ZUR

THEORIE DER REGULÄREN KETTENBRÜCHE

VON

LEOPOLD GEGENBAUER,
C. M. K. AKAD.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 18. DECEMBER 1890.

Im ersten Hefte des 107. Bandes des Journales für die reine und angewandte Mathematik hat Herr Charles Hermite [1] gezeigt, dass die νte Ableitung der $n$ten Kugelfunction erster Art $P_n(x)$ sich von dem $(\nu-n)$ten Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung der Function $(x^2-1)^\nu \log\frac{1+x}{1-x}$ nur durch einen constanten Factor unterscheidet, aus welchem Umstande sich unmittelbar die Richtigkeit der bekannten von Jacobi [2] in seiner schönen Abhandlung „Über eine besondere Gattung algebraischer Functionen, die aus der Entwicklung der Function $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ entstehen" angegebenen bemerkenswerthen Relation

$$\frac{(x^2-1)^\nu}{(n+\nu)!}[P_n(x)]^{(\nu)} = \frac{1}{(n-\nu)!}[(x^2-1)^n]^{(n-\nu)}$$

ergibt, und sodann als eine Fortsetzung des ihm von Herrn Beltrami brieflich mitgetheilten, zuerst wohl von Herrn F. Neumann in seinen „Beiträgen zur Theorie der Kugelfunctionen" (1878) bewiesenen Gleichung

$$\frac{2n+1}{n(n+1)}(x^2-1)P'_n(x) = P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)$$

die Formel

$$\frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}(x^2-1)^2P''_n(x) = (2n-1)P_{n+2}(x)-2(2n+1)P_n(x)+(2n+3)P_{n-2}(x)$$

aufgestellt. Herr F. Caspary [3] hat hierauf in dem am 2. October d. J. ausgegebenen zweiten Hefte desselben Bandes der angeführten Zeitschrift die zwei zuletzt erwähnten Relationen in einfacher Weise abgeleitet,

---

[1] „Sur les polynômes de Legendre." Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Caspary par Mr. Charles Hermite à Paris. A. a. O. S. 80—83.

[2] Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle. 2. Bd., S. 223 ff.

[3] „Sur quelques formules relatives aux fonctions sphériques." Extrait d'une lettre adressée à Mr. Charles Hermite à Paris par Mr. F. Caspary. A. a. O. S. 137—140.

die Giltigkeit desselben für die Kugelfunctionen zweiter Art erwiesen, was für die erste von ihnen schon Herr F. Neumann in dem eben citirten Werke und Herr E. Beltrami in dem Briefe an Herrn Hermite gethan, und aus seinen Formeln einerseits die Christoffel'sche Reihe

$$P'_r(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{r-1}{2}\right]} (2r-4\lambda-1) P_{r-2\lambda-1}(x),$$

anderseits die F. Neumann'sche Relation

$$P_r(x) - \left[\frac{r}{2}\right] + \left[\frac{r-1}{2}\right] + \left\{\left[\frac{r}{2}\right] - \left[\frac{r+1}{2}\right]\right\} x = (x^2-1) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{r-3}{2}\right]} \frac{2r-4\lambda-1}{(r-2\lambda)(r-2\lambda-1)} P'_{r-2\lambda-2}(x)$$

erschlossen.

Die Neumann-Beltrami'sche und die Hermite'sche Relation für die Kugelfunctionen erster Art sind eine unmittelbare Folge der von Herrn Hermite aufgedeckten Beziehung der Zugeordneten der Kugelfunctionen erster Art zur regulären Kettenbruchentwicklung der Function $(x^2-1)^\nu \log\frac{1+x}{1-x}$. Diese und manche andere Relationen im Gebiete der Kugelfunctionen erster und zweiter Art, von denen ich hier nur die von Herrn F. Neumann im §. 8 der zweiten Abtheilung des früher erwähnten Buches aufgestellten interessanten Integrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_p(z) P_q(z)}{\sigma - z} dz = Q_p(\sigma) P_q(\sigma) \qquad (p \geqq q)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-z^2) P'_p(z) P'_q(z) dz}{\sigma - z} = (1-\sigma^2) Q'_p(\sigma) P'_p(\sigma) \qquad (p \geqq q)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_p(z) P'_q(z) dz}{\sigma - z} = Q_p(\sigma) P'_q(\sigma) \qquad (p \geqq q)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P'_p(z) P_q(z) dz}{\sigma - z} = Q'_p(\sigma) P_q(\sigma) - \begin{cases} \dfrac{2\sigma}{1-\sigma^2} & (p+q \text{ ungerade}) \\ \dfrac{2}{1-\sigma^2} & (p+q \text{ gerade}) \end{cases} \qquad (p > q)$$

hervorheben will, aus deren ersterem von Herrn C. Neumann [1] die höchst bemerkenswerthe Entwicklung

$$P_s\left(\frac{1+q^2}{2q}\right) Q_n\left(\frac{1+q^2}{2q}\right) = q^{n+s+1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{4}{2\lambda+1} O_n^{(\lambda)}\left(\frac{1}{q^2}\right) O_s^{(\lambda)}\left(\frac{1}{q^2}\right) \qquad (s < n)$$

abgeleitet wurde, sind demnach als ganz specielle Fälle in allgemeinen, auf gewisse reguläre Kettenbruchentwicklungen bezüglichen Formeln enthalten, und treten namentlich in der Theorie der Functionen $C_n^\nu(x)$ und $D_n^\nu(x)$ ebenfalls auf. Dies zu zeigen, ist der Hauptzweck der vorliegenden Mittheilung, in deren erstem Paragraphe die oben erwähnten allgemeinen Relationen für die Näherungszähler, Näherungsnenner und Restfunctionen regulärer Kettenbrüche aufgestellt werden, welche sodann im zweiten auf specielle Fälle, insbesondere auf die Functionen $C_n^\nu(x)$ und $D_n^\nu(x)$ angewendet werden und dadurch zu einigen interessanten Relationen für die Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art führen. Zum Schlusse werden sodann einige Relationen für die Functionen $D_n^\nu(x)$ ermittelt, welche zeigen, dass die von den Herren F. Neumann, E. Beltrami und F. Caspary hervorgehobenen Relationen für die Kugelfunctionen zweiter Art dem

[1] Hydrodynamische Untersuchungen, nebst einem Anhange über die Probleme der Elektrostatik und der magnetischen Induction. Leipzig 1883, S. 311.

Umstande ihre Entstehung verdanken, dass einerseits zwischen drei aufeinanderfolgenden Kugelfunctionen zweiter Art dieselbe lineare Relation besteht, wie zwischen den entsprechenden Kugelfunctionen erster Art, und dass anderseits beide Arten von Kugelfunctionen particuläre Integrale derselben linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind.

§. 1.

Die nach ganzen negativen Potenzen der Veränderlichen x fortschreitende Function $f(x)$ möge sich in einen regulären Kettenbruch entwickeln lassen, dessen k-ter Näherungszähler, Näherungsnenner und k-te Restfunction beziehungsweise mit $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$ und $f_k(x)$ bezeichnet werden soll. Da nach einer bekannten bestimmenden Eigenschaft der Näherungsbrüche die Entwicklung der rationalen Function $\frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{x}$ mit der in derselben Weise fortschreitenden Entwicklung von $f(x)$ bis zu den Gliedern von der Ordnung $2k+1$ exclusive übereinstimmt, so ist

$$\psi_k(x)f(x) = \varphi_k(x) + \frac{A^{(k)}_{k+1}}{x^{k+1}} + \frac{A^{(k)}_{k+2}}{x^{k+2}} + \frac{A^{(k)}_{k+3}}{x^{k+3}} + \dots$$

α) Die Function $\varphi(x)$, welche innerhalb eines bestimmten Bereiches in eine nach den Näherungsnenner $\psi_\lambda(x)$ fortschreitende Reihe

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} B_\lambda \psi_\lambda(x)$$

entwickelbar sein möge, soll so beschaffen sein, dass in der Entwicklung des Productes $\varphi(x)f(x)$ nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{x}$ die Glieder mit $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots, \frac{1}{x^m}$ fehlen, während das Glied mit $\frac{1}{x^{m+1}}$ vorhanden ist.

Da nun

$$\varphi(x)f(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} B_\lambda \psi_\lambda(x) f(x)$$

$$= \mathfrak{P}(x) + \frac{B_0 A^{(0)}_1}{x} + \frac{B_0 A^{(0)}_2 + B_1 A^{(1)}_2}{x^2} + \frac{B_0 A^{(0)}_3 + B_1 A^{(1)}_3 + B_2 A^{(2)}_3}{x^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{B_0 A^{(0)}_m + B_1 A^{(1)}_m + B_2 A^{(2)}_m + \dots + B_{m-1} A^{(m-1)}_m}{x^m} + \frac{B_0 A^{(0)}_{m+1} + B_1 A^{(1)}_{m+1} + B_2 A^{(2)}_{m+1} \dots + B_m A^{(m)}_{m+1}}{x^{m+1}} +$$

$$+ \frac{C_1}{x^{m+2}} + \frac{C_2}{x^{m+3}} + \dots$$

ist, so muss nach der eben gemachten Voraussetzung

$$B_0 = B_1 = \dots = B_{m-1} = 0$$

$$B_m \lessgtr 0$$

sein, und demnach hat man den Satz:

Ist die innerhalb eines gewissen Bereiches nach den Näherungsnennern $\psi_k(x)$ der regulären Kettenbruchentwicklung der nach ganzen negativen Potenzen der veränderlichen x fortschreitenden Function $f(x)$ entwickelbare Function $\varphi(x)$ so beschaffen, dass in der Entwicklung des Productes $\varphi(x)f(x)$ die Glieder mit $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots, \frac{1}{x^m}$ fehlen, während das Glied mit $\frac{1}{x^{m+1}}$ vorhanden ist, so beginnt die Entwicklung von $\varphi(x)$ nach den Näherungsnennern $\psi_k(x)$ mit $\psi_m(x)$.

Es sei nun $\bar{\varphi}_k(x)$, $\bar{\psi}_k(x)$, $\bar{f}_k(x)$ beziehungsweise der k-te Näherungszähler, Näherungsnenner, die k-te Restfunction der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes $(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_r)^{\nu_r} f(x)$ $(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r=m)$.

Als dann ist

$$(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_r)^{\nu_r}\,\bar{\psi}_k(x)f(x)=\bar{\varphi}_k(x)+\bar{f}_k(x)$$

$$=\bar{\varphi}_k(x)+\frac{A_1}{x^{k+1}}+\frac{A_2}{x^{k+1}}\,\frac{A_3}{x^{k+3}}+\ldots$$

und daher hat man die Relation

$$(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_r)^{\nu_r}\,\bar{\psi}_k(x)=\sum_{\lambda=k}^{\lambda=k+m} C_\lambda\psi_\lambda(x)$$

aus welcher sofort die zwei weiteren

$$\bar{\varphi}_k(x)=\sum_{\lambda=k}^{\lambda=k+m} C_\lambda\varphi_\lambda(x)$$

$$\bar{f}_k(x)=\sum_{\lambda=k}^{\lambda=k+m} C_\lambda f_\lambda(x)$$

folgen. Setzt man in der ersten von diesen Gleichungen und den successiven ν_k-1 Ableitungen derselben nach x, $x=x_k$ für $k=1,2,3,\ldots,r$, so erhält man die m Beziehungen

$$0=\sum_{\lambda=k}^{\lambda=k+m} C_\lambda\psi_\lambda^{(k_\mu)}(x_\mu)\qquad(k_\mu=0,1,2,\ldots,\nu_\mu-1;\ \mu=1,2,3,\ldots,r)$$

deren Verbindung mit der ursprünglichen Relation die folgende Formel liefert:

$$(1.)\quad (x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_r)^{\nu_r}\bar{\psi}_k(x)=\frac{(-1)^m C_{k+m}}{\left|\psi_\lambda^{(k_\mu)}(x_\mu)\right|}\begin{vmatrix}
\psi_k(x), & \psi_{k+1}(x), & \psi_{k+2}(x), & \ldots, & \psi_{k+m}(x)\\
\psi_k(x_1), & \psi_{k+1}(x_1), & \psi_{k+2}(x_1), & \ldots, & \psi_{k+m}(x_1)\\
\psi'_k(x_1), & \psi'_{k+1}(x_1), & \psi'_{k+2}(x_1), & \ldots, & \psi'_{k+m}(x_1)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\psi_k^{(\nu_1-1)}(x_1), & \psi_{k+1}^{(\nu_1-1)}(x_1), & \psi_{k+2}^{(\nu_1-1)}(x_1), & \ldots, & \psi_{k+m}^{(\nu_1-1)}(x_1)\\
\psi_k(x_2), & \psi_{k+1}(x_2), & \psi_{k+2}(x_2), & \ldots, & \psi_{k+m}(x_2)\\
\psi'_k(x_2), & \psi'_{k+1}(x_2), & \psi'_{k+2}(x_2), & \ldots, & \psi'_{k+m}(x_2)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\psi_k^{(\nu_2-1)}(x_2), & \psi_{k+1}^{(\nu_2-1)}(x_2), & \psi_{k+2}^{(\nu_2-1)}(x_2), & \ldots, & \psi_{k+m}^{(\nu_2-1)}(x_2)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\psi_k(x_r), & \psi_{k+1}(x_r), & \psi_{k+2}(x_r), & \ldots, & \psi_{k+m}(x_r)\\
\psi'_k(x_r), & \psi'_{k+1}(x_r), & \psi'_{k+2}(x_r), & \ldots, & \psi'_{k+m}(x_r)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\psi_k^{(\nu_r-1)}(x_r), & \psi_{k+1}^{(\nu_r-1)}(x_r), & \psi_{k+2}^{(\nu_r-1)}(x_r), & \ldots, & \psi_{k+m}^{(\nu_r-1)}(x_r)
\end{vmatrix}$$

$(\lambda=k,k+1,\ldots,k+m-1;\ k_\mu=0,1,2,\ldots,\nu_\mu-1;\ \mu=1,2,3,\ldots,r)$.

Bezeichnet man mit α_r beziehungsweise $\bar{\alpha}_r$ den Coëfficienten von x im r-ten Partialnenner der Kettenbruchentwicklung von $f(x)$ beziehungsweise $\varphi(x)f(x)$, so ist offenbar

$$C_{k+m} = \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \ldots \bar{\alpha}_k}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{k+m}}.$$

Mit Hilfe der bekannten Formel

$$\frac{1}{x-y} \begin{vmatrix} \psi_\lambda(x), & \psi_\lambda(y) \\ \psi_{\lambda-1}(x), & \psi_{\lambda-1}(y) \end{vmatrix} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} \alpha_{\mu+1} \psi_\mu(x) \psi_\mu(y)$$

kann man die letzte Gleichung in die folgende verwandeln:

$$\left|\psi^{(k_\rho)}_{(k+\tau)}(x_\rho)\right| \bar{\psi}_k(x) = \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \ldots \bar{\alpha}_k}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{k+1}} \sum_{\mu=0}^{\mu=k} \alpha_{\mu+1} \left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\lambda}(x_\rho)\right| \psi_\mu(x) \tag{2.}$$

$$(\lambda = 1, 2, 3, \ldots, m-1, \mu; \rho = 1, 2, 3, \ldots, r; k_\rho = 0, 1, 2, \ldots, \nu_\rho - 1; \tau = 1, 2, \ldots, m-1, k).$$

Den speciellen Fall

$$\nu_1 = \nu_2 \ldots = \nu_r = 1; \quad f(x) = \int_\alpha^\beta \frac{\chi(y)\,dy}{x-y}$$

dieser Entwicklung habe ich vor 12 Jahren in meiner Arbeit [1] „Zur Theorie der mechanischen Quadraturen“ mitgetheilt.

Aus der Gleichung (1.) folgen sofort die zwei weiteren Relationen

$$\bar{\varphi}_k(x) = \frac{(-1)^m C_{k+m}}{\left|\psi^{(k_\mu)}_\lambda(x_\mu)\right|} \begin{vmatrix}
\varphi_k(x), & \varphi_{k+1}(x), & \varphi_{k+2}(x), & \ldots, & \varphi_{k+m}(x) \\
\psi_k(x_1), & \psi_{k+1}(x_1), & \psi_{k+2}(x_1), & \ldots, & \psi_{k+m}(x_1) \\
\psi'_k(x_1), & \psi'_{k+1}(x_1), & \psi'_{k+2}(x_1), & \ldots, & \psi'_{k+m}(x_1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\psi^{(\nu_1-1)}_k(x_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_{k+1}(x_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_{k+2}(x_1), & \ldots, & \psi^{(\nu_1-1)}_{k+m}(x_1) \\
\psi_k(x_2), & \psi_{k+1}(x_2), & \psi_{k+2}(x_2), & \ldots, & \psi_{k+m}(x_2) \\
\psi'_k(x_2), & \psi'_{k+1}(x_2), & \psi'_{k+2}(x_2), & \ldots, & \psi'_{k+m}(x_2) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\psi^{(\nu_2-1)}_k(x_2), & \psi^{(\nu_2-1)}_{k+1}(x_2), & \psi^{(\nu_2-1)}_{k+2}(x_2), & \ldots, & \psi^{(\nu_2-1)}_{k+m}(x_2) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\psi_k(x_r), & \psi_{k+1}(x_r), & \psi_{k+2}(x_r), & \ldots, & \psi_{k+m}(x_r) \\
\psi'_k(x_r), & \psi'_{k+1}(x_r), & \psi'_{k+2}(x_r), & \ldots, & \psi'_{k+m}(x_r) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\psi^{(\nu_r-1)}_k(x_r). & \psi^{(\nu_r-1)}_{k+1}(x_r), & \psi^{(\nu_r-1)}_{k+2}(x_r), & \ldots, & \psi^{(\nu_r-1)}_{k+m}(x_r)
\end{vmatrix} \tag{3.}$$

$$(\lambda = k, k+1, \ldots, k+m-1; k_\mu = 0, 1, 2, \ldots, \nu_\mu - 1; \mu = 1, 2, 3, \ldots, r)$$

[1] Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, LXXVIII. Bd. II. Abth.

$$(4.)\qquad \bar{f}_k(x) = \frac{(-1)^m C_{k+m}}{\psi_\lambda^{(k_\mu)}(x_\mu)} \begin{vmatrix} f_k(x) & , & f_{k+1}(x) & , & f_{k+2}(x) & , & \dots & , & f_{k+m}(x) \\ \psi_k(x_1) & , & \psi_{k+1}(x_1) & , & \psi_{k+2}(x_1) & , & \dots & , & \psi_{k+m}(x_1) \\ \psi'_k(x) & , & \psi'_{k+1}(x_1) & , & \psi'_{k+2}(x_2) & , & \dots & , & \psi'_{k+m}(x_1) \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \psi_k^{(\nu_1-1)}(x_1) & , & \psi_{k+1}^{(\nu_1-1)}(x) & , & \psi_{k+2}^{(\nu_1-1)}(x_1) & , & \dots & , & \psi_{k+m}^{(\nu_1-1)}(x_1) \\ \psi_k(x_2) & , & \psi_{k+1}(x_2) & , & \psi_{k+2}(x_2) & , & \dots & , & \psi_{k+m}(x_2) \\ \psi'_k(x_2) & , & \psi'_{k+1}(x_2) & , & \psi'_{k+2}(x_2) & , & \dots & , & \psi'_{k+m}(x_2) \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \psi_k^{(\nu_2-1)}(x_2) & , & \psi_{k+1}^{(\nu_2-1)}(x_2) & , & \psi_{k+2}^{(\nu_2-1)}(x_2) & , & \dots & , & \psi_{k+m}^{(\nu_2-1)}(x_2) \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \psi_k(x_r) & , & \psi_{k+1}(x_r) & , & \psi_{k+2}(x_r) & , & \dots & , & \psi_{k+m}(x_r) \\ \psi'_k(x_r) & , & \psi'_{k+1}(x_r) & , & \psi'_{k+2}(x_r) & , & \dots & , & \psi'_{k+m}(x_r) \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \psi_k^{(\nu_r-1)}(x_r) & , & \psi_{k+1}^{(\nu_r-1)}(x_r) & , & \psi_{k+2}^{(\nu_r-1)}(x_r) & , & \dots & , & \psi_{k+m}^{(\nu_r-1)}(x_r) \end{vmatrix}$$

$$(\lambda = k, k+1, \dots, k+m-1;\ k_\mu = 0, 1, 2, \dots, \nu_\mu - 1;\ \mu = 1, 2, 3, \dots, r)$$

Mit Hilfe der Gleichung (2.) leitet man leicht die folgende Entwicklung der Functionen $\psi_k(x)$ nach den Näherungsnennern $\varphi_k(x)$ ab:

$$(5.)\qquad \alpha_{k+1} \prod_0^k {}_\tau \left|\psi_{\tau+\lambda_\tau}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \psi_k(x) = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k+1}}{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\dots\bar{\alpha}_k}\left|\bar{\psi}_{k+\lambda_k}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \bar{\psi}_k(x) & , & \left|\psi_{k+\lambda_{k-1}}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| & , & \left|\psi_{k+\lambda_{k-2}}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| & , & \dots & , & \left|\psi_{k+\lambda_1}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| & , & \left|\psi_{k+\lambda_0}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \\ \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\dots\bar{\alpha}_{k-1}}\left|\bar{\psi}_{k-1+\lambda_{k-1}}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \bar{\psi}_{k-1}(x) & , & \left|\psi_{k-1+\lambda_{k-1}}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| & , & \left|\psi_{k-1+\lambda_{k-2}}^{(k_r)}(x_\rho)\right| & , & \dots & , & \left|\psi_{k-1+\lambda_1}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| & , & \left|\psi_{k-1+\lambda_0}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \\ \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-1}}{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\dots\bar{\alpha}_{k-2}}\left|\bar{\psi}_{k-2+\lambda_{k-2}}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \bar{\psi}_{k-2}(x) & , & 0 & , & \left|\psi_{k-2+\lambda_{k-2}}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| & , & \dots & , & \left|\psi_{k-2+\lambda_1}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| & , & \left|\psi_{k-2+\lambda_0}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \frac{\alpha_1\alpha_2}{\bar{\alpha}_1}\left|\psi_{1+\lambda_1}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \bar{\psi}_1(x) & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & \left|\psi_{1+\lambda_1}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| & , & \left|\psi_{1+\lambda_0}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \\ \alpha_1\left|\psi_{\lambda_0}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \bar{\psi}_0(x) & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & 0 & , & \left|\psi_{\lambda_0}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \end{vmatrix}$$

$$(\lambda_\tau = 1, 2, 3, \dots, m-1, \tau;\ k_\rho = 0, 1, 2, \dots, \nu_\rho - 1;\ \rho = 1, 2, 3, \dots, r)$$

während aus der Formel (1.) die Beziehung

$$(6.)\quad (-1)^{\frac{(k+1)(k+2m)}{2}} \prod_{0}^{k} \left|\psi^{(k_\rho)}_{\tau+\sigma_m}(x_\rho)\right| \psi_{k+m}(x) =$$

$$= (-1)^m (x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2} \cdots (x-x^r)^{\nu_r} \begin{vmatrix} (-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{\sigma_m}(x_\rho)\right|, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\left|\psi^{(k_\rho)}_{\sigma_m}(x_\rho)\right|\bar\psi_0(x) \\ (-1)^{m-1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{1+\sigma_{m-1}}(x_\rho)\right|, & (-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{1+\sigma_m}(x_\rho)\right|, & 0, & \ldots, & 0, & \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m+1}}{\bar\alpha_1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{1+\sigma_m}(x_\rho)\right|\bar\psi_1(x) \\ (-1)^{m-2}\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_{m-2}}(x_\rho)\right|, & (-1)^{m-1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_{m-1}}(x_\rho)\right|, & (-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_m}(x_\rho)\right|, & \ldots, & 0, & \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m+2}}{\bar\alpha_1\bar\alpha_2}\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_m}(x_\rho)\right|\bar\psi_2(x) \\ (-1)^{m-3}\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_{m-3}}(x_\rho)\right|, & (-1)^{m-2}\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_{m-2}}(x_\rho)\right|, & (-1)^{m-1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_{m-1}}(x_\rho)\right|, & \ldots, & 0, & \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m+3}}{\bar\alpha_1\bar\alpha_2\bar\alpha_3}\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_m}(x_\rho)\right|\bar\psi_3(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{m-k}\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_{m-k}}(x_\rho)\right|, & (-1)^{m-k+1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_{m-k+1}}(x_\rho)\right|, & (-1)^{m-k+2}\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_{m-k+2}}(x_\rho)\right|, & \ldots, & (-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_m}(x_\rho)\right|, & \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m+k}}{\bar\alpha_1\bar\alpha_2\ldots\bar\alpha_k}\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_m}(x_\rho)\right|\bar\psi_k(x) \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} (-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{\sigma_m}(x_\rho)\right|, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1}(-1)^\lambda\left|\psi^{(k_\rho)}_{\sigma_\lambda}(x_\rho)\right|\psi_\lambda(x) \\ (-1)^{m-1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{1+\sigma_{m-1}}(x_\rho)\right|, & (-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{1+\sigma_m}(x_\rho)\right|, & 0, & 0, & \ldots, & \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-2}(-1)^\lambda\left|\psi^{(k_\rho)}_{1+\sigma_\lambda}(x_\rho)\right|\psi_{1+\lambda}(x) \\ (-1)^{m-2}\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_{m-2}}(x_\rho)\right|, & (-1)^{m-1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_{m-1}}(x_\rho)\right|, & (-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_m}(x_\rho)\right|, & 0, & \ldots, & \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-3}(-1)^\lambda\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_\lambda}(x_\rho)\right|\psi_{2+\lambda}(x) \\ (-1)^{m-3}\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_{m-3}}(x_\rho)\right|, & (-1)^{m-2}\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_{m-2}}(x_\rho)\right|, & (-1)^{m-1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_{m-1}}(x_\rho)\right|, & 0, & \ldots, & \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-4}(-1)^\lambda\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_\lambda}(x_\rho)\right|\psi_{3+\lambda}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{m-k}\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_{m-k}}(x_\rho)\right|, & (-1)^{m-k+1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_{m-k+1}}(x_\rho)\right|, & (-1)^{m-k+2}\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_{m-k+2}}(x_\rho)\right|, & (-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_m}(x_\rho)\right|, & \ldots, & \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-k}(-1)^\lambda\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_\lambda}(x_\rho)\right|\psi_{k+\lambda}(x) \end{vmatrix}$$

$$(\sigma_\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \lambda-1, \lambda+1, \ldots, m;\ \rho = 1, 2, 3, \ldots, r;\ k_\rho = 0, 1, 2, \ldots, \nu_\rho - 1)$$

folgt, wo alle jene Determinanten, in denen der Index von σ negativ würde und alle Summen, in denen λ einen negativen Werth erhielte, durch Null zu ersetzen sind.

β) Die ganze Function $F(x)$ vom Grade μ sei so beschaffen, dass

$$(7.)\qquad F(x)\,\psi_k(x) = \sum_{\lambda=\nu}^{\lambda=\mu+k} D_\lambda \psi_\lambda(x)$$

ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit $f(x)$, so ergibt sich die Beziehung

$$F(x)\,\{\varphi_k(x)+f_k(x)\} = \sum_{\lambda=\nu}^{\lambda=\mu+k} D_\lambda\,\{\varphi_\lambda(x)+f_\lambda(x)\}$$

aus welcher unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $F(x)\,\varphi_k(x)$ und $\sum\limits_{\lambda=\nu}^{\lambda=\mu+k} D_\lambda\varphi_\lambda(x)$ keine negativen, $\sum\limits_{\lambda=\nu}^{\lambda=\mu+k} D_\lambda f_\lambda(x)$ aber nur negative Potenzen von x enthält, die Beziehungen

$$(8.)\qquad F(x)\varphi_k(x) + G\{F(x)f_k(x)\} = \sum_{\lambda=\nu}^{\lambda=\mu+k} D_\lambda\varphi_\lambda(x)$$

$$(9.)\qquad F(x)f_k(x) = \sum_{\lambda=\nu}^{\lambda=\mu+k} D_\lambda f_\lambda(x) + G\{F(x)f_k(x)\}$$

folgen, wo $G\{\chi(x)\}$ das Aggregat der Glieder mit nicht negativen Potenzen von x in der Entwicklung der Function $\chi(x)$ nach Potenzen von x ist. Enthält die Entwicklung des Productes $F(x)f_k(x)$ nur negative Potenzen von x, was namentlich der stets Fall ist, wenn der Grad von $F(x)$ nicht grösser als k ist, so ergeben sich demnach die speciellen Relationen

$$F(x)\,\varphi_k(x) = \sum_{\lambda=\nu}^{\lambda=\mu+k} D_\lambda\,\varphi_\lambda(x)$$

$$F(x)f_k(x) = \sum_{\lambda=\nu}^{\lambda=\mu+k} D_\lambda f_\lambda(x)$$

Verbindet man diese Resultate mit den obigen Entwicklungen, so erkennt man, dass aus der Relation

$$(10)\qquad (x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots,(x-x_r)^{\nu_r}F(x)\,\overline{\psi}_k(x) = \sum_{\lambda=\sigma}^{\lambda=k+m+\mu} E_\lambda\psi_\lambda(x)$$

sich die Relationen

$$(11)\qquad F(x)\,\overline{\varphi}_k(x) = \sum_{\lambda=\sigma}^{\lambda=k+m+\mu} E_\lambda\varphi_\lambda(x) - \Delta$$

$$F(x)\bar{f}_k(x) = \sum_{\lambda=\sigma}^{\lambda=k+m+\mu} E_\lambda f_\lambda(x) + \Delta \tag{12}$$

ergeben, wo

$$\Delta = \frac{(-1)^m C_{k+m}}{\left|\psi_\lambda^{(k_\mu)}(x_\mu)\right|} \begin{vmatrix} G\{F(x)f_k(x)\}, & G\{F(x)f_{k+1}(x)\}, & G\{F(x)f_{k+2}(x)\}, & \ldots, & G\{F(x)f_{k+m}(x)\} \\ \psi_k(x_1), & \psi_{k+1}(x_1), & \psi_{k+2}(x_1), & \ldots, & \psi_{k+m}(x_1) \\ \psi'_k(x_1), & \psi'_{k+1}(x_1), & \psi'_{k+2}(x_1), & \ldots, & \psi'_{k+m}(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_k^{(\nu_1-1)}(x_1), & \psi_{k+1}^{(\nu_1-1)}(x_1), & \psi_{k+2}^{(\nu_1-1)}(x_1), & \ldots, & \psi_{k+m}^{(\nu_1-1)}(x_1) \\ \psi_k(x_2), & \psi_{k+1}(x_2), & \psi_{k+2}(x_2), & \ldots, & \psi_{k+m}(x_1) \\ \psi'_k(x_2), & \psi'_{k+1}(x_2), & \psi'_{k+2}(x_2), & \ldots, & \psi'_{k+m}(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_k^{(\nu_2-1)}(x_2), & \psi_{k+1}^{(\nu_2-1)}(x_2), & \psi_{k+2}^{(\nu_2-1)}(x_2), & \ldots, & \psi_{k+m}^{(\nu_2-1)}(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_k(x_r), & \psi_{k+1}(x_r), & \psi_{k+2}(x_r), & \ldots, & \psi_{k+m}(x_r) \\ \psi'_k(x_r), & \psi'_{k+1}(x_r), & \psi'_{k+2}(x_r), & \ldots, & \psi'_{k+m}(x_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_k^{(\nu_r-1)}(x_r), & \psi_{k+1}^{(\nu_r-1)}(x_r), & \psi_{k+2}^{(\nu_r-1)}(x_r), & \ldots, & \psi_{k+m}^{(\nu_r-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$(\lambda = k, k+1, \ldots, k+m-1;\ \mu = 1, 2, 3, \ldots, r;\ k_\mu = 0, 1, 2, \ldots, \nu_\mu - 1)$$

ist.

Aus den Gleichungen (7.) und (10.) entstehen die Relationen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+k} \frac{F(x'_\lambda)\psi_k(x'_\lambda) - F(x)\psi_k(x)}{x'_\lambda - x} \frac{\psi_\sigma(x'_\lambda)}{\psi'_{\mu+k}(x'_\lambda)\psi_{\mu+k-1}(x'_\lambda)} = \sum_{\lambda=1,\ \rho=\nu}^{\lambda=\mu+k,\ \rho=\mu+k} D_\rho \frac{\psi_\rho(x'_\lambda) - \psi_\rho(x)}{x'_\lambda - x} \frac{\psi_\sigma(x'_\lambda)}{\psi'_{\mu+k}(x'_\lambda)\psi_{k+\mu-1}(x'_\lambda)} \quad (\sigma < \mu + k)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k+m+\mu} \frac{(x''_\nu - x_1)^{\nu_1}(x''_\lambda - x_2)^{\nu_2}\ldots(x''_\lambda - x_r)^{\nu_r} F(x''_\lambda)\bar{\psi}_k(x''_\lambda) - (x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_r)^{\nu_r} F(x)\bar{\psi}_k(x)}{x''_\lambda - x} .$$

$$\cdot \frac{\psi_\sigma(x''_\lambda)}{\psi'_{k+m+\mu}(x''_\lambda)\psi_{k+m+\mu-1}(x''_\lambda)} = \sum_{\lambda=1,\ \rho=\sigma}^{\lambda=m+\mu+k,\ \rho=m+\mu+k} E_\rho \frac{\psi_\rho(x''_\lambda) - \psi_\rho(x)}{x''_\lambda - x} \frac{\psi_{\sigma_1}(x''_\lambda)}{\psi'_{\mu+k+m}(x''_\lambda)\psi_{\mu+k+m-1}(x''_\lambda)} \quad (\sigma_1 < \mu + k + m)$$

wo die Grösse x'_λ, x''_λ die Wurzeln der Gleichung $\psi_{k+\mu}(x) = 0$, beziehungsweise $\psi_{k+m+\mu}(x) = 0$ sind. Nun ist aber, wie ich gezeigt habe,[1]

$$\frac{\psi_\rho(y) - \psi_\rho(x)}{y - x} = \sum_{k=0}^{k=\rho-1} \begin{vmatrix} \psi_k(y), & \psi_\rho(y) \\ \varphi_k(y), & \varphi_\rho(y) \end{vmatrix} \alpha_{k+1}\psi_k(x)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\tau} \frac{\psi_k(z_\lambda)\psi_{\tau-\sigma}(z_\lambda)}{\psi'_\tau(z_\lambda)\psi_{\tau-1}(z_\lambda)} = \frac{\delta_{k,\tau-\sigma}}{\alpha_{\tau-\sigma+1}} \quad (\sigma > 0;\ \psi_\tau(z_\lambda) = 0;\ \delta_{k,\lambda} = 0, k \lesseqgtr \lambda;\ \delta_{k,k} = 1)$$

[1] „Über Kettenbrüche." Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wissensch. Mathem.-naturwissensch. Cl. LXXX. Band, II. Abth.

und demnach verwandeln sich die letzten Gleichungen in die folgenden:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+k} \frac{F(x'_\lambda)\,\psi_k(x'_\lambda) - F(x)\,\psi_k(x)}{x'_\lambda - x}\,\frac{\psi_\sigma(x'_\lambda)}{\psi'_{\mu+k}(x'_\lambda)\,\psi_{\mu+k-1}(x'_\lambda)} = -\sum_{\rho=\nu}^{\rho=\mu+k} D_\rho \begin{vmatrix} \psi_\sigma(x)\,, & \psi_\rho(x) \\ \varphi_\sigma(x)\,, & \varphi_\rho(x) \end{vmatrix}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m+\mu+k} \frac{(x''_\lambda-x_1)^{\nu_1}(x''_\lambda-x_2)^{\nu_2}\ldots(x''_\lambda-x_r)^{\nu_r}F(x''_\lambda)\,\bar\psi_k(x''_\lambda) - (x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_r)^{\nu_r}F(x)\,\bar\psi_k(x)}{x''_\lambda - x}\,.$$

$$.\,\frac{\psi_{\sigma_1}(x''_\lambda)}{\psi'_{\mu+k+m}(x''_\lambda)\,\psi_{\mu+k+m+1}(x''_\lambda)} = -\sum_{\rho=\sigma}^{\rho=m+\mu+k} E_\rho \begin{vmatrix} \psi_{\sigma_1}(x), & \psi_\rho(x) \\ \varphi_{\sigma_1}(x), & \varphi_\rho(x) \end{vmatrix}$$

und speciell für $\sigma = \sigma_1 = 0$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+k} \frac{F(x'_\lambda)\,\psi_k(x'_\lambda) - F(x)\,\psi_k(x)}{x'_\lambda - x}\,\frac{1}{\psi'_{k+\mu}(x'_\lambda)\,\psi_{k+\mu-1}(x'_\lambda)} = \sum_{\rho=\nu}^{\rho=\mu+k} D_\rho\,\varphi_\rho(x)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+m+k} \frac{(x''_\lambda-x_1)^{\nu_1}(x''_\lambda-x_2)^{\nu_2}\ldots(x''_\lambda-x_r)^{\nu_r}F(x''_\lambda)\,\bar\psi_k(x''_\lambda) - (x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_r)^{\nu_r}F(x)\,\bar\psi_k(x)}{x_\lambda - x}\,.$$

$$.\,\frac{1}{\psi'_{k+m+\mu}(x''_\lambda)\,\psi_{k+m+\mu-1}(x''_\lambda)} = \sum_{\rho=\sigma}^{\rho=k+m+\mu} E_\rho\,\varphi_\rho(x)$$

Verbindet man die erste von diesen Gleichungen mit (8.), die zweite mit (11.) und berücksichtigt die Relationen

$$\varphi_k(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+k} \frac{\psi_k(x'_\lambda) - \psi_k(x)}{x'_\lambda - x}\,\frac{1}{\psi'_{k+\mu}(x'_\lambda)\,\psi_{k+\mu-1}(x'_\lambda)}$$

$$\bar\varphi_k(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+m+k} \frac{(x''_\lambda-x_1)^{\nu_1}(x''_\lambda-x_2)^{\nu_2}\ldots(x''_\lambda-x_r)^{\nu_r}\bar\psi_k(x''_\lambda) - (x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_r)^{\nu_r}\bar\psi_k(x)}{x''_\lambda - x}\,\frac{1}{\psi'_{k+\mu+m}(x''_\lambda)\psi_{k+\mu+m-1}(x''_\lambda)}$$

so erhält man die Beziehungen

$$G\{F(x)f_k(x)\} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+k} \frac{F(x'_\lambda) - F(x)}{x'_\lambda - x}\,\frac{\psi_k(x'_\lambda)}{\psi'_{k+\mu}(x'_\lambda)\,\psi_{k+\mu-1}(x'_\lambda)}$$

$$\Delta = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+m+k} \frac{F(x''_\lambda) - F(x)}{x''_\lambda - x}\,\frac{(x''_\lambda-x_1)^{\nu_1}(x''_\lambda-x_2)^{\nu_2}\ldots(x''_\lambda-x_r)^{\nu_r}\bar\psi_k(x''_\lambda)}{\psi_{k+m+\mu}(x''_\lambda)\,\psi_{k+m+\mu-1}(x''_\lambda)}$$

Aus den bisher entwickelten Formeln folgen auch die übrigens unmittelbar klaren Relationen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+k} \frac{F(x'_\lambda)\,\psi_k(x'_\lambda)}{(x-x'_\lambda)\,\psi'_{k+\mu}(x'_\lambda)\,\psi_{k+\mu-1}(x'_\lambda)} = F(x)f_k(x) + G\{F(x)f_k(x)\} - F(x)\,\psi_k(x)\left\{f(x) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+k} \frac{1}{(x-x'_\lambda)\,\psi'_{k+\mu}(x'_\lambda)\,\psi_{k+\mu-1}(x'_\lambda)}\right\}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+m+k} \frac{(x''_\lambda-x_1)^{\nu_1}(x''_\lambda-x_2)^{\nu_2}\ldots(x''_\lambda-x_r)^{\nu_r}F(x''_\lambda)\,\bar\psi_k(x''_\lambda)}{(x-x''_\lambda)\,\psi'_{k+m+\mu}(x''_\lambda)\,\psi_{k+m+\mu-1}(x''_\lambda)} = F(x)\bar f_k(x) + \Delta - F(x)(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_r)^{\nu_r}\bar\psi_k(x)\,\cdot$$

$$.\left\{f(x) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+k+m} \frac{1}{(x-x''_\lambda)\,\psi'_{k+\mu+m}(x''_\lambda)\,\psi_{k+\mu+m-1}(x''_\lambda)}\right\}$$

welche, falls

$$f(x)=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+k}\frac{1}{(x-x'_\lambda)\,\psi'_{k+\mu}(x'_\lambda)\,\psi_{k+\mu-1}(x'_\lambda)}$$

beziehungsweise

$$f(x)=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+m+k}\frac{1}{(x-x''_\lambda)\,\psi'_{k+\mu+m}(x''_\lambda)\,\psi_{k+\mu+m-1}(x''_\lambda)}$$

oder x eine Wurzel der Gleichung $\psi_k(x)=0$ beziehungsweise

$$(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_r)^{\nu_r}\bar{\psi}_k(x)=0$$

ist, in die speciellen Relationen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+k}\frac{F(x'_\lambda)\,\psi_k(x'_\lambda)}{(x-x'_\lambda)\,\psi'_{k+\mu}(x'_\lambda)\,\psi_{k+\mu-1}(x'_\lambda)}=F(x)\,f_k(x)+G\,\{F(x)\,f_k(x)\}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+m+k}\frac{(x''_\lambda-x_1)^{\nu_1}(x''_\lambda-x_2)^{\nu_2}\ldots(x''_\lambda-x_r)^{\nu_r}F(x''_\lambda)\,\bar{\psi}_k(x''_\lambda)}{(x-x''_\lambda)\,\psi'_{k+\mu+m}(x''_\lambda)\,\psi_{k+\mu-1+m}(x''_\lambda)}=F(x)\bar{f}_k(x)+\Delta$$

übergehen, in denen als ganz specielle Fälle die Analoga der F. Neumann'schen Integrale

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+k}\frac{\omega(x'_\lambda)\,\psi_\rho^{(\sigma)}(x'_\lambda)\,\psi_k(x'_\lambda)}{(x-x'_\lambda)\,\psi'_{k+\mu}(x'_\lambda)\,\psi_{k+\mu-1}(x'_\lambda)}=\omega(x)\,\psi_\rho^{(\sigma)}(x)f_k(x)\quad(\sigma+k-\tau\geqq\rho;\ \rho-\sigma+\tau=\mu)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+m+k}\frac{(x''_\lambda-x_1)^{\nu_1}(x''_\lambda-x_2)^{\nu_2}\ldots(x''_\lambda-x_r)^{\nu_r}\omega(x''_\lambda)\,\psi_\rho^{(\sigma)}(x''_\lambda)\,\bar{\psi}_k(x''_\lambda)}{(x-x''_\lambda)\,\psi'_{k+\mu+m}(x''_\lambda)\,\psi_{k+\mu+m-1}(x''_\lambda)}=\omega(x)\,\psi_\rho^{(\sigma)}(x)\bar{f}_k(x)\quad(\sigma+k-\tau\geqq\rho)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu+k}\frac{\omega(x'_\lambda)\,\bar{\psi}_\rho^{(\sigma)}(x'_\lambda)\,\psi_k(x'_\lambda)}{(x-x'_\lambda)\psi'_{k+\mu}(x'_\lambda)\,\psi_{k+\mu-1}(x'_\lambda)}=\omega(x)\bar{\psi}_\rho^{(\sigma)}(x_\lambda)f_k(x)\quad(\sigma+k-\tau\geqq\rho)$$

enthalten sind, wo τ den Grad der ganzen Function $\omega(x)$ vorstellt.

Aus der Gleichung (2.) erhält man ferner die Formel

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\frac{\bar{\psi}_k(\bar{x}'_\lambda)}{(x-\bar{x}'_\lambda)\,\psi'_k(\bar{x}'_\lambda)\,\psi_{k-1}(\bar{x}'_\lambda)}=\frac{\bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2\ldots\bar{\alpha}_k}{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{k+1}}\sum_{\mu=0}^{\mu=k}\alpha_{\mu+1}\left|\psi_{k+\lambda}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right|f_\mu(x)-\bar{\psi}_k(x)\left\{f(x)-\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\frac{1}{(x-\bar{x}'_\lambda)\,\psi'_k(\bar{x}'_\lambda)\,\psi_{k-1}(\bar{x}'_\lambda)}\right\}$$

$$(\lambda=1,2,3,\ldots,m-1,\mu;\ \rho=1,2,3,\ldots,r;\ k_\rho=0,1,2,\ldots,\nu_\rho-1;\ \psi_k(\bar{x}'_\lambda)=0)$$

während aus (5.) und (6.) sich die Beziehungen

$$\begin{vmatrix}
\frac{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{k+1}}{\bar\alpha_1\,\bar\alpha_2\ldots\bar\alpha_k}\,\bar f_k(x)\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\lambda_k}(x_\rho)\right| , & \left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\lambda_{k-1}}(x_\rho)\right| , & \left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\lambda_{k-2}}(x_\rho)\right| , & \ldots , & \left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\lambda_1}(x_\rho)\right| , & \left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\lambda_0}(x_\rho)\right| \\
\frac{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_k}{\bar\alpha_1\,\bar\alpha_2\ldots\bar\alpha_{k-1}}\,\bar f_{k-1}(x)\left|\psi^{(k_\rho)}_{k-1+\lambda_{k-1}}(x_\rho)\right| , & \left|\psi^{(k_\rho)}_{k-1+\lambda_{k-1}}(x_\rho)\right| , & \left|\psi^{(k_\rho)}_{k-1+\lambda_{k-2}}(x_\rho)\right| , & \ldots , & \left|\psi^{(k_\rho)}_{k-1+\lambda_1}(x_\rho)\right| , & \left|\psi^{(k_\rho)}_{k-1+\lambda_0}(x_\rho)\right| \\
\frac{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}{\bar\alpha_1\,\bar\alpha_2\ldots\bar\alpha_{k-2}}\,\bar f_{k-2}(x)\left|\psi^{(k_\rho)}_{k-2+\lambda_{k+2}}(x_\rho)\right| , & 0 , & \left|\psi^{(k_\rho)}_{k-2+\lambda_{k-2}}(x_\rho)\right| , & \ldots , & \left|\psi^{(k_\rho)}_{k-2+\lambda_1}(x_\rho)\right| , & \left|\psi^{(k_\rho)}_{k-2+\lambda_0}(x_\rho)\right| \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\alpha_1\,\alpha_2}{\bar\alpha_1}\,\bar f_1(x)\left|\psi^{(k_\rho)}_{1+\lambda_1}(x_\rho)\right| , & 0 , & 0 , & \ldots , & \left|\psi^{(k_\rho)}_{1+\lambda_1}(x_\rho)\right| , & \left|\psi^{(k_\rho)}_{1+\lambda_0}(x_\rho)\right| \\
\alpha_1\,\bar f_0(x)\left|\psi^{(k_\rho)}_{\lambda_0}(x_\rho)\right| , & 0 , & 0 , & \ldots , & 0 , & \left|\psi^{(k_\rho)}_{\lambda_0}(x_\rho)\right|
\end{vmatrix} =$$

$$(\lambda = 1, 2, 3, \ldots, m-1, \tau;\ \rho = 1, 2, 3, \ldots, r;\ k_\rho = 0, 1, 2, \ldots, \nu_r - 1;\ \psi_{k+m}(\bar x_\lambda) = 0)$$

$$= \alpha_{k+1} \prod_{0}^{k}{}_{\tau} \left|\psi^{(k_\rho)}_{\tau+\lambda_\tau}(x_\rho)\right| \Big\{ (x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_r)^{\nu_r}\,\psi_k(x) \Big\{ f(x) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m+k} \frac{1}{(x-\bar x_\lambda)\,\psi'_{m+k}(\bar x_\lambda)\,\psi_{m+k-1}(\bar x_\lambda)} \Big\} +$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m+k} \frac{(\bar x_\lambda - x_1)^{\nu_1}(\bar x_\lambda - x_2)^{\nu_2}\ldots(\bar x_\lambda - x_r)^{\nu_r}\,\psi_k(\bar x_\lambda)}{(x-\bar x_\lambda)\,\psi'_{m+k}(\bar x_\lambda)\,\psi_{m+k-1}(\bar x_\lambda)} \Big\}$$

$$\begin{vmatrix}
(-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{\sigma_m}(x_\rho)\right| , & 0 , & 0 , & \ldots , & 0 , & \alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_m\left|\psi^{(k_\rho)}_{\sigma_m}(x_\rho)\right|\bar f(x) \\
(-1)^{m-1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{1+\sigma_{m-1}}(x_\rho)\right| , & (-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{1+\sigma_m}(x_\rho)\right| , & 0 , & \ldots , & 0 , & \frac{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{m+1}}{\bar\alpha_1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{1+\sigma_m}(x_\rho)\right|\bar f_1(x) \\
(-1)^{m-2}\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_{m-2}}(x_\rho)\right| , & (-1)^{m-1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_{m-1}}(x_\rho)\right| , & (-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_m}(x_\rho)\right| , & \ldots , & 0 , & \frac{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{m+2}}{\bar\alpha_1\,\bar\alpha_2}\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_m}(x_\rho)\right|\bar f_2(x) \\
(-1)^{m-3}\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_{m-3}}(x_\rho)\right| , & (-1)^{m-2}\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_{m-2}}(x_\rho)\right| , & (-1)^{m-1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_{m-1}}(x_\rho)\right| , & \ldots , & 0 , & \frac{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{m+3}}{\bar\alpha_1\,\bar\alpha_2\,\bar\alpha_3}\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_m}(x_\rho)\right|\bar f_3(x) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(-1)^{m-k}\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_{m-k}}(x_\rho)\right| , & (-1)^{m-k+1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_{m-k+1}}(x_\rho)\right| , & (-1)^{m-k+2}\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_{m-k+2}}(x_\rho)\right| , & \ldots , & (-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_m}(x_\rho)\right| , & \frac{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{k+m}}{\bar\alpha_1\,\bar\alpha_2\ldots\bar\alpha_k}\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_m}(x_\rho)\right|\bar f_k(x)
\end{vmatrix} =$$

$$
-\begin{vmatrix}
(-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{\sigma_m}(x_\rho)\right|, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & \sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=m-1}(-1)^\lambda\left|\psi^{(k_\rho)}_{\sigma_\lambda}(x_\rho)\right|\bar{f}_\lambda(x) \\
(-1)^{m-1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{1+\sigma_{m-1}}(x_\rho)\right|, & (-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{1+\sigma_m}(x_\rho)\right|, & 0 & \ldots, & 0, & \sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=m-2}(-1)^\lambda\left|\psi^{(k_\rho)}_{1+\sigma_\lambda}(x_\rho)\right|\bar{f}_{1+\lambda}(x) \\
(-1)^{m-2}\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_{m-2}}(x_\rho)\right|, & (-1)^{m-1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_{m-1}}(x_\rho)\right|, & (-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_m}(x_\rho)\right|, & \ldots, & 0, & \sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=m-3}(-1)^\lambda\left|\psi^{(k_\rho)}_{2+\sigma_\lambda}(x_\rho)\right|\bar{f}_{2+\lambda}(x) \\
(-1)^{m-3}\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_{m-3}}(x_\rho)\right|, & (-1)^{m-2}\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_{m-2}}(x_\rho)\right|, & (-1)^{m-1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_{m-1}}(x_\rho)\right|, & \ldots, & 0, & \sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=m-4}(-1)^\lambda\left|\psi^{(k_\rho)}_{3+\sigma_\lambda}(x_\rho)\right|\bar{f}_{3+\lambda}(x) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(-1)^{m-k}\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_{m-k}}(x_\rho)\right|, & (-1)^{m-k+1}\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_{m-k+1}}(x_\rho)\right|, & (-1)^{m-k+2}\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_{m-k+2}}(x_\rho)\right|, & \ldots, & (-1)^m\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_m}(x_\rho)\right|, & \sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=m-k}(-1)^\lambda\left|\psi^{(k_\rho)}_{k+\sigma_\lambda}(x_\rho)\right|\bar{f}_{k+\lambda}(x)
\end{vmatrix} =
$$

$$
=(-1)^{\frac{(k+1)(k+2m)}{2}}\prod_{\tau=0}^{k}\left|\psi^{(k_\rho)}_{\tau+\sigma_m}(x_\rho)\right| f_{k+m}(x)
$$

$$
(\sigma_\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \lambda-1, \lambda+1, \ldots, m;\ \rho = 1, 2, 3, \ldots\ r;\ k_\rho = 0, 1, 2, \ldots, \nu_\rho - 1)
$$

ergeben, wo alle Determinanten, in denen der Index von σ negativ würde, und alle Summen, in welchen λ einen negativen Werth erhielte, durch Null zu ersetzen sind.

Dieselben Vereinfachungen, welche eintreten, wenn $f(x)$ die oben erwähnte rationale Function vorstellt, treten auch bei den, den abgeleiteten Formeln entsprechenden Integralrelationen für die Näherungszähler, Näherungsnenner und Restfunctionen der Kettenbruchentwicklung der bestimmten Integrale.

$$
\int_\alpha^\beta \frac{\chi(z)\,dz}{x-z}
$$

ein, welche, wie Herr E. Heine längst gezeigt hat, stets regulär ist, wenn die Function $\chi(x)$ so beschaffen ist, dass das $n$fache Integral

$$
\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta\cdots\int_\alpha^\beta \chi(x_1)\chi(x_2)\ldots\chi(x_n)\Delta_1\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n
$$

wo Δ_1 die Discriminante der Function $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ ist, für keinen Werth von n verschwindet, eine Bedingung, welche bekanntlich stets erfüllt ist, wenn α und β reell sind und die integrable Function $\chi(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen reell und von unveränderlichem Zeichen ist. Da in diesem Falle

$$
\varphi_k(x) = \int_\alpha^\beta \frac{\psi_k(z)-\psi_k(z)}{x-z}\chi(z)\,dz
$$

$$f_k(x) = \int_\alpha^\beta \frac{\psi_k^{(z)}\,\chi^{(z)}}{x-z}\,dz$$

ist, so hat man die grösstentheils unmittelbar einleuchtenden Beziehungen

$$\bar{f}_k(x) = \int_\alpha^\beta \frac{(z-x_1)^{\nu_1}(z-x_2)^{\nu_2}\ldots(z-x_r)^{\nu_r}\,\bar{\psi}_k(z)\,\chi(z)\,dz}{x-z}$$

$$\bar{\varphi}_k(x) = \int_\alpha^\beta \frac{(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_r)^{\nu_r}\bar{\psi}_k(x) - (z-x_1)^{\nu_1}(z-x_2)^{\nu_2}\ldots(z-x_r)^{\nu_r}\bar{\psi}_k(z)}{x-z}\,\chi(z)\,dz$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\bar{\psi}_k(z)\,\chi(z)\,dz}{x-z} = \frac{\bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2\ldots\bar{\alpha}_k}{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{k+1}} \sum_{\mu=0}^{\mu=k} \alpha_{\mu+1} \left|\psi_{k+\lambda}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| f_\mu(x)\ (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, m-1, \mu;\ \rho = 1, 2, 3, \ldots, r;\ k_\rho = 0, 1, 2, \ldots, \nu_\rho - 1)$$

$$\alpha_{k+1} \prod_{\tau=0}^{k} \left|\psi_{\tau+\lambda_\tau}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \int_\alpha^\beta \frac{(z-x_1)^{\nu_1}(z-x_2)^{\nu_2}\ldots(z-x_r)^{\nu_r}\,\psi_k(z)\,\chi(z)\,dz}{x-z} =$$

$$= \begin{vmatrix}
\frac{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{k+1}}{\bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2\ldots\bar{\alpha}_k}\bar{f}_k(x), & \left|\psi_{k+\lambda_{k-1}}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right|, & \left|\psi_{k+\lambda_{k-2}}^{(k_\rho)}(x_\delta)\right|, & \ldots, & \left|\psi_{k+\lambda_1}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right|, & \left|\psi_{k+\lambda_0}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \\
\frac{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_k}{\bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2\ldots\bar{\alpha}_{k-1}}\bar{f}_{k-1}(x), & \left|\psi_{k-1+\lambda_{k-1}}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right|, & \left|\psi_{k-1+\lambda_{k-2}}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right|, & \ldots, & \left|\psi_{k-1+\lambda_1}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right|, & \left|\psi_{k-1+\lambda_0}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \\
\frac{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}{\bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2\ldots\bar{\alpha}_{k-2}}\bar{f}_{k-2}(x), & 0, & \left|\psi_{k-2+\lambda_{k-2}}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right|, & \ldots, & \left|\psi_{k-2+\lambda_1}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right|, & \left|\psi_{k-2+\lambda_0}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\alpha_1\,\alpha_2}{\bar{\alpha}_1}\bar{f}_1(x), & 0, & 0, & \ldots, & \left|\psi_{1+\lambda_1}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right|, & \left|\psi_{1+\lambda_0}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right| \\
\alpha_1\,f_0(x), & 0, & 0, & \ldots, & 0, & \left|\psi_{\lambda_0}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right|
\end{vmatrix}$$

$$(\lambda_\tau = 1, 2, 3, \ldots, m-1, \tau;\ \rho = 1, 2, 3, \ldots, r;\ k_\rho = 0, 1, 2, \ldots, \nu_\rho - 1)$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{F(z)\,\psi_k(z)\,\chi(z)}{x-z}\,dz = F(x)\,f_k(x)$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{(z-x_1)^{\nu_1}(z-x_2)^{\nu_2}\ldots(z-x_r)^{\nu_r}\,F(z)\,\bar{\psi}_k(z)\,\chi(z)\,dz}{x-z} = F(x)\,\bar{f}_k(x)$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{F(x)\,\psi_k(x) - F(z)\,\psi_k(z)}{x-z}\,\chi(z)\,dz = F(x)\,\varphi_k(x)$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_r)^{\nu_r}F(x)\,\psi_k(x) - (z-x_1)^{\nu_1}(z-x_2)^{\nu_2}\ldots(z-x_r)^{\nu_r}F(z)\,\psi_k(z)}{x-z}\,\chi(z)\,dz = F(x)\,\bar{\varphi}_k(x)$$

wenn der Grad von $F(x)$ die ganze Zahl k nicht übersteigt, so dass also speciell

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega(z)\,\psi_\rho^{(\sigma)}(z)\,\psi_k(z)\,\chi(z)\,dz}{x-z} = \omega(x)\,\psi_\rho^{(\sigma)}(x)\,f_k(x) \qquad (\sigma + k - \tau \geqq \rho)$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{(z-x_1)^{\nu_1}(z-x_2)^{\nu_2}\ldots(z-x_r)^{\nu_r}\,\omega(z)\,\psi_\rho^{(\sigma)}(z)\,\bar{\psi}_k(z)\,\chi(z)\,dz}{x-z} = \omega(x)\,\psi_\rho^{(\sigma)}(x)\,\bar{f}_k(x) \qquad (\sigma + k - \tau \geqq \rho)$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega(z)\,\bar{\psi}_\rho^{(\sigma)}(z)\,\psi_k(z)\,\chi(z)\,dz}{x-z} = \omega(x)\,\bar{\psi}_\rho^{(\sigma)}(x)\,f_k(x) \qquad (\sigma + k - \tau \geqq \rho)$$

ist, wo τ den Grad der ganzen Function $\omega(x)$ vorstellt. Diese Formeln sind die Verallgemeinerungen der ersten drei F. Neumann'schen Integrale. Von den aus denselben durch Differentiation ableitbaren Relationen mögen die folgenden, welche Erweiterungen und Verallgemeinerungen des vierten F. Neumann'schen Integrales bilden, besonders angeführt werden:

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega(z)\psi_\rho^{(\sigma)}(z)[\psi_k(z)\chi(z)]'dz}{x-z} = \omega(x)\psi_\rho^{(\sigma)}(x)\bar{f}'_k(x) + \left[\frac{\psi_k(z)\chi(z)\,\omega(z)\,\psi_\rho^{(\sigma)}(z)}{x-z}\right]_{z=\alpha}^{z=\beta}$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega(z)\psi_\rho^{(\sigma)}(z)[(z-x_1)^{\nu_1}(z-x_2)^{\nu_2}\ldots(z-x_r)^{\nu_r}\bar{\psi}_k(z)\chi(z)]'dz}{x-z} = \omega(x)\psi_\rho^{(\sigma)}(x)\bar{f}'_k(x) +$$

$$+\left[\frac{(z-x_1)^{\nu_1}(z-x_2)^{\nu_2}\ldots(z-x_r)^{\nu_r}\chi(z)\,\omega(z)\,\bar{\psi}_k(z)\,\psi_\rho^{(\sigma)}(z)}{x-z}\right]_{z=\alpha}^{z=\beta}$$

Schliesslich mögen in diesem Paragraphe noch die folgenden vier aus (1.) und (2.) sich ergebenden Formeln angeführt werden:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m+k} \frac{(\bar{x}_\lambda-x_1)^{\mu_1}(\bar{x}_\lambda-x_2)^{\mu_2}\ldots(\bar{x}_\lambda-x_r)^{\mu_r}h(\bar{x}_\lambda)\bar{\psi}_k(\bar{x}_\lambda)}{\psi'_{k+m}(x_\lambda)\psi_{k+m-1}(x_\lambda)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m+k} \frac{(\bar{x}_\lambda-x_1)^{\mu_1}(\bar{x}_\lambda-x_2)^{\mu_2}\ldots(\bar{x}_\lambda-x_r)^{\mu_r}\bar{\psi}_k^2(\bar{x}_\lambda)}{\psi'_{k+m}(\bar{x}_\lambda)\psi_{k+m-1}(\bar{x}_\lambda)}$$

$$\left(\mu_\tau \lesseqgtr \nu_\tau;\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}(\mu_\lambda-\nu_\lambda) \geqq k\right)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \frac{\bar{\psi}_k(\bar{x}'_\lambda)}{\psi'_k(\bar{x}'_\lambda)\psi_{k-1}(\bar{x}'_\lambda)} = \frac{\bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2\ldots\bar{\alpha}_k}{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{k+1}}\;\frac{\left|\psi_{k+\lambda}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right|}{\left|\psi_{k+\sigma}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right|}$$

$$(\lambda=0,1,2,\ldots,m-1;\ \sigma=1,2,3,\ldots,m-1,k;\ k_\rho=0,1,2,\ldots,\nu_\rho-1;\ \rho=1,2,3,\ldots,r)$$

$$\int_\alpha^\beta (x-x_1)^{\mu_1}(x-x_2)^{\mu_2}\ldots(x-x_r)^{\mu_r}h(x)\bar{\psi}_k(x)f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (x-x_1)^{\mu_1}(x-x_2)^{\mu_2}\ldots(x-x_r)^{\mu_r}\bar{\psi}_k^2(x)f(x)\,dx$$

$$\left(\mu_\tau \lesseqgtr \nu_\tau;\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}(\mu_\lambda-\nu_\lambda) \geqq k\right)$$

$$\int_\alpha^\beta \bar{\psi}_k(x)f(x)\,dx = \frac{\bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2\ldots\bar{\alpha}_k}{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{k+1}}\;\frac{\left|\psi_{k+\lambda}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right|}{\left|\psi_{k+\sigma}^{(k_\rho)}(x_\rho)\right|}$$

$$(\lambda=0,1,2,\ldots,m-1;\ \sigma=1,2,3,\ldots,m-1,k;\ k_\rho=0,1,2,\ldots,\nu_\rho-1;\ \rho=1,2,3,\ldots,r)$$

wo

$$\bar{\psi}_k(x) = g(x)(x-x_1)^{\nu_1-\mu_1}(x-x_2)^{\nu_2-\mu_2}\ldots(x-x_r)^{\nu_r-\mu_r} + h(x)$$

ist. Aus denselben ergeben sich u. A. die Theoreme:

Hat das Product $(x-x_1)^{\mu_1}(x-x_2)^{\mu_2}\ldots(x-x_r)^{\mu_r}$ für alle Wurzeln x'_λ der Gleichung $\psi_{k+m}(x)=0$ dasselbe Zeichen, so ist die Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m+k} \frac{(x'_\lambda-x_1)^{\mu_1}(x'_\lambda-x_2)^{\mu_2}\ldots(x'_\lambda-x_r)^{\mu_r}h(x'_\lambda)\bar{\psi}_k(x'_\lambda)}{\psi'_{k+\mu}(x'_\lambda)\psi_{k+m-1}(x'_\lambda)}$$

wo $h(x)$ der Rest der Division von $\psi_k(x)$ durch $(x-x_1)^{\nu_1-\mu_1}(x-x_2)^{\nu_2-\mu_2}(x-x_r)^{\nu_r-\mu_r}$ ist, positiv.

Ändert das Product $(x-x_1)^{\mu_1}(x-x_2)^{\mu_2}\ldots(x-x_r)^{\mu_r}$ innerhalb der Grenzen α, β das Zeichen nicht, so hat das Integral

$$\int_\alpha^\beta (x-x_1)^{\mu_1}(x-x_2)^{\mu_2}\ldots(x-x_r)^{\mu_r}h(x)\bar{\psi}_k(x)\chi(x)\,dx$$

wo $h(x)$ der Rest der Division von $\bar{\psi}_k(x)$ durch $(x-x_1)^{\nu_1-\mu_1}(x-x_2)^{\nu_2-\mu_2}(x-x_r)^{\nu_r-\mu_r}$ ist, das Zeichen dieses Productes.

In dem letzten Satze sind zwei von Herrn C. Possé[1] aufgestellte Theoreme über die Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklungen der Integrale

[1] „Sur quelques applications des fractions continues algébriques." St. Pétersbourg 1886.

$$\int_\alpha^\beta \frac{(z-\alpha)\chi(z)\,dz}{x-z}, \int_\alpha^\beta \frac{(z-\alpha)(\beta-z)\chi(z)\,dz}{x-z}$$

als ganz specielle Fälle enthalten, welche in der von Tchebychef geschaffenen Theorie der Grenzwerthe der Integrale, einer der schönsten Anwendungen der Theorie der Kettenbrüche, eine nicht unwesentliche Rolle spielen.

§. 2.

Die entwickelten Formeln sollen nun auf einige besonders interessante specielle Fälle angewendet werden, α). Die ganzen Functionen

$$T_n^m(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} (-1)^\lambda \frac{x^{n-\lambda}}{\Pi(\lambda)\Pi(n-\lambda)\Pi(m+n-\lambda)} \quad (m > -1)$$

sind, wie ich früher[1] gezeigt habe, abgesehen von einem constanten Factor, die Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Intergrales

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} z^m dz}{x-z}$$

und es ist

$$\left[T_n^m(x)\right]' = T_{n-1}^{m+1}(x)$$

Nach den im vorigen Paragraph entwickelten Relationen ist demnach

$$x^r T_n^{m+r}(x) = \frac{(-1)^{r\left\{n-\frac{r-1}{2}\right\}} \Pi(n)\Pi(m+r)}{\Pi(m)\Pi(n+r)\Pi(m)\Pi(m+1)\ldots\Pi(m+r-1)\left|\frac{1}{\Pi(n-\mu+\lambda)}\right|}$$

$$\begin{vmatrix} T_n^m(x) & , & T_{n+1}^m(x) & , & T_{n+2}^m(x) & , & \ldots & , & T_{n+r}^m(x) \\ \frac{1}{\Pi(n)} & , & \frac{1}{\Pi(n+1)} & , & \frac{1}{\Pi(n+2)} & , & \ldots & , & \frac{1}{\Pi(n+r)} \\ \frac{1}{\Pi(n-1)} & , & \frac{1}{\Pi(n)} & , & \frac{1}{\Pi(n+1)} & , & \ldots & , & \frac{1}{\Pi(n+r-1)} \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ \frac{1}{\Pi(n-r+1)} & , & \frac{1}{\Pi(n-r+2)} & , & \frac{1}{\Pi(n-r+3)} & , & \ldots & & \frac{1}{\Pi(n+1)} \end{vmatrix}$$

$$(\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

$$T_n^{m+r}(x) = \sum_{\rho=0}^{\rho=n} (-1)^{n-\rho} \frac{\Pi(r+n-\rho-1)\Pi(m+\rho)}{\Pi(r-1)\Pi(n-\rho)\Pi(m+n+r)} T_\rho^m(x)$$

$$T_n^m(x) = \sum_{\rho=0}^{\rho=n} \frac{\Pi(r)\Pi(m+r+\rho)}{\Pi(n-\rho)\Pi(m+n)\Pi(r+n-\rho)} T_\rho^{m+r}(x)$$

Multiplicirt man die erste von diesen Gleichungen mit $x^{m-\frac{\nu}{2}} J^\nu(2i\sqrt{xy})\, e^{-x}\, dx$, integrirt nach x von 0 bis ∞ und berücksichtigt, dass, wie ich a. e. a. O. gezeigt habe

[1] „Über die Functionen $T_n^m(x)$." Sitzungsber. der kais. Akad. d. Wissensch. Mathem.-naturw. Cl. Bd. XCV, II. Abth., S. 274—290.

$$\int_0^\infty J^\nu(2i\sqrt{yx})\, e^{-x} x^{\mu-\frac{\nu}{2}}\, T_n^\mu(x)\, dx = \frac{i^\nu y^{n+\frac{\nu}{2}}}{\Pi(n)\,\Pi(n+\nu)}\, \varphi(\mu+n+1, \nu+n+1, y)$$

ist, wo $\varphi(\alpha, \beta, x)$ die von Herrn E. E. Kummer eingeführte Function

$$1+\frac{\alpha}{1!\,\beta}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\,\beta(\beta+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!\,\beta(\beta+1)(\beta+2)}x^3+\dots$$

vorstellt, so erhält man die interessante Relation

$$\varphi(m+n+r+1, n+\nu+1, y) = \frac{(-1)^{r\left\{n-\frac{r-1}{2}\right\}}\,[\Pi(n)]^2\,\Pi(m+r)\,\Pi(n+\nu)}{\Pi(m)\,\Pi(n+r)\,\Pi(m)\,\Pi(m+1)\dots\Pi(m+r-1)\left|\dfrac{1}{\Pi(n-\mu+\lambda)}\right|}\,.$$

$$\cdot\begin{vmatrix} \dfrac{\varphi(m+n+1, n+\nu+1, y)}{\Pi(n)\,\Pi(n+\nu)}, & \dfrac{y\,\varphi(m+n+2, n+\nu+2, y)}{\Pi(n+1)\,\Pi(n+\nu+1)}, & \dfrac{y^2\varphi(m+n+3, n+\nu+3, y)}{\Pi(n+2)\,\Pi(n+\nu+2)}, & \dots, & \dfrac{y^r\varphi(m+n+r+1, n+\nu+r+1, y)}{\Pi(n+r)\,\Pi(n+\nu+r)} \\ \dfrac{1}{\Pi(n)}, & \dfrac{1}{\Pi(n+1)}, & \dfrac{1}{\Pi(n+2)}, & \dots, & \dfrac{1}{\Pi(n+r)} \\ \dfrac{1}{\Pi(n-1)}, & \dfrac{1}{\Pi(n)}, & \dfrac{1}{\Pi(n+1)}, & \dots, & \dfrac{1}{\Pi(n+r-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1}{\Pi(n-r+1)}, & \dfrac{1}{\Pi(n-r+2)}, & \dfrac{1}{\Pi(n-r+3)}, & \dots, & \dfrac{1}{\Pi(n+1)} \end{vmatrix}$$

$(\lambda, \mu = 0, 1, 2, \dots, r-1$

β.) Für die von Jacobi[1] untersuchten, durch die Gleichung

$$\frac{(1+h+\sqrt{1-2hz+h^2})^{1-\alpha}(1-h+\sqrt{1-2hz+h^2})^{1-\beta}}{\sqrt{1-2hz+h^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2^{2-\alpha-\beta}\,\Pi(\alpha+\beta+2n-2)}{2^n\,\Pi(n)\,\Pi(\alpha+\beta+n-2)}\, h^n\, T_{n,\alpha,\beta}(z)$$

definirten ganzen Functionen $T_{n,\alpha,\beta}(z)$, für welche bekanntlich die Beziehungen

$$[T_{n,\alpha,\beta}(x)]' = n\,T_{n-1,\alpha+1,\beta+1}(x)$$

$$T_{n,\alpha,\beta}(+1) = \frac{2^n\,\Pi(\beta+n-1)\,\Pi(\alpha+\beta+n-2)}{\Pi(\beta)\,\Pi(\alpha+\beta+2n-2)}$$

$$T_{n,\alpha,\beta}(-1) = \frac{(-2)^n\,\Pi(\alpha+n-1)\,\Pi(\alpha+\beta+n-2)}{\Pi(\alpha)\,\Pi(\alpha+\beta+2n-2)}$$

[1] „Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe." Journal f. d. reine und angewandte Mathematik, von Borchardt, 56. Bd.

bestehen, ergeben sich aus den im vorigen Paragraphe abgeleitenden Formeln die Relationen:

$$\left|\begin{array}{cccc}
T_{n,\alpha,\beta}(x) & T_{n+1,\alpha,\beta}(x) & ,\dots, & T_{n+\gamma+\delta,\alpha,\beta}(x) \\
\frac{2^{n}\Pi(\beta+n-1)\Pi(\alpha+\beta+n-2)}{\Pi(\beta)\Pi(\alpha+\beta+2n-2)}, & \frac{2^{n+1}\Pi(\beta+n)\Pi(\alpha+\beta+n-1)}{\Pi(\beta)\Pi(\alpha+\beta+2n)} & ,\dots, & \frac{2^{n+\gamma+\delta}\Pi(\beta+\gamma+\delta+n-1)\Pi(\alpha+\beta+\gamma+\delta+n-2)}{\Pi(\beta)\Pi(\alpha+\beta+2n+2\gamma+2\delta-2)} \\
\frac{2^{n-1}n\Pi(\beta+n-1)\Pi(\alpha+\beta+n-1)}{\Pi(\beta+1)\Pi(\alpha+\beta+2n-2)}, & \frac{2^{n}(n+1)\Pi(\beta+n)\Pi(\alpha+\beta+n)}{\Pi(\beta+1)\Pi(\alpha+\beta+2n)} & ,\dots, & \frac{2^{n+\gamma+\delta-1}(n+\gamma+\delta)\Pi(\beta+\gamma+\delta+n-1)\Pi(\alpha+\beta+\gamma+\delta+n-1)}{\Pi(\beta+1)\Pi(\alpha+\beta+2n+2\gamma+2\delta-2)} \\
\frac{2^{n-2}n(n-1)\Pi(\beta+n-1)\Pi(\alpha+\beta+n)}{\Pi(\beta+2)\Pi(\alpha+\beta+2n-2)}, & \frac{2^{n-1}(n+1)n\Pi(\beta+n)\Pi(\alpha+\beta+n+1)}{\Pi(\beta+2)\Pi(\alpha+\beta+2n)} & ,\dots, & \frac{2^{n+\gamma+\delta-2}(n+\gamma+\delta)(n+\gamma+\delta-1)\Pi(\alpha+\beta+\gamma+\delta+n)\Pi(\beta+\gamma+\delta+n-1)}{\Pi(\beta+2)\Pi(\alpha+\beta+2n+2\gamma+2\delta-2)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{2^{n-\delta+1}\Pi(n)\Pi(\beta+n-1)\Pi(\alpha+\beta+n+\delta-3)}{\Pi(n-\delta+1)\Pi(\beta+\delta-1)\Pi(\alpha+\beta+2n-2)}, & \frac{2^{n-\delta+2}\Pi(n+1)\Pi(\beta+n)\Pi(\alpha+\beta+n+\delta-2)}{\Pi(n-\delta+2)\Pi(\beta+\delta-1)\Pi(\alpha+\beta+2n)} & ,\dots, & \frac{2^{n+\gamma+1}\Pi(n+\gamma+\delta)\Pi(\beta+\gamma+\delta+n-1)\Pi(\alpha+\beta+\gamma+n+2\delta-3)}{\Pi(n+\gamma+1)\Pi(\beta+\delta-1)\Pi(\alpha+\beta+2n+2\gamma+2\delta-2)} \\
\frac{(-2)^{n}\Pi(\alpha+n-1)\Pi(\alpha+\beta+n-2)}{\Pi(\alpha)\Pi(\alpha+\beta+2n-2)}, & \frac{(-2)^{n+1}\Pi(\alpha+n)\Pi(\alpha+\beta+n-1)}{\Pi(\alpha)\Pi(\alpha+\beta+2n)} & ,\dots, & \frac{(-2)^{n+\gamma+\delta}\Pi(\alpha+\gamma+\delta+n-1)\Pi(\alpha+\beta+\gamma+\delta+n-2)}{\Pi(\alpha)\Pi(\alpha+\beta+2n+2\gamma+2\delta-2)} \\
\frac{(-2)^{n-1}n\Pi(\alpha+n-1)\Pi(\alpha+\beta+n-1)}{\Pi(\alpha+1)\Pi(\alpha+2+2n-2)}, & \frac{(-2)^{n}(n+1)\Pi(\alpha+n)\Pi(\alpha+\beta+n)}{\Pi(\alpha+1)\Pi(\alpha+\beta+2n)} & ,\dots, & \frac{(-2)^{n+\gamma+\delta-1}(n+\gamma+\delta)\Pi(\alpha+\gamma+\delta+n-1)\Pi(\alpha+\beta+\gamma+\delta+n-1)}{\Pi(\alpha+1)\Pi(\alpha+\beta+2n+2\gamma+2\delta-2)} \\
\frac{(-2)^{n-2}n(n-1)\Pi(\alpha+n-1)\Pi(\alpha+\beta+n)}{\Pi(\alpha+2)\Pi(\alpha+\beta+2n-2)}, & \frac{(-2)^{n-1}n(n+1)\Pi(\alpha+n)\Pi(\alpha+\beta+n+1)}{\Pi(\alpha+2)\Pi(\alpha+\beta+2n)} & ,\dots, & \frac{(-2)^{n+\gamma+\delta-2}\Pi(\alpha+\gamma+\delta+n-1)\Pi(\alpha+\beta+\gamma+\delta+n-1)}{\Pi(\alpha+2)\Pi(\alpha+\beta+2n+2\gamma+2\delta-2)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{(-2)^{n-\gamma+1}\Pi(n)\Pi(\alpha+n-1)\Pi(\alpha+\beta+n+\gamma-3)}{\Pi(n-\gamma+1)\Pi(\alpha+\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta+2n-2)}, & \frac{(-2)^{n-\gamma+2}\Pi(n+1)\Pi(\alpha+n)\Pi(\alpha+\beta+n-\gamma+2)}{\Pi(n-\gamma+2)\Pi(\alpha+\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta+2n)} & ,\dots, & \frac{(-2)^{n+\delta+1}\Pi(n+\gamma+\delta)\Pi(\alpha+\gamma+\delta+n-1)\Pi(\alpha+\beta+\delta+n+2\gamma-3)}{\Pi(n+\delta+1)\Pi(\alpha+\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta+2n+2\gamma+2\delta-2)}
\end{array}\right|$$

$$= \Delta(x-1)^{\gamma}(x+1)^{\delta}\, T_{n,\alpha+\delta,\beta+\gamma}(x)$$

wo Δ die Adjuncte des Elementes $T_{n+\gamma+\delta,\alpha,\beta}(x)$ in der Determinante auf der linken Seite vorstellt.

γ) Für die Functionen $C_n^{\nu}(x)$, welche sich von den Näherungsnennern der regulären Kettenbruchentwicklung der Function $x^{-\nu}F(1,\frac{1}{2},\nu+1,x^{-2})$ bekanntlich nur durch den constanten Factor $\frac{2^{n}\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(n)\Pi(\nu-1)}$ unterscheiden und übrigens auch ein specieller besonders bemerkenswerther Fall der eben erwähnten Functionen sind, bestehen die Gleichungen

$$n\,C_n^{\nu}(x)-2(n+\nu-1)\,x\,C_{n-1}^{\nu}(x)+(n+2\nu-2)\,C_{n-2}^{\nu}(x)=0$$

$$2\nu(1-x^2)\,C_{n-1}^{\nu+1}(x)=(n+2\nu-1)\,C_{n-1}^{\nu}(x)-n\,C_n^{\nu}(x)$$

$$[C_n^{\nu}(x)]^{(r)}=\frac{2^{r}\Pi(\nu+r-1)}{\Pi(\nu-1)}\,C_{n-r}^{\nu+r}(x).$$

Durch Vereinigung der ersten und zweiten von ihnen entsteht die Relation

$$(13.)\qquad (x^2-1)\, C^{\nu+1}_{n-1}(x) = \frac{1}{4\nu(n+\nu)} \{n(n+1)\, C^{\nu}_{n+1}(x) - (n+2\nu-1)(n+2\nu)\, C^{\nu}_{n-1}(x)\}.$$

Schreibt man in derselben für $\nu:\nu+1$, für $n:n-1$ und multiplicirt die dadurch entstehende Relation mit (x^2-1), so erhält man unter Berücksichtigung der eben aufgeschriebenen Relation die neue Gleichung

$$(x^2-1)^2\, C^{\nu+2}_{n-2}(x) = \frac{1}{16\nu(\nu+1)(n+\nu)} \left\{ \frac{(n-1)\,n(n+1)(n+2)}{n+\nu+1}\, C^{\nu}_{n+2}(x) - \frac{2(n-1)\,n(n+\nu)(n+2\nu)(n+2\nu+1)}{(n+\nu-1)(n+\nu+1)}\, C^{\nu}_{n}(x) + \right.$$
$$\left. + \frac{(n+2\nu-2)(n+2\nu-1)(n+2\nu)(n+2\nu+1)}{n+\nu-1}\, C^{\nu}_{n-2}(x) \right\}$$

in welcher die Hermite'sche Relation für die Kugelfunctionen erster Art als specieller Fall enthalten ist.

Aus den eben abgeleiteten Gleichungen ersieht man, dass in der Entwicklung des Productes

$$(x^2-1)^m\, C^{\nu+m}_{n-m}(x) = \frac{\Pi(\nu-1)}{2^m\,\Pi(m+\nu-1)}\,(x^2-1)^m\,[C^{\nu}_{n}(x)]^{(m)}$$

nach den Functionen $C^{\nu}_{n}(x)$ diejenigen Functionen, deren Index kleiner als $n-m$ ist, fehlen und dass demnach, wie im ersten Paragraph gezeigt wurde, dieselben sich von den Näherungsnennern der Kettenbruchentwicklung der Function $(x^2-1)^m x^{-1} F\left(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right)$ nur durch einen constanten Factor unterscheiden, was übrigens auch aus den unmittelbar vorhergehenden Entwicklungen und dem Integralausdrucke für $x^{-1}F\left(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right)$ folgt.

Berücksichtigt man die Gleichungen

$$C^{\mu}_{r}(+1) = \frac{\Pi(r+2\mu-1)}{\Pi(r)\,\Pi(2\mu-1)}$$

$$C^{\mu}_{r}(-1) = (-1)^r \frac{\Pi(r+2\mu-1)}{\Pi(r)\,\Pi(2\mu-1)}$$

so erkennt man sofort aus der Betrachtung von (1.), dass in der eben erwähnten Entwicklung die Functionen $C^{\nu}_{n-m+1}(x)$, $C^{\nu}_{n-m+3}(x), \ldots, C^{\nu}_{n+m-1}(x)$ nicht vorkommen, und man hat daher die auch durch Specialisirung aus der in β.) angegebenen Formel folgende Gleichung:

$$(x^2-1)^m C_{n-m}^{\nu+m}(x) = \frac{\Pi(\nu-1)(x^2-1)^m}{2^m \Pi(m+\nu-1)} [C_n^\nu(x)]^{(m)} = \frac{\Pi(n+m)\Pi(n+\nu-1)\Pi(\nu-1)}{2^{2m}\Pi(n-m)\Pi(m+\nu-1)\Pi(n+m+\nu-1)\left|\dfrac{2^\lambda \Pi(\lambda+\nu-1)\Pi(n-m+2\nu+2\mu+\lambda-1)}{\Pi(2\lambda+2\nu-1)\Pi(\nu-1)\Pi(n-m+2\mu-\lambda)}\right|}$$

$$\left|\begin{array}{cccc}
C_{n-m}^\nu(x), & C_{n-m+2}^\nu(x), & C_{n-m+4}^\nu(x), \ldots, & C_{n+m}^\nu \\[2mm]
\dfrac{\Pi(n-m+2\nu-1)}{\Pi(n-m)\Pi(2\nu-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m+2)\Pi(2\nu-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+3)}{\Pi(n-m+4)\Pi(2\nu-1)}, \ldots, & \dfrac{\Pi(n+m+2\nu-1)}{\Pi(n+m)\Pi(2\nu-1)} \\[2mm]
\dfrac{\Pi(n-m+2\nu)}{\Pi(n-m-1)(2\nu+1)\Pi(2\nu-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+2)}{\Pi(n-m+1)(2\nu+1)\Pi(2\nu-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+4)}{\Pi(n-m+3)(2\nu+1)\Pi(2\nu-1)}, \ldots, & \dfrac{\Pi(n+m+2\nu)}{\Pi(n+m)(2\nu+1)\Pi(2\nu+1)} \\[2mm]
\dfrac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m-2)(2\nu+1)(2\nu+3)\Pi(2\nu-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+3)}{\Pi(n-m)(2\nu+1)(2\nu+3)\Pi(2\nu-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+5)}{\Pi(n-m+4)(2\nu+1)(2\nu+3)\Pi(2\nu-1)}, \ldots, & \dfrac{\Pi(n+m+2\nu+1)}{\Pi(n+m-2)(2\nu+1)(2\nu+3)\Pi(2\nu-1)} \\[2mm]
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\[2mm]
\dfrac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\Pi(n+2\nu-2)}{\Pi(n-2m+1)\Pi(\nu-1)\Pi(2m+2\nu-2)}, & \dfrac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\Pi(n+2\nu)}{\Pi(n-2m+3)\Pi(\nu-1)\Pi(2m+2\nu-2)}, & \dfrac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\Pi(n+2\nu+2)}{\Pi(n-2m+5)\Pi(\nu-1)\Pi(2m+2\nu-2)}, \ldots, & \dfrac{2^{m-1}\Pi(n+2m+2\nu-2)\Pi(m+\nu-2)}{\Pi(n+1)\Pi(\nu-1)\Pi(2m+2\nu-2)}
\end{array}\right|$$

$$(\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

Weil die Functionen $C_n^\nu(x)$ und $D_n^\nu(x)$ ein Fundamentalsystem von Integralen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1-x^2)y'' - (2\nu+1)xy' + n(n+2\nu)y = 0$$

sind, so besteht zwischen ihnen die Relation

$$[C_n^\nu(x)]' D_n^\nu(x) - [D_n^\nu(x)]' C_n^\nu(x) = \frac{\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)(x^2-1)^{\frac{2\nu+1}{2}}}$$

und weil zwischen je drei unmittelbar aufeinander folgenden von ihnen dieselbe lineare Beziehung besteht, so hat man, wie ich früher hervorgehoben habe, [1] die Gleichung

$$C_n^\nu(x) D_{n-1}^\nu(x) - D_n^\nu(x) C_{n-1}^\nu(x) = \frac{\Pi(2\nu-1)}{(x^2-1)^{\frac{2\nu+1}{2}}}.$$

Verbindet man diese zwei Relationen mit (13.), so erhält man die neue Beziehung

$$(x^2-1)[D_n^\nu(x)]' = \frac{1}{2(n+\nu)} \{(n+2\nu-1)(n+2\nu) D_{n-1}^\nu(x) - n(n+1) D_{n+1}^\nu(x)\},$$

---

[1] „Zur Theorie der Functionen $C_n^\nu(x)$". Diese Denkschriften, Bd. XLVIII.

welche sofort zu der folgenden Gleichung führt:

$$(14.)\qquad (x^2-1)^m [D_n^\nu(x)]^{(m)} = \frac{(-1)^m \Pi(n+m+2\nu-1)\,\Pi(n-m+\nu)}{2^m \Pi(n+\nu)\,\Pi(n-m+2\nu-1)\,\left|\dfrac{2^\lambda \Pi(\lambda+\nu-1)\,\Pi(n-m+2\nu+2\mu+\lambda-1)}{\Pi(2\lambda+2\nu-1)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n-m+2\mu-\lambda)}\right|}$$

$$\begin{vmatrix} D_{n-m}^\nu(x), & D_{n-m+2}^\nu(x), & D_{n-m+4}^\nu(x), & \ldots, & D_{n+m}^\nu(x) \\ \dfrac{\Pi(n-m+2\nu-1)}{\Pi(n-m)\,\Pi(2\nu-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m+2)\,\Pi(2\nu-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+3)}{\Pi(n-m+4)\,\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \dfrac{\Pi(n+m+2\nu-1)}{\Pi(n+m)\,\Pi(2\nu-1)} \\ \dfrac{\Pi(n-m+2\nu)}{\Pi(n-m-1)(2\nu+1)\,\Pi(2\nu-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+3)}{\Pi(n-m+1)(2\nu+1)\,\Pi(2\nu-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+4)}{\Pi(n-m+3)(2\nu+1)\,\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \dfrac{\Pi(n+m+2\nu)}{\Pi(n+m-1)(2\nu+1)\,\Pi(2\nu-1)} \\ \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m-2)(2\nu+1)(2\nu+3)\,\Pi(2\nu-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+3)}{\Pi(n-m)(2\nu+1)(2\nu+3)\,\Pi(2\nu-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+5)}{\Pi(n-m+2)(2\nu+1)(2\nu+3)\,\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \dfrac{\Pi(m+n+2\nu+1)}{\Pi(n+m-2)\,\Pi(2\nu-1)(2\nu+1)(2\nu+3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\,\Pi(n+2\nu-2)}{\Pi(n-2m+1)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2m+2\nu-2)}, & \dfrac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\,\Pi(n+2\nu)}{\Pi(n-2m+3)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2m+2\nu-2)}, & \dfrac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\,\Pi(n+2\nu+2)}{\Pi(n-2m+5)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2m+2\nu-2)}, & \ldots, & \dfrac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\,\Pi(n+2m+2\nu-2)}{\Pi(n+1)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2m+2\nu-2)} \end{vmatrix}$$

$$(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m)$$

Diese Formel bildet die Verallgemeinerung der von den Herren F. Neumann, E. Beltrami und F. Caspary bewiesenen speciellen Gleichungen für die Kugelfunctionen zweiter Art.

Die Gleichung (2.) liefert die von mir a. e. a. O. schon auf einem anderen Wege abgeleitete Formel

$$[C_n^\nu(x)]^{(m)} = \frac{2^m}{\Pi(m-1)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n-m}{2}\right]} \frac{\Pi(\lambda+m-1)\,\Pi(n+\nu-\lambda-1)}{\Pi(\lambda)\,\Pi(n-m+\nu-\lambda)} (n-m+\nu-2\lambda)\, C_{n-m-2\lambda}^\nu(x)$$

während aus (6.) und (14.) die speciellen Relationen

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+2\nu-1)} C_n^\nu(x) - \left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \left\{\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n+1}{2}\right]\right\} x = 2(x^2-1) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n-3}{2}\right]} \frac{\Pi(n-2\lambda-2)\,\Pi(2\nu-1)}{\Pi(n+2\nu-2\lambda-1)} (n+\nu-2\lambda-1)\, [C_{n-2\lambda-1}^\nu(x)]'$$

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(2\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)} D_n^\nu(x) - x^{-2\nu} \left\{\left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n-1}{2}\right]\right) F\left(\nu, \nu+\frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right) + \left(\left[\frac{n+1}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right]\right) \frac{1}{2(\nu+1)x^2} F\left(\nu+1, \nu+\frac{1}{2}, \nu+2, x^{-2}\right)\right\} =$$

$$= 4\nu(x^2-1) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n-3}{2}\right]} \frac{\Pi(n-2\lambda-2)}{\Pi(n+2\nu-2\lambda-1)} (n+\nu-2\lambda-1)\, [D_{n-2\lambda-1}^\nu(x)]'$$

folgen, von denen die erste die Verallgemeinerung der im Anfange erwähnten, von Herrn F. Caspary neuerdings bewiesenen F. Neumann'schen Relation ist.

Aus den eben abgeleiteten Formeln ergeben sich unmittelbar die Gleichungen:

$$(15.)\quad \left|\begin{array}{cccc}
\frac{\Pi(n-m+2\nu-1)\,C_r^{\nu+\frac12,\,n-m}(x)}{\Pi(n-m)\Pi(r+n-m)\Pi(r+n-m+2\nu)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+1)\,C_r^{\nu+\frac12,\,n-m+2}(x)}{\Pi(n-m+2)\Pi(r+n-m+2)\Pi(r+n-m+2\nu+2)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n+m+2\nu-1)\,C_r^{\nu+\frac12,\,n+m}(x)}{\Pi(n+m)\Pi(r+n+m)\Pi(r+n+m+2\nu)} \\
\frac{\Pi(n-m+2\nu-1)}{\Pi(n-m)\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m+2)\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n+m+2\nu-1)}{\Pi(n+m)\Pi(2\nu-1)} \\
\frac{\Pi(n-m+2\nu)}{\Pi(n-m-1)(2\nu+1)\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+2)}{\Pi(n-m+1)(2\nu+1)\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n+m+2\nu)}{\Pi(n+m-1)(2\nu+1)\Pi(2\nu-1)} \\
\frac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m-2)(2\nu+1)(2\nu+3)\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+3)}{\Pi(n-m)(2\nu+1)(2\nu+3)\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n+m+2\nu+1)}{\Pi(n+m-2)(2\nu+1)(2\nu+3)\Pi(2\nu-1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\Pi(n+2\nu-2)}{\Pi(n-2m+1)\Pi(\nu-1)\Pi(2m+2\nu-2)}, & \frac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\Pi(n+2\nu)}{\Pi(n-2m+3)\Pi(\nu-1)\Pi(2m+2\nu-2)}, & \ldots, & \frac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\Pi(n+2m+2\nu-2)}{\Pi(n+1)\Pi(\nu-1)\Pi(2m+2\nu-2)}
\end{array}\right| =$$

$$= \frac{(-4)^m\Pi\left(r+\nu+m-\frac12\right)\Pi(m+\nu-1)\Pi(m+n+\nu-1)\Pi(2\nu-1)\Pi\left(m+\nu-\frac12\right)\Pi(m+n+2\nu-1)\left|\frac{\Pi(2\lambda+2\nu-1)2^\lambda\Pi(\lambda+\nu-1)\Pi(n-m+2\mu-\lambda)}{\Pi(n-m+2\nu+2\mu+\lambda-1)\Pi(\nu-1)}\right|}{\Pi(\nu-1)\Pi\left(\nu-\frac12\right)\Pi\left(r+\nu-\frac12\right)\Pi(n+m)\Pi(n+\nu-1)\Pi(2m+2\nu-1)\Pi(r+m-n)\Pi(m+n+r+2\nu)}\,C_r^{\nu+m+\frac12,\,n-m}(x)$$

$$(\lambda,\mu=0,1,2,\ldots,m-1)$$

$$(16.)\quad \left|\begin{array}{cccc}
\frac{\Pi\left(n-m+\nu-\frac12\right)\Pi(2\nu+n-m-1)\Pi(\nu+n-m-1)D_r^{\nu+\frac12,\,n-m}(x)}{\Pi(2n-2m+2\nu-1)\Pi(n-m)}, & \frac{4^2\Pi\left(n-m+\nu+\frac32\right)\Pi(n-m+2\nu+1)\Pi(n-m+\nu+1)D_r^{\nu+\frac12,\,n-m+2}(x)}{\Pi(2n-2m+2\nu+3)\Pi(n-m+2)}, & \ldots, & \frac{4^{2m}\Pi\left(n+m+\nu-\frac12\right)\Pi(n+m+2\nu-1)\Pi(n+m+\nu-1)D_r^{\nu+\frac12,\,n+m}(x)}{\Pi(2n+2m+2\nu-1)\Pi(n+m)} \\
\frac{\Pi(n-m+2\nu-1)}{\Pi(n-m)\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m+2)\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n+m+2\nu-1)}{\Pi(n+m)\Pi(2\nu-1)} \\
\frac{\Pi(n-m+2\nu)}{\Pi(n-m-1)(2\nu+1)\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+2)}{\Pi(n-m+1)(2\nu+1)\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n+m+2\nu)}{\Pi(n+m-1)(2\nu+1)\Pi(2\nu-1)} \\
\frac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m-2)(2\nu+1)(2\nu+3)\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+3)}{\Pi(n-m)(2\nu+1)(2\nu+3)\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n+m-2)(2\nu+1)(2\nu+3)\Pi(2\nu-1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-1)\Pi(n+2\nu-2)}{\Pi(n-2m+1)\Pi(\nu-1)\Pi(2m+2\nu-2)}, & \frac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-1)\Pi(n+2\nu)}{\Pi(n-2m+3)\Pi(\nu-1)\Pi(2m+2\nu-2)}, & \ldots, & \frac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\Pi(n+2m+2\nu-2)}{\Pi(n+1)\Pi(\nu-1)\Pi(2m+2\nu-2)}
\end{array}\right| =$$

$$=\frac{\Pi(m+n+2\nu-1)\,\Pi(m+n+\nu-1)\,\Pi\left(\nu+r+\frac{1}{2}\right)\Pi\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(r+\nu+m+\frac{1}{2}\right)\Pi(n+m)\,\Pi(2n+2\nu-1)}\cdot\left|\frac{\Pi(n-m+2\nu+2\mu+\lambda-1)\,2^{\lambda}\,\Pi(\lambda+\nu-1)}{\Pi(2\nu+2\lambda-1)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n-m+2\mu-\lambda)}\right| D_r^{\nu+\frac{1}{2}+m,\; n-m}(x)$$

$$(\lambda, \mu=0,1,2,\ldots,m-1)$$

$$\int_0^{\pi} e^{\alpha i\cos\varphi\cos\psi}\, J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\alpha\sin\varphi\sin\psi)\, C_{n-m}^{\nu+m}(\cos\varphi)\,\sin^{\frac{2\nu+1}{2}}\varphi\, d\varphi=$$

$$=\frac{i^{n-m}\,\Pi(\nu-1)\sin^{\frac{2\nu-1}{2}}\psi}{\Pi(m-1)\,\Pi(m+\nu-1)}\left[\frac{2^{2\nu-1}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\Pi(\nu-1)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n-m}{2}\right]}(-1)^{\lambda}\frac{\Pi(\lambda+m-1)\,\Pi(n+\nu-\lambda-1)\,(n-m+\nu-2\lambda)}{\Pi(\lambda)\,\Pi(n-m+\nu-\lambda)}\,C_{n-m-2\lambda}^{\nu}(\cos\psi)\cdot J^{n-m+\nu-2\lambda}(\alpha)$$

$$\begin{vmatrix}
C_{n-m}^{\nu}(\cos\psi)\,J^{n-m+\nu}(\alpha), & -C_{n-m+2}^{\nu}(\cos\psi)\,J^{n-m+\nu+2}(\alpha), & C_{n-m+4}^{\nu}(\cos\psi)\,J^{n-m+\nu+4}(\alpha), & \ldots, & (-1)^m\,C_{n+m}^{\nu}(\cos\psi)\,J^{\nu+n+m}(\alpha) \\
\frac{\Pi(n-m+2\nu-1)}{\Pi(n-m)\,\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m+2)\,\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+3)}{\Pi(n-m+4)\,\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n+m+2\nu-1)}{\Pi(n+m)\,\Pi(2\nu-1)} \\
\frac{\Pi(n-m+2\nu)}{\Pi(n-m-1)\,(2\nu+1)\,\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+2)}{\Pi(n-m+1)\,(2\nu+1)\,\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+4)}{\Pi(n-m+3)\,(2\nu+1)\,\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n+m+2\nu)}{\Pi(n+m-1)\,(2\nu+1)\,\Pi(2\nu-1)} \\
\frac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m-2)(2\nu+1)(2\nu+3)\,\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+3)}{\Pi(n-m)\,(2\nu+1)(2\nu+3)\,\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+5)}{\Pi(n-m+2)\,(2\nu+1)(2\nu+3)\,\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n+m+2\nu+1)}{\Pi(n+m-2)\,(2\nu+1)(2\nu+3)\,\Pi(2\nu-1)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{2^{m-1}\,\Pi(m+\nu-2)\,\Pi(n+2\nu-2)}{\Pi(n-2m+1)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2m+2\nu-2)}, & \frac{2^{m-1}\,\Pi(m+\nu-2)\,\Pi(n+2\nu)}{\Pi(n-2m+3)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2m+2\nu-2)}, & \frac{2^{m-1}\,\Pi(m+\nu-2)\,\Pi(n+2\nu+3)}{\Pi(n-2m+5)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2m+2\nu-2)}, & \ldots, & \frac{2^{m-1}\,\Pi(m+\nu-2)\,\Pi(n+2m+2\nu-2)}{\Pi(n+1)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2m+2\nu-2)}
\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^m\sqrt{\frac{\alpha\pi}{2}}\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{2\nu-1}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\Pi(\nu-1)}\right]^2\frac{\Pi(n-m)\,\Pi(m+\nu-1)\,\Pi(n+m+\nu-1)}{i^{n-m}\,\Pi(n+m)\,\Pi(n+\nu-1)\,\Pi(\nu-1)\sin^{\frac{2\nu-1}{2}}\psi}\left|\frac{2^{\lambda}\,\Pi(\lambda+\nu-1)\,\Pi(n-m+2\nu+2\mu+\lambda-1)}{\Pi(2\lambda+2\nu-1)\,\Pi(n-m+2\mu-\lambda)\,\Pi(\nu-1)}\right|.$$

$$\cdot\int_0^{\pi} e^{\alpha i\cos\varphi\cos\psi}\, J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\alpha\sin\varphi\sin\psi)\, C_{n-m}^{\nu+m}(\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{\frac{2\nu+2m+1}{2}}\, d\varphi$$

$$(\lambda, \mu=0,1,2,\ldots,m-1)$$

Berücksichtigt man die bekannte Stirling'sche Formel

$$\Pi(\alpha+n)=\sqrt{2\pi}\, n^{\alpha+n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}(1+\varepsilon_n) \qquad (\lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0)$$

und die von mir aufgestellten Relationen

$$\lim_{n=\infty} \frac{2^n}{n^\nu} C_n^{\nu,\rho}\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right) = i^\rho \sqrt{\pi}\,(2\vartheta)^{-\frac{2\nu-1}{2}} J^{\rho+\frac{2\nu-1}{2}}(\vartheta) \quad {}^{1}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n n^\nu} D_n^{\nu,\rho}\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right) = (-i)^{2\nu-1} \frac{\Pi(\rho)\,\Pi(2\rho+2\nu-2)\,\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)}{2^{2\rho-1}\,\Pi(\nu+\rho-1)\,\Pi(\rho+2\nu-2)\,\Pi\left(\rho+\frac{2\nu-3}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-i\vartheta\cos it}\, C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos it)\,\sin^{2\nu-1} it\, dt = A^{\nu,\rho}(\vartheta) \quad {}^{2}$$

wo in dem Integrale auf der rechten Seite der Integrationsweg von 0 bis $-\frac{\pi i}{2}$ auf der Axe des Imaginären und von dort parallel der reellen Axe ins Unendliche läuft, so leitet man aus (15.) und (16.) leicht die neuen Gleichungen ab:

$$\begin{vmatrix}
\frac{\Pi(n-m+2\nu-1)}{\Pi(n-m)} J^{n-m+\nu}(x), & -\frac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m+2)} J^{n-m+\nu+2}(x), & \frac{\Pi(n-m+2\nu+3)}{\Pi(n-m+4)} J^{n-m+\nu+4}(x), & \ldots, & \frac{(-1)^m\Pi(n+m+2\nu-1)}{\Pi(n+m)} J^{n+m+\nu}(x) \\
\frac{\Pi(n-m+2\nu-1)}{\Pi(n-m)\Pi(2\nu-1)} & \frac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m+2)\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+3)}{\Pi(n-m+4)\Pi(2\nu+1)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n+m+2\nu-1)}{\Pi(n+m)\Pi(2\nu-1)} \\
\frac{\Pi(n-m+2\nu)}{\Pi(n-m-1)(2\nu+1)\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+2)}{\Pi(n-m+1)(2\nu+1)\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+4)}{\Pi(n-m+3)(2\nu+1)\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n+m+2\nu)}{\Pi(n+m-1)(2\nu+1)\Pi(2\nu-1)} \\
\frac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m-2)(2\nu+1)(2\nu+3)\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+3)}{\Pi(n-m)(2\nu+1)(2\nu+3)\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+5)}{\Pi(n-m+2)(2\nu+1)(2\nu+3)\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n+m+2\nu+1)}{\Pi(n+m-2)(2\nu+1)(2\nu+3)\Pi(2\nu-1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\Pi(n+2\nu-2)}{\Pi(n-2m+1)\Pi(\nu-1)\Pi(2m+2\nu-2)}, & \frac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\Pi(n+2\nu)}{\Pi(n-2m+3)\Pi(\nu-1)\Pi(2m+2\nu-2)}, & \frac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\Pi(n+2\nu+2)}{\Pi(n-2m+5)\Pi(\nu-1)\Pi(2m+2\nu-2)}, & \ldots, & \frac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\Pi(n+2m+2\nu-1)}{\Pi(n+1)\Pi(\nu-1)\Pi(2m+2\nu-2)}
\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-2)^m\,\Pi(m+\nu-1)\,\Pi(n+m+\nu-1)\,\Pi(2\nu-1)\,\Pi\left(m+\nu-\frac{1}{2}\right)\Pi(m+n+2\nu-1)}{\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+m)\,\Pi(n+\nu-1)\,\Pi(2m+2\nu-1)\,x^m} \cdot \left|\frac{2^\lambda\,\Pi(\lambda+\nu-1)\,\Pi(n-m+2\nu+2\mu+\lambda-1)}{\Pi(2\lambda+2\nu-1)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n-m+2\mu-\lambda)}\right| J^{n+\nu}(x)$$

$$(\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

---

[1] „Das Additionstheorem derjenigen Functionen, welche bei der Entwicklung von e^{axi} nach den Näherungsnennern regulärer Kettenbrüche auftreten.“ Sitzungsberichte der kais. Akad. d. Wissensch., mathem.-naturw. Cl. 85. Bd. II. Abth.

[2] „Über das Additionstheorem der Functionen $Y^m(x)$.“ Sitzungsberichte der kais. Akad. d. Wissensch., mathem.-naturw. Cl. 91. Bd. II. Abth.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\Pi\left(n-m+\nu-\frac{1}{2}\right)\Pi(n-m+2\nu-1)\,\Pi(n-m+\nu-1)\,A^{\nu+\frac{1}{2},\,n-m}(x)}{\Pi(n-m)\,\Pi(2n+2\nu-2m-1)}, & \dfrac{4^2\,\Pi\left(n-m+\nu+\frac{3}{2}\right)\Pi(n-m+2\nu+1)\,\Pi(n-m+\nu+1)\,A^{\nu+\frac{1}{2},n-m+2}(x)}{\Pi(n-m+2)\,\Pi(2n-2m+2\nu+3)}, & \ldots, & \dfrac{4^{2m}\Pi\left(n+m+\nu-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+m+\nu-1)\Pi(n+m+2\nu-1)\,A^{\nu+\frac{1}{2},n+m}(x)}{\Pi(n+m)\,\Pi(2n+2\nu-1)} \\ \dfrac{\Pi(n-m+2\nu-1)}{\Pi(n-m)\,\Pi(2\nu-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m+2)\,\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \dfrac{\Pi(n+m+2\nu-\;)}{\Pi(n+m)\,\Pi(2\nu-1)} \\ \dfrac{\Pi(n-m+2\nu)}{\Pi(n-m-1)\,(2\nu+1)\,\Pi(2\nu-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+2)}{\Pi(n-m+1)\,(2\nu+1)\,\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \dfrac{\Pi(n+m+2\nu)}{\Pi(n+m-1)\,(2\nu+1)\,\Pi(2\nu-1)} \\ \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m-2)\,(2\nu+1)\,(2\nu+3)\,\Pi(2\nu-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+2\nu+3)}{\Pi(n-m)\,(2\nu+1)\,(2\nu+3)\,\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \dfrac{\Pi(n+m+2\nu+1)}{\Pi(n+m-2)\,(2\nu+1)\,(2\nu+3)\,\Pi(2\nu-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\,\Pi(n+2\nu-2)}{\Pi(n-2m+1)\,\Pi(2m+2\nu-2)\,2\Pi(\nu-1)}, & \dfrac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\,\Pi(n+2\nu)}{\Pi(n-2m+3)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2m+2\nu-2)}, & \ldots, & \dfrac{2^{m-1}\Pi(m+\nu-2)\,\Pi(n+2m+2\nu-2)}{\Pi(n+1)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2m+2\nu-2)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\Pi(m+n+2\nu-1)\,\Pi(m+n+\nu-1)\,\Pi\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(n+m)\,\Pi(2n+2\nu-1)} \left|\frac{\Pi(2\lambda+2\nu-1)\,2^{\lambda}\,\Pi(\lambda+\nu-1)\,\Pi(n-m+2\mu-\lambda)}{\Pi(n-m+2\nu+2\mu+\lambda-1)\,\Pi(\nu-1)}\right| A^{\nu+m+\frac{1}{2},\,n-m}(x) \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

Setzt man in der letzten Gleichung $\nu = 1$ und berücksichtigt die von mir a. e. a. O. abgeleitete Relation

$$A^{\tau+\frac{1}{2},\,\rho}(x) = -(-i)^{2\tau+\rho}\,\frac{2^{\tau}}{x^{\tau}\sqrt{\pi}}\,\{Y^{\tau+\rho}(x) + \pi i\,J^{\tau+\rho}(x)\}$$

wo $Y^{\tau+\rho}(x)$ die von Herrn E. Lommel eingeführte Bessel'sche Function zweiter Art ist, so erhält man sofort die bemerkenswerthe Gleichung

$$Y^{n+1}(x) = \frac{2\,(-2)^{m}\,\Pi(n)\,x^{m}}{\Pi(m+n+1)\left|\dfrac{2^{\lambda}\,\Pi(\lambda)\,\Pi(n-m+2\mu+\lambda+1)}{\Pi(2\lambda+1)\,\Pi(n-m+2\mu-\lambda)}\right|}\,.$$

$$\cdot\begin{vmatrix} (n-m+1)\,Y^{n-m+1}(x), & -(n-m+3)\,Y^{n-m+3}(x), & (n-m+5)\,Y^{n-m+5}(x), & \ldots, & (-1)^{m}\,(n+m)\,Y^{n+m}(x) \\ n-m+1, & n-m+3, & n-m+5, & \ldots, & n+m \\ \dfrac{\Pi(n-m+2)}{3\,\Pi(n-m-1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+1)}{3\,\Pi(n-m+1)}, & \dfrac{\Pi(n-m+6)}{3\,\Pi(n-m+3)}, & \ldots, & \dfrac{\Pi(n+m+2)}{3\,\Pi(n+m-1)} \\ \dfrac{\Pi(n-m+3)}{3.5\,\Pi(n-m-2)}, & \dfrac{\Pi(n-m+5)}{3.5\,\Pi(n-m)}, & \dfrac{\Pi(n-m+7)}{3.5\,\Pi(n-m+2)}, & \ldots, & \dfrac{\Pi(n+m+3)}{3.5\,\Pi(n+m-2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{2^{m-1}\,\Pi(m-1)\,\Pi(n)}{\Pi(2m)\,\Pi(n-2m+1)}, & \dfrac{2^{m-1}\,\Pi(m-1)\,\Pi(n+2)}{\Pi(2m)\,\Pi(n-2m+3)}, & \dfrac{2^{m-1}\,\Pi(m-1)\,\Pi(n+4)}{\Pi(2m)\,\Pi(n-2m+5)}, & \ldots, & \dfrac{2^{m-1}\,\Pi(m-1)\,\Pi(n+2m)}{\Pi(2m)\,\Pi(n+1)} \end{vmatrix}$$

$$(\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

Von den aus den allgemeinen Formeln des Paragraphes 1. folgenden Integralen mögen folgende zwei besonders angeführt werden:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\omega(z)\,C_\rho^\mu(z)\,C_k^\nu(z)\,(1-z^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dz}{x-z}=\frac{k}{2\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(-\nu)}\left[\frac{2^{k+\nu}\,\Pi(k+\nu-1)}{\Pi(k)}\right]^2\omega(x)\,C_\rho^\mu(x)\,D_{k+2\nu-2}^{1-\nu}(x)\qquad(k\geqq\tau+\rho)$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\omega(z)\,C_\rho^\mu(z)\,[C_k^\nu(z)\,(1-z^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}]'\,dz}{x-z}=\frac{k}{2\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(-\nu)}\left[\frac{2^{k+\nu}\,\Pi(k+\nu-1)}{\Pi(k)}\right]^2\omega(x)\,C_\rho^\mu(x)\,[D_{k+2\nu-2}^{1-\nu}(x)]'\qquad\left(\nu>\frac{1}{2}\,;\,k\geqq\tau+\rho\right)$$

wo τ der Grad der ganzen Function $\omega(x)$ ist.

Aus (4.) folgt endlich die Relation

$$\left|\begin{array}{ccccc}
\frac{\Pi^2(n-m+\nu-1)\,D_{n-m+2\nu-2}^{1-\nu}(x)}{\Pi(n-m)\,\Pi(n-m-1)}, & \frac{2^4\,\Pi^2(n-m+\nu+1)\,D_{n-m+2\nu}^{1-\nu}(x)}{\Pi(n-m+2)\,\Pi(n-m+1)}, & \frac{2^8\,\Pi^2(n-m+\nu+3)\,D_{n-m+2\nu+2}^{1-\nu}(x)}{\Pi(n-m+4)\,\Pi(n-m+3)}, & \ldots, & \frac{2^{4m}\,\Pi^2(n+m+\nu-1)\,D_{n+m+2\nu-2}^{1-\nu}(x)}{\Pi(n+m)\,\Pi(n+m-1)} \\
\frac{\Pi(n-m+2\nu-1)}{\Pi(n-m)\,\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m+2)\,\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+3)}{\Pi(n-m+4)\,\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n+m+2\nu-1)}{\Pi(n+m)(2\nu-1)} \\
\frac{\Pi(n-m+2\nu)}{\Pi(n-m-1)\,(2\nu+1)\,\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+2)}{\Pi(n-m+1)(2\nu+1)\,\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+4)}{\Pi(n-m+3)(2\nu+1)\,\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n+m+2\nu)}{\Pi(n+m-1)(2\nu+1)\,\Pi(2\nu-1)} \\
\frac{\Pi(n-m+2\nu+1)}{\Pi(n-m-2)(2\nu+1)(2\nu+3)\,\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+3)}{\Pi(n-m)(2\nu+1)(2\nu+3)\,\Pi(2\nu-1)}, & \frac{\Pi(n-m+2\nu+5)}{\Pi(n-m+2)(2\nu+1)(2\nu+3)\,\Pi(2\nu-1)}, & \ldots, & \frac{\Pi(n+m+2\nu+1)}{\Pi(n+m-2)(2\nu+1)(2\nu+3)\,\Pi(2\nu-1)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{2^{m-1}\,\Pi(m+\nu-2)\,\Pi(n+2\nu-2)}{\Pi(n-2m+1)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2m+2\nu-2)}, & \frac{2^{m-1}\,\Pi(m+\nu-2)\,\Pi(n+2\nu)}{\Pi(n-2m+3)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2m+2\nu-2)}, & \frac{2^{m-1}\,\Pi(m+\nu-2)\,\Pi(n+2\nu+2)}{\Pi(n-2m+5)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2m+2\nu-2)}, & \ldots, & \frac{2^{m-1}\,\Pi(m+\nu-2)\,\Pi(n+2m+2\nu-2)}{\Pi(n+1)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2m+2\nu-2)}
\end{array}\right| =$$

$$=\frac{2^{2m}\,\Pi(n+\nu-1)\,\Pi(n-m+\nu-1)}{\Pi(n+m-1)\,\Pi(n-m)}\left|\frac{2^\lambda\,\Pi(\lambda+\nu-1)\,\Pi(n-m+2\mu+2\nu+\lambda-1)}{\Pi(2\lambda+2\nu-1)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n-m+2\mu-\lambda)}\right|D_{n+m+2\nu-2}^{1-\nu-m}(x)\,.$$

$$(\lambda,\mu=1,2,3,\ldots,m)$$