{-3/2} - r_1^{-3}.$$

Setzt man abkürzend:

$$rr_1 H = xx_1 + yy_1 + zz_1 \,, \qquad 1)$$

so erhält man bei einer Entwicklung nach steigenden Potenzen von $\frac{r}{r_1}$ leicht (Factorielle 0 gleich der Einheit zu setzen):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{r_1^3 W}{\odot} &= \left(\frac{r}{r_1}\right)\frac{1.3}{2^0 0!1!}H+\\
&+\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\left\{\frac{1.3.5}{2^0 0!2!}H^2-\frac{1.3}{2^1 1!0!}\right\}+\\
&+\left(\frac{r}{r_1}\right)^3\left\{\frac{1.3.5.7}{2^0 0!3!}H^3-\frac{1.3.5}{2^1 1!1!}H\right\}+\\
&+\left(\frac{r}{r_1}\right)^4\left\{\frac{1.3.5.7.9}{2^0 0!4!}H^4-\frac{1.3.5.7}{2^1 1!2!}H^2+\frac{1.3.5}{2^2 2!0!}\right\}+\\
&+\left(\frac{r}{r_1}\right)^5\left\{\frac{1.3.5.7.9.11}{2^0 0!5!}H^5-\frac{1.3.5.7.9}{2^1 1!3!}H^3+\frac{1.3.5.7}{2^2 2!1!}H\right\}+\ldots,
\end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

in welcher Reihe das Fortschreitungsgesetz leicht ersichtlich ist. Setzt man nun den Gleichungen 1) (pag. 75) und 21 (pag. 78 u. 79) entsprechend in dem obigen Ausdrucke für H:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{x^\circ}{(1+\gamma)} & x_1 &= \frac{x_1^\circ}{(1+\gamma_1)}\\
y &= \frac{y^\circ}{(1+\gamma)} & y_1 &= \frac{y_1^\circ}{(1+\gamma_1)}\\
z &= \frac{z^\circ}{(1+\gamma)} & z_1 &= \frac{z_1^\circ}{(1+\gamma_1)}\\
r^2 &= \frac{r^{\circ 2}}{(1+\gamma)^2}\left\{1+\left(\frac{z^\circ}{r^\circ}\right)^2\right\} & r_1^2 &= \frac{r_1^{\circ 2}}{(1+\gamma_1)^2}\left\{1+\left(\frac{z_1'}{(r_1)}\right)^2\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

und schreibt abkürzend:

$$\Delta = \frac{x^\circ}{a}\cdot\frac{x_1^\circ}{a_1}+\frac{y^\circ}{a}\cdot\frac{y_1^\circ}{a}+\frac{z^\circ}{a}\cdot\frac{z_1^\circ}{a} \qquad 4)$$

so wird:

$$H = \frac{aa_1}{rr_1}\,\frac{\Delta}{(1+\gamma)(1+\gamma_1)}, \qquad 5)$$

und man hat, wenn man sich W entsprechend den Potenzen von $\frac{r}{r_1}$ zerlegt denkt in:

$$W = W_1+W_2+W_3+W_4+\ldots \qquad 6)$$

für die einzelnen Theile in der Entwicklung nicht weiter gehend, als dies die Mitnahme der Glieder 8. Ordnung erfordert:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a_1}{a}\cdot\frac{(1+\gamma)}{(1+\gamma_1)^4}\cdot\frac{W_1}{f} &= 3\,\Delta\left(\frac{a_1}{r_1^\circ}\right)^5\\
\left(\frac{a_1}{a}\right)^2\frac{(1+\gamma)^2}{(1+\gamma_1)^5}\,\frac{W_2}{f} &= \frac{15}{2}\Delta^2\left(\frac{a_1}{r_1^\circ}\right)^7-\frac{3}{2}\left(\frac{r^\circ}{a}\right)^2\left(\frac{a_1}{r_1^\circ}\right)^5-\frac{3}{2}\left(\frac{z^\circ}{a}\right)^2\\
\left(\frac{a_1}{a}\right)^3\frac{(1+\gamma)^3}{(1+\gamma_1)^6}\,\frac{W_3}{f} &= \frac{35}{2}\Delta^3\left(\frac{a_1}{r_1^\circ}\right)^9-\frac{15}{2}\Delta\left(\frac{r^\circ}{a}\right)^2\left(\frac{a_1}{r_1^\circ}\right)^7\\
\left(\frac{a_1}{a}\right)^4\frac{(1+\gamma)^4}{(1+\gamma_1)^7}\,\frac{W_4}{f} &= \frac{315}{8}\Delta^4-\frac{105}{4}\Delta^2+\frac{15}{8},
\end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

womit die Entwicklung für W bekannt ist, sobald Δ zweckentsprechend entwickelt erscheint.

Um Δ zu entwickeln, bedarf es der Kenntniss der Grössen $\frac{x^\circ}{a}$, $\frac{y^\circ}{a}$, $\frac{x_1^\circ}{a_1}$ und $\frac{y_1^\circ}{a_1}$.

Es ist bekanntlich:

$$J^{\lambda}_{k} = \frac{k^{\lambda}}{2.4.6\ldots 2\lambda}\left\{1 - \frac{k^2}{2(2\lambda+2)} + \frac{k^4}{2.4(2\lambda+2)(2\lambda+4)} - \frac{k^6}{2.4.6(2\lambda+2)(2\lambda+4)(2\lambda+6)} + \ldots\right\} \tag{8}$$

setzend:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^\circ}{a} &= -\frac{3}{2}e + \sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{i}\left(J^{i-1}_{ie} - J^{i+1}_{ie}\right)\cos iM^\circ \\ \frac{y^\circ}{a} &= \sqrt{1-e^2}\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{i}\left(J^{i-1}_{ie} + J^{i+1}_{ie}\right)\sin iM^\circ. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Für die folgenden Entwicklungen ist es aber förderlicher, wenn die bezüglichen Coëfficienten der Cosinus- und Sinusreihen identisch werden, was leicht erreicht werden kann, wenn man die Entwicklung auf die negativen Werthe von i ausdehnt; setzt man:

$$e = \sin\varphi,$$

so wird zunächst angenommen:

$$\frac{\cos\varphi}{i}\left(J^{i-1}_{ie} + J^{i+1}_{ie}\right) = G_i - G_{-i}$$

$$\frac{1}{i}\left(J^{i-1}_{ie} - J^{i+1}_{ie}\right) = G_i + G_{-i}$$

hieraus folgt leicht:

$$\left.\begin{aligned} G_i &= \frac{1}{i}\left(J^{i-1}_{ie}\cos\frac{1}{2}\varphi^2 - J^{i+1}_{ie}\sin\frac{1}{2}\varphi^2\right) \\ G_{-i} &= \frac{1}{i}\left(J^{i-1}_{ie}\sin\frac{1}{2}\varphi^2 - J^{i+1}_{ie}\cos\frac{1}{2}\varphi^2\right), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

dann ist, den Fall $i=0$ ausschliessend:

$$\frac{x^\circ}{a} = -\frac{3}{2}e + \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} G_i\cos(iM^\circ)\,, \qquad \frac{y^\circ}{a} = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} G_i\sin(iM^\circ) \tag{11}$$

Die G-Functionen innerhalb der hier gesteckten Genauigkeitsgrenzen werden sein:

$$\left.\begin{aligned} &G_0 = -\frac{3}{2}e \\ &G_{-5} = \frac{125}{9216}e^6 && G_2 = \frac{1}{2}e - \frac{3}{8}e^3 + \frac{5}{96}e^5 \\ &G_{-4} = \frac{1}{60}e^5 && G_3 = \frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{8}e^4 + \frac{111}{1024}e^6 \\ &G_{-3} = \frac{3}{128}e^4 + \frac{3}{1280}e^6 && G_4 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{5}{12}e^5 \\ &G_{-2} = \frac{1}{24}e^3 + \frac{1}{96}e^5 && G_5 = \frac{125}{384}e^4 - \frac{125}{256}e^6 \\ &G_{-1} = \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{24}e^4 + \frac{25}{1024}e^6 && G_6 = \frac{27}{80}e^5 \\ &G_1 = 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{64}e^4 - \frac{29}{1152}e^6 && G_7 = \frac{16807}{46080}e^6. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die Darstellung der Mondcoordinaten als Functionen seiner gestörten mittleren Anomalie erscheint daher geleistet; führt man in diesen Ausdrücken überall statt e die Sonnenbahnexcentricität e_1 ein, und bezeichnet die so gebildeten G-Functionen durch einen Accent, also durch G', so erhält man in derselben Weise die analogen Sonnencoordinaten ξ und η; substituirt man diese so gewonnenen Ausdrücke in die Formeln $21x$), $21y$) und $21z$) des vorangehenden Abschnittes und entwickelt die daselbst auftretenden Grössen, entsprechend der oben gewählten Ordnungsbestimmung, so erhält man für die Sonnencoordinaten, die in den störenden Kräften auftreten, leicht die folgenden Formen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x_1^0}{a_1} = \frac{x_1}{a_1}(1+\gamma_1) &= \left(1-\tfrac{1}{4}\sigma^2\right)c^2 \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} G'_i \cos(iM_1^0-\omega+\omega_1) + \frac{1}{4}\sigma^2 c^2 \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} G'_i \cos(-iM_1^0-\omega+\omega_1+2\Sigma)+\\
&\quad + s^2 \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} G'_i \cos(-iM_1^0-\omega-\omega_1) + cs\sigma \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} G'_i \cos(iM_1^0-\omega-\Sigma)-\\
&\quad - cs\sigma \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} G'_i \cos(-iM_1^0-\omega+\Sigma) + 2cs\frac{z_1}{a_1}\sin\omega\\
\frac{y_1^0}{a_1} = \frac{y_1}{a_1}(1+\gamma_1) &= \left(1-\tfrac{1}{4}\sigma^2\right)c^2 \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} G'_i \sin(iM_1^0-\omega+\omega_1) + \frac{1}{4}\sigma^2 c^2 \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} G'_i \sin(-iM_1^0-\omega+\omega_1+2\Sigma)+\\
&\quad + s^2 \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} G'_i \sin(-iM_1^0-\omega-\omega_1) + cs\sigma \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} G'_i \sin(iM_1^0-\omega-\Sigma)-\\
&\quad - cs\sigma \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} G'_i \sin(-iM_1^0-\omega+\Sigma) + 2cs\frac{z_1}{a_1}\cos\omega\\
\frac{z_1^0}{a_1} = \frac{z_1}{a_1}(1+\gamma_1) &= -2sc \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} G'_i \sin(iM_1^0+\omega_1) + (c^2-s^2)\sigma \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} G'_i \sin(M_1^0-\Sigma)\\
&\quad + (c^2-s^2)\frac{z_1}{a_1}\,.
\end{aligned}\right\} 13)$$

Es hat somit die Bestimmung von Δ (vergl. 4, pag. 81) als periodische Function keine wie immer geartete Schwierigkeit, ausser jener einer weitläufigen Entwicklung; ebenso werden sich leicht die Potenzen von Δ, welche in den W-Ausdrücken auftreten, bilden lassen; doch erfordert die schliessliche Aufstellung des W-Ausdruckes noch die Entwicklung der negativen, ungeraden Potenzen des Sonnenradiusvectors, und zwar der folgenden Potenzen:

$$\left(\frac{a_1}{r_1^0}\right)^5, \quad \left(\frac{a_1}{r_1^0}\right)^7, \quad \left(\frac{a_1}{r_1^0}\right)^9, \quad \left(\frac{a_1}{r_1^0}\right)^{11} \ldots$$

nach Vielfachen der mittleren gestörten Anomalie.

Lässt man den Index, der auf die Sonne Bezug hat, der Kürze halber in der folgenden Entwicklung weg, und bezeichnet allgemein mit e die Excentricität, mit E die excentrische Anomalie, so wird:

$$\left(\frac{a}{r^0}\right)^n = \left(\frac{1}{1-e\cos E}\right)^n = V_0^n + V_1^n\cos E + V_2^n\cos 2E + V_3^n\cos 3E + \ldots,$$

in welchen Ausdrücken bekanntlich zu setzen ist:

$$V_i^n = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+i-1)}{1.2.3.\ldots.(i-1).i}\,\frac{e^i}{2^{i-1}}\left\{1+\frac{(n+i)(n+i+1)}{1.(i+1)}\left(\frac{e}{2}\right)^2+\frac{(n+i)(n+i+1)(n+i+2)(n+i+3)}{1.2.(i+1)(i+2)}\left(\frac{e}{2}\right)^4+\ldots\right\} \quad 14)$$

In V_0^n ist stets statt des gemeinsamen vor den Klammern stehenden Factors die Einheit zu setzen. Innerhalb der hier gesteckten Genauigkeitsgrenzen wird man leicht mit Hilfe dieser Reihen finden:

$$\left.\begin{array}{llll}
V_0^5=1+\frac{15}{2}e^2+\frac{105}{4}e^4+\frac{525}{8}e^6, & V_0^7=1+14e^2+\frac{315}{4}e^4, & V_0^9=1+\frac{45}{2}e^2, & V_0^{11}=1. \\
V_1^5=5e+\frac{105}{4}e^3+\frac{315}{4}e^5, & V_1^7=7e+63e^3, & V_1^9=9e+\frac{495}{4}e^3, & \\
V_2^5=\frac{15}{2}e^2+35e^4+\frac{1575}{16}e^6, & V_2^7=14e^2+105e^4, & V_2^9=\frac{45}{2}e^2, & \\
V_3^5=\frac{35}{4}e^3+\frac{315}{8}e^5, & V_3^7=21e^3, & & \\
V_4^5=\frac{35}{4}e^4+\frac{315}{8}e^6, & V_4^7=\frac{105}{4}e^4, & & \\
V_5^5=\frac{63}{8}e^5, & & & \\
V_6^5=\frac{105}{16}e^6, & & &
\end{array}\right\}\quad 15)$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\cos iE=\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{i}{p}\left\{J_{pe}^{p-i}-J_{pe}^{p+i}\right\}\cos pM=\sum D_p^i\cos pM;$$

für $p=0$ werden die D_0-Coëfficienten im Allgemeinen der Null gleich, ausgenommen für $i=1$, dann ist:

$$D_0^1=-\frac{1}{2}e.$$

Innerhalb der nöthigen Genauigkeitsgrenzen wird man durch die J-Functionen die D-Coëfficienten leicht, wie folgt, erhalten:

$$\left.\begin{array}{lll}
D_0^1=-\frac{1}{2}e, & D_0^2=0 & D_0^3=0 \\
D_1^1=1-\frac{3}{8}e^2+\frac{5}{192}e^4, & D_1^2=-e+\frac{1}{12}e^3, & D_1^3=\frac{3}{8}e^2, \\
D_2^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{3}e^3+\frac{1}{16}e^5, & D_2^2=1-e^2+\frac{5}{24}e^4, & D_2^3=-\frac{3}{2}e+\frac{3}{4}e^3, \\
D_3^1=\frac{3}{8}e^2-\frac{45}{128}e^4, & D_3^2=e-\frac{9}{8}e^3, & D_3^3=1-\frac{9}{4}e^2, \\
D_4^1=\frac{1}{3}e^3-\frac{2}{5}e^5, & D_4^2=e^2-\frac{4}{3}e^4, & D_4^3=\frac{3}{2}e-3e^3, \\
D_5^1=\frac{125}{384}e^4, & D_5^2=\frac{25}{24}e^3, & D_5^3=\frac{15}{8}e^2, \\
D_6^1=\frac{27}{80}e^5, & D_6^2=\frac{9}{8}e^4, & D_6^3=\frac{9}{4}e^3, \\
D_0^4=0, & D_0^5=0, & D_0^6=0, \\
D_1^4=0, & D_1^5=0, & D_1^6=0, \\
D_2^4=e^2, & D_2^5=0, & D_2^6=0, \\
D_3^4=-2e, & D_3^5=0, & D_3^6=0, \\
D_4^4=1-4e^2, & D_4^5=-\frac{5}{2}e, & D_4^6=0, \\
D_5^4=2e, & D_5^5=1, & D_5^6=0, \\
D_6^4=3e^2, & D_6^5=\frac{5}{2}e, & D_6^6=1,
\end{array}\right\}\quad 16)$$

Setzt man also:

$$\left(\frac{a}{r^0}\right)^n = \sum_{i=0}^{i=\infty} E_i^n \cos iM\,,$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned} E_0^n &= V_0^n - \frac{1}{2} e\, V_1^n \\ E_i^n &= V_1^n D_i^1 + V_2^n D_i^2 + V_3^n D_i^3 + \ldots = \sum_{q=1}^{q=\infty} V_q^n D_i^q\,. \end{aligned}\right\} \quad 17)$$

Mit Hilfe dieser Relationen lassen sich leicht alle nöthigen Potenzen von r^0 berechnen, und man kann die Resultate durch entsprechende Potenzirung des Ausdruckes:

$$\frac{a}{r^0} = 1 + 2J_e^1 \cos M + 2J_{2e}^2 \cos 2M + 2J_{3e}^3 \cos 3M \ldots \quad 18)$$

controliren. Dann bedarf man auch zur schliesslichen Bildung von W der Relation:

$$\left(\frac{r^0}{a}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{4}{1^2} J_e^1 \cos M - \frac{4}{2^2} J_{2e}^2 \cos 2M - \frac{4}{3^2} J_{3e}^3 \cos 3M \ldots \quad 19)$$

Die Bildung der übrigen Theile der störenden Kräfte ist so einfach, dass an dieser Stelle nicht näher auf dieselbe eingegangen zu werden braucht.

Man kann demnach das Resultat der bisherigen Entwicklungen dahin zusammenfassen, dass die Darstellung der störenden Kräfte als Functionen der Zeit und der Störungen selbst, welch' letztere aber erst in den Gliedern von der zweiten Potenz der störenden Masse auftreten, ermöglicht ist. Es stellt sich nun die Aufgabe, die so erlangten Differentialgleichungen der Integration zuzuführen; die diese Integration vorbereitenden Entwicklungen behandelt der nächste Abschnitt.

6. Zurückführung der drei Differentialgleichungen 2. Ordnung auf sechs zweckmässig gewählte Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Es sind in dem 4. Abschnitte (pag. 76) dieser Abhandlung die Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + (\mu+\mu')\frac{x}{(r)^3} &= X \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (\mu+\mu')\frac{y}{(r)^3} &= Y \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + (\mu+\mu')\frac{z}{(r)^3} &= Z, \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

und:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x^0}{\partial \zeta^2} + (\mu+\mu')\frac{x^0}{r^{0\,3}} &= 0 \\ \frac{\partial^2 y^0}{\partial \zeta^2} + (\mu+\mu')\frac{y^0}{r^{0\,3}} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

aufgestellt werden, zwischen deren Coordinaten die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= (1+\gamma)x\,, \quad & r^0 &= (1+\gamma)(r) \\ y^0 &= (1+\gamma)y\,, \quad & z^0 &= (1+\gamma)\,z\,, \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

bestehen sollen; die mit dem Index ° versehenen Coordinaten sind als Proportionalcoordinaten bezeichnet worden.

Um nun die Relationen zwischen diesen Coordinaten festzustellen, werde ich eine Methode befolgen, welche dem Wesen nach in meiner Abhandlung: „Ermittlung der Störungswerthe in den Coordinaten“ im 46. Bande der Denkschriften auseinandergesetzt wurde; da aber Veranlassung war, in einigen Punkten wesentliche Abänderungen platzgreifen zu lassen, so soll, um hier alles Zusammengehörige bei einander vorzufinden, eine kurze einheitliche Darstellung der diesbezüglichen Untersuchungen vorgeführt werden.

Stellt man die heliocentrische Winkelbewegung in den Proportionalcoordinaten durch ∂v°, die thatsächliche, auf die mittlere Bahnebene projicirte durch $\partial(v)$ dar, so ist offenbar stets:

$$\partial(v) = \partial v^\circ, \tag{4}$$

weil unter allen Umständen:

$$\frac{x}{y} = \frac{x^\circ}{y^\circ},$$

wird. Aus 4) folgt sofort:

$$\frac{\partial(v)}{\partial\zeta} = \frac{\partial v^\circ}{\partial\zeta}, \quad \frac{\partial(v)}{\partial t} = \frac{\partial v^\circ}{\partial t} = \frac{\partial v^\circ}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial t}. \tag{5}$$

Multiplicirt man die erste Gleichung in 1) mit $-y$, die zweite mit x und addirt die so erhaltenen Producte, so wird:

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{(r)^2\frac{\partial(v)}{\partial t}\right\} = xY - yX.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert, indem man sofort den Werth der Integrationsconstante durch die Reduction des Problems auf die ungestörte Bewegung ableitet, somit $X = Y = Z = 0$ gesetzt sich denkt:

$$x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t} = (r)^2\frac{\partial(v)}{\partial t} = \sqrt{\mu+\mu'}\cdot\sqrt{p_0} + \int(xY - yX)\,\partial t. \tag{6}$$

In dieser Gleichung stellt p_0 den ungestörten Parameter der Bahn des Himmelskörpers vor.

Behandelt man in ähnlicher Weise die Gleichungen 2), so findet sich mit Rücksicht auf die erste Gleichung in 5):

$$x^\circ\frac{\partial y^\circ}{\partial\zeta} - y^\circ\frac{\partial x^\circ}{\partial\zeta} = r^{\circ 2}\frac{\partial v^\circ}{\partial\zeta} = r^{\circ 2}\frac{\partial(v)}{\partial\zeta} = \sqrt{\mu+\mu'}\cdot\sqrt{p_0}. \tag{7}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\mu+\mu'}\cdot\sqrt{p_0}}\int(xY - yX)\,\partial t, \tag{8}$$

so wird aus 6) zunächst erhalten:

$$(r)^2\frac{\partial(v)}{\partial t} = x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\mu+\mu'}\cdot\sqrt{p_0}\,(1+I). \tag{9}$$

Dividirt man nun 9) durch 7), so wird mit Berücksichtigung der dritten Gleichung in 3) erhalten:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = (1+I)(1+\gamma)^2. \tag{10}$$

Diese Gleichung ergibt sonach eine Relation zwischen γ und $\partial\zeta$; es stellt sich daher die Aufgabe, noch eine weitere Relation zwischen diesen beiden Functionen, oder eine Bestimmungsgleichung für eine derselben herzustellen; in der That gelingt es für die Bestimmung von γ eine auf Quadraturen reducirbare Differentialgleichung abzuleiten, insofern man eine nach Potenzen der störenden Kräfte fortschreitende Entwicklung des Problems als zulässig betrachtet.

Differentiirt man die in der ersten Gleichung 3) aufgestellte Relation:

$$x^\circ = (1+\gamma)x$$

nach ζ, so erhält man mit Rücksicht auf 10) sofort:

$$\frac{\partial x^\circ}{\partial \zeta} = x\frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} + \frac{1}{(1+\gamma)(1+I)}\frac{\partial x}{\partial t}, \tag{11}$$

aus welcher Gleichung und der analogen für y° geltenden auch folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= (1+I)\left\{\frac{\partial x^\circ}{\partial \zeta} + \gamma\frac{\partial x^\circ}{\partial \zeta} - x^\circ\frac{\partial \gamma}{\partial \zeta}\right\} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= (1+I)\left\{\frac{\partial y^\circ}{\partial \zeta} + \gamma\frac{\partial y^\circ}{\partial \zeta} - y^\circ\frac{\partial \gamma}{\partial \zeta}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die weitere Differentiation von 11) nach ζ ergibt:

$$\frac{\partial^2 x^\circ}{\partial \zeta^2} = x\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{(1+I)^2(1+\gamma)^3}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{1}{(1+I)^3(1+\gamma)^3}\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial I}{\partial t}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung beiderseits mit $(1+\gamma)$ und ersetzt den Werth von $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ nach der ersten Gleichung in 1) (pag. 85) durch:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = X - (\mu+\mu')\frac{x}{(r)^3},$$

und beachtet, dass die Relation:

$$(\mu+\mu')\frac{x}{(r)^3} = (\mu+\mu')\frac{x^\circ}{r^{\circ 3}}(1+\gamma)^2 = -(1+\gamma)^2\frac{\partial^2 x^\circ}{\partial \zeta^2}$$

besteht, so findet man die Gleichung:

$$x^\circ\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \zeta^2} - \gamma\frac{\partial^2 x^\circ}{\partial \zeta^2} = -\frac{X}{(1+I)^2(1+\gamma)^2} + \frac{1}{(1+I)^3(1+\gamma)^2}\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{2I+I^2}{(1+I)^2}\frac{\partial^2 x^\circ}{\partial \zeta^2}. \tag{13}$$

Führt man nun zur weiteren Abkürzung:

$$1+Q = \frac{1}{(1+I)^2}, \quad \text{also:}\ \frac{\partial Q}{\partial \zeta} = -\frac{2}{(1+I)^3}\frac{\partial I}{\partial \zeta} \tag{14}$$

ein und ersetzt $\frac{\partial x}{\partial t}$ in 13) durch die erste Relation in 12), so erhält man:

$$x^\circ\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \zeta^2} - \gamma\frac{\partial^2 x^\circ}{\partial \zeta^2} + \frac{\frac{\partial I}{\partial t}}{(1+I)^2(1+\gamma)^2}\left(x^\circ\frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} - \gamma\frac{\partial x^\circ}{\partial \zeta}\right) = -\frac{X}{(1+I)^2(1+\gamma)^2} + \frac{1}{(1+I)^2(1+\gamma)^2}\frac{\partial x^\circ}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial I}{\partial t} - Q\frac{\partial^2 x^\circ}{\partial \zeta^2}. \tag{15}$$

Setzt man nun weiter in diesen Ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} &= \frac{\partial I}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial \zeta}(1+I)(1+\gamma)^2 \\ (1+I)R &= -\frac{X}{(1+I)(1+\gamma)^2} + \frac{\partial x^\circ}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial I}{\partial \zeta} - (1+I)Q\frac{\partial^2 x^\circ}{\partial \zeta^2} \\ x^\circ\frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} - \gamma\frac{\partial x^\circ}{\partial \zeta} &= q, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

so wird die Gleichung 15) die Gestalt:

$$\frac{\partial q}{\partial \zeta} + \frac{1}{(1+I)}\frac{\partial I}{\partial \zeta}q = R,$$

annehmen, deren allgemeines Integral:

$$q=\frac{1}{(1+I)}\{C+\int(1+I)R\partial\zeta\},$$

ist; weil aber die willkürliche Integrationsconstante im vorliegenden Falle der Null gleich gesetzt werden kann, da, wenn keine störende Wirkung vorhanden ist, $q=0$ und $R=0$ sein müssen, so wird:

$$x^\circ\frac{\partial\gamma}{\partial\zeta}-\gamma\frac{\partial x^\circ}{\partial\zeta}=\frac{1}{(1+I)}\int(1+I)R\,\partial\zeta. \qquad 17)$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen ist aber noch einer wesentlichen Reduction fähig. Es ist nämlich offenbar:

$$(1+I)R=-X\frac{\partial t}{\partial\zeta}+\frac{\partial x^\circ}{\partial\zeta}\frac{\partial I}{\partial\zeta}-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(1+I)\,Q\frac{\partial x^\circ}{\partial\zeta}\right\}+\frac{\partial x^\circ}{\partial\zeta}\left\{(1+I)\frac{\partial Q}{\partial\zeta}+Q\frac{\partial I}{\partial\zeta}\right\},$$

woraus sofort, mit Rücksicht auf die Bedeutung von Q und dessen Ableitung, (vergl. 14) folgt:

$$(1+I)\,R=-X\frac{\partial t}{\partial\zeta}-\frac{1}{(1+I)^2}\frac{\partial x^\circ}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial I}{\partial\zeta}-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(1+I)\,Q\frac{\partial x^\circ}{\partial\zeta}\right\};$$

es ist sonach, wenn eine analoge Entwicklung für die y° Coordinate durchgeführt wird:

$$\left.\begin{aligned}x^\circ\frac{\partial\gamma}{\partial\zeta}-\gamma\frac{\partial x^\circ}{\partial\zeta}&=-\frac{1}{(1+I)}\int\left(X+\frac{1}{(1+I)^2}\frac{\partial x^\circ}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial I}{\partial t}\right)\partial t-Q\frac{\partial x^\circ}{\partial\zeta}\\ y^\circ\frac{\partial\gamma}{\partial\zeta}-\gamma\frac{\partial y^\circ}{\partial\zeta}&=-\frac{1}{(1+I)}\int\left(Y+\frac{1}{(1+I)^2}\frac{\partial y^\circ}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial I}{\partial t}\right)\partial t-Q\frac{\partial y^\circ}{\partial\zeta}.\end{aligned}\right\} \qquad 18)$$

Setzt man wieder abkürzend:

$$\left.\begin{aligned}II&=\int\frac{Y+\dfrac{1}{(1+I)^2}\dfrac{\partial y^\circ}{\partial\zeta}\cdot\dfrac{\partial I}{\partial t}}{\sqrt{\mu+\mu'}\cdot\sqrt{p_0}}\,a\,\partial t\\ III&=\int\frac{X+\dfrac{1}{(1+I)^2}\dfrac{\partial x^\circ}{\partial\zeta}\cdot\dfrac{\partial I}{\partial t}}{\sqrt{\mu+\mu'}\cdot\sqrt{p_0}}\,a\,\partial t,\end{aligned}\right\} \qquad 19)$$

in welchen Ausdrücken unter a die ungestörte halbe grosse Achse der Mondbahn zu verstehen ist, und die willkürlichen Integrationsconstanten der Null gleich angenommen werden, was hier gestattet ist, da mittlere Elemente nach einer im folgenden Abschnitte zu gebenden Definition als Grundlage der Rechnung gedacht sind, so wird, wenn man die erste Gleichung in 18) mit y°, die zweite mit $-x^\circ$ multiplicirt und die Producte addirt, mit Rücksicht auf 7) und 19) erhalten:

$$1+\gamma=\frac{1}{(1+I)^2}+\frac{x^\circ}{a}\frac{II}{(1+I)}-\frac{y^\circ}{a}\frac{III}{(1+I)}, \qquad 20)$$

womit die Grösse γ bestimmt erscheint.

Hätte man die Gleichungen 18) bezüglich mit $\frac{\partial y^\circ}{\partial t}$ und $-\frac{\partial x^\circ}{\partial t}$ multiplicirt und die Producte addirt, so würde man gefunden haben:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\zeta}=\frac{1}{a}\frac{\partial x^\circ}{\partial\zeta}\frac{II}{(1+I)}-\frac{1}{a}\frac{\partial y^\circ}{\partial\zeta}\cdot\frac{III}{(1+I)}. \qquad 21)$$

Aus der Verbindung von 18) und 12) folgt weiter:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{1}{(1+I)}\,\frac{\partial x^\circ}{\partial \zeta} + III\frac{\sqrt{\mu+\mu'}\;\sqrt{p_0}}{a}\\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{1}{(1+I)}\,\frac{\partial y^\circ}{\partial \zeta} + II\,\frac{\sqrt{\mu+\mu'}\,.\sqrt{p_0}}{a}.\end{aligned}\right\} \quad 22)$$

Es wird sich bei der thatsächlichen Anwendung dieser Formelsysteme vortheilhaft erweisen, die Gleichungen 8, 19 und 22 etwas abgeändert zu schreiben. Bezeichnet man mit e die als constant zu betrachtende Excentricität der Mondbahn und mit m die Bewegung der mittleren Anomalie in der Zeiteinheit, so wird:

$$m = \frac{\sqrt{\mu+\mu'}}{a^{3/2}}, \quad 23)$$

ist weiter:

$$l = \frac{1}{m\,.\,a\sqrt{1-e^2}}, \quad 24)$$

so hat man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial t} &= \frac{x^\circ}{a}\cdot\frac{(lY)}{(1+\gamma)} - \frac{y^\circ}{a}\cdot\frac{(lX)}{(1+\gamma)}\\ \frac{\partial II}{\partial t} &= (lY) + \frac{1}{(1+I)^2}\left(l\,\frac{\partial y^\circ}{\partial \zeta}\right)\frac{\partial I}{\partial t}\\ \frac{\partial III}{\partial t} &= (lX) + \frac{1}{(1+I)^2}\left(l\,\frac{\partial x^\circ}{\partial \zeta}\right)\frac{\partial I}{\partial t},\end{aligned}\right\} \quad 25)$$

welche Differentialquotienten mit Hilfe der in dem zweiten Abschnitte erhaltenen Ausdrücke in ihrer analytischen Form hingeschrieben werden können; weiter wird man statt 22) setzen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{a}\,\frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{1}{(1+I)}\,\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial x^\circ}{\partial \zeta} + \frac{III}{al}\\ \frac{1}{a}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{1}{(1+I)}\,\frac{1}{a}\,\frac{\partial y^\circ}{\partial \zeta} + \frac{II}{al},\end{aligned}\right\} \quad 26)$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned}l\,\frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{1}{(1+I)}\left(l\,\frac{\partial x^\circ}{\partial \zeta}\right) + III\\ l\,\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{1}{(1+I)}\left(l\,\frac{\partial y^\circ}{\partial \zeta}\right) + II.\end{aligned}\right\} \quad 27)$$

Die Integration der Gleichungen 25) wird sich innerhalb der erforderlichen Genauigkeitsgrenzen, wie dies im folgenden Abschnitte ausführlich dargethan wird, leisten lassen und zur Kenntniss der Integrale *I*, *II* und *III* führen, somit auch den Werth von γ ergeben. Man wird dann durch die Integration der Gleichung 10) (pag. 86) leicht ζ oder auch, wenn man es vorzieht, die gestörte mittlere Anomalie nach:

$$\frac{\partial M^\circ}{\partial t} = m(1+I)(1+\gamma)^2, \quad 28)$$

finden können, welcher Gleichung man auch:

$$\Gamma = \frac{x^\circ}{a}\,II - \frac{y^\circ}{a}\,III \quad 29)$$

setzend, die Form (vergl. 20 und 14):

$$\frac{\partial M^\circ}{\partial t} = m\left\{\frac{1}{(1+I)^3} + \frac{2\Gamma}{(1+I)^2} + \frac{\Gamma^2}{(1+I)}\right\} \quad 30)$$

ertheilen kann. Diese letztere Gleichung führt Doppelintegrale ein, da eine weitere Integration der ermittelten Integrale *I*, *II* und *III* erforderlich ist; diese Doppelintegrale sind aber, wie dies die Entwicklung lehrt, so beschaffen, dass dieselben, gewisse Fälle ausgenommen, nach der Integration die auftretenden kleinen Integrationsdivisoren nur in der ersten Potenz enthalten, soweit nämlich diese selbst nicht schon in den ersten Integralen vorhanden sind; ausgenommen sind jene Integrationsdivisoren, welche, sich aus Theilen nullter Ordnung zusammensetzend, in der Summe so klein werden, dass dieselben als höherer Ordnung betrachtet werden müssen; diese so eben hervorgehobenen Fälle treten aber in der vorliegenden Mondtheorie nur in jenen Gliedern auf, die sehr hohe Vielfache der mittleren Anomalie der Sonne enthalten, können daher, soferne man nicht überaus grosse Zeiträume in Betracht ziehen will, keinen merklichen Werth erreichen; zu diesen Fällen sind auch die durch Hansen zuerst entwickelten Störungsglieder langer Perioden, welche durch die Planeten in der Mondbewegung bewirkt werden, zu zählen, auf welche jedoch die vorliegende Abhandlung nicht Rücksicht nimmt.

Es erübrigt nur noch die Intregrale für die z-Coordinate aufzustellen.

Zu diesem Zwecke wird man die Gleichungen 1) (pag. 85) vornehmen. Multiplicirt man die zweite derselben mit $-z$, die dritte mit y und addirt die Producte und verfährt ähnlich, indem man die erste mit $-z$, die dritte mit x multiplicirt, so findet sich:

$$\left.\begin{aligned} y\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial y}{\partial t} &= \int (yZ - zY)\,\partial t \\ x\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial x}{\partial t} &= \int (xZ - zX)\,\partial t. \end{aligned}\right\} \quad 31)$$

Setzt man wieder abkürzend:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial IV'}{\partial t} &= \frac{y^\circ}{a}\,\frac{(lZ)}{(1+\gamma)} - \frac{z^\circ}{a}\,\frac{(lY)}{(1+\gamma)} \\ \frac{\partial V'}{\partial t} &= \frac{x^\circ}{a}\,\frac{(lZ)}{(1+\gamma)} - \frac{z^\circ}{a}\,\frac{(lX)}{(1+\gamma)}, \end{aligned}\right\} \quad 32)$$

so wird, wenn man die erste Gleichung in 31) mit $-x$, die zweite mit y multiplicirt und nach der Addition der Producte mit Rücksicht auf die Relation 9) (pag. 86) beiderseits den Factor $\frac{(1+\gamma)}{a}$ hinzufügt, erhalten:

$$\frac{z^\circ}{a} = -\frac{x^\circ}{a}\,\frac{IV'}{(1+I)} + \frac{y^\circ}{a}\,\frac{V'}{(1+I)}\,; \quad 33)$$

ähnlich erhält man, wenn man die erste Gleichung mit $-\frac{\partial x}{\partial t}$, die zweite mit $\frac{\partial y}{\partial t}$ multiplicirt und die Producte addirt:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{IV'}{(1+I)}\,\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{V'}{(1+I)}\,\frac{\partial y}{\partial t}, \quad 34)$$

oder mit Benützung der Relationen 27) auch:

$$l\,\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{(1+I)^2}\left\{-\left(l\,\frac{\partial x^\circ}{\partial \zeta}\right)IV' + \left(l\,\frac{\partial y^\circ}{\partial \zeta}\right)V'\right\} + \frac{1}{(1+I)}\{II\,V' - III\,IV'\}. \quad 35)$$

Die Bestimmungen von $\frac{z^\circ}{a}$ mit Hilfe der Formel 33) würde sich aber bei der hier gewählten Form der Integration nicht vortheilhaft erweisen, indem die sonst auftretenden Glieder, die das Quadrat der Integrationsdivisoren zweiter Ordnung erhalten, einer besonderen Behandlung bedürfen würden, setzt man aber;

$$x^\circ = r^\circ\cos v^\circ = r^\circ\cos(u^\circ - \omega)$$
$$y^\circ = r^\circ\sin v^\circ = r^\circ\sin(u^\circ - \omega)\,,$$

in welchen Ausdrücken, wie im ersten Abschnitte ω den Abstand des Mondperigäums vom Knoten darstellt, u° also das Argument der Breite wird, so wird man die Gleichung 33) in der Form:

$$(1+I)\,\frac{z^\circ}{a}=-\frac{r^\circ\cos u^\circ}{a}\,\{IV'\cos\omega+V'\sin\omega\}+\frac{r^\circ\sin u^\circ}{a}\,\{V'\cos\omega-IV'\sin\omega\}\,,$$

schreiben dürfen. Führt man daher als neue Functionen ein:

$$\left.\begin{aligned} IV &= IV'\cos\omega+V'\sin\omega\\ V &= -IV'\sin\omega+V'\cos\omega \end{aligned}\right\}\qquad 36)$$

so wird:

$$\frac{z^\circ}{a}=-\frac{IV}{(1+I)}\,\frac{r^\circ\cos u^\circ}{a}+\frac{V}{(1+I)}\,\frac{r^\circ\sin u^\circ}{a}.\qquad 37)$$

Die Berechnung von $\frac{\partial IV}{\partial t}$ und $\frac{\partial V}{\partial t}$ gestaltet sich aber ganz einfach, denn die Differentiation von 36) ergibt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial IV}{\partial t} &= \left(\frac{\partial IV'}{\partial t}\cos\omega+\frac{\partial V'}{\partial t}\sin\omega\right)+V\frac{\partial\omega}{\partial t}\\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \left(-\frac{\partial IV'}{\partial t}\sin\omega+\frac{\partial V'}{\partial t}\cos\omega\right)-IV\frac{\partial\omega}{\partial t} \end{aligned}\right\}\qquad 38)$$

Gerade die letzten Glieder in den beiden eben hingeschriebenen Gleichungen sind es, welche eine wesentliche Erleichterung in der Integration der später auftretenden simultanen Differentialgleichungen bewirken.

Sammelt man daher die für die Rechnung erforderlichen Ausdrücke, so hat man zunächst die folgenden fünf Differentialquotienten zu berechnen, deren analytische Form durchaus mit Hilfe der im ersten Abschnitte gegebenen Entwicklungen hingeschrieben werden kann,

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{1}{ma\sqrt{1-e^2}}\\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \frac{x^\circ}{a}\,\frac{(lY)}{(1+\gamma)}-\frac{y^\circ}{a}\,\frac{(lX)}{(1+\gamma)}\\ \frac{\partial II}{\partial t} &= (lY)+\frac{1}{(1+I)^2}\left(l\,\frac{\partial y^\circ}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial I}{\partial t}\\ \frac{\partial III}{\partial t} &= (lX)+\frac{1}{(1+I)^2}\left(l\,\frac{\partial x^\circ}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial I}{\partial t}\\ \frac{\partial IV'}{\partial t} &= \frac{y^\circ}{a}\,\frac{(lZ)}{(1+\gamma)}-\frac{z^\circ}{a}\,\frac{(lY)}{(1+\gamma)}\\ \frac{\partial V'}{\partial t} &= \frac{x^\circ}{a}\,\frac{(lZ)}{(1+\gamma)}-\frac{z^\circ}{a}\,\frac{(lX)}{(1+\gamma)}. \end{aligned}\right\}\qquad 39)$$

In diesen Formeln sind $\frac{\partial IV'}{\partial t}$ und $\frac{\partial V'}{\partial t}$ angesetzt worden statt der eigentlich in Verwendung tretenden Grössen $\frac{\partial IV}{\partial t}$ und $\frac{\partial V}{\partial t}$; der Grund, wesshalb dieser Anordnung der Vorzug gegeben wurde, besteht darin dass die thatsächliche Entwicklung für die ersteren Differentialquotienten etwas bequemer ist, als wenn man sofort die letzteren berechnen wollte; da aber die Coëfficienten für $\frac{\partial IV'}{\partial t}$ und $\frac{\partial V'}{\partial t}$ im Wechselverhältnis der Cofunctionen stehen, so wird eine einfache Abänderung der Argumente um ω und das Zufügen der Glieder $V\frac{\partial\omega}{\partial t}$ und $-IV\frac{\partial\omega}{\partial t}$ sofort die erforderliche Transformation ergeben.

Sind durch ein geeignetes Verfahren die Integrale I, II, III, IV und V bekannt, so wird zu rechnen sein:

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{x^\circ}{a}\, II - \frac{y^\circ}{a}\, III \\
\gamma &= (-2I+3I^2-4I^3+5I^4-\ldots)+(1-I+I^2-I^3+\ldots)\Gamma \\
\frac{z^\circ}{a} &= (1-I+I^2-I^3+\ldots)\left(-\frac{x^\circ}{a}IV+\frac{y^\circ}{a}V\right) \\
\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial M^\circ}{\partial t} &= 1-3I+2\Gamma+ \\
&\quad +6I^2-4I\Gamma+\Gamma^2 \\
&\quad -10I^3+6I^2\Gamma-I\Gamma^2 \\
&\quad +15I^4-8I^3\Gamma+I^2\Gamma^2 \\
&\quad +\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad 40)$$

Die Integration der letzten Gleichung führt zur Kenntnis der gestörten mittleren Anomalie, während γ und z° die Störungen für die übrigen Coordinaten ergeben,

7. Integrationsmethode für die erste Annäherung.

Die vorausgehenden Entwicklungen bieten die Hilfsmittel, die Differentialquotienten der Elemente I, II, III, IV und V und mit Benützung dieser Elemente den Differentialquotienten für die gestörte mittlere Anomalie analytisch hinzuschreiben. Die Störungen der mittleren Anomalie und die fünf eben genannten Elemente, welche beim Beginn der Rechnung als Unbekannte zu betrachten sind, treten aber in den oben erhaltenen Differentialquotienten selbst auf, allerdings, wenn man zunächst vom Differentialquotienten der gestörten mittleren Anomalie absieht, immer in derartiger Verbindung, dass eine Entwicklung nach steigenden Potenzen der störenden Kraft thunlich erscheint; es stellt sich nun die Aufgabe, diese Gleichungen in zweckmässiger Weise zu integriren; der sonst wohl bei der Bestimmung der Störungen eines Planeten übliche Vorgang, in der ersten Annäherung die Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die störende Masse fortzulassen, wird voraussichtlich bei der Anwendung auf die Mondtheorie nicht mit Sicherheit zum Ziele führen, denn die störende Kraft wird hierbei als Grösse zweiter Ordnung betrachtet; man kann daher von Annäherung zu Annäherung sich scheinbar um zwei Ordnungen der Wahrheit annähern, aber eben nur scheinbar, denn bei der Integration treten bei einigen Gliedern Integrationsdivisoren auf, die theils erster, theils sogar zweiter Ordnung sind; das Auftreten der letzteren lässt daher ein so beschaffenes Verfahren der successiven Substitution in Bezug auf Convergenz zum mindesten etwas zweifelhaft erscheinen, wenigstens für jene Glieder, welche die kleinen Integrationsdivisoren zweiter Ordnung erhalten; es tritt daher das Erfordernis auf, das Integrationsverfahren derartig einzurichten, dass in der ersten Annäherung alle Glieder vierter, in der zweiten alle Glieder fünfter Ordnung u. s. w. in den Differentialgleichungen mitgenommen werden müssen, um im Endresultat die Glieder zweiter, dritter Ordnung u. s. w. verbürgen zu können. Sollte es sich bei den Entwicklungen herausstellen, dass diese Befürchtung der mangelhaften Convergenz nicht zutreffend ist, so wird durch die unten folgende Methode der gewiss nicht zu unterschätzende Vortheil erreicht, mit jeder Annäherung um 2 Ordnungen der Wahrheit näher gekommen zu sein.

Setzt man:

$$M^\circ = g + VI, \qquad 1)$$

zerlegt also die gestörte mittlere Anomalie des Mondes M° in die ungestörte g und deren Störung VI, so lassen sich die durch die vorangehenden Entwicklungen erhaltenen Differentialgleichungen für IV und V richtig innerhalb der Glieder vierter Ordnung inclusive, wie folgt, schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial IV}{\partial t} &= e' + f'IV + g_1'V \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= e'' + f_1''IV + g''V.\end{aligned}\right\} \quad 2)$$

In diesen Gleichungen sind e', e'', f', f_1'', g_1' g'' völlig bekannte Functionen der Zeit; die ersteren, nämlich e' und e'', sind der bisher befolgten Ordnungsbestimmung gemäss dritter, die übrigen zweiter Ordnung. Gelingt die Integration dieser Gleichungen in der Weise, dass in IV und V mindestens die Glieder zweiter Ordnung richtig erhalten werden, eine Forderung, der in der That, wie dies weiter unten ausführlich gezeigt werden wird, genügt werden kann, so lassen sich die Differentialgleichungen für die Elemente I, II und III innerhalb der Glieder vierter Ordnung auf die folgenden Formen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial t} &= a' + b_0' I + c_0' II + d_0' III + h' VI \\ \frac{\partial II}{\partial t} &= a'' + b_0'' I + c_0'' II + d_0'' III + h'' VI \\ \frac{\partial III}{\partial t} &= a''' + b_0''' I + c_0''' II + d_0''' III + h''' VI\end{aligned}\right\} \quad 3)$$

bringen, so dass nur Glieder fünfter Ordnung, die in der That in der ersten Annäherung übergangen werden dürfen, in diesen Ausdrücken fehlen; alle Coëfficienten in diesen Ausdrücken sind als Grössen zweiter Ordnung zu betrachten.

Man könnte sich in diesem Gleichungssystem 3) von dem Elemente VI in der ersten Annäherung unabhängig machen, wenn man statt der unabhängig Variablen t die Grösse ζ einführen würde, also gewissermassen die Integration nach der gestörten mittleren Anomalie des Mondes ausführen würde; denn identificirt man in der mittleren Anomalie der Sonne und in den Bewegungen des Knotens und des Perigäums des Mondes die Zeit t mit ζ, so begeht man nur einen Fehler, bestehend aus den Producten des Unterschiedes von t und ζ in die Bewegung der Sonne und die Bewegungen der genannten Mondelemente; der Unterschied $\zeta - t$ ist zweiter Ordnung, die Bewegung der Sonne im Verhältniss zur Bewegung des Mondes (beiläufig 1:13) kann als erster Ordnung, die Änderungen der Mondelemente als zweiter Ordnung betrachtet werden; man begeht also durch die angeregte Identification nur Fehler dritter, beziehungsweise vierter Ordnung. In der That habe ich zuerst diesen Weg verfolgt, ehe mir die merkwürdige, später zur Erläuterung kommende Zerlegung des Elementes VI bekannt war. Man würde auch auf diesem Wege auf eine brauchbare Lösung hingeführt werden, doch bietet dieses Verfahren eine geringere Convergenz und führt, ich möchte sagen, ein fremdes Element in die Rechnung ein; überdies würde schliesslich eine ziemlich weitläufige Umkehrung der Reihen erforderlich sein.

Wie man sieht, tritt durch die Entwicklung selbst eine sehr willkommene Trennung der Variablen auf, die den Vorgang der folgenden Integration wesentlich erleichtert; würde diese Trennung nicht eintreten, so könnte doch immerhin das folgende Verfahren, wenn auch in wesentlich weitläufigerer Weise, in Anwendung gezogen werden. Es kann noch hier bemerkt werden, dass die zur Auseinandersetzung gelangende Integrationsmethode der obigen Gleichungen hauptsächlich durch die Art und Weise, wie das Integral VI zerlegt wird, unter einigen ganz einfachen, die Rechnung wesentlich vereinfachenden Modificationen und geringen Erweiterungen, die sich hauptsächlich aus der Einführung der Störungen des störenden Himmelskörpers ergeben, auch auf die sofortige directe Bestimmung der Störungen zweier Planeten auf einander bis auf Grössen zweiter Ordnung (inclusive) der störenden Massen ausgedehnt werden kann, eine Lösung, die in dieser Form meines Wissens noch nicht geleistet ist; auf die hiefür erforderlichen Abänderungen werde ich am Schlusse dieses Abschnittes kurz hinweisen.

Als erste zu lösende Aufgabe stellt sich daher die Integration der beiden simultanen Differentialgleichungen 2). Zunächst hat man zu bemerken, dass die Entwicklung der diesbezüglichen Ausdrücke zeigt, dass g_1'' und f_1'' derartig beschaffen sind, dass sich dieselben aus einer Summe von Cosinusfunctionen der Zeit zusammensetzen, welche überdies je ein constantes Glied dritter Ordnung enthalten; dieses constante Glied dritter Ordnung kann daher in der ersten Annäherung weggelassen werden, da sich dasselbe in den obigen Gleichungen beziehungsweise mit den Gliedern V und IV, die selbst zweiter Ordnung sind, zu Gliedern fünfter Ordnung verbindet, welche Glieder daher innerhalb der gesteckten Genauigkeitsgrenzen übergangen werden dürfen. Diese constanten Glieder würden aber ganz wesentlich das Integrationsverfahren erschweren, wenn dieselben etwa zweiter Ordnung wären; sie würden diese Ordnung erreichen, wenn man statt der hier gewählten Elemente IV und V die Elemente IV' und V' der Entwicklung zu Grunde gelegt hätte; es ist somit ersichtlich, wesshalb im vorangehenden Abschnitte die scheinbar überflüssige Transformation dieser Elemente vorgenommen wurde. Der rein periodische Theil von g_1' soll durch g', jener von f_1'' durch f'' bezeichnet werden; f' und g'' sind Aggregate, die sich aus Sinusfunctionen der Zeit ohne constantes Anfangsglied summiren.

Man kann daher, ohne die gewählte Annäherung irgendwie zu schädigen, statt der Gleichung 2) schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial IV}{\partial t} &= e' + f'\,IV + g'\,V \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= e'' + f''\,IV + g''\,V.\end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

$\frac{\partial IV}{\partial t}$ wird durch e', $\frac{\partial V}{\partial t}$ durch e'' ersetzt werden können, wenn man nur die Glieder dritter Ordnung in Betracht ziehen will.

Um nun die Gleichungen 4) auf integrable Formen hinzuführen, soll auf die in 4) auftretenden Producte die folgende allgemein giltige Transformationsformel angewendet werden: es ist nämlich:

$$uv = -\frac{\partial u}{\partial t}\int v\,\partial t + \frac{\partial}{\partial t}\left(u\int v\,\partial t\right). \qquad 5)$$

Man kann daher statt 4) schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial IV}{\partial t} &= e' - \frac{\partial IV}{\partial t}\int f'\,\partial t - \frac{\partial V}{\partial t}\int g'\,\partial t + \frac{\partial}{\partial t}\left(IV\int f'\partial t + V\int g'\,\partial t\right) \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= e'' - \frac{\partial IV}{\partial t}\int f''\partial t - \frac{\partial V}{\partial t}\int g''\partial t + \frac{\partial}{\partial t}\left(IV\int f''\partial t + V\int g''\partial t\right);\end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

da f', g', f'', g'' bekannte periodische Functionen der Zeit sind, die derartig beschaffen sind, dass sie durch die Integration auf Grössen erster, aber nicht niedrigerer Ordnung zurückgeführt werden, so werden die Gleichungen 6) leicht bis auf Grössen vierter Ordnung inclusive entwickelt werden können, da $\frac{\partial IV}{\partial t}$ und $\frac{\partial V}{\partial t}$ durch e' und e'' bis auf Grössen dritter Ordnung inclusive ersetzt werden können; es werden somit die Producte:

$$\frac{\partial IV}{\partial t}\int f'\partial t,\ \frac{\partial V}{\partial t}\int g'\,\partial t,\ \frac{\partial IV}{\partial t}\int f''\partial t,\ \frac{\partial V}{\partial t}\int g''\partial t$$

bis auf Grössen vierter Ordnung richtig bestimmt werden können. Gegen diesen Schluss könnten insoferne Bedenken erhoben werden, als in f', g', f'', g'' möglicherweise, was übrigens nicht der Fall ist, Glieder dritter Ordnung vorhanden sind, die bei der nothwendigen Integration, Divisoren zweiter Ordnung erhaltend, zu Gliedern erster Ordnung anwachsen und somit zu einer Reihe von Gliedern vierter Ordnung Veranlassung geben, die im obigen Resultate fehlen. Man könnte dieses Bedenken mit dem Bemerken zurückweisen, dass diese Glieder nur entstehen können aus Gliedern fünfter Ordnung in den Differentialgleichungen, die als solche nicht in Betracht gezogen sind, daher das Integrationsresultat ohne Rücksicht auf diese Glieder durch die Rückdifferentiation auf die Ausgangsgleichungen innerhalb der gesteckten Genauigkeitsgrenzen zurückführen muss. Wenn auch die Mitnahme dieser eben bemerkten Glieder im Falle ihres Vorhandenseins sich nicht allzuschwierig erweisen würde, da sich dieselben leicht in den für die weiteren Annäherungen nothwendigen vorbereitenden Entwicklungen herausfinden lassen, so hat man zu beachten, dass man dieselben doch mit voller Berechtigung ausser Acht lassen darf, da diese so entstehenden Glieder vierter Ordnung im ungünstigsten Falle durch die weitere Integration nur auf Glieder dritter Ordnung gebracht werden können, daher der Forderung, dass die erste Annäherung die Glieder zweiter Ordnung in den Integralen vollständig ergeben soll, nicht widersprechen. Man sieht leicht die Richtigkeit dieser Behauptung ein, wenn man sich für einen Augenblick die Entwicklung der Gleichungen 4) rechts vom Gleichheitszeichen als reine Functionen der Zeit geleistet vorstellt; da in diesem Falle nur eine einfache Integration nach der Zeit in Betracht käme, können alle Glieder fünfter Ordnung im ungünstigsten Falle, wenn Integrationsdivisoren zweiter Ordnung auftreten, zu Gliedern dritter Ordnung heranwachsen. Es mag übrigens gleich hier bemerkt werden, dass es sich für die Bequemlichkeit der Rechnung empfehlen würde, auch in der ersten Annäherung alle Glieder höherer Ordnung, die bekannt sind, in Rechnung zu ziehen, weil man dadurch eine grössere Anzahl von Gliedern höherer Ordnung, die hierbei in allerdings consequenter Weise übergangen werden könnten, schon bei der ersten Annäherung richtig erhält.

Setzt man in den Gleichungen 6) abkürzend:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial n_4}{\partial t} &= e' - \frac{\partial IV}{\partial t}\int f'\,\partial t - \frac{\partial V}{\partial t}\int g'\,\partial t \\ \frac{\partial n_5}{\partial t} &= e'' - \frac{\partial IV}{\partial t}\int f''\,\partial t - \frac{\partial V}{\partial t}\int g''\,\partial t, \end{aligned}\right\} \quad 7)$$

so kann man mit Rücksicht auf die obigen Bemerkungen die Behauptung aufstellen, dass diese Differentialquotienten in einer völlig ausreichenden Annäherung als Functionen der Zeit bekannt sind; integrirt man also die Gleichungen 6) und setzt:

$$\left.\begin{aligned} n_4 &= C_4 + \int\left(e' - \frac{\partial IV}{\partial t}\int f'\,\partial t - \frac{\partial V}{\partial t}\int g'\,\partial t\right)\partial t \\ n_5 &= C_5 + \int\left(e'' - \frac{\partial IV}{\partial t}\int f''\,\partial t - \frac{\partial V}{\partial t}\int g''\,\partial t\right)\partial t, \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

so erhält man sofort zur Bestimmung der Unbekannten die linearen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} IV &= n_4 + IV\int f'\,\partial t + V\int g'\,\partial t \\ V &= n_5 + IV\int f''\,\partial t + V\int g''\,\partial t. \end{aligned}\right\} \quad 9)$$

In Bezug auf die Integration der Gleichungen 8) wäre zu bemerken, dass, so lange die Säcularvariationen der Erdbahn nicht in Betracht gezogen werden, das Auftreten der Zeit als Factor ausserhalb der periodischen Functionen vermieden werden kann; der Ausdruck $\frac{\partial n_4}{\partial t}$ hat nämlich ein constantes Anfangsglied, welches in $\frac{\partial n_5}{\partial t}$ fehlt; die Integration des ersten Ausdruckes würde also in n_4 Glieder von der Form αt ergeben, welche weggeschafft werden müssen; dies lässt sich aber auch in der That leisten. Der Coëfficient, der dieses constante Glied zusammensetzt, enthält neben anderen völlig bestimmten Parametern die völlig willkürliche Grösse $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \Omega'$; man kann dieser Grösse demnach leicht einen solchen Werth ertheilen, dass das constante Glied verschwindet, und hat somit zwei Vortheile mit einem Schlage erreicht; die Glieder von der Form αt sind in n_4 verschwunden, und man ist zu einer Bestimmung der Knotenbewegung der Mondbahn gelangt. Hat man auf Säcularvariationen Rücksicht genommen, so treten in $\frac{\partial n_4}{\partial t}$ noch Glieder auf von der Form $\beta' t + \beta'' t^2 + \ldots$; diese Glieder wird man durch passende Wahl von Ω', welches selbst von der Form $k + k' t + k'' t^2 + \ldots$ ist, zum Verschwinden bringen, indem man $k' = -\beta'$, $k'' = -\beta''$, setzt und so auch die Bestimmung der Säcularvariation in der Knotenbewegung erhalten.

Die willkürlichen Integrationsconstanten C_4 und C_5 sind natürlich in einem gegebenen Falle völlig bestimmte Grössen, die aus den Beobachtungen abgeleitet werden müssen. Macht man daher eine Voraussetzung über die sechs Elemente der Mondbahn, die etwas von der Wahrheit abweicht, so könnte man die willkürlichen Integrationsconstanten, welche durch die späteren Entwicklungen in der That an Zahl sechs sich erweisen werden, in der analytischen Entwicklung zunächst unbestimmt lassend, durch die Beobachtungen so bestimmen, dass denselben möglichst genügt wird und würde so zu Mondtafeln gelangen, die theoretisch völlig correct sind, wenn auch die zu Grunde gelegten Elemente sich etwas fehlerhaft erweisen sollten. Man kann aber auch diese Integrationsconstanten in anderer Weise vortheilhafter verwerthen; stellt man sich vor, es seien die mittleren Elemente des Mondes genau gegeben, so frägt es sich zunächst um eine Definition der mittleren Elemente. Die Astronomen sind nicht völlig einig über diese Definition, und dieselbe bleibt auch innerhalb gewisser Grenzen ziemlich gleichgiltig, wenn man nur die Störungen der gewählten Definition gemäss bestimmt. Es soll hier als feste Definition angenommen werden, dass jene Elemente die mittleren seien, welche bewirken, dass in den Störungsausdrücken *I, II, III, IV, V* und *VI*, keine constanten Anfangsglieder auftreten. Dieser Bedingung gemäss sollen in Zukunft die Integrationsconstanten C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 und C_6 bestimmt werden; dieselben sind daher nicht mehr willkürlich, und die berechneten Störungsglieder werden nur dann genau sein, wenn in der That die so definirten Elemente für die Berechnung derselben gedient haben. Es ist aber immerhin denkbar, dass die der Rechnung zu Grunde gelegten Elemente in Verbindung mit den zugehörigen Störungswerthen eine nur mangelhafte Darstellung der Beobachtungen erreichen lassen, dass also die Elemente nicht genau waren; an sich gehen solche Fehler der Elemente in sehr vermindertem Masse auf die Störungsglieder über, so dass eine einfache Correction der Elemente selbst meist genügend sein wird, sollten sich aber erheblichere Correctionen herausstellen, so wird es bei der analytischen Form, in der die Störungsglieder nach dieser Methode erlangt werden können, ein Leichtes sein, die Abänderungen zu berücksichtigen; ja sogar schon bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen zwischen den Elementen und den Beobachtungen könnte auf die gleichzeitige Verbesserung der Störungscoëfficienten ohne grosse Schwierigkeit Rücksicht genommen werden.

Die Gleichungen 9) geben durch eine einfache lineare Elimination die Werthe der Unbekannten; um diese Elimination bei der Ausführung möglichst einfach zu gestalten, möge abkürzend gesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} a_4 &= 1 - \int f'\,\partial t\,, \qquad b_4 = \quad - \int g'\,\partial t \\ a_5 &= \quad - \int f''\,\partial t\,, \qquad b_5 = 1 - \int g''\,\partial t \\ 1:M &= a_4 b_5 - a_5 b_4 \\ N_4^4 &= b_5 M\,, \qquad N_5^4 = -b_4 M \\ N_5^5 &= a_4 M\,, \qquad N_4^5 = -a_5 M\,, \end{aligned}\right\} \quad 10)$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned} IV &= n_4 N_4^4 + n_5 N_5^4 \\ V &= n_4 N_4^5 + n_5 N_5^5\,, \end{aligned}\right\} \quad 11)$$

womit die gesuchte Lösung erreicht ist. In der ersten Annäherung also muss *IV* und *V* sicher richtig bestimmt sein bis auf Grössen zweiter Ordnung inclusive; ein grosser Theil der Glieder dritter und vierter Ordnung wird ebenfalls völlig genau erhalten werden, doch wird es immerhin möglich sein, dass ein oder das andere Glied dritter Ordnung fehlt.

Die Berechnung von $\frac{z^\circ}{a}$ hat nunmehr keine Schwierigkeit, es genügt für dieselbe, da nur Glieder zweiter Ordnung in diesem Falle mitgenommen werden, statt des strengen Ausdruckes nur den Näherungsausdruck:

$$\frac{z^\circ}{a} = -IV\cos(g+\omega) + V\sin(g+\omega)$$

in Anwendung zu ziehen; sohin stellt sich der Entwicklung der Gleichungen 3) (pag. 93) bis auf Grössen vierter Ordnung inclusive kein wesentliches Hinderniss entgegen.

Die drei Gleichungen 3) enthalten vier Unbekannte, es wird daher nur möglich sein, I, II und III als Functionen von VI darzustellen; um dies zu erreichen, soll die Reductionsformel 5) auf das letzte Glied einer jeden dieser Gleichungen angewendet werden; man erhält so:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial t} &= a' + b'_0\, I + c'_0\, II + d'_0\, III - \frac{\partial VI}{\partial t}\int h'\partial t + \frac{\partial}{\partial t}\Big(VI\int h'\partial t\Big)\\
\frac{\partial II}{\partial t} &= a'' + b''_0\, I + c''_0\, II + d''_0\, III - \frac{\partial VI}{\partial t}\int h''\partial t + \frac{\partial}{\partial t}\Big(VI\int h''\partial t\Big)\\
\frac{\partial III}{\partial t} &= a''' + b'''_0\, I + c'''_0\, II + d'''_0\, III - \frac{\partial VI}{\partial t}\int h'''\partial t + \frac{\partial}{\partial t}\Big(VI\int h'''\partial t\Big).
\end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

Differentiirt man die Gleichung 1) (pag. 92) nach der Zeit, so erhält man zunächst:

$$\frac{\partial M^\circ}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial VI}{\partial t};$$

aus dieser Gleichung lässt sich der Differentialquotient $\frac{\partial VI}{\partial t}$ leicht genug in der hier erforderlichen Annäherung bestimmen; es wird sich aber empfehlen, gleich hier die strengen Formen zu entwickeln, um bei den späteren Transformationen auf diese Entwicklungen nicht mehr zurückgreifen zu müssen.

$\frac{\partial g}{\partial t}$ wird, wenn man auch auf die Säcularvariationen Rücksicht nimmt, von der Form $m + m't + m''t^2 + \ldots$ sein; man hat also, wenn man der Gleichung 40) des vorangehenden Abschnittes entsprechend den Werth von $\frac{\partial M^\circ}{\partial t}$ einführt, und der Kürze halber:

$$R = m\{6I^2 - 4I\Gamma + \Gamma^2 - 10I^3 + 6I^2\Gamma - I\Gamma^2 + 15I^4 - 8I^3\Gamma + I^2\Gamma^2 + \ldots\} \qquad 13)$$

setzt, sofort:

$$\frac{\partial VI}{\partial t} = m(1 - 3I + 2\Gamma) + R - m - m't - m''t^2 + \ldots \qquad 14)$$

Die Entwicklung dieses Ausdruckes rechts vom Gleichheitszeichen wird zunächst ein constantes Anfangsglied ergeben, in dem sich aber auch die willkürliche Grösse μ', welche im 3. Abschnitte vor Aufstellung der Gleichungen 10) (pag. 75) eingeführt wurde, vorfindet; man wird μ' demnach so zu bestimmen haben, dass das constante Anfansglied verschwindet, es repräsentirt dann, wie dies in der Planetentheorie auch durchgeführt werden könnte, m den wahren Werth der mittleren Bewegung der mittleren Anomalie. Hat man aber auch auf die Säcularvariationen Rücksicht genommen, so werden Glieder von der Form $\beta't + \beta''t^2 + \ldots$ auftreten; man wird dann $m' = \beta'$, $m'' = \beta''$ u. s. f. setzen und hat dann einerseits die Säcularvariation in der mittleren Anomalie ermittelt und andererseits $\frac{\partial VI}{\partial t}$ von allen säcularen Gliedern befreit; es wird also:

$$\frac{\partial VI}{\partial t} = -3mI + 2m\frac{x^\circ}{a}II - 2m\frac{y^\circ}{a}III + R - m't - m''t^2 \ldots \qquad 15)$$

Bei der vorliegenden Anwendung wird es völlig genügen, sich auf die Mitnahme der ersten drei Glieder, welche jedes für sich zweiter Ordnung sind, zu beschränken, denn die h', h'' und h''' Functionen sind an sich zweiter Ordnung und erfahren durch die Integration keine Verminderung ihrer Ordnung, weil diese h Functionen durchaus aus Gliedern bestehen, die im Argumente M° enthalten; die Integrale sind daher selbst zweiter Ordnung, und deren Producte in dem obigen Ausdrucke von $\frac{\partial VI}{\partial t}$ werden daher für die übrigen Glieder fünfter und höherer Ordnung; aus demselben Grunde wird man mit genügender Annäherung bei dieser ersten Lösung:

$$\frac{x^\circ}{a} = \cos g \quad , \quad \frac{y^\circ}{a} = \sin g$$

setzen dürfen. Schreibt man daher abkürzend:

$$\left.\begin{aligned}
b' &= b'_0 + 3m\int h'\,\partial t\,, & c' &= c'_0 - 2m\cos g\int h'\,\partial t\,, & d' &= d'_0 + 2m\sin g\int h'\,\partial t \\
b'' &= b''_0 + 3m\int h''\,\partial t\,, & c'' &= c''_0 - 2m\cos g\int h''\,\partial t\,, & d'' &= d''_0 + 2m\sin g\int h''\,\partial t \\
b''' &= b'''_0 + 3m\int h'''\,\partial t\,, & c''' &= c'''_0 - 2m\cos g\int h'''\,\partial t\,, & d''' &= d'''_0 + 2m\sin g\int h'''\,\partial t\,;
\end{aligned}\right\} \quad 16)$$

so erhalten die Gleichungen 12) innerhalb der gesetzten Genauigkeitsgrenzen die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial t} &= a' + b'I + c'II + d'III + \frac{\partial}{\partial t}\left(VI\int h'\,\partial t\right) \\
\frac{\partial II}{\partial t} &= a'' + b''I + c''II + d''III + \frac{\partial}{\partial t}\left(VI\int h''\,\partial t\right) \\
\frac{\partial III}{\partial t} &= a''' + b'''I + c'''II + d'''III + \frac{\partial}{\partial t}\left(VI\int h'''\,\partial t\right).
\end{aligned}\right\} \quad 17)$$

In diesen Gleichungen sind a', a'', b', b'', c', c'' und d''' Summen von Sinusfunctionen ohne constante Anfangsglieder; die Coëfficienten a''', b''', c''', d' und d'' sind Cosinusfunctionen, deren constante Anfangsglieder dritter Ordnung sind; dieselben können also innerhalb der hier in Betracht gezogenen Näherungen ohne Bedenken fortgelassen werden. $\frac{\partial I}{\partial t}$, $\frac{\partial II}{\partial t}$ und $\frac{\partial III}{\partial t}$ sind Grössen zweiter Ordnung und durch a', a'', a''' bis auf Grössen dritter Ordnung inclusive richtig dargestellt. Wendet man wieder auf die Gleichungen 17) die Reductionsformel 5) (pag. 94) an, so erhalten dieselben die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial t} &= a' - \frac{\partial I}{\partial t}\int b'\,\partial t - \frac{\partial II}{\partial t}\int c'\,\partial t - \frac{\partial III}{\partial t}\int d'\,\partial t + \frac{\partial}{\partial t}\left\{I\int b'\,\partial t + II\int c'\,\partial t + III\int d'\,\partial t + VI\int h'\,\partial t\right\} \\
\frac{\partial II}{\partial t} &= a'' - \frac{\partial I}{\partial t}\int b''\,\partial t - \frac{\partial II}{\partial t}\int c''\,\partial t - \frac{\partial III}{\partial t}\int d''\,\partial t + \frac{\partial}{\partial t}\left\{I\int b''\,\partial t + II\int c''\,\partial t + III\int d''\,\partial t + VI\int h''\,\partial t\right\} \\
\frac{\partial III}{\partial t} &= a''' - \frac{\partial I}{\partial t}\int b'''\,\partial t - \frac{\partial II}{\partial t}\int c'''\,\partial t - \frac{\partial III}{\partial t}\int d'''\,\partial t + \frac{\partial}{\partial t}\left\{I\int b'''\,\partial t + II\int c'''\,\partial t + III\int d'''\,\partial t + VI\int h'''\,\partial t\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad 18)$$

Die Integrale von der Form $\int b\,\partial t$ sind alle zweiter Ordnung, die Integrale $\int c\,\partial t$ und $\int d\,\partial t$ erster Ordnung; man kann daher, ohne mehr als Glieder fünfter Ordnung zu übergehen, rechts vom Gleichheitszeichen $\frac{\partial I}{\partial t}$, $\frac{\partial II}{\partial t}$ und $\frac{\partial III}{\partial t}$ beziehungsweise durch a', a'' und a''' ersetzen. Will man diese Gleichungen völlig richtig innerhalb der Grössen vierter Ordnung haben, so müssten eigentlich die Integrale der b, c und d-Grössen auf Grössen zweiter Ordnung inclusive genau bekannt sein; beschränkt man sich aber nur auf jene Glieder allein, welche man erhält, wenn man in den ursprünglichen Differentialgleichungen alle Glieder fünfter Ordnung weglässt, so wird dieser Forderung nicht genügt; die hieraus entstehenden Bedenken sind ähnlicher Natur, wie dieselben oben bei der Betrachtung der Gleichungen 6) erhoben und daselbst beseitigt wurden; es wird aber auch hier keine Schwierigkeit haben durch ähnliche Schlussfolgen die Bedenken zu beheben. Da aber die Mitnahme der hiezu erforderlichen Glieder keine Schwierigkeit darbietet, so wird man, wenn es gerade auch nicht nöthig ist, dieselben mitnehmen, um sofort in der ersten Annäherung einige Glieder höherer Ordnung richtig zu finden, die sonst wohl erst in den folgenden Annäherungen erlangt würden.

Hieran wird man aber eine für die Folge nicht unwichtige Bemerkung knüpfen können: die Glieder in c' und d' können bei der Integration höchstens um eine Ordnung herabgesetzt werden; man erhält daher auch, wenn man die höheren Glieder fortlässt, in den zu a' hinzutretenden Gliedern jedenfalls die Glieder dritter Ordnung richtig; die nochmalige Integration, um I zu erhalten, kann aber in Folge der auftretenden Verbindungen niemals die etwa in diesen Ausdrücken fehlenden Glieder vierter Ordnung um eine weitere Ordnung herabsetzen; das Integral I wird daher in der ersten Annäherung stets richtig erhalten auf alle Glieder dritter Ordnung inclusive. Um VI bilden zu können, ist die nochmalige Integration von I erforderlich; bei dieser wieder treten niemals kleinere Integrationsdivisoren auf als erster Ordnung; es wird daher selbst im ungünstigsten Falle in VI kein Fehler zweiter Ordnung zu befürchten sein.

Setzt man also ähnlich wie früher mit C_1, C_2 und C_3 die willkürlichen Integrationsconstanten bezeichnend:

$$\left.\begin{aligned}
n_1 &= C_1 + \int\left(a' - \frac{\partial I}{\partial t}\int b'\,\partial t - \frac{\partial II}{\partial t}\int c'\,\partial t - \frac{\partial III}{\partial t}\int d'\,\partial t\right)\partial t \\
n_2 &= C_2 + \int\left(a'' - \frac{\partial I}{\partial t}\int b''\,\partial t - \frac{\partial II}{\partial t}\int c''\,\partial t - \frac{\partial III}{\partial t}\int d''\,\partial t\right)\partial t \\
n_3 &= C_3 + \int\left(a''' - \frac{\partial I}{\partial t}\int b'''\,\partial t - \frac{\partial II}{\partial t}\int c'''\,\partial t - \frac{\partial III}{\partial t}\int d'''\,\partial t\right)\partial t,
\end{aligned}\right\} \quad 19)$$

so erhalten die Gleichungen 18) nach deren Integration die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
I &= n_1 + I\int b'\,\partial t + II\int c'\,\partial t + III\int d'\,\partial t + VI\int h'\,\partial t \\
II &= n_2 + I\int b''\,\partial t + II\int c''\,\partial t + III\int d''\,\partial t + VI\int h''\,\partial t \\
III &= n_3 + I\int b'''\,\partial t + II\int c'''\,\partial t + III\int d'''\,\partial t + VI\int h'''\,\partial t.
\end{aligned}\right\} \quad 20)$$

An die Integrale n_1, n_2 und n_3 wären die folgenden Bemerkungen zu knüpfen: $\frac{\partial n_1}{\partial t}$ und $\frac{\partial n_3}{\partial t}$ als Sinusfunctionen enthalten kein constantes Anfangsglied, wohl aber $\frac{\partial n_2}{\partial t}$; in diesem selbst tritt aber die Grösse $\frac{\partial \omega}{\partial t} = \omega'$ zum Vorschein; man wird dieselbe so bestimmen, dass das constante Anfangsglied verschwindet; man erreicht damit zunächst, dass die Zeit nicht ausserhalb der Argumente als Factor auftritt, so lange keine Säcularvariationen in Betracht gezogen werden, und erlangt überdies eine Bestimmung der Bewegung des Perigäumabstandes vom Knoten; hat man jedoch Säcularvariationen mit in Rechnung gebracht, so treten ausserdem Glieder von der Form: $\beta' t + \beta'' t^2 + \ldots$ auf, ω' ist selbst aber von der Form $\omega + \omega' t + \omega'' t + \ldots$, man wird daher ω', ω'' so zu wählen haben, dass die mit t und t^2 multiplicirten Glieder verschwinden, und wird so eine Bestimmung der Säcularvariationen dieser Grösse erlangen.

Um nun die Elimination der Unbekannten in den Gleichungen 20) in übersichtlicher Weise su erhalten, möge abkürzend geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1 = 1 - \int b'\,\partial t\,, \quad b_1 = -\int c'\,\partial t\,, \quad c_1 = -\int d'\,\partial t \\
&a_2 = -\int b''\,\partial t\,, \quad b_2 = 1 - \int c''\,\partial t\,, \quad c_2 = -\int d''\,\partial t \\
&a_3 = -\int b'''\,\partial t\,, \quad b_3 = -\int c'''\,\partial t\,, \quad c_3 = 1 - \int d'''\,\partial t \\
&1 : N = a_1[b_2 c_3 - b_3 c_2] + a_2[b_3 c_1 - b_1 c_3] + a_3[b_1 c_2 - b_2 c_1] \\
&N_1^1 = [b_2 c_3 - b_3 c_2]N\,, \quad N_1^2 = [a_3 c_2 - a_2 c_3]N\,, \quad N_1^3 = [a_2 b_3 - a_3 b_2]N \\
&N_2^1 = [b_3 c_1 - b_1 c_3]N\,, \quad N_2^2 = [a_1 c_3 - a_3 c_1]N\,, \quad N_2^3 = [a_3 b_1 - a_1 b_3]N \\
&N_3^1 = [b_1 c_2 - b_2 c_1]N\,, \quad N_3^2 = [a_2 c_1 - a_1 c_2]N\,, \quad N_3^3 = [a_1 b_2 - a_2 b_1]N,
\end{aligned}\right\} \quad 21)$$

setzt man überdies:

$$\left.\begin{aligned}
A' &= n_1 N_1^1 + n_2 N_2^1 + n_3 N_3^1\,, \quad & B' &= N_1^1\int h'\,\partial t + N_2^1\int h''\,\partial t + N_3^1\int h'''\,\partial t \\
A'' &= n_1 N_1^2 + n_2 N_2^2 + n_3 N_3^2\,, \quad & B'' &= N_1^2\int h'\,\partial t + N_2^2\int h''\,\partial t + N_3^2\int h'''\,\partial t \\
A''' &= n_1 N_1^3 + n_2 N_2^3 + n_3 N_3^3\,, \quad & B''' &= N_1^3\int h'\,\partial t + N_2^3\int h''\,\partial t + N_3^3\int h'''\,\partial t\,,
\end{aligned}\right\} \quad 22)$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned} I &= A' + B' VI \\ II &= A'' + B'' VI \\ III &= A''' + B''' VI, \end{aligned}\right\} \quad 23)$$

womit I, II und III durch bekannte Glieder und durch die vorläufig noch Unbekannte VI ausreichend genau bestimmt erscheinen; die B-Glieder sind, wie dies die oben gemachten Bemerkungen über die Integrale von h darthun, nothwendig zweiter Ordnung, es sind also I, II und III durch A', A'' und A''' allein, abgesehen von den Fehlern in der Bestimmung der A-Grössen selbst, die in einigen Gliedern von A'' und A''' möglicherweise dritter Ordnung sein können, bis auf Grössen dritter Ordnung inclusive richtig bestimmt; an sich sind die Grössen zweiter Ordnung in I, II und III daher völlig bekannt; mit diesen Gliedern allein erhält man Γ genau bis auf Grössen zweiter Ordnung inclusive durch:

$$\Gamma = \cos g\, II - \sin g\, III$$

und kann die ersten 3 Glieder vierter Ordnung in R (vergl. 13) (pag. 97) mit adäquater Genauigkeit bestimmen; man kann daher in der Gleichung:

$$\frac{\partial VI}{\partial t} = -3mI + 2m\frac{x^\circ}{a} II - 2m\frac{y^\circ}{a} III + R - m't - m''t^2 \quad 24)$$

R in genügender Annäherung als bekannt voraussetzen; die Factoren $\frac{x^\circ}{a}$ und $\frac{y^\circ}{a}$ bieten aber noch eine Schwierigkeit; da $\frac{x^\circ}{a}$ und $\frac{y^\circ}{a}$ bis auf Grössen zweiter Ordnung inclusive richtig hingeschrieben werden müssen, so wird man in der ersten Annäherung hiefür mindestens zu setzen haben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^\circ}{a} &= \frac{1}{8}e^2\cos(-g) - \frac{3}{2}e + \left(1-\frac{1}{2}e^2\right)\cos g + \frac{1}{2}e\cos 2g + \frac{3}{8}e^2\cos 3g + VI\sin(-g) \\ \frac{y^\circ}{a} &= \frac{1}{8}e^2\sin(-g) \qquad\quad + \left(1-\frac{1}{2}e^2\right)\sin g + \frac{1}{2}e\sin 2g + \frac{3}{8}e^2\sin 3g + VI\cos(-g). \end{aligned}\right\} \quad 25)$$

Schreibt man die vorstehenden Reihen der Kürze halber:

$$\frac{x^\circ}{a} = \frac{(x)}{a} + VI\sin(-g)$$

$$\frac{y^\circ}{a} = \frac{(y)}{a} + VI\cos(-g),$$

und bezeichnet mit R' den Factor von VI, welcher aus den Producten der letzten Glieder in die, durch die vorangehenden Entwicklungen bekannten, in II und III enthaltenen Glieder entsteht, so erhält die Gleichung 24) die Gestalt:

$$\frac{\partial VI}{\partial t} = -3mI + 2m\frac{(x)}{a} II - 2m\frac{(y)}{a} III + R + R' VI - m't - m''t^2 \ldots \quad 26)$$

Substituirt man nun die Werthe von I, II und III aus 23) und setzt abkürzend:

$$\left.\begin{aligned} A &= -3mA' + 2m\frac{(x)}{a}A'' - 2m\frac{(y)}{a}A''' + R - m't - m''t \ldots \\ B &= -3mB' + 2m\frac{(x)}{a}B'' - 2m\frac{(y)}{a}B''' + R', \end{aligned}\right\} \quad 27)$$

so wird die Differentialgleichung für die Bestimmung von VI die einfache Gestalt:

$$\frac{\partial VI}{\partial t} = A + B\,VI \quad 28)$$

annehmen, deren Integral aber leicht:

$$VI = e^{\int B\partial t}\left\{C_6 + \int e^{-\int B\partial t} A\,\partial t\right\} \tag{29)}$$

gefunden wird, wenn durch e die Basis der natürlichen Logarithmen vorgestellt ist. Das A-Glied ist durch eine Cosinusreihe mit constantem Anfangsgliede gebildet und enthält, wenn man auf Säcularstörungen Rücksicht nimmt, Glieder von der Form $\beta' t + \beta'' t^2 + \ldots$, die durch passende Wahl von m' und m'' zum Verschwinden gebracht werden könnten, doch wird es gebothen sein, diese Bestimmung erst in dem Ausdrucke $e^{-\int B\partial t} A\,\partial t$ vorzunehmen, welcher Ausdruck ganz ähnlich gebaut ist; B ist durch eine Sinusreihe ohne constantes Glied dargestellt; man bildet daher zunächst:

$$Ae^{-\int B\partial t} = A - A\int B\partial t + \frac{A}{1.2}\left(\int B\partial t\right)^2 - \frac{A}{1.2.3}\left(\int B\partial t\right)^3 + \ldots \tag{30)}$$

und wird durch passende Wahl von μ', m' und m'' das constante Anfangsglied und die Säcularglieder fortschaffen. C_6 wird der Definition der mittleren Elemente nach der Null gleich zu setzen sein, da für VI kein constantes Anfangsglied zum Vorschein kommen wird.

Es könnte schliesslich auf das Bedenken nochmals aufmerksam gemacht werden, dass durch diese letzte Integration in Verbindung mit den früheren vielleicht Quadrate der kleinen Integrationsdivisoren zweiter Ordnung auftreten können, welche die ganze Annäherung in Frage stellen. Man wird aber leicht sehen, dass nur eine Doppelintegration die mit I multiplicirten Glieder trifft, die höchstens die Quadrate der Integrationsdivisoren erster Ordnung erhalten, also, da die Glieder vierter Ordnung mitgenommen sind, in den ursprünglichen Differentialgleichungen höchstens Fehler dritter Ordnung veranlassen; die von Γ abhängigen Glieder erhalten in Folge der Multiplication mit $\frac{x^\circ}{a}$ und $\frac{y^\circ}{a}$ vor der Integration im Allgemeinen andere Argumente, es können daher nur in jenen Gliedern, die aus dem constanten Anfangsgliede in $\frac{x^\circ}{a}$, nämlich aus dem Producte mit $-\frac{3}{2}e$ entstehen, Quadrate der Integrationsdivisoren vorkommen; einerseits erfolgt also durch die Multiplication mit e eine Verkleinerung dieser Glieder, da sich die Ordnung um eine Einheit vergrössert, andererseits heben sich in dem Differentialquotienten von VI diese Glieder mit analogen, in I auftretenden vor der Integration weg, so dass auch hieraus kein Nachtheil entsteht; jedenfalls aber, und das ist das wesentliche, werden durch die hier zum Vortrag gebrachte Integrationsmethode Werthe von I, II, III, IV, V und VI erhalten, die in die ursprünglichen Differentialgleichungen substituirt, diese bis auf Grössen vierter Ordnung inclusive erfüllen.

Bei der thatsächlichen Anwendung wird es vortheilhaft sein, die hier auseinandergesetzten Vorschriften in etwas zu modificiren, und zwar wird es sich empfehlen, schon bei der ersten Annäherung alle bekannten Glieder mitzunehmen, die überhaupt innerhalb der Grenze liegen, bis zu welcher man die schliessliche Annäherung bringen will, wenn auch die vorerst unbekannten Glieder, die in der betreffenden Annäherung fortgelassen werden müssen, diese Grenze wesentlich überschreiten; man erhält zwar dadurch theoretisch keine grössere Genauigkeit in dem Gesammtresultate, doch wird man dadurch die Arbeit für die folgenden Annäherungen um ein Wesentliches vereinfachen, indem die so durchgeführte erste Annäherung eine grosse Anzahl von Gliedern höherer Ordnung sofort richtig finden lassen wird.

Es soll nun zum Schlusse dieses Abschnittes kurz hingewiesen werden, in welcher Weise man die obige Methode der Zerlegung des Integrales VI verwerthen kann, um die gegenseitigen Störungen zweier Planeten auf einander sofort auf zweite Potenzen der Masse inclusive zu bestimmen. Lässt man die Breitenstörungen deren Mitnahme kein irgendwie erhebliches Hinderniss bei der thatsächlichen Anwendung bereiten würde, hier der Kürze halber fort, so lassen sich offenbar die Differentialgleichungen für die beiden Planeten in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = a' + b'I + c'II + d'III + h'VI + i'I_1 + k'II_1 + l'III_1 + m'VI_1$$

$$\frac{\partial II}{\partial t} = a'' + b''I + c''II + d''III + h''VI + i''I_1 + k''II_1 + l''III_1 + m''VI_1$$

$$\frac{\partial III}{\partial t} = a''' + b'''I + c'''II + d'''III + h'''VI + i'''I_1 + k'''II_1 + l'''III_1 + m'''VI_1$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = a'_1 + b'_1 I + c'_1 II + d'_1 III + h'_1 VI + i'_1 I_1 + k'_1 II_1 + l'_1 III_1 + m'_1 VI_1$$

$$\frac{\partial II_1}{\partial t} = a''_1 + b''_1 I + c''_1 II + d''_1 III + h''_1 VI + i''_1 I_1 + k''_1 II_1 + l''_1 III_1 + m''_1 VI_1$$

$$\frac{\partial III_1}{\partial t} = a'''_1 + b'''_1 I + c'''_1 II + d'''_1 III + h'''_1 VI + i'''_1 I_1 + k'''_1 II_1 + l'''_1 III_1 + m'''_1 VI_1 .$$

In allen diesen Ausdrücken sind die a, b, c-Coëfficienten völlig bekannte Functionen der Zeit mit der ersten Potenz der Masse multiplicirt; man erhält daher alle Glieder bis auf die zweite Potenz der Masse inclusive richtig, wenn man rechts vom Gleichheitszeichen setzt:

$$I = \int a' \partial t\,, \quad II = \int a'' \partial t \text{ u. s. f.}.$$

Ehe man diese Substitution ausführt, zerlegt man aber die Formel 5) entsprechend $h\,VI$ und $m\,VI_1$ in:

$$-\frac{\partial VI}{\partial t}\int h\partial t + \frac{\partial}{\partial t}\left(VI\int h\partial t\right)\,, \quad -\frac{\partial VI_1}{\partial t}\int m\partial t + \frac{\partial}{\partial t}\left(VI_1\int m\partial t\right),$$

ersetzt die Differentialquotienten $\frac{\partial VI}{\partial t}$ und $\frac{\partial VI_1}{\partial t}$ bis auf Grössen von der ersten Potenz der Masse genau durch:

$$\frac{\partial VI}{\partial t} = -3\mu\, I + 2\mu\,\frac{x^0}{a} II - 2\mu\frac{y^0}{a} III$$

$$\frac{\partial VI_1}{\partial t} = -3\mu_1 I_1 + 2\mu_1\frac{x^0_1}{a_1} II_1 - 2\mu_1\frac{y^0_1}{a_1} III_1\,,$$

verbindet die so entstehenden Producte mit den entsprechenden der obigen Gleichungen, und führt hierauf die Integrale I, II, III etc. durch die obigen Näherungen $I = \int a'\partial t$, $II = \int a''\partial t \ldots$ ein; so gelangt man bis auf Grössen von der zweiten Potenz der Masse inclusive genau zu den Formen:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial A'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(VI\int h'\partial t + VI_1\int m'\,\partial t\right)$$

$$\frac{\partial II}{\partial t} = \frac{\partial A''}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(VI\int h''\partial t + VI_1\int m''\partial t\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots$$

Die Integration ergibt sofort:

$$I = A' + VI\int h'\,\partial t + VI_1\int m'\,\partial t$$

$$II = A'' + VI\int h''\partial t + VI_1\int m''\partial t$$

$$\vdots \quad \vdots$$

und man erhält schliesslich durch Substitution dieser Integrale in die bezüglichen Differentialquotienten zur Bestimmung von VI und VI_1 Formen, die ebenfalls alle Glieder von der zweiten Potenz der Masse vollständig enthalten, nämlich:

$$\frac{\partial VI}{\partial t} = a + b\,VI + c\,VI_1 = a + b\int a\,\partial t + c\int a_1\,\partial t$$

$$\frac{\partial VI_1}{\partial t} = a_1 + b_1\,VI + c_1\,VI_1 = a_1 + b_1\int a\,\partial t + c\int a_1\,\partial t.$$

Ich begnüge mich mit diesen Hinweisen, in welcher Art die obigen Gleichungen bei dem Planetenproblem in Verwendung gezogen werden können.

8. Das Integrationsverfahren für die folgenden Annäherungen.

Bei der ersten Integration musste eine Anzahl von Gliedern höherer Ordnung als Unbekannte von der Rechnung ausgeschlossen werden; nach Massgabe der erlangten Näherung wird nun die Berechnung derselben ohne Schwierigkeit nachgetragen werden können; denkt man sich dieselben für alle Differentialquotienten in gleicher Weise mit dem jeweiligen ersten Gliede vereinigt, so wird man für die Differentialquotienten der Elemente Ausdrücke erhalten, welche sich der Form nach nicht von jenen der ersten Annäherung unterscheiden werden; man erhält so, wenn man den Zuwachs durch das Symbol Δ kennzeichnet, Ausdrücke von der Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial IV}{\partial t} &= (e' + \Delta e') + f'\,IV' + g'\,V \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= (e'' + \Delta e'') + f''\,IV + g''\,V. \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} &= (a' + \Delta a'_0) + b'_0\,I + c'_0\,II + d'_0\,III + h'\,VI \\ \frac{\partial II}{\partial t} &= (a'' + \Delta a''_0) + b''_0\,I + c''_0\,II + d''_0\,III + h''\,VI \\ \frac{\partial III}{\partial t} &= (a''' + \Delta a'''_0) + b'''_0\,I + c'''_0\,II + d'''_0\,III + h'''\,VI. \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Substituirt man in dieselben rechts vom Gleichheitszeichen für die Integrale die Werthe der vorangehenden Annäherung, die für I, II und III aus der Gleichung 23) (pag. 100) des vorangehenden Abschnittes erhalten werden, wenn man den bekannten Werth von VI substituirt, so gelangt man zu Ausdrücken für die Differentialquotienten, die zum mindesten um eine Ordnung genauer sein werden als jene, die man in der vorangehenden Annäherung benützen konnte; wird dieser Zuwachs für jeden der Differentialquotienten beziehungsweise durch

$$\Delta\frac{\partial I}{\partial t},\ \Delta\frac{\partial II}{\partial t},\ \Delta\frac{\partial III}{\partial t},\ \Delta\frac{\partial IV}{\partial t},\ \Delta\frac{\partial V}{\partial t}$$

bezeichnet, so wird zunächst für die Verbesserung der Breitenstörungen zu rechnen sein:

$$\left.\begin{aligned} \Delta n_4 &= \int\left(\Delta e' - \Delta\frac{\partial IV}{\partial t}\int f'\,\partial t - \Delta\frac{\partial V}{\partial t}\int g'\,\partial t\right)\partial t \\ \Delta n_5 &= \int\left(\Delta e'' - \Delta\frac{\partial IV}{\partial t}\int f''\,\partial t - \Delta\frac{\partial V}{\partial t}\int g''\,\partial t\right)\partial t \\ \Delta IV &= \Delta n_4\,N^4_4 + \Delta n_5\,N^4_5 \\ \Delta V &= \Delta n_5\,N^5_5 + \Delta n_4\,N^5_4. \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Indem man in den f', g', f'' und g'' Grössen nichts ändert, kann der Theil der Rechnung, welcher von diesen Factoren abhängig ist, ein für allemal durchgeführt werden.

Ganz ähnlich wird man bei der Integration des Gleichungssystems 2) vorgehen; indem man zunächst die Zerlegung von $h\,VI$ in bekannter Weise in der Form:

$$-\frac{\partial VI}{\partial t}\int h\,\partial t + \frac{\partial}{\partial t}\left(VI\int h\,\partial t\right)$$

durchführt, wird die Substitution des Werthes $\frac{\partial VI}{\partial t}$ ähnlich wie früher durch die Gleichung 15) (pag. 97) des vorangehenden Abschnittes erfolgen, nur dass die vorhandenen Näherungen eine genauere Ermittlung gestatten werden; bezeichnet man den Überschuss, den dieser genauere Werth gegen jenen, welcher in der vorangehenden Annäherung verwendet wurde, ergibt, mit $\Delta\frac{\partial VI}{\partial t}$, zieht die so erhaltenen Incremente:

$$-\Delta\frac{\partial VI}{\partial t}\int h'\partial t,\quad -\Delta\frac{\partial VI}{\partial t}\int h''\partial t,\quad -\Delta\frac{\partial VI}{\partial t}\int h'''\partial t \tag{4}$$

zu den Incrementen $\Delta a'_0$, $\Delta a''_0$ und $\Delta a'''_0$ hiezu und bezeichnet diese Verbesserungen in Kürze mit $\Delta a'$, $\Delta a''$ und $\Delta a'''$, so erhalten die Gleichungen die Gestalt (vergl. 17, pag. 98 des vorangehenden Abschnittes):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial t} &= (a'+\Delta a')+b'I+c'II+d'III+\frac{\partial}{\partial t}\left(VI\textstyle\int h'\,\partial t\right)\\
\frac{\partial II}{\partial t} &= (a''+\Delta a'')+b''I+c''II+d''III+\frac{\partial}{\partial t}\left(VI\textstyle\int h''\,\partial t\right)\\
\frac{\partial III}{\partial t} &= (a'''+\Delta a''')+b'''I+c'''II+d'''III+\frac{\partial}{\partial t}\left(VI\textstyle\int h'''\,\partial t\right).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Man hat dann:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta n_1 &= \int\left(\Delta a'-\Delta\frac{\partial I}{\partial t}\int b'\,\partial t-\Delta\frac{\partial II}{\partial t}\int c'\,\partial t-\Delta\frac{\partial III}{\partial t}\int d'\,\partial t\right)\partial t\\
\Delta n_2 &= \int\left(\Delta a''-\Delta\frac{\partial I}{\partial t}\int b''\,\partial t-\Delta\frac{\partial II}{\partial t}\int c''\,\partial t-\Delta\frac{\partial III}{\partial t}\int d''\,\partial t\right)\partial t\\
\Delta n_3 &= \int\left(\Delta a'''-\Delta\frac{\partial I}{\partial t}\int b'''\,\partial t-\Delta\frac{\partial II}{\partial t}\int c'''\,\partial t-\Delta\frac{\partial III}{\partial t}\int d'''\,\partial t\right)\partial t,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

und es wird:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta A' &= N_1^1\Delta n_1+N_2^1\Delta n_2+N_3^1\Delta n_3\\
\Delta A'' &= N_1^2\Delta n_1+N_2^2\Delta n_2+N_3^2\Delta n_3\\
\Delta A''' &= N_1^3\Delta n_1+N_2^3\Delta n_2+N_3^3\Delta n_3,
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

während B', B'' und B''' der Voraussetzung noch unverändert bleiben. Um nun den Übergang auf die Gleichung 28) (pag. 100) des vorangehenden Abschnittes zu machen, wird man zu beachten haben, dass einerseits A ein Increment erhält durch die Zuwächse $\Delta A'$, $\Delta A''$ und $\Delta A'''$ und durch diejenigen in R, welch' letztere mit ΔR bezeichnet werden mögen, anderseits aber auch B einen Zuwachs erhält durch die Einsetzung des genaueren Werthes von R'; diesen Zuwachs kann man sich, wenn man den Werth von VI aus der vorangehenden Näherung benützt, zu A geschlagen denken und erhält so:

$$\Delta A = -3m\Delta A'+2m\frac{((x))}{a}\Delta A''-2m\frac{((y))}{a}\Delta A'''+\Delta R+VI.\Delta R' \tag{8}$$

und hat jetzt die Schlussgleichung:

$$\frac{\partial VI}{\partial t} = (A+\Delta A)+B\,VI, \tag{9}$$

in welcher B wieder ein für allemal dieselbe Bedeutung erhält.

Durch die Integration dieser Gleichung findet diese Annäherung ihren Abschluss, und man kann, wenn es wünschenswerth erscheint, in ganz analoger Weise zur Erreichung einer weiteren Annäherung schreiten und dieses Verfahren so lange fortsetzen, bis man die vorgesteckte Genauigkeitsgrenze erreicht hat.

Das hier vorgeschlagene Näherungsverfahren erscheint mir für die Rechnung ziemlich vortheilhaft zu sein, doch wird man je nach Wunsch dasselbe modificiren können, und es wird sogar für die Convergenz der Näherungen empfehlenswerth sein, gleich bei der ersten Annäherung eine kleine Modification des in Vorschlag gebrachten Verfahrens eintreten zu lassen. Es sind nämlich die constanten Anfangsglieder in den Ausdrücken c''' und d'' (vergl. den Text nach 17), pag. 98) zwar in der That theoretisch dritter Ordnung, wachsen aber in der Mondtheorie zu so grossen Beträgen an, dass dieselben fast den Gliedern zweiter Ordnung an Grösse gleichkommen; würden dieselben in der That zweiter Ordnung sein, so wäre die Convergenz für jene Glieder, welche Integrationsdivisoren zweiter Ordnung erhalten, in Frage gestellt; in dem vorliegenden Falle erscheint somit die Convergenz vermindert. Man kann aber leicht die genannten constanten Anfangsglieder auf Glieder vierter Ordnung herabbringen; setzt man nämlich in den Gleichungen 18), p. 98 rechts vom Gleichheitszeichen für die Differentialquotienten der Elemente *I*, *II* und *III* nach 3), p. 93 ein, so erhält man zunächst Glieder, die theils völlig bekannt sind, theils die unbekannten Elemente enthalten; auf diese Gleichungen wendet man nun ein ganz ähnliches Integrationsverfahren an wie früher, indem man zunächst die Producte in das Element *VI*, analog wie früher, zerlegt, und dann, nachdem dies durchgeführt ist, die Producte in *I*, *II* und *III* ähnlich behandelt; die bei diesen Operationen auftretenden neuen constanten Factoren vereinigen sich mit jenen, in c''' und d'' vorhandenen, in der That in der Weise, dass die übrig bleibenden constanten Antheile vierter Ordnung werden.

Ich begnüge mich hier mit diesen Hinweisen, da in der vorliegenden Abhandlung die Methode der Behandlung des Mondproblems nur in allgemeinen Umrissen zur Darstellung gebracht werden sollte.