ÜBER DEN ZUSAMMENHANG

ZWISCHEN

DEN VOLLSTÄNDIGEN INTEGRALEN UND DER ALLGEMEINEN LÖSUNG

BEI

PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG.

VON

DR. VICTOR SERSAWY,

PRIVATDOCENT FÜR MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT IN WIEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 18. MÄRZ 1886.

Die vorliegende Abhandlung enthält eine allgemeine Methode, um aus einem bekannten vollständigen Integrale einer gegebenen Differentialgleichung die allgemeine Lösung derselben abzuleiten. Die Formeln, welche zu diesem Zwecke Lagrange aufgestellt hat, sind unzureichend und, soweit meine Kenntniss reicht, auch noch nirgends zweckmässig erweitert worden. Ergänzt man sie aber in der hier angegebenen Weise, so stimmt das vervollständigte System mit gewissen Formeln der allgemeinen Integration überein und es ist möglich, dieselben zur Auffindung der allgemeinen Lösung zu verwenden. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich bereits, dass die vorliegende Arbeit mit meiner Abhandlung: „Die Integration der partiellen Differentialgleichungen. Grundlinien einer allgemeinen Integrationsmethode von Dr. Victor Sersawy, enthalten im XLIX. Bande der Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, 1884" durchgängig im engsten Zusammenhange steht und dass die vorliegende Abhandlung sich überall auf die dort gefundenen Resultate stützt. Da sonach der Inhalt dieser Abhandlung als bekannt vorausgesetzt werden muss, sind hier überall die Begriffe und Bezeichnungen derselben ohne weitere Erklärung wieder benützt worden, und muss bezüglich dieser und der Einzelnheiten bei den Schlussfolgerungen auf die vorgenannte Abhandlung verwiesen werden.

Um bei den zahlreichen Citaten eine kurze Bezeichnung verwenden zu können, ist die besagte Abhandlung über die Integration der partiellen Differentialgleichungen stets durch den Buchstaben (*A*.) bezeichnet worden.

Erster Abschnitt.

Die Probleme mit zwei Independenten.

1.

Wenn von einer partiellen Differentialgleichung:

$$0=\varphi[x, y;\ (0,0);\ (10), (0,1); \ldots;\ (p, o), \ldots,\ (o, p)] \tag{1}$$

eine Lösung mit willkürlichen Parametern bekannt ist:

$$z=(0,0)=\vartheta\,(x, y, c_1, c_2, \ldots c_\nu), \tag{2}$$

— worin $c_1, c_2, \ldots c_\nu$ die willkürlichen Parameter bedeuten und ν die vorläufig nicht näher bestimmte Anzahl derselben ist —, so kann man nach einer bekannten Schlussweise eine allgemeinere Lösung ableiten, indem man die Parameter als Functionen von x und y ansieht und sie so bestimmt, dass die Ableitungen der Lösung, als Functionen der Independenten und der Parameter angesehen, der Form nach ungeändert bleiben. Dies ist der Fall, wenn gleichzeitig:

$$o=\sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial\,(\alpha, \beta)}{\partial c_i}\frac{\partial c_i}{\partial x}, \quad o=\sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial\,(\alpha, \beta)}{\partial c_i}\frac{\partial c_i}{\partial y} \tag{3}$$

und zwar für alle α und β, welche der Bedingung

$$\alpha+\beta \leqq p-1$$

Genüge leisten. Denn dann bleiben diejenigen Ableitungen von z, welche in der gegebenen Differentialgleichung auftreten, der Form nach unverändert und z ist so wie früher eine Lösung des gegebenen Problemes (1).

Die Gleichungen (3) sind indess nicht die einzigen, denen die Grössen c genügen müssen. Indem nämlich aus diesen Gleichungen nicht die c selbst, sondern nur deren Ableitungen nach x und y erhalten werden, müssen noch Bedingungsgleichungen hinzugefügt werden, deren Erfüllung bewirkt, dass die für

$$\frac{\partial c_i}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial c_i}{\partial y} \quad (i=1, 2, \ldots \nu)$$

erhaltenen Ausdrücke sich in der That als Ableitungen je einer und derselben Function c_i darstellen lassen. Diese Bedingungen sind enthalten in den Relationen:

$$o=\sum_{i=1}^{i=\nu}\left\{\frac{\partial\,(\alpha, \beta+1)}{\partial c_i}\frac{\partial c_i}{\partial x}-\frac{\partial\,(\alpha+1, \beta)}{\partial c_i}\frac{\partial c_i}{\partial y}\right\}, \tag{4}$$

in welchen, wie oben,

$$\alpha+\beta \leqq p-1$$

zu halten ist. Es ist aber sofort ersichtlich, dass für alle α und β, für welche

$$\alpha+\beta+1 \leqq p-1,$$

die Gleichungen (4) vermöge der (3) identisch erfüllt sind. Die ersteren fügen also den (3) nur für

$$\alpha+\beta = p-1$$

neue Bedingungen an. Man erhält sonach soviel Integrabilitätsbedingungen als Ableitungen $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung vorhanden sind, das ist p und damit stellt sich die Gesammtzahl der Bedingungen, denen die c genügen müssen, auf

$$\binom{p+1}{2}+p = \binom{p+2}{2}-1.$$

Die Gleichungen (3) und (4) erhalten eine allgemeinere Form, wenn man für x und y neue Variable substituirt. Bezeichnen wir dieselben durch f und h, so dass

$$\frac{\partial c_i}{\partial f} = \frac{\partial c_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial f}+\frac{\partial c_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial f}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial h} = \frac{\partial c_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial h}+\frac{\partial c_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial h},$$

so verwandeln sich unsere Gleichungen in die folgenden:

$$o = \sum_{i=1}^{i=\nu}\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial c_i}\frac{\partial c_i}{\partial f}, \qquad o = \sum_{i=1}^{i=\nu}\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial c_i}\frac{\partial c_i}{\partial h}; \quad \alpha+\beta \leqq p-1$$

$$o = \sum_{i=1}^{i=\nu}\left\{\frac{\partial(\alpha+1,\beta)}{\partial c_i}\frac{\partial x}{\partial h}+\frac{\partial(\alpha,\beta+1)}{\partial c_i}\frac{\partial y}{\partial h}\right\}\frac{\partial c_i}{\partial f}-\sum_{i=1}^{i=\nu}\left\{\frac{\partial(\alpha+1,\beta)}{\partial c_i}\frac{\partial x}{\partial f}+\frac{\partial(\alpha,\beta+1)}{\partial c_i}\frac{\partial y}{\partial f}\right\}\frac{\partial c_i}{\partial h}, \quad \alpha+\beta = p-1.$$

In diesen Gleichungen, welche die Bedingungen des Problemes in der allgemeinsten Form darstellen, identificire ich h mit x und nehme an, dass die Gleichungen, die uns gegenwärtig beschäftigen, unter der Voraussetzung:

$$o = \frac{\partial c_i}{\partial x}+\frac{\partial c_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial c_i}{\partial h} \tag{5}$$

befriedigt werden können. Sie ziehen sich dann auf die nachstehenden:

$$\left.\begin{aligned} o &= \sum_{i=1}^{i=\nu}\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial c_i}\frac{\partial c_i}{\partial f}; \qquad \alpha+\beta \leqq p-1 \\ o &= \sum_{i=1}^{i=\nu}\left\{\frac{\partial(\alpha+1,\beta)}{\partial c_i}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial(\alpha,\beta+1)}{\partial c_i}\right\}\frac{\partial c_i}{\partial f}; \qquad \alpha+\beta = p-1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

zusammen und es wird im Folgenden gezeigt werden:

Erstens: Dass bei vollständigen Integralen das System (6) jederzeit integrirt werden kann, und

Zweitens: Dass aus dem zu (6) gehörigen vollständigen Integralsysteme durch Variation der Constanten das allgemeine Integrale der Gleichung (1) gefunden wird.

2.

Setzen wir den noch nicht näher bestimmten Werth

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mu,$$

so verwandelt sich die Gleichung (5) in folgende:

$$o = \frac{\partial c_i}{\partial x} + \mu \frac{\partial c_i}{\partial y}$$

und durch dieselbe ist ausgesprochen, dass sich die Parameter c gegenüber der Operation:

$$Du = \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{7}$$

als Constante verhalten sollen, das heisst, dass sie als Functionen von f allein anzusehen sind. Es wird nämlich:

$$Df = \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y}$$

und demzufolge f die Integrationsconstante der Differentialgleichung:

$$Dy = \mu. \tag{8}$$

Damit das System (6) integrirt werden könne, ist also erforderlich, dass die aus demselben fliessenden Werthe der Ableitungen $\frac{\partial c_i}{\partial f}$ sich als Functionen von f und von den c erweisen. Um zu sehen, wann dies der Fall ist, ersetzen wir in der ersten Zeile in (6) y durch seinen aus (8) folgenden Werth in f und x, und differentiiren dann nach x oder, was dasselbe ist, wir unterziehen die genannten Gleichungen der Operation D. Betrachten wir hiebei die $\frac{\partial c_i}{\partial f}$ als Functionen von f, also als Constante gegenüber der Operation D, so muss das Resultat dieser Rechnung vermöge der (6) identisch Null werden, falls die gemachten Annahmen überhaupt zulässig sind. — Es ist nun

$$D\sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial f} = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha+1, \beta)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial f} + \mu \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha, \beta+1)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial f}$$

und die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet mit Rücksicht auf (6) identisch, so lange $\alpha+\beta \leqq p-1$. Die in der ersten Zeile von (6) enthaltenen Relationen enthalten also x dann nicht, wenn dasselbe in den Gleichungen der zweiten Zeile nicht enthalten ist. — Die Möglichkeit, das System (6) zu integriren, hängt also in letzter Linie davon ab, ob in den p-Gleichungen, welche durch die zweite Zeile in (6) vertreten sind, x noch auftritt oder nicht.

Bevor wir die Entscheidung dieser Frage unternehmen, müssen wir einige Bemerkungen vorausschicken, welche blos von den Zahlenverhältnissen des Problemes abhängig sind.

Vor Allem ist nämlich klar, dass ν — die Anzahl der Parameter c — unter die Zahl der von einander unabhängigen Gleichungen des Systemes (6) nicht herabsinken kann, da die Unbekannten $\frac{\partial c_i}{\partial f}$ in denselben homogen enthalten sind, sonach

$$\frac{\partial c_i}{\partial f} = 0$$

und daher nichts anderes folgen würde als das Integrale, von dem wir ausgegangen sind. Bedenkt man nun, dass der Voraussetzung nach das ϑ der Gleichung (2) ein Integrale von (1) ist und daher durch die aus (2) abgeleiteten Werthe der (α, β) identisch die Relationen:

$$o = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial(\alpha, \beta)} \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial c_i}, \quad \alpha+\beta \geqq p, \quad i = 1, 2, \ldots \nu$$

erfüllt sein müssen, so ergibt sich vermöge elementarer Betrachtungen, welche herzusetzen nicht nöthig ist, dass immer dann, wenn aus den Gleichungen für die (α, β) eine andere als die gegebene Gleichung: $\varphi = 0$

nicht construirt werden kann, ohne zugleich Parameter in dieselbe aufzunehmen, die in der gegebenen Gleichung a priori nicht enthalten sind, dass also dann die

$$\rho = \binom{p+2}{2} - 1$$

Gleichungen (6) immer linear unabhängig sind. — Wir nennen nur in diesem Falle ϑ ein vollständiges Integrale und haben demnach

$$\nu \geqq \rho.$$

Es wird später gezeigt werden, wie sich in allen Fällen die Anzahl der Parameter auf ρ reduciren lässt; wir verstehen also unter einem vollständigen Integrale schlechthin zunächst ein Integrale mit ρ-Parametern von dem eben angegebenen Charakter und betrachten Integrale mit mehr als ρ-Parametern, sofern sie überhaupt unter den Begriff eines vollständigen Integrales fallen, als vollständige Integrale mit überzähligen Parametern.

Es genügt sonach, unbeschadet der Allgemeinheit, den Fall

$$\nu = \rho,$$

also den Fall vollständiger Integrale im gewöhnlichen Sinne allein weiter zu behandeln.

In diesem Falle ist die Determinante des Systemes (6)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & ,\ldots, & \mu^p & , & -\mu^{p-1} & ,\ldots, & (-1)^p \\ \dfrac{\partial(0,0)}{\partial c_1} & ,\ldots, & \dfrac{\partial(p,0)}{\partial c_1} & , & \dfrac{\partial(p-1,1)}{\partial c_1} & ,\ldots, & \dfrac{\partial(0,p)}{\partial c_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial(0,0)}{\partial c_\nu} & ,\ldots, & \dfrac{\partial(p,0)}{\partial c_\nu} & , & \dfrac{\partial(p-1,1)}{\partial c_\nu} & ,\ldots, & \dfrac{\partial(0,p)}{\partial c_\nu} \end{vmatrix}$$

dem vorigen zufolge nicht identisch Null. — Man kann also der Grösse μ stets solche Werthe geben, dass

$$\Delta = 0$$

und damit das System (6) zur Berechnung der Verhältnisse

$$\frac{\partial c_1}{\partial f} : \frac{\partial c_2}{\partial f} : \ldots : \frac{\partial c_\nu}{\partial f}$$

geeignet wird.

Andererseits können nun dem Begriffe nach die Parameter c aus den Relationen für die Ableitungen (α, β) nur auf eine Weise eliminirt werden und das Eliminationsresultat kann nur die gegebene Gleichung (1) sein. — Es muss also der Ausdruck:

$$\begin{vmatrix} \delta(0,0) & ,\ldots, & \delta(p,0) & ,\ldots, & \delta(0,p) \\ \dfrac{\partial(0,0)}{\partial c_1} & ,\ldots, & \dfrac{\partial(p,0)}{\partial c_1} & ,\ldots, & \dfrac{\partial(0,p)}{\partial c_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial(0,0)}{\partial c_\nu} & ,\ldots, & \dfrac{\partial(p,0)}{\partial c_\nu} & ,\ldots, & \dfrac{\partial(0,p)}{\partial c_\nu} \end{vmatrix} = \Sigma \{\alpha, \beta\} \delta(\alpha, \beta)$$

von einem Factor abgesehen, mit $\delta\varphi$ übereinstimmen. Daher ist

$$\{\alpha, \beta\} = M \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial(\alpha, \beta)}$$

und die Gleichung $\Delta = 0$ verwandelt sich in die folgende:

$$0=\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}\mu^p-\frac{\partial\varphi}{\partial(p-1,1)}\mu^{p-1}+\ldots+(-1)^p\frac{\partial\varphi}{\partial(0,p)}.$$

Diese aber ist identisch mit der Gleichung (7) [p. 36, der (*A.*)], so dass die p Werthe, welche für μ gesetzt werden können, mit den Wurzeln

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$$

der eben citirten Gleichung zusammenfallen. Es können also auch p im Allgemeinen verschiedene Systeme (6) aufgestellt werden.

Bezüglich dieser erübrigt noch zu untersuchen, unter welchen Umständen in den Gleichungen, welche in der zweiten Zeile von (6) enthalten sind, x nicht mehr vertreten ist.

3.

Denken wir uns das allgemeine Integrale der Gleichung (1) bekannt. Dann kann man beliebig viele particuläre Integrale ableiten, indem man die willkürlichen Functionen des allgemeinen Integrales durch concrete Functionen der in ihnen enthaltenen Argumente ersetzt. In die allgemeine Lösung treten p willkürliche Functionen ein, deren jede nur von einem, im Übrigen durch die (*A.*) vollständig definirten Argumente abhängig ist. Diese Argumente sind nämlich die Integrationsconstanten $y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \ldots y_0^{(p)}$ der p möglichen Differentialsysteme:

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1, \quad \frac{dy}{dx}=\lambda_2, \ldots, \quad \frac{dy}{dx}=\lambda_p,$$

worin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ die Wurzeln der schon im vorigen Artikel erwähnten Gleichung

$$P(\lambda)=\sum_{i=0}^{i=p}(-1)^i\frac{\partial\varphi}{\partial(p-i,i)}\lambda^{p-i}=0, \qquad [(A.),\ \text{p. } 36\ (7)]$$

bedeuten. Es möge der Einfachheit wegen vorausgesetzt werden, dass die Wurzeln dieser Gleichung sämmtlich unter einander verschieden sind.

Enthält also die allgemeine Lösung die willkürlichen Functionen

$$\Phi_1(y_0^{(1)}), \Phi_2(y_0^{(2)}), \ldots, \Phi_p(y_0^{(p)}),$$

so entsteht irgend ein particuläres Integrale, wenn man die Formen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ in irgend einer Weise individualisirt, das heisst sie durch concrete Functionsformen mit beliebig vielen Parametern ersetzt. Denken wir uns dabei auf irgend eine Weise kenntlich gemacht, von welcher der Functionen Φ_i die einzelnen Parameter herrühren, so ist es umgekehrt auch nicht schwer, aus dem vorliegenden particulären Integrale wieder eine allgemeine Lösung zu gewinnen. Dazu genügt es offenbar, die aus Φ_i herrührenden Parameter durch Functionen von $y_0^{(i)}$ zu ersetzen, welche sich dann entweder wegen ihrer Willkürlichkeit sofort durch eine einzige Function von $y_0^{(i)}$ ersetzen lassen oder, wenn dies nicht der Fall ist, gewissen Bedingungen genügen müssen. Diese Bedingungen reduciren die Zahl der eingeführten Functionen wieder auf p und sind im Wesentlichen mit den weiter unten zu entwickelnden identisch.

Anders verhält es sich jedoch, wenn die Abkunft der Parameter nicht bekannt ist; man muss dann jedenfalls auf den Process zurückgreifen, der zum allgemeinen Integrale führt. Ich werde also diesen Process in Kurzem recapituliren, um zunächst zu zeigen, wie vermöge desselben ein vollständiges Integrale gewonnen werden kann und dann umgekehrt das Verfahren aufzusuchen, vermittelst dessen man aus dem vollständigen Integrale wieder das allgemeine gewinnen kann.

Dieser Process wird eingeleitet durch Integration eines gewissen Systemes von gewöhnlichen Differentialgleichungen, welches in allen seinen Bestandtheilen durch den Werth des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ definirt erscheint.

Wir betrachten hier zunächst das System:

$$
\begin{gathered}
\frac{dy}{dx}=\lambda_1\\
\frac{d(\alpha,\beta)}{dx}=(\alpha+1,\beta)+\lambda_1(\alpha,\beta+1)\,,\quad \alpha+\beta\leq p-1\\
\sum_{i=0}^{i=p-1}[p-i-1,i]\,\frac{d(p-i,i)}{dx}=-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}\,,\quad \sum_{i=1}^{i=p}\,[p-i,i-1]\,\frac{d(p-i,i)}{dx}=-\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial(p,0)}}\;;\quad [(A.),\ \text{p. } 37,\ (9)],
\end{gathered}
\tag{9}
$$

welches in $(A.)$ als das erste Differentialsystem bezeichnet wurde. Es enthält um $p-1$ Gleichungen weniger als zu bestimmende Grössen, so dass die $(p-1)$ Grössen:

$$(p-1,1)\,,\,(p-2,2)\,,\ldots\,,\,(1,p-1),\ [(A.),\ \text{p. } 37,\ (10)] \tag{10}$$

während der Integration desselben als unbestimmte Functionen von x angesehen werden müssen. Führt man nach der Integration die

$$N=\binom{p+1}{2}+2$$

Integrationsconstanten $f_1, f_2, \ldots f_N$, von denen eine mit $y_0^{(1)}$ zusammenfällt, als neue Variable ein, so verwandeln sich die Relationen:

$$d(\alpha,\beta)=(\alpha+1,\beta)\,dx+(\alpha,\beta+1)\,dy,\qquad [(A.),\ \text{p. } 34,\ (3)] \tag{11}$$

in die folgenden:

$$\sum\left[\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial f}-(\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial f}\right]df=0\qquad [(A.),\ \text{p. } 39,\ (12)] \tag{12}$$

und nun werden die Grössen (10) nachträglich so bestimmt, dass sich die Gleichungen (12) in Pfaff'sche Probleme verwandeln. Die Bedingungen hiefür sind in den Gleichungen:

$$0=\sum\left[\frac{\partial(p-i,i)}{\partial f}+\lambda_1\,\frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial f}-(p-i-1,i+1)\,\frac{\partial y}{\partial f}\right]df\qquad [(A.),\ \text{p. } 39,\ (13)] \tag{13}$$

enthalten, in welchen i der Reihe nach gleich $0, 1, 2, \ldots p-1$ zu setzen und die Summe sowie in (12) über alle N Integrationsconstanten f auszudehnen ist. Die gesuchten Werthe der Grössen (10) sind jene, welche bewirken, dass jedes vollständige Integralsystem von (9) zugleich vollständiges Integralsystem in jedem der p möglichen Differentialsysteme wird.

Die Integralwerthe der Grössen:

$$(\alpha,\beta)\,,\quad \alpha+\beta\leq p,$$

welche dem Systeme (9) entspringen, enthalten die unbestimmten Grössen (10) nicht nur als Functionsargumente in gewöhnlichem Sinne, sondern auch unter Integralzeichen. Damit nun x, wie erforderlich, aus den Gleichungen (12) und (13) in der That entfalle, müssen bei der Auswerthung dieser Quadraturen überall, wo solche auftreten, Integrationsconstante eingeführt werden, welche aber nicht mehr willkürlich sein können, sondern zu den Constanten f in bestimmten Beziehungen stehen und daher, wie diese, als Functionen derjenigen, welche wir mit $y_0^{(1)}$ bezeichnet haben, anzusehen sind. Man findet diese Relationen am einfachsten, indem man bei den erwähnten Quadraturen zunächst überzählige Constante einführt und mit den so erhaltenen Werthen in die Gleichungen (12) und (13) eingeht. Die Werthe der überzähligen Constanten ergeben sich dann, indem man die Glieder, welche noch x enthalten, einzeln der Null gleichsetzt. Sind nun alle Formeln, die man braucht, auf diese Weise eingerichtet, so fällt x aus den (12) und (13) identisch aus, es müssen also insbesondere die von den willkürlichen Functionen:

$$\Phi_2(y_0^{(2)}),\ \Phi_3(y_0^{(3)}),\ldots,\Phi_p(y_0^{(p)}),$$

deren Argumente den übrigen Systemen entnommen sind, herrührenden Bestandtheile verschwunden sein. Das System (12) und (13) regelt also nur mehr die Relationen zwischen den Integrationsconstanten des ersten Systemes oder mit anderen Werthen, die zwischen den Constanten eines und desselben Systemes einzuführenden Beziehungen können separat, das heisst, unabhängig von den Beziehungen, welche in den anderen Systemen herrschen, ermittelt werden.

Setzt man nun einerseits in das vorhandene Integralsystem von (9) und andererseits in die Definitionsgleichungen für die unbestimmten Grössen (10), wo die Constanten f vorkommen, deren soeben gefundenen Werthe ein, so entsteht ein System von Werthen, aus welchem (seiner Ableitung zufolge) die willkürlichen Functionen nur auf eine Weise eliminirt werden können, nämlich auf die Weise, dass (1) als Resultat erscheint. Das System dieser Werthe — dasselbe, welches in (A.) als das definitive Integralsystem bezeichnet wurde, — kann also mit Ausnahme der gegebenen, keiner anderen partiellen Differentialgleichung von p^{ter} oder niederer Ordnung Genüge leisten, welche keine anderen Parameter enthält als die in (1) von Vornherein enthaltenen. Diese Eigenschaft besitzt das definitive Integralsystem auch dann, wenn man die willkürlichen Functionen, die in demselben vorkommen, specialisirt. Führt man also statt der willkürlichen Functionen concrete mit willkürlichen Parametern ein, so erhält man ein particuläres Integrale und dasselbe wird insbesondere ein vollständiges Integrale im Sinne des vorigen Artikels, wenn die Zahl der eingeführten Parameter, die wir durch $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\nu$ bezeichnen wollen,

$$\nu = \binom{p+2}{2} - 1$$

beträgt. Zugleich ist klar, dass die Gleichungen (12) und (13), ob sie nun aus der allgemeinen oder aus der particulären Form des definitiven Integralsystems entwickelt werden, in beiden Fällen kein x mehr enthalten können.

Das so erhaltene Integrale ist also eine Function von $x, y_0^{(1)}, \gamma_1, \ldots \gamma_\nu$ und erhält, indem man $y_0^{(1)}$ durch seinen Werth in x und y ersetzt, die in (2) gegebene Form.

Um nun umgekehrt aus diesem Integrale wieder das allgemeine herzustellen, erinnern wir zunächst daran, dass das System der Gleichungen (12) und (13) von den willkürlichen Bestandtheilen des $2^{\text{ten}}, 3^{\text{ten}}, \ldots p^{\text{ten}}$ Systemes unabhängig ist und die Constanten des ersten Systemes unter sich eben in jene Beziehungen bringt, vermöge welcher das Integralsystem von (9) ein definitives Integralsystem zu werden befähigt wird. Demnach können wir die willkürlichen Parameter des gefundenen Integrales zunächst als Functionen von $y_0^{(1)}$ ansehen und haben dieselben dann den Bedingungen (12) und (13) anzupassen. Setzen wir, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, ein für allemal voraus, dass das Integral, von dem wir ausgehen, ein vollständiges Integral ist, so muss dann System (12), (13) stets integrabel sein, das heisst, ersetzen wir in diesem Systeme y durch seinen aus (9) fliessenden Werth in $y_0^{(1)}$ und x, so muss aus demselben x entfallen. Dasselbe lässt sich also in die Form bringen:

$$\frac{d\gamma_1}{\Gamma_1} = \frac{d\gamma_2}{\Gamma_2} = \ldots\ldots = \frac{d\gamma_\nu}{\Gamma_\nu}$$

worin $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_\nu$ Functionen der $\gamma_1, \gamma_2 \ldots$ allein bedeuten. Eine der Grössen γ_1, kann als willkürliche Function von $y_0^{(1)}$ angesehen werden, setzen wir also

$$d\gamma_1 = \psi(y_0^{(1)})\, dy_0^{(1)},$$

wo ψ willkürlich ist, so ist das System vollständig bestimmt und die Integration desselben liefert die Relationen welche zwischen den γ bestehen müssen, damit das vollständige Integrale in das allgemeine übergehe.

Um die analogen Beziehungen für die $(p-1)$ übrigen Systeme zu finden, versehen wir die Integrale des zuletzt genannten Systemes mit Integrationsconstanten, $\gamma_1', \gamma_2' \ldots \gamma_\nu'$. Setzen wir die so erhaltenen Werthe der Grössen $\gamma_1, \ldots \gamma_\nu$ in das vollständige Integrale ein, von dem wir ausgegangen sind, so verwandelt sich dasselbe in einen Ausdruck, welcher eine willkürliche Function aus dem ersten Systeme, und ausserdem wieder ν Parameter $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots \gamma'_\nu$ enthält, im übrigen aber augenscheinlich wieder ein Integrale der gegebenen Gleichung (1) ist. Wir erhalten also auf diesem Wege ein Integrale, welches in Bezug auf die Parameter $\gamma'_0, \gamma'_1, \ldots \gamma'_\nu$ wieder ein vollständiges ist und daher ohneweiters demselben Verfahren unterworfen werden kann. Man wird also jetzt die Gleichungen (12) und (13) aus dem zweiten Systeme, das heisst aus jenem, in welchem

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_2$$

genommen ist, entwickeln; aus demselben die Relationen zwischen den Constanten des zweiten Systemes erhalten u. s. f., bis man endlich alle Wurzeln der Gleichung

$$P(\lambda) = 0$$

erschöpft und damit das allgemeine Integrale gewonnen hat.

Es muss nun darauf aufmerksam gemacht werden, dass man Integrale mit ν Parametern auch auf einem anderen als dem oben beschriebenen Wege erhalten kann. Es war nämlich vorausgesetzt, dass bei Auswerthung der im Integralsysteme von (9) enthaltenen Quadraturen bestimmte Integrationsconstante hinzugefügt werden.

Führt man keine solchen Integrationsconstanten ein, oder allgemeiner zu reden, ertheilt man denselben concrete von $y_0^{(1)}$ nicht mehr abhängige Werthe, so fällt aus den (12) und (13) im Allgemeinen x nicht von selbst aus und es müssen, damit dies geschehe, eben jene Verbindungen der f, welche früher den überzähligen Constanten gleichgesetzt werden mussten (vergl. diesen Art.), jetzt absolute Constante sein. Entstehen auf diese Weise keine Bedingungen, welche an sich im Widerspruche stehen, so ist das Resultat immer noch ein Integrale von (1) und die Anzahl der Parameter kann im Allgemeinen noch immer auf ν gebracht werden. Aber aus den Integralen dieser Art kann die allgemeine Lösung nicht gewonnen werden, da einige der Parameter in Hinsicht auf die Gleichungen (12) und (13) nicht variirt werden dürfen. Die Variationen dieser Parameter würden nämlich mit Coëfficienten behaftet sein, welche noch x enthalten, so dass das genannte System nicht mehr integrabel wäre.

Darnach können die Parameter eines vorliegenden particulären Integrales einen zweifachen Charakter haben, je nachdem sie sich den Gleichungen (12) und (13) gegenüber als variabel oder als constant verhalten. Ich bezeichne demzufolge die ersteren im Gegensatze zu den letzteren als variable Parameter.

Wenn also ein particuläres Integrale im eigentlichen Sinne ein vollständiges Integrale sein soll, das heisst wenn es möglich sein soll, aus demselben die allgemeine Lösung herzustellen, so ist es nicht genügend, dass es ein vollständiges Integrale im Sinne des Art. 2 sei, vielmehr ist es nothwendig, dass es unbeschadet der dort angeführten Eigenschaften

$$\nu = \binom{p+2}{2} - 1$$

variable Parameter enthalte.

4.

Um an die Ergebnisse der Art. 1 und 2 wieder anzuschliessen, erinnere ich zunächst daran, dass die verschiedenen Werthe der Grössen μ und λ durch dieselbe Gleichung p^{ten} Grades definirt worden sind. Setzt man also

$$\mu = \lambda_1,$$

so ist das f des Art. 2 identisch mit $y_0^{(1)}$ im vorigen Artikel.

Entwickeln wir andererseits die Gleichungen (12) und (13) für das im vorigen Artikel gefundene vollständige Integrale, welches die ν Parameter $\gamma_1, \ldots \gamma_\nu$ enthält, so ergeben sich die Relationen:

$$0=\sum_{i=1}^{i=\nu}\left[\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial\gamma_i}-(\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial\gamma_i}\right]\frac{\partial\gamma_i}{\partial y_0^{(1)}}$$

$$0=\sum_{i=1}^{i=\nu}\left[\frac{\partial(p-i,i)}{\partial\gamma_i}+\lambda_1\frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial\gamma_i}-(p-i-1,\,i+1)'\frac{\partial y}{\partial\gamma_i}\right]\frac{\partial\gamma_i}{\partial y_0^{(1)}}.$$

Endlich ist zufolge der verschiedenen Bedeutung der Differentiationszeichen in $(A.)$ und in Art. 2.

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial\gamma_i}$$

im Sinne der vorstehenden Formeln genommen, identisch mit

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial\gamma_i}+(\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial\gamma_i},$$

also, da $\frac{\partial y}{\partial\gamma_i}$ in beiden Fällen denselben Werth besitzt,

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial\gamma_i}-(\alpha,\beta+1)\frac{\partial y}{\partial\gamma_i}$$

im Sinne der obigen Relationen, identisch mit

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial\gamma_i}$$

im Sinne des Art. 2.

Ebenso verwandeln sich die Ausdrücke

$$\frac{\partial(p-i,i)}{\partial\gamma_i}+\lambda_1\frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial\gamma_i}-(p-i-1,\,i+1)'\frac{\partial y}{\partial\gamma_i}$$

in die folgenden:

$$\frac{\partial(p-i,i)}{\partial\gamma_i}+\lambda_1\frac{\partial(p-i-1,i+1)}{\partial\gamma_i},$$

wenn die Differentiation in diesem im Sinne des Art. 2 ausgeführt wird. Setzt man also statt der γ_i überall c_i, wodurch der Inhalt der Formeln ungeändert bleibt, und schreibt für $y_0^{(1)}$ das Zeichen f, welches, wie soeben erwähnt, dasselbe bedeutet wie $y_0^{(1)}$, so fallen die jetzt behandelten Gleichungen sofort mit den (6) Art. 1 zusammen, da in denselben $\frac{\partial y}{\partial x}=\lambda_1$ substituirt worden ist. Die Gleichungen, welche durch den Lagrange'schen Gedankengang gewonnen werden, sind also identisch mit jenen, welche wir aus der allgemeinen Integrationstheorie abgeleitet haben und Alles, was über die letzteren im vorigen Artikel gefunden wurde, muss unmittelbar auch für die ersteren giltig sein. Ist also das ϑ der Gleichung (2) ein vollständiges Integrale im Sinne des Art. 3, so sind die Gleichungen (6), sofern für $\frac{\partial y}{\partial x}$ einer der Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ gesetzt wird, stets integrabel, das Verfahren, welches im vorigen Artikel gefunden wurde, ist immer durchführbar und das Endresultat ist das allgemeine Integrale.

Enthält das vorliegende vollständige Integrale überzählige Parameter, so muss sich die Anzahl der Parameter selbstverständich auf die normale Anzahl ν reduciren lassen. Es ist nicht schwer, das hiezu dienliche Verfahren aufzufinden. Da nämlich im gegenwärtigen Falle alle $\frac{\partial c}{\partial f}$ in der Form:

$$\frac{\partial c_i}{\partial f}=T_{i1}\frac{\partial c_1}{\partial f}+\ldots .T_{i\rho}\frac{\partial c_\rho}{\partial f}$$

darstellbar sind, genügt es

$$\frac{\partial c_2}{\partial f} = \ldots . = \frac{\partial c_\rho}{\partial f} = 0 \tag{14}$$

zu setzen, was nur dann auf Hindernisse stösst, wenn das fragliche Integrale unter der Annahme (14) nicht genügend viele variable Parameter enthält oder, was dasselbe ist, kein vollständiges Integrale in unserem Sinne ist.

Sind die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\rho$ nicht sämmtlich von einander verschieden, so erleidet das Verfahren nur einige geringfügige Änderungen, die sich am besten an einem entsprechenden Beispiele werden erläutern lassen.

5.

Betrachten wir zunächst das Beispiel:

$$z = (0, 0) = \alpha + \beta y + \gamma(x^2 - y^2) + \rho x^3 + \nu(3x^2y - y^3). \tag{α}$$

Es ist hier

$$\begin{aligned}
p &= (1, 0) = && 2\gamma x + 3\rho x^2 + 6\nu xy \\
q &= (0, 1) = && \beta - 2\gamma y + 3\nu(x^2 - y^2) \\
r &= (2, 0) = && 2\gamma + 6\rho x + 6\nu y \\
s &= (1, 1) = && 6\nu x \\
t &= (0, 2) = && -2\gamma - 6\nu y
\end{aligned}$$

also

$$r - t = \frac{2p}{x}. \tag{β}$$

Die Gleichungen in der ersten Zeile von (6) lauten hier, indem man $\frac{\partial}{\partial f}$ durch δ ersetzt:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta\alpha + y\delta\beta + (x^2 - y^2)\delta\gamma + x^3\delta\rho + (3x^2y - y^3)\delta\nu \\
0 &= 2x\delta\gamma + 3x^2\delta\rho + 6xy\,\delta\nu \\
0 &= \delta\beta - 2y\delta\gamma + 3(x^2 - y^2)\delta\nu,
\end{aligned}$$

die Gleichungen der zweiten Zeile folgen aus den Vorstehenden durch Anwendung der Operation D, wobei Dy zunächst gleich μ zu setzen ist. Es folgen dadurch zwei neue Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= 2\delta\gamma + 6x\delta\rho + 6(x\mu + y)\delta\nu \\
0 &= -2\mu\delta\gamma + 6(x - \mu y)\delta\nu,
\end{aligned}$$

welche zusammen mit den vorigen drei Gleichungen das System (6) vertreten. Die Determinante dieses Systemes ist

$$\Delta = -36x^3(\mu^2 - 1),$$

verschwindet also nicht identisch. Das obige Integrale ist somit zunächst im Sinne des Art. 2 ein vollständiges Integrale der Gleichung (β).

Setzen wir vorerst $\mu = +1$, so verschwindet Δ und es wird

$$Dy = 1, \quad y = -y_0^{1)} + x = -f + x.$$

Damit folgt der Reihe nach:

$$\partial\gamma = 3(x-y)\partial\nu = 3f\partial\nu$$
$$\partial\rho = -2\partial\nu,$$
$$\partial\beta = -3f^2\partial\nu,$$
$$\partial\alpha = -f^3\partial\nu,$$

so dass das System in der That integrabel wird. Nehmen wir nun

$$\partial\nu = \varphi^{IV}(f)$$

worin φ eine willkürliche Functionsform ist, so wird

$$\alpha = \alpha' - f^3\varphi''' + 3f^2\varphi'' - 6f\varphi' + 6\varphi$$
$$\beta = \beta' - 3f^2\varphi''' + 6f\varphi'' - 6\varphi'$$
$$\gamma = \gamma' + 3f\varphi''' - 3\varphi''$$
$$\rho = \rho' - 2\varphi'''$$
$$\nu = \nu' + \varphi''',$$

worin $\alpha', \beta', \gamma', \mu', \nu'$ die Integrationsconstanten sind. Der Werth von z wird demnach

$$z = 6[\varphi - x\varphi'] + \alpha' + \beta' y + \gamma'(x^2 - y^2) + \rho' x^3 + \nu'(3x^2y - y^3).$$

Da hierin die $\alpha', \beta' \ldots$ in derselben Weise enthalten sind wie in α), so wird durch die Supposition

$$\mu = -1, \quad Dy = -1: \quad \mathfrak{y} = y - x, \quad y = x + \mathfrak{y},$$

das heisst f verwandelt sich in y. Das allgemeine Integrale der Gleichung (β) ist also

$$z = \{\Phi(x-y) + \Psi(x+y)\} - x\{\Phi'(x-y) + \Psi'(x+y)\},$$

wie bekannt.

6.

Als zweites Beispiel nehmen wir die Gleichung:

$$x^2 r - y^2 t = 0,$$

deren allgemeines Integrale, jedoch ohne nähere Angabe der Details in (A.) [p. 17, ff.] angegeben worden ist. Der Gang der Rechnung soll hier genauer ausgeführt werden, um die Betrachtungen der Art. 3 und 4 näher zu erläutern.

Bezeichnen wir, wie am angeführten Orte; die Integrationsconstanten des ersten Systemes durch $f, f_1, f_2 \ldots$ und legen der Rechnung das zweite Integralsystem zu Grunde, wie folgt:

$$y = gx$$
$$r = y^2 t = \frac{g_3}{x^2} + ys - \frac{2y}{x^2}\int xs\,dx$$
$$p = g_2 + yg_4 - \frac{g_3}{x} + \frac{2y}{x}\int xs\,dx$$
$$q = g_4 - \frac{g_3}{gx} + \frac{2}{x}\int xs\,dx$$
$$z = g_5 + x(g_2 + 2yg_4) - 2g_3 \log x + 4y\int\frac{dx}{x}\int xs\,dx,$$

so ergibt sich für s der Werth

$$s = \frac{1}{x}\,\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi(xy).$$

Um die Formeln von den Integralzeichen zu befreien, setzen wir

$$s = \frac{\varphi(y)}{x} + (u^2\chi''' + u\chi'' - \chi'),$$

worin φ und χ wieder willkürliche Functionen bedeuten, deren letztere insbesondere von

$$u = yx^2 = xy$$

abhängig ist. Dann wird

$$\int xs\,dx = \qquad h_1 + x\varphi(y) + \frac{1}{2y}(u^2\chi'' - u\chi')$$

$$\int \frac{dx}{x}\int xs\,dx = h_2 + h_1 \log x + x\varphi(y) + \frac{1}{4y}(u\chi' - 2\chi'),$$

ferner:

$$t = \frac{g_3 - 2gh_1}{g^2x^2} - \frac{\varphi(y)}{yx} + \frac{u^2\chi'''}{y}$$

$$p = [g_2 + yg_4 + 2y\varphi(y)] - \frac{g_3 - 2gh_1}{x} + yx[u\chi'' - \chi']$$

$$q = \qquad [g_4 + 2\varphi(y)] - \frac{g_3 - 2gh_1}{yx} + \quad x[u\chi'' - \chi']$$

$$z = [g_5 + 4gh_2] + x[g_2 + 2gg_4 + 4g\varphi(y)] - 2[g_3 - 2gh_1]\log x + u\chi' - 2\chi.$$

Hierin bedeuten h_1 und h_2 die überzähligen Constanten des Art. 3. Die Gleichungen (12) lauten nun:

$$\partial g_2 + y\partial g_4 + g_4 + 2y\varphi' + \varphi - \frac{\partial(g_3 - 2gh_1)}{x} = 0$$

$$\partial g_4 \qquad + 2\varphi' + \frac{\varphi}{y} - \frac{\partial(g_3 - 2gh_1)}{yx} = 0$$

$$\partial(g_5 + 4gh_2) + x\{\partial g_2 + 2g\partial g_4 + g_4 + 4g\varphi' + 2\varphi\} = 2\log x\partial(g_3 - 2gh_1) - \frac{g_3 - 2gh_1}{g}.$$

Es muss also zunächst $g_3 - 2gh_1$ eine absolute Constante sein. — Setzen wir demnach

$$g_3 - 2gh_1 = -a,$$

so folgt weiter

$$\partial g_2 + g_4 = 0, \quad g\partial g_4 + 2g\varphi' + \varphi = 0$$

$$\partial(g_5 + 4gh_2) = \frac{a}{g},$$

das heisst,

$$g_5 + 4gh_2 = b + a\log . g,$$

wobei b eine zweite absolute Constante ist. Daraus ergibt sich z in der Form:

$$z = b + a\log xy + x\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi(xy).$$

Setzen wir nun

$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right) = \alpha + \beta\frac{y}{x} + \gamma\frac{y^2}{x^2}, \quad \Psi(xy) = 0,$$

so entsteht ein Integrale unserer Gleichung:

$$z = b + a\log xy + \alpha x + \beta y + \gamma\frac{y^2}{x},$$

welches fünf Parameter enthält aber kein vollständiges Integrale sein kann, da wir aus der Ableitung wissen, dass a und b keiner Variation fähig sind.

Dies zeigt sich natürlich sofort, wenn man das oben angegebene Verfahren anwenden will. Die Gleichungen (6) lauten nämlich jetzt:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial b + x\partial\alpha + y\partial\beta + \frac{y^2}{x}\partial\gamma + \log xy \,.\, \partial a \\
0 &= \partial\alpha - \frac{y^2}{x^2}\partial\gamma + \frac{\partial a}{x} \\
0 &= \partial\beta + 2\frac{y}{x}\partial\gamma + \frac{\partial a}{y} \\
0 &= -2\frac{y}{x}\frac{x\mu-y}{x^2}\partial\gamma - \frac{\partial a}{x^2} \\
0 &= 2\frac{x\mu-y}{x^2}\partial\gamma - \frac{\mu\partial a}{y^2}
\end{aligned}$$

Die Determinante des Systemes ist, abgesehen von einem nicht verschwindenden Factor:

$$\Delta = \mu^2 - \frac{y^2}{x^2},$$

wie natürlich, da z ein Integrale unserer Gleichung ist. Setzen wir nun $\mu = \frac{y}{x}$, so folgt sofort $\partial a = 0$ und man erhält ein Integrale, welches wohl allgemeiner als das gegebene ist, aber nur eine willkürliche Function enthält.

Der Grund dieser Erscheinung tritt sofort zu Tage, wenn man den zweiten Werth von μ, das ist

$$\mu = -\frac{y}{x} \text{ und demzufolge } xy = f,$$

substituirt. Denn nun folgt:

$$\frac{4f^2}{x^3}\partial\gamma + \partial a = 0,$$

so dass $\partial\gamma$ sowohl als ∂a den Werth Null annehmen müssen. Daraus ergibt sich aber wieder nur das ursprüngliche Integrale. Dieses kann also nicht zu einem allgemeineren Integrale erweitert werden, welches willkürliche Bestandtheile aus beiden Systemen enthalten würde, und ist demzufolge kein vollständiges Integrale.

Das Integrale

$$z = \alpha + \beta x + \gamma y + \sigma\sqrt{xy} + \nu \log xy + \rho \,.\, xy + \tau \cdot \frac{y^2}{x}$$

ist dagegen ein vollständiges Integrale mit überzähligen Parametern. Entwickeln für dasselbe das System (6), so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial\alpha + x\partial\beta + y\partial\gamma + \sqrt{xy}\,\partial\sigma + \log xy\,\partial\nu + xy\,.\,\partial\rho + \frac{y^2}{x}\partial\tau \\
0 &= \partial\beta + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\,\partial\sigma + \frac{\partial\nu}{x} + y\partial\rho - \frac{y^2}{x^2}\partial\tau \\
0 &= \partial\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\,\partial\sigma + \frac{\partial\nu}{y} + x\partial\rho + 2\frac{y}{x}\partial\tau \\
0 &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x\mu-y}{x^2}\partial\sigma - \frac{\partial\nu}{x^2} + \mu\,.\,\partial\rho - \frac{2y}{x}\cdot\frac{x\mu-y}{x^2}\partial\tau \\
0 &= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{x\mu-y}{y^2}\partial\sigma - \frac{\mu\partial\nu}{y^2} + \partial\rho + 2\frac{x\mu-y}{x^2}\partial\tau
\end{aligned}$$

Bildet man die von einander unabhängigen Determinanten der dem Systeme zugehörigen Matrix, so findet man, von nicht verschwindenden Factoren abgesehen, als gemeinsamen Werth derselben

$$\Delta = \mu^2 - \frac{y^2}{x^2},$$

mit Ausnahme der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x\mu - y}{x^2}, & -\frac{2y}{x} \cdot \frac{x\mu - y}{x^2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x\mu - y}{x^2}, & 2 \cdot \frac{x\mu - y}{x^2} \end{vmatrix}$$

deren identisches Verschwinden anzeigt, dass τ nur von σ abhängig ist oder anders ausgedrückt, mit σ in einen einzigen Parameter zusammengezogen werden kann.

Geben wir nun dem μ zuerst den Werth $\frac{y}{x}$, welchem das Integrale

$$y = gx$$

entspricht, so folgt zunächst:

$$-\partial\nu + gx^2 . \partial\rho = 0,$$

woraus sich $\partial\nu = \partial\rho = 0$ ergibt, während der Factor des identisch verschwindenden Theiles, das ist:

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \partial\sigma - 2\frac{y}{x}\partial\tau = \frac{\partial\sigma}{4\sqrt{g}} - 2g\partial\tau \qquad \beta)$$

jeden beliebigen endlichen Werth annehmen darf. Damit folgt nun

$$\partial\alpha = 0, \quad \partial\beta = -\frac{1}{2}\sqrt{g} \cdot \partial\sigma + g^2\partial\tau, \quad \partial\gamma = -\frac{\partial\sigma}{2\sqrt{g}} - 2g\partial\tau.$$

Der Ausdruck (β) kann einen beliebig von g abhängigen Werth erhalten; setzen wir also:

$$\partial\sigma = 8g\sqrt{g}\partial\tau,$$

so kommt der Reihe nach:

$$\partial\alpha = 0, \quad \partial\beta = -3g^2\partial\tau, \quad \partial\gamma = -6g\partial\tau$$

und indem man diese Gleichungen nach Einführung einer willkürlichen Function integrirt,

$$z = x\Theta\left(\frac{y}{x}\right) + \alpha' + \beta'x + \gamma'y + \nu' \log xy + \rho'xy + \sigma'\sqrt{xy} + \tau'\frac{y^2}{x}.$$

Unterwirft man diesen Werth demselben Verfahren, so erhält man für (6) ein System, welches sich von dem früheren nur durch die den Parametern angefügten Accente unterscheidet, so dass wir unmittelbar an das bereits betrachtete anknüpfen können. Durch die Supposition

$$\mu = -\frac{y}{x}, \quad f = xy$$

erhalten wir

$$-\frac{\partial\sigma'}{2\sqrt{xy}} - \frac{\partial\nu'}{xy} - \partial\rho' + 4\frac{y}{x^2}\partial\tau' = 0,$$

so dass $\partial\tau' = 0$ gesetzt werden muss. Mit dem nun folgenden

$$\partial\rho' = -\frac{\partial\nu'}{f} - \frac{\partial\sigma'}{2\sqrt{f}}$$

kommt

$$\partial\gamma' = 0 \quad \partial\beta' = 0, \quad \partial\alpha' = -\frac{\partial\sigma'}{2\sqrt{f}} + \partial\nu'(1-\log f),$$

vermittelst welcher Relation leicht

$$z = x\Theta\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi(xy)$$

gefunden wird.

7.

Enthält die Gleichung

$$P(\lambda) = 0 \text{ (Art. 3)}$$

gleiche Wurzeln, so sind an dem angegebenen Verfahren nur geringe Modificationen anzubringen. Doch sind zweierlei Wege möglich. Man kann nämlich die von einander verschiedenen Wurzeln λ der obigen Gleichung in Rechnung ziehen, ohne für den Augenblick die Mehrfachheit derselben zu berücksichtigen. Es resultirt dann offenbar eine Lösung mit soviel willkürlichen Functionen, als von einander verschiedene λ vorhanden sind und hieraus gewinnt man die allgemeine Lösung durch Variation der λ, wie bereits in [(*A.*) Art. 14] gezeigt worden ist.

So ist z. B.

$$(0, 0) = \alpha + \beta x + \gamma y + ax^2 + 2bxy + cy^2 + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3,$$

worin

$$A + 3\alpha B + 3\alpha^2 C + \alpha^3 D = 0,$$

ein vollständiges Integrale der Gleichung:

$$0 = (30) + 3\alpha(21) + 3\alpha^2(12) + \alpha^3(03).$$

Man erhält aus demselben die Werthe:

$$\begin{array}{ll}
(1, 0) = & \beta + 2ax + 2by + 3Ax^2 + 6Bxy + 3Cy^2 \\
(0, 1) = & \gamma + 2bx + 2cy + 3Bx^2 + 6Cxy + 3Dy^2 \\
(2, 0) = & 2a + 6Ax + 6By \\
(1, 1) = & 2b + 6Bx + 6Cy \\
(0, 2) = & 2c + 6Cx + 6Dy \\
(3, 0) = 6A, & (2, 1) = 6B, \quad (1, 2) = 6C, \quad (0, 3) = 6D
\end{array}$$

und das System (6) erhält die Gestalt:

$$\begin{array}{ll}
0 = & \partial\alpha + x\partial\beta + y\partial\gamma + x^2\partial a + 2xy\partial b + y^2\partial c + x^3\partial A + 3x^2y\partial B + 3xy^2\partial C + y^3\partial D \\
0 = & \partial\beta + 2x\partial a + 2y\partial b + 3x^2\partial A + 6xy\partial B + 3y^2\partial C \\
0 = & \partial\gamma + 2x\partial b + 2y\partial c + 3x^2\partial B + 6xy\partial C + 3y^2\partial D \\
0 = & 2\partial a + 6x\partial A + 6y\partial B \\
0 = & 2\partial b + 6x\partial B + 6y\partial C \\
0 = & 2\partial c + 6x\partial C + 6y\partial D \\
0 = & \partial A + \mu\partial B, \quad 0 = \partial B + \mu\partial C, \quad 0 = \partial C + \mu\partial D.
\end{array}$$

Die letzten drei Gleichungen in Verbindung mit der den Grössen A, B, C, D auferlegten Bedingung geben für μ die Relation

$$(\mu-\alpha)^3 = 0,$$

so dass $\mu = \alpha$ eine dreifache Wurzel ist. Mit dem Werthe $\mu = \alpha$ folgt zunächst

$$\partial A = -\alpha^3\partial D, \quad \partial B = \alpha^2\partial D, \quad \partial C = -\alpha\partial D$$

und damit, wenn noch

$$y-\alpha x = f$$

gesetzt wird, der Reihe nach:

$$\delta a = -3\alpha^2 f\delta D, \quad \delta b = 3\alpha f\delta D, \quad \delta c = -3f\delta D$$
$$\delta\beta = -3\alpha f^2\delta D, \quad \delta\gamma = 3f^2\delta D$$
$$\delta\alpha = -f^3\delta D.$$

Setzt man nun

$$\delta D = \varphi^{(IV)}.\delta f,$$

und integrirt die gewonnenen Differentialgleichungen, so folgt die Lösung:

$$z = (0, 0) = 6\varphi(f)+\alpha'+\beta' x+\gamma' y+a' x^2+2b' xy+c' y^2+A' x^3+3B' x^2 y+3C' xy^2+D' y^3, \qquad (\alpha)$$

in welcher die Integrationsconstanten $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ nur mit Rücksicht auf das folgende eingeführt worden sind. Bei dem Verfahren, das wir gegenwärtig anzuwenden beabsichtigen, müssen dieselben nämlich alle gleich Null gesetzt werden, da nur Ein System (6) construirt werden kann und deswegen bei der Integration dieses Systemes eine Anknüpfung an später zu bildende ähnliche Systeme überflüssig ist. Wir haben also die Lösung:

$$z = \varphi(y-\alpha x).$$

Ersetzen wir nun in derselben α durch $\alpha+\varepsilon$ und schreiben in der Entwickelung

$$\varphi(y-\alpha x-\varepsilon x) = \varphi(y-\alpha x)+x(-\varepsilon\varphi'(y-\alpha x))+x^2\Big(\frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2}\varphi''(y-\alpha x)\Big):$$
$$\chi(y-\alpha x) \text{ statt } -\varepsilon\varphi'(y-\alpha x), \text{ sowie}$$
$$\psi(y-\alpha x) \quad „ \quad \frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2}\varphi''(y-\alpha x),$$

so entsteht die allgemeine Lösung:

$$z = \varphi(y-\alpha x)+x\chi(y-\alpha x)+x^2\psi(y-\alpha x). \text{ [Vergl. Art. 14, (A.)].}$$

Andererseits kann man aber auch, ehe man eine weitere Wurzel in Rechnung zieht, die Vielfachheit der eben behandelten sofort berücksichtigen, muss jedoch früher die Anzahl der Integrationsconstanten mit Hilfe der bereits vorhandenen willkürlichen Functionen auf den kleinsten nothwendigen Betrag reduciren, da sonst, wie ersichtlich, immer nur Lösungen von derselben Form auftreten würden. In dem vorliegenden Beispiele können die Glieder: α', $\gamma' y$, $c' y^2$, $D' y^3$ ohne weiters in die willkürliche Function φ einbezogen werden. Demnach bleibt

$$z = \varphi(y-\alpha x)+\beta x+ax^2+2bxy+Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2, \quad A+3\alpha B+3\alpha^2 C = 0.$$

Entwickelt man die Werthe (1, 0), und (0, 1):

$$(1, 0) = -\alpha\varphi'+\beta+2ax+2by+3Ax^2+6Bxy+3Cy^2$$
$$(0, 1) = \varphi' + 2bx + 3Bx^2+6Cxy$$

und variirt in den vorhandenen Gleichungen die Parameter, so folgt:

$$0 = x\delta\beta+x^2\delta a+2xy\delta b+x^3\delta A+3x^2y\delta B+3xy^2\delta C$$
$$0 = \delta\beta+2x\delta a+2y\delta b+3x^2\delta A+6xy\delta B+3y^2\delta C$$
$$0 = 2x\delta b+3x^2\delta B+6xy\delta C$$

Diesen Gleichungen sind diejenigen anzufügen, welche vermöge der Operation D aus den beiden letzten entstehen:

$$0 = 2\delta a + 2\mu\delta b + 6x\delta A + 6(y+x\mu)\delta B + 6\mu y\delta C$$
$$0 = 2\delta b + 6x\delta B + 6(y+x\mu)\delta C$$

sowie die Relation

$$0 = \delta A + 3\alpha\delta B + 3\alpha^2\delta C,$$

welcher die Parameter A, B, C von Vornherein genügen müssen. Die Determinante dieses Systemes ist von einem nicht verschwindenden Factor abgesehen, gleich $(\mu-\alpha)^2$, so dass wir für λ, — wie übrigens vorauszusehen war —, wieder den Werth α erhalten.

Danach berechnet man:

$$\delta\beta = 3f^2\delta C, \quad \delta a = 6\alpha f\delta C, \quad \delta b = -3f\delta C, \quad \delta A = 3\alpha^2\delta C, \quad \delta B = -2\alpha\delta C,$$

und, wenn

$$\delta C = \chi'''(f)\delta f$$

gesetzt wird,

$$z = 6\varphi(y-\alpha x) + 6x\chi(y-\alpha x) + \beta' x + \alpha' x^2 + 2b' xy + A' x^3 + 3B' x^2 y + 3C' xy^2$$
$$A' + 3\alpha B' + 3\alpha^2 C' = 0.$$

Diese Lösung ist nun in derselben Weise weiter zu behandeln. Um am besten zu erkennen, wie die Reduction der Constanten vorgenommen werden soll, ersetzen wir in dem voranstehenden Ausdrucke y durch $f+\alpha x$, wodurch sich derselbe auf die Form

$$z = 6\varphi + 6x\chi + xL + x^2 M$$

zusammenzieht, in welcher L und M nur von f abhängige Grössen sind. Man kann sonach, ohne die Allgemeinheit des Resultates zu beschränken, das Glied xL in $x\chi(f)$ einbeziehen, dass heisst, man kann die Glieder

$$\beta' x + 2b' xy + 3C' xy^2$$

weglassen, da ihre Anwesenheit die gefundene Lösung nicht allgemeiner macht. Also haben wir die Lösung

$$z = \varphi(y-\alpha x) + x\chi(y-\alpha x) + ax^2 + Ax^3 + 3Bx^2 y, \quad A + 3\alpha B = 0$$

in derselben Weise weiter zu behandeln. Demnach bilden wir die Variation der voranstehenden Lösung:

$$0 = x^2\delta a + x^3\delta A + 3x^2 y\delta B,$$

operiren dann mit D an dieser Gleichung, woraus, wenn man zuerst mit x^2 dividirt, folgt:

$$0 = \delta A + 3\mu\delta B$$

und verbinden hiemit noch die Bedingungsgleichung

$$0 = \delta A + 3\alpha\delta B.$$

Man erkennt sofort, das $\mu = \alpha$ sein muss und erhält dann

$$\delta A = -3\alpha\delta B, \qquad \delta a = -3f\delta B,$$

sowie endlich die allgemeine Lösung:

$$z = \varphi(y-\alpha x) + x\chi(y-\alpha x) + x^2\psi(y-\alpha x)$$

Dasselbe Verfahren auf das vollständige Integrale:

$$z = \alpha + \beta x + \gamma y + \rho^2 x^2 + 2\rho\sigma xy + \sigma^2 y^2$$

der Gleichung

$$rt - s^2 = 0$$

angewendet, gibt zunächst für z die Form:

$$z = \alpha' + \beta' x + \gamma' y + \varphi(y + \delta' x), \quad y + \delta' x = f$$

worin $\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'$ die Constanten der ersten Integration bedeuten. Reducirt man diesen Ausdruck auf die Form:

$$z = Ax + \varphi(y + Bx), \quad y + Bx = f,$$

so folgt zunächst durch Variation der Parameter

$$0 = \delta A + \varphi'(y + Bx)\,\delta B,$$

welche Gleichung durch die Operation D identisch wird. Sie zeigt, dass

$$y + Bx = \omega(B)$$

sein muss. — Die hieraus folgende Bezeichnung für A führt leicht auf die bekannte Lösung.

Zweiter Abschnitt.

Das allgemeine Problem mit q-Independenten.

8.

Das im vorigen Abschnitte entwickelte Verfahren kann bei Problemen mit q Independenten nicht ohneweiters beibehalten werden. Es ist nämlich in (A.) gezeigt worden, dass die willkürlichen Functionen der allgemeinen Lösung nicht von Einem Argumente abhängen, wie dies bei Differentialgleichungen mit zwei Independenten stets der Fall ist, sondern im Allgemeinen mehr als ein Argument enthalten, wobei die Anzahl der Argumente in einer und derselben Lösung, je nach dem Integralsysteme, welchem die eben in Rede stehende willkürliche Function angehört, alle ganzen Zahlen von 1 bis $q-1$ betragen kann. Dies hat insbesondere zur Folge, dass aus dem Lagrange'schen Verfahren allein auf die Anzahl der nothwendigen Parameter und daher auch auf die Natur der für selbe aufzustellenden Differentialsysteme nicht geschlossen werden kann. Dagegen ergibt sich der gesuchte Zusammenhang zwischen den vollständigen Lösungen und dem allgemeinen Integrale leicht aus den Ergebnissen der in (A.) angestellten Untersuchungen, was im Folgenden zu zeigen meine Absicht ist.

Seien also wieder $c_1, c_2, \ldots c_\nu$ willkürliche Parameter in vorläufig unbestimmter Zahl und ist:

$$z = \binom{0, 0, \ldots 0}{1, 2, \ldots q} = \vartheta(x_1, x_2, \ldots x_q, c_1, c_2, \ldots c_\nu) \tag{1}$$

ein Integrale der partiellen Differentialgleichung p^{ter} Ordnung mit q Independenten:

$$0 = \varphi[x_1, x_2, \ldots x_q; (0, 0, \ldots 0), \ldots, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q), \ldots],\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_q \leqq p, \tag{2}$$

so bestehen identisch die Gleichungen, welche entstehen, wenn man in den folgenden Formeln:

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + \sum \frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_k, \ldots \alpha_q)} \cdot (\alpha_1 \ldots \alpha_k + 1, \ldots \alpha_q) + \sum \frac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1, \ldots \beta_q)} \cdot \frac{\partial(\beta_1 \ldots \beta_q)}{\partial x_k} \tag{3}$$

$$0 = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial(\alpha_1, \ldots \ldots \alpha_q)} \cdot \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} + \sum \frac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1, \ldots \beta_q)} \cdot \frac{\partial(\beta_1 \ldots \beta_q)}{\partial c_i} \tag{4}$$

für k der Reihe nach $1, 2, \ldots q$ und für i die Zahlen $1, 2, \ldots \nu$ einsetzt.[1]

[1] Es ist hiebei die in (A.) [p. 60 ff.] gebrauchte Bezeichnungsweise beibehalten, das heisst, es sind die Ableitungen p^{ter} Ordnung von z durch $(\beta_1, \ldots \beta_q)$, alle anderen von niederer als der p^{ten} Ordnung durch $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q)$ bezeichnet

In der That, werden in (3) und (4) die Ableitungen $(\alpha_1 \ldots \alpha_q)$ und $(\beta_1, \ldots \beta_q)$ durch ihre aus (1) fliessenden Werthe ersetzt, so sagen die gedachten Gleichungen nichts anderes aus, als dass aus (2) dann sowohl $x_1, x_2, \ldots x_q$ als auch die Parameter $c_1, c_2, \ldots c_\nu$ entfallen, was eben wegen der über z gemachten Voraussetzung nothwendig der Fall sein muss.

Um nun aus der bekannten Lösung (1) eine allgemeinere abzuleiten, betrachten wir die willkürlichen Parameter $c_1, c_2, \ldots c_\nu$ als Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_q$ und untersuchen, wann und wie es möglich ist, dieselben so zu bestimmen, dass:

$$0 = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial x_1}, \ldots, \quad 0 = \partial \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial x_q}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q \leqq p-1, \tag{5}$$

da dann, wie bekannt, w abermals ein Integrale der gegebenen Gleichung ist. Zunächst ist klar, dass sich aus den Werthen $\frac{\partial c_i}{\partial x_k}$, wie sie sich aus den voranstehenden Relationen ergeben, die Werthe der c_i selbst nur dann berechnen lassen, wenn die für

$$\frac{\partial c_i}{\partial x_1}, \frac{\partial c_i}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial c_i}{\partial x_q}$$

gefundenen Werthe sich in der That als Derivirte einer Function c_i der Argumente: $x_1, x_2, \ldots x_q$ darstellen lassen. Die Parameter c_i müssen also ausser den (5) auch noch gewissen Integrabilitäts-Bedingungen genügen, welche übrigens erhalten werden, wenn man die Formel:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \partial, \frac{\partial c_i}{\partial x_\lambda}\right] - \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left[\sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1 \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial x_k}\right]$$

entwickelt und hierauf λ und k alle ganzzahligen Werthe von 1 bis q annehmen lässt.

So entstehen die Gleichungen:

$$0 = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_k + 1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial x_\lambda} - \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_\lambda + 1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial x_k}.$$

Wie ersichtlich, sind diejenigen unter ihnen, bei denen

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q < p-1,$$

durch die (5) identisch erfüllt. Neue Bedingungen entstehen nur für

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p-1.$$

Also folgen die Integrabilitätsbedingungen:

$$0 = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_k + 1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial x_\lambda} - \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_\lambda + 1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial x_k}, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p-1 \tag{6}$$

und diese bilden mit den (5) zusammen den Inbegriff aller Forderungen, denen die c genügen müssen.

worden. Sonach ist die erste Summe in den Formeln (3) und (4) über alle $(\alpha_1, \ldots \alpha_q)$ zu erstrecken, welche der Bedingung

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_q \leqq p-1$$

genügen, während bezüglich der β die Bedingung

$$\beta_1 + \ldots + \beta_q = p$$

festzuhalten ist.

Diese Bedingungen erhalten eine allgemeine Form, wenn man an Stelle der $x_1 \ldots x_q$ neue Veränderliche $w_1, w_2 \ldots w_q$ substituirt. Seien

$$w_1(x_1, x_2, \ldots x_q) = w_1, \ldots, w_q(x_1, x_2, \ldots x_q) = w_q$$

die Transformationsgleichungen, so wird

$$\frac{\partial c_i}{\partial w_\rho} = \frac{\partial c_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial w_\rho} + \ldots\ldots + \frac{\partial c_i}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial x_q}{\partial w_\rho}$$

und die Gleichungen (5) verwandeln sich in die folgenden:

$$0 = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial w_1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \; 0 = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial w_q}. \tag{7}$$

Um auch die (6) auf die neuen Independenten zu transformiren, multipliciren wir selbe mit $\frac{\partial x_k}{\partial w_\rho} \cdot \frac{\partial x_\lambda}{\partial w_\sigma}$ und summiren dann über alle ganzzahligen Werthe der λ und k von 1 bis q. Auf diese Weise folgt:

$$0 = \sum_{i=1}^{i=\nu} \sum_{k=1}^{k=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} \left\{ \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_k + 1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x_\lambda}{\partial w_\sigma} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial w_\rho} - \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_\lambda + 1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial w_\rho} \frac{\partial x_\lambda}{\partial w_\sigma} \right\}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} 0 = {} & \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial c_i}{\partial w_\sigma} \left\{ \frac{\partial(\alpha_1 + 1, \alpha_2, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial w_\rho} + \ldots\ldots + \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q + 1)}{\partial c_i} \frac{\partial x_q}{\partial w_\rho} \right\} \\ & - \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial c_i}{\partial w_\rho} \left\{ \frac{\partial(\alpha_1 + 1, \alpha_2, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial w_\sigma} + \ldots\ldots + \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q + 1)}{\partial c_i} \frac{\partial x_q}{\partial w_\sigma} \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Gleichungen (7) und (8) enthalten die allgemeinste Form der zu erfüllenden Bedingungen.

9.

Es ist selbstverständlich unsere Absicht, die Gleichungen (7) und (8), durch deren Erfüllung das gegebene vollständige Integrale in das allgemeine übergeführt wird, mit entsprechenden Formeln der Abhandlung (A.) identisch zu machen, um aus dem solcher Art hergestellten Zusammenhange mit der Theorie der allgemeinen Integration ersehen zu können, ob und wie die Gleichungen (7) und (8) befriedigt werden können. In dieser Absicht machen wir $w_1 = x_1$ und setzen:

$$\frac{\partial c_i}{\partial w_1} = \frac{\partial c_i}{\partial x_1} = 0.$$

Es ist sofort ersichtlich, was diese Annahme zu bedeuten hat. Setzen wir nämlich

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_1} = \mu_k \; (\mu_1 = 1),$$

— wobei zu bemerken ist, dass die Werthe μ_k durch die Transformationsgleichungen

$$x_1 = x_1, \; x_2 = x_2(x_1, w_2, \ldots, w_q), \ldots, x_q = x_q(x_1, w_2, \ldots, w_q) \tag{α}$$

bestimmt, also wie diese vorderhand willkürlich sind — und bezeichnen eine Differentiation nach x_1, welche nach der Substitution der Werthe α) an irgend einer Function von $x_1, x_2, \ldots x_q$ vollzogen wird, durch D, so wird

$$\frac{\partial c_i}{\partial w_1} = Dc_i$$

und es soll der Annahme nach

$$Dc_i = \frac{\partial c_i}{\partial x_1} + \mu_2 \frac{\partial c_i}{\partial x_2} + \ldots + \mu_q \frac{\partial c_i}{\partial x_q}$$

den Werth Null erhalten. Da nun die $w_2, \ldots w_q$ als Integrationsconstante im Systeme:

$$Dx_k = \mu_k \tag{β}$$

aufgefasst werden können, so bedeutet die obige Annahme nichts Anderes, als dass die Parameter $c_1, c_2, \ldots c_\nu$ als Functionen der $w_2, \ldots w_q$ allein oder mit anderen Worten, ebenfalls als Integrationsconstante im Systeme β) angesehen werden.

Von den Gleichungen, in welche sich (7) und (8) unter dieser Annahme verwandeln, finden sich — allerdings in veränderter Gestalt — in (A.) nur die folgenden:

$$0 = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial w_2}, \ldots\ldots\ldots, 0 = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial w_q}, \tag{9}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial c_i}{\partial w_\sigma} \left\{ \frac{\partial(\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} + \mu_2 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2+1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} + \ldots + \mu_q \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q+1)}{\partial c_i} \right\}, \tag{10}$$

in denen σ alle ganzzahligen Werthe von 2 bis q zu durchlaufen hat und

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q \leqq p-1$$

zu halten ist. Wir werden uns also in den weiteren Untersuchungen auch nur mit diesen Gleichungen beschäftigen.

Wir haben soeben angenommen, dass die Parameter $c_1, \ldots c_\nu$ Functionen der $w_2, \ldots w_q$ allein oder, um besser hervorzuheben, dass für diese Functionen eine nähere Bestimmung noch nicht vorhanden ist, Integrationsconstante im Systeme (β) sein sollen. Soll aber diese Annahme überhaupt möglich sein, so muss, nachdem in (9) und (10) $x_2, \ldots x_q$ durch ihre Werthe in x_1, $w_2, \ldots w_q$ ersetzt worden sind, x_1 aus diesen Gleichungen entfallen. Mit anderen Worten, es muss für $\sigma = 2, 3, \ldots q$ zunächst identisch

$$D \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial w_\sigma} = 0 \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q \leqq p-1)$$

ausfallen. Führt man die Differentiation linker Hand aus, so folgt, da $\frac{\partial c_i}{\partial w_i}$ der Annahme nach nur $w_2, \ldots w_q$ enthält,

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial c_i}{\partial w_\sigma} \left\{ \frac{\partial(\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} + \mu_2 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2+1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} + \ldots + \mu_q \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q+1)}{\partial c_i} \right\} = 0.$$

Es sind also alle Gleichungen, welche aus der voranstehenden, für die verschiedenen zulässigen α entstehen, vermöge der (9) identisch erfüllt, so lange

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_q + \ldots + \alpha_q < p-1,$$

während für

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p-1$$

die in Rede stehenden Gleichungen unmittelbar mit (10) zusammenfallen. Daraus folgt, dass, wenn die letzteren kein x_1 mehr enthalten, x_1 auch in allen früheren Gleichungen nicht mehr auftritt, somit die $c_1, c_2, \ldots c_\nu$ aus den Gleichungen (9) und (10) wirklich als Functionen von $w_2, \ldots w_q$ dargestellt werden können.

In der That enthalten die Gleichungen (10) in allen Fällen, wo ein vollständiges Integrale im eigentlichen Sinne zu Grunde liegt, — der Begriff eines vollständigen Integrales wird im Folgenden genauer definirt werden — nie die Grösse x_1 und es wird die Aufgabe der folgenden Artikel sein, diese Thatsache aus dem Processe der allgemeinen Integration nachzuweisen.

10.

Ehe wir zu diesen Untersuchungen übergehen können, müssen noch einige wichtige Umstände hervorgehoben werden.

Zunächst ist nämlich klar, dass das System der Gleichungen (9) und (10) nur dazu dienen kann, eine gewisse Anzahl der Grössen $c_1, \ldots c_\nu$ als Functionen der übrigen darzustellen. Demgemäss vereinigen wir die $q-1$ Systeme von Gleichungen, welche in (9) und (10) enthalten sind, in ein einziges System, indem wir schreiben:

$$0=\sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i}\, \delta c_i \tag{11}$$

$$0=\sum_{i=1}^{i=\nu} \delta c_i \left\{\frac{\partial(\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i}+\mu_2 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2+1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i}+\ldots+\mu_q \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q+1)}{\partial c_i}\right\}. \tag{12}$$

Es ist dann unter δu die Veränderung zu verstehen, welche eine Grösse u des Problems erleidet, wenn bei constantem x_1 die Argumente $w_2, \ldots w_q$ die Incremente $\delta w_2, \ldots \delta w_q$ erhalten. Die Gesammtvariation, welche u in unserem Probleme erfahren kann, ist also

$$Du+\delta u.$$

Dies vorangeschickt, multipliciren wir die Gleichungen (11) beziehungsweise mit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q)},$$

jene (12) mit gewissen, vorderhand nicht näher bestimmten Factoren, welche, ohne Irrthum zu veranlassen, durch

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q]$$

bezeichnet werden können und addiren die erhaltenen Producte. — Es folgt dann:

$$0=\sum \frac{\partial \varphi}{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_q)} \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i}\, \delta c_i+\Sigma\, [\alpha_1, \ldots \alpha_q] \sum_{i=1}^{i=\nu} \delta c_i \sum_{k=1}^{k=q} \mu_k \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_k+1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i}, \tag{γ}$$

wobei die erste Summation im voranstehenden Gliede über alle $\alpha_1, \ldots \alpha_q$ zu erstrecken ist, für welche

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_q \leq p-1 \tag{δ}$$

während im zweiten blos die der Bedingung:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_q=p-1$$

genügenden aufzunehmen sind. Andererseits folgt aus der gegebenen Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c_i}=\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_q)} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i}+\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial(\beta_1, \ldots \beta_q)} \frac{\partial(\beta_1, \ldots \beta_q)}{\partial c_i},$$

worin die $\alpha_1, \ldots \alpha_q$ abermals der Bedingung (δ), die Zahlen $\beta_1, \ldots \beta_q$ aber der Relation:

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_q=p$$

unterworfen sind. Damit findet man für die Variation $\delta\varphi$, wenn man zugleich die Formel (γ) berücksichtigt:

$$\delta \varphi=\sum \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\beta_1, \ldots \beta_q)}{\partial c_i}\, \delta c_i \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial(\beta_1, \ldots \beta_q)}-\sum_{k=1}^{k=q} \mu_k\, [\beta_1, \ldots \beta_k-1, \ldots \beta_q]\right\}.$$

Das Zeichen Σ betrifft die $\beta_1, \dots \beta_q$ unter der eben genannten Bedingung. Aus dieser Gleichung folgt, dass die Variation $\delta\varphi$ nur dann verschwindet, wenn für alle Complexionen p^{ter} Ordnung:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1, \dots \beta_q)} = \sum_{k=1}^{k=q} \mu_k [\beta_1, \dots \beta_k - 1, \dots \beta_q] \tag{13}$$

gemacht werden kann. Es ist aber aus [(*A*.) p. 67, und ff.] bekannt, dass diese Forderung im Allgemeinen nicht befriedigt werden kann. Es wird sich aus dem Folgenden ergeben, dass die Gleichungen (11) und (12) immer integrirt werden können, wenn nur das ϑ des Art. 8 in der That ein Integrale der vorgelegten Gleichung ist. Wir werden also wohl die Gleichungen (11) und (12) durch ein vollständiges Integralsystem ersetzen können, führt man aber die aus denselben fliessenden Werthe der Parameter in (1) des Art. 8 ein, so wird das so transformirte z im Allgemeinen nicht mehr ein Integrale der gegebenen Gleichung sein. Aus der Relation (13) ergibt sich übrigens mit Hilfe einiger Bemerkungen, die sich naturgemäss den Betrachtungen des folgenden Artikels einordnen werden, dass jene Fälle, in welchen die gegebene Gleichung durch die Integrale des Systemes (11) und (12) nicht befriedigt ist, genau mit jenen zusammenfallen, welche auch in den Untersuchungen über die allgemeine Integration eine ausnahmsweise Behandlung erfordert haben. In der That werden sich auch hier die diesbezüglichen Resultate der (*A*.) wieder ergeben.

11.

Indem wir nun zu unserer eigentlichen Aufgabe gelangen, wollen wir zunächst untersuchen, wie vollständige Integrale aus dem allgemeinen entstehen können, um daran zu erkennen, wie umgekehrt aus einem vorliegenden vollständigen Integrale das allgemeine abzuleiten ist. Denn es ist klar, dass man aus dem allgemeinen Integrale jedes particuläre, also auch ein vorgelegtes vollständiges Integrale muss erreichen können. [1]

Wiederholen wir also kurz den Vorgang der allgemeinen Integration. Den Ausgangspunkt derselben bilden die Gleichungen:

$$P_k(\omega_k) = \frac{\partial\varphi}{\partial(1)}\omega_k^p - \dots + (-1)^i \frac{\partial\varphi}{\partial\begin{pmatrix}p-i, 0, \dots, i, \dots 0\\ 1, \;\; 2, \dots, k, \dots q\end{pmatrix}}\omega_k^{p-i} + \dots + (-1)^p \frac{\partial\varphi}{\partial(k)} = 0. \tag{14}$$

Indem wir aus jeder der hieraus entstehenden Gleichung:

$$P_2(\omega_2) = 0, \quad P_3(\omega_3) = 0, \;\dots, P_q(\omega_q) = 0$$

je eine Wurzel nehmen und dieselben der Reihe nach durch

$$\lambda_2', \quad \lambda_3', \dots \lambda_q'$$

bezeichnen, erhalten wir ein System von Wurzeln, welches in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen der (*A*.) das erste Wurzelsystem genannt werden soll. Setzen wir voraus, dass die obigen Gleichungen nur ungleiche Wurzeln besitzen, so können p solcher Wurzelsysteme gebildet werden, wenn eine Wurzel, welche schon in irgend eines dieser Systeme aufgenommen wurde, aus jedem anderen ausgeschlossen wird. Diese Wurzelsysteme unterscheiden wir untereinander durch oben angefügte römische „*I, II,... P*," und benennen sie nach diesem Index. Die einem und demselben Systeme angehörigen Wurzeln sind dann während des ganzen Integrationsprocesses als ein Complex zusammengehöriger Grössen aufzufassen.

In Art. 18 der (*A*.) ist gezeigt worden, dass die Gleichungen (13)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(\beta_1, \dots \beta_q)} = \sum_{k=1}^{k=q} \mu_k [\beta_1, \dots \beta_k - 1, \dots \beta_q], \quad \beta_1 + \dots + \beta_q = p \tag{13}$$

---

[1] Wegen der Bezeichnungen in diesem Art. vergl. (*A*.), IV. Abschnitt.

im Allgemeinen nicht gleichzeitig existiren können. Vielmehr lässt sich aus denselben ein Theil von solchen Gleichungen ausscheiden, welche untereinander verträglich sind und gestatten, die Grössen μ sowie die Factoren $[\beta_1, \ldots \beta_k - 1, \ldots \beta_q]$ zu berechnen. Hiebei ergibt sich, dass die Grössen $\mu_2, \mu_3 \ldots \mu_q$ ein Wurzelsystem der eben definirten Art constituiren müssen. Indem wir auf den Inhalt des vorigen Artikels zurückgreifen, sehen wir also, dass, wenn die gegebene Gleichung durch die Integrale des Systemes (11) und (12) überhaupt soll befriedigt werden können, dass dann zunächst der Complex der μ-Werthe mit einem der oben aufgestellten p Complexe von λ-Werthen zusammenfallen muss. Danach können also alle p Wurzelsysteme an Stelle der μ eingeführt werden.

Es ist nun möglich, dass bei einer bestimmten Auswahl dieser Wurzelsysteme die Gleichungen (13) für alle p Complexe von Wurzelwerthen sowie für alle Complexionen $(\beta_1, \ldots \beta_q)$ der p^{ten} Ordnung giltig sind. In diesem Falle lässt sich der Ausdruck

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q)} \xi_1^{\beta_1} \xi_2^{\beta_2} \ldots \xi_q^{\beta_q} \quad [\text{vergl. } (A.) \text{ p. } 81]$$

in p lineare Factoren zerlegen, denn es ist dann:

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q)} \xi_1^{\beta_1} \xi_2^{\beta_2} \ldots \xi_q^{\beta_q} = \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda'_\mu \, \xi_\mu\right)\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda''_\mu \, \xi_\mu\right) \ldots \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \lambda^{p}_\mu \, \xi_\mu\right) \tag{15}$$

und auf diesen Fall wollen wir uns, um einfacher im Ausdrucke bleiben zu können, vorderhand beschränken. Wir schliessen sonach von den folgenden Betrachtungen zunächst alle jene Probleme aus, bei welchen es keine Eintheilung der λ-Werthe im p Systeme gibt von der Beschaffenheit, dass die Zerlegung (15) stattfinde, es sind dies zugleich jene Gleichungen, bei denen die aus den Relationen (11) und (12) fliessenden Werthe der Parameter die gegebene Gleichung (2) Art. 8, nicht identisch erfüllen.

Dies vorangeschickt, ist nun das Differentialsystem:

$$D_l x_k = \frac{dx_k}{dx_1} = \lambda_k^l, \quad k = 2, 3, \ldots q$$

$$D_l(\alpha_1, \ldots \alpha_k, \ldots \alpha_q) = \sum_{k=1}^{k=q} \lambda_k^l (\alpha_1, \ldots \alpha_k + 1, \ldots \alpha_q), \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q < p-1 \tag{I}$$

$$\Sigma[\alpha_1, \ldots \alpha_2, \ldots \alpha_q] \, D'_l(\alpha_1, \ldots \alpha_i + 1, \ldots \alpha_q) = - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial(1)}}, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_q = p-1$$

zu integriren. Es enthält um

$$\binom{p+q-1}{q-1} - q$$

Gleichungen weniger als zu bestimmende Grössen und wird integrirt, indem alle Grössen p^{ter} Ordnung mit Ausnahme der einzifferigen $(1), (2), \ldots (q)$ als unbestimmte Functionen der Independenten x_1 angesehen werden. Die Integralgleichungen enthalten also diese unbestimmten Grössen nicht nur als Functionsargumente im gewöhnlichen Sinne, sondern auch unter Integralzeichen. Die unbestimmten Functionen müssen im Verlaufe der Rechnung so bestimmt werden, dass die Gleichungen:

$$\delta(\alpha_1, \ldots \alpha_k, \ldots \alpha_q) = \sum_{k=1}^{k=q} (\alpha_1, \ldots \alpha_k + 1, \ldots \alpha_q) \, \delta x_k, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q < p \tag{16}$$

x_1 nicht mehr enthalten, oder was dasselbe ist, dass die Ausdrücke

$$Z(\alpha_1, \ldots \alpha_q) = \sum_{k=1}^{k=q} [\lambda_k^l \delta(\alpha_1, \ldots \alpha_k + 1, \ldots \alpha_q) - D_l(\alpha_1, \ldots \alpha_k + 1, \ldots \alpha_q) \delta x_k], \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_q = p-1 \tag{17}$$

identisch den Werth Null annehmen. Man findet die allgemeinsten Werthe der unbestimmten Functionen durch eine Reihe von Operationen, welche in $(A.)$ ausführlich beschrieben und dort als die Zerlegung der gegebenen Gleichung in ihre wesentlichen Integrale erster, zweiter Stufe u. s. w. bezeichnet worden sind. Die Annahmen, welche kurz vorher gemacht worden sind, haben zur Folge, dass die genannte Zerlegung durch alle Stufen hindurch ausgeführt werden kann. Denken wir uns die gegebene Differentialgleichung in ihre wesentlichen Integrale erster Stufe nach dem Systeme (P) zerlegt, diese in die wesentlichen Integrale zweiter Stufe nach dem Systeme $(P-1)$ u. s. f., so gelangen wir schliesslich dahin, die Integrale der $(p-1)^{\text{ten}}$ Stufe in ihre wesentlichen Integrale p^{ter} Stufe nach dem Systeme (I) zu zerlegen. Diese letztgenannte Operation erfordert die Integration eines Differentialsystemes, welches so viel Gleichungen besitzt als zu bestimmende Grössen, also vollständig ist und insbesondere als eine Vervollständigung des oben angeführten unvollständigen Systemes (I) betrachtet werden kann. Betrachten wir die Integralgleichungen dieses Systemes in dem Zustande, in welchem sie unmittelbar aus der Integration hervorgehen, das heisst in dem Zustande, in welchem zwischen den Integrationsconstanten noch keine Relationen eingeführt worden sind, so besitzen wir in den Werthen, welche die bisher unbestimmten Funtionen in diesem Systeme erhalten, eben jene gesuchten Werthe, welche die Ausdrücke $Z(\alpha_1, \ldots \alpha_q)$ identisch zu Null machen. Setzt man also für die Grössen des Problemes, deren Werthe aus dem letzten Integralsysteme, so enthalten die Gleichungen (16) x_1 nicht mehr und die Integration derselben liefert die Relationen zwischen den Integrationsconstanten, welche das vorliegende Integralsystem in das definitive verwandeln. Es treten bei diesen Operationen p willkürliche Functionen ein und da hier allein Gelegenheit ist, willkürliche Functionen einzuführen, so ist klar, dass jedes particuläre Integrale durch Specialisirung dieser willkürlichen Functionen erreichbar sein muss. Es kann also auch ein jedes beliebig vorgegebene vollständige Integrale nur auf diesem Wege aus der allgemeinen Lösung abgeleitet werden.

Das definitive Integralsystem ist vermöge seiner Entstehung so beschaffen, dass durch Elimination der willkürlichen Bestandtheile nur Eine, und zwar die gegebene Differentialgleichung entstehen kann, und es behält diese Eigenschaft selbstverständlich auch dann bei, wenn an Stelle der willkürlichen Functionen concrete Functionen mit beliebig vielen Parametern eingesetzt werden. Es ist aber klar, dass im letzteren Falle, sobald irgend einer der eingeführten Parameter eliminirt wird, mit ihm zugleich eine gewisse Anzahl jener Parameter, welche derselben willkürlichen Function entspringen, zum Ausfall kommen muss, so dass sich die Anzahl der in einem vollständigen Integrale nothwendiger Weise enthaltenen Parameter auf die Anzahl der aus dem Integralsysteme überhaupt eliminirbaren Grössen reducirt. Da nun $q-1$ Gleichungen derselben die Grössen $w_2, \ldots w_q$ definiren, so können

$$\nu = \binom{p+q}{q} - 1$$

Parameter eliminirt werden und dies ist zugleich die Anzahl der in einem vollständigen Integrale nothwendig enthaltenen Parameter. Zugleich ist evident, dass ein auf solche Weise hergestelltes vollständiges Integrale ausser der gegebenen Gleichung keiner anderen von derselben oder von niederer Ordnung genügen kann, wenn man nur die Bedingung hinzufügt, dass die letztgedachte Gleichung andere Parameter als die in φ von vornherein vorkommenden nicht enthalten soll. Das Bestehen einer solchen Gleichung würde nämlich beweisen, dass für eine oder mehrere der willkürlichen Functionen Ausdrücke ohne willkürliche Parameter eingesetzt wurden, das erhaltene Integrale also wohl ein particuläres, aber kein vollständiges Integrale ist.

Was nun die im vollständigen Integrale enthaltenen Parameter betrifft, so ist klar, dass sie (in der Ausdrucksweise des Art. 3) variable Parameter sein müssen, da nur dann die Gleichungen (16) wirklich, wie die Theorie verlangen muss, integrabel sind.

Danach ist als ein vollständiges Integrale zu definiren: ein particuläres Integrale mit

$$\nu = \binom{p+q}{q} - 1$$

variablen Parameter, welches so beschaffen ist, dass durch dasselbe ausser der gegebenen Gleichung keine andere von derselben oder von niederer Ordnung befriedigt wird, es sei denn, dass sie Parameter enthalten würde, welche in der gegebenen Gleichung nicht vorhanden sind.

12.

Um nun aus einem vollständigen Integrale das allgemeine wieder zu finden, genügt es zu bemerken, dass die Gleichungen (11) und (12) Art. 10 ihrem Inhalte nach mit den Gleichungen (16) und (17) des vorigen Artikels zusammenfallen, wenn in ihnen die Grössen $\mu_2 \ldots \mu_q$ durch die Werthe $\lambda'_2, \ldots \lambda'_q$ ersetzt worden sind.

In der That ist, wenn man die Verschiedenheit in der Bedeutung der Zeichen gehörig berücksichtigt, das $\delta(\alpha_1, \ldots \alpha_k+1, \ldots \alpha_q)$ des vorigen Artikels nichts anderes als der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_k+1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \delta c_i + \sum_{\mu=1}^{\mu=q} (\alpha_1, \ldots \alpha_\mu+1, \ldots \alpha_k+1, \ldots \alpha_q) \delta x_k$$

in den Zeichen des Art. 10, daher:

$$\sum_{k=1}^{k=q} \lambda'_k \delta(\alpha_1, \ldots \alpha_k+1, \ldots \alpha_q) = \sum_{k=1}^{k=q} \lambda'_k \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_k+1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \delta c_i + \sum_{k=1}^{k=q} \lambda'_k \sum_{\mu=1}^{\mu=q} (\alpha_1, \ldots \alpha_\mu+1, \ldots \alpha_k+1, \ldots \alpha_q) \delta x_\mu$$

$$= \sum_{k=1}^{k=q} \lambda'_k \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_k+1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \delta c_i + \sum_{\mu=1}^{\mu=q} D_I(\alpha \ldots \alpha_\mu+1, \ldots \alpha_1) \delta x_\mu$$

und mit Rücksicht darauf, dass $D_I u$ in beiden Schreibweisen dieselbe Bedeutung hat,

$$\sum_{k=1}^{k=q} \{\lambda'_k \delta(\alpha_1, \ldots \alpha_k+1, \ldots \alpha_q) - D_I(\alpha_1, \ldots \alpha_k+1, \ldots \alpha_q) \delta x_k\}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=\nu} \delta c_i \left\{ \frac{\partial(\alpha_1+1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} + \lambda'_2 \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2+1, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} + \ldots + \lambda'_q \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q+1)}{\partial c_i} \right\}.$$

Anderseits findet man sofort:

$$\delta(\alpha_1, \ldots \alpha_q) - \sum_{k=1}^{k=q} (\alpha_1, \ldots \alpha_k+1, \ldots \alpha_q) \delta x_k = \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\partial(\alpha_1, \ldots \alpha_k, \ldots \alpha_q)}{\partial c_i} \delta c_i,$$

so dass in der That die Gleichungen (11) und (16) einerseits, sowie (12) und (17) anderseits ihrem Inhalte nach identisch sind.

Damit ist nachgewiesen, dass die Gleichungen (11) und (12), wenn sie aus einem vollständigen Integrale in dem oben definirtem Sinne entstanden sind, den Anfforderungen, welche an sie gestellt wurden, in allen in Rede stehenden Fällen genügen. Da nun die Gleichungen (11) und (12) kein x_1 mehr enthalten, so müssen alle aus den anderen Differentialsystemen herrührenden Bestandtheile entfallen sein und dieselben können nur Relationen zwischen den Constanten des Integralsystemes p^{ter} Stufe oder, was inhaltlich dasselbe ist, des Systemes (I) festsetzen, wie auch weiter oben bereits constatirt worden ist.

Das System (11), (12) ist ferner stets unbeschränkt integrabel und folgt dies aus seinem theoretischen Inhalte. Was nämlich zunächst die Gleichungen (11) betrifft, so sind sie, wie eben gezeigt, mit den (16) dem Inhalte nach identisch. Die letzteren enthalten kein x_1, sobald die unbestimmten Grössen durch ihre richtigen Werthe ersetzt worden sind; also kann man ihre Form auch vor der Bestimmung dieser Werthe angeben, falls man bei der Integration des Differentialsystemes p^{ter} Stufe die sogenannten Hauptintegrale einführt. Bezeichnet man jene Werthe, welche die Dependenten dieses Systemes für einen concreten, nicht singulären

Werth x_1^0 der Independenten x_1 annehmen, durch oben angefügte „^{0}“, so verwandeln sich die Relationen (16) in die folgenden:

$$\partial(\alpha_1,\ldots\alpha_k,\ldots\alpha_q)^0 = \sum_{k=2}^{k=q}(\alpha_1,\ldots\alpha_k+1,\ldots\alpha_q)^0\,\partial x_k^0,\quad \alpha_1+\ldots+\alpha_k+\ldots+\alpha_q<p, \tag{18}$$

deren Integrale man ohne weiters angeben kann.

Setzt man nämlich:

$$\begin{pmatrix} i, 0, 0,\ldots 0\\ 1, 2, 3,\ldots q\end{pmatrix}^0 = \Phi_i(x_2^0, x_3^0,\ldots x_q^0),\quad i=0,1,2,\ldots,p-1,$$

wobei $\Phi_0, \Phi_1,\ldots\Phi_{p-1}$ willkürliche Functionsformen bedeuten, so wird:

$$\begin{pmatrix} i, \alpha_2,\ldots\alpha_q\\ 1,\ 2,\ldots q\end{pmatrix}^0 = \frac{\partial^{\alpha_2+\ldots+\alpha_q}\Phi_i}{(\partial x_2^0)^{\alpha_2}\ldots(\partial x_q^0)^{\alpha_q}},\quad i+\alpha_2+\ldots+\alpha_q\leq p, \tag{19}$$

durch welche Beziehungen alle Gleichungen (18) integrirt erscheinen. Doch bestimmen diese Integralgleichungen die Grössen $(\alpha_1,\ldots\alpha_k,\ldots\alpha_q)^0$ mit Hilfe von p willkürlichen Functionen, während sie der Theorie zufolge als Integrationsconstante des Systemes (I) nur Eine willkürliche Function enthalten sollen. Da nun in der Abhandlung $(A.)$ auf einem Wege, der von dem hier gegenwärtigen Untersuchungen unabhängig ist, nachgewiesen wurde, dass die Gleichungen (17) stets gleichzeitig befriedigt werden können und dass, nachdem sie befriedigt worden sind, das System der (16) mit Hilfe einer einzigen willkürlichen Function integrirt werden kann, so schliessen wir hier umgekehrt, dass sich die Integralgleichungen des Systemes

$$0=\sum_{k=1}^{k=q}\{\lambda_k^I\partial(\alpha_1,\ldots\alpha_k,\ldots\alpha_q)-D_I(\alpha_1,\ldots\alpha_k+1,\ldots\alpha_q)\,\partial x_k\}^0 \tag{20}$$

auf $p-1$ Relationen zwischen den Functionen $\Phi_0, \Phi_1,\ldots\Phi_{p-1}$ reduciren lassen, durch deren Bestehen sodann nicht allein die (20) identisch erfüllt sind, sondern auch die (19) die geforderte Form erhalten. Damit ist der Beweis erbracht, dass das System (11) und (12) stets integrabel ist. Man wird zugleich bemerken, dass das Integralsystem in allen Fällen leicht gewonnen werden kann. Da nämlich das vorgelegte Integrale ein vollständiges Integrale ist, so muss es immer möglich sein, die Parameter $c_1, c_2,\ldots c_\nu$ und die Grössen $w_2,\ldots w_q$ durch die Anfangswerthe $(\alpha_1,\ldots\alpha_q)^0$, welche man füglich Hauptparameter nennen könnte und durch $x_2^0,\ldots x_q^0$ auszudrücken. Setzt man in diesen Bestimmungsgleichungen für die Hauptparameter deren eben ermittelten Werthe, so erhält man unmittelbar die Integralgleichungen des Systemes (16) und (17), resp. (11) und (12).

Trägt man bei den beschriebenen Operationen Sorge, ν von einander unabhängige Integrationsconstante $c_1', c_2',\ldots c_\nu'$ einzuführen (vergl. Art. 3), so geht durch Einführung der gewonnenen Werthe ϑ in eine Function von $x_1,\ldots x_q$; $c_1', c_2'\ldots c_\nu'$ über, welche in allen Fällen, die der am Eingange des Art. 11 gemachten Voraussetzung entsprechen, augenscheinlich wieder ein vollständiges Integrale der gegebenen Gleichung ist. Wiederholt man nun die ganze Rechnung, setzt jedoch an Stelle der $\mu_2,\ldots\mu_q$ das zweite Wurzelsystem $\lambda_2^{II},\ldots\lambda_q^{II}$, so erhält man die willkürlichen Bestandtheile des zweiten Systemes und indem man so fortfährt, bis alle Wurzelsysteme erschöpft sind, schliesslich das allgemeine Integrale.

13.

Die Erfüllung der Gleichungen (16) und (17) ist eine für die Integration wesentliche Forderung; es kann kein Integrale gefunden werden, ohne dass diese Gleichungen befriedigt würden, und zwar ohne Rücksicht darauf, ob die Zerlegung (15) möglich ist oder nicht. Wir können daher die in den vorhergehenden Artikeln aufgestellten Begriffe auch auf die Fälle ausdehnen, die noch zu besprechen sind, das ist auf jene, bei welchen die genannte Zerlegung nicht möglich ist, und dies mit um so grösserer Berechtigung als die Unterscheidung in Gleichungen, welche diese Zerlegung gestatten, oder nicht gestatten, sich überhaupt nur auf die Art bezieht, wie die Gleichungen (16) und (17) befriedigt werden können, die Möglichkeit ihrer Erfüllung hingegen gar nicht berührt. Besitzt man also ein Integrale einer gegebenen Gleichung, so ist von vornherein gewiss, dass die aus demselben abgeleiteten Gleichungen (11) und (12) jederzeit befriedigt werden können. Ist das betreffende Integrale das allgemeine, so sind sie identisch erfüllt; bei vollständigen Integralen können sie stets durch Beziehungen zwischen den Parametern allein befriedigt werden. Kann dies aber nur dadurch geschehen, dass man einige oder alle Parameter gleich constanten, keiner Variation fähigen Grössen setzt, so ist das vorliegende Integrale kein vollständiges Integrale und kann für uns keinen Gegenstand weiterer Untersuchung bilden. Diese Begriffsbestimmungen gelten also jetzt für alle Gleichungen ohne Unterschied.

Sei nun ein vollständiges Integrale gegeben und entwickeln wir die Gleichungen (11) und (12), so können diese nach denselben Principien wie früher behandelt werden. Setzt man also insbesondere für die Grössen μ die λ-Werthe, welche einem beliebigen der p vorhandenen Wurzelsysteme — also etwa dem Systeme I — angehören, so ist es immer möglich, aus den Gleichungen (11) und (12) die Parameter $c_1, \dots c_\nu$ als Functionen der Grössen $w_2^I, \dots w_q$ und der Ableitungen einer willkürlichen Function Φ_0 dieser Grössen nach den Argumenten $w_2^I, \dots w_q^I$ darzustellen, jedoch nur dann, wenn man hiebei die gegebene Gleichung unberücksichtigt lässt und nicht fordert, dass die für die Parameter folgenden Werthe zugleich der gegebenen Gleichung genügen sollen. Dies würde, wie in Art. 10 gezeigt worden, von vornherein einen Widerspruch involviren. Bestimmt man aber die Parameter unabhängig von der gegebenen Gleichung blos aus den Gleichungen (11) und (12) als Functionen von $w_2^I, \dots w_q^I$, $\frac{\partial \Phi_0}{\partial w_2^I}, \dots, \frac{\partial^p \Phi_0}{\partial (w_2^I)^\alpha (\partial w_3^I)^\beta \dots}$ und setzt diese Werthe in z ein, so erhält man einen Werth, welcher der gegebenen Gleichung nicht mehr identisch Genüge leistet. Diese verwandelt sich vielmehr in eine Bestimmungsgleichung für Φ_0, denn sie enthält, wie man aus den Formeln des Art. 10 unmittelbar erkennt, nur mehr die Grössen $w_2^I, \dots w_q^I$ und die Ableitungen von Φ_0 nach diesen Grössen bis zur p^{ten} Ordnung und ist im Allgemeinen wieder eine Differentialgleichung p^{ter} Ordnung, welche jedoch nicht q, sondern nur mehr $q-1$ Independente enthält. Es ist daraus zu ersehen, dass die Integrale solcher Gleichungen, wie wir sie jetzt behandeln, willkürliche Functionen Φ_0, in welchen die Argumente $w_2^I, \dots w_q^I$ untereinander unabhängig sind, im Allgemeinen nicht enthalten kann, dass vielmehr diese Argumente, wenn Φ_0 keiner Beschränkung in Hinsicht der Willkürlichkeit unterliegen soll, nur in festen, durch die eben erhaltene Bestimmungsgleichung bedingten Verbindungen in Φ_0 eintreten können.

Hierin stimmen die gegenwärtigen Ergebnisse mit den Resultaten der (*A.*) vollständig überein. Es ist aber ein Umstand nachzutragen, welcher besondere Aufmerksamkeit verdient und, um die Begriffe zu fixiren, zunächst an einem speciellen Beispiele besprochen werden soll.

Betrachten wir also die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} = 0, \tag{α}$$

deren allgemeines Integrale wegen der linearen Form der Gleichung (α) durch den Ausdruck:

$$z = \Phi(x_2 + ix_1,\ x_3 + ix_1) + \chi(x_3 + ix_2,\ x_1 + ix_2) + \Psi(x_1 + ix_3,\ x_2 + ix_3) \tag{1}$$

dargestellt werden kann, in welchem, wenn man kurz:

$$\begin{aligned} a &= x_2 + ix_1, & b &= x_3 + ix_1 \\ a' &= x_3 + ix_2, & b' &= x_1 + ix_2 \\ a'' &= x_1 + ix_3, & b'' &= x_2 + ix_3 \end{aligned}$$

bezeichnet, die Functionen Φ, X, Ψ nur an die eine Bedingung:

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial a \partial b} + \frac{\partial X}{\partial a' \partial b'} + \frac{\partial \Psi}{\partial a'' \partial b''} \tag{β}$$

gebunden sind. Will man nun den Φ, X, Ψ unbeschränkte Willkürlichkeit belassen, so kann diese Bedingung nur dann befriedigt werden, wenn einzeln

$$0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a \partial b}, \quad 0 = \frac{\partial^2 X}{\partial a' \partial b'}, \quad 0 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a'' . \partial b''} \tag{γ}$$

gemacht wird. Dann hat z die Gestalt:

$$z = \Phi(a) + \Phi_1(b) + X(a') + X_1(b') + \Psi(a'') + \Psi_1(b''), \tag{δ}$$

worin nun $\Phi, \Phi_1, \ldots$ unbeschränkt willkürlich sind. Man kann jedoch die Bedingung (β) auch auf andere Art erfüllen, z. B. indem man setzt:

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=0}^{i=n} A_i \frac{a^i}{i!} \cdot \frac{b^{n-i}}{(n-i)!}, \quad X(a', b) = \sum_{i=0}^{i=n} A'_i \frac{(a')^i}{i!} \cdot \frac{(b')^{n-i}}{(n-i)!}, \quad \Psi(a'', b'') = \sum_{i=0}^{i=n} A''_i \frac{(a'')^i}{i!} \cdot \frac{(b'')^{n-i}}{(n-i)!}, \tag{ε}$$

wo dann die Coëfficienten A_i, A'_i, A''_i gewissen aus (β) fliessenden Bedingungen unterworfen sind. Im letzten Falle hat man also Functionen aufgestellt, welche in der That in der durch (β) angegebenen Beziehung stehen.[1] Wenn wir auch vorläufig davon absehen, ob die Aufstellung solcher Integrale zweiter Art immer möglich ist, so ist doch klar, dass diese Integrale aus der Form (δ) nicht abgeleitet werden können, aus dem einfachen Grunde, weil im zweiten Falle die Functionen Φ, X, Ψ, wenn auch in gewissen Beziehungen in ihrer Willkürlichkeit eingeschränkt, so doch Funtionen je zweier Argumente sind, während das Integrale (δ) nur aus einer Summe von Functionen je eines Argumentes zusammengesetzt ist.

Bedenkt man nun, dass zwischen den Grössen w der verschiedenen Systeme vermöge ihrer Abstammung von den λ-Werthen, die ihrerseits wieder durch die Gleichungen

$$P_x(\omega_k) = 0$$

untereinander verbunden sind, nothwendig gewisse Beziehungen existiren müssen, so ist zu erwarten, dass sich bei jeder Gleichung, welche die Zerlegung (15) nicht zulässt, Integrale beider Arten werden aufstellen lassen. Da nun beide Arten aus der Formel (β) entspringen, diese also allgemeiner ist als jede der aus ihr gezogenen Arten von Integralen, so wird man die Gleichungen (1) und (β) als die allgemeine Lösung des Problems (α) ansehen müssen, oder allgemeiner zu sprechen:

Das allgemeine Integrale solcher partieller Differentialgleichungen, welche die Zerlegung (15) nicht zulassen, wird dargestellt:

1. Durch eine Beziehung zwischen $z, x_1, \ldots x_q$, welche im Allgemeinen p nicht näher bestimmte Functionsformen enthält, die mit Ausnahme einer sub 2) erwähnten Bedingung weiter keiner Einschränkung unterworfen sind, und

2. Durch eine Bedingungsgleichung, welche stets als eine Verbindung mehrerer partieller Differentialgleichungen mit je q—1 Independenten dargestellt werden kann.

Nach dieser Definition ist unter anderem die auf Seite 102 der (A.) angegebene Lösung der Gleichung:

$$(300) + 2(210) - 2(201 - 5(120) - 19(111) - 5(102) - 6(030) - 9(021) + 10(012) + 6(003) = 0$$

nicht die allgemeine Lösung, da sie augenscheinlich nur den Charakter der Lösung (δ) besitzt.

Wenn man also bei der Integration der Gleichungen (11) und (12) wieder ν Integrationsconstanten einführt und mit deren Hilfe, wie schon mehrfach beschrieben, successive alle Wurzelsysteme in Rechnung zieht, so erhält man für z einen Ausdruck, welcher der gegebenen Gleichung nicht identisch genügt. Das Resultat

[1] Man erhält nach einigen leichten Reductionen die sogenannten „harmonischen Kugelfunctionen“.

der Substitution dieses Werthes in die gegebene Gleichung gibt aber unmittelbar die Bedingung, welche den gefundenen Ausdruck für z zum allgemeinen Integrale macht.

14.

Die wirkliche Ausrechnung nimmt beispielsweise bei dem vorerwähnten Probleme folgenden Verlauf: Die Gleichung:

$$(300)+2(210)-2(201)-5(120)-19(111)-5(102)-6(030)-9(021)+10(012)+6(003)=0$$

hat zunächst ein particuläres Integrale:

$$\begin{aligned} z = {} & a_{000}+a_{100}x_1+a_{010}x_2+a_{001}x_3+a_{200}x_1^2+2a_{110}x_1x_2+2a_{101}x_1x_3+a_{020}x_2^2+2a_{011}x_2x_3+a_{002}x_3^2+ \\ & +a_{300}x_1^3+3a_{210}x_1^2x_2+3a_{201}x_1^2x_3+3a_{120}x_1x_2^2+6a_{111}x_1x_2x_3+3a_{102}x_1x_3^2+ \\ & +a_{030}x_2^3+3a_{021}x_2^2x_3+3a_{012}x_2x_3^2+a_{003}x_3^3 \end{aligned}$$

mit

$$\binom{p+q}{q}-1=\binom{6}{3}-1=19$$

von einander unabhängigen Coëfficienten, man kann also versuchen, das allgemeine Integrale daraus abzuleiten. Führt man für die Wurzeln der Gleichungen:

$$P_2(\omega_2)=\omega_2^3-2\omega_2^2-5\omega_2+6=0,\quad P_3(\omega_3)=\omega_3^3+2\omega_3^2-5\omega_3-6=0$$

die Bezeichnung ein,

$$\lambda_2=\omega_2,\qquad \lambda_3=\omega_3,$$

so dass λ_2 im Verlaufe der Rechnung je nach Erforderniss einen der Werthe $1, 3, -2$; λ_3 einen der Werthe $-1, 2, -3$ annehmen kann und setzt:

$$w_2=x_2-\lambda_2x_1,\qquad w_3=x_3-\lambda_3x_1,$$

so erhält man für das Integrale, bezogen auf die Hauptparameter, die Form:

$$\begin{aligned} (000) = {} & (000)_0+x_1(100)_0+(x_2-w_2)(010)_0+(x_3-w_3)(001)_0+\frac{x_1^2}{2!}(200)_0+x_1(x_2-w_2)(110)_0+x_1(x_3-w_3)(101)_0 \\ & +\frac{(x_2-w_2)^2}{2!}(020)_0+(x_2-w_2)(x_3-w_3)(011)_0+\frac{(x_3-w_3)^2}{2!}(002)_0+\frac{x_1^3}{3!}(300)_0+\frac{x_1^2}{2!}(x_2-w_2)(210)_0+ \\ & +\frac{x_1^2}{2!}(x_3-w_3)(201)_0 \\ & +x_1\frac{(x_2-w_2)^2}{2!}(120)_0+x_1(x_2-w_2)(x_3-w_3)(111)_0+x_1\frac{(x_3-w_3)^2}{2!}(102)_0+\frac{(x_2-w_2)^3}{3!}(030)_0+ \\ & +\frac{(x_2-w_2)}{2!}\frac{(x_3-w_3)}{1!}(021)_0 \\ & +\frac{(x_2-w_2)}{1!}\frac{(x_3-w_3)^2}{2!}(012)_0+\frac{(x_3-w_3)^3}{3!}(003)_0, \end{aligned}$$

und daraus der Reihe nach:

$$\begin{aligned} (100) = {} & (100)_0+x_1(200)_0+(x_2-w_2)(110)_0+(x_3-w_3)(101)_0+\frac{1}{2}\{x_1^2(300)_0+2x_1(x_2-w_2)(210)_0 \\ & +2x_1(x_3-w_3)(201)_0+(x_2-w_2)^2(120)_0+2(x_2-w_2)(x_3-w_3)(111)_0+(x_3-w_3)^2(102)_0\} \end{aligned}$$

$$(010) = (010)_0 + x_1(110)_0 + (x_2 - w_2)(020)_0 + (x_3 - w_3)(011)_0 + \frac{1}{2}\{x_1^2(210)_0 + 2x_1(x_2 - w_2)(120)_0 +$$
$$+ 2x_1(x_3 - w_3)(111)_0 + (x_2 - w_2)^2(030)_0 + 2(x_2 - w_2)(x_3 - w_3)(021)_0 + (x_3 - w_3)^2(012)_0\}$$

$$(001) = (001)_0 + x_1(101)_0 + (x_2 - w_2)(011)_0 + (x_3 - w_3)(002)_0 + \frac{1}{2}\{x_1^2(201)_0 + 2x_1(x_2 - w_2)(111)_0 +$$
$$+ 2x_1(x^3 - w_3)(102)_0 + (x_2 - w_2)^2(021)_0 + 2(x_2 - w_2)(x_3 - w_3)(012)_0 + (x_3 - w_3)^2(003)_0\}$$

$$\begin{aligned}
(200) &= (200)_0 + x_1(300)_0 + (x_2 - w_2)(210)_0 + (x_3 - w_3)(201)_0 \\
(110) &= (110)_0 + x_1(210)_0 + (x_2 - w_2)(120)_0 + (x_3 - w_3)(111)_0 \\
(101) &= (101)_0 + x_1(201)_0 + (x_2 - w_2)(111)_0 + (x_3 - w_3)(102)_0 \\
(020) &= (020)_0 + x_1(120)_0 + (x_2 - w_2)(030)_0 + (x_3 - w_3)(021)_0 \\
(011) &= (011)_0 + x_1(111)_0 + (x_2 - w_2)(021)_0 + (x_3 - w_3)(012)_0 \\
(002) &= (002)_0 + x_1(102)_0 + (x_2 - w_2)(012)_0 + (x_3 - w_3)(003)_0.
\end{aligned}$$

Die Variationen dieser Gleichungen geben die bereits von Lagrange aufgestellten Gleichungen und aus den Variationen der sechs letzten Gleichungen folgen durch Differentiation die Gleichungen (12):

$$\begin{aligned}
0 &= \partial(300)_0 + \lambda_2\partial(210)_0 + \lambda_3\partial(301)_0 \\
0 &= \partial(210)_0 + \lambda_2\partial(120)_0 + \lambda_3\partial(111)_0 \\
0 &= \partial(201)_0 + \lambda_2\partial(111)_0 + \lambda_3\partial(102)_0 \\
0 &= \partial(120)_0 + \lambda_2\partial(030)_0 + \lambda_3\partial(021)_0 \\
0 &= \partial(111)_0 + \lambda_2\partial(021)_0 + \lambda_3\partial(012)_0 \\
0 &= \partial(102)_0 + \lambda_2\partial(012)_0 + \lambda_3\partial(003)_0,
\end{aligned} \qquad (12a)$$

welche, wie sofort zu sehen, durch Beziehungen zwischen den Parametern integrirt werden können. Das obige particuläre Integrale ist also ein vollständiges Integrale.

Setzt man nun:

$(000)_0 = \Phi_0$ und dem zufolge:

$$(010)_0 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial w_2^0}, \quad (001)_0 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial w_3^0};$$

$$(020)_0 = \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial w_2^2}, \quad (011)_0 = \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial w_2\,\partial w_3}, \quad (002) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial w_3^2};$$

$$(030)_0 = \frac{\partial^3\Phi_0}{\partial w_2^3}, \quad (021)_0 = \frac{\partial^3\Phi_0}{\partial w_2^2\,\partial w_3}, \quad (012)_0 = \frac{\partial^3\Phi_0}{\partial w_2\,\partial w_3^2}, \quad (003)_0 = \frac{\partial^3\Phi_0}{\partial w_4^3};$$

ferner $(100)_0 = \Phi_1$, also,

$$(110)_0 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial w_2}, \quad (101)_0 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial w_3}$$

$$(120)_0 = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial w_2^2}, \quad (111)_0 = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial w_2\,\partial w_3}, \quad (102)_0 = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial w_3^2};$$

und endlich $(200)_0 = \Phi_2$, wonach

$$(210)_0 = \frac{\partial\Phi_2}{\partial w_2}, \qquad (201) = \frac{\partial\Phi_2}{\partial w_2},$$

so können die Gleichungen (12_a) in die Form gebracht werden:

$$(300)+\lambda_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial w_2}+\lambda_3\frac{\partial\Phi_2}{\partial w_3}=\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\left[\Phi_2+\lambda_2\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_2}+\lambda_3\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_3}\right]=\alpha'$$

$$\frac{\partial}{\partial w_3}\left[\Phi_2+\lambda_2\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_2}+\lambda_3\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_3}\right]=\alpha''$$

$$\frac{\partial^2}{\partial w_2^2}\left[\Phi_1+\lambda_2\frac{\partial\Phi_0}{\partial w_2}+\lambda_3\frac{\partial\Phi_0}{\partial w_3}\right]=\alpha'''$$

$$\frac{\partial^2}{\partial w_2\partial w_3}\left[\Phi_1+\lambda_2\frac{\partial\Phi_0}{\partial w_2}+\lambda_3\frac{\partial\Phi_0}{\partial w_3}\right]=\alpha^{(iv)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial w_3^2}\left[\Phi_1+\lambda_2\frac{\partial\Phi_0}{\partial w_2}+\lambda_3\frac{\partial\Phi_0}{\partial w_3}\right]=\alpha^{(v)},$$

worin die α constante Grössen sind, deren Variation δ verschwindet. Diese Gleichungen lassen sich also in der That auf zwei Relationen zwischen den Functionen Φ_0, Φ_1, Φ_2 reduciren, vermöge welcher alle von diesen Functionen herrührenden Bestandtheile durch Φ_0 und dessen Ableitungen dargestellt werden können.

Man kann also setzen:

$$\Phi_1+\lambda_2\frac{\partial\Phi_0}{\partial w_2}+\lambda_3\frac{\partial\Phi_0}{\partial w_3}=\Omega,\quad \Phi_2+\lambda_2\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_2}+\lambda_3\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_3}=\Psi$$

wo dann

$$\delta\frac{\partial^2\Omega}{\partial w_2^2}=\delta\frac{\partial^2\Omega}{\partial w_2\partial w_3}=\delta\frac{\partial^2\Omega}{\partial w_3^2}=\delta\frac{\partial\Psi}{\partial w_2}=\delta\frac{\partial\Psi}{\partial w_3}=0$$

sein muss.

Mit der Abkürzung

$$\lambda_2\frac{\partial U}{\partial w_2}+\lambda_3\frac{\partial U}{\partial w_3}=\Delta U$$

folgt

$$\Phi_1=-\Delta\Phi_0+\Omega,\quad \Phi_2=\Delta^2\Phi_0-\Delta\Omega+\Psi,\quad (300)=\alpha-\Delta^3\Phi_0+\Delta^2\Omega-\Delta\Psi,$$

und endlich, indem man in dem angegebenen Werthe von (000) die w und die Hauptparameter durch ihre Werthe ersetzt,

$$z=(000)=\Phi_0+x_1\Omega+\frac{x_1^2}{2!}\{\Delta\Omega+\Psi\}+\frac{x_1^3}{3!}\{\Delta^2\Omega+2\Delta\Psi+\alpha\}.$$

Setzt man nun, unter $(\alpha,\beta,\gamma)'$ neue Parameter verstehend:

$$\Omega=(100)_0'+\lambda_2(010)_0'+\lambda_3(001)_0'$$

$$\Psi=(200)_0'+2\lambda_2(110)_0'+2\lambda_3(101)_0'+\lambda_2^2(020)_0'+2\lambda_2\lambda_3(011)_0'+\lambda_3^2(002)'$$

$$\alpha=(300)_0'+3\lambda_2(210)_0'+3\lambda_3(201)_0'+3[\lambda_2^2(120)_0'+2\lambda_2\lambda_3(111)_0'+\lambda_3^2(102)_0']$$
$$+\lambda_2^3(030)_0'+3\lambda_2^2\lambda_3(021)_0'+3\lambda_2\lambda_3^2(012)_0'+\lambda_3^3(003)_0',$$

so erhält man ein neues vollständiges Integrale, welches, abgesehen von dem hinzu gekommenen Gliede Φ_0 der Form nach mit dem früheren zusammenfällt. Man erhält also, wenn man dieselben Wurzelsysteme aufstellt, wie in (*A.*)

$$(000) = \Phi(x_2 - x_1,\ x_3 + x_1) + X(x_2 - 3x_1,\ x_3 - 2x_1) + \Psi(x_2 + 2x_1,\ x_3 + 3x_1)$$

$$0 = 2\frac{\partial^3\Phi}{(\partial\omega_2')^2\partial\omega_3'} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\omega_2'(\partial\omega_3')^2} + 10\frac{\partial^3 X}{(\partial\omega_2'')^2\partial\omega_3''} + 11\frac{\partial^3 X}{\partial\omega_2''(\partial\omega_3'')^2}$$

$$-10\frac{\partial^3\Psi}{(\partial\omega_2''')^2\partial\omega_3^{3'''}} - 9\frac{\partial^3\Psi}{\partial\omega_2'''(\partial\omega_3''')^2}$$

als allgemeines Integrale der gegebenen Gleichung.