DER INTEGRATOR DES PROF. DR. ŻMURKO

IN

SEINER WIRKUNGSWEISE UND PRAKTISCHEN VERWENDUNG.

DARGESTELLT VON

KARL SKIBIŃSKI,

INGENIEUR UND PRIVATDOCENT AN DER K. K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN LEMBERG.

(Mit 2 Tafeln und 18 Holzschnitten.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 1. JULI 1886.

Einleitung.

Zu einer verzeichneten Curve, deren Gleichung durch $y = f(x)$ gegeben ist, lässt sich immer eine andere Curve verzeichnen, deren Ordinaten gewissen Integralen der $f(x)$ proportional sind; diese zweite Curve nennen wir die Integralcurve der ersteren.

Der Zusammenhang zwischen der ursprünglich gegebenen Curve und ihrer Integralcurve, wie auch eine Methode der Verzeichnung der letzteren aus der ersteren wurden von Dr. Żmurko schon im Jahre 1861 gegeben und in seinem im Jahre 1864 erschienenen Werke über Mathematik veröffentlicht. Der Autor verwendet diese Methode der Verzeichnung der Integralcurven unter Anderem zur Bestimmung der Natur der Wurzeln der Gleichungen höheren Grades.

Es sei bei dieser Gelegenheit constatirt, wie fälschlich englische Autoren die erste Behandlung dieses Gegenstandes in einer eilf Jahre später (1872) erschienenen Abhandlung des Herrn Šolin in Prag zu finden meinen.

Auf Grund der oberwähnten Methode ist es dem Herrn Abakanowicz in Lemberg gelungen, eine Vorrichtung zu erfinden, welche die Integralcurve mechanisch verzeichnet; diese Vorrichtung basirt auf einem Schraubenbolzen mit veränderlichem Gewinde. Sie wurde in einer im Jahre 1880 erschienenen Broschüre eingehend beschrieben, und erscheint jetzt namhaft verbessert als Integraph von Napoli und Abakanowicz.[1]

Der hier zur Besprechung gelangende Integrator des Dr. Żmurko, zu dem das Project schon im Jahre 1881 gezeichnet wurde, benützt als einen Bestandtheil seines Mechanismus einen drehbaren Tisch mit einer auf ihm und mit ihm beweglichen Rolle, ähnlich wie es Wetli in seinem Momentenplanimeter verwendet.

[1] Comptes rendus hebd. des séances de l'Académie des sciences, Nr. 11, 1885.

Dieser Integrator zeichnet sich von anderen derartigen Instrumenten dadurch aus, dass er bei verhältnissmässig einfacher Construction und leichter Handhabung eine mehrfache Verwendung zulässt, indem er ausser der Integralcurve von der Form

$$\text{I.}\quad \int x^n f(x)\,dx,$$

welche die bis jetzt bekannten Vorrichtungen liefern, auch noch — durch entsprechende Einstellung des Instrumentes — Curven von der Form

$$\text{II.}\quad \int x^n f'(x)\,dx = \int x^n dy \quad \text{und} \quad \text{III.}\quad \int \frac{f(x)\,dx}{x^n}$$

zu verzeichnen im Stande ist. Es sind somit in diesem Integrator so zu sagen drei verschiedene Instrumente vereinigt, denen wir die Namen: I. Gewöhnlicher Integrator, II. directer Momentenintegrator und III. inverser Momentenintegrator beilegen.

In der folgenden Abhandlung beabsichtige ich die Theorie dieses interessanten Instrumentes zu geben, wie auch dessen praktische Verwendung, insbesondere in den Ingenieurwissenschaften zu besprechen.

Beschreibung des Instrumentes.[1]

(Fig. 1 perspectivische Ansicht, Fig. 2 Grundriss, auf besonderen Tafeln.)

Ein schweres Lineal L mit den Pratzen L' bildet die Stütze. In der Nuth n, welche in der ganzen Länge des Lineals eingearbeitet ist, kann sich die starke Platte T mittelst zweier Rädchen R verschieben; den dritten Stützpunkt bildet für die Platte das an ihrer Achse O lose ansitzende Röllchen a, indem die ganze Vorrichtung mit einem geringen Übergewichte das Röllchen an die seitliche Wand des Lineals L andrückt. Das mit der Achse mittelst einer starken Feder verbundene Röllchen b soll das Umkippen der Platte nach der entgegengesetzten Seite verhüten.

In fester Verbindung mit der Achse O befindet sich etwas oberhalb der Platte T eine runde Tischplatte P und unterhalb T die Rolle r_4 mit zwei Nuthen, von denen die eine den mit dem Lineal L fest verbundenen Draht D_3 aufnimmt, wodurch bei der Bewegung der Platte T längs dem Lineale L die Tischplatte P in Drehung versetzt wird, die andere ist bestimmt, nöthigenfalls den Draht D_7 aufzunehmen.

An der Platte T sind zwei Rahmen mit den Führungsrollen m_1 befestigt, zwischen welchen das Lineal L_1 gleitet. Dieses Lineal trägt an seinem Ende den Umfahrungsstift s. Mit dem Lineale sind die Drähte D_1, D_6 oder D_7 verbunden, deren beliebige Anspannung durch Spannschräubchen bewirkt wird. Der Draht D_1 ist um die Rolle r_1 umwickelt; der Draht D_7 kann nöthigenfalls die Rolle r_4, der Draht D_6 dagegen ein kleineres, an derselben Achse mit r_4 ansitzendes Röllchen umspannen.

Parallel zum Lineale L_1 ist ein eben so adjustirtes Lineal L_4 angebracht, welches zur Führung des um die Rolle r_5 umwickelten Drahtes D_4 dient. Dieses Lineal trägt den Zeichenstift S.

An einer gemeinschaftlichen, an die Platte T befestigten Achse sind die beiden Rollen r_1 und r_2 angebracht; um r_2 ist der Draht D_2 umwickelt, welcher von dem zwischen den Führungsrollen m_2 gleitenden Lineale L_2 geführt wird.

In den Zwischenstücken c ist der Rahmen B derart zwischen Spitzen gefasst, dass er gezwungen ist, die Bewegungen des Lineals L_2 mitzumachen, und dass er eine kleine Drehung um die Spitzen gestattet. Im Rahmen B ist ebenfalls zwischen Spitzen die Achse A gefasst, welche an ihrem Ende das Röllchen r_3 trägt; dieses Röllchen wird durch das Gewicht des Rahmens an die Tischplatte angedrückt.

Mit dem Cylinder z, welcher die Achse A lose umfasst, ist die Rolle r_5 fest verbunden; der Cylinder ist derart construirt, dass er zwischen den Führungsrollen m_5 die Achse A während ihrer Längsbewegung frei durchlässt, ohne diese Bewegung mitzumachen, jedoch die Drehung um ihre Längsachse mitmacht.

---

[1] Das erste Exemplar, welches mir zum Studium überlassen wurde, ist bei dem renommirten Mechaniker G. Coradi in Zürich höchst exact und elegant ausgeführt. Die Veröffentlichung erfolgt mit Erlaubniss des Erfinders, durch welchen der Integrator bezogen werden kann.

Das Anziehen des Schräubchens d bezweckt eine kleine Drehung nach oben des Rahmens B um die Spitzen, wodurch man das Röllchen r_3 ausser Contact mit der Tischplatte bringen kann.

Der oberhalb des Lineals L an ihm befestigte Draht D_5 kann nöthigenfalls (für eine andere Art der Einstellung) um die Rolle r_1 umwickelt werden.

Wie aus der Beschreibung ersichtlich, bildet die Platte T einen Wagen, welcher sammt der Tischplatte, den Linealen und dem Rahmen B in der Nuth n vermittelst der Räder R und der Rolle a sich fortbewegen lässt.

Für die exacte Wirkungsweise des Instrumentes ist es erforderlich, dass die Achse A zur Nuth n genau parallel ist, und dass die Lineale L_1 und L_4 eine dazu senkrechte Lage besitzen; die genaue Einstellung auf diese Richtungen lässt sich durch Correctionsschräubchen erreichen.[1]

Das Instrument kann auf zwei verschiedene Arten eingestellt werden, welche drei verschiedene Wirkungsweisen gestatten.

Wirkungsweise des Integrators.

Nr. 1. Erste Art der Einstellung. Gewöhnlicher Integrator. Es kommen nur drei Drähte zur Wirkung, nämlich der Draht D_1, welcher um die Rolle r_1 umwickelt ist, ferner D_3 um r_4 und D_4 um r_5 umwickelt. Hiebei ist s der Umfahrungsstift und S der Zeichen- oder Integralstift.

Die Wirkungsweise werden wir am besten aus der in Fig. 2 dargestellten Draufsicht entnehmen können. Das Achsensystem für die gegebene Curve D, wie auch für die zu verzeichnende Integralcurve J nehmen wir so an, dass die x-Achse zum Lineal LL, oder eigentlich zur Nuth, in welcher sich der Wagen bewegt, parallel wird; die y-Achse erscheint dann senkrecht darauf und parallel zu den Linealen L_1 und L_4. Diese letzteren müssen sonach zur Nuthlinie genau senkrecht stehen — eine Bedingung, welche, wie schon früher erwähnt wurde, sich leicht erreichen lässt.

Nr. 2. Verschiebt man den Umfahrungsstift s in der Richtung der y nach oben um dy, so dreht sich die Rolle r_1 um einen Winkel $d\varphi$ in der mit dem Pfeil angegebenen Richtung, wobei sich von ihrem Umfange ein Element des Drahtes D_1 abwickelt, dessen Länge $r_1 d\varphi = dy$ ist, wenn mit r_1 zugleich der Halbmesser der Rolle bezeichnet wird. Hieraus ergibt sich die Grösse des Drehungswinkels

$$d\varphi = \frac{dy}{r_1}.$$

Um denselben Winkel dreht sich auch die Rolle r_2 und verschiebt bei dieser Drehung die Achse A sammt der Rolle r_3 in der Richtung von links nach rechts. Die Entfernung ρ der Mittellinie der Rolle r_3 von der Mitte O der Tischplatte ändert sich dadurch um

$$d\rho = r_2 d\varphi = \frac{r_2}{r_1} dy \quad \ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Integrirt man beide Seiten dieser Gleichung, so erhält man

$$\rho = \frac{r_2}{r_1}(y + C) \quad \ldots\ldots \quad \text{I}a.$$

Da die Achse A keine Drehung um ihre Längsachse erfahren hat, so bleiben die Tischplatte, die Rolle r_5 und der Integralstift S in Ruhe. Es wird somit durch die Verschiebung des Umfahrungsstiftes in der Richtung der y blos eine Änderung der Länge ρ bewirkt, der Zeichenstift verbleibt hiebei in Ruhe.

[1] Die Vorrichtung ist derart adjustirt, dass die Achse A und somit auch das Röllchen r_3 genau über die Mitte der Tischplatte gleiten; dies ist jedoch nur für die zweite Art der Einstellung erforderlich. (Siehe Nr. 7.)

Nr. 3. Verschiebt man den Umfahrungsstift in der Richtung der x-Achse nach rechts um dx, so erleidet dieselbe Verschiebung der ganze Wagen und mit ihm der Integrator S. Hiebei rollt die Rolle r_4 längs D_3 um dx und erfährt eine Drehung um den Winkel $d\psi$, dessen Grösse bestimmt ist durch

$$d\psi = \frac{dx}{r_4}\cdot$$

Um denselben Winkel dreht sich die Platte P und mit ihr die Rolle r_3, deren Umfang den Weg

$$\rho\, d\psi = \rho \frac{dx}{r_4}$$

beschreibt. Die Rolle r_3, die Achse A und somit auch die Rolle r_5 erleiden eine Drehung um

$$d\varepsilon = \frac{\rho\, d\psi}{r_3} = \frac{\rho\, dx}{r_3 r_4}$$

und es wickelt r_5 eine Drahtlänge $r_5 d\varepsilon$ ab, welche gleich ist der zur y-Axe parallelen Verschiebung dY' des Integrators.[1] Wir erhalten somit

$$dY' = r_5 d\varepsilon = \frac{r_5}{r_3 r_4} \rho\, dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{II.}$$

Bei der Verschiebung des Umfahrungsstiftes um $\pm dx$ verschiebt sich daher der Integrator um $\pm dx$ und um dY', dessen Werth aus Formel II zu entnehmen ist, und dessen Zeichen sich sowohl nach ρ als nach dx richtet.

Nr. 4. Setzt man den in Gleichung I a erhaltenen Werth für ρ in Gleichung II ein, so erhält man

$$dY' = \frac{r_2 r_5}{r_1 r_3 r_4}(y + C)\, dx \quad . \; . \; . \; . \quad \text{III.}$$

Integrirt man beide Seiten dieser Gleichung, so erhält man schliesslich den Werth der Ordinate Y' der Integralcurve

$$Y' = \frac{1}{c} \int (y + C)\, dx \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{IV.}$$

worin

$$\frac{r_1 r_3 r_4}{r_2 r_5} = c \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{V.}$$

gesetzt wurde.

Die Integralconstante fällt in Formel IV weg, wenn, wie das fast immer geschehen wird, der Ursprung des Coordinatensystems für die Integralcurve in ihren Anfangspunkt verlegt wird.

Nr. 5. Aus Nr. 2 ist ersichtlich, dass die Grösse ρ von der Höhenlage (in der Richtung der y) des Umfahrungsstiftes abhängig ist. Benennen wir nun diese Stellung, bei welcher $\rho = 0$, wenn nämlich die Rolle r_3 die Mitte O der Tischplatte berührt, die Nullstellung des Instrumentes; benennen wir ferner diejenige Parallele zur x-Achse, welche der Umfahrungsstift bei dieser Stellung beschreibt, die Nullachse $x_0 x_0$, so ist für diese Achse y und somit auch $C = 0$. Für jede andere Lage der x-Achse würde ρ einen gewissen Werth ρ_0 annehmen, und C würde offenbar gleich sein der Entfernung dieser Achse von der Nullachse. Nennen wir diese Entfernung Y_0, so wird ganz allgemein

$$Y' = \frac{1}{c} \int (y + Y_0)\, dx = \frac{1}{c} [Y_0 x + \int y\, dx]. \quad . \; . \; . \; \text{VI.}$$

Hiebei ist Y_0 positiv oder negativ, je nachdem die x-Achse oberhalb oder unterhalb der Nullachse gelegen ist.

[1] Ob die Verschiebung des Stiftes S nach oben oder nach unten erfolgt, hängt davon ab, ob die Rolle r_3 rechts oder links von O sich befindet.

Bezieht man die Ordinaten y der gegebenen Curve auf die Nullachse, so wird

$$Y' = \frac{1}{c} \int y dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{VI } a.$$

Nr. 6. Betrachten wir die Constante c, welche durch Formel V bestimmt ist. Aus lauter Rollenhalbmessern gebildet, ist sie einem jeden Exemplare eigen, ist demnach eine Instrumentconstante und kann im Vorhinein eine zweckentsprechende Grösse erhalten. In dem ersten Exemplare wurden die Verhältnisse der Rollenhalbmesser so gewählt, dass $c = 4^{cm}$ wird, und ist dieser Werth für die meisten Anwendungen zweckentsprechend.[1]

Wie aus Formel VI ersichtlich, muss die Ordinate Y' der Integralcurve mit dieser Constanten multiplicirt werden, um das Integral zu liefern; ebenso müssen, wie sich später zeigen wird, die Ordinaten der zweiten und dritten Integralcurve mit c^2, resp. c^3 multiplicirt werden. Diese Multiplicationen kann man leicht umgehen, wenn man sich ein für allemal Massstäbe construirt, deren Einheiten die Grössen $\frac{1}{c}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{c^3}$ haben, wenn etwa c in Centimetern ausgedrückt wurde. Misst man dann die Ordinaten der entsprechenden Integralcurven auf diesen Massstäben, so ist das Resultat der Messung in cm, bez. cm^2 und cm^3 zu verstehen.

Nr. 7. Zweite Art der Einstellung. Löst man die Verbindung zwischen dem Lineale L_1 und der Rolle r_1 (Taf. II) und umwickelt dafür den Draht D_7 um die Rolle r_4 (oder auch D_6 um eine kleinere, an derselben Achse mit r_4 ansitzende Rolle); löst man ferner die Verbindung von r_4 mit D_3 und umwickelt den Draht D_5 um die Rolle r_1, so erhält man das Instrument auf die zweite Art eingestellt.

Nr. 8. Erste Wirkungsweise. Der inverse Momentenintegrator. Hiefür werden die Stifte verwechselt, so dass jetzt S der Umfahrungsstift, s dagegen der Zeichen- oder Integralstift ist.

Verschiebt man S um dy in der Richtung von LL weg, so erfährt die Rolle r_5 eine Drehung um einen Winkel

$$d\varphi = \frac{dy}{r_5},$$

um welchen sich auch A und die Rolle r_3 umdrehen. So lange nun diese letztere sich in der Mitte der Tischplatte befindet (Nullstellung des Instrumentes), so lange wird sich diese Drehung weder der Tischplatte, noch der Rolle r_4 mittheilen — der Integratorstift verbleibt somit in Ruhe; hat jedoch die Rolle r_3 eine gewisse Entfernung ρ von O erlangt, so wird bei der Drehung von r_3 um $d\varphi$ die Tischplatte sammt der Rolle r_4 eine Drehung um $d\psi$ im angezeigten Sinne erfahren, deren Grösse sich leicht aus der Bedingung bestimmen lässt, dass

$$\rho d\psi = r_3 d\varphi = \frac{r_3}{r_5} dy$$

sein muss. Hieraus bestimmt sich

$$d\psi = \frac{r_3}{r_5} \cdot \frac{dy}{\rho}.$$

Die Rolle r_4 verschiebt hiebei den Stift s in der y-Achse und im Sinne gegen LL (siehe Fussnote zu Nr. 3) um

$$dY = r_4 d\psi = \frac{r_3 r_4}{r_5} \cdot \frac{dy}{\rho} \quad . \; . \; . \; . \; . \; a.$$

Verschiebt man S um dx z. B. nach rechts, so macht der ganze Wagen sammt dem Stifte s diese Bewegung mit. Der entsprechende Drehungsantheil der Rollen r_1 und r_2 ist $d\varepsilon = \frac{dx}{r_1}$, wobei r_2 eine Verschiebung der Rolle r_3 im Bewegungssinne von S um

$$d\rho = r_2 d\varepsilon = \frac{r_2}{r_1} dx$$

bewirkt.

[1] Über die genaue Bestimmung der Instrumentconstante siehe Nr. 25.

Nr. 9. Beschreibt S ein Curvenelement, so treten beide vorher besprochene Bewegungen ein. Aus der letzten Gleichung erhält man durch Integration

$$\rho = \frac{r_2}{r_1}(x + C) \; . \; . \; . \; . \; . \; b.$$

Geht man bei der Umfahrung der gegebenen Curve von der Nullstellung [1] aus, so ist für $x = 0$ auch $\rho = 0$, somit fällt die Constante C weg und es wird ρ dem x direct proportional, nämlich

$$\rho = \frac{r_2}{r_1} x \; . \; . \; . \; . \; . \; bb.$$

Setzt man diesen Werth in Gleichung a ein, so wird

$$d\,Y = \frac{r_1 r_3 r_4}{r_2 r_5} \cdot \frac{dy}{x} = c \, . \, \frac{dy}{x}.$$

Der Coëfficient c ist, wie ersichtlich, dieselbe Instrumentconstante, die wir beim gewöhnlichen Integrator kennen lernten.[2]

Die letzte Gleichung kann man auch in nachstehender Form schreiben:

$$d\,Y = c \, . \frac{dy}{x} = c \, . \, \frac{\frac{dy}{dx}}{x} dx = c \, . \frac{y' dx}{x},$$

worin $y' = f\,(x)$ den ersten Differentialquotienten der gegebenen $f(x)$ bedeutet.

Integrirt man beide Seiten dieser Gleichung, so erhält man schliesslich

$$Y = c \, . \int \frac{y' dx}{x} + C \; . \; . \; . \; . \; . \; c.$$

Nr. 10. Wollte man statt y' die gegebene Function y im obigen Ausdrucke haben, so müsste man vorerst mit dem gewöhnlichen Integrator zur gegebenen Curve die Integralcurve verzeichnen, sonach mit dem inversen Integrator diese Integralcurve umfahren. Die erste Integralcurve liefert Ordinaten, deren Grösse (nach Gleichung VI a)

$$Y' = \frac{1}{c} \int y\,dx.$$

Umfährt man diese Integralcurve bei der zweiten Art der Kuppelung, so erhält man eine neue Integralcurve, deren Ordinaten nach Gleichung c

$$Y = c \int \frac{dY'}{dx} \cdot \frac{dx}{x} + C.$$

Setzt man hierin nach Gleichung VI a den Werth

$$\frac{dY'}{dx} = \frac{1}{c} y,$$

so erhält man

$$Y = \int \frac{y\,dx}{x} + C \; . \; . \; . \; . \; . \; d.$$

Hiebei ist Y auf demselben Massstabe zu messen, welcher für die Verzeichnung der gegebenen Curve verwendet wurde.

---

[1] Hier entspricht der Nullstellung ($\rho = 0$) nicht wie vorhin eine horizontale, sondern eine verticale Gerade, nämlich die Nullordinate y_0. Die Auffindung ihrer Lage geschieht auf ähnliche Art wie die Bestimmung der Nullachse in Nr. 17.

[2] Die Instrumentconstante ändert sich jedoch, wenn statt D_7 der Draht D_6 mit der kleineren Rolle (siehe Nr. 7) zur Verwendung kommt; es ist nämlich im Werthe für c statt r_4 der Halbmesser der kleineren Rolle einzusetzen.

Umfährt man die eben erhaltene Curve nochmals, so verzeichnet der Integratorstift eine Curve, deren Ordinaten den Werth

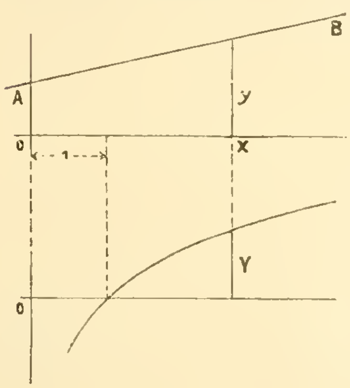
$$c.\int\frac{y}{x^2}\,dx+C_1$$

erhalten. Bei jeder weiteren, in dieser Weise erhaltenen Curve wachsen die Potenzen von x und von c.

Nr. 11. Um die Anwendung der Formel c an einem Beispiele zu erläutern, wählen wir eine gerade Linie, welche wir auf die zweite Art umfahren wollen. Ist die Gleichung der gegebenen Geraden AB in Fig. 3 [1]

$$y=\beta x+b$$

Fig. 3.



und wird, der Bedingung in Nr. 9 entsprechend, die Anfangsordinate in die der Nullstellung ($\rho=0$) entsprechende Nullordinate verlegt, so wird beim Umfahren der Geraden der Integrator die Curve

$$Y=c.\int\frac{\beta\,dx}{x}+C=c\beta\log\operatorname{nat}x+C$$

verzeichnen. Umfährt man z. B. das Stück der Geraden zwischen $x=1$ und $x=x$, so erhält man

$$Y=c\beta\log\operatorname{nat}\frac{x}{1}.$$

Wählt man noch $\beta=\frac{1}{c}$ und misst Y auf einer Scala, deren Einheit gleich $\frac{1}{c}$, so wird der Werth für Y direct den log nat der Zahl darstellen.

Es ist somit der inverse Integrator ein Logarithmograph.

Nr. 12. Zweite Wirkungsweise. Der directe Momentenintegrator. Eine andere Wirkungsweise des Integrators erhält man, wenn man bei derselben (zweiten) Art der Einstellung die Stifte so verwechselt, dass s der Umfahrungs- und S der verzeichnende Integratorstift wird.

Behält man dieselben Bezeichnungen wie vorhin bei, so ist leicht einzusehen, dass der Zusammenhang zwischen x und ρ derselbe bleibt, dass somit wie vorhin

$$\rho=\frac{r_2}{r_1}(x+C)\;.\;.\;.\;.\;.\;b$$

wird. Auch entspricht der Länge x der gegebenen Curve die gleiche Länge x der Integralcurve.

Verschiebt man den Stift s um dy, so drehen sich die Rolle r_4 und die Tischplatte um $d\psi$, und es ist

$$d\psi=\frac{dy}{r_4}.$$

Die Rolle r_3 beschreibt hiebei einen Weg

$$r_3\,d\varepsilon=\rho\,d\psi$$

und dreht sich um

$$d\varepsilon=\frac{\rho\,d\psi}{r_3}.$$

Um denselben Winkel dreht sich auch r_5 und verschiebt den Stift S um

$$dY=r_5\,d\varepsilon=\frac{r_5\,\rho\,d\psi}{r_3}.$$

[1] Das Instrument verzeichnet die Integralcurve nicht unterhalb, sondern neben der gegebenen Figur. Die erstere Annahme ist jedoch übersichtlicher, weil die entsprechenden Ordinaten beider Curven nach Nr. 3, 8 und 12 gleiche Abscissen haben.

Setzt man statt ρ und $d\psi$ die früher erhaltenen Werthe, so erhält man

$$dY = \frac{r_2 r_5}{r_1 r_3 r_4}(x+C)dy = \frac{x+C}{c}.dy \;.\;.\;.\;.\;.\; e,$$

worin c dieselbe Instrumentconstante bedeutet. Integrirt man beide Seiten der Gleichung, so wird

$$Y = \frac{1}{c}\int(x+C)dy + C_1 \;.\;.\;.\;.\;.\; f.$$

Nr. 13. Nimmt man die Nullordinate zur Anfangsordinate (siehe Fussnote zu Nr. 9), so ist $\rho = 0$ für $x = 0$, somit $C = 0$; nun ist für $x = 0$ auch $Y = 0$, wenn man die x-Achse der Integralcurve durch ihren Anfangspunkt durchgehen lässt, für welchen Fall auch $C_1 = 0$ wird, und man erhält für diese Annahmen die einfache Beziehung

$$Y = \frac{1}{c}\int x dy \;.\;.\;.\;.\;.\; g$$

und

$$dY = \frac{1}{c}x dy \;.\;.\;.\;.\;.\; h.$$

Die letzte Gleichung auf die Form

$$\frac{dY}{dx} = \frac{x}{c}\cdot\frac{dy}{dx}$$

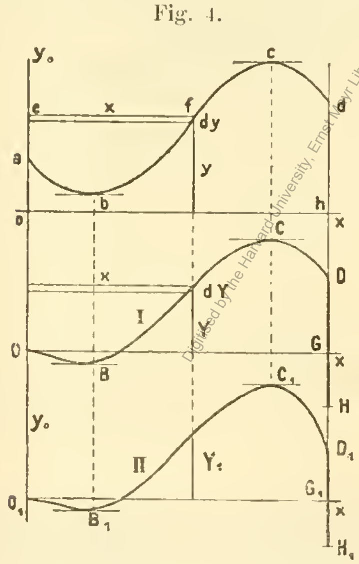
gebracht, belehrt uns über den Zusammenhang beider Curven; es entsprechen nämlich den maximalen und minimalen Ordinaten der gegebenen Curve oder einem Übergange über die Nullordinate ($x = 0$), entweder maximale oder minimale Ordinaten der Integralcurve, weil

$$\frac{dY}{dx} = 0 \text{ wird entweder für } x = 0 \text{ oder für } \frac{dy}{dx} = 0.$$

Ferner entspricht dem verticalen Elemente der gegebenen Curve $\left(\frac{dy}{dx} = \infty\right)$, ein eben solches Element der Integralcurve.

Nr. 14. Sei in Fig. 4 *abcd* die gegebene Curve, deren Anfangsordinate in die Nullordinate verlegt wurde, und *OBCD* die zugehörige Integralcurve, so ist nach Gleichung g die Ordinate Y dem Flächeninhalte der Fläche *abfe* proportional, indem sie als Summe aller Flächenelemente xdy erscheint. Wird daher die ganze Curve *abd* und die Ordinate *dh* umfahren, so ist das Stück *GH* der ganzen zwischen der Curve *abd*, den Ordinaten *ao* und *dh* und der Abscissenachse *ox* eingeschlossenen Fläche proportional. In dieser Form ist somit der Integrator ein Flächenplanimeter.

Fig. 4.



Beschreibt man mit dem Umfahrungsstifte das Stück ab einer verticalen Geraden, so verzeichnet der Integrator ebenfalls eine verticale Gerade, deren Länge proportional ist dem Flächeninhalte des zwischen ab, y_0 und den beiden, den Punkten a und b zugehörigen Horizontalen eingeschlossenen Rechteckes.

Für eine beliebig geneigte Gerade, deren Gleichung durch $y = \beta x + b$ gegeben ist, erhält man eine Parabel mit verticaler Achse und einem Parameter $p = \frac{c}{\beta}$. Der Scheitel der Parabel entspricht dem Durchschnittspunkte der gegebenen Geraden mit der Nullordinate. Hiernach ist der Integrator in dieser Einstellung ein Parabolograph.

Nr. 15. Umfährt man die vorher erhaltene erste Integralcurve *OBCD* (Fig. 4), so beschreibt der Integrator die Curve $O_1B_1C_1D_1$, welche in Bezug auf die ursprüngliche Curve die zweite Integralcurve genannt wird. Es wird nach Formel g und h ihre Ordinate

$$Y_1 = \frac{1}{c}\int x\,dY = \frac{1}{c^2}\int x^2\,dy.$$

Das Moment des Elementes xdy in Bezug auf y_0 ist

$$xdy\,\frac{1}{2}\,x = \frac{1}{2}\,x^2\,dy;$$

es ist somit die Ordinate der zweiten Integralcurve proportional dem statischen Momente des Flächenstückes *abfe* in Bezug auf die Nullordinate.

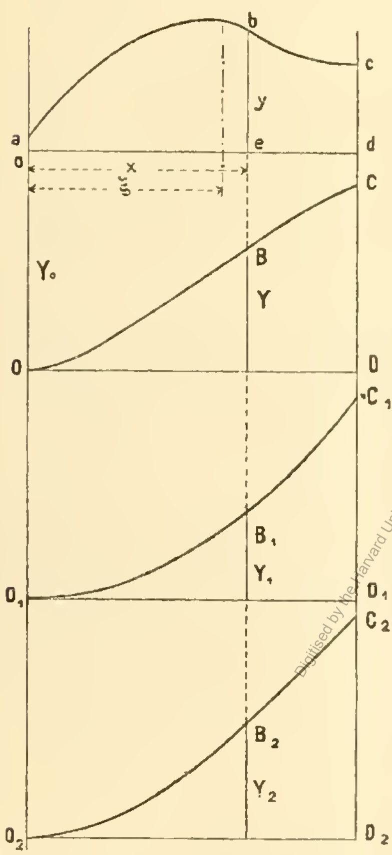
In gleicher Weise ist die Ordinate Y_2 der dritten Integralcurve dem Trägheitsmomente desselben Flächenstückes in Bezug auf die Nullordinate proportional. Es ist nämlich

$$Y_2 = \frac{1}{c^3}\int x^3\,dy;$$

nun ist das Trägheitsmoment des Elementes xdy durch $\frac{1}{3}x^3dy$ ausgedrückt.

Umfährt man daher die erste und zweite Integralcurve sammt ihren Endordinaten, so erhält man in der ersten, zweiten und dritten Integralcurve die Ordinatenstücke GH, G_1H_1 und G_2H_2, welche dem Flächeninhalte, resp. dem doppelten statischen und dem dreifachen Trägheitsmomente der Fläche *oabcdh* proportional sind. Die Momente sind hiebei auf die Nullordinate bezogen.

Fig. 5.



Nr. 16. Noch bequemer lässt sich diese Art der Einstellung zu Zwecken der Flächen- und Momentenbestimmung benützen, wenn man die gegebene Curve vorerst mit dem gewöhnlichen Integrator (nach Nr. 1) umfährt. In Fig. 5 ist die Curve *OBC* auf diese Weise aus der Curve *abc* erhalten worden, deren x-Achse *od* in der Nullachse angenommen wurde.

Nach Nr. 5 hat die Ordinate Y den Werth

$$Y = \frac{1}{c}\int_0^x y\,dx \quad \text{und} \quad dY = \frac{y\,dx}{c}$$

Es ist somit Y dem Flächeninhalte der zwischen der Anfangsordinate *ao* und der Ordinate Y eingeschlossenen Fläche proportional.

Umfährt man nun die Curve *OBC* auf die in Nr. 13 beschriebene zweite Art, so erhält man die Curve $O_1B_1C_1$, deren Ordinate nach Gleichung g und VI a den Werth

$$Y_1 = \frac{1}{c}\int_0^x x\,dY = \frac{1}{c^2}\int_0^x x\,y\,dx$$

erhält. Dieses Integral bedeutet das statische Moment der von *bc* begrenzten Fläche in Bezug auf die Anfangsordinate *ao*.

Es ist nun nicht schwer, die Schwerpunktsachse eines durch eine Ordinate begrenzten Flächentheiles oder der ganzen Fläche *oabcd* zu bestimmen. Ihre Entfernung ξ von o ist bestimmt durch den Ausdruck

$$\xi = \frac{\int_0^x x\,y\,dx}{\int_0^x y\,dx} = c\,.\,\frac{Y_1}{Y},$$

welcher sich auf einfache Weise construiren lässt.

Umfährt man nochmals die Curve $O_1 B_1 C_1$, immer unter der Voraussetzung, dass die Anfangsordinate in die Nullordinate versetzt wird, so ist

$$Y_2 = \frac{1}{c}\int_0^x x\,dY_1 = \frac{1}{c^3}\int_0^x x^2 y\,dx,$$

somit dem Trägheitsmomente in Bezug auf die Anfangsordinate proportional.[1] In ähnlicher Weise lassen sich Momente höherer Ordnung darstellen.

Die zweite in Nr. 8 und 12 beschriebene Art der Einstellung kann noch für manche andere Anwendungen benützt werden; da es aber in unserer Absicht liegt, vorzugsweise die praktische Verwendung des gewöhnlichen Integrators zu zeigen, so wollen wir uns hinfort nur mit diesem Letzteren beschäftigen.[2]

Aufstellung des gewöhnlichen Integrators; Bestimmung der Coordinatenrichtungen und der Nullachse.

Nr. 17. Das Instrument wird auf einem ebenen Reissbrette aufgestellt und braucht für alle nöthigen Verzeichnungen nicht mehr gerührt werden.

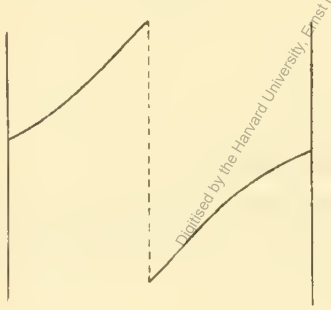
Jeder Aufstellung entsprechen ganz bestimmte Coordinatenrichtungen, namentlich ist die Richtung der x-Achse genau parallel zur Nuth n (Fig. 2), in welcher die Rädchen des Wagens längs dem Lineal L laufen.

Um diese Richtung auf dem Zeichenpapiere zu fixiren, bringt man das Rädchen r_3 mittels des Schräubchens d ausser Contact mit der Tischplatte und bewegt den Wagen längs LL; der Zeichenstift S beschreibt während der Bewegung eine zu LL parallele Gerade, welche die Richtung der x-Achse bestimmt. Senkrecht darauf steht die Richtung der y-Achse.

Die Bestimmung der Nullachse (siehe Nr. 5), d. h. derjenigen Horizontalen, welche der Umfahrungsstift beschreibt, wenn die Rolle r_3 sich in der Mitte der Tischplatte befindet, kann versuchsweise geschehen. Zu diesem Zwecke verschiebt man den Stift s in der Richtung der y bis die Rolle r_3 über O zu liegen kommt, bringt die Rolle durch Loslösen des Schräubchens d wieder in Berührung mit der Tischplatte und verschiebt den Wagen längs LL. Wird bei dieser Verschiebung eine, wenn auch noch so kleine Drehung der Rolle r_3 wahrnehmbar, so verschiebt man die Rolle, wie früher mittels s (ob nach links oder rechts, bestimmt der Sinn der Drehung) so lange, bis sie während der Bewegung des Wagens in vollkommener Ruhe verbleibt. Die horizontale Gerade, welche der Zeichenstift S bei dieser Bewegung verzeichnet, ist die gesuchte Nullachse.[3]

Diese genaue Bestimmung der Nullachse wird nur selten benöthigt, da wir uns in der praktischen Verwendung des Integrators von ihrer Lage ganz unabhängig machen können. Hingegen lässt sich ihre näherungsweise Bestimmung zur Orientirung gut verwenden; namentlich wird es sich empfehlen, die x-Achse der gegebenen Curve nahe an der Nullachse anzunehmen, um eine compendiöse Zeichnung der Integralcurve zu erhalten.

Fig. 6.



Was nun diese Letztere betrifft, so ist es einerlei, in welcher Höhe (in der Richtung der y verstanden) sie verzeichnet wird; zieht man das Schräubchen d an, so kann man den Zeichenstift S und mit ihm den Anfangspunkt der Integralcurve in einer solchen Höhe annehmen, dass die Verschiebungsgrösse des Lineals L_4 voraussichtlich für ihre Verzeichnung ausreicht. Sollte jedoch die zu verzeichnende Integralcurve in der Richtung der y eine Ausdehnung erreichen, welche diese Verschiebungsgrösse übersteigt, so kann man die Verzeichnung wo immer unterbrechen und entweder die weitere Ver-

[1] In einer noch bequemeren Form, nämlich unabhängig von der Nullachse und der Nullordinate, wird in den folgenden Nummern der gewöhnliche Integrator als Planimeter dargestellt.

[2] Die in den Nummern 2, 3, 4, 8, 9, 10 und 12 dargelegte Theorie wurde vom Erfinder angegeben.

[3] Siehe auch die Fussnote zu Nr. 19.

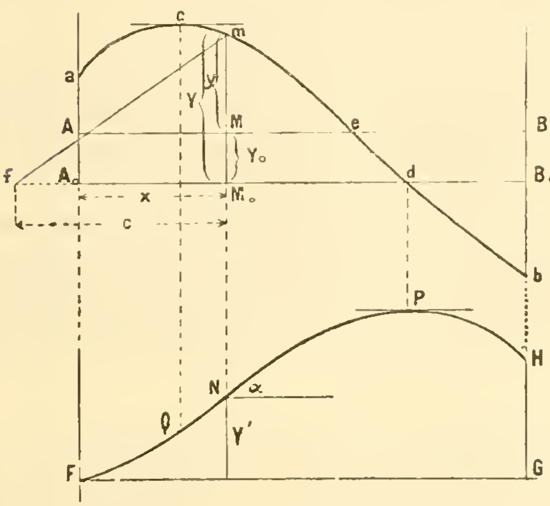
zeichnung in einer anderen Höhenlage vornehmen, wie dies aus Fig. 6 ersichtlich, oder aber das Zeichnungsblatt mitsammt dem Stifte S genau parallel zur y-Achse in eine entsprechende Lage verschieben. Durch die letztere Anordnung erreicht man einen continuirlichen Zug der Integralcurve.

Die Ausdehnung der zu umfahrenden Zeichnung ist durch die Länge des Lineals L wie auch durch den Durchmesser der Tischplatte fixirt. Sie beträgt in der Breite $26 \cdot 3^{cm}$ und in der Höhe $20 \cdot 0^{cm}$. Dieselben Dimensionen kann auch die Integralcurve erreichen.

Die Integralcurve.

Nr. 18. Untersuchen wir den Zusammenhang, welcher zwischen der gegebenen und der mit dem Instrument verzeichneten Curve stattfindet. Die erstere nennen wir Differentialcurve, im Gegensatz zur letzteren, der Integralcurve.

Fig. 7.



Sei in Fig. 7 $acdb$ die gegebene krumme Linie, A der Coordinatenursprung, AB die x-Achse, welche von der Nullachse $A_0 B_0$ um Y_0 absteht. Umfährt man von a ausgehend die gegebene krumme Linie, so beschreibt der Zeichenstift die Integralcurve FPH mit dem Coordinatenursprung in F und FG als x-Achse. Bezieht man vorläufig die gegebene Curve auf die Nullachse, so dass ihre Ordinaten $Y = Y_0 + y$ werden, so haben die Ordinaten Y' der Integralcurve den Werth

$$Y' = \frac{1}{c} \int Y dx \quad \text{(nach Formel IV}a.\text{)}$$

Differenzirt man beide Seiten dieser Gleichung, so bestimmt sich:

$$\frac{dY'}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{c} \quad . \ . \ . \ . \ . \ \text{VII.}$$

Obige Formel besagt uns, dass die Tangentenneigung in einem Punkte der Integralcurve direct proportional ist der diesem Punkte entsprechenden und auf die Nullachse bezogenen Ordinate der Differentialcurve.

Dieser Satz gibt uns ein einfaches Mittel an die Hand, die Tangente in einem beliebigen Punkte N der Integralcurve zu verzeichnen; trägt man nämlich (siehe Fig. 7) von dem entsprechenden Punkte M_0 der Nullachse die Instrumentconstante c nach links bis f ab, so bestimmt fm die Richtung der gesuchten Tangente. [1]

Aus Formel VII können wir noch nachstehende Eigenschaften der Integralcurve ablesen:

a) Für $Y = 0$, d. h. für die Durchschnittspunkte der Differentialcurve mit der Nullachse (Punkt d in Fig. 7) sind die Tangenten in den entsprechenden Punkten der Integralcurve horizontal, bestimmen somit die Maxima oder Minima dieser Curve. Ist die Anfangsordinate gleich Null, so ist die Achse FG eine Tangente im Anfangspunkte der Integralcurve.

b) Den Maxima und Minima der Differentialcurve (wie z. B. bei c) entsprechen Wendepunkte (Q) der Integralcurve.

Nr. 19. Ist Y in Formel VII eine constante Grösse, so ist auch $\operatorname{tg} \alpha$ constant; es entspricht somit einer um Y von der Nullachse entfernten horizontalen Geraden eine unter α geneigte Gerade als Integral-

[1] Siehe das im Jahre 1864 von Dr. Żmurko veröffentlichte Werk über Mathematik, worin diese Bestimmung der Tangentenrichtung zur angenäherten Verzeichnung der Integralcurve aus einer gegebenen Differentialcurve verwendet wird.

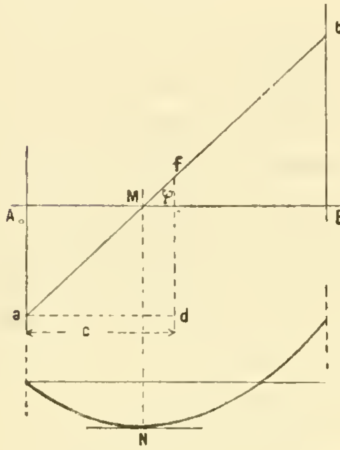
curve, wobei $\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y}{c}$.[1] Da für die Nullachse $Y=0$, also auch $\operatorname{tg}\alpha = 0$, so ist die Integralcurve der Nullachse eine horizontale Gerade.

Der Integrator als Parabolograph.

Nr. 20. Beschreibt der Umfahrungsstift eine unter dem Winkel φ geneigte Gerade ab (Fig. 8), deren Gleichung bezogen auf die Nullachse durch $Y = x\operatorname{tg}\varphi + b = \beta x + b$ gegeben ist, so erhalten nach Formel VI a die Ordinaten der Integralcurve den Werth

$$Y' = \frac{1}{c}\int_0^x [\beta x + b]\,dx = \frac{x}{c}\left[\beta\frac{x}{2} + b\right]. \;.\;.\;.\; \text{VIII.}$$

Fig. 8.



Formel VIII drückt aus die Gleichung einer Parabel, deren Achse parallel zur y-Achse und deren Parameter

$$p = \frac{c}{\beta} = c.\operatorname{cotg}\varphi. \;.\;.\;.\; \text{VIII } a.$$

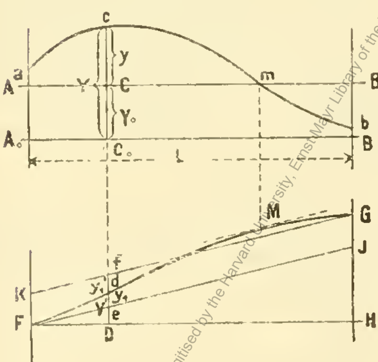
Der Scheitel der Parabel entspricht nach Nr. 18 a dem Durchschnittspunkte M der gegebenen Geraden mit der Nullachse. Die einfache Construction des Parameters df ist aus der Figur ersichtlich.

Will man umgekehrt eine Parabel mit dem Parameter p verzeichnen, so muss die zu umfahrende Gerade der Gleichung $Y = \frac{c}{p}x + b$ Genüge leisten, wobei b der etwa gegebenen Lage des Scheitels entsprechend angenommen wird.

Der Integrator als Planimeter.

Nr. 21. Erste Integralcurve. Flächenplanimeter. Bezieht man in Fig. 9 die gegebene Curve acb auf die Nullachse A_0B_0, so ist nach Formel VI a

Fig. 9.



$$\int_0^x Y dx = c\,.\,Y'.$$

Ydx bedeutet die Fläche des Elementes cC_0, dessen Höhe gleich der Ordinate Y und dessen Breite gleich dx. Summirt man alle solchen Elemente zwischen der Anfangsordinate und der Ordinate Y, so erhält man obiges Integral als Flächeninhalt der von den besagten Ordinaten, der Curve und der Nullachse begrenzten Figur. Es entspricht somit jeder Ordinate Y der Differentialcurve, eine Ordinate $Y' = Dd$ der ersten Integralcurve, welche dem Flächeninhalte der durch Y begrenzten Figur proportional ist. Wie man hiebei die Multiplication mit der Instrumentconstante c umgehen kann, wurde in Nr. 6 gezeigt.

Nr. 22. Ist jedoch die gegebene Curve auf eine beliebige zur Nullachse parallele x-Achse AB bezogen, so ist nach Formel VI:

[1] Diese Eigenschaft kann man zu einer einfachen und genauen Bestimmung der Lage der Nullachse ausnützen. Verzeichnet man nämlich zu einer beliebigen horizontalen Geraden die Integralcurve, und hat die Letztere die Neigung α, so ist der Abstand der Nullachse von dieser Horizontalen bestimmt durch $Y = c\,.\operatorname{tg}\alpha$.

$$\int_0^x y\,dx = c\,.\,Y' - x\,.\,Y_0,$$

wo Y_0 die Entfernung der x-Achse von der Nullachse bedeutet.

Obiges Integral bedeutet den Flächeninhalt der Fläche $AacC$, welchen man nach obiger Formel findet, wenn man von $c\,.\,Y'$ das Product $x\,.\,Y_0$ in Abzug bringt.

Nun ist dieses Product $x\,.\,Y_0$ die Fläche ACC_0A_0. Verzeichnet man von F aus die Integralcurve der Achse AB, welche nach Nr. 19 sich als eine geneigte Gerade FJ darstellt, so ist nach Gleichung VI a $c\,.\,De = x\,.\,Y_0$. Es ist somit:

$$\int_0^x y\,dx = c(Y' - \overline{De}) = c\,.\,y_1 \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{IX},$$

wenn y_1 die dem y entsprechende auf die Gerade FJ bezogene Ordinate de der Integralcurve bedeutet. Wir nennen deshalb diese Gerade die Basis der Integralcurve — sie ist, wie schon erwähnt wurde, die vom Anfangspunkte F der Integralcurve FdG verzeichnete Integralcurve der x-Achse AB.

Würde man von G aus die Gerade GK als Integralcurve der x-Achse verzeichnen (GK wird zu FJ parallel sein), so würden die auf GK bezogenen Ordinaten y'_1 offenbar der zwischen Cc und der Endordinate Bb eingeschlossenen Fläche proportional sein, also:

$$\int_l^x y\,dx = -c\,.\,y'_1 \;.\;.\;.\;.\; \text{IX}\,a,$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung ergibt sich sofort aus der Bedingung, dass für jeden Punkt der Integralcurve die Summe $y_1 + y'_1$ einen constanten Werth haben muss, welcher der ganzen zwischen den Endordinaten Aa und Bb eingeschlossenen Fläche proportional ist. Es ist auch wirklich:

$$y_1 + y'_1 = \frac{1}{c}\left[\int_0^x y\,dx - \int_l^x y\,dx\right] = \frac{1}{c}\int_0^l y\,dx.$$

Den Eigenschaften der Geraden FJ und GK entsprechend nennen wir sie die untere und obere Basis der ersten Integralcurve, wobei die untere Basis sich auf die Flächensummirung von links nach rechts, die obere hingegen auf die entgegengesetzte Flächensummirung bezieht.

Das eben Gesagte lässt sich in folgenden Satz zusammenfassen:

Die zwischen der ersten Integralcurve und ihren Basen gemessenen Ordinaten sind den entsprechenden Flächen der Differentialcurve proportional.

Man kann die Integralcurve sammt ihren Basen in einem Zuge verzeichnen, wenn man die Umfahrung der gegebenen Figur in folgender Weise vornimmt: Vom Ursprung A ausgehend umfährt man die x-Achse AB — der Integratorstift verzeichnet die obere Basis KG und verbleibt in G, während man die Verticale Bb beschreibt (siehe Nr. 2); von b aus umfährt man die Curve bca und die Verticale aA und erhält die Integralcurve GdF; beschreibt man endlich von A aus nochmals die Achse AB, so erhält man die untere Basis FJ.

Die Einführung der beiden Basen ist für spätere Anwendungen von Nutzen; sie macht uns von der Nullachse vollkommen unabhängig.

Nr. 23. In Bezug auf ihre Basen besitzt die Integralcurve ähnliche Eigenschaften, wie sie in Nr. 18 in Bezug auf die Nullachse gefunden wurden. Es entsprechen nämlich:

a) Den Durchschnittspunkten der Differentialcurve mit ihrer x-Achse solche Punkte (M in Fig. 9) der ersten Integralcurve, in denen die Tangenten an die Curve den Basen parallel sind, weil das Mass der Neigung für Tangente und Basis dasselbe ist, nämlich gleich $\frac{Y_0}{c}$ (siehe Nr. 19); diese Punkte bestimmen sonach die Maxima und Minima der Integralcurve in Bezug auf ihre Basen.

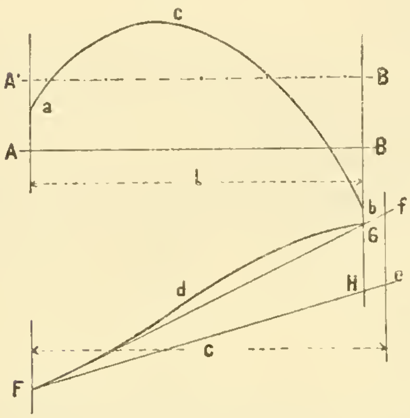
b) Das in Nr. 18 *b)* Gesagte bleibt hier wörtlich aufrecht.

Zu den obigen kommt noch eine Eigenschaft hinzu:

c) Den Durchschnittspunkten der ersten Integralcurve mit ihren Basen, also den Werthen $y_1 = 0$ oder $y'_1 = 0$ entsprechen solche Ordinaten der Differentialcurve, bei denen ein Ausgleich zwischen positiven und negativen Flächen stattfindet.

Nr. 24. Die letztere sub *c* angeführte Eigenschaft verhilft uns zur Lösung der nachstehenden, später oftmals wiederkehrenden Aufgabe: Es ist für die gegebene Curve eine zur x-Achse parallele Gerade so zu ziehen, dass sie einen Ausgleich der positiven und negativen Flächen bewirkt.

Fig. 10.

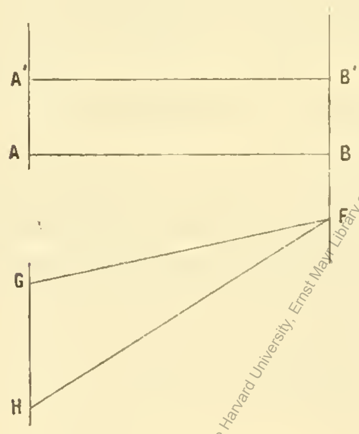


Sei in Fig. 10 *acb* die gegebene Curve, *FdG* die zugehörige Integralcurve und *FH* die der Achse *AB* entsprechende Basis. Betrachtet man die zu suchende Gerade als x-Achse, so muss die entsprechende Basis eine solche Lage annehmen, dass die auf sie bezogene Endordinate der Integralcurve gleich Null wird. Dieser Bedingung entspricht die Gerade *FG*, welche den Anfangspunkt der Integralcurve mit ihrem Endpunkte verbindet; sie ist die Integralcurve der zu suchenden Geraden $A'B'$, somit ist GH der Fläche $AA'B'B$ proportional, oder $AA'.l = c.GH$, woraus $AA' = BB' = GH \cdot \frac{c}{l} \cdot$ Dieser Ausdruck lässt sich sehr einfach construiren; zieht man nämlich im horizontalen Abstande c von F eine Verticale, so ist das Stück cf, welches auf ihr die Geraden FG und FH abschneiden, gleich der gesuchten Höhe AA'.[1]

Die Gerade FG ist zugleich obere und untere Basis für die als x-Achse angenommene Gerade $A'B'$.

Nr. 25. Die in voriger Nummer gefundene einfache Beziehung zwischen AA' und GH können wir zur genauen Bestimmung der Integralconstante c benützen. Umfährt man nämlich in beliebigem Sinne ein genau dimensionirtes Rechteck $AA'B'B$ (Fig. 11), dessen Seiten den Coordinatenrichtungen parallel laufen, so verzeichnet der Integrator zwei geneigte Gerade, welche auf der Anfangs- oder auf der Endverticalen, je nachdem man von der ersteren oder von der letzteren mit dem Umfahren begonnen hat, ein Stück GH abschneiden. Bedeuten h und l Höhe und Länge des Rechteckes, so ist:

Fig. 11.



$$c = \frac{h}{GH} \cdot l \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathrm{X},$$

wonach sich c berechnen lässt. Der genaue Werth für c wird selbstverständlich als Mittelwerth einer grösseren Anzahl solcher Berechnungen resultiren.

Nr. 26. Bis jetzt haben wir nur solche Flächen in Betracht gezogen, welche zwischen der Differentialcurve und ihrer x-Achse eingeschlossen waren.

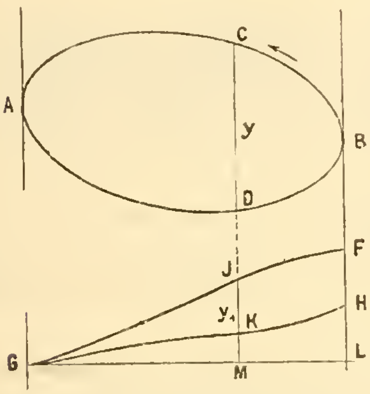
Betrachten wir nun eine allseitig von krummen Linien begrenzte Figur $ACBD$ (Fig. 12). Die zwei äussersten verticalen Tangenten mögen sie in den Punkten A und B berühren.

Umfährt man die Figur, indem man von einem dieser Berührungspunkte ausgeht, in einem beliebigen Sinne (hier z. B. wurde von B ausgehend in dem mit dem Pfeil bezeichneten Sinne umfahren), so beschreibt der Integratorstift die Curven FJG und GKH, welche den Differentialcurven BCA und ADB entsprechen.

[1] Für eine beliebige von F aus gezogene Gerade lässt sich auf ähnliche Weise die zugehörige Horizontale bestimmen.

Zieht man die Horizontale GL, und für einen beliebigen Punkt J die Ordinate JM, so wissen wir nach Nr. 21, dass das Product $c.JM$ proportional ist der Fläche, welche vom Curvenstück AC, von den Verticalen A und CD und von der Nullachse (nicht gezeichnet) eingeschlossen ist; ebenso stellt $c.KM$ den Flächeninhalt derjenigen Fläche dar, welche vom Curvenstück AD von denselben Verticalen und von der Nullachse begrenzt ist. Den Unterschied der beiden Flächen bildet das Flächenstück ACD der Figur, dessen Flächeninhalt sich mit

Fig. 12.



$$c(JM—KM) = c.JK = c.y_1$$

ergibt.

Es ist somit die zwischen den beiden Integralcurven gemessene Ordinate proportional dem Flächeninhalte des durch die entsprechende Ordinate begrenzten Flächenstückes der gegebenen Figur.

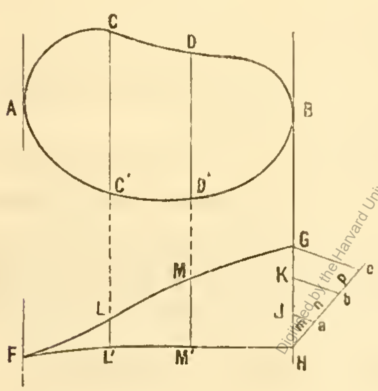
Beginnt man die Umfahrung in A statt in B, so erhält man dieselben Integralcurven, die sich jedoch auf der rechten Verticalen schneiden. Das eben aufgestellte Gesetz behält auch in diesem Falle seine Giltigkeit, nur ist die Flächensummirung von der rechten Verticalen nach links zu verstehen, also umgekehrt wie in Fig. 12.

Betrachtet man in Fig. 12 eines der Curvenstücke, in welche die gegebene Figur durch die Berührungspunkte A und B getheilt ist, also z. B. das Stück ADB, als krummlinige x-Achse, auf welche die Ordinaten y des Curvenstückes ACB bezogen sind, so stellt die Curve GKH im Sinne von Nr. 22 offenbar die Basis der Integralcurve GJF dar. Umfährt man die gegebene Figur von A ausgehend über D, B, C bis A, und von da nochmals über D bis B, so erhält man die Integralcurve GJF sammt ihren beiden, in verticaler Richtung äquidistanten krummlinigen Basen, für welche das in Nr. 23 Gesagte, bei entsprechender Modificirung, seine Giltigkeit behält.

Wir werden in der Folge Gelegenheit haben solche krummlinige Basen zu verwenden.

Nr. 27. Auf Grund des aus Nr. 26 resultirenden Gesetzes können wir die Aufgabe lösen, eine beliebig begrenzte Figur in bestimmter Richtung durch gerade Linien in mehrere Lamellen zu theilen, deren Flächeninhalte einer gegebenen Proportion Genüge leisten. Diese Aufgabe ist identisch mit der im Kataster so oft vorzunehmenden Theilung der Grundparzellen.

Fig. 13.

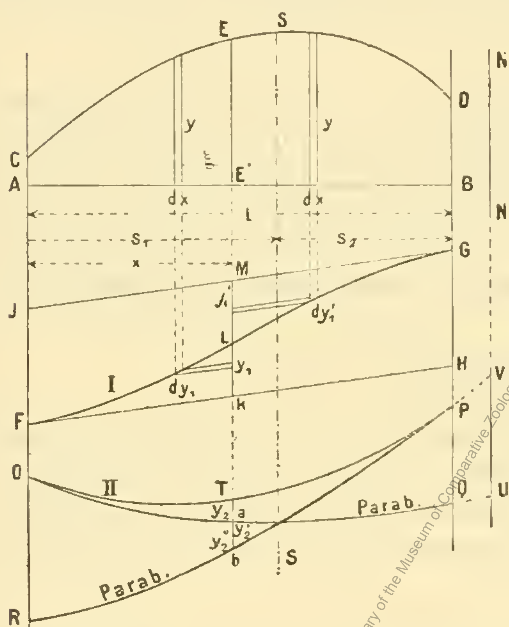


Die verzeichnete Grundparzelle wird in der Weise auf das Brett befestigt, dass die Richtung, in welcher die Theilung geschehen soll, der y-Achse des Integrators parallel wird. Ist das mit der in Fig. 13 verzeichneten Parzelle $ACBC'$ geschehen, so umfährt man sie nach Anleitung in Nr. 26 und erhält die zwei Integralcurven GLF und $FL'H$. GH ist der Fläche der ganzen Figur proportional. Soll nun die Theilung der Fläche nach der Proportion $m:n:p$ geschehen, so theilt man vorerst GH nach dieser Proportion, indem man auf der beliebigen Geraden Hc die Längen m, n und p im beliebigen Massstabe aufträgt und von a und b Parallele zu Gc zieht; es verhält sich $HJ:JK:KG = m:n:p$. Nimmt man die Länge JH in den Zirkel und versucht, an welcher Stelle diese Länge in verticaler Richtung zwischen die Integralcurven genau passt, hier z. B. in LL', so ist die entsprechende Verticale CC' eine der gesuchten Theilungslinien, da $LL' = JH$ dem Flächeninhalte der Figur ACC' proportional ist. Nimmt man ferner die Länge HK in den Zirkel und passt sie etwa zwischen MM', so ist die entsprechende Verticale DD' die zweite der gesuchten Theilungslinien. Die Fläche der Lamelle $CDD'C'$ ist offenbar proportional der Länge $MM' - LL' = KH - JH = KJ$. Die dritte Lamelle DBD' ist der Länge GK proportional.

Aus den Ausführungen in den Nummern 21—27 ist ersichtlich, dass wir im Integrator einen Flächenplanimeter besitzen, welcher ähnliche, jetzt gebräuchliche Instrumente insoferne übertrifft, als die ihm eigenthümliche Art der **theilweisen Flächensummirung** sich zur raschen Lösung verschiedener Aufgaben vorzüglich verwenden lässt.

Nr. 28. Zweite Integralcurve. Planimeter für statische Momente. Umfährt man die erste Integralcurve, die einer gegebenen Differentialcurve angehört, so verzeichnet der Integrator eine andere Integralcurve, welche in Bezug auf die ursprüngliche Differentialcurve die zweite Integralcurve genannt wird.

Fig. 14.



Ist in Fig. 14 die der gegebenen Curve CED zugehörige erste Integralcurve FLG sammt ihren Basen JG und FH verzeichnet, so wird der Integrator, falls die Umfahrung in der Reihenfolge $JGLFH$ (oder in der umgekehrten) bewerkstelligt wird, drei Curven verzeichnen, und zwar die beiden, den geraden Basen JG und FH entsprechenden Parabelstücke (siehe Nr. 20) RP und OQ und die zweite Integralcurve OTP.

Eine beliebige auf OQ bezogene Ordinate $Ta = y_2$ der zweiten Integralcurve ist nach Nr. 26 dem Flächeninhalte des von F und $LK = y_1$ eingeschlossenen Curvendreiecks proportional — ebenso ist die auf RP bezogene Ordinate $Tb = y_2'$ dem Flächeninhalte des von G und $ML = y_1'$ begrenzten Curvendreieckes proportional; es ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned} c.y_2 &= \int_0^x y_1\,dx \\ c.y_2' &= \int_l^x y_1'\,dx \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{XI.}$$

Man kann desshalb die Parabelstücke RP und OQ wieder die Basen der zweiten Integralcurve nennen.

Wäre die erste Integralcurve aus der Nullstellung (siehe Nr. 5) verzeichnet, d. h. wäre die x-Achse in der Nullachse angenommen, so wären die Basen der ersten Integralcurve horizontale Geraden und die Basen der zweiten Integralcurve geneigte gerade Linien.

Dasselbe was in Nr. 23 über die erste Integralcurve in Bezug auf die Differentialcurve gesagt wurde, gilt auch für die zweite in Bezug auf die erste Integralcurve, wenn man manche Bezeichnungen entsprechend ändert.

Nr. 29. Jedem Elemente der ursprünglich gegebenen Fläche entspricht auf der I. Integralcurve ein Curvenelement dy_1 und es ist bekanntlich

$$y\,dx = c.dy_1.$$

Ziehen wir eine beliebige Ordinate EE' und die ihr entsprechende KM (Fig. 14), bezeichnen ferner die horizontale Entfernung des beliebigen Elementes $y\,dx$ und des zugehörigen dy_1 von dieser Ordinate mit ξ, wobei ξ eine mit der Lage dieses Elementes veränderliche Grösse bedeutet. Zwei von den Endpunkten des Elementes dy_1 bis zur Ordinate KM gezogene Parallele zu den Basen begrenzen ein Flächenelement, dessen Flächeninhalt

$$\xi dy_1 = \frac{\xi}{c} \cdot y dx \; . \; . \; . \; . \; . \mathrm{XII}.$$

Bildet man für jedes Element des Curvenstückes FL solche Flächenelemente und summirt sie, so erhält man die ganze zwischen F und y_1 gelegene Fläche, deren Grösse nach Gl. XI durch $c.y_2$ sich ausdrückt. Summirt man auch die auf ähnliche Weise gebideten Flächenelemente des Curvenstückes LG, so erhält man die ganze zwischen G und y'_1 eingeschlossene Fläche, deren Grösse sich mit $c.y'_2$ ergibt. Drückt man das eben Gesagte durch mathematische Formeln aus, so erhält man:

$$\int_0^x \xi dy_1 = \frac{1}{c} \int_0^x \xi y dx = c.y_2$$

und

$$\int_l^x \xi dy'_1 = \frac{1}{c} \int_l^x \xi y dx = c.y'_2$$

oder in der übersichtlichen Form:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^x \xi y dx &= c.\int_0^x \xi dy_1 = c^2 y_2 \\ \int_l^x \xi y dx &= c.\int_l^x \xi dy_1 = c^2 y'_2 \end{aligned}\right\} \; . \; . \; \mathrm{XIII}$$

Das Product $\xi y dx$ unter dem Integralzeichen bedeutet nun das **statische Moment** des Flächenelementes ydx in Bezug auf die willkürlich angenommene Ordinate EE'; $\int_0^x \xi y dx$ bedeutet somit das **statische Moment** der ganzen zwischen A und dieser Ordinate gelegenen Fläche von der Länge x, **in Bezug auf diese Ordinate** EE'.

Dieses statische Moment ist nach Formel XIII der demselben x entsprechenden, auf die entsprechende Basis bezogenen Ordinate y_2 der zweiten Integralcurve proportional. Analog ist das statische Moment der rechts von EE' gelegenen Fläche in Bezug auf EE' der entsprechenden Ordinate y'_2 proportional. Hiebei entspricht die Integralcurve der unteren oder oberen Basis dem links oder rechts von EE' gelegenen Flächentheile.

Nr. 30. Bildet man in Formel XIII die Differenz zwischen den ersten und letzten Gliedern beider Gleichungen, so erhält man, falls $ab = y''_2$ gesetzt wird:

$$\int_0^l \xi . y dx = c^2 (y_2 - y'_2) = c^2 y''_2 \; . \; . \quad . \; . \mathrm{XIV},$$

was besagt, dass die algebraische Summe der statischen Momente der durch eine beliebige Ordinate EE' getheilten Flächenstücke in Bezug auf diese Ordinate, oder **dass das statische Moment der ganzen Fläche in Bezug auf eine Ordinate** EE' **proportional ist der dieser Ordinate entsprechenden, zwischen den beiden Basen der zweiten Integralcurve gemessenen Ordinate** y''_2.

Dieses Gesetz gilt für jedwede Verticale EE'. Würde nun die verticale Achse, auf welche das statische Moment der gegebenen Figur zu beziehen ist, ausserhalb dieser Figur, etwa in XX liegen, so wird die Grösse dieses statischen Momentes durch das Product aus c^2 und der entsprechenden **zwischen den verlängerten Basen** der zweiten Integralcurve gemessenen Ordinate UV ausgedrückt (siehe die Fig. 14).

Nr. 31. Unter allen Ordinaten EE' wird es **eine** geben, in Bezug auf welche das statische Moment der ganzen Fläche gleich Null ist — sie geht bekanntlich durch den Schwerpunkt der gegebenen Figur. Nach

Obigem findet dies statt für $y''_2 = 0$, d. h. für den Durchschnittspunkt der beiden Basen. Es entspricht somit die zur y-Achse parallele Schwerachse SS dem Durchschnittspunkte der Basen der zweiten Integralcurve.

Auch noch auf eine andere Weise kann man einen Punkt der Geraden SS erhalten; es ist nämlich der Durchschnittspunkt der beiden Geraden, welche die Endpunkte der Basen, also die Punkte O, P, Q, R kreuzweise verbinden. Denn, bezeichnet man die Fläche der gegebenen Figur mit f, die Entfernung der Schwerachse von A und von B mit s_1 und s_2, so ist offenbar $c^2.\overline{OR} = f.s_1$, ebenso $c^2.\overline{PQ} = f.s_2$; hieraus folgt die Proportion

$$\frac{OR}{PQ} = \frac{s_1}{s_2},$$

welcher der Durchschnittspunkt der Kreuzlinien Genüge leistet.

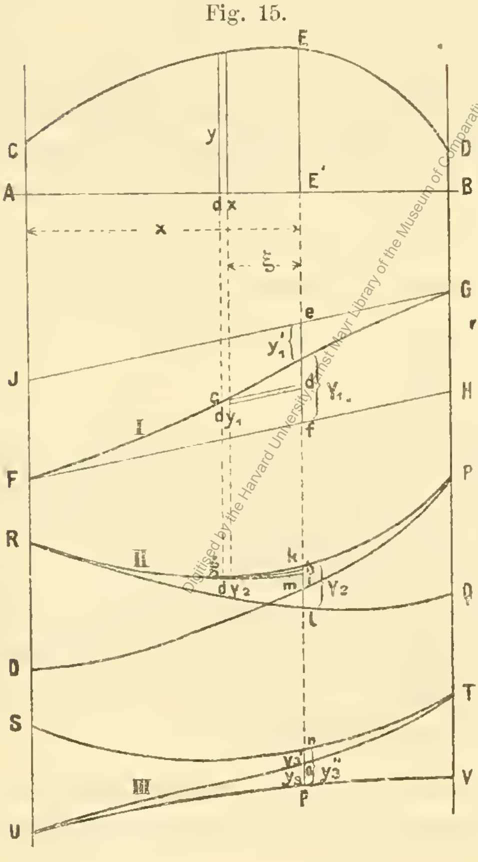
Nr. 32. Berücksichtigt man das, was in Nr. 26 über krummlinig begrenzte Figuren gesagt wurde, so kann man die in den vorigen Nummern gefundenen Gesetze direct auf geschlossene krummlinig begrenzte Figuren übertragen.

Auch lässt sich die dem Integrator eigenthümliche Art der Darstellung in einem Bilde sämmtlicher auf beliebige verticale Achsen bezogener statischen Momente zur Lösung mancher Aufgabe verwenden.

Es sei hier nur flüchtig auf die zur neutralen Faser parallelen Schubspannungen hingewiesen, welche im Querschnitte eines belasteten Balkens auftreten. Die Veränderlichkeitscurve für solche Schubspannungen wird nämlich bekanntlich aus der Veränderlichkeitscurve der auf die Schwerachse bezogenen statischen Momente gewisser Querschnittsabschnitte abgeleitet, — diese Momente werden durch einfache Construction aus der zweiten Integralcurve erhalten.

Nr. 33. Dritte Integralcurve. Planimeter für Trägheitsmomente. Auf dieselbe Weise wie wir aus der ersten die zweite Integralcurve sammt ihren Basen erhalten haben, können wir aus der zweiten die dritte Integralcurve sammt ihren Basen verzeichnen, welche letztere sich als kubische Parabeln darstellen, sobald die x-Achse der gegebenen Curve nicht in der Nullachse angenommen wurde.

Fig. 15.



In Fig. 15 stellt UT die dritte Integralcurve mit ihren parabolischen Basen ST und UV vor. Aus den früheren Erörterungen folgt sofort, dass die Ordinate $op = y_3$ der Fläche von R bis kl der zweiten Integralcurve und $no = y'_3$ der Fläche von P bis km derselben Curve proportional ist.

Betrachten wir wieder das dem Elemente $y\,dx$ der gegebenen Curve CED entsprechende Element dy_1 der ersten Integralcurve sammt den zwei Parallelen zur Basis FH, also das Element cd von der horizontalen Länge ξ. Umfährt man dieses Element, so verzeichnet der Integrator das Element dy_2 und zwei daran tangentielle Parabeln gh und gi, als Integralcurven der beiden Parallelen cd. Das Ordinatenstück hi ist offenbar dem Flächeninhalte des Elementes cd proportional; es ist somit

$$\overline{hi}\,.\,c = \xi.dy_1 = \frac{\xi}{c}\,y.dx$$

oder

$$\overline{hi} = \frac{\xi y\,dx}{c^2}.$$

Da nun ghi ein parabolisches Dreieck vorstellt, dessen Spitze in g, dessen Basis hi und dessen Höhe ξ, so ist sein Flächeninhalt gleich

$$\frac{1}{2}\overline{hi}.\xi = \frac{1}{2c^2}\xi^2 y\,dx.$$

Summirt man alle solchen Elemente ghi, welche allen zwischen R und kl gelegenen Elementen dy_2 entsprechen, so erhält man die ganze zwischen R und kl enthaltene Fläche, welche, wie oben gefunden wurde, der Ordinate y_3 proportional ist. Wir erhalten somit

$$\sum \frac{1}{2}\overline{hi}.\xi = \frac{1}{2c^2}\int_0^x \xi^2 y\,dx = c.y_3$$

oder

$$\left.\begin{aligned} c^3 y_3 &= \frac{1}{2}\int_0^x \xi^2 y\,dx \\ -c^3 y'_3 &= \frac{1}{2}\int_l^x \xi^2 y\,dx \end{aligned}\right\} \quad .\;.\;.\;.\;.\mathrm{XV}.$$

und die analoge Formel

Nun bedeutet $\xi^2 y\,dx$ das Trägheitsmoment des Flächenelementes $y\,dx$ in Bezug auf die willkürlich angenommene Ordinate EE'; dem entsprechend bedeutet das erste Integral in Formel XV das Trägheitsmoment des links von EE' und das zweite Integral das Trägheitsmoment des rechts von EE' gelegenen Flächentheiles in Bezug auf diese Ordinate EE'.

Das Gesetz, welches Formel XV ausspricht, lautet also:

Die zwischen der dritten Integralcurve und ihren Basen gemessenen Ordinaten sind den Trägheitsmomenten derjenigen Flächentheile proportional, in welche die ihnen entsprechende Ordinate die gegebene Figur theilt. Die Trägheitsmomente sind auf diese Ordinate bezogen.

Nr. 34. Bildet man die Differenz der beiden Gleichungen in Formel XV, so erhält man die Formel

$$\frac{1}{2}\int_0^l \xi^2 y\,dx = c^3(y_3+y'_3) = c^3.y''_3 \quad .\;.\;.\;.\;.\mathrm{XVI},$$ [1]

welche besagt, *dass das Product aus der zwischen den Basen der dritten Integralcurve gemessenen Ordinate und der dritten Potenz der Instrumentconstante gleich ist dem halben Trägheitsmomente der ganzen Figur, bezogen auf die ihr entsprechende Ordinate der gegebenen Curve.*

Dieses Gesetz ist ganz allgemein, es gilt somit auch für eine ausserhalb der gegebenen Figur gelegene verticale Achse, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment bestimmt werden soll.

Für geschlossene krummlinige Figuren lassen sich obige Gesetze, bei entsprechender Auffassung der Bedeutung der Basen, direct anwenden.

Analog kann man Momente höheren Grades verzeichnen, und zwar entspricht die $n$te Integralcurve dem Momente $n-1$ten Grades der gegebenen Fläche.

Der gerade Balken.

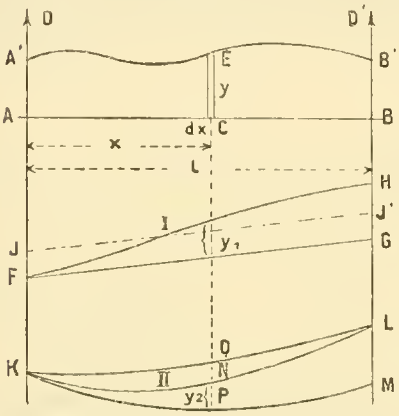
Nr. 35. Ist die gegebene Figur ein Balkenquerschnitt, so lässt sich nach den vorigen Nummern der Integrator dazu verwenden, um seinen Flächeninhalt, seine Schwerpunktsachse, ferner sein statisches und Trägheitsmoment zu bestimmen. In den folgenden Nummern wollen wir darthun, wie man den Integrator zur

[1] Siehe Nr. 6.

Bestimmung der verticalen Scheerkräfte (Transversalkräfte), der Momente und der elastischen Linie eines belasteten geraden Balkens benützen kann.

Nr. 36. Transversalkräfte und Momente. Der Balken AB von der Länge l in Fig. 16 sei durch eine continuirliche, die Grösse y pro Längeneinheit betragende Belastung bedeckt. Die Auflagerdrücke an den Stützen seien D und D'. Die Linie $A'EB'$ nennt man bekanntlich Belastungslinie und die zwischen ihr und der Achse AB sich befindliche Fläche die Belastungsfläche.

Fig. 16.



Verzeichnet man zur Belastungslinie die erste Integralcurve FH mit der unteren Basis FG, ferner die zweite Integralcurve KNL sammt ihrer Basis KM, so stellt $c . y_1$ die Fläche $AA'EC$ und $c^2 . y_2$ das statische Moment dieser Fläche in Bezug auf die Ordinate y vor; dem entsprechend ist $c . \overline{GH}$ der ganzen Belastungsfläche und $c^2 . \overline{ML}$ deren statischen Momente in Bezug auf die Endordinate B gleich.

Die Grösse des Auflagerdruckes D finden wir aus der Bedingung, dass die Momente des Auflagerdruckes und der ganzen Belastung in Bezug auf B numerisch einander gleich sein müssen. Es ist somit $D . l = c^2 . \overline{ML}$, woraus

$$\frac{D}{c} = \overline{ML} . \frac{c}{l}$$

sich graphisch leicht bestimmen lässt. Nun ist die Transversalkraft im Punkte C gleich

$$V_x = D - \int_0^x y\,dx = D - c\,y_1 = c\left(\frac{D}{c} - y_1\right)^1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ \text{XVII.}$$

Macht man sonach FJ gleich $\frac{D}{c}$ und zieht JJ' parallel zu FG, so sind die zwischen der ersten Integralcurve FH und der Geraden JJ' gemessenen Ordinaten, den Transversalkräften proportional.

Das Biegungsmoment im Punkte C findet man als die algebraische Summe der Momente des Auflagerdruckes und der auf AC liegenden Belastung, somit

$$M_x = D . x - c^2 . y_2 = c\left[\frac{D}{c} . x - c . y_2\right].$$

Verzeichnet man die Linie KQL als Integralcurve der Geraden JJ', so ist die Ordinate

$$QP = y'_2 = \frac{1}{c} \cdot \frac{D}{c} . x,$$

folglich

$$\overline{LM} = \frac{1}{c} \cdot \frac{D}{c} . l \qquad \text{oder} \qquad c^2 . \overline{LM} = D . l,$$

wonach der Endpunkt L der Curve KQL mit dem Endpunkte der zweiten Integralcurve KNL zusammenfallen muss. Es ist hienach JJ' eine Ausgleichende im Sinne von Nr. 24.

Drückt man aus der vorletzten Gleichung $\frac{D}{c}$ durch y'_2 aus und setzt diesen Werth in die Gleichung für M_x ein, so erhält man schliesslich

[1] Die Ordinaten y sind als Last pro Längeneinheit Grössen nullten Grades, so auch die später vorkommenden Grössen y_1, y_2 und η; desswegen ist das Product $c . y_1$ vom ersten und die Producte $c^2 . y_2$ und $c^2 . \eta$ vom zweiten Grade, wie es sein soll.

$$M_x = c[c.y_2' - c.y_2] = c^2(y_2' - y_2) = c^2.\eta \quad \ldots\ldots \text{XVIII},$$

wenn mit η die Ordinate QN bezeichnet wird. [2]

Fasst man die Integralcurve KQL der ausgleichenden Geraden JJ' als Schlusslinie der zweiten Integralcurve auf, so besagt Formel XVIII das Gesetz, wonach die zwischen der zweiten Integralcurve der Belastungslinie und ihrer Schlusslinie gemessenen Ordinaten η den auf den Balken wirkenden Biegungsmomenten direct proportional sind.

Hätte man die Verzeichnungen so vorgenommen, dass AB in der Nullachse gelegen wäre, so würden FG und JJ' horizontale Linien und die Schlusslinie KQL würde geradlinig sein; die zweite Integralcurve wäre dann die wirkliche Seilcurve der gegebenen Belastungsfläche.

Aus obiger Erörterung folgt der Werth für das Moment in C:

$$M_x = c^2.\eta = D.x - c\int_0^x y_1\, dx.$$

Differenzirt man beide Seiten zweimal, so erhält man

$$c^2\frac{d\eta}{dx} = D - cy_1 = D - \int_0^x y\, dx$$

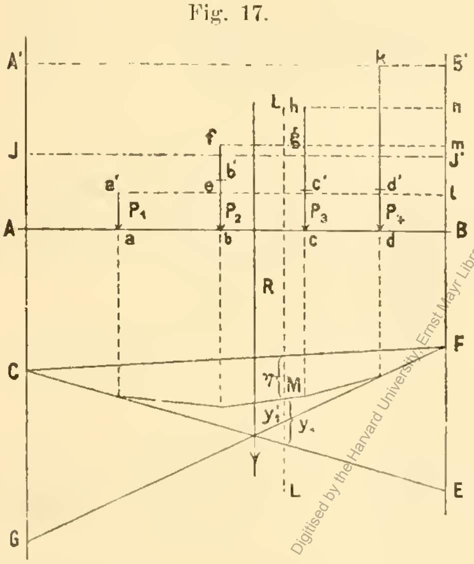
und

$$c^2\frac{d^2\eta}{dx^2} = -y, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{y}{c^2} \quad \ldots\ldots \text{XIX},$$

einen bekannten Ausdruck, wonach der zweite Differentialquotient der Seilcurvenordinate proportional ist der Ordinate der Belastungsfläche.

Nr. 37. Wäre die Belastung des Balkens nicht continuirlich, wie es vorhin angenommen wurde, sondern aus einem Systeme vereinzelter Lasten $P_1 = aa'$, $P_2 = bb'$ ... (Fig. 17) bestehend, so kann man auch den Integrator zur Bestimmung der Transversalkräfte und Momente benützen. Macht man zu diesem Zwecke $Bl = aa'$, $lm = bb'$, $mn = cc'$, endlich $nB' = dd'$, trägt also auf BB' das Kräftepolygon auf und zieht die angedeuteten Horizontalen, so sind die Momente der Lasten in Bezug auf B durch die Flächeninhalte der Rechtecke $aa'lB$, $efml$, ... dargestellt. Die ganze Fläche $aa'efg\ldots kB'B$ ist somit gleich der Summe der Momente der Lasten in Bezug auf B. Ebenso ist die Summe der Momente in Bezug auf A durch die Fläche $Aaa'ef\ldots ikA'$ dargestellt.

Fig. 17.



Verzeichnet man für den gebrochenen Linienzug $Aaa'ef\ldots kB'$ und für die Geraden AB und $B'A'$ die Integralcurven CMF, CE und FG, so erhalten wir nach der früheren Auseinandersetzung folgende statischen Momente der Lasten in Bezug auf eine beliebige Verticale LL:

der links von LL gelegenen Lasten in . . . $c.y_1$
„ rechts „ „ „ „ „ . . . $c.y_1'$
„ algebraischen Summe für sämmtliche Lasten in . . . . $c(y_1 - y_1')$.

Der Durchschnittspunkt der Geraden CE und FG, für welchen die algebraische Summe der Momente gleich Null ist, bestimmt die Lage der Resultirenden R sämmtlicher Lasten. Bestimmt man nun, der vorigen

---

[2] Siehe obige Note.

Nummer analog, die Grösse des linken Auflagerdruckes $AJ = \frac{c}{l} . EF$, so stellen die zwischen der Horizontalen JJ' und der gebrochenen Linie gemessenen Ordinaten die Transversalkräfte vor. Zieht man noch die Gerade CF, welche nach voriger Nummer sich als Integralcurve der Geraden JJ' ergibt, so sind die Ordinaten η den auf dem Balken auftretenden Biegungsmomenten proportional.

Es braucht wohl kaum gesagt zu werden, dass der Linienzug CMF mit dem Seilpolygone gleichbedeutend ist, dessen Schlusslinie CF, und welches für das Kräftepolygon BB' mit der Poldistanz c verzeichnet wurde.

Die elastische Linie.

Nr. 38. Zwischen der Durchbiegungscurve der Balkenachse und der Belastung des Balkens besteht bekanntlich folgender angenäherte Zusammenhang:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M_x}{EJ},$$

worin $\eta = f(x)$ die Ordinate der elastischen Linie, M_x das Moment der einwirkenden Kräfte für den betrachteten Punkt, E der Elasticitätsmodul des Balkenmaterials und J das constante Trägheitsmoment des Balkenquerschnittes bedeuten.

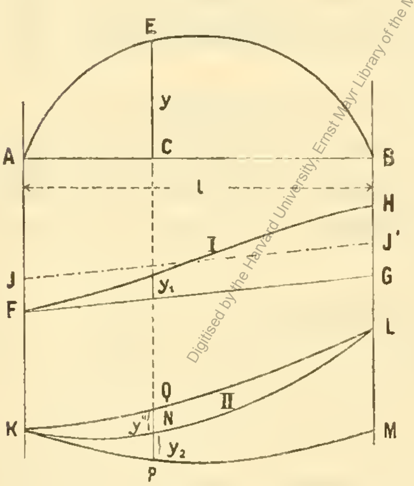
Trägt man von einer geraden Achse das jedem Querschnitte entsprechende Moment als Ordinate auf, so erhält man eine Momentencurve als Begrenzung der Momentenfläche. Ist die Momentencurve AEB in Fig. 18 durch irgend welche Construction erhalten worden und erscheinen die Momente in der Form $y.H$, wobei H einen constanten Factor bedeutet, so geht vorige Gleichung in folgende über:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{y.H}{EJ} \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{XX.}$$

Analog der Fig. 16 bezeichnen wir mit FH die erste, mit KNL die zweite Integralcurve, ferner mit FG und KM die entsprechenden unteren Basen mit den auf sie bezogenen Ordinaten y_1 und y_2.

Integrirt man Gleichung XX zweimal und beachtet, dass

Fig. 18.



$$\int y\,dx = c.y_1\,; \quad \int y_1\,dx = c.y_2 \quad \text{und} \quad \int_0^l y_1\,dx = c.\overline{LM},$$

wenn $\overline{LM}$ die zwischen den Endpunkten der zweiten Integralcurve und ihrer Basis gemessene Ordinate bedeutet, so erhält man

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{H}{EJ}\left[\int y\,dx + C'\right] = \frac{H.c}{EJ}[y_1 + C_1] \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{XXI},$$

wo $\frac{C'}{c} = C_1$ gesetzt wurde; ferner ist

$$\eta = \frac{H.c}{EJ}\left[\int y_1\,dx + C_1 x + C''\right] = \frac{H.c^2}{EJ}\left[y_2 + C_1\frac{x}{c} + \frac{C''}{c}\right] \; . \; . \; . \; . \text{XXII.}$$

C'' muss Null sein, weil für $x = 0$ auch $\eta = 0$ ist. C_1 bestimmen wir aus der Bedingung, dass für $x = l$, $\eta = 0$ wird; für diesen Werth von x wird $y_2 = \overline{ML}$, somit ist

$$\overline{LM} + C_1\frac{l}{c} = 0, \quad \text{oder} \quad C_1 = -LM.\frac{c}{l}.$$

C_1 ist die Integralconstante der ersten Integralcurve; trägt man somit ihren berechneten oder construirten Werth in FJ auf, zieht JJ' parallel zu FG und verzeichnet KQL als Integralcurve der Geraden JJ', so erhält man die Ordinate $QN = y''$ und es ist nach Analogie mit Nr. 36

$$\eta = \frac{H.c^2}{EJ} \cdot y'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; \mathrm{XXIII}.$$

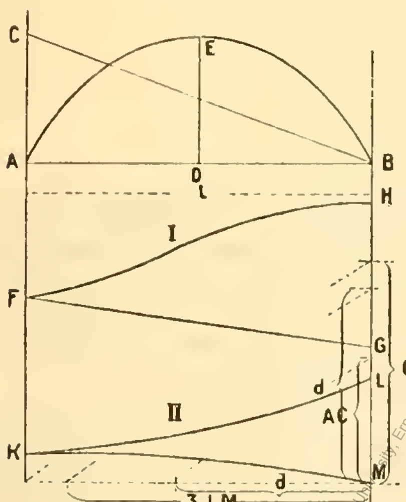
Diese Formel besagt uns, dass wenn man zur Momentencurve die zweite Integralcurve verzeichnet, die zwischen dieser Curve und ihrer Schlusslinie gemessenen Ordinaten, den Ordinaten der elastischen Linie proportional sind.[1]

Würde man AB in der Nullachse annehmen, so wäre die Schlusslinie KQL gerade.

In den folgenden Nummern wollen wir zeigen, in welcher Weise der Zusammenhang zwischen der zweiten Integralcurve und der elastischen Linie benützt werden kann, um die durch die Belastung des Balkens hervorgerufenen Momente auch in diesen Fällen zu bestimmen, in denen man genöthigt ist, die Elasticitätsgesetze zu Hilfe zu nehmen.

Nr. 39. Der an einem Ende horizontal eingespannte, am andern frei aufliegende Balken. Sei in Fig. 19 die Linie AEB die Momentencurve für einen an den Enden frei unterstützten Balken mit der Schlusslinie AB, so ändert sich für denselben in A eingespannten Balken blos die Lage der Schlusslinie, indem in A ein negatives Moment, etwa dem Stücke AC proportional, entsteht. CB wäre somit die Schlusslinie der Momentencurve und zugleich ihre Achse in der von uns gegebenen Auffassung, da die Momentenordinaten auf sie bezogen erscheinen. Die Lage dieser Schlusslinie ist aus den Bedingungen zu bestimmen, welchen die elastische Linie zu genügen hat.

Fig. 19.



Verzeichnen wir die erste und die zweite Integralcurve der Momentencurve AEB und der Geraden AB, so entsprechen:

der Curve AEB die Curven FH und KL,
der Geraden AB die Gerade FG und die Parabel KM.

Wäre nun CB richtig angenommen, so müsste die elastische Linie folgenden drei Bedingungen Genüge leisten:

1. Die Ordinate im Punkte A muss Null sein, d. h. die Curve KL und ihre Schlusslinie müssen von demselben Punkte ausgehen.

2. Die Ordinate im Punkte B muss Null sein, d. h. die Endpunkte der Curve KL und ihrer Schlusslinie müssen zusammenfallen.

3. Die Tangente an die elastische Linie in A muss horizontal sein, d. h. die Curve KL und ihre Schlusslinie müssen in K eine gemeinschaftliche Tangente besitzen.

Der ersten Bedingung, welche besagt, dass für $x = 0$ auch $\eta = 0$ ist, wird in Gleichung XXII dadurch genügt, dass man $C'' = 0$ setzt; in unserer Figur wird dieser Bedingung entsprochen, wenn die Schlusslinie der zweiten Integralcurve vom Punkte K aus verzeichnet wird.

---

[1] Die ganze Durchführung wurde nur in Kürze angegeben, weil sie derjenigen von Nr. 36 analog ist, wie auch zwischen den Formeln XX und XXIII die von Mohr gefundene Analogie besteht; nur sind hier y, y'' und η Grössen ersten Grades. Wären die Momente nach Nr. 36 durch $y.c^2$ ausgedrückt, so würde sich

$$\eta = \frac{c^1}{EJ} \cdot y''$$

ergeben.

Der dritten Bedingung gemäss muss in Gleichung XXI für $x = 0$ auch $\frac{d\eta}{dx} = 0$ sein, somit $C_1 = 0$, wodurch η der Ordinate y_2 direct proportional wird. Nun ist y_2 die zwischen der zweiten Integralcurve KL und ihrer Basis, welche hier als zweite Integralcurve der Geraden CB sich ergibt, gemessene Ordinate; es ist somit die zweite Integralcurve der Geraden CB die Schlusslinie der Curve KL, und die zwischen beiden Curven gemessenen Ordinaten y_2 sind den Ordinaten der elastischen Linie des Balkens direct proportional; es ist nämlich

$$\eta = \frac{H.c^2}{EJ} \cdot y_2 .$$

Die zweite Bedingung verhilft uns zur Bestimmung der Länge AC. Für den Endpunkt des Balkens wird nämlich nach obiger Gleichung $\eta = 0$, wenn $y_2 = 0$ ist. Nun ist y_2 dem statischen Momente der Momentenfläche in Bezug auf die Endordinate B proportional; dieses statische Moment wird Null, wenn das statische Moment des Dreieckes ACB dem statischen Momente der Fläche AEB in Bezug auf die Ordinate B numerisch gleich ist.

Das erstere Moment drückt sich aus durch

$$\frac{1}{2}\overline{AC}.l.\frac{2}{3}l = \frac{1}{3}\overline{AC}.l^2$$

und das letztere durch

$$\overline{ML}\,.\,c^2.$$

Wir erhalten somit die Gleichung

$$\frac{1}{3}\overline{AC}.l^2 = \overline{ML}.c^2$$

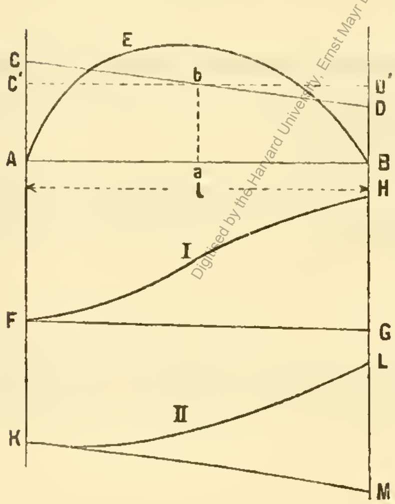
und für AC den Werth

$$\overline{AC} = 3\,\overline{ML}\,\frac{c^2}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{XXIV.}$$

welcher Ausdruck, wie in der Figur angegeben, sich leicht construiren lässt.

Will man noch die Ordinaten der Durchbiegungslinie des Balkens erhalten, so verzeichnet man von den Punkten F und K aus die erste und die zweite Integralcurve der Geraden CB; das Ende dieser zweiten Integralcurve muss mit dem Ende der Curve KL zusammenfallen und die zwischen beiden Curven gemessenen Ordinaten liefern mit $\frac{H.c^2}{EJ}$ multiplicirt, die Ordinaten η der Durchbiegungscurve.

Fig. 20.



Nr. 40. Der an beiden Enden horizontal eingespannte Balken. Sei in Fig. 20 AEB wieder die Momentencurve für den frei unterstützten Balken auf eine ähnliche Art wie vorhin erhalten, so sind hier die beiden an den Enden entstehenden negativen Momente AC und BD aus den Bedingungen zu bestimmen, denen die elastische Linie zu genügen hat.

Die Linien FH, FG, KL und KM haben dieselbe Bedeutung wie früher.

Zu den drei vorhin aufgestellten Bedingungen kommt noch

4. Die elastische Linie muss auch in B tangentiell an AB sein, d. h. die Curve KL und ihre Schlusslinie müssen in L eine gemeinschaftliche Tangente besitzen.

Darnach muss in Formel XXI für $x = l$, $\frac{dx}{d\eta} = 0$, also auch $y_1 = 0$ sein, da der dritten Bedingung entsprechend $C_1 = 0$ gesetzt wurde. Die Bedingung $y_1 = 0$ für $x = l$ besagt, dass der Flächeninhalt der zwischen der Momentencurve und ihrer richtig bestimmten Schlusslinie CD eingeschlossenen Fläche gleich Null ist, oder, dass der Flächeninhalt des Trapezes $ACDB$ dem Flächeninhalte der Fläche AEB numerisch gleich ist.

Ist ab die mittlere Ordinate des Trapezes, so ist sein Flächeninhalt durch $ab.l$ gegeben; es besteht somit die Gleichung

$$ab.l = GH.c,$$

woraus

$$ab = GH.\frac{c}{l} \;.\;.\;.\;.\;. \mathrm{XXV}.$$

Der ersten Bedingung wird auf dieselbe Weise wie vorhin in Nr. 39 entsprochen.

Der zweiten Bedingung wird genügt, wenn die statischen Momente dieser beiden Flächen in Bezug auf die Ordinate B einander gleich sind. Nun summirt sich das statische Moment des Trapezes aus dem statischen Momente des Rechteckes $AC'D'B$ von der Höhe ab und der Länge l, und aus der algebraischen Summe der statischen Momente der Dreiecke $CC'b$ und $DD'b$. Diese Summe drückt sich folgendermassen aus:

$$ab.l.\frac{1}{2}l + \overline{CC'}.\frac{1}{4}l.\frac{5}{6}l - CC'.\frac{1}{4}l.\frac{1}{6}l = \frac{1}{2}\overline{ab}.l^2 + \frac{1}{6}\overline{CC'}.l^2.$$

Setzt man die statischen Momente beider Flächen einander gleich, so erhält man

$$\frac{1}{2}\overline{ab}.l^2 + \frac{1}{6}CC'.l^2 = \overline{ML}.c^2,$$

woraus

$$CC' = 6ML\frac{c^2}{l^2} - 3\overline{ab} \;.\;.\;.\;.\;. \mathrm{XXVI}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung auf die Form

$$\overline{ML}.\frac{2c}{l}\cdot\frac{3c}{l}$$

gebracht, lässt sich graphisch leicht construiren.

Durch die Grössen ab und CC' ist die Lage der Schlusslinie CD bestimmt. Will man die Ordinaten der Durchbiegungscurve haben, so verzeichnet man wieder die beiden Integralcurven der Geraden CD und die zwischen der zweiten Integralcurve dieser Geraden und der Linie KL eingeschlossenen Ordinaten liefern, mit $\frac{H.c^2}{EJ}$ multiplicirt, die wirklichen Ordinaten der Durchbiegungscurve.

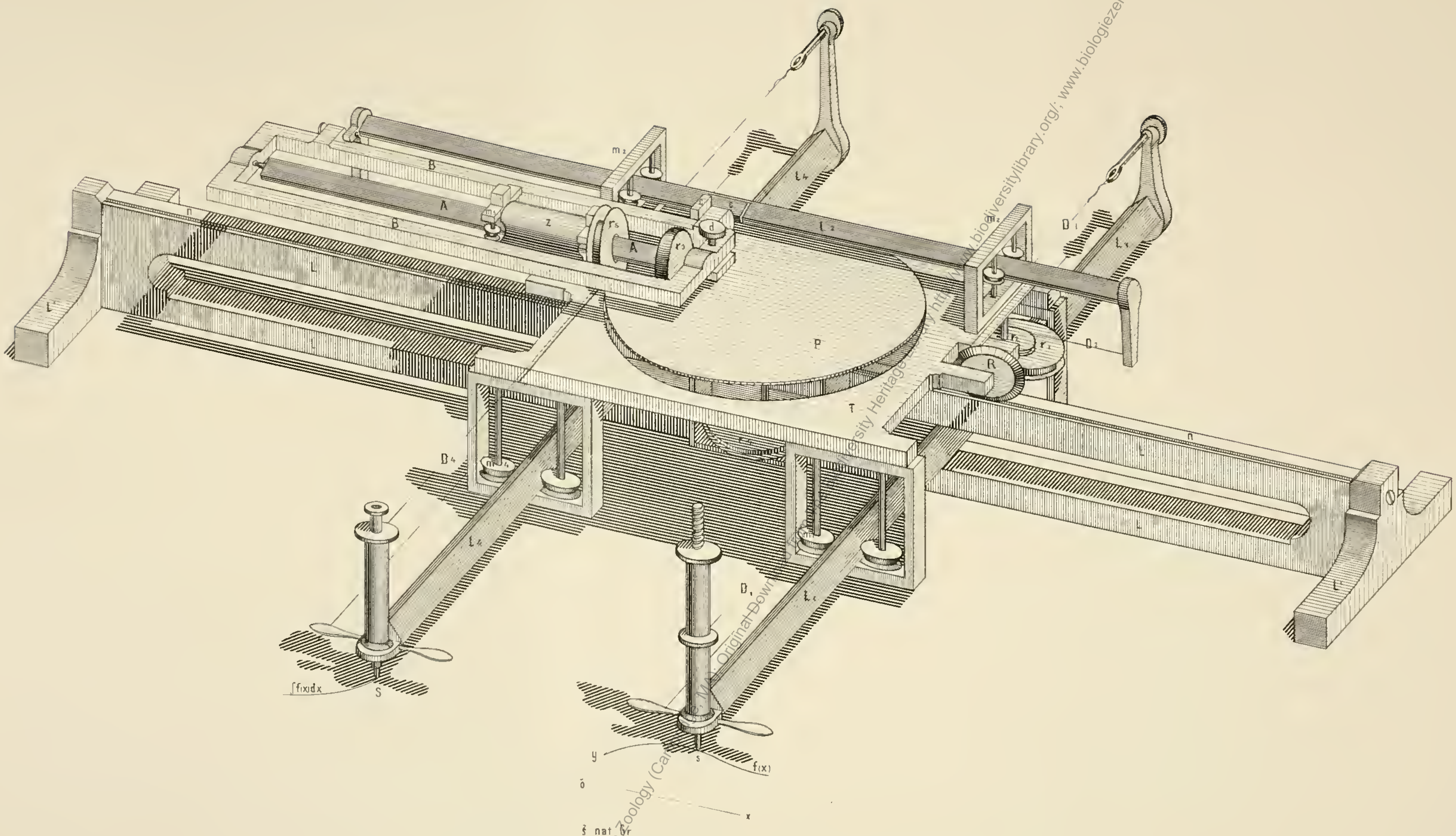
In allen vorhin durchgeführten Aufgaben wurden in Bezug auf die Belastung des Balkens keinerlei Beschränkungen gemacht; die Anwendung des Integrators erlaubt daher eine Allgemeinheit der Annahmen, wie sie durch die üblichen graphischen Constructionen nur annähernd erreicht wird.

Schlusswort.

Aus der Darstellung der Verwendung des Integrators erhellt, dass er für den Mathematiker sowohl, wie für den Techniker ein äusserst brauchbares Instrument ist, wenn es sich darum handelt, im Bereiche der vorgeführten Verwendung rasch und mit genügender Genauigkeit Werthziffern zu erhalten; hiebei ist die ihm eigenthümliche Art der theilweisen Integrirung, ferner die Allgemeinheit der Verwendung besonders hervorzuheben.

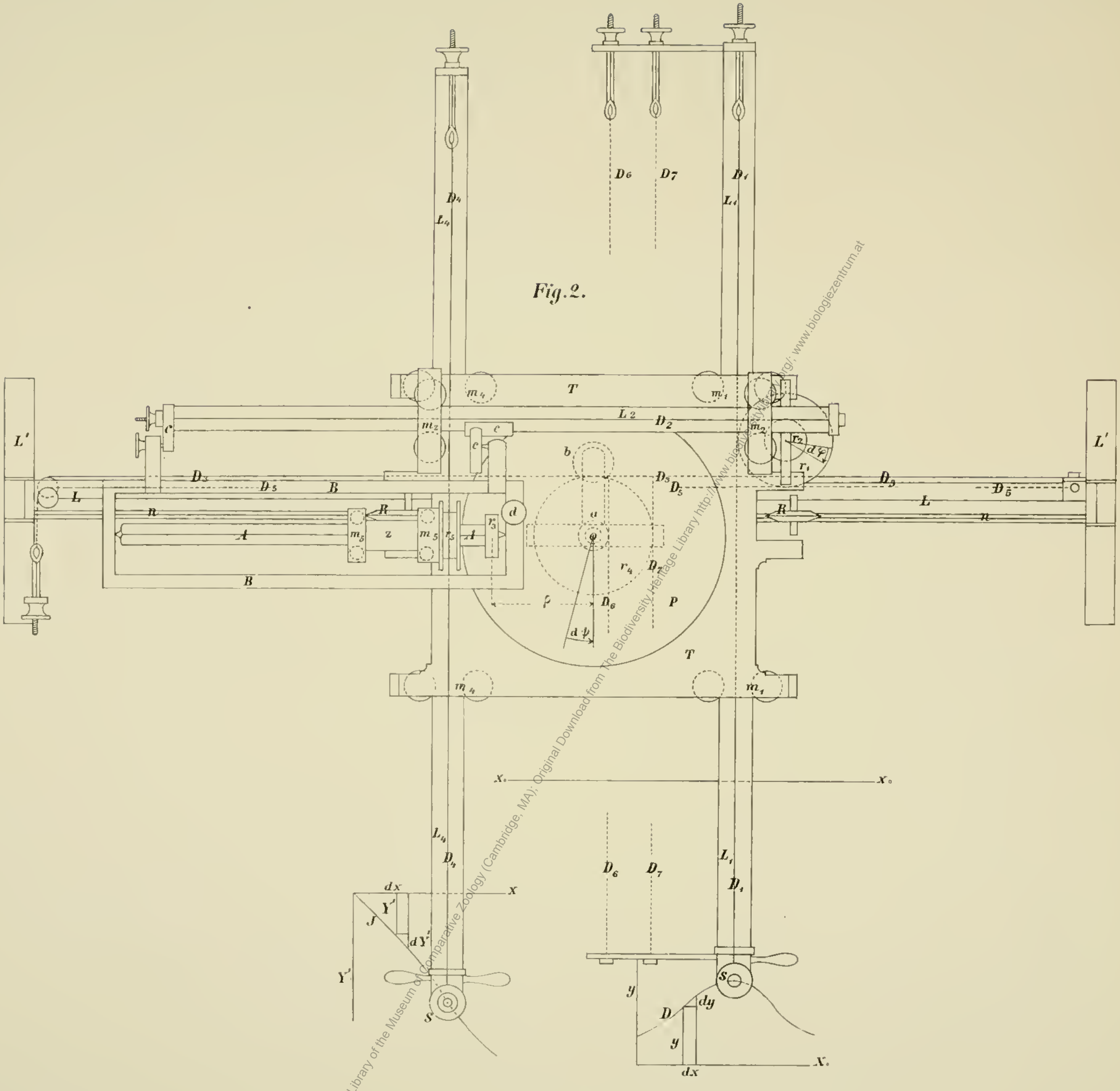
Es ist jedoch mit den vorhin beschriebenen Aufgaben die Anwendung des Integrators offenbar nicht erschöpft. So würde es nicht schwer fallen, den Integrator zur Bestimmung der Pfeilermomente eines continuirlichen Balkens oder der Lage der Drucklinie eines elastischen Bogens mit Vortheil zu verwenden.

Fig. 1.



Autor del.
K.k. Hof u. Staatsdruckerei

Fig. 2.



½ nat. Gr.

Autor del

K.k Hof u Staatsdruckerei

Zeitschrift/Journal: Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.

Jahr/Year: 1887

Band/Volume: 53_2

Autor(en)/Author(s): Skibinski Karl (Karol)

Artikel/Article: Der Integrator des Prof. Dr. Zmurko in seiner Wirkungsweise und praktischen Verwendung. (Mit 2 Tafeln und 18 Holzschnitten.) 35-60