ÜBER

ZWEI LANGPERIODISCHE STÖRUNGSGLIEDER DES MONDES

VERURSACHT

DURCH DIE ANZIEHUNG DES PLANETEN VENUS

VON

DR. E. FREIHERR V. HAERDTL,

PROFESSOR AN DER K. K. UNIVERSITÄT IN INNSBRUCK.

VORGELEGT IN DER SITZUNG VOM 5. MAI 1892.

Es dürfte hier wohl ein Hinweis auf das »Bulletin astronomique«, tome VIII, Nov. 1891 genügen, um dem Leser den schönen Aufsatz Professor Tisserand's »Note sur l'état actuel de la théorie de la Lune« sofort in Erinnerung zu bringen. In dieser interessanten und anregenden Note versucht bekanntlich Tisserand, wie auch früher Newcomb, die neueren Beobachtungen des Mondes mit Zugrundelegung des aus der Theorie gefolgerten Werthes für die Säcularacceleration darzustellen und gelangt, wie die übrig bleibenden Abweichungen zeigen, auch zu einem ganz befriedigenden Resultate. Allerdings wurde das Ziel, die befriedigende Darstellung der Mondbeobachtungen vom Jahre 1620 bis 1888, nur mit Zuhilfenahme eines empyrischen Störungsgliedes von langer Periode erreicht. Derjenige Punkt, den ich aber hier noch besonders hervorheben möchte, betrifft die folgende Bemerkung, welche von Tisserand zur Schlussdarstellung gemacht wurde, nämlich: »Toutefois, il subsiste des indices d'une autre inégalité, à période moindre et ayant un coefficient de $2''$ à $3''$«, denn diese Bemerkung gab mir die Anregung zu der folgenden Untersuchung.

Es kann nicht geleugnet werden, dass mit Rücksicht auf den heutigen Stand der Mondtheorie unser Streben in erster Linie darauf zu richten wäre, die Ursache aufzudecken, aus welcher die empirische Ungleichheit langer Periode, welche die Beobaehtungen zu erfordern scheinen, stamme, doch schien es mir trotzdem nicht ohne Interesse, mich auch mit den Ungleichheiten kleinerer, rund 50jähriger Periode, wenngleich dieselben nur einen Coëfficienten von einigen Secunden haben können, zu befassen und nachzusuchen, ob sich der Grund nicht aufdecken liesse. In erster Linie wird man hiebei wohl an die störende Einwirkung der Planeten zu denken haben. Aber der Combinationen, die man mit der mittleren Länge des Mondes, der Erde und eines Planeten, gleichwie mit den Perihellängen und den Knoten machen kann, so dass der Coëfficient der Zeit im Schlussargument klein wird, gibt es sehr viele. Unter den mannigfachen Werthen, auf welche ich bei diesem Nachsuchen gekommen bin, haben vor allem zwei Argumente — beide durch die störende Einwirkung des Planeten Venus hervorgebracht — meine Aufmerksamkeit erregt, da die entsprechenden Störungsglieder von verhältnissmässig niederer Ordnung sind. Wohl gibt es eine Ungleichheit auch von Venus stammend, mit einer Periode von rund 87 Jahren, nämlich: $2l+45l'-44l''$, deren Ordnung noch niedriger ist, wie jene der hier behandelten Ungleichheiten, doch zeigte mir die Rechnung, dass deren Coëfficient verschwindet, was auch wegen der Grösse der Coëfficienten von l' und l'' von vorneherein sehr wahrscheinlich war. Endlich sei hier noch der Argumente: $\varpi-5l'+3l''$ und: $2h-8l'+5l''$ Erwähnung gethan, denen Perioden von rund 96 und 50 Jahren entsprechen. Da diese Argumente die mittlere Anomalie des Mondes nicht enthalten, erhalten sie bei der Integration wesentlich kleinere Factoren als die hier behandelten Ungleichheiten und dürften daher nicht sehr merkbar werden, wenngleich sie von niedriger Ordnung sind. Ich verschiebe die Berechnung dieser letzerwähnten Ungleichheiten, gleichwie jene der folgenden, die mir auch nicht ohne Interesse erscheint: $2\varpi+l+19l'-20l''$ (Periode rund 35 Jahre) auf eine spätere Abhandlung, doch will ich hier noch bemerken, dass mich die Nachforschung nach kritischen Argumenten kürzerer Periode auch für die übrigen Planeten zu sehr beachtenswerthen Combinationen geführt hat.

Wir wollen uns zunächst mit der ersten von jenen zwei Venus-Ungleichheiten beschäftigen, deren ich früher erwähnte. Diese Ungleichheit von rund 55jähriger Periode hat zum Argument: $\varpi+l+24l'-23l''$.

l, l', l'' bezeichnen beziehungsweise die mittleren Anomalien des Mondes, der Erde und der Venus, ϖ die Länge des Mondperigäums.

Begnügt man sich mit einer ersten Näherung, so kann man im Allgemeinen die Berechnung der Mondungleichheiten so bewerkstelligen, dass man hiebei die Elemente der Mondbahn als Constante ansieht. Das ist aber nicht immer erlaubt, denn unter Umständen erhält man bei diesem Verfahren nur einen Theil des Hauptgliedes des Coëfficienten des Störungsgliedes. Wir haben daher hierauf Rücksicht zu nehmen. In der »Théorie du mouvement de la Lune« geht Delaunay von dem folgenden Ausdrucke aus, und zwar gilt derselbe für jenen Theil der Störungsfunction, welche zur Berechnung der Störungen des Mondes durch die Sonne dient:

$$R=\frac{\mu}{2a}-m'\frac{(xx'+yy'+zz')}{r'^3}+\frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}.$$

x, y, z bezeichnen die Mondcoordinaten bezogen auf ein rechtwinkeliges Axensystem, dessen Ursprung im Erdmittelpunkt liegt, und dessen Axen parallel zu einem fixen Axensystem gedacht sind; x', y', z' sind die Sonnencoordinaten in Bezug auf dasselbe System; μ ist die Summe der Massen von Erde und Mond, m' die Sonnenmasse, r' die Entfernung von Sonne—Erde, endlich a die halbe grosse Axe der elliptischen Mondbahn. Bezeichnet man mit r die Distanz Mond—Erde, so hat man:

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad x'^2+y'^2+z'^2=r'^2;$$

ferner

$$\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}=\frac{1}{r'}\left[1-2\frac{r}{r'}\left(\frac{x}{r}\frac{x'}{r'}+\frac{y}{r}\frac{y'}{r'}+\frac{z}{r}\frac{z'}{r'}\right)+\frac{r^2}{r'^2}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

In Anbetracht der Kleinheit des Verhältnisses: $\frac{r}{r'}$ kann man die rechte Seite in eine sehr convergente Reihe entwickeln. Für den gegenwärtigen Zweck reicht man nun völlig mit den Gliedern, welche als Factor $\left(\frac{r}{r'}\right)$ zur dritten Potenz enthalten, aus. Brechen wir also die Entwicklung bei den höheren Potenzen ab und vernachlässigen wir gleich das Glied $\frac{m'}{r'}$, das in den partiellen Ableitungen von R, nach den Mondelementen genommen, verschwindet, denn es ist ja unabhängig von letzteren, so resultirt für R:

$$\frac{\mu}{2a}+m'\frac{r^2}{r'^3}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{x}{r}\frac{x'}{r'}+\frac{y}{r}\frac{y'}{r'}+\frac{z}{r}\frac{z'}{r'}\right)^2-\frac{1}{2}\right]+m'\frac{r^3}{r'^4}\left[\frac{5}{2}\left(\frac{x}{r}\frac{x'}{r'}+\frac{y}{r}\frac{y'}{r'}+\frac{z}{r}\frac{z'}{r'}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{xx'}{rr'}+\frac{yy'}{rr'}+\frac{zz'}{rr'}\right)\right]\ldots\mathrm{I}$$

Dieser Ausdruck gibt uns also die Störungsfunction, welche man der Berechnung der Störungen des Mondes durch die Sonne zu Grunde zu legen hat.

Will man aber nicht nur der Einwirkung der Sonne Rechnung tragen, sondern auch jener des Planeten Venus, so hat man zu dem vorhergehenden Ausdruck von R noch einen zweiten Theil zu fügen, der ganz analog dem obigen ist, nur hat man statt der Grössen m', x', y', z' und r' die für Venus geltenden entsprechenden Grössen zu substituiren.

Bezeichnet man mit m'' die Venusmasse, mit x'', y'', z'' deren Coordinaten bezogen auf ein Axensystem, dessen Ursprung im Sonnenmittelpunkt liegt, und deren Axen parallel laufen mit denjenigen, die wir schon früher verwendeten, aber in der Erde ihren Anfangspunkt hatten, nehmen wir ferner die Richtung der positiven Axen des neuen Systems entgegengesetzt an, wie jene im ersten System, so sind die Coordinaten der Venus, bezogen auf das durch den Erdmittelpunkt gehende Coordinatensystem, dargestellt durch:

$$x'-x'', \qquad y'-y'', \qquad z'-z''.$$

Bezeichnen wir endlich mit r'' die Distanz Venus—Sonne, mit D die Distanz Venus—Erde, ferner mit R_1 den Theil der Störungsfunction, der für Venus Geltung hat, so hat man:

$$R_1 = m''\frac{r^2}{D^3}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{x}{r}\cdot\frac{x'-x''}{D}+\frac{y}{r}\cdot\frac{y'-y''}{D}+\frac{z}{r}\cdot\frac{z'-z''}{D}\right)^2-\frac{1}{2}\right]$$
$$+m''\frac{r^3}{D^4}\left[\frac{5}{2}\left(\frac{x}{r}\cdot\frac{x'-x''}{D}+\frac{y}{r}\cdot\frac{y'-y''}{D}+\frac{z}{r}\cdot\frac{z'-z''}{D}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{x}{r}\cdot\frac{x'-x''}{D}+\frac{y}{r}\cdot\frac{y'-y''}{D}+\frac{z}{r}\cdot\frac{z'-z''}{D}\right)\right]. \qquad \ldots \mathrm{II}$$

Dieser Ausdruck ist noch einer Vereinfachung fähig. Wir nehmen an, dass die xy-Ebene mit der Ebene der Ekliptik zusammenfalle. Es ist dann $z'=0$. Unter dieser Annahme vernachlässigt man die Schwankungen der Eklipticalebene im Raume. Man kann aber weiter mit Rücksichtnahme auf den Grad der Genauigkeit, den wir hier nur zu erreichen streben, in der Entwicklung des Ausdruckes II alle Glieder mit zz'', z^3, z''^3 vernachlässigen, denn diese Glieder können nur Ungleichheiten liefern, welche von der Länge des Mondknotens abhängen; ferner jene Glieder, die $z^2 z''^2$ als Factor enthalten, da diese wieder nur gleichzeitig als Factor das Quadrat der Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik und das Quadrat der Neigung der Venusbahn gegen dieselbe Ebene erhalten. Es fallen demnach alle Glieder in II, die z und z'' enthalten, weg, und es bleibt nur:

$$R_1 = m''\frac{r^2}{D^3}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{x}{r}\,\frac{x'-x''}{D}+\frac{y}{r}\,\frac{y'-y''}{D}\right)^2-\frac{1}{2}\right]$$
$$+m''\frac{r^3}{D^4}\left[\frac{5}{2}\left(\frac{x}{r}\,\frac{x'-x''}{D}+\frac{y}{r}\,\frac{y'-y''}{D}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{x}{r}\,\frac{x'-x'}{D}+\frac{y}{r}\,\frac{y'-y''}{D}\right)\right]. \qquad \ldots (\mathrm{II})$$

Aus demselben Grunde, aus welchem wir die Glieder, welche z enthielten, in II vernachlässigten, können wir auch die Neigung der Mondbahn bei der Berechnung der Mondcoordinaten ausser Acht lassen. Bezeichnet man demnach mit V die geocentrische Länge des Mondes, so hat man einfach:

$$x = r\cos V \qquad y = r\sin V.$$

Bezeichnen wir nun weiter mit V' die heliocentrische Erdlänge, mit h'' die heliocentrische Länge des aufsteigenden Knotens der Venusbahn, mit ν'' den heliocentrischen Winkelabstand dieses Planeten von seinem Knoten, endlich mit γ'' den Sinus der halben Neigung der Venusbahn gegen die Ekliptik, so hat man:

$$x' = r'\cos V' \qquad y' = r'\sin V';$$

ferner

$$x'' = r''\cos(\nu''+h'') + 2\gamma''^2 r''\sin\nu''\sin h''$$
$$y'' = r''\sin(\nu''+h'') - 2\gamma''^2 r''\sin\nu''\cos h''.$$

Ersetzt man nun im Ausdruck von D:

$$D = \sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+z''^2},$$

die Coordinaten durch die eben gegebenen Werthe, so resultirt:

$$D = \sqrt{r'^2+r''^2-2r'r''\cos(V'-\nu''-h'')+4\gamma''^2 r'r''\sin\nu''\sin(V'-h'')}. \qquad \ldots \mathrm{III}$$

Setzt man nun.

$$\Delta = \sqrt{1+\frac{r''^2}{r'^2}-2\frac{r''}{r'}\cos(V'-\nu''-h'')} \qquad \ldots \mathrm{IV}$$

und vernachlässigt gleich alle Potenzen von γ'' höher als die zweite, so wird:

$$D = r'\Delta\left[1+2\frac{\gamma''^2}{\Delta^2}\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(V'-h'')\right].$$

Der Ausdruck von R_1 geht hiemit über in:

$$\begin{aligned}
R_1 = &+m''\frac{r^2}{r'^3}\left\{-\frac{1}{2\Delta^3}+\frac{3}{\Delta^5}\gamma''^2\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(V'-h'')\right\}\\
&+m''\frac{r^2}{r'^3}\frac{3}{2\Delta^5}\left\{\cos(V-V')-\frac{r''}{r'}\cos(V-\nu''-h'')+2\gamma''^2\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(V-h'')\right\}^2\\
&-m''\frac{r^2}{r'^3}\frac{15}{\Delta^7}\gamma''^2\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(V'-h'')\left\{\cos(V-V')-\frac{r''}{r'}\cos(V-\nu''-h'')\right\}^2\\
&+m''\frac{r^3}{r'^4}\frac{5}{2\Delta^7}\left\{\cos(V-V')-\frac{r''}{r'}\cos(V-\nu''-h'')+2\gamma''^2\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(V-h'')\right\}^3 \qquad \ldots \mathrm{V}\\
&-m''\frac{r^3}{r'^4}\frac{35}{\Delta^9}\gamma''^2\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(V'-h'')\left\{\cos(V-V')-\frac{r''}{r'}\cos(V-\nu''-h'')\right\}^3\\
&-m''\frac{r^3}{r'^4}\frac{3}{2\Delta^5}\left\{\cos(V-V')-\frac{r''}{r'}\cos(V-\nu''-h'')+2\gamma''^2\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(V-h'')\right\}\\
&+m''\frac{r^3}{r'^4}\frac{15}{\Delta^7}\gamma''^2\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(V-h'')\left\{\cos(V-V')-\frac{r''}{r'}\cos(V-\nu''-h'')\right\}.
\end{aligned}$$

Man hat aber:

$$\left[\cos(V-V')-\frac{r''}{r'}\cos(V-\nu''-h'')\right]^2 = \frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{2}\cos(2V-2V')-\frac{r''}{r'}\cos(2V-V'-\nu''-h'')+ \\ +\frac{1}{2}\frac{r''^2}{r'^2}\cos(2V-2\nu''-2h'')$$

ferner:

$$\left[\cos(V-V')-\frac{r''}{r'}\cos(V-\nu''-h'')\right]^3 = \frac{3}{4}\Delta^2\left[\cos(V-V')-\frac{r''}{r'}\cos(V-\nu''-h'')\right]-\frac{1}{4}\frac{r''^3}{r'^3}\cos(3V-3\nu''-3h'')+ \\ +\frac{3}{4}\frac{r''^2}{r'^2}\cos(3V-V'-2\nu''-2h'')-\frac{3}{4}\frac{r''}{r'}\cos(3V-2V'-\nu''-h'')+\frac{1}{4}\cos(3V-3V').$$

Für R_1 ergibt sich demnach die Schlussentwicklung in folgender Form:

$$\begin{aligned}
R_1 = m''\frac{r^2}{r'^3}\Bigg\{&\frac{1}{4\Delta^3}\\
&+\frac{1}{\Delta^5}\Bigg[\frac{3}{4}\cos(2V-2V')-\frac{3}{2}\frac{r''}{r'}\cos(2V-V'-\nu''-h'')+\frac{3}{4}\frac{r''^2}{r'^2}\cos(2V-2\nu''-2h'')\\
&+3\gamma''^2\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(2V-V'-h'')-\frac{3}{2}\gamma''^2\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(V'-h'')-3\gamma''^2\frac{r''^2}{r'^2}\sin^2\nu''\\
&-3\gamma''^2\frac{r''^2}{r'^2}\sin\nu''\sin(2V-\nu''-2h'')\Bigg]\\
&+\frac{1}{\Delta^7}\Bigg[-\frac{15}{2}\gamma''^2\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(V'-h'')\cos(2V-2V')+15\gamma''^2\frac{r''^2}{r'^2}\sin\nu''\sin(V'-h'')\cos(2V-V'-\nu''-h'')\\
&-\frac{15}{2}\gamma''^2\frac{r''^3}{r'^3}\sin\nu''\sin(V'-h'')\cos(2V-2\nu''-2h'')\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$+m''\frac{r^3}{r'^4}\Bigg\{\frac{1}{\Delta^5}\Big[+\frac{3}{8}\cos(V-V')-\frac{3}{8}\frac{r''}{r'}\cos(V-\nu''-h'')+\frac{9}{2}\gamma''^2\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(V-h'')\Big]$$

$$+\frac{1}{\Delta^7}\Big[+\frac{5}{8}\cos(3V-3V')-\frac{15}{8}\frac{r''}{r'}\cos(3V-2V'-\nu''-h'')+\frac{15}{8}\frac{r''^2}{r'^2}\cos(3V-V'-2\nu''-2h'')-$$

$$-\frac{5}{8}\frac{r''^3}{r'^3}\cos(3V-3\nu''-3h'')$$

$$-\frac{45}{4}\gamma''^2\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(V'-h'')\cos(V-V')$$

$$+\frac{45}{4}\gamma'^2\frac{r''^2}{r'^2}\sin\nu''\sin(V-h'')\cos(V-\nu''-h'')$$

$$-\frac{15}{4}\gamma''^2\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(V-2V'+h'')$$

$$+\frac{15}{2}\gamma''^2\frac{r''^2}{r'^2}\sin\nu''\sin(V-V'-\nu'')$$

$$-\frac{15}{4}\gamma''^2\frac{r''^3}{r'^3}\sin\nu''\sin(V-2\nu''-h'')$$

$$+\frac{15}{4}\gamma''^2\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(3V-2V'-h'')$$

$$-\frac{15}{2}\gamma''^2\frac{r''^2}{r'^2}\sin\nu''\sin(3V-V'-\nu''-2h') \qquad \ldots \mathrm{VI}$$

$$+\frac{15}{4}\gamma''^2\frac{r''^3}{r'^3}\sin\nu'\sin(3V-2\nu''-3h'')\Big]$$

$$+\frac{1}{\Delta^9}\Big[-\frac{35}{4}\gamma''^2\frac{r''}{r'}\sin\nu''\sin(V'-h')\cos(3V-3V')$$

$$+\frac{105}{4}\gamma''^2\frac{r''^2}{r'^2}\sin\nu''\sin(V'-h'')\cos(3V-2V'-\nu''-h'')$$

$$-\frac{105}{4}\gamma''^2\frac{r''^3}{r'^3}\sin\nu''\sin(V'-h'')\cos(3V-V'-2\nu'-2h'')$$

$$+\frac{35}{4}\gamma''^2\frac{r''^4}{r'^4}\sin\nu''\sin(V'-h')\cos(3V-3\nu'-3h'')\Big]\Bigg\}.$$

In diesem Ausdruck von R_1 haben wir nun r, r', r'', V, V' und ν'' durch jene Werthe zu substituiren, welche die elliptische Bewegung ergibt, wodurch in R_1 an Stelle dieser Werthe die elliptischen Elemente auftreten werden. Beschränken wir uns aber auf die Mitnahme der Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die Excentricität, was für den vorliegenden Zweck ausreicht, und vernachlässigen wir in V die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik, so gilt:

$$\frac{r}{a}=1+\frac{1}{2}e^2-(e-\ldots)\cos l-\left(\frac{1}{2}e^2-\ldots\right)\cos 2l-$$

$$V=\overline{\omega}+l+(2e\ldots)\sin l+\left(\frac{5}{4}e^2-\ldots\right)\sin 2l+\ldots$$

Durch Anfügen eines oder beziehungsweise zweier Accente an die Buchstaben a, e, l (die mittlere Anomalie) $\overline{\omega}$ (die geocentrische Perihellänge des Mondes) geben uns sofort die obigen Ausdrücke auch die entsprechenden Werthe von r', V', r'' und $\nu''+h''$. In dem Ausdruck für: $\nu''+h''$ bezeichnet aber dann der Buchstabe $\overline{\omega}''$, die Knotenlänge h'' der Venus vermehrt um den heliocentrischen Winkelabstand des Knotens vom Perihel dieses Planeten.

Alle übrigen Buchstaben mit Accent behalten aber dieselbe Bedeutung wie die entsprechenden ohne Accent.

Um das Störungsglied, welches $\varpi + l + 24l' - 23l''$ zum Argument hat, berechnen zu können, haben wir R_1 in eine Reihe nach Cosinussen der Vielfachen der Winkel l, l', l'' zu entwickeln, und in dieser Entwicklung jene Glieder zu nehmen, die das Argument enthalten, dessen wir bedürfen.

Sofern man die Elemente a, e der Mondbahn als Constante ansieht, sind die einzigen Glieder von R_1, welche einen Beitrag zur Bildung des Störungsgliedes mit dem Argument: $\varpi + l + 24l' - 23l''$ liefern können, diejenigen, deren Argumente ein einziges Mal den Winkel V enthalten. Unter dieser Annahme können wir also R_1, auf die wenigen Glieder reduciren, die nur einmal den Winkel V enthalten. Sieht man vorderhand auch von allen Gliedern ab, die γ'' als Factor enthalten, und bezeichnet man mit R' jenen Werth, welchen R_1 unter dieser Beschränkung annimmt, so hat man:

$$R' = \frac{3}{8}\frac{m''}{\Delta^5}\frac{r^3}{r'^4}\left[\cos(V - V') - \frac{r''}{r'}\cos(V - \nu'' - h'')\right] \qquad \ldots \text{VII}$$

Suchen wir aber ferner von R_1 die Glieder aus, welche wohl auch von γ'' frei sind, aber den Winkel $2V$ enthalten, und bezeichnen wir mit R'' den entsprechenden Theil von R_1, so findet sich:

$$R'' = m''\frac{r^2}{r'^3}\frac{1}{\Delta^5}\left[\frac{3}{4}\cos(2V - 2V') - \frac{3}{2}\frac{r''}{r'}\cos(2V - V' - \nu'' - h'') + \frac{3}{4}\frac{r''^2}{r'^2}\cos(2V - 2\nu'' - 2h'')\right] \qquad \ldots \text{VIII}$$

Die Methode, welche Delaunay in seiner Mondtheorie zur Anwendung bringt, besteht darin, dass er eine grosse Reihe von Operationen ausführt, wovon jede einzelne jene Störungen der Mondelemente liefert, wie sie von einem einzelnen Glied der Störungsfunction bedingt werden, so dass man schliesslich, nachdem die ganze Reihe der verschiedenen Operationen ausgeführt erscheint, zu allen Störungsgliedern in den Mondelementen, die in der Sonneneinwirkung ihren Grund haben, gelangt ist. Während dieser Operationen, und zwar jedesmal vor Beginn einer neuen, hat man aber einen Tausch der Variablen auszuführen, wodurch das letztbetrachtete periodische Glied der Strömungsfunction zum Verschwinden gebracht wird und gibt Delaunay die hiezu nöthigen Formeln. Man überzeugt sich aber leicht davon, dass, wenn man den Tausch der Variablen unmittelbar an den Ausdrücken von r und V vollzieht, hiedurch in r und V neue periodische Glieder, welche den einzelnen berücksichtigten periodischen Gliedern in der Störungsfunction R entsprechen, entstehen. So resultirt z. B. aus der Berücksichtigung des Gliedes in R, deren Argument $\varpi - \varpi'$ ist, in dem Ausdruck für: $r^2\cos(2\nu + 2h + \alpha)$ unter anderen Gliedern auch das folgende neue periodische Glied:[1])

$$-\frac{15}{4}e'\frac{a^3}{a'}\cos(\varpi + l + \varpi' + \alpha). \qquad \ldots \text{IX}$$

Vernachlässigt man aber die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik, so hat man: $V = \nu + h$. Das vorstehende Glied wird also auch in dem Ausdruck von $r^2\cos(2V + \alpha)$ vorkommen müssen, und kann daher auch bei der Bildung unseres Störungsgliedes mitwirken. Man sieht aber weiter, dass das so erhaltene Glied, der Ordnung nach nicht minderwerthig ist wie jene, welche aus dem Ausdruck VII von R' entstehen. Um also den vollständigen Betrag des Hauptcoëfficienten unserer Ungleichheit zu erhalten, erscheint es nicht hinreichend, sich nur auf die Berücksichtigung von R' zu beschränken, sondern man wird auch noch R'' mitnehmen müssen und bei dessen Entwicklung der Hauptvariation der Mondelemente Rechnung zu tragen haben.

Die Ermittlung des Werthes der Ungleichheit mit dem Argument: $\varpi + l + 24l' - 23l''$ ist, sofern man sämmtlichen einschlägigen Variationen der Elemente der Mondbahn Rechnung tragen will, keine geringe Arbeit. Aus diesem Grunde schien es mir wünschenswerth, vor Eingehen in diese Arbeit mir vorerst darüber

---

[1]) Vergleiche hiezu: „Sur une inégalité lunaire à longue période etc.“ par Mr. Gogou, Annales de l'observatoire de Paris, t. XVII, Introduction.

Gewissheit zu verschaffen, ob dieses Störungsglied nicht etwa ganz verschwinde, oder wenigstens so schwach werde, dass es nicht mehr lohnend erscheint, es überhaupt strenge zu berechnen.

Wir erwähnten schon, dass es nicht zulässig erscheint, wenn man sich auch nur mit einer ersten Näherung begnügen will, in R'' die Variationen der Mondelemente ganz zu vernachlässigen. Mit Rücksicht auf die Genauigkeit, die wir aber hier erreichen wollen, genügt es, einzig auf das Hauptglied (IX) bei der Entwicklung von R'' Rücksicht zu nehmen, was darauf zurückkommt, dass man

$$r^2 \cos(2V+\alpha) \text{ durch } -\frac{15}{4} e' \frac{a^3}{a'} \cos(\varpi + l + \varpi' + \alpha)$$

ersetzt, während wir bei der Entwicklung von R' von allen Variationen absehen können. Wir werden zwar später sehen, dass trotzdem aus R'' kein Beitrag zum Coëfficienten unseres Störungsgliedes resultirt, doch liegt der Grund hiefür in der Combination mit der Entwicklung von Δ^{-5}. Wir werden darauf später zurückkommen.

Das Argument: $\varpi + l + 24l' - 23l''$ unserer Ungleichheit fällt unter die allgemeine Form:

$$\varpi + l - \varpi' - l' + i(\varpi' + l' - \varpi'' - l'') + kl' + k'l'' + k''(\varpi'' + l'' - h'').$$

Um das Argument: $\varpi + l + 24l' - 23l''$ hieraus zu erhalten, hat man in der allgemeinen Form, wenn man sich auf die Glieder niedrigster Ordnung in Bezug auf Excentricität und Neigung beschränkt, den Buchstaben k, k' und k'', solche Werthe zu ertheilen, dass ihre Summe gleich 2 wird und i solche correspondirende Werthe, dass jederzeit die Relation: $i + k = 25$ erfüllt erscheint. Ferner ist es ja bekannt, dass unsere Ungleichheit als Factor: $e'^k e''^{k'} \gamma''^{k''}$ haben muss, wo i, k, k' und k'' durchwegs ganze positive Zahlen bedeuten. Wie man aber aus VI ersieht, kann endlich γ'' in R nur zu einer geraden Potenz erhoben vorkommen. Die einzigen möglichen Combinationen der i, k, k' und k'' sind unter obiger Beschränkung daher:

$$\begin{array}{llll} i = 25 & k = 0 & k' = 2 & k'' = 0 \\ i = 24 & k = 1 & k' = 1 & k'' = 0 \\ i = 23 & k = 2 & k' = 0 & k'' = 0 \\ i = 25 & k = 0 & k' = 0 & k'' = 2. \end{array}$$

Lassen wir also einstweilen die Glieder, die γ'' enthalten, bei Seite, so ergibt sich für die Schlussform von R' der Ausdruck:

$$\begin{aligned} R' = m'' \frac{a^3}{a'^4} \Big\{ & A_1 e''^2 \cos(\varpi + l + 24l' - 23l'' + 24\varpi' - 25\varpi'') \\ & + A_2 e' e'' \cos(\varpi + l + 24l' - 23l'' + 23\varpi' - 24\varpi'') \qquad \ldots X \\ & + A_3 e'^2 \cos(\varpi + l + 24l' - 23l'' + 22\varpi' - 23\varpi'') \Big\}. \end{aligned}$$

A_1, A_2, A_3 sind Ausdrücke, die nur von $\alpha = \frac{a''}{a'}$, also vom Verhältniss der halben grossen Axen der Venus- und Erdbahn abhängen.

Um die Werthe von A_1, A_2, A_3 zu erhalten, müssen wir den Audruck (VII) von R' entwickeln. Diese Entwicklung lässt sich aber in zwei Theile theilen: der erste, bestehend in der Entwicklung derjenigen Grössen, die Δ^{-s} multipliciren, der zweite, bestehend in der Entwicklung der negativen ungeraden Potenzen von Δ.

Wir bemerkten schon, dass, sofern man sich auf die Glieder niedrigster Ordnung in Bezug auf Excentricität und Neigung beschränkt, das Argument: $\varpi + l + 24l' - 23l''$ unserer Ungleichheit unter die allgemeine Form fällt:

$$\varpi + l - \varpi' - l' + i(\varpi' + l' - \varpi'' - l'') + kl' + k'l'' + k''(\varpi'' + l'' - h'').$$

Da nun aber die Entwicklung von Δ^{-5} die Mondelemente nicht enthält, ist es klar, dass wir bei der Entwicklung jener Grössen, die Δ^{-5} multipliciren, uns auf die Glieder beschränken können, die unter eine der folgenden Formen fallen:

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}+l-\overline{\omega}'-l'+i\,(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')\\
&\overline{\omega}+l-\overline{\omega}'-l'+i\,(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+l'\\
&\overline{\omega}+l-\overline{\omega}'-l'+i\,(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+l''\\
&\overline{\omega}+l-\overline{\omega}'-l'+i\,(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+2l'\\
&\overline{\omega}+l-\overline{\omega}'-l'+i\,(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+2l''\\
&\overline{\omega}+l-\overline{\omega}'-l'+i\,(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+l'+l''
\end{aligned}\qquad\ldots\mathrm{XI}$$

wo i eine ganze positive oder negative Zahl und auch o sein kann. Bei der Entwicklung von Δ^{-5} werden wir hierauf alle jene Glieder mitzunehmen haben, deren Argumente, combinirt mit den vorstehenden, eines der drei Argumente von X werden erzeugen können.

Die Werthe von $r^2\cos(2V+\alpha)$, $r^3\cos(V+\alpha)$ ergeben sich aus den Formeln der elliptischen Bewegung. Vernachlässigt man die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik im Ausdruck von V und beschränkt sich auf die Mitnahme der Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die Excentricität, so hat man:

$$r^2\cos(2V+\alpha)=a^2\Big[(1-\tfrac{5}{2}e^2)\cos(2\overline{\omega}+2l+\alpha)+e\cos(2\overline{\omega}+3l+\alpha)-3e\cos(2\overline{\omega}+l+\alpha)$$
$$+e^2\cos(2\overline{\omega}+4l+\alpha)+\tfrac{5}{2}e^2\cos(2\overline{\omega}+\alpha)\Big]$$

$$r^3\cos(V+\alpha)=a^3\Big[(1+2e^2)\cos(\overline{\omega}+l+\alpha)-\tfrac{1}{2}e\cos(\overline{\omega}+2l+\alpha)-\tfrac{5}{2}e\cos(\overline{\omega}+\alpha)$$
$$+\tfrac{11}{8}e^2\cos(\overline{\omega}-l+\alpha)-\tfrac{3}{8}e^2\cos(\overline{\omega}+3l+\alpha)\Big]$$

wo α einen willkürlichen Winkel bedeutet, dem man, je nachdem, einen entsprechenden Werth wird ertheilen können.

Mit Hilfe der Ausdrücke von r', r'', V' und $v''+h''$ findet man ferner leicht:

$$\frac{1}{r'^5}=\frac{1}{a'^5}\Big[1+5e'^2+5e'\cos l'+10e'^2\cos 2l'\Big]$$

$$\frac{1}{r'^4}\cos(\alpha-V')=\frac{1}{a'^4}\Big[(1+2e'^2)\cos(\alpha-\overline{\omega}'-l')+3e'\cos(\alpha-\overline{\omega}'-2l')+e'\cos(\alpha-\overline{\omega}')$$
$$+\tfrac{53}{8}e'^2\cos(\alpha-\overline{\omega}'-3l')+\tfrac{11}{8}e'^2\cos(\alpha-\overline{\omega}'+l')\Big]$$

$$\frac{1}{r'^3}\cos(\alpha-2V')=\frac{1}{a'^3}\Big[(1-\tfrac{5}{2}e'^2)\cos(\alpha-2\overline{\omega}'-2l')+\tfrac{7}{2}e'\cos(\alpha-2\overline{\omega}'-3l')$$
$$-\tfrac{1}{2}e'\cos(\alpha-2\overline{\omega}'-l')+\tfrac{17}{2}e'^2\cos(\alpha-2\overline{\omega}'-4l')\Big]$$

$$r''\cos(\alpha-v''-h'')=a''\Big[(1-\tfrac{1}{2}e''^2)\cos(\alpha-\overline{\omega}''-l'')+\tfrac{1}{2}e''\cos(\alpha-\overline{\omega}''-2l'')-\tfrac{3}{2}e''\cos(\alpha-\overline{\omega}'')$$
$$+\tfrac{3}{8}e''^2\cos(\alpha-\overline{\omega}''-3l'')+\tfrac{1}{8}e''^2\cos(\alpha-\overline{\omega}''+l'')\Big]$$

$$r''^2\cos(\alpha-2v''-2h'')=a''^2\Big[(1-\tfrac{5}{2}e''^2)\cos(\alpha-2\overline{\omega}''-2l'')+e''\cos(\alpha-2\overline{\omega}''-3l'')-3e''\cos(\alpha-2\overline{\omega}''-l'')$$
$$+e''^2\cos(\alpha-2\overline{\omega}''-4l'')+\tfrac{5}{2}e''^2\cos(\alpha-2\overline{\omega}'')\Big]$$

Es erübrigt uns nur mehr diese Werthe in dem Ausdruck VII von R' einzusetzen, um sofort die Entwicklung derjenigen Grössen, die Δ^{-5} multipliciren, zu erlangen. Mit Beschränkung auf jene Glieder, deren Argumente unter die Form XI fallen und bei Vernachlässigung der Glieder, welche von höherer Ordnung in e, e' und e'' als der zweiten sind, fand sich für R' der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned}R' = +\frac{3}{8}\frac{m''}{\Delta^5}\frac{a^3}{a'^4}\Big\{&(1+2e^2+2e'^2)\cos(\overline{\omega}+l-\overline{\omega}'-l')\\&+e'\cos(\overline{\omega}+l-\overline{\omega}')\\&+\frac{11}{8}e'^2\cos(\overline{\omega}+l-\overline{\omega}'+l')\\&-\alpha\Big[(1+2e^2+5e'^2-\frac{1}{2}e''^2)\cos(\overline{\omega}+l-\overline{\omega}''-l'')\\&-\frac{3}{2}e''\cos(\overline{\omega}+l-\overline{\omega}'')\\&+\frac{5}{2}e'\cos(\overline{\omega}+l+l'-\overline{\omega}''-l'')\\&+\frac{1}{8}e''^2\cos(\overline{\omega}+l-\overline{\omega}''+l'')\\&+5e'^2\cos(\overline{\omega}+l+2l'-\overline{\omega}''-l'')\\&-\frac{15}{4}e'e''\cos(\overline{\omega}+l+l'-\overline{\omega}'')\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

Dieselben Ausdrücke geben ferner für R'', sofern man auf das Glied IX Rücksicht nimmt:

$$\begin{aligned}R'' = +\frac{45}{32}\frac{m''}{\Delta^5}\frac{a^3}{a'^4}\Big\{&e'^2\cos(\overline{\omega}+l-\overline{\omega}'-l')\\&+4e'^2\alpha\cos(\overline{\omega}+l-\overline{\omega}''-l'')\\&-5e'^2\alpha^2\cos(\overline{\omega}+l+\overline{\omega}'+l'-2\overline{\omega}''-2l'')\Big\}.\end{aligned} \quad \ldots\mathrm{XII}$$

Wir haben nur mehr die Entwicklung von Δ^{-5} zu bewerkstelligen. Wir setzen hiezu, wie in der »Mécanique céleste«

$$(1-2\alpha\cos\Theta+\alpha^2)^{-S} = \frac{1}{2}b_S^{(0)} + b_S^{(1)}\cos\Theta + b_S^{(2)}\cos 2\Theta + b_S^{(3)}\cos 3\Theta + \ldots.$$

wo α das Verhältniss: $\frac{a''}{a'}$ bedeutet. Setzt man ferner:

$$\frac{r''}{r'} = \alpha+\beta$$

so hat man:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta^5} = \frac{1}{2}&\left[b_{\frac{5}{2}}^{(0)} + \beta\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(0)}}{d\alpha} + \frac{1}{2}\beta^2\frac{d^2b_{\frac{5}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2}\right]\\&+\left[b_{\frac{5}{2}}^{(1)} + \beta\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(1)}}{d\alpha} + \frac{1}{2}\beta^2\frac{d^2b_{\frac{5}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2}\right]\cos(V'-v''-h'')\\&+\ldots\ldots\ldots\\&+\left[b_{\frac{5}{2}}^{(i)} + \beta\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(i)}}{d\alpha} + \frac{1}{2}\beta^2\frac{d^2b_{\frac{5}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2}\right]\cos i(V'-v''-h'')\\&+\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \quad \ldots\mathrm{XIII}$$

Die Ausdrücke für die elliptische Bewegung geben für β und $\cos i(V'-\nu''-h'')$ die folgenden Werthe.

$$\frac{\beta}{\alpha} = +e'\cos l' - e''\cos l'' + \frac{1}{2}e''^2 - \frac{1}{2}e''^2\cos 2l'' - \frac{1}{2}e'e''\cos(l'+l'') - \frac{1}{2}e'e''\cos(l'-l'') + e'^2\cos 2l'$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = -e'e''\cos(l'+l'') - e'e''\cos(l'-l'') + \frac{1}{2}e'^2 + \frac{1}{2}e''^2 + \frac{1}{2}e'^2\cos 2l' + \frac{1}{2}e''^2\cos 2l''$$

$$\begin{aligned}\cos i(V'-\nu''-h'') = {} & (1-i^2e'^2-i^2e''^2)\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')] \\ & +ie'\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+l'] \\ & -ie''\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+l''] \\ & -ie'\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')-l'] \\ & +ie''\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')-l''] \\ & +\left(\frac{5}{8}ie'^2+\frac{1}{2}i^2e'^2\right)\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+2l'] \\ & -\left(\frac{5}{8}ie''^2-\frac{1}{2}i^2e''^2\right)\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+2l''] \\ & -\left(\frac{5}{8}ie'^2-\frac{1}{2}i^2e'^2\right)\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')-2l'] \\ & +\left(\frac{5}{8}ie''^2+\frac{1}{2}i^2e''^2\right)\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')-2l''] \\ & -i^2e'e''\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+l'+l''] \\ & +i^2e'e''\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')-l'+l''] \\ & +i^2e'e''\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+l'-l''] \\ & -i^2e'e''\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')-l'-l''].\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Werthe ist es nun ein Leichtes die Entwicklung der Grösse

$$\left(b^{(i)}_{\frac{5}{2}} + \beta\frac{d\beta^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha} + \frac{1}{2}\beta^2\frac{d^2\beta^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^2}\right)\cos i(V'-\nu''-h'')$$

herzustellen. Beschränkt man sich auf die Mitnahme jener Glieder die unter die sechs Formen von XI fallen — man hat nur von $\overline{\omega}+l$ abzusehen, das ja hier nicht vorkömmt — so resultirt:

$$\left[b^{(i)}_{\frac{5}{2}} + \beta\frac{db^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha} + \frac{1}{2}\beta^2\frac{d^2\beta^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^2}\right]\cos i(V'-\nu''-h'') =$$

$$= +\left\{(1-i^2e'^2-i^2e''^2)b^{(i)}_{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\alpha e''^2\frac{db^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha} + \left(\frac{1}{4}e'^2+\frac{1}{4}e''^2\right)\alpha^2\frac{d^2b^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^2}\right\}\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')]$$

$$+\left\{+i\,b^{(i)}_{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\alpha\frac{db^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha}\right\}e'\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+l']$$

$$+\left\{-i\,b^{(i)}_{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\alpha\frac{db^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha}\right\}e''\cos[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+l'']$$

$$+\left\{\left(+\frac{5}{8}i+\frac{1}{2}i^2\right)b_{\frac{5}{2}}^{(i)}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(i)}}{d\alpha}+\frac{1}{8}\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{5}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2}\right\}e'^2\cos\left[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+2l'\right]$$

$$+\left\{\left(-\frac{5}{8}i+\frac{1}{2}i^2\right)b_{\frac{5}{2}}^{(i)}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i\right)\alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(i)}}{d\alpha}+\frac{1}{8}\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{5}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2}\right\}e''^2\cos\left[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+2l''\right]$$

$$+\left\{-i^2b_{\frac{5}{2}}^{(i)}+\left(-\frac{1}{4}-i\right)\alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(i)}}{d\alpha}-\frac{1}{4}\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{5}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2}\right\}e'e''\cos\left[i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')+l'+l''\right]$$

Combinirt man diesen Ausdruck mit jenem von Δ^{-5}, so erhält man sofort die Entwicklung der letzteren Grösse. Es erübrigt dann nur mehr diese Entwicklung in den Ausdrücken von R' und R'' selbst einzuführen und die Coëfficienten der brauchbaren Argumente zusammenzufassen.

Für die drei Coëfficienten A_1, A_2 und A_3 derjenigen periodischen Glieder, die unter die drei Formen von X fallen, fand ich so:

$$A_1=+\frac{7125}{128}b_{\frac{5}{2}}^{(25)}+\frac{147}{64}\alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(25)}}{d\alpha}+\frac{3}{128}\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{5}{2}}^{(25)}}{d\alpha^2}$$

$$+\left(-\frac{7419}{128}b_{\frac{5}{2}}^{(24)}-\frac{75}{32}\alpha.\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(24)}}{d\alpha}-\frac{3}{128}\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{5}{2}}^{(24)}}{d\alpha^2}\right)\alpha$$

$$A_2=-\frac{225}{2}b_{\frac{5}{2}}^{(24)}-\frac{297}{64}\alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(24)}}{d\alpha}-\frac{3}{64}\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{5}{2}}^{(24)}}{d\alpha^2}$$

$$+\left(+\frac{7497}{64}b_{\frac{5}{2}}^{(23)}+\frac{303}{64}\alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(23)}}{d\alpha}+\frac{3}{64}\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{5}{2}}^{(23)}}{d\alpha^2}\right)\alpha$$

$$A_3=+\frac{3639}{64}b_{\frac{5}{2}}^{(23)}+\frac{75}{32}\alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(23)}}{d\alpha}+\frac{3}{128}\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{5}{2}}^{(23)}}{d\alpha^2}$$

$$+\left(-\frac{3789}{64}b_{\frac{5}{2}}^{(22)}-\frac{153}{64}\alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(22)}}{d\alpha}-\frac{3}{128}\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{5}{2}}^{(22)}}{d\alpha^2}\right)\alpha.$$

Man sieht nun leicht, dass der Theil R'' der Störungsfunction zu den Werthen A_1, A_2 und A_3 keinen Beitrag hat liefern können. Wie man sich nämlich durch einen Blick auf den Ausdruck für R'' überzeugt, enthalten alle Theile derselben, mit welchen noch Δ^{-5} zu multipliciren ist, schon das Quadrat der Excentricität als Factor. Wir haben demnach dieselben nur mit jenen Gliedern von Δ^{-5} zu combiniren, die in Bezug auf die Excentricitäten von 0-ter Ordnung sind. Aber alle diese Glieder fallen unter die allgemeine Form: $i(\overline{\omega}'+l'-\overline{\omega}''-l'')$, können daher kein Argument bilden, das sich unter eine der Schlussformen von X einreihen liesse. Wir wären also zu denselben Werthen von A_1, A_2 und A_3 gelangt, wenn wir von vorneherein das Glied (IX) in $r^2\cos(2\nu+2h+\alpha)$ vernachlässigt hätten. Dieses Glied ist, wie ich bemerken will, übrigens das einzige, das von dem kleinen Factor $\frac{n'}{n}$, dem Verhältnisse der mittleren Bewegungen der Erde und des Mondes, frei ist und einmal $l+\overline{\omega}$ enthält.

Nehmen wir jetzt für R_1 den zweiten Theil seines Werthes, welcher γ''^2 als Factor enthält, also die Neigung der Venusbahn gegen die Ekliptik. Sieht man die Elemente des Mondes als Constante an, so reduciren sich die Glieder von R_1. auf die wir Rücksicht zu nehmen haben, auf die folgenden, da diese die einzigen sind, die in den Argumenten ein einziges Mal den Winkel V enthalten:

$$
\begin{aligned}
R_{\mathrm{I}} = m'' \frac{r^3}{r'^4} \gamma''^2 \Big\{ &+ \frac{1}{\Delta^5} \left[\frac{9}{2} \frac{r''}{r'} \sin v'' \sin (V - h'') \right] \\
&+ \frac{1}{\Delta^7} \Big[- \frac{45}{4} \frac{r''}{r'} \sin v'' \sin (V' - h'') \cos (V - V') \\
&\quad + \frac{45}{4} \frac{r''^2}{r'^2} \sin v'' \sin (V' - h'') \cos (V - v'' - h'') \\
&\quad - \frac{15}{4} \frac{r''}{r'} \sin v'' \sin (V - 2V' + h'') \\
&\quad + \frac{15}{2} \frac{r''^2}{r'^2} \sin v'' \sin (V - V' - v'') \\
&\quad - \frac{15}{4} \frac{r''^3}{r'^3} \sin v'' \sin (V - 2v'' - h'') \Big].
\end{aligned}
$$

In diesem Ausdruck von R_{I} haben wir die Excentricitäten zu vernachlässigen, so dass wir sofort $r\, r'\, r''$, $V\, V'$ und v'' durch $a\, a'\, a''$, $\overline{\omega} + l$, $\overline{\omega}' + l'$ und $\overline{\omega}'' + l'' - h''$ ersetzen können. R_{I} geht demnach über in:

$$
\begin{aligned}
R_{\mathrm{I}} = m'' \frac{a^3}{a'^4} \gamma''^2 \Big\{ &\frac{1}{\Delta^5} \left[\frac{9}{4} \frac{a''}{a'} \cos (\overline{\omega} + l - \overline{\omega}'' - l'') - \frac{9}{4} \frac{a''}{a'} \cos (\overline{\omega} + l + \overline{\omega}'' + l'' - 2h'') \right] \\
&+ \frac{1}{\Delta^7} \Big[- \frac{45}{16} \frac{a''}{a'} \cos (\overline{\omega} + l - \overline{\omega}'' - l'') \\
&\quad - \frac{15}{16} \frac{a''^2}{a'^2} \cos (\overline{\omega} + l - \overline{\omega}' - l') \\
&\quad + \frac{15}{8} \frac{a''^3}{a'^3} \cos (\overline{\omega} + l - \overline{\omega}'' - l'') \\
&\quad + \frac{45}{16} \frac{a''}{a'} \cos (\overline{\omega} + l + \overline{\omega}'' + l'' - 2h'') \\
&\quad - \frac{45}{16} \frac{a''^2}{a'^2} \cos (\overline{\omega} + l + \overline{\omega}' + l' - 2h'') \qquad \ldots \mathrm{XV} \\
&\quad - \frac{15}{8} \frac{a''^3}{a'^3} \cos (\overline{\omega} + l - 3\overline{\omega}'' - 3l'' + 2h'') \\
&\quad - \frac{15}{16} \frac{a''}{a'} \cos (\overline{\omega} + l - 2\overline{\omega}' - 2l' + \overline{\omega}'' + l'') \\
&\quad + \frac{45}{16} \frac{a''^2}{a'^2} \cos (\overline{\omega} + l + \overline{\omega}' + l' - 2\overline{\omega}'' - 2l'') \\
&\quad + \frac{15}{16} \frac{a''}{a'} \cos (\overline{\omega} + l - 2\overline{\omega}' - 2l - \overline{\omega}'' - l'' + 2h'') \\
&\quad + \frac{15}{16} \frac{a''^2}{a'^2} \cos (\overline{\omega} + l - \overline{\omega}' - l' - 2\overline{\omega}'' - 2l'' + 2h'') \Big].
\end{aligned}
$$

Wir erwähnten schon, dass man, wenn man sich auf die Glieder niedrigster Ordnung in Bezug auf Neigung und Excentricität beschränkt, den Buchstaben i, k, k' und k'' in der allgemeinen Form unserer Ungleichheit:

$$\varpi+l-\varpi'-l'+i(\varpi'+l'-\varpi''-l'')+kl'+k'l''+k''(\varpi''+l''-h'')$$

die folgenden Werthe zu ertheilen haben:

$$i=25, \qquad k=0, \qquad k'=0, \qquad k''=2.$$

Es resultirt hieraus ein neues Glied in R' von der Form:

$$\varpi+l+24\varpi'+24l'-23\varpi''-23l''-2h''. \qquad \ldots \text{XVI}$$

Fügt man dasselbe zu den schon erwähnten Gliedern im Ausdruck X von R' und bezeichnet mit A dessen Coëfficienten, so hat man:

$$\begin{aligned} R_0 = m''\frac{a^3}{a'^4}\Big\{ & A_1 e''^2 \cos(\varpi+l+24l'-23l''+24\varpi'-25\varpi'') \\ & + A_2 e'e'' \cos(\varpi+l+24l'-23l''+23\varpi'-24\varpi'') \qquad \ldots \text{XVII} \\ & + A_3 e'^2 \cos(\varpi+l+24l'-23l''+22\varpi'-23\varpi'') \\ & + A_4 \gamma''^2 \cos(\varpi+l+24l'-23l''+24\varpi'-23\varpi''-2h'')\Big\}. \end{aligned}$$

Da man nun in den Entwicklungen von Δ^{-5} und Δ^{-7} sich auch auf die Glieder zu beschränken hat, welche keine Excentricität enthalten, so lauten dieselben einfach:

$$\Delta^{-5} = +\frac{1}{2}b^{(0)}_{\frac{5}{2}} \qquad\qquad \Delta^{-7} = +\frac{1}{2}b^{(0)}_{\frac{7}{2}}$$

$$+b^{(i)}_{\frac{5}{2}}\cos i(\varpi'+l'-\varpi''-l'') \qquad + b^{(i)}_{\frac{7}{2}}\cos i(\varpi'+l'-\varpi''-l'')$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots$$

Man erkennt sofort, dass von allen Gliedern in R_{I} die Δ^{-5} und Δ^{-7} multipliciren, bloss drei einen Beitrag zu der Ungleichheit von der letzten Form in XVII liefern können. Nehmen wir also nur diese, so reducirt sich R_{I} auf den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} R_1 = m''\frac{a^3}{a'^4}\gamma''^2\Big\{ & -\frac{9}{4}\alpha\cos(\varpi+l+\varpi''+l''-2h'')\frac{1}{\Delta^5}+\frac{45}{16}\alpha\cos(\varpi+l+\varpi''+l''-2h'')\frac{1}{\Delta^7} \\ & -\frac{45}{16}\alpha^2\cos(\varpi+l+\varpi'+l'-2h'')\frac{1}{\Delta^7}\Big\} \end{aligned}$$

woraus man, nach durchgeführter Verbindung mit den entsprechenden Gliedern aus Δ^{-5} und Δ^{-7} und nach einigen einfachen Reductionen, für den Coëfficienten A_4 sofort den Ausdruck gewinnt:

$$A_4 = -\frac{9}{8}\alpha b^{(24)}_{\frac{5}{2}} + \frac{45}{32}\alpha b^{(24)}_{\frac{7}{2}} - \frac{45}{32}\alpha^2 b^{(23)}_{\frac{7}{2}}.$$

Wir können nun an die numerische Auswerthung unserer Ungleichheit schreiten. Man weiss, dass die Ungleichheit, die wir bestimmen wollen, sich in doppelter Weise in den Werth der mittleren Länge $(\varpi+l)$ des Mondes einführen wird. Ein Theil, wir wollen ihn mit $\delta\rho$ bezeichnen, entsteht durch Berücksichtigung der Variationen der grossen Axe und Excentricität. Derselbe ist einer zweimaligen Integration unterworfen und erhält daher als Divisor das Quadrat jener kleinen Zahl, mit welcher die Zeit innerhalb des Arguments multiplieirt erscheint, der zweite Theil hingegen enthält bekanntlich denselben nur in erster Potenz. Es genügt hier, sich auf die Berücksichtigung des ersten Haupttheiles zu beschränken, wofür man nach Hill[1]

$$\delta\rho = -\frac{3.01488\, R_0}{a^2 n^2 p^2}$$

zu nehmen, ferner aber in R_0 sin statt cos zu schreiben hat.

Bezeichnen wir mit n die mittlere Bewegung des Mondes, mit pn den Coëfficienten der Zeit in dem Werthe: $\varpi + l + 24(\varpi' + l') - 23(\varpi'' + l'')$, berücksichtigt man ferner gleich die Relation: $n'^2 a'^3 = m'$, so erhält man schliesslich:

$$\begin{aligned}\delta\rho = -3.01488\frac{m''}{m'}\cdot\frac{a}{a'}\left(\frac{1}{p}\right)^2\left(\frac{n'}{n}\right)^2 \Big\{ & A_1 e''^2 \sin(\varpi + l + 24l' - 23l'' + 24\varpi' - 25\varpi'') \\ & + A_2 e''e' \sin(\varpi + l + 24l' - 23l'' + 23\varpi' - 24\varpi'') \\ & + A_3 e'^2 \sin(\varpi + l + 24l' - 23l'' + 22\varpi' - 23\varpi'') \\ & + A_4 \gamma''^2 \sin(\varpi + l + 24l' - 23l'' + 24\varpi' - 23\varpi'' - 2h'')\Big\}\end{aligned}$$

wobei die gegen pn verschwindenden Coëfficienten der Zeit in den Winkeln ϖ', ϖ'' und h'' vernachlässigt erscheinen.

Es erübrigt uns nur mehr für A_1, A_2, A_3 und A_4 die numerischen Werthe zu bestimmen. Wir bedürfen hiezu der Kenntniss der verschiedenen $b_{\frac{5}{2}}^{(i)}$ und deren Ableitungen nach α, welche in den früher gegebenen Ausdrücken von A_1, A_2, A_3 und A_4 vorkommen. Unter Annahme des folgenden Werthes von α

$$\alpha = +0\cdot 723\,332$$

ergibt sich aber:

$$b_{\frac{5}{2}}^{(22)} = +1\;024716 \qquad \alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(22)}}{d\alpha} = +28\cdot 86416 \qquad \alpha^2\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(22)}}{d\alpha^2} = +811\cdot 9479$$

$$b_{\frac{5}{2}}^{(23)} = +0\cdot 784222 \qquad \alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(23)}}{d\alpha} = +22\cdot 85401 \qquad \alpha^2\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(23)}}{d\alpha^2} = +664\cdot 3059$$

$$b_{\frac{5}{2}}^{(24)} = +0\cdot 598949 \qquad \alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(24)}}{d\alpha} = +18\cdot 03933 \qquad \alpha^2\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(24)}}{d\alpha^2} = +541\cdot 3423$$

$$b_{\frac{5}{2}}^{(25)} = +0\cdot 456581 \qquad \alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(25)}}{d\alpha} = +14\cdot 19784 \qquad \alpha^2\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(25)}}{d\alpha^2} = +439\cdot 4909$$

$$b_{\frac{7}{2}}^{(23)} = +20\cdot 8213 \qquad b_{\frac{7}{2}}^{(24)} = +16\cdot 3926$$

woraus für die A die folgenden Werthe resultiren:

$$A_1 = +3.4559 \qquad A_2 = -9\cdot 2343 \qquad A_3 = +6\cdot 1649 \qquad A_4 = +0\cdot 8674.$$

Für die mittlere Bewegung des Mondes nehmen wir jenen Werth an, den Hansen seinen Mondtafeln zu Grunde legte, hingegen für die mittleren Bewegungen der Venus und der Sonne die von Le-Verrier gegebenen Werthe. Man hat hiernach, als Einheit ein julianisches Jahr von 365·25 Tagen wählend:

Mittlere Bewegung des Mondes (n) =	17 325 594″0
„ „ der Sonne (n') =	1 295 977·38
„ „ „ Venus (n'') =	2 106 641·29

[1] On certain lunar inequalities etc. by G. W. Hill. Astronomical Papers Vol. III, part IV.

Hiermit resultirt für die Variation der Grösse

$$\varpi + l + 24(\varpi' + l') - 23(\varpi'' + l'')$$

in einem julianischen Jahr der Werth:

$$\left.\begin{array}{r} 17\ 325\ 594''0 \\ +24\times 1\ 295\ 977\cdot 38 \\ -23\times 2\ 106\ 641\cdot 29 \end{array}\right\} = -23\,698''0.$$

Diese Zahl: 23 698"6 ist 54·7 mal in 360° enthalten. Es ergibt sich demnach die Periode unserer Ungleichheit zu 54·7 Jahre. Man hat aber weiter:

$$\frac{1}{p} = -\frac{17\ 325\ 594''0}{23\ 698''6} = -731\cdot 081$$

$$\frac{n'}{n} = +0\cdot 074\ 80133.$$

Die Constante der Äquatorealparallaxe des Mondes ist nach Breen: 3422"7. Nehmen wir die äquatoreale Sonnenparallaxe zu 8"85 an, so ergibt sich

$$\frac{a}{a'} = +0\cdot 00258568$$

Für die Excentricitäten und die Neigung hat man die Werthe:

$$e' = +0\cdot 01679$$

$$e'' = +0\cdot 00686$$

$$\gamma'' = \sin\frac{1}{2}(3°23'29")$$

Was endlich den Werth des Verhältnisses $\frac{m''}{m'}$, der Masse der Venus zur Masse der Sonne, anbelangt, so wollen wir für denselben annehmen:

$$\frac{m'}{m'} = \frac{1}{408\,134}.$$

Es ist das der Werth, den auch Hansen verwendete.

Mit Rücksicht auf diese Zahlen nimmt nun unser Störungsglied den Werth an:

$$\begin{aligned} \delta\rho = &-0''00192 \sin(\varpi + l + 24l' - 23l'' + 24\varpi' - 25\varpi'') \\ &+0\cdot 01253 \sin(\varpi + l + 24l' - 23l'' + 23\varpi' - 24\varpi'') \\ &-0\cdot 02047 \sin(\varpi + l + 24l' - 23l'' + 22\varpi' - 23\varpi'') \\ &-0\cdot 00893 \sin(\varpi + l + 24l' - 23l'' + 24\varpi' - 23\varpi'' - 2h''). \end{aligned}$$

Um diese vier Glieder in ein einziges Glied zusammenzufassen, ersetzen wir ϖ', ϖ'' und h'' durch jene Werthe, welche für 1. Januar 1800 gelten, nämlich:

$$\varpi' = 99°30'29"$$

$$\varpi'' = 128\ \ 43\ \ \ 6$$

$$h'' = 74\ \ 51\ \ 41$$

Man erhält so erst:

$$\begin{aligned} \delta\rho = &-0''01900 \sin(\varpi + l + 24l' - 23l'') \\ &+0\cdot 00576 \cos(\varpi + l + 24l' - 23l'') \end{aligned}$$

und schliesslich wird:

$$\delta\rho = +0''020 \sin(\varpi + l + 24l' - 23l'' + 163°8').$$

Man sieht dieses Störungsglied ist so klein, dass es wohl nicht lohnend scheint, die Annäherungen weiter zu treiben und die Berechnung dieser Ungleichheit auch mit Berücksichtigung der Variationen der Mondelemente durchzuführen.

Wir gehen nun zur Berechnung der zweiten Ungleichheit über, der ich bereits Erwähnung that. Dieselbe hat ebenfalls ihren Ursprung in der Anziehung des Planeten Venus, hat als Periode rund 71 Jahre und ihr Argument ist:

$$\varpi + l + 11l' - 15l''.$$

Dieses Argument fällt unter die allgemeine Form:

$$\varpi + l - \varpi' - l' + i(\varpi' + l' - \varpi'' - l'') - k l' - k' l'' - k''(\varpi'' + l'' - h''),$$

in welchen man den Buchstaben k, k' und k'' solche Werthe zu ertheilen hat, dass ihre Summe gleich 3 wird, während i so zu bestimmen ist, dass stets der Relation genügt wird: $i - k = 12$.

Die verschiedenen Werthsysteme der i, k, k' und k'' sind also durch die folgende Zusammenstellung gegeben:

$i = 15$	$k = 3$	$k' = 0$	$k'' = 0$
$i = 14$	$k = 2$	$k' = 1$	$k'' = 0$
$i = 13$	$k = 1$	$k' = 2$	$k'' = 0$
$i = 12$	$k = 0$	$k' = 3$	$k'' = 0$
$i = 13$	$k = 1$	$k' = 0$	$k'' = 2$
$i = 12$	$k = 0$	$k' = 1$	$k'' = 2.$

Indem man nun R_1 auf die einzigen Werthe reducirt, welche hier in Frage kommen, hat man:

$$\begin{aligned} R_0 = m'' \frac{a^3}{a'^4} \Big\{ & A_1 e'^3 \cos(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 14\varpi' - 15\varpi'') \\ & + A_2 e'^2 e'' \cos(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 13\varpi' - 14\varpi'') \\ & + A_3 e' e''^2 \cos(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 12\varpi' - 13\varpi'') \qquad \ldots \mathrm{I} \\ & + A_4 e''^3 \cos(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 11\varpi' - 12\varpi'') \\ & + A_5 \alpha e' \gamma''^2 \cos(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 12\varpi' - 15\varpi'' + 2h'') \\ & + A_6 \alpha e'' \gamma''^2 \cos(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 11\varpi' - 14\varpi'' + 2h'') \Big\} \end{aligned}$$

und es ist sofort einleuchtend, dass wir von jenen Grössen, welche Δ^{-5} in R_1 multipliciren, alle werden zurückbehalten müssen, deren Argumente unter die Form fallen:

$$\varpi + l - \varpi' - l' + i(\varpi' + l' - \varpi'' - l'') - kl' - k'l'' - k''(\varpi'' + l'' - h'').$$

wo i eine ganze positive oder negative Zahl, aber auch 0 sein kann, hingegen k, k' und k'' nur ganze positive Zahlen bedeuten können, und zwar so, dass ihre Summe $k + k' + k''$ einer der Zahlen 0, 1, 2 oder 3 gleich werde. In der Entwicklung von Δ^{-5} werden wir hierauf alle jene Glieder mitzunehmen haben, deren Argumente sich mit denjenigen der vorhergehenden Entwicklung so combiniren können, dass hieraus eines der sechs Argumente von I entstehen kann.

Wir wollen hier mit der Entwicklung des Theiles unseres Störungsgliedes beginnen, welcher von der Neigung der Venusbahn zur Ecliptik abhängig ist. Wenn man in derselben Weise vorgeht, wie schon früher dargelegt worden war, so führt die Entwicklung von R_1 uns zu dem folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} R' = + \frac{m'' \gamma''^2 \alpha}{\Delta^7} \frac{a^3}{a'^4} \Big\{ & + \frac{15}{8} \cos(\varpi + l - 2\varpi' - 2l' - \varpi'' - l'' + 2h'') \\ & + \frac{15}{16} \alpha \cos(\varpi + l - \varpi' - l' - 2\varpi'' - 2l'' + 2h'') \\ & - \frac{15}{8} \alpha^2 \cos(\varpi + l - 3\varpi'' - 3l'' + 2h'') \end{aligned}$$

$$+\frac{135}{16}e'\cos(\varpi+l-2\varpi'-3l'-\varpi''-l''+2h'')$$
$$+\frac{15}{4}\alpha e'\cos(\varpi+l-\varpi'-2l'-2\varpi''-2l''+2h'')$$
$$-\frac{105}{16}\alpha^2 e'\cos(\varpi+l-l'-3\varpi''-3l''+2h'')$$
$$+\frac{15}{32}e''\cos(\varpi+l-2\varpi'-2l'-\varpi''-2l''+2h'')$$
$$+\frac{15}{16}\alpha e''\cos(\varpi+l-\varpi'-l'-2\varpi''-3l''+2h'')$$
$$-\frac{15}{16}\alpha^2 e''\cos(\varpi+l-3\varpi''-4l''+2h'')\Big\}$$

wobei wir sofort jene Glieder wegliessen, die keinen Beitrag zur Bildung unserer Ungleichheit liefern können, ferner jene Glieder, die e^2, e'^2 und e''^2 als Factor enthielten. Wir sind aber weiter bei dieser Entwicklung nur von jenen Gliedern in R_1 ausgegangen, die ein einzigesmal den Winkel V enthalten. Nun sahen wir, dass, wenn man in R — also jenem Theil der Störungsfunction, der sich auf die Sonne bezieht — auf das Glied, dessen Argument $\varpi-\varpi'$ ist, Rücksicht nimmt, im Ausdrucke: $r^2\cos(2V+\alpha)$ das periodische Glied auftritt:

$$-\frac{15}{4}e'\frac{a^3}{a'}\cos(\varpi+l+\varpi'+\alpha) \qquad \ldots\text{II.}$$

Bezeichnet man nun mit R'' den Theil von R_1, welcher den Winkel $2V$ enthält, und entwickelt diesen Theil mit Berücksichtigung des Gliedes II, so gelangt man zu den folgenden Gliedern, die von dem Verhältnisse $\frac{n'}{n}$ unabhängig und von derselben Grössenordnung wie die vorhergehenden sind.

$$R''=+\frac{m''\gamma''^2\alpha}{\Delta^7}\frac{a^3}{a'^4}\Big\{-\frac{225}{32}e'\cos(\varpi+l-2\varpi'-3l'-\varpi''-l''+2h'')$$
$$+\frac{225}{16}\alpha e'\cos(\varpi+l-\varpi'-2l'-2\varpi''-2l''+2h'')$$
$$-\frac{225}{32}\alpha^2 e'\cos(\varpi+l-l'-3\varpi''-3l''+2h'')\Big\}.$$

Nun hat man aber:

$$\Delta^{-7}=\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+b^{(i)}_{\frac{7}{2}}\cos i(\varpi'+l'-\varpi''-l'')$$
$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+\left[-ib^{(i)}_{\frac{7}{2}}+\frac{1}{2}\alpha\frac{db^{(i)}_{\frac{7}{2}}}{d\alpha}\right]e'\cos[i(\varpi'+l'-\varpi''-l'')-l']$$
$$+\left[+ib^{(i)}_{\frac{7}{2}}-\frac{1}{2}\alpha\frac{db^{(i)}_{\frac{7}{2}}}{d\alpha}\right]e''\cos[i(\varpi'+l'-\varpi''-l'')-l'']$$
$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Substituirt man diesen Werth in R' und R'' und beschränkt sich auf diejenigen Glieder, deren Argumente unter die zwei letzten Formen von I fallen, so resultirt:

$$R'=m''\alpha\frac{a^3}{a'^4}\Big\{+A_5 e'\gamma''^2\cos(\varpi+l+11l'-15l''+12\varpi'-15\varpi''+2h'')$$
$$+A_6 e''\gamma''^2\cos(\varpi+l+11l'-15l''+11\varpi'-14\varpi''+2h'')\Big\}.$$

$$R'' = m''\alpha \frac{a^3}{a'^4}\left\{B\, e'\gamma''^2 \cos(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 12\varpi' - 15\varpi'' + 2h)\right\}$$

wo der Kürze halber A_5, A_6 und B statt der folgenden Ausdrücke geschrieben wurde:

$$A_5 = -\frac{285}{32} b_{\frac{7}{2}}^{(14)} - \frac{135\alpha}{32} b_{\frac{7}{2}}^{(13)} + \frac{255\alpha^2}{32} b_{\frac{7}{2}}^{(12)}$$

$$+ \frac{35}{32}\alpha \frac{db_{\frac{7}{2}}^{(14)}}{d\alpha} + \frac{15\alpha}{64}.\alpha \frac{db_{\frac{7}{2}}^{(13)}}{d\alpha} - \frac{15\alpha^2}{32}\alpha \frac{db_{\frac{7}{2}}^{(12)}}{d\alpha}$$

$$A_6 = +\frac{795}{64} b_{\frac{7}{2}}^{(13)} + \frac{195\alpha}{32} b_{\frac{7}{2}}^{(12)} - \frac{345\alpha^2}{32} b_{\frac{7}{2}}^{(11)}$$

$$-\frac{15}{32}\alpha \frac{db_{\frac{7}{2}}^{(13)}}{d\alpha} - \frac{15\alpha}{64}.\alpha \frac{db_{\frac{7}{2}}^{(12)}}{d\alpha} + \frac{15\alpha^2}{32}\alpha \frac{db_{\frac{7}{2}}^{(11)}}{d\alpha}$$

$$B = -\frac{225}{64} b_{\frac{7}{2}}^{(14)} + \frac{225\alpha}{32} b_{\frac{7}{2}}^{(13)} - \frac{225\alpha^2}{64} b_{\frac{7}{2}}^{(12)}.$$

Mit einer für den gegenwärtigen Zweck ausreichenden Genauigkeit ergibt sich aber hieraus $\delta\rho_1$, jener Theil unserer Ungleichheit in der mittleren Länge des Mondes, welcher γ''^2 zum Factor, n^2p^2 zum Divisor hat, zu:

$$\begin{aligned}\delta\rho_1 = -3{\cdot}01488 \frac{m''}{m'}\frac{a}{a'}\left(\frac{n'}{n}\right)^2\left(\frac{1}{p}\right)^2\alpha \Big\{ & A_5 e'\gamma''^2 \sin(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 12\varpi' - 15\varpi'' + 2h'') \\ & + A_6 e''\gamma''^2 \sin(\varpi + l + 11l - 15l'' + 11\varpi' - 14\varpi'' + 2h'') \\ & + B e'\gamma''^2 \sin(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 12\varpi' - 15\varpi'' + 2h'')\Big\}.\end{aligned}$$

Mit Zugrundelegung desselben Werthes von α wie früher, hat man aber:

$$b_{\frac{7}{2}}^{(11)} = +269{\cdot}612 \qquad \alpha\frac{db_{\frac{7}{2}}^{(11)}}{d\alpha} = +5757{\cdot}23$$

$$b_{\frac{7}{2}}^{(12)} = +224.442 \qquad \alpha\frac{db_{\frac{7}{2}}^{(12)}}{d\alpha} = +4981{\cdot}43$$

$$b_{\frac{7}{2}}^{(13)} = +185.500 \qquad \alpha\frac{db_{\frac{7}{2}}^{(13)}}{d\alpha} = +4276{\cdot}31$$

$$b_{\frac{7}{2}}^{(14)} = +152{\cdot}317 \qquad \alpha\frac{db_{\frac{7}{2}}^{(14)}}{d\alpha} = +3644{\cdot}30$$

und hieraus folgt:

$$A_5 = +224{\cdot}650 \qquad A_6 = +335{\cdot}672 \qquad B = -4{\cdot}890$$

Die Variation pn der Grösse:

$$\varpi + l + 11(\varpi' + l') - 15(\varpi'' + l'')$$

in einem julianischen Jahre ist aber:

$$\left.\begin{array}{rr} & 17\,325\,594\text{''}0 \\ +11\times & 1\,295\,977\cdot38 \\ -15\times & 2\,106\,641\cdot29 \end{array}\right\} = -18\,274\text{''}2$$

Diese Zahl ergibt für die Periode unserer Ungleichheit: 70·9 Jahre. Wir haben aber weiter:

$$\frac{1}{p} = -\frac{17\,325\,594\text{''}00}{18\,274\text{''}2} = -948{\cdot}09$$

Mit Rücksicht auf die letzten Zahlen und die vorher schon angeführten, ergibt sich der Werth von $\delta\rho$, jenes Theiles unserer Ungleichheit, der von der Neigung abhängt, schliesslich zu:

$$\delta\rho_1 = [-0''04727 + 0''00103] \sin(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 12\varpi' - 15\varpi'' + 2h'')$$
$$-0''02886 \sin(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 11\varpi' - 14\varpi'' + 2h'')$$

wo wir in der ersten Zeile jenen Theil des Coëfficienten $[+0''00103]$, der von R'' stammt, in Evidenz gelassen haben.

Dieses Resultat, das ich an erster Stelle erreicht hatte, veranlasste mich auch an die Bestimmung des restirenden Theiles des Coëfficienten unserer Ungleichheit zu schreiten.

Greifen wir nochmals auf den Ausdruck VI von R_1 zurück und suchen wir alle Theile heraus, die den Winkel V und $2V$ enthalten, aber von γ''^2 frei sind, und bezeichnen wir mit R' jenen Theil von R_1, der den Winkel V, mit R'' der den Winkel $2V$ enthält, so hat man:

$$R' = \frac{m''}{\Delta^5}\frac{r^3}{r'^4}\left\{\frac{3}{8}\cos(V - V') - \frac{3}{8}\frac{r''}{r'}\cos(V - \nu'' - h'')\right\}$$

$$R'' = \frac{m''}{\Delta^5}\frac{r^2}{r'^3}\left\{\frac{3}{4}\cos(2V - 2V') - \frac{3}{2}\frac{r''}{r'}\cos(2V - V' - \nu'' - h'') + \frac{3}{4}\frac{r''^2}{r'^2}\cos(2V - 2\nu'' - 2h'')\right\}.$$

Wir entwickeln zunächst wieder die Grössen, die Δ^{-5} multipliciren. Unter Mitnahme der Glieder dritter Ordnung in Bezug auf die Excentricitäten und bei Vernachlässigung aller jener Argumente, die uns hier keinen Beitrag liefern können, bleiben die folgenden Glieder:

$$\begin{aligned} R' = +\frac{m''}{\Delta^5}\frac{a^3}{a'^4}\Big\{ & +\frac{3}{8}\cos(\varpi + l - \varpi' - l') \\ & -\frac{3}{8}\alpha\cos(\varpi + l - \varpi'' - l'') \\ & +\frac{9}{8}e'\cos(\varpi + l - \varpi' - 2l') \\ & -\frac{3}{16}\alpha e''\cos(\varpi + l - \varpi'' - 2l'') \\ & -\frac{15}{16}\alpha e'\cos(\varpi + l - l' - \varpi'' - l'') \\ & +\frac{159}{64}e'^2\cos(\varpi + l - \varpi' - 3l') \\ & -\frac{9}{64}\alpha e''^2\cos(\varpi + l - \varpi'' - 3l'') \\ & -\frac{15}{8}\alpha e'^2\cos(\varpi + l - 2l' - \varpi'' - l'') \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{15}{32}\alpha e' e'' \cos(\overline{\omega}+l-l'-\overline{\omega}''-2l'')\\
&+\frac{77}{16} e'^3 \cos(\overline{\omega}+l-\overline{\omega}'-4l')\\
&-\frac{1}{8}\alpha e''^3 \cos(\overline{\omega}+l-\overline{\omega}''-4l'')\\
&-\frac{435}{128}\alpha e'^3 \cos(\overline{\omega}+l-3l'-\overline{\omega}''-l'')\\
&-\frac{15}{16}\alpha e'^2 e'' \cos(\overline{\omega}+l-2l'-\overline{\omega}''-2l'')\\
&-\frac{45}{128}\alpha e' e''^2 \cos(\overline{\omega}+l-l'-\overline{\omega}''-3l'')\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R'' = \frac{m''}{\Delta^5}\frac{a^3}{a'^4}\Big\{&-\frac{45}{16} e' \cos(\overline{\omega}+l-\overline{\omega}'-2l')\\
&+\frac{45}{8}\alpha e' \cos(\overline{\omega}+l-l'-\overline{\omega}''-l'')\\
&-\frac{45}{16}\alpha^2 e' \cos(\overline{\omega}+l+\overline{\omega}'-2\overline{\omega}''-2l'')\\
&-\frac{315}{32} e'^2 \cos(\overline{\omega}+l-\overline{\omega}'-3l')\\
&+\frac{45}{16}\alpha e' e'' \cos(\overline{\omega}+l-l'-\overline{\omega}''-2l'')\\
&+\frac{135}{8}\alpha e'^2 \cos(\overline{\omega}+l-2l'-\overline{\omega}''-l'')\\
&-\frac{45}{16}\alpha^2 e' e'' \cos(\overline{\omega}+l+\overline{\omega}'-2\overline{\omega}''-3l'')\\
&-\frac{225}{32}\alpha^2 e'^2 \cos(\overline{\omega}+l+\overline{\omega}'-l'-2\overline{\omega}''-2l'')\\
&-\frac{765}{32} e'^3 \cos(\overline{\omega}+l-\overline{\omega}'-4l')\\
&+\frac{135}{64}\alpha e' e''^2 \cos(\overline{\omega}+l-l'-\overline{\omega}''-3l'')\\
&+\frac{135}{16}\alpha e'^2 e'' \cos(\overline{\omega}+l-2l'-\overline{\omega}''-2l'')\\
&+\frac{2385}{64}\alpha e'^3 \cos(\overline{\omega}+l-3l'-\overline{\omega}''-l'')\\
&-\frac{45}{16}\alpha^2 e' e''^2 \cos(\overline{\omega}+l+\overline{\omega}'-2\overline{\omega}''-4l'')\\
&-\frac{225}{32}\alpha^2 e'^2 e'' \cos(\overline{\omega}+l+\overline{\omega}'-l'-2\overline{\omega}''-3l'')\Big\}.
\end{aligned}
$$

In der Entwicklung von Δ^{-5} müssen wir auch die Glieder dritter Ordnung in Bezug auf die Excentricitäten noch nachtragen. Wir fanden hiefür die folgende allgemeine Form, wobei wir aber auch jene Theile gleich weglassen, die uns keinen Beitrag liefern können.

$$\Delta^{-5} =$$

$$+\left[\left(-\frac{1}{6}i^3+\frac{5}{8}i^2-\frac{13}{24}i\right)b^{(i)}_{\frac{5}{2}}+\left(\frac{1}{4}i^2-\frac{13}{16}i+\frac{9}{16}\right)\alpha\frac{db^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha}-\left(\frac{1}{8}i-\frac{1}{4}\right)\alpha^2\frac{d^2b^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^2}+\frac{1}{48}\alpha^3\frac{d^3b^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^3}\right]e'^3\cos\,(\mathrm{I})$$

$$+\left[\left(\frac{1}{2}i^3-\frac{5}{8}i^2\right)b^{(i)}_{\frac{5}{2}}-\left(\frac{3}{4}i^2-\frac{17}{16}i+\frac{1}{4}\right)\alpha\frac{db^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha}+\left(\frac{3}{8}i-\frac{3}{8}\right)\alpha^2\frac{d^2b^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^2}-\frac{1}{16}\alpha^3\frac{d^3b^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^3}\right]e'^2e''\cos\,(\mathrm{II})$$

$$+\left[-\left(\frac{1}{2}i^3+\frac{5}{8}i^2\right)b^{(i)}_{\frac{5}{2}}+\left(\frac{3}{4}i^2+\frac{5}{16}i-\frac{1}{8}\right)\alpha\frac{db^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha}-\frac{3}{8}i\alpha^2\frac{d^2b^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^2}+\frac{1}{16}\alpha^3\frac{d^3b^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^3}\right]e'e''^2\cos\,(\mathrm{III})$$

$$+\left[\left(\frac{1}{6}i^3+\frac{5}{8}i^2+\frac{13}{24}i\right)b^{(i)}_{\frac{5}{2}}-\left(\frac{1}{4}i^2+\frac{9}{16}i+\frac{3}{16}\right)\alpha\frac{db^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha}+\left(\frac{1}{8}i+\frac{1}{8}\right)\alpha^2\frac{d^2b^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^2}-\frac{1}{48}\alpha^3\frac{d^3b^{(i)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^3}\right]e''^3\cos\,(\mathrm{IV})$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= i(\varpi'+l'-\varpi''-l'')-3l'\\
\mathrm{II} &= i(\varpi'+l'-\varpi''-l'')-2l'-l''\\
\mathrm{III} &= i(\varpi'+l'-\varpi''-l'')-l'-2l''\\
\mathrm{IV} &= i(\varpi'+l'-\varpi''-l'')-3l''.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke ist es nun ein Leichtes, die Entwicklung von R' und R'' fertigzustellen. Wir fanden schliesslich für die Coëfficienten A_i, welche aus R', für die Coëfficienten B_i, welche aus R'' entstehen, die folgenden Werthe:

$$\begin{aligned}
A_1 = &-\frac{1243}{32}\,b^{(15)}_{\frac{5}{2}}+\frac{1293}{256}\,\alpha\frac{db^{(15)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha}-\frac{15}{64}\,.\,\alpha^2\frac{d^2b^{(15)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^2}+\frac{1}{256}\,\alpha^3\frac{d^3b^{(15)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^3}\\
&+\frac{8651\,\alpha}{256}\,b^{(14)}_{\frac{5}{2}}-\frac{1173\,\alpha}{256}\,\alpha\frac{db^{(14)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha}+\frac{57\,\alpha}{256}\,\alpha^2\frac{db^{(14)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^2}-\frac{\alpha}{256}\,\alpha^3\frac{d^3b^{(14)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = &+\frac{9051}{64}\,b^{(14)}_{\frac{5}{2}}-\frac{4533}{256}\,\alpha\frac{db^{(14)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha}+\frac{99}{128}\,\alpha^2\frac{d^2b^{(14)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^2}-\frac{3}{256}\,\alpha^3\frac{d^3b^{(14)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^3}\\
&-\frac{31671\,\alpha}{256}\,b^{(13)}_{\frac{5}{2}}+\frac{4137\,\alpha}{256}\,\alpha\frac{db^{(13)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha}-\frac{189\,\alpha}{256}\,\alpha^2\frac{d^2b^{(13)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^2}+\frac{3\alpha}{256}\,\alpha^3\frac{d^3b^{(13)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 = &-\frac{11115}{64}\,b^{(13)}_{\frac{5}{2}}+\frac{5301}{256}\,\alpha\frac{db^{(13)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha}-\frac{27}{32}\,\alpha^2\frac{d^2b^{(13)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^2}+\frac{3}{256}\,\alpha^3\frac{d^3b^{(13)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^3}\\
&+\frac{39159\alpha}{256}\,b^{(12)}_{\frac{5}{2}}-\frac{4869\,\alpha}{256}\,\alpha\frac{db^{(12)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha}+\frac{207\,\alpha}{256}\,\alpha^2\frac{d^2b^{(12)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^2}-\frac{3\alpha}{256}\,\alpha^3\frac{d^3b^{(12)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha^3}
\end{aligned}$$

$$A_4 = +\frac{2307}{32}\,b_{\frac{5}{2}}^{(12)} - \frac{2061}{256}\,\alpha\,\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(12)}}{d\alpha} + \frac{39}{128}\,\alpha^2\,\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(12)}}{d\alpha^2} - \frac{1}{256}\,\alpha^3\,\frac{d^3 b_{\frac{5}{2}}^{(12)}}{d\alpha^3}$$

$$-\frac{16395\alpha}{256}\,b_{\frac{5}{2}}^{(11)} + \frac{1905\,\alpha}{256}\,\alpha\,\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(11)}}{d\alpha} - \frac{75\alpha}{256}\,\alpha^2\,\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(11)}}{d\alpha^2} + \frac{\alpha}{256}\,\alpha^3\,\frac{d^3 b_{\frac{5}{2}}^{(11)}}{d\alpha^3}$$

$$B_1 = -\frac{21285}{256}\,b_{\frac{5}{2}}^{(15)} + \frac{19395\alpha}{128}\,b_{\frac{5}{2}}^{(14)} - \frac{15795\,\alpha^2}{256}\,b_{\frac{5}{2}}^{(13)}$$

$$+\frac{945}{128}\,\alpha\,\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(15)}}{d\alpha} - \frac{225\alpha}{16}\,\alpha\,\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(14)}}{d\alpha} + \frac{855\,\alpha^2}{128}\,.\,\alpha\,\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(13)}}{d\alpha}$$

$$-\frac{45}{256}\,\alpha^2\,\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(15)}}{d\alpha^2} + \frac{45\alpha}{128}\,\alpha^2\,\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(14)}}{d\alpha^2} - \frac{45\,\alpha^2}{256}\,\alpha^2\,\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(13)}}{d\alpha^2}.$$

$$B_2 = +\frac{6615}{32}\,b_{\frac{5}{2}}^{(14)} - \frac{6075\,\alpha}{16}\,b_{\frac{5}{2}}^{(13)} + \frac{11115\alpha^2}{64}\,b_{\frac{5}{2}}^{(12)}$$

$$-\frac{135}{3}\,\alpha\,\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(14)}}{d\alpha} + \frac{1035\,\alpha}{32}\,\alpha\,\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(13)}}{d\alpha} - \frac{495\,\alpha^2}{32}\,.\,\alpha\,.\,\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(12)}}{d\alpha}$$

$$+\frac{45}{128}\,\alpha^2\,\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(14)}}{d\alpha^2} - \frac{45\,\alpha}{64}\,\alpha^2\,\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(13)}}{d\alpha^2} + \frac{45\,\alpha^2}{128}\,.\,\alpha^2\,.\,\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(12)}}{d\alpha^2}$$

$$B_3 = -\frac{33345}{256}\,b_{\frac{5}{2}}^{(13)} + \frac{30915\alpha}{128}\,b_{\frac{5}{2}}^{(12)} - \frac{28575\alpha^2}{256}\,b_{\frac{5}{2}}^{(11)}$$

$$+\frac{1215}{128}\,\alpha\,\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(13)}}{d\alpha} - \frac{585\alpha}{32}\,\alpha\,\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(12)}}{d\alpha} + \frac{1125\,\alpha^2}{128}\,\alpha\,\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(11)}}{d\alpha}$$

$$-\frac{45}{256}\,\alpha^2\,\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(13)}}{d\alpha^2} + \frac{45\,\alpha}{128}\,\alpha^2\,\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(12)}}{d\alpha^2} - \frac{45\,\alpha^2}{256}\,\alpha^2.\,\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(11)}}{d\alpha^2}$$

$$B_4 = 0.$$

Mit Benützung der Formeln der »Mécanique céleste« erhält man aber für die b und ihre Ableitungen nach α die folgenden Werthe:

$$b_{\frac{5}{2}}^{(15)} = 6\cdot 19409 \qquad \alpha\,\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(15)}}{d\alpha} = 132.714 \qquad \alpha^2\,\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(15)}}{d\alpha^2} = 2887\cdot 23 \qquad \alpha^3\,\frac{d^3 b_{\frac{5}{2}}^{(15)}}{d\alpha^3} = 64668\cdot 2$$

$$b_{\frac{5}{2}}^{(14)} = 7\cdot 90096 \qquad \alpha\,\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(14)}}{d\alpha} = 161.806 \qquad \alpha^2\,\frac{d^2 b_{\frac{5}{2}}^{(14)}}{d\alpha^2} = 3379\cdot 12 \qquad \alpha^3\,\frac{d^3 b_{\frac{5}{2}}^{(14)}}{d\alpha^3} = 73068\cdot 3$$

$$b_{\frac{5}{2}}^{(13)} = 10\cdot0327 \qquad \alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(13)}}{d\alpha} = 196\cdot029 \qquad \alpha^2\frac{d^2b_{\frac{5}{2}}^{(13)}}{d\alpha^2} = 3925\cdot886 \qquad \alpha^3\frac{d^3b_{\frac{5}{2}}^{(13)}}{d\alpha^3} = 81943\cdot3$$

$$b_{\frac{5}{2}}^{(12)} = 12\cdot6753 \qquad \alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(12)}}{d\alpha} = 235\cdot842 \qquad \alpha^2\frac{d^2b_{\frac{5}{2}}^{(12)}}{d\alpha^2} = 4525\cdot156 \qquad \alpha^3\frac{d^3b_{\frac{5}{2}}^{(12)}}{d\alpha^3} = 91179\cdot3$$

$$b_{\frac{5}{2}}^{(11)} = 15\cdot9228 \qquad \alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(11)}}{d\alpha} = 281\cdot564 \qquad \alpha^2\frac{d^2b_{\frac{5}{2}}^{(11)}}{d\alpha^2} = 5171\cdot698 \qquad \alpha^3\frac{d^3b_{\frac{5}{2}}^{(11)}}{d\alpha^3} = 100631\cdot9$$

Einen grossen Theil dieser letzten Werthe konnte ich auch directe der Untersuchung Delaunay's (Connaissance des Temps 1863) entnehmen.

Mit Rücksicht auf diese Werthe resultirt für die Coëfficienten A und B:

$$\begin{aligned} A_1 &= +0\cdot236 & B_1 &= +36\cdot826 \\ A_2 &= +1\cdot238 & B_2 &= +\ \ 0\cdot224 \\ A_3 &= -3\cdot752 & B_3 &= -\ \ 0\cdot436 \\ A_4 &= +4\cdot004 & B_4 &= \quad 0 \end{aligned}$$

Es erübrigt uns nur mehr, diese Werthe in den Ausdruck von $\delta\rho_2$:

$$\begin{aligned} \delta\rho_2 = -3\cdot01488\frac{m''}{m'}\frac{a}{a'}\left(\frac{1}{p}\right)^2\left(\frac{n'}{n}\right)^2 \Big\{ & (A_1+B_1)\,e'^3 \sin(\varpi+l+11l'-15l''+14\varpi'-15\varpi'') \\ & +(A_2+B_2)\,e'^2e''\sin(\varpi+l+11l'-15l''+13\varpi'-14\varpi'') \\ & +(A_3+B_3)\,e'e''^2\sin(\varpi+l+11l'-15l''+12\varpi'-13\varpi'') \\ & +A_4\,e''^3\sin(\varpi+l+11l'-15l''+11\varpi'-12\varpi'')\Big\} \end{aligned}$$

einzusetzen, um zu jenen Theil unserer Ungleichheit zu gelangen, der ausschliesslich von den Excentricitäten herrührt.

Die numerische Rechnung ergab:

$$\begin{aligned} \delta\rho_2 = & [-0\text{"}00002-0\text{"}00344]\sin(\varpi+l+11l'-15l''+14\varpi'-15\varpi'') \\ & [-0\cdot00005-0\cdot00001]\sin(\varpi+l+11l'-15l''+13\varpi'-14\varpi'') \\ & [+0\cdot00006+0\cdot00001]\sin(\varpi+l+11l'-15l''+12\varpi'-13\varpi'') \\ & -0\cdot00003\ \ \sin(\varpi+l+11l'-15l''+11\varpi'-12\varpi'') \end{aligned}$$

wo wir wieder jene Theile des Coëfficienten, die von R'' stammen, in Evidenz gelassen haben.

Man sieht, dieser ganze Theil unseres Störungsgliedes ist vollkommen unmerkbar, doch scheint es mir bemerkenswerth, dass der relativ grösste Theil noch von R'' herrührt.

In den beiden Ungleichheiten des Mondes von langer Periode, verursacht durch die Anziehung des Planeten Venus, die bekanntlich von Hansen entdeckt, von Delaunay aber berechnet wurden (Connaissance des Temps 1862 und 1863), sind die Glieder, welche fast ausschliesslich den Coëfficienten dieser zwei Ungleichheiten ausmachen, jene, die den Factor γ''^2 erhalten. In unserer letzten Ungleichheit sind es auch die analogen Glieder, die weitaus merkbarere Beiträge zu dem Gesammtcoëfficienten liefern.

Fassen wir alle Theile unserer Ungleichheit zusammen, so hat man:

$$\begin{aligned}\delta\rho = \delta\rho_1 + \delta\rho_2 = & -0''00346 \sin(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 14'\varpi - 15\varpi'') \\ & -0\cdot00006 \sin(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 13\varpi' - 14\varpi'') \\ & +0\cdot00007 \sin(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 12\varpi' - 13\varpi'') \\ & -0\cdot00003 \sin(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 11\varpi' - 12\varpi'') \\ & -0\cdot04624 \sin(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 12\varpi' - 15\varpi'' + 2h'') \\ & -0\cdot02886 \sin(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 11\varpi' - 14\varpi'' + 2h'')\end{aligned}$$

und durch Substitution der entsprechenden Werthe von ϖ', ϖ'' und h'' findet man schliesslich:

$$\delta\rho = +0''076 \sin(\varpi + l + 11l' - 15l'' + 325°49').$$

Nachtrag.

Während der Drucklegung der vorliegenden Abhandlung brachte das «Bulletin Astronomique» eine Reihe hochinteressanter Aufsätze von Herrn R. Radau unter dem Titel: «Remarques sur certaines inégalités à longue periode du mouvement de la Lune». Aus der daselbst gegebenen reichhaltigen Zusammenstellung der vom Verfasser berechneten Mondungleichheiten langer Periode ersehe ich, dass Herr Radau sich ebenfalls mit der Auswerthung der Coëfficienten der oben erwähnten Ungleichheiten beschäftigt hat. Die daselbst mitgetheilten numerischen Werthe für die Coëfficienten stimmen innerhalb der angestrebten Genauigkeitsgrenze mit den oben von mir mitgetheilten überein. Auch die in der Einleitung der vorliegenden Abhandlung bloss erwähnten, seither aber auch von mir berechneten zwei Ungleichheiten: $\varpi - 5l' + 3l''$ und: $2h - 8l' + 5l''$ finden sich daselbst wieder, so dass es wohl hinreicht hier zu erwähnen, dass mich die Rechnung zu Coëfficienten geführt habe, die in bestem Einklang mit den von Herrn Radau gegebenen Werthen stehen.

Die Ungleichheit mit dem Argument: $2\varpi + l + 19l' - 20l''$ (Periode 34·8 Jahre), deren ebenfalls in der Einleitung der vorliegenden Abhandlung Erwähnung geschehen ist, findet sich bei Radau hingegen nicht vor. Die Rechnung, welche ich seither, und zwar nach den wesentlich bequemeren Radau'schen Formeln durchgeführt habe, führten mich zwar auch nur zu einem kleinen Werth für den Coëfficienten; der Vollständigkeit halber möge derselbe aber hier noch Platz finden:

$$\delta\rho = +0''103 \sin(2\varpi + l + 19l' - 20l'' + 308°5).$$

Erwähnenswerth scheint mir ferner noch die Ungleichheit mit dem Argument: $A = l + 21l' - 21l''$ (Periode 8·35 Jahre), da dieselbe die Elementencorrectionen bedingt:

$$\delta\rho = +0''055 \sin(A + 106\cdot5) \qquad \delta l = +0''112 \sin(A + 106\cdot5) \qquad \delta e = -0''003 \cos(A + 106\cdot5).$$

Bei meinen ausgedehnten Untersuchungen bezüglich der störenden Einwirkung von Mercur, Mars, Jupiter und Saturn stiess ich durchwegs nur auf verschwindende Coëfficienten. Relativ den grössten Werth erreichte noch die von Mercur verursachte Ungleichheit mit dem Argument: $2\varpi + l + 3l' - 4l''$ (Periode: 7·9 Jahre, Coëfficient: $+0''011$).

Im Anschluss an das von Herrn Radau (B. A. Seite 21) gegebene Verzeichniss kritischer Argumente, welches, wie ich mich überzeugt habe, Anspruch auf Vollständigkeit erheben kann — die daselbst nicht erwähnten Argumente sind von zu hoher Ordnung, als dass sie merkbar werden könnten — möchte ich nur noch auf das folgende Argument aufmerksam machen: $2\varpi + l - 15l' + 18J$ (Periode 1286 Jahre, Ordnung 6).

Ich hege heute die Ansicht, dass unter den Argumenten der hier behandelten Art, nämlich derjenigen, die nur eine störende Masse enthalten, keines mehr existiere, das zu einer Mondungleichheit von der erforderlichen Grösse Anlass geben könnte. Sehr beachtenswerth scheinen mir aber mehrere Argumente, deren Ungleichheiten mit zwei störenden Massen multiplicirt, entsprechen würden, wie z. B. das folgende: $h + J - S$. (Periode 293 Jahre).