ARITHMETISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

LEOPOLD GEGENBAUER,

C. M. K. AKAD.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 5. JÄNNER 1893.

Im ersten Paragraphe der vorliegenden Mittheilung stelle ich eine wichtige Eigenschaft der conjugirten arithmetischen Functionen auf und bestimme sodann mit Hilfe derselben einige von diesen; im zweiten werden zum Theile auf Grund der vorangehenden Entwicklungen zwei Relationen bewiesen, die bekannte Sätze von Kronecker und Pépin als specielle Fälle enthalten. Der Paragraph 3 enthält bemerkenswerthe Specialisirungen der im zweiten auftretenden Functionen und Formeln, welche u. A. mehrere für die Theorie der Vertheilung der Primzahlen wichtige Resultate liefern. Im Paragraph 4 findet sich eine wesentliche Verallgemeinerung eines Sylvester'schen Satzes über Primzahlmengen, durch deren Umformung eine Gleichung gewonnen wird, als deren speciellster Fall die von Meissel zur Berechnung von Primzahlanzahlen benützte Formel erscheint; im Paragraph 5 wird eine arithmetische Relation aufgestellt, die zu einer Reihe von Sätzen über primitive Congruenzwurzeln und arithmetische Determinanten führt, und im Schlussparagraph endlich eine für die Zahlentheorie wichtige Vorzeichenbestimmung gemacht.

§. 1.

Zwei arithmetische Functionen $\chi(x)$, $\chi_1(x)$ heissen conjugirt, wenn die über alle Theiler d einer ganzen positiven Zahl

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

ausgedehnte Summe

$$1) \qquad \sum_d \chi(d)\,\chi_1\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1=\alpha_1, \lambda_2=\alpha_2, \ldots, \lambda_r=\alpha_r} \chi(p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \cdots p_r^{\lambda_r})\,\chi_1(p_1^{\alpha_1-\lambda_1} p_2^{\alpha_2-\lambda_2} \cdots p_r^{\alpha_r-\lambda_r})$$

den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem $n > 1$ oder $n = 1$ ist.

Für diese Functionen gilt folgendes Theorem:

Ist für alle theilerfremden Werthepaare x, y

$$\chi(xy) = \chi(x)\,\chi(y),$$

so besteht für dieselben auch die Gleichung

$$\chi_1(xy) = \chi_1(x)\,\chi_1(y).$$

Gilt die Gleichung 2) für jedes aus r Primzahlen zusammengesetzte Product xy, in welchem wenigstens der Exponent eines der Primfactoren p_k kleiner als α_k ($k = 1, 2, \ldots, r$) ist, so ergibt sich aus 1) die Relation

$$\chi_1(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}) = -\sideset{}{'}\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1=\alpha_1, \lambda_2=\alpha_2, \ldots, \lambda_r=\alpha_r} \chi(p_1^{\lambda_1})\chi(p_2^{\lambda_2})\cdots\chi(p_r^{\lambda_r})\chi_1(p_1^{\alpha_1-\lambda_1})\chi_1(p_2^{\alpha_2-\lambda_2})\cdots\chi_1(p_r^{\alpha_r-\lambda_r}),$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur solche Summanden auftreten, in denen mindestens einer der Exponenten λ_k von Null verschieden ist. Das Aggregat aller Glieder dieser Summe, in denen λ_r einen der Werthe $1, 2, \ldots, \alpha_r$ besitzt, ist offenbar gleich

$$-\chi_1(p_r^{\alpha_r}) \prod_{k=1}^{r-1} \sum_{\lambda_k=0}^{\lambda_k=\alpha_k} \chi(p_k^{\lambda_k})\chi_1(p_k^{\alpha_k-\lambda_k}),$$

und hat daher den Werth 0, weil nach 1) alle $r-1$ Factoren des auftretenden Productes verschwinden. Die letzte Gleichung verwandelt sich in die folgende:

$$\chi_1(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}) = -\chi_1(p_r^{\alpha_r}) \sideset{}{'}\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1} = 0}^{\lambda_1=\alpha_1, \lambda_2=\alpha_2, \ldots, \lambda_{r-1}=\alpha_{r-1}} \chi(p_1^{\lambda_1})\chi(p_2^{\lambda_2})\cdots\chi(p_{r-1}^{\lambda_{r-1}})\chi_1(p_1^{\alpha_1-\lambda_1})\chi_1(p_2^{\alpha_2-\lambda_2})\cdots\chi_1(p_{r-1}^{\alpha_{r-1}-\lambda_{r-1}}).$$

Vereinigt man in der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Summe wieder alle Glieder, in denen $\lambda_{r-1} = 0$ ist, und diejenige, in denen es einen von Null verschiedenen Werth besitzt, u. s. f., so erhält man schliesslich die Beziehung

$$\chi_1(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}) = -\chi_1(p_2^{\alpha_2})\chi_1(p_3^{\alpha_3})\cdots\chi_1(p_r^{\alpha_r}) \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\alpha_1} \chi_1(p_1^{\alpha_1-\lambda_1})\chi(p_1^{\lambda_1}),$$

oder endlich nach 1)

3) $$\chi_1(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}) = \prod_{\lambda=1}^{r} \chi_1(p_\lambda^{\alpha_\lambda}).$$

Da nun offenbar

$$\chi(1) = 1$$

ist, so hat man nach 1)

$$\chi_1(1) = 1, \; \chi_1(p_1 p_2 \cdots p_r) = (-1)^r \chi(p_1 p_2 \cdots p_r),$$

woraus die Beziehung

$$\chi_1(p_1 p_2 \cdots p_r) = \prod_{\lambda=1}^{r} \chi_1(p_\lambda)$$

folgt, und demnach besteht die Gleichung 3) für alle ganzzahligen, nicht negativen Werthe der Exponenten α_k und der Grösse r.

Auf Grund dieser Eigenschaft lässt sich sofort $\chi_1(n)$ durch $\chi(n)$ ausdrücken. Nach 1) ist nämlich

4) $$\chi_1(p^\alpha) = (-1)^\alpha \begin{vmatrix} \chi(p), & \chi(p^2), & \ldots, & \chi(p^{\alpha-1}), & \chi(p^\alpha) \\ 1, & \chi(p), & \ldots, & \chi(p^{\alpha-2}), & \chi(p^{\alpha-1}) \\ 0, & 1, & \ldots, & \chi(p^{\alpha-3}), & \chi(p^{\alpha-2}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & \chi(p), & \chi(p^2) \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & \chi(p) \end{vmatrix}$$

und daher besteht die Formel

$$
5)\qquad \chi_1(n) = \prod_{k=1}^{r} (-1)^{\alpha_k} \begin{vmatrix} \chi(p_k) & \chi(p_k^2), & \ldots, & \chi(p_k^{\alpha_k-1}), & \chi(p_k^{\alpha_k}) \\ 1, & \chi(p_k), & \ldots, & \chi(p_k^{\alpha_k-2}), & \chi(p_k^{\alpha_k-1}) \\ 0, & 1, & \ldots, & \chi(p_k^{\alpha_k-3}), & \chi(p_k^{\alpha_k-2}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & \chi(p_k), & \chi(p_k^2) \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & \chi(p_k) \end{vmatrix}
$$

Es mögen nun für einige Specialisirungen von $\chi(x)$ die conjugirten Functionen ermittelt werden.

α) Die Function $\chi(x)$ habe den Werth x^k oder 0, je nachdem x eine ρ^{te} Potenz ist, oder nicht. Als dann haben, falls $\alpha < \rho$ ist, sämmtliche Elemente der letzten Verticalreihe der in der Gleichung 4) vorkommenden Determinante den Werth 0, während für $\alpha \geqq 2\rho$ die correspondirenden Elemente zweier Verticalreihen einander proportional werden; ist aber $\alpha = \rho + \tau\ (\rho > \tau > 0)$, so kann diese Determinante dadurch, dass man die mit p^ρ multiplicirten Elemente der $(\alpha-\tau)^{\text{ten}}$ Horizontalreihe von den entsprechenden Elementen der ersten subtrahirt, in eine andere verwandelt werden, die in der ersten Horizontalreihe lauter Nullen besitzt. Es ist demnach in diesem Falle

$$
\chi_1(p^\alpha) = \begin{cases} -p^{\alpha k} & (\alpha = \rho) \\ 0 & (\alpha \gtrless \rho) \end{cases}
$$

und demnach hat $\chi_1(n)$ den Werth $(-1)^{\bar{\omega}(n)} n^k$ oder 0, je nachdem $\sqrt[\rho]{n}$ eine durch kein Quadrat theilbare ganze Zahl ist, oder nicht, d. h. es ist

$$
\chi_1(n) = \mu(\sqrt[\rho]{n})\, n^k .
$$

β) Es sei ferner

$$
\chi(x) = \varphi_k(x).
$$

Werden in diesem Falle die Elemente der vorletzten Verticalreihe der in der Gleichung 4) vorkommenden Determinante von denen der letzten subtrahirt, so ergibt sich wegen

$$
\varphi_k(p^\lambda) - \varphi_k(p^{\lambda-1}) = \varphi_k(p)\varphi_k(p^{\lambda-1})
$$

die Beziehung

$$
\chi_1(p^\alpha) = \chi_1(p^{\alpha-1}),
$$

welche zu der Gleichung

$$
\chi_1(p^\alpha) = -\varphi_k(p)
$$

führt. Man erhält daher für diesen Werth von $\chi(x)$ die Gleichung

$$
\chi_1(n) = \frac{(-1)^{\bar{\omega}(n)} \pi_1^k(n) \varphi_k(n)}{n^k}\ {}^{*},
$$

in welcher $\pi_1(n)$ das Product aller Primtheiler von n vorstellt.

---

* Ich will bei dieser Gelegenheit mittheilen, dass zwischen der Summe $\varphi^{(k)}(n)$ der k^{ten} Potenzen derjenigen ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$, welche zu n theilerfremd sind, und der Anzahl $\varphi_r(n)$ von je r (gleichen oder verschiedenen) ganzzahligen Individuen dieses Bereiches, deren grösster gemeinsamer Theiler zu n theilerfremd ist, folgende Beziehung besteht:

$$
\varphi^{(k)}(n) = \frac{n^k}{k+1}\varphi_1(n) + (-1)^{\bar{\omega}(n)}\pi_1(n) \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^{\lambda-\lambda} \binom{k}{2\lambda} \frac{B_{2\lambda-1}\,\varphi_{2\lambda-1}(n)\,\pi_1(n)^{2\lambda-2}\,n^{k-2\lambda}}{k-2\lambda+1} \cdot (\varphi_1(n) = \varphi(n))
$$

Den speciellen Fall $(k = 2:\ 6\varphi^{(2)}(n) = 2\varphi(n)n^2 + (-1)^{\bar{\omega}(n)}\pi_1(n)\varphi(n)$ derselben hat Herr Bugajef im 13. Bande der zweiten Serie der »Nouvelles Annales« angegeben.

γ) Es sei endlich

$$\chi(x) = x^k \lambda_\sigma(x).$$

Ist in diesem Falle $\alpha < \sigma$, so werden sämmtliche Elemente auf der rechten Seite der Hauptdiagonale in der für $\chi_1(p^\alpha)$ aufgestellten Determinante gleich Null, während jedes der Diagonalglieder den Werth $-p^k$ hat; ist aber $\alpha < \sigma+2$, so sind die Elemente der $(\sigma+1)^{\text{ten}}$ Verticalreihe das $p^{\sigma k}$fache der entsprechenden Elemente der ersten. Multiplicirt man endlich, falls $\alpha = \sigma+\rho (\rho = 1, 2)$ ist, die Elemente der ρ^{ten} Verticalreihe mit $p^{\sigma k}$, subtrahirt sie von den correspondirenden Elementen der letzten und entwickelt sodann die dadurch entstehende Determinante nach den Elementen der letzten Verticalreihe, so ergibt sich, dass dieselbe das Product aus $-p^k$ und der dem Werthe $\alpha = \sigma+\rho-1$ entsprechenden Determinante ist. Da nun aber für $\sigma = \alpha$ die Determinante den Werth 0 hat, wie man durch Entwicklung nach den Elementen der letzten Verticalreihe ersicht, so erkennt man, dass

$$\chi_1(p^\alpha) = \begin{cases} p^{\alpha k} & (\alpha < \sigma) \\ 0 & (\alpha \geqq \sigma) \end{cases}$$

und demnach

$$\chi_1(n) = \begin{cases} n^k \\ 0 \end{cases}$$

ist, je nachdem n durch eine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, oder nicht, d. i.

$$\chi_1(n) = \mu_\sigma(n)\, n^k.$$

§. 2.

Nimmt man in der über alle Theiler d der ganzen Zahl n erstreckten Summe

1) $$\sum_d f\left(\left[\frac{m}{d}+\beta\right]\right)\chi(d) = X(m, n)$$

für m und n $\frac{m}{\delta}$, beziehungsweise $\frac{n}{\delta}$, multiplicirt sodann mit $\chi_1(\delta)$ und summirt bezüglich δ über alle Theiler von n, so erhält man die Beziehung

$$\sum_\delta X\left(\frac{m}{\delta}, \frac{n}{\delta}\right)\chi_1(\delta) = \sum_{\delta, \delta_1} f\left(\left[\frac{m}{\delta\delta_1}+\beta\right]\right)\chi_1(\delta)\chi(\delta_1),$$

wo die Summation nach δ_1 über alle Theiler von $\frac{n}{\delta}$ auszudehnen ist. Die Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung kann man offenbar in folgender Weise schreiben

$$\sum_d f\left(\left[\frac{md}{n}+\beta\right]\right)\left(\sum_{d_1}\chi(d_1)\chi_1\left(\frac{n}{dd_1}\right)\right),$$

wo die Summation bezüglich d_1 über alle Theiler von $\frac{n}{d}$ zu erstrecken ist. Da nun aber die auf d_1 bezügliche Summe stets den Werth 0 hat (§. 1), ausser wenn $\frac{n}{d} = 1$ ist, so erhält man schliesslich die Relation

2) $$\sum_d X\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)\chi_1(d) = f([m+\beta]).$$

Von den speciellen Fällen derselben mögen an dieser Stelle nur die zwei Beziehungen

$$\sum_d \varphi^{(k)}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) d^k \mu(d) = S_k([m])$$

$$\sum_d \varphi_k\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)\mu(d) = [m]^k$$

erwähnt werden, in denen $\varphi^{(k)}(m, n)$ die Summe der k^{ten} Potenzen aller m nicht überschreitenden ganzen positiven Zahlen vorstellt, welche zu n theilerfremd sind, während $\varphi_k(m, n)$ die Anzahl derjenigen Systeme von k Individuen des genannten Bereiches ist, deren grösster gemeinsamer Theiler zu n theilerfremd ist. Den speciellen Fall $k = 0$ der ersten, beziehungsweise $k = 1$ der zweiten Gleichung hat Herr Professor Kronecker in seinen im Wintersemester 1885/86 an der Berliner Universität gehaltenen Vorlesungen über Zahlentheorie mitgetheilt, wie ich aus einem mir vorliegenden Collegienhefte ersehe.

Genügt die Function $\chi(x)$ für jedes theilerfremde Werthepaar x, y der Relation

$$\chi(xy) = \chi(x)\,\chi(y),$$

so lässt sich die Formel 2) wesentlich verallgemeinern, wie jetzt gezeigt werden soll.

Bezeichnet man mit $d_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varsigma}$ irgend einen Theiler von $\dfrac{n}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\varsigma^{\alpha_\varsigma}}$, so ist nach 1) (§. 2) offenbar

$$X\left(\frac{m}{p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \ldots p_\varsigma^{\mu_\varsigma}}, \frac{n}{p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \ldots p_\varsigma^{\mu_\varsigma}}\right) =$$
$$\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_\varsigma = 0}^{k_1 = \alpha_1 - \mu_1,\, k_2 = \alpha_2 - \mu_2, \ldots,\, k_\varsigma = \alpha_\varsigma - \mu_\varsigma} \chi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_\varsigma^{k_\varsigma}) \left(\sum_{d_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varsigma}} \chi(d_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varsigma})\, f\left(\left[\frac{m}{p_1^{\mu_1 + k_1} p_2^{\mu_2 + k_2} \ldots p_\varsigma^{\mu_\varsigma + k_\varsigma}\, d_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varsigma}} + \beta\right]\right)\right).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\chi_1(p_1^{\mu_1 - \rho_1} p_2^{\mu_2 - \rho_2} \ldots p_\varsigma^{\mu_\varsigma - \rho_\varsigma})$ und summirt bezüglich μ_k von ρ_k bis α_k, so entsteht die Beziehung

$$\sum_{\mu_1 = \rho_1,\, \mu_2 = \rho_2, \ldots,\, \mu_\varsigma = \rho_\varsigma}^{\mu_1 = \alpha_1,\, \mu_2 = \alpha_2, \ldots,\, \mu_\varsigma = \alpha_\varsigma} X\left(\frac{m}{p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \ldots p_\varsigma^{\mu_\varsigma}}, \frac{n}{p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \ldots p_\varsigma^{\alpha_\varsigma}}\right) \chi_1(p_1^{\mu_1 - \rho_1} p_2^{\mu_2 - \rho_2} \ldots p_\varsigma^{\mu_\varsigma - \rho_\varsigma}) =$$
$$\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_\varsigma = 0;\; \mu_1 = \rho_1,\, \mu_2 = \rho_2, \ldots,\, \mu_\varsigma = \rho_\varsigma}^{k_1 = \alpha_1 - \mu_1,\, k_2 = \alpha_2 - \mu_2, \ldots,\, k_\varsigma = \alpha_\varsigma - \mu_\varsigma;\; \mu_1 = \alpha_1,\, \mu_2 = \alpha_2, \ldots,\, \mu_\varsigma = \alpha_\varsigma} \chi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_\varsigma^{k_\varsigma}).$$
$$\chi_1(p_1^{\mu_1 - \rho_1} p_2^{\mu_2 - \rho_2} \ldots p_\varsigma^{\mu_\varsigma - \rho_\varsigma}) \left(\sum_{d_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varsigma}} \chi(d_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varsigma})\, f\left(\left[\frac{m}{p_1^{\mu_1 + k_1} p_2^{\mu_2 + k_2} \ldots p_\varsigma^{\mu_\varsigma + k_\varsigma}\, d_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varsigma}} + \beta\right]\right)\right).$$

Vereinigt man in der auf der rechten Seite derselben stehenden Summe alle Glieder, in denen $\mu_\lambda + k_\lambda$ den Werth $\rho_\lambda + \tau_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, \varsigma)$ hat, so ist deren Aggregat gleich

$$\sum_{d_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varsigma}} \chi(d_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varsigma})\, f\left(\left[\frac{m}{p_1^{\rho_1 + \tau_1} p_2^{\rho_2 + \tau_2} \ldots p_\varsigma^{\rho_\varsigma + \tau_\varsigma}\, d_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varsigma}} + \beta\right]\right). \prod_{1}^{\varsigma}{}_{\nu} \sum_{k_\nu = 0}^{k_\nu = \tau_\nu} \chi(p_\nu^{k_\nu})\, \chi_1(p_\nu^{\tau_\nu - k_\nu}),$$

und demnach nur dann von Null verschieden, wenn

$$\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_\varsigma = 0$$

ist. Man hat daher die Relation

$$3)\qquad \sum_{\tau} X\left(\frac{m}{\tau}, \frac{n}{\tau}\right) \chi_1(\tau) = X\left(\frac{m}{p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \ldots p_\varsigma^{\rho_\varsigma}}, \frac{n}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\varsigma^{\alpha_\varsigma}}\right),$$

in welcher die Summation bezüglich τ über alle Theiler von n zu erstrecken ist, welche nur aus den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_\varsigma$ zusammengesetzt sind, von diesen aber p_k mindestens in der ρ_k^{ten} Potenz enthalten, und speciell

$$4)\qquad \sum_{d_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varsigma}} X\left(\frac{m}{d_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varsigma}}, \frac{n}{d_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varsigma}}\right) \chi_1(d_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varsigma}) = X\left(m, \frac{n}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\varsigma^{\alpha_\varsigma}}\right).$$

Für

$$\varsigma = r,\; \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_r = 0$$

geht die eben aufgestellte allgemeine Formel in die Relation 2) über, die nun auf Grund der eben abgeleiteten Resultate sofort in bemerkenswerther Weise umgeformt werden soll.

Das Aggregat aller jener Glieder der auf der linken Seite von 2) stehenden Summe, in denen d genau aus σ Primzahlen zusammengesetzt ist, hat nach 3) den Werth

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma=1}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma=r} X\left(\frac{m}{p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots p_{\lambda_\sigma}}, \frac{n}{p_{\lambda_1}^{\alpha_{\lambda_1}} p_{\lambda_2}^{\alpha_{\lambda_2}}\cdots p_{\lambda_\sigma}^{\alpha_{\lambda_\sigma}}}\right)(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma)^2,$$

wenn mit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\sigma)$ diejenige quadratische Determinante bezeichnet wird, welche aus

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0,\ldots, & 0 \\ 0, & 1, & 0,\ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0,\ldots, & 1 \end{vmatrix}$$

durch Ersetzung der γ^{ten} Horizontalreihe durch die $\lambda_\gamma^{\text{te}}$ (für $\gamma = 1, 2, \ldots \sigma$) abgeleitet wird, und demnach kann 2) auch in folgender Weise geschrieben werden:

5) $$f([m+\beta]) = X(m,n) + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma=1}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma=r} (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma)^2 X\left(\frac{m}{p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots p_{\lambda_\sigma}}, \frac{n}{p_{\lambda_1}^{\alpha_{\lambda_1}} p_{\lambda_2}^{\alpha_{\lambda_2}}\cdots p_{\lambda_\sigma}^{\alpha_{\lambda_\sigma}}}\right)$$

Von den speciellen Fällen dieser Relation mögen hier die zwei folgenden angegeben werden:

$$[m]^k = \varphi_k(m,n) + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma=1}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma=r} (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma)^2 \varphi_k\left(\frac{m}{p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots p_{\lambda_\sigma}}, \frac{n}{p_{\lambda_1}^{\alpha_{\lambda_1}} p_{\lambda_2}^{\alpha_{\lambda_2}}\cdots p_{\lambda_\sigma}^{\alpha_{\lambda_\sigma}}}\right)$$

$$S_k([m]) = \varphi^{(k)}(m,n) + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma=1}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma=r} (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma)^2 \varphi^{(k)}\left(\frac{m}{p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots p_{\lambda_\sigma}}, \frac{n}{p_{\lambda_1}^{\alpha_{\lambda_1}} p_{\lambda_2}^{\alpha_{\lambda_2}}\cdots p_{\lambda_\sigma}^{\alpha_{\lambda_\sigma}}}\right)$$

Setzt man in der ersteren

$$m = n, \quad k = 1,$$

so erhält man den einzigen bisher veröffentlichten speciellen Fall der allgemeinen Formel 5)

$$n = \varphi(n) + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma=1}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma=r} (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma)^2 \varphi\left(\frac{n}{p_{\lambda_1}^{\alpha_{\lambda_1}} p_{\lambda_2}^{\alpha_{\lambda_2}}\cdots p_{\lambda_\sigma}^{\alpha_{\lambda_\sigma}}}\right) p_{\lambda_1}^{\alpha_{\lambda_1}-1} p_{\lambda_2}^{\alpha_{\lambda_2}-1}\cdots p_{\lambda_\sigma}^{\alpha_{\lambda_\sigma}-1}$$

welchen Herr Pépin im 14. Bande der zweiten Serie der »Nouvelles Annales« ohne Beweis mitgetheilt und Herr Moret Blanc an demselben Orte bewiesen hat.

Multiplicirt man die Gleichung 4) mit $\chi(p_1^{\rho_1}, p_2^{\rho_2}\ldots p_\sigma^{\rho_\sigma})$ und summirt bezüglich ρ_k von 0 bis α_k, so erhält man auf dem angegebenen Wege noch die weitere Relation

6) $$\sum_{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\sigma=0}^{\rho_1=\alpha_1,\ \rho_2=\alpha_2,\ldots,\rho_\sigma=\alpha_\sigma} X\left(\frac{m}{p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2}\cdots p_\sigma^{\rho_\sigma}}, \frac{n}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\cdots p_\sigma^{\alpha_\sigma}}\right)\chi(p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2}\ldots p_\sigma^{\rho_\sigma}) = X(m,n).$$

Dieselbe ist eine Verallgemeinerung der Gleichung 1), in welche sie für $\sigma = r$ übergeht.

§. 3.

Es soll nun auf den speciellen Fall

$$f(x) = x, \ \beta = 0$$

der Gleichung 1) des vorigen Paragraphes näher eingegangen werden.

Schreibt man in der Gleichung

$$(m)=\sum_{x_\lambda=(m)}\left[\frac{m}{x_\lambda}\right]\chi(x_\lambda),$$

in welcher die Summation nach x_λ über alle die positive Zahl m nicht überschreitenden ganzen Zahlen auszudehnen ist, welche eine bestimmte, durch den Index λ charakterisirte Eigenschaft besitzen, für m: $m-1$ und subtrahirt die dadurch entstehende Relation von der ursprünglichen, so erhält man, da die Differenz

1) $$\left[\frac{m}{x_\lambda}\right]-\left[\frac{m-1}{x_\lambda}\right]$$

den Werth $+1$ oder 0 besitzt, je nachdem x_λ ein Theiler von $[m]$ ist oder nicht, die Gleichung

$$(m)=(m-1)+X_\lambda(m),$$

in welcher $X_\lambda(m)$ die Summe der Werthe vorstellt, welche die Function $X(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle zu den Zahlen x_λ gehörigen Theiler d_λ der ganzen Zahl $[m]$ durchläuft. Man hat daher die Beziehung

2) $$\sum_{x_\lambda=(m)}\left[\frac{m}{x_\lambda}\right]\chi(x_\lambda)=\sum_{x=1}^{x=[m]}X_\lambda(x).$$

Ist r irgend eine ganze Zahl und $1\leqq t\leqq r$ ein Theiler derselben, so folgt aus 2) die Beziehung

3) $$\sum_{x_\lambda=(rm)}\left\{\left[\frac{rm}{x_\lambda}\right]-\left[\frac{tm}{x_\lambda}\right]\right\}\chi(x_\lambda)=\sum_{x=[tm+1]}^{x=[rm]}X_\lambda(x).$$

Nun ergeben sich aber aus der Gleichung

$$s=[s]+\varepsilon_s,$$

in welcher

$$\frac{k}{r}\leqq\varepsilon_s<\frac{k+1}{r}\quad(k\text{ ganzzahlig, nicht negativ, kleiner als }r)$$

ist, sofort die Relationen

$$[rs]=r[s]+k$$

$$\left[s+\frac{a}{r}\right]=s+\left[\frac{k+a}{r}\right],$$

welche zu der Formel

$$\sum_{a=0}^{a=r-1}\left[s+\frac{a}{r}\right]=r[s]+\sum_{a=0}^{a=r-1}\left[\frac{k+a}{r}\right]$$

führen. Da $\frac{k+a}{r}$ für $a=0,1,2,\ldots,r-k-1$ kleiner als 1, für $a=r-k+1,r-k+2,\ldots,r-1$ kleiner als 2 und nicht kleiner als 1 ist, so wird

$$\sum_{a=0}^{a=r-1}\left[\frac{k+a}{r}\right]=k$$

und demnach ergibt sich die von Hermite, mir und Stern bewiesene Formel

4) $$[rs]=\sum_{a=0}^{a=r-1}\left[s+\frac{a}{r}\right].$$

Die Gleichung 3) kann daher in folgender Form geschrieben werden:

$$5)\qquad \sum_{a;\; x_\lambda=(rm)} \left[\frac{m}{x_\lambda}+\frac{a}{r}\right]\chi(x_\lambda) = \sum_{x=[tm+1]}^{x=[rm]} X_\lambda(x),$$

wo die Summation bezüglich x_λ über alle $[rm]$ nicht überschreitenden ganzen, mit der durch den Index λ charakterisirten Eigenschaft begabten Zahlen, bezüglich a aber über alle durch t nicht theilbaren (beziehungsweise für $t=1$ über alle) ganzzahligen Individuen des Bereiches $1\ldots r-1$ zu erstrecken ist.

Es seien nun die Zahlen x_λ sämmtliche Theiler einer ganzen Zahl n; alsdann ist

$$X_\lambda(x) = \sum_{d'} \chi(d')$$
$$= X([n, x]),$$

wo die Summation nach d' über alle Theiler von x zu erstrecken ist, welche zugleich Theiler von n sind, d. i. also über alle Theiler des grössten gemeinsamen Theilers $[n, x]$ von n und x und daher hat man die Gleichungen

$$6)\qquad \sum_{d} \left[\frac{m}{d}\right]\chi(d) = \sum_{x=1}^{x=[m]} X([n, x])$$

$$7)\qquad \sum_{a;\, d} \left[\frac{m}{d}+\frac{a}{r}\right]\chi(d) = \sum_{x=[tm+1]}^{x=[rm]} X([n, x]),$$

in denen die Summation nach d über alle Theiler von n ausgedehnt werden muss.

Es mögen nun zunächst einige specielle Fälle dieser allgemeinen Relationen behandelt werden.

α) Hat $\chi(x)$ den Werth $\mu(x)$ oder 0, je nachdem x die σ^{te} Potenz einer ganzen Zahl ist, oder nicht, so wird

$$\chi(x) = \mu_\sigma(x)$$

und demnach stellt die über alle Theiler d_σ von n, deren complementärer Divisor eine σ^{te} Potenz ist, erstreckte Summe

$$8)\qquad \sum_{d_\sigma} \left[\frac{md_\sigma}{n}\right]\mu\left(\sqrt[\sigma]{\frac{n}{d_\sigma}}\right) = \mathfrak{Q}_\sigma(m, n)$$

die Anzahl derjenigen ganzen Zahlen des Bereiches $1\ldots m$ dar, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, und es wird

$$\sum_{a,\, d_\sigma} \left[\frac{md_\sigma}{n}+\frac{a}{r}\right]\mu\left(\sqrt[\sigma]{\frac{n}{d_\sigma}}\right) = \mathfrak{Q}_\sigma(m, n) - \mathfrak{Q}_\sigma(tm, n).$$

Setzt man speciell $\sigma=1$, so ergeben sich die bekannten Relationen

$$\sum_{d_1} \left[\frac{m}{d_1}\right]\mu(d_1) = \varphi(m, n)$$

$$\sum_{a_1 d_1} \left[\frac{m}{d_1}+\frac{a}{r}\right]\mu(d_1) = \varphi(rm, n) - \varphi(tm, n).$$

Ist n die grösste durch die Primzahlen $q_1, q_2, \ldots, q_\tau$ nicht theilbare ganze Zahl des Intervalles $1 \ldots m$, so gibt $\varphi(m, n)$ die Anzahl der nur aus diesen Primzahlen und der Einheit zusammensetzbaren Individuen desselben an. Es stellt daher die Summe

$$\sum_{d'} \left[\frac{m}{d'}\right] \mu(d'),$$

in welcher die Summation nach d' über die aus sämmtlichen $\Theta(m)$, m nicht überschreitenden Primzahlen mit Ausnahme einer einzigen q und der Einheit zusammensetzbaren Zahlen ausgedehnt wird, die Anzahl der dem eben genannten Bereiche angehörigen Potenzen von q (einschliesslich der 0ten), oder, was dasselbe ist, die Anzahl der Ziffern vor, welche bei der Darstellung von $[m]$ im q-adischen Systeme zur Verwendung gelangen, so dass also

$$\sum_{d'} \left[\frac{m}{d'}\right] \mu(d') = \left[\frac{\log m}{\log q}\right] + 1$$

$$\sum_{a,\, d''} \left[\frac{m}{d''} + \frac{a}{r}\right] \mu(d'') = \left[\frac{\log rm}{\log q}\right] - \left[\frac{\log tm}{\log q}\right]$$

ist, wo d'' in Bezug auf rm dieselbe Bedeutung hat wie d' bezüglich m, und speciell

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m+1}{2}\right]} \left[\frac{m}{2x-1}\right] \mu(2x-1) = \left[\frac{\log m}{\log 2}\right] + 1$$

9) $$\sum_{a;\, x=1}^{x=[rm]} \left[\frac{m}{x} + \frac{a}{r}\right] \mu(x) = \begin{cases} 0 & (m \geqq 1;\ m < \frac{1}{r}) \\ 1 & (\frac{1}{r} \leqq m < \frac{2}{r}) \end{cases}$$

$$\left(\sum_{x=1}^{x=[2m]} \left[\frac{m}{x} + \frac{1}{2}\right] \mu(x)\right)_{\sqrt{2m}} = \Theta(2m) - \Theta(m) \quad (m \geqq \sqrt{2m}),$$

wo durch die an die Summe angehängte Zahl ($\sqrt{2m}$) angezeigt wird, dass der Summationsbuchstabe nur jene ganzzahlige Werthe des ihm angewiesenen Intervalles zu durchlaufen hat, welche aus der Einheit und den $\sqrt{2m}$ nicht übersteigenden Primzahlen gebildet sind. Durch die letzte Gleichung wird, wie ich an einem andern Orte * gezeigt habe, der folgende im ersten Bande der »Théorie des nombres« von Edouard Lucas ohne Beweis mitgetheilte arithmetische Satz des Herrn J. J. Sylvester begründet.

Bezeichnet $H\left(\frac{x}{a}\right)$ die Zahl $\frac{x}{a}$, wenn der in dieser Zahl enthaltene echte Bruch $\frac{1}{2}$ ist, und in allen anderen Fällen die an $\frac{x}{a}$ zunächst liegende ganze Zahl, so ist die Anzahl der Primzahlen, welche grösser als m und nicht grösser als $2m$ sind, durch die in der Summe

$$\left(\sum_{x=1}^{x=[2m]} H\left(\frac{m}{x}\right) \mu(x)\right)_{\sqrt{2m}}$$

enthaltene grösste ganze Zahl gegeben.

Für die Function $\Omega_\tau(m, n)$ bestehen nach den Entwicklungen des Paragraphes 2 folgende vier Relationen:

---

* Berichte des naturwissenschaftlich-medicinischen Vereines in Innsbruck. Jahrgang 1893. Ich habe das von J. J. Sylvester und E. Lucas gebrauchte Wort »kleiner« durch »nicht grösser« ersetzt, damit der Satz für jedes reelle positive m gilt.

10) $$\sum_{d_\sigma} \mathfrak{Q}_\sigma\left(\frac{md_\sigma}{n}, d_\sigma\right) = [m].$$

$$\sum_{d_\sigma}{}' \mathfrak{Q}_\sigma\left(\frac{md_\sigma}{n}, d_\sigma\right) = \mathfrak{Q}_\sigma\left(\frac{m}{p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \ldots p_\mu^{\rho_\mu}}, \frac{n}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\mu^{\alpha_\mu}}\right),$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Theiler d_σ zu nehmen sind, deren complementärer Divisor nur aus den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ zusammengesetzt ist, von diesen aber p_k mindestens in der ρ_k^{ten} Potenz enthält,

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=r} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau = 1}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau = r} (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\tau)^2 \mathfrak{Q}_\sigma\left(\frac{m}{p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \ldots p_{\lambda_\tau}}, -\frac{n}{p_{\lambda_1}^{\alpha_{\lambda_1}} p_{\lambda_2}^{\alpha_{\lambda_2}} \ldots p_{\lambda_\tau}^{\alpha_{\lambda_\tau}}}\right) + \mathfrak{Q}_\sigma(m, n) = [m]$$

$$\sum_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\tau = 0}^{\rho_1 = \left[\frac{\alpha_1}{\sigma}\right], \rho_2 = \left[\frac{\alpha_2}{\sigma}\right], \ldots, \rho_\tau = \left[\frac{\alpha_\tau}{\sigma}\right]} \mathfrak{Q}_\sigma\left(\frac{m}{p_1^{\rho_1 \sigma} p_2^{\rho_2 \sigma} \ldots p_\tau^{\rho_\tau \sigma}}, \frac{n}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\tau^{\alpha_\tau}}\right) \mu(p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \ldots p_\tau^{\rho_\tau}) = \mathfrak{Q}_\sigma(m, n).$$

Die erste von diesen Formeln ist, wie sofort gezeigt werden soll, in einer weit allgemeineren als specieller Fall enthalten. Schreibt man nämlich in der Gleichung 8) für m und n $\frac{md_\mu}{n}$, beziehungsweise d_μ, multiplicirt sodann mit $k\left(\frac{n}{d_\mu}\right)$ und summirt bezüglich d_μ über alle Theiler von n, deren complementärer Divisor eine μ^{te} Potenz ist, so erhält man die Beziehung

$$\sum_{d_\mu} \mathfrak{Q}_\sigma\left(\frac{md_\mu}{n}, d_\mu\right) k\left(\frac{n}{d_\mu}\right) = \sum_{d_\mu, \delta_\sigma} \left[\frac{m\, d_\mu^2\, \delta_\sigma}{n^2}\right] \mu\left(\sqrt[\sigma]{\frac{d_\mu}{\delta_\sigma}}\right) k\left(\frac{n}{d_\mu}\right),$$

in welcher die Summation bezüglich δ_σ über alle Theiler von d_μ zu erstrecken ist, deren complementärer Divisor eine σ^{te} Potenz ist.

Ist nun die über alle der Bedingung

$$x^\sigma y^\mu = z$$

genügenden ganzzahligen positiven Werthepaare x, y ausgedehnte Summe

$$\sum_{x, y} \mu(x) k(y^\mu) = K(z),$$

so verwandelt sich diese Relation offenbar in die folgende:

11) $$\sum_{d_\mu} \mathfrak{Q}_\sigma\left(\frac{md^\mu}{n}, d_\mu\right) k\left(\frac{n}{d_\mu}\right) = \sum_z \left[\frac{m}{z}\right] K(z),$$

in welcher die Summation bezüglich z über alle Theiler der ganzen Zahl n zu erstrecken ist, welche ein Product aus einer μ^{ten} und einer σ^{ten} Potenz sind.

Setzt man in dieser Relation der Reihe nach speciell

$$k(x) = 1, \quad \sigma = k\mu; \quad h(x) = 1, \quad \mu = k\sigma$$

$$k(x) = \lambda_\rho(\sqrt[\lambda]{x}), \quad \mu = \lambda, \quad \sigma = \lambda_\rho$$

$$k(x) = \mu_\rho(\sqrt[\sigma]{x}), \quad \mu = \sigma$$

$$k(x) = \rho_{k,\sigma}(x), \quad \mu = 1,$$

so wird

$$K(x)=\begin{cases}\mu_k(\sqrt[\mu]{x})\\ 0\end{cases}; \quad K(x)=\begin{cases}\lambda_k(\sqrt[\sigma]{x})\\ 0\end{cases}$$

$$K(x)=\begin{cases}\mu(\sqrt[\lambda]{x})\\ 0\end{cases}$$

$$K(x)=\begin{cases}\mu(\sqrt[\rho\sigma]{x})\\ 0\end{cases}$$

je nachdem x eine μ^{te}, beziehungsweise σ^{te}, bez. λ^{te}, bez. $(\rho\sigma)^{\text{te}}$ Potenz ist, oder nicht,

$$K(x)=x^k,$$

und daher hat man die Gleichungen

$$\sum_{d_\mu}\mathfrak{Q}_{k\mu}\Big(\frac{md_\mu}{n}, d_\mu\Big)=\sum_{d_\mu}\mu_k\Big(\sqrt[\mu]{\frac{n}{d_\mu}}\Big)\Big[\frac{md_\mu}{n}\Big]$$

$$\sum_{d_{k\sigma}}\mathfrak{Q}_\sigma\Big(\frac{md_{k\sigma}}{n}, d_{k\sigma}\Big)=\sum_{d_\sigma}\Big[\frac{md_\sigma}{n}\Big]\lambda_k\Big(\sqrt[\sigma]{\frac{n}{d_\sigma}}\Big)$$

$$\sum_{d_\lambda}\mathfrak{Q}_{\lambda\rho}\Big(\frac{md_\lambda}{n}, d_\lambda\Big)\lambda_\rho\Big(\sqrt[\lambda]{\frac{n}{d_\lambda}}\Big)=\mathfrak{Q}_\lambda(m, n)$$

$$\sum_{d_\sigma}\mathfrak{Q}_\sigma\Big(\frac{md_\sigma}{n}, d_\sigma\Big)\mu_\rho\Big(\sqrt[\sigma]{\frac{n}{d_\sigma}}\Big)=\mathfrak{Q}_{\rho\sigma}(m, n)$$

$$\sum_{d}\mathfrak{Q}_\sigma\Big(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\Big)\rho_{k,\sigma}(d)=\sum_{x=1}^{x=[m]}\psi_k([n, x])$$

und speciell

$$\sum_{d}\mathfrak{Q}_\rho\Big(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\Big)\lambda_\rho(d)=\varphi(m, n).$$

Für $k=1$ gehen die erste und zweite von diesen Formeln in die Relation 10) über.

β) Ist ferner

$$\chi(x)=\lambda_\sigma(x),$$

so hat $X(x)$ den Werth 1 oder 0, je nachdem x eine σ^{te} Potenz ist oder nicht, und demnach stellt die über alle Theiler d von n erstreckte Summe

12) $$\sum_{d}\Big[\frac{m}{d}\Big]\lambda_\sigma(d)=Q_\sigma(m, n)$$

die Anzahl derjenigen ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots m$ dar, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n eine σ^{te} Potenz ist. Nach den im vorigen Paragraphe aufgestellten Formeln bestehen für diese Function folgende vier Relationen:

13) $$\sum_{d}Q_\sigma\Big(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\Big)\mu_\sigma(d)=[m]$$

$$\sum_{d}{}' Q_\sigma\Big(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\Big)\mu_\sigma(d)=Q_\sigma\Big(\frac{m}{p_1^{\rho_1}p_2^{\rho_2}\cdots p_\mu^{\rho_\mu}}, \frac{n}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_\mu^{\alpha_\mu}}\Big),$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Theiler d von n zu nehmen sind, welche aus den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ zusammengesetzt sind, von diesen aber p_k mindestens in der ρ_k^{ten} Potenz enthalten,

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=r} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau=1}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau=r} (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau)^2 Q_\sigma\left(\frac{m}{p_{\lambda_1}, p_{\lambda_2} \ldots p_{\lambda_\tau}}, \frac{n}{p_{\lambda_1}^{\alpha_{\lambda_1}} p_{\lambda_2}^{\alpha_{\lambda_2}} \ldots p_{\lambda_\tau}^{\alpha_{\lambda_\tau}}}\right) + Q_\sigma(m, n) = [m]$$

$$\sum_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\tau=0}^{\rho_1=\alpha_1, \rho_2=\alpha_2, \ldots, \rho_\tau=\alpha_\tau} Q_\sigma\left(\frac{m}{p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \ldots p_\tau^{\rho_\tau}}, \frac{n}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\tau^{\alpha_\tau}}\right) \lambda_\sigma(p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \ldots p_\tau^{\rho_\tau}) = Q_\sigma(m, n).$$

Die Relation 13) lässt sich wieder leicht als specieller Fall einer allgemeineren Formel erweisen. Schreibt man nämlich in 12) für m und n $\frac{m d_\mu}{n}$, beziehungsweise d_μ, multiplicirt sodann mit $k\left(\frac{n}{d_\mu}\right)$ und summirt bezüglich d_μ über alle Theiler von n, deren complementärer Divisor eine μ^{te} Potenz ist, so ergibt sich die Gleichung

$$\sum_{d_\mu} Q_\sigma\left(\frac{m d_\mu}{n}, d_\mu\right) k\left(\frac{n}{d_\mu}\right) = \sum_{\delta_1, d_\mu} \left[\frac{m d_\mu}{n \delta_1}\right] \lambda_\sigma(\delta_1)\, k\left(\frac{n}{d_\mu}\right),$$

in welcher bezüglich δ_1 über alle Theiler von $\frac{n}{d_\mu}$ zu summiren ist. Dieselbe geht offenbar, falls die über alle der Bedingung

$$x y^\mu = z$$

genügenden ganzzahligen positiven Werthepaare x, y erstreckte Summe

$$\sum_{x,y} \lambda_\sigma(x)\, k(y^\mu) = \bar{K}(z)$$

gesetzt wird, in die folgende über.

$$\text{14)} \qquad \sum_{d_\mu} Q_\sigma\left(\frac{m d_\mu}{n}, d_\mu\right) k\left(\frac{n}{d_\mu}\right) = \sum_{d} \left[\frac{m}{d}\right] \bar{K}(d).$$

Von den zahlreichen interessanten speciellen Fällen dieser allgemeinen Formel mögen die den Specialisirungen

$$k(x) = \mu_k(\sqrt[\rho]{x}), \qquad \mu = \rho, \qquad \sigma = k\rho$$

$$k(x) = \lambda_\rho(\sqrt[\sigma]{x}), \qquad \mu = \sigma$$

$$k(x) = \omega_k(\sqrt[\rho]{x}), \qquad \mu = \rho, \qquad \sigma = 2\rho$$

$$k(x) = \mu(\sqrt[\rho]{x}), \qquad \mu = \rho, \qquad \sigma = k\rho$$

entsprechenden, für welche der Reihe nach

$$\bar{K}(x) = \lambda_\rho(x)$$

$$\bar{K}(x) = \lambda_{\sigma\rho}(x)$$

$$\bar{K}(n) = \sum_{d_\rho} \mu(d_\rho)\, \psi_k\left(\frac{n}{d_\rho}\right)$$

$$\bar{K}(n) = \sum_{d_\rho} \mu(d_\rho)\, \lambda_k\left(\sqrt[\rho]{\frac{n}{d_\rho}}\right)$$

ist, angeführt werden:

$$\sum_{d_\rho} Q_{k\rho}\left(\frac{md_\rho}{n}, d_\rho\right)\mu_k\left(\sqrt[\rho]{\frac{n}{d_\rho}}\right) = Q_\rho(m, n)$$

$$\sum_{d_\sigma} Q_\sigma\left(\frac{md_\sigma}{n}, d_\sigma\right)\lambda_\rho\left(\sqrt[\sigma]{\frac{n}{d_\sigma}}\right) = Q_{\rho\sigma}(m, n)$$

$$\sum_{d_\rho} Q_{2\rho}\left(\frac{md_\rho}{n}, d_\rho\right) \omega_k\left(\sqrt[\rho]{\frac{n}{d_\rho}}\right) = \sum_{x=1}^{x=[m]}{}' \psi_k([n, x])$$

$$\sum_{d_\rho} Q_{k\rho}\left(\frac{md_\rho}{n}, d_\rho\right) \mu\left(\sqrt[\rho]{\frac{n}{d_\rho}}\right) = \sum_{x=1}^{x=[m]} \lambda_k\left(\sqrt[\rho]{[n, x]}\right)$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Werthe von x zu nehmen sind, für welche $[n, x]$ eine ρ^{te} Potenz ist. Die erste von diesen Gleichungen geht für $\rho = 1$ in 13) über.

γ) Setzt man endlich der Reihe nach

$$a) \quad \chi(x) = \sum_{r_x} \log\, 2\, \sin \frac{r_x\,\pi}{x}, \; \chi(1) = 0,$$

wo die Summation bezüglich r_x über alle zu x theilerfremden ganzen Zahlen des Intervalles $..1..x-1$ zu erstrecken ist.

$$b) \quad \chi(x) = \alpha(x),$$

wo

$$\alpha(1) = \alpha(x) = 0$$

ist, wenn x einen Primfactor in einer höheren als der zweiten, oder mehr als einen Primtheiler in einer höheren als der ersten Potenz enthält,

$$\alpha(x) = (-1)^{\bar{\omega}(x)} f(p)$$

wird, wenn x den Primfactor p in der zweiten, die übrigen $\bar{\omega}(x)-1$ aber in der ersten Potenz enthält, endlich für jedes durch kein Quadrat theilbares x durch die Gleichung

$$\alpha(x) = (-1)^{\bar{\omega}(x)+1} \sum_{\lambda} f(p_\lambda)$$

definirt ist, in welcher die Summation nach λ über alle Primfactoren von x auszudehnen ist,

$$c) \quad \chi(x) = \varphi_\sigma(x),\; \frac{(-1)^{\bar{\omega}(x)}\pi^\sigma{}_1(x)\varphi_\sigma(x)}{x^{2\sigma}},\; \omega(x),\; \lambda(x)\,\omega(x),\; f_\beta(x)$$

so wird beziehungsweise

$$a) \quad X(x) = \begin{cases} \log\, p \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem x einen einzigen Primtheiler p besitzt, oder nicht.

$$b) \quad X(x) = \begin{cases} f(x) \\ 0 \end{cases}$$

je nachdem x eine Primzahl ist, oder nicht,

$$c) \quad X(x) = x^\sigma,\; \frac{1}{x^\sigma},\; \psi(x^2),\; \lambda(x),\; f_\beta(x).$$

Es stellt daher die über alle die Einheit übersteigenden Theiler d einer ganzen Zahl n erstreckte Summe

$$\sum_d \left[\frac{m}{d}\right] \left(\sum_{r_d} \log\, 2\, \sin \frac{r_d\, \pi}{d}\right)$$

den Logarithmus des Productes der grössten gemeinsamen Theiler jeder von allen ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$ und n dar; es gibt ferner die über die Divisoren von n ausgedehnte Summe

$$\sum_d \left[\frac{m}{d}\right] \alpha(d) = F(m, n) \tag{15}$$

die Summe der Werthe an, welche die Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument jene grössten gemeinsamen Theiler von n und den einzelnen Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$ durchläuft, welche Primzahlen sind, und speciell

$$\sum_d \left[\frac{m}{d}\right] \alpha_0(d) = \Theta(m, n) \tag{16}$$

die Anzahl dieser Theiler, wo mit $\alpha_0(x)$ diejenige Specialisirung der Function $\alpha(x)$ bezeichnet wird, für welche die oben angegebenen Gleichungen in die folgenden übergehen

$$\alpha_0(1) = \alpha_0(x) = 1$$

$$\alpha_0(x) = (-1)^{\bar{\omega}(x)}$$

$$\alpha_0(x) = (-1)^{\bar{\omega}(x)+1}\, \bar{\omega}(x),$$

es ist weiter die über alle Divisoren von n erstreckte Summe

$$\sum_d \left[\frac{m}{d}\right] \lambda(d)\, \omega(d)$$

der Überschuss der Anzahl derjenigen Zahlen des genannten Intervalles, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt ist, über die Anzahl der übrigen, und es bestehen die Relationen

$$\sum_d \left[\frac{m}{d}\right] \varphi_\sigma(d) = \sum_{x=1}^{x=[m]} [n, x]^\sigma$$

$$\sum_d \left[\frac{m}{d}\right] \frac{(-1)^{\bar{\omega}(d)}\, \pi_1^\sigma(d)\, \varphi_\sigma(d)}{d^{2\sigma}} = \sum_{x=1}^{x=[m]} \frac{1}{[n, x]^\sigma}$$

$$\sum_d \left[\frac{m}{d}\right] \omega(d) \doteq \sum_{x=1}^{x=[m]} \psi([n, x]^2)$$

$$\sum_d \left[\frac{m}{d}\right] f_{\beta-1}(d) = \sum_{x=1}^{x=[m]} f_\beta([n, x]).$$

Mit Hilfe von Ausdrücken, welche ich für die zahlentheoretische Function $\alpha(x)$ bei einer anderen Gelegenheit aufgestellt habe, leitet man aus 15) und 16) sofort folgende Sätze her:

Ist die zahlentheoretische Function $\beta'_\sigma(x)$ gleich 0, wenn x auch nur einen seiner Primfactoren in einer Potenz enthält, deren Exponent nach dem Modul σ grösser als 2 ist, oder mehr als einen Primfactor mit einem nach dem Modul σ der Zahl 2 congruenten Exponenten, gleich $(-1)^{k+1} f(p)$, wenn bei der Darstellung von x durch ein Product von Primzahlpotenzen der Primfactor p in der $(k\sigma+2)^{\text{ten}}$ Potenz auftritt,

τ Primzahlen Exponenten von der Form $k\sigma+1$ und die übrigen durch σ theilbare besitzen, und hat sie endlich den Werth $(-1)^{\tau+1}\sum\limits_{\lambda} f(p'_{\lambda})$, wo die Summation bezüglich λ über alle τ Primtheiler von x mit Exponenten von der Form $k\sigma+1$ zu erstrecken ist, in allen anderen Fällen, so ist

$$F(m, n) = \sum_{d} \Omega_\sigma\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \beta'_\sigma(d)$$

und speciell

$$\Theta(m, n) = \sum_{d} \Omega_\sigma\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \beta'^{(0)}_\sigma(d),$$

wo mit $\beta'^{(0)}_\sigma(x)$ diejenige Specialisirung der Function $\beta'_\sigma(x)$ bezeichnet wird, für welche die eben erwähnten Werthe der Reihe nach die folgenden sind:

$$\beta'^{(0)}_\sigma(x) = 0$$
$$\beta'^{(0)}_\sigma(x) = (-1)^{\tau+1}$$
$$\beta'^{(0)}_\sigma(x) = (-1)^{\tau+1}\tau.$$

Von den speciellen Fällen dieser Formeln verdienen besonders die folgenden hervorgehoben zu werden:

$$F(m, n) = -\sum_{d} \Omega_2\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \lambda(d) f_1(d)$$

$$\Theta(m, n) = -\sum_{d} \Omega_2\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \lambda(d)\, \omega(d)$$

$$F(m, n) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \varphi\left(\frac{m}{p_\lambda}, \frac{n}{p_\lambda}\right) f(p_\lambda)$$

$$\Theta(m, n) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \varphi\left(\frac{m}{p_\lambda}, \frac{n}{p_\lambda}\right) \qquad (n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}),$$

wo $f_1(x)$ die Summe der Werthe vorstellt, welche die Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle Primtheiler von x durchläuft.

Ist die zahlentheoretische Function $\gamma_\sigma(x)$ nur dann von Null verschieden, wenn alle bei der Darstellung von x durch ein Product von Primzahlpotenzen auftretenden Exponenten mit Ausnahme eines einzigen (zur Primzahl p gehörigen) gleich σ sind, während dieser einen der zwei Werthe $1, \sigma+1$ hat, in welchem Falle sie gleich $(-1)^{\bar{\omega}(x)-1} f(p)$, beziehungsweise $(-1)^{\bar{\omega}(x)} f(p)$ ist, so besteht die Gleichung

$$F(m, n) = \sum_{d} \Omega_\sigma\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \gamma_\sigma(d)$$

und speciell

$$\Theta(m, n) = \sum_{d} \Omega_\sigma\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \gamma^{(0)}_\sigma(d),$$

in welcher mit $\gamma^{(0)}_\sigma(x)$ diejenige Specialisirung der Function $\gamma_\sigma(x)$ bezeichnet wird, für welche die eben erwähnten Werthe in die folgenden übergehen:

$$\gamma^{(0)}(x) = 0$$
$$\gamma^{(0)}_\sigma(x) = (-1)^{\bar{\omega}(x)-1}$$
$$\gamma^{(0)}_\sigma(x) = (-1)^{\bar{\omega}(x)}.$$

Ist $P_{0,\sigma}(m,n)$ gleich der Summe der Anzahlen derjenigen Theiler eines jeden unter den $[m]$ grössten gemeinsamen Theiler von n und einer beliebigen ganzen Zahl des Bereiches $1\ldots m$, welche σ^{te} Potenzen sind, ist ferner die zahlentheoretische Function $\varepsilon_\sigma(x)$ gleich Null, wenn bei der Darstellung von x durch ein Product von Primzahlpotenzen auch nur ein Exponent grösser als $\sigma+2$ ist, oder einen der Werthe $3, 4, \ldots \sigma-1$ hat, oder, wenn mehr als ein Exponent nach dem Modul σ der Zahl 2 congruent ist, gleich $(-1)^{\sigma_p} f(p)$ (beziehungsweise $(-2)^{\sigma_p} f(p)$ für $\sigma = 1$), wenn die Primzahl p bei dieser Darstellung den Exponenten σ oder $\sigma+2$ hat und in dem zu ihr complementären Divisor σ_p Primfactoren einen der beiden Exponenten $1, \sigma$ besitzen, endlich gleich der über alle Primtheiler von x ausgedehnten Summe $\sum\limits_p (-1)^{\sigma_p} f(p)$ (beziehungsweise $\sum\limits_p (-2)^{\sigma_p} f(p)$ für $\sigma=1$) in allen anderen Fällen, so besteht die Beziehung

$$F(m, n) = \sum_d P_{0,\sigma}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \varepsilon_\sigma(d)$$

und speciell

$$\Theta(m, n) = \sum_d P_{0,\sigma}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \varepsilon_\sigma^{(0)}(d),$$

wo mit $\varepsilon_\sigma^{(0)}(x)$ diejenige Specialisirung der Function $\varepsilon_\sigma(x)$ bezeichnet wird, für welche die obigen Werthe in die folgenden übergehen:

$$\varepsilon_\sigma^{(0)}(x) = 0$$

$$\varepsilon_\sigma^{(0)}(x) = (-1)^{\sigma_p}, \text{ beziehungsweise } (-2)^{\sigma_p}$$

$$\varepsilon_\sigma^{(0)}(x) = \sum_p (-1)^{\sigma_p}, \text{ beziehungsweise } \sum_p (-2)^{\sigma_p}.$$

Bezeichnet $\Lambda(m,n)$ den Überschuss der Anzahl derjenigen unter den $[m]$ ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots m$, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt ist, über die Anzahl der übrigen, ist ferner die zahlentheoretische Function $\Gamma_2(x)$ gleich Null, wenn x durch eine dritte Potenz oder durch mehr als eine zweite Potenz (ausser 1) theilbar ist, gleich $f(p)$, wenn p^2 der einzige quadratische Theiler ihres Argumentes ist, und besitzt sie endlich den Werth $\sum\limits_p f(p)$, wo die Summation über alle Primtheiler von x zu erstrecken ist, falls diese Zahl durch kein Quadrat theilbar ist, so hat man die Relation

$$F(m, n) = \sum_d \Lambda\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \Gamma_2(d)$$

und speciell

$$\Theta(m, n) = \sum_d \Lambda\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \Gamma_2^{(0)}(d),$$

wo $\Gamma_2^{(0)}(x)$ diejenige Specialisirung der Function $\Gamma_2(x)$ vorstellt, für welche die eben angegebenen Werthe sich in die folgenden verwandeln:

$$\Gamma_2^{(0)}(x) = 0$$

$$\Gamma_2^{(0)}(x) = 1$$

$$\Gamma_2^{(0)}(x) = \tilde{\omega}(x).$$

Bezeichnet $S_k(m, n)$ die Summe der k^{ten} Potenzen aller $[m]$ grössten gemeinsamen Theiler von n und irgend einer ganzen Zahl des Intervalles $1\ldots m$, ist ferner die zahlentheoretische Function $\delta_k(x)$ gleich Null, wenn bei der Darstellung von x durch ein Product von Primzahlpotenzen auch nur ein Exponent grösser als 2, oder mehr als ein Exponent grösser als 1 ist, sonst aber gleich der Differenz aus der Summe jener

Werthe, welche die Function $\frac{f(y)}{y^k}$ annimmt, wenn ihr Argument alle Primtheiler von x durchläuft, deren complementärer Divisor aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, und der Summe jener Werthe, welche diese Function erhält, wenn für y die übrigen Primfactoren von x mit durch kein Quadrat (ausser 1) theilbaren complementären Divisor gesetzt werden, so besteht die Gleichung

$$F(m, n) = \sum_d S_k\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) d^k \delta_k(d)$$

und speciell

$$\Theta(m, n) = \sum_d S_k\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) d^k \delta_\chi^{(0)}(d)$$

wo $\delta_\chi^{(0)}(x)$ die dem speciellen Werthe $f(x) = 1$ entsprechende Function $\delta(x)$ vorstellt.

Multiplicirt man den Werth, welchen die willkürliche Function $f(x)$ annimmt, wenn für ihr Argument diejenige Primzahl p gesetzt wird, welche in irgend einem derjenigen unter den $[m]$ grössten gemeinsamen Theilern von n und einer beliebigen ganzen Zahl des Intervalles $1 \ldots m$, bei deren Darstellung durch ein Product von Primzahlpotenzen sämmtliche Exponenten mit Ausnahme eines einzigen (zur Primzahl p gehörigen) gleich σ sind, während dieser einen der Werthe 1, $\sigma+1$ besitzt, in der ersten oder $(\sigma+1)^{\text{ten}}$ Potenz erscheint, mit $+1$ oder -1, je nachdem der zu p complementäre Theiler eine gerade oder ungerade Anzahl von verschiedenen Primfactoren enthält, und bezeichnet die Summe der so entstehenden Aggregate mit $F_\sigma(m, n)$, so hat man die Formel

$$F(m, n) = \sum_d F_\sigma\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \lambda(d) \tilde{\omega}(d)$$

und speciell

$$\Theta(m, n) = \sum_d F_\sigma^{(0)}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \lambda(d) \tilde{\omega}(d),$$

wo $F_\sigma^0(m, n)$ die dem Werthe $f(x) = 1$ entsprechende Function $F_\sigma(m, n)$ ist.

§. 4.

Die im vorigen Paragraphe angeführte Modification der Sylvester'schen Formel für die Anzahl der dem Intervalle $m+1 \ldots 2n$ angehörigen Primzahlen ist nur ein ganz specieller Fall einer anderen, weit allgemeineren, zu deren Entwicklung ich nun übergehe.

Es seien

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\varphi(r)}$$

als zur ganzen Zahl r theilerfremden ganzzahligen Individuen des Intervalles $1 \ldots r$

$$(-1)^\tau \alpha_{\lambda_1} \alpha_{\lambda_2} \ldots \alpha_{\lambda_\tau} \equiv \alpha_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau} (\text{mod. } r),$$

wo $\alpha_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau}$ selbstverständlich eine ganz bestimmte von den eben genannten $\varphi(r)$ Zahlen ist, und unter den τ Indices λ_k auch gleiche vorkommen können.

Unter den $\left[\frac{m+\alpha_\rho}{r}\right]$ die beliebige positive Zahl m nicht übertreffenden ganzen positiven Zahlen von der Form $rx-\alpha_\rho$ sind offenbar nur die folgenden durch das Product $(rx_1-\alpha_{\lambda_1})(rx_2-\alpha_{\lambda_2}) \ldots (rx_\tau-\alpha_{\lambda_\tau})$ theilbar:

$$(r-\alpha_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\tau})(rx_1-\alpha_{\lambda_1})(rx_2-\alpha_{\lambda_2}) \ldots (rx_\tau-\alpha_{\lambda_\tau}),\ (2r-\alpha_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\tau})(rx_1-\alpha_{\lambda_1})(rx_2-\alpha_{\lambda_2}) \ldots (rx_\tau-\alpha_{\lambda_\tau}), \ldots$$

$$\ldots ; \left\{\left[\frac{m}{r(rx_1-\alpha_{\lambda_1})(rx_2-\alpha_{\lambda_2}) \ldots (rx_\tau-\alpha_{\lambda_\tau})} + \frac{\alpha_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\tau}}{r}\right] r - \alpha_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\tau}\right\} (rx_1-\alpha_{\lambda_1})(rx_2-\alpha_{\lambda_2}) \ldots (rx_\tau-\alpha_{\lambda_\tau})$$

wo $\alpha_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\tau}$ durch die Congruenz

$$\alpha_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau} \alpha_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\tau} \equiv \alpha_\rho \ (\text{mod. } r)$$

bestimmt ist; die Anzahl der durch dieses Product nicht theilbaren ganzen Zahlen von der Form $rx-\alpha_\rho$ im genannten Bereiche ist also gleich

$$\left[\frac{m+\alpha_\rho}{r}\right]-\left[\frac{m}{r(rx_1-\alpha_{\lambda_1})(rx_2-\alpha_{\lambda_2})\ldots(rx_\tau-\alpha_{\lambda_\tau})}+\frac{\alpha_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\tau}}{r}\right].$$

Es mögen nun die τ Factoren des Productes unter einander verschiedene Primzahlen sein. Alsdann gibt es nach dieser Bemerkung zwischen 1 und m

$$\left[\frac{m+\alpha_\rho}{r}\right]-\left[\frac{m}{r(rx_\sigma-\alpha_{\lambda_\sigma})}+\frac{\alpha_{\mu_\sigma}}{r}\right]$$

zu $rx_\sigma-\alpha_{\lambda_\sigma}$,

$$\left[\frac{m+\alpha_\rho}{r}\right]-\left[\frac{m}{r(rx_k-\alpha_{\lambda_k})}+\frac{\alpha_{\mu_k}}{r}\right] \qquad (rx_k-\alpha_{\lambda_k}\lessgtr rx_\sigma-\alpha_{\lambda_\sigma})$$

zu $rx_k-\alpha_{\lambda_k}$ theilerfremde,

$$\left[\frac{m+\alpha_\rho}{r}\right]-\left[\frac{m}{r(rx_k-\alpha_{\lambda_k})(rx_\sigma-\alpha_{\lambda_\sigma})}+\frac{\alpha_{\mu_k,\mu_\sigma}}{r}\right]$$

durch $(rx_\sigma-\alpha_{\lambda_\sigma})(rx_k-\alpha_{\lambda_k})$ nicht theilbare und demnach

$$\left[\frac{m+\alpha_\rho}{r}\right]+\left[\frac{m}{r(rx_k-\alpha_{\lambda_k})(rx_\sigma-\alpha_{\lambda_\sigma})}+\frac{\alpha_{\mu_k,\mu_\sigma}}{r}\right]-\left[\frac{m}{r(rx_k-\alpha_{\lambda_k})}+\frac{\alpha_{\mu_k}}{r}\right]-\left[\frac{m}{r(rx_\sigma-\alpha_{\lambda_\sigma})}+\frac{\alpha_{\mu_\sigma}}{r}\right]$$

zu diesen zwei Primzahlen theilerfremde Individuen des genannten Bereiches, welche die Form $rx-\alpha_\rho$ haben. Auf diesem Wege findet man, wie unmittelbar ersichtlich ist, dass die Summe

$$\sum_{x_\lambda}\left[\frac{m}{rx_\lambda}+\frac{\alpha'_{\mu_\lambda}}{r}\right]\mu(x_\lambda),$$

in welcher die Summation bezüglich x_λ über alle m nicht überschreitenden ganzen Zahlen auszudehnen ist, welche aus der Einheit und den τ Primzahlen $rx_1-\alpha_{\lambda_1}, rx_2-\alpha_{\lambda_2},\ldots, rx_\tau-\alpha_{\lambda_\tau}$ gebildet werden können, und α'_{μ_λ} die kleinste positive Wurzel der Congruenz

$$\alpha'_{\mu_\lambda}x_\lambda\equiv\alpha_\rho \pmod{r}$$

ist, die Anzahl der durch keine der genannten τ Primzahlen theilbaren ganzen Zahlen der Form $rx-\alpha_\rho$ im Intervalle $1\ldots m$ vorstellt.

Diese Formel gilt auch für $r=1$, wenn in diesem Falle α_ρ und demnach auch jede der Zahlen α'_{μ_λ} gleich 0 gesetzt wird.

Ist keiner der Primtheiler von r grösser als m_1, und

$$\tau=\Theta(m_1)-\tilde\omega(r), \qquad m>m_1\geqq\sqrt{m}$$

sind also die angeführten Zahlen alle Primzahlen von einer der $\varphi(r)$ in Bezug auf den Modul r möglichen Formen, welche m_1 nicht übersteigen, so sind die zu denselben theilerfremden ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots m$ von der Form $rx-\alpha_\rho$ die zwischen m_1 und m liegenden Primzahlen der eben genannten Gestalt und überdies noch, falls $\alpha_\rho=r-1$ ist, die Zahl 1, und demnach hat man für die Anzahl $A_{r,\alpha_\rho}(m,m_1)$ dieser Primzahlen die Beziehung

1) $$A_{r,\alpha_\rho}(m;m_1)+\varepsilon\left(\frac{\alpha_\rho}{r-1}\right)=\left(\sum_{x=1}^{x=[m]}\left[\frac{m}{rx}+\frac{\alpha'_x}{r}\right]\mu(x)\right)_{m_1;r}$$

wo durch Anfügung des zweiten Buchstabens (r) an das Summenzeichen angedeutet wird, dass ausser der Einheit nur die zu r theilerfremden Primzahlen unterhalb m_1+1 bei der Bildung der Zahlen x zu verwenden sind, und α'_x die kleinste positive Wurzel der Congruenz

$$\alpha'_x x\equiv\alpha_\rho \pmod{r}$$

ist.

Ist t ein durch kein Quadrat theilbarer Factor von r, so hat man, da derselbe zu allen Zahlen x theilerfremd ist, die Beziehung

$$A_{r,\,\alpha_\rho}\left(\frac{m}{t};\; m_2\right)+\varepsilon\left(\frac{\alpha_\rho}{r-1}\right)=\left(\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m}{t}\right]}\left[\frac{m}{trx}+\frac{\alpha'_x}{r}\right]\mu(x)\right)_{m_2;\,r}\qquad\left(\frac{m}{t}>m_2\geqq\sqrt{\frac{m}{t}}\right)$$

$$=\mu(t)\left(\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m}{t}\right]}\left[\frac{m}{trx}+\frac{\alpha'_x}{r}\right]\mu(x)\right)_{m_2;\,r}$$

und daher falls $\omega(t)$ ungerade ist,

2) $$A_{r,\,\alpha_\rho}\left(m;\;\frac{m}{t}\right)=\left(\sum_{x=1}^{x=[m]}\left[\frac{m}{rx}+\frac{\alpha''_x}{r}\right]\mu(x)\right)_{m_3;\,r;\,t}\qquad\left(\frac{m}{t}\geqq m_3\geqq\sqrt{m}\right)$$

wo durch die Anfügung des dritten Buchstaben (t) angedeutet wird, dass ausser den in der mit zwei Indices versehenen Summe auftretenden Werthen von x noch das t-fache eines jeden von ihnen zu nehmen ist, und α''_x die kleinste positive Wurzel der Congruenz

$$\alpha''_x x\equiv\alpha_\rho\ (\text{mod. } r)\qquad([x,t]=1)$$

beziehungsweise

$$\frac{\alpha''_x x}{t}\equiv\alpha_\rho\ (\text{mod. } r)\qquad([x,t]=t)$$

vorstellt. Ist t eine Primzahl und $\left[t,\frac{r}{t}\right]=1$, so kann man die letzte Gleichung auch in folgender Form schreiben:

3) $$A_{r,\,\alpha_\rho}\left(m:\frac{m}{t}\right)=\left(\sum_{x=1}^{x=[m]}\left[\frac{m}{rx}+\frac{\alpha''_x}{r}\right]\mu(x)\right)_{m_3;\,\frac{r}{t}}$$

Für $r=1$ ergibt sich aus 1) die längst bekannte specielle Relation

$$\Theta(m)-\Theta(m_1)=\left(\sum_{x=1}^{x=[m]}\left[\frac{m}{x}\right]\mu(x)\right)_{m_1}$$

für $r=t=2$ gehen die Gleichungen 2) und 3) in die umgeformte Sylvester'sche Formel über, während sich 1) für $r=2$ in

$$A_{2,1}(m:m_1)+1=\left(\sum_{x=1}^{x=\frac{m+1}{2}}\left[\frac{m}{2(2x-1)}+\frac{1}{2}\right]\mu(2x-1)\right)'_{m_1}$$

verwandelt, wo durch die obere Marke $'$ am Summenzeichen, wie in allen folgenden Formeln, angezeigt wird, dass sich der erste der unten angefügten Buchstaben nicht auf x, sondern auf die als Argument von $\mu(y)$ auftretende Zahlform (hier also auf $2x-1$) bezieht. Setzt man in der letzten Formel m gleich einer ungeraden Zahl, so erhält man eine von Legendre in seiner »Théorie des nombres« aufgestellte Relation.

Von anderen bemerkenswerthen neuen speciellen Fällen der abgeleiteten allgemeinen Gleichungen mögen noch die folgenden besonders erwähnt werden:

$$A_{3,1}(m;m_1)=\left(\sum_{x=0}^{x=[m]}\left\{\left[\frac{m}{3(3x+1)}+\frac{1}{3}\right]\mu(3x+1)+\left[\frac{m}{3(3x+2)}+\frac{2}{3}\right]\mu(3x+2)\right\}\right)'_{m_1}\quad (m>m_1\geqq\sqrt{m})$$

$$A_{3,2}(m;m_1)+1=\left(\sum_{x=0}^{x=[m]}\left\{\left[\frac{m}{3(3x+1)}+\frac{2}{3}\right]\mu(3x+1)+\left[\frac{m}{3(3x+2)}+\frac{1}{3}\right]\mu(3x+2)\right\}\right)'_{m_1}$$

$$A_{4,1}(m;m_1)=\left(\sum_{x=0}^{x=[m]}\left\{\left[\frac{m}{4(4x+1)}+\frac{1}{4}\right]\mu(4x+1)+\left[\frac{m}{4(4x+3)}+\frac{3}{4}\right]\mu(4x+3)\right\}\right)'_{m_1}$$

$$A_{4,3}(m;m_1)+1=\left(\sum_{x=0}^{x=[m]}\left\{\left[\frac{m}{4(4x+1)}+\frac{3}{4}\right]\mu(4x+1)+\left[\frac{m}{4(4x+3)}+\frac{1}{4}\right]\mu(4x+3)\right\}\right)'_{m_1}$$

$$A_{6,1}(m;m_1)=\left(\sum_{x=0}^{x=[m]}\left\{\left[\frac{m}{6(6x+1)}+\frac{1}{6}\right]\mu(6x+1)+\left[\frac{m}{6(6x+5)}+\frac{5}{6}\right]\mu(6x+5)\right\}\right)'_{m_1}$$

$$A_{6,5}(m;m_1)=\left(\sum_{x=0}^{x=[m]}\left\{\left[\frac{m}{6(6x+1)}+\frac{5}{6}\right]\mu(6x+1)+\left[\frac{m}{6(6x+5)}+\frac{1}{6}\right]\mu(6x+5)\right\}\right)'_{m_1}$$

$$A_{4,1}(2m;m)=\left(\sum_{\varepsilon=0,\,x=0}^{\varepsilon=1,\,x=[m]}\left\{\left[\frac{m}{2^{\varepsilon+1}(4x+1)}+\frac{1}{4}\right]\mu(2^{\varepsilon}(4x+1))+\left[\frac{m}{2^{\varepsilon+1}(4x+3)}+\frac{3}{4}\right]\mu(2^{\varepsilon}(4x+3))\right\}\right)'_{m_2}$$

$$(m\geqq m_1\geqq\sqrt{2m})$$

$$A_{4,3}(2m;m)=\left(\sum_{\varepsilon,\,x=0}^{\varepsilon=1,\,x=[m]}\left\{\left[\frac{m}{2^{\varepsilon+1}(4x+1)}+\frac{3}{4}\right]\mu(2^{\varepsilon}(4x+1))+\left[\frac{m}{2^{\varepsilon+1}(4x+3)}+\frac{1}{4}\right]\mu(2^{\varepsilon}(4x+3))\right\}\right)'_{m_2}$$

$$A_{6,1}(2m;m)=\left(\sum_{\varepsilon,\,x=0}^{\varepsilon=1,\,x=[m]}\left\{\left[\frac{m}{3.2^{\varepsilon}(6x+1)}+\frac{1}{6}\right]\mu(2^{\varepsilon}(6x+1))+\left[\frac{m}{3.2^{\varepsilon}(6x+5)}+\frac{5}{6}\right]\mu(2^{\varepsilon}(6x+5))\right\}\right)'_{m_2}$$

$$A_{6,5}(2m;m)=\left(\sum_{\varepsilon,\,x=0}^{\varepsilon=1,\,x=[m]}\left\{\left[\frac{m}{3.2^{\varepsilon}(6x+1)}+\frac{5}{6}\right]\mu(2^{\varepsilon}(6x+1))+\left[\frac{m}{3.2^{\varepsilon}(6x+5)}+\frac{1}{6}\right]\mu(2^{\varepsilon}(6x+5))\right\}\right)'_{m_2}$$

$$A_{6,1}(3m;m)=\left(\sum_{\varepsilon,\,x=0}^{\varepsilon=1,\,x=[m]}\left\{\left[\frac{m}{2.3^{\varepsilon}(6x+1)}+\frac{1}{6}\right]\mu(3^{\varepsilon}(6x+1))+\left[\frac{m}{2.3^{\varepsilon}(6x+5)}+\frac{5}{6}\right]\mu(3^{\varepsilon}(6x+5))\right\}\right)'_{m_3}$$

$$(m\geqq m_3\geqq\sqrt{3m})$$

$$A_{6,5}(3m;m)=\left(\sum_{\varepsilon,\,x=0}^{\varepsilon=1,\,x=[m]}\left\{\left[\frac{m}{2.3^{\varepsilon}(6x+1)}+\frac{5}{6}\right]\mu(3^{\varepsilon}(6x+1))+\left[\frac{m}{2.3^{\varepsilon}(6x+5)}+\frac{1}{6}\right]\mu(3^{\varepsilon}(6x+5))\right\}\right)'_{m_3}$$

Es mag nur noch hervorgehoben werden, dass die ersten zwei von diesen Formeln auch in folgender Weise dargestellt werden können:

$$A_{3,1}(m;m_4)=\left(\sum_{\varepsilon,\,x=0}^{\varepsilon=1,\,x=[m]}\left[\frac{m}{3^{\varepsilon}(3x+1)}\right]\mu(3^{\varepsilon}(3x+1))\right)'_{m_4}+\left(\sum_{x=1}^{x=[m]}(-1)^{x-\frac{x}{3}}\left[\frac{m}{3x}+\frac{2}{3}\right]\mu(x)\right)m_4;3$$

$$\left(\frac{m}{3}\geqq m_4\geqq\sqrt{m}\right)$$

$$=\left(\sum_{\varepsilon,\,x=0}^{\varepsilon=1,\,x=[m]}\left[\frac{m}{3^{\varepsilon}(3x+2)}\right]\mu(3^{\varepsilon}(3x+2))\right)'_{m_4}-\left(\sum_{x=1}^{x=[m]}(-1)^{x-\frac{x}{3}}\left[\frac{m}{3x}+\frac{1}{3}\right]\mu(x)\right)m_4;3$$

$$1+A_{3,\,2}(m;m_4) = \Big(\sum_{\varepsilon,\,x=0}^{\varepsilon=1,\,x=[m]}\left[\frac{m}{3^\varepsilon(3x+1)}\right]\mu(3^\varepsilon(3x+1))\Big)'_{m_4} + \Big(\sum_{x=1}^{x=[m]}(-1)^{x-\left[\frac{x}{3}\right]}\left[\frac{m}{3x}+\frac{1}{3}\right]\mu(x)\Big)\, m_4;\, 3$$

$$= \Big(\sum_{\varepsilon,\,x=0}^{\varepsilon=1,\,x=[m]}\left[\frac{m}{3^\varepsilon(3x+2)}\right]\mu(3^\varepsilon(3x+2))\Big)'_{m_4} + \Big(\sum_{x=1}^{x=[m]}(-1)^{x-\left[\frac{x}{3}\right]}\left[\frac{m}{3x}+\frac{2}{3}\right]\mu(x)\Big)\, m_4;\, 3$$

Die Formel 1) [und demnach auch 2) und 3)] lässt sich — unter einer gewissen Voraussetzung — in eine andere verwandeln, welche zwar in theoretischer Hinsicht etwas weniger einfach ist, weil sie die Kenntniss von Primzahlmengen in Intervallen, die über $\sqrt{m}$ hinaus liegen, erfordert, in praktischer Beziehung aber wesentliche Vortheile darbietet, da Anzahl und Umfang der bei derselben auszuführenden Rechnungen bedeutend geringer sind, als bei der ursprünglichen.

Die Summe auf der rechten Seite der erwähnten Gleichung kann man nämlich als Aggregat von drei anderen darstellen, indem man zunächst alle Glieder vereinigt, in denen x keinen zwischen $\sqrt[3]{m}$ und $\sqrt{m}$ befindlichen Primfactor enthält, sodann jene, in denen im Nenner eine solche Primzahl vorkommt, und schliesslich diejenigen, welche ein durch zwei solche Primzahlen theilbares x besitzen.

Berücksichtigt man nun, dass für alle Primzahlen p_λ, $p_\mu (\lambda \lesseqgtr \mu)$, welche zwischen $\sqrt[3]{m}$ und $\sqrt{m}$ liegen,

$$m^{\frac{1}{2}} < \frac{m}{p_\lambda} < m^{\frac{2}{3}}$$

$$1 < \frac{m}{p_\lambda p_\mu} < m^{\frac{1}{3}}$$

ist, so erkennt man, dass nach 1) die Gesammtheit jener Glieder der zweiten Gruppe, in denen x den Factor p_λ enthält, den Werth

$$-A_{r,\,\alpha_\rho}\Big(\frac{m}{p_\lambda};\sqrt{\frac{m}{p_\lambda}}\Big)-\varepsilon\Big(\frac{\alpha_\rho}{r-1}\Big)$$

besitzt, während die Summe jener Glieder der zweiten Gruppe, in denen x durch $p_\lambda p_\mu$ theilbar ist, gleich $\varepsilon\Big(\frac{\alpha_\rho}{r-1}\Big)$ wird, falls keiner der Primtheiler von r $\sqrt{\frac{m}{p_{\Theta(\sqrt{m})}}}$ überschreitet. Man hat daher, falls r der eben angegebenen Bedingung genügt, die Relation

$$A_{r,\,\alpha_\rho}(m;\sqrt{m_1})+\varepsilon\Big(\frac{\alpha_\rho}{r-1}\Big)\Big\{1-\frac{A(A-1)}{2}\Big\} = \Big(\sum_{x=1}^{x=[m]}\left[\frac{m}{rx}+\frac{a'_x}{r}\right]\mu(x)\Big)_{\sqrt[3]{m};\,r} - \sum_p A_{r,\,\alpha_\rho}\Big(\frac{m}{p};\sqrt{\frac{m}{p}}\Big),$$

in welcher die Summation bezüglich p über alle zu r theilerfremden Primzahlen des Intervalles $\sqrt[3]{m} \,..\, \sqrt{m}$ auszudehnen ist, und A den Werth

$$\Theta(\sqrt{m})-\Theta(\sqrt[3]{m})-r(\sqrt{m};\sqrt[3]{m})$$

hat, wenn $r(\sqrt{m},\sqrt[3]{m})$ die Anzahl der zwischen $\sqrt[3]{m}$ und $\sqrt{m}$ liegenden Primtheiler von r ist.

Für $r = 1$ geht diese Gleichung in die bekannte Formel

$$\Theta(m) = \Big(\sum_{x=1}^{x=[m]}\left[\frac{m}{x}\right]\mu(x)\Big)_{\sqrt[3]{m}} - \sum_{s=1}^{s=\mu}\Theta\Big(\frac{m}{p_{r+s}}\Big)+\tau(\mu+1)+\frac{\mu(\mu-1)}{2}-1$$

über, in welcher

$$\Theta(\sqrt[3]{m}) = \tau$$

$$\Theta(\sqrt{m}) = \tau+\mu$$

gesetzt wurde.

Dieselbe hat Herr Meissel * bei seiner Abzählung der in einem gegebenen Gebiete liegenden Primzahlen mit grossem Erfolge benützt.

§. 5.

Die Formel

$$F(n, m) = \sum_{d} f\left(\left[\frac{n}{d}, m\right]\right) \chi(d) \tag{1}$$

kann, falls die Function $\chi(x)$ das wiederholt erwähnte Multiplicationstheorem besitzt, in folgender Weise geschrieben werden:

$$F(n, m) = \sum_{t, \delta} f\left(\left[\frac{n}{t\delta}, m\right]\right) \chi(t)\, \chi(\delta)$$

wo die Summation bezüglich t überall aus den Primfactoren des grössten gemeinsamen Theilers $[n, m]$ der zwei ganzen positiven Zahlen n und m zusammengesetzte Divisoren von n, hinsichtlich δ aber über alle Theiler des zu $[n, m]$ theilerfremden Factors D dieser ganzen Zahl zu erstrecken ist, oder, da ersichtlich

$$\left[\frac{n}{t\delta}, m\right] = \left[\frac{n}{t}, m\right]$$

ist,

$$F(n, m) = \sum_{\delta} \chi(\delta) \sum_{t} f\left(\left[\frac{n}{t}, m\right]\right) \chi(t). \tag{2}$$

Sind n_1 und n_2 zwei theilerfremde ganze Zahlen, so folgt aus den Gleichungen

$$\sum_{d_1} \chi(d_1) = X(n_1)$$

$$\sum_{d_2} \chi(d_2) = X(n_2),$$

wo die Summation nach d_k über alle Theiler von $n_k (k = 1, 2)$ auszudehnen ist, die Relation

$$X(n_1)\, X(n_2) = \sum_{d_1 d_2} \chi(d_1 d_2)$$

oder, weil die Producte $d_1 d_2$ genau sämmtliche Theiler von $n_1 n_2$ ergeben,

$$X(n_1 n_2) = X(n_1)\, X(n_2),$$

und demnach kann man, falls $X(n)$ von Null verschieden ist, die Gleichung 2) auch in folgender Gestalt schreiben:

$$F(n, m) = X(n) \frac{\sum_{t} f\left(\left[\frac{n}{t}, m\right]\right) \chi(t)}{\sum_{t} \chi(t)}. \tag{3}$$

Ist

$$[n, m] = p_1^{\alpha_1 - \delta_1} p_2^{\alpha_2 - \delta_2} \dots p_\sigma^{\alpha_\sigma - \delta_\sigma}$$

so ist offenbar

$$\left[\frac{n}{t}, m\right] = \frac{[n, m]}{p_{\rho_1}^{k_1} p_{\rho_2}^{k_2} \dots p_{\rho_\mu}^{k_\mu}},$$

* Mathematische Annalen, 2. und 3. Band.

wo $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$ irgend welche $\mu \leqq \sigma$ verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, \sigma$ sind, für alle Divisoren

$$t = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_\sigma^{\lambda_\sigma} \qquad (o \gtreqless \lambda_\rho \gtreqless \alpha_\rho),$$

in denen

$$0 \leqq \lambda_\nu \leqq \tau_\nu \qquad (\nu \lesseqgtr \rho_\lambda,\ \lambda = 1, 2, \ldots, \mu)$$

$$\lambda_\nu = k_\nu + \tau_\nu \qquad (\nu = \rho_\lambda,\ \lambda = 1, 2, \ldots, \mu)$$

ist, und demnach hat in der auf der rechten Seite der Gleichung 2) stehenden zweiten Summe $f\left(\frac{[n, m]}{p_{\rho_1}^{k_1} p_{\rho_2}^{k_2} \ldots p_{\rho_\mu}^{k_\mu}}\right)$ den Coëfficienten

$$\chi(p_{\rho_1}^{\tau_{\rho_1}+k_1}\, p_{\rho_2}^{\tau_{\rho_2}+k_2} \ldots p_{\rho_\mu}^{\tau_{\rho_\mu}+k_\mu}) \prod_{1}^{\sigma}{}'_{k} \sum_{\lambda_k=0}^{\lambda_k=\tau_k} \chi(p_k^{\lambda_k}) = \chi(\Delta_1\, p_{\rho_1}^{k_1} p_{\rho_2}^{k_2} \ldots p_{\rho_\mu}^{k_\mu}) \sum_{d'} \chi(d'),$$

wo die Marke am Productzeichen anzeigt, dass k die Werthe $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$ nicht annimmt, die Summation bezüglich d' über alle Theiler des zu $p_{\rho_1}^{k_1} p_{\rho_2}^{k_2} \ldots, p_{\rho_\mu}^{k_\mu}$ theilerfremden Factors Δ_2 von $\frac{n}{[n, m]\, D}$ zu erstrecken ist, und Δ_1 den zu Δ_2 complementären Divisor der eben genannten Zahl vorstellt.

Man kann demnach die Formeln 2) und 3) auch in die folgenden verwandeln.

4) $$F(n, m) = \sum_{\delta} \chi(\delta) \sum_{\delta'} f\left(\frac{[n, m]}{\delta'}\right) \chi(\Delta_1\, \delta') \left(\sum_{d'} \chi(d')\right) = \tilde{X}(n_1[n, m])\, \bar{F}(n_1[n, m])$$

5) $$F(n, m) = X(n) \frac{\sum_{\delta'} f\left(\frac{[n, m]}{\delta'}\right) X(\Delta_1\, \delta') \left(\sum_{d'} \chi(d')\right)}{\sum_{\delta'} \chi(\Delta_1\, \delta') \left(\sum_{d'} \chi(d')\right)} = \frac{X(n) \bar{F}(n_1[n, m])}{\tilde{X}(n_1[n, m])}$$

in denen die Summation nach δ' über alle Theiler von $[n, m]$ auszudehnen ist.

Die eben aufgestellten Formeln werden besonders einfach, wenn entweder $\chi(x)$ so beschaffen ist, dass $\sum_{d'} \chi(d')$ für jeden Werth von Δ_2 einen nur von der Natur, nicht aber von der Grösse dieser Zahl abhängigen bestimmten Werth besitzt, oder wenn n durch kein Quadrat theilbar ist. Der erste Fall tritt beispielsweise ein, wenn

$$\chi(x) = \mu(x)$$

ist; denn alsdann wird

$$\sum_{\delta} \chi(\delta) = \sum_{d'} \chi(d') = \begin{cases} 0 & D, \Delta_2 > 1 \\ 1 & D = \Delta_2 = 1 \end{cases}$$

und

$$\chi(\Delta_1\, d) = 0 \qquad \Delta_1\, d > 1$$

und demnach hat man die Relation

6) $$\sum_{d} f\left(\left[\frac{n}{d}, m\right]\right) \mu(d) = \begin{cases} 0 & (n > [n, m]) \\ \sum_{d} f\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) & (n = [n, m]) \end{cases}$$

Ist n durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar, so ist

$$D = \frac{n}{[n, m]}$$

und demnach ergeben sich die Relationen

7) $$\sum_d f\left(\left[\frac{n}{d}, m\right]\right)\chi(d) = \sum_{\delta_1}\chi(\delta_1)\sum_{\delta'} f\left(\frac{[n, m]}{\delta'}\right)\chi(\delta')$$

8) $$\sum_d f\left(\left[\frac{n}{d}, m\right]\right)\chi(d) = \frac{X(n)\sum_{\delta'} f\left(\frac{[n, m]}{\delta'}\right)\chi(\delta')}{\sum_{\delta'}\chi(\delta')}$$

wo die Summation bezüglich δ_1 über alle Theiler von $\frac{n}{[n, m]}$ auszudehnen ist.

Von den in den vorigen Zeilen aufgestellten allgemeinen Formeln ausgehend, will ich nun einige bemerkenswerthe zahlentheoretische Relationen entwickeln.

α) Zunächst mag eine Anwendung derselben auf die Theorie der in Bezug auf einen Primzahlmodul p zum Exponenten n gehörigen ganzen Zahlen gemacht werden.

Jede für den Modul p zum Exponenten

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} = p_\lambda^{\alpha_\lambda} P_\lambda \qquad (n \text{ ein Theiler von } p-1)$$

gehörige Zahl lässt sich bekanntlich nach demselben in der Form

$$a^{P_1\beta_1+P_2\beta_2+\dots+P_r\beta_r}$$

darstellen, wo a eine bestimmte von ihnen vorstellt, und β_λ eine durch p_λ nicht theilbare ganze Zahl unterhalb $p_\lambda^{\alpha_\lambda}$ ist. Es genügt demnach die Summe s_k aller zum Exponenten n gehörigen Glieder eines Restensystems für den Modul p der Congruenz

$$s_k \equiv \prod_{\lambda=1}^{r} \sum_{\beta_\lambda} a^{k\beta_\lambda P_\lambda} \pmod{p},$$

wo die Summation bezüglich β_λ über alle $p_\lambda^{\alpha_\lambda-1}(p_\lambda-1)$ zu p_λ theilerfremden Individuen des Intervalles $1\dots p_\lambda^{\alpha_\lambda}$ zu erstrecken ist, oder also der Congruenz

$$s_k \equiv \prod_{\lambda=1}^{r} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\mu=p_\lambda^{\alpha_\lambda}-1} a^{\mu k P_\lambda} - \sum_{\mu=0}^{\mu=p_\lambda^{\alpha_\lambda-1}-1} a^{\mu k p_\lambda P_\lambda} \right\} \pmod{p}$$

Ist nun

$$[k, p_\lambda^{\alpha_\lambda}] = p_\lambda^{\nu},$$

so ist offenbar

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=p_\lambda^{\alpha_\lambda}-1} a^{\mu k P_\lambda} - \sum_{\mu=0}^{\mu=p_\lambda^{\alpha_\lambda-1}-1} a^{\mu k p_\lambda P_\lambda} \equiv \begin{cases} 0 & (\nu < \alpha_\lambda - 1) \\ -p_\lambda^{\alpha_\lambda-1} \pmod{p} & (\nu = \alpha_\lambda - 1) \\ p_\lambda^{\alpha_\lambda-1}(p_\lambda-1) & (\nu = \alpha_\lambda) \end{cases}$$

und daher

$$s_k \equiv 0 \pmod{p}$$

wenn k nicht durch $\frac{n}{p_1 p_2 \dots p_r}$ theilbar ist, und in allen anderen Fällen

$$s_k \equiv (-1)^{r-\omega\left(\left[p_1 p_2 \dots p_r, \frac{kp_1 p_2 \dots p_r}{n}\right]\right)} \varphi\left(\left[p_1 p_2 \dots p_r, \frac{kp_1 p_2 \dots p_r}{n}\right]\right) \pmod{p}$$

Diese zwei Congruenzen lassen sich, wie man leicht erkennt, in die folgende vereinigen:

9) $$s_k \equiv \frac{n}{P}\mu(P)\mu\left(\left[P, \frac{kP}{n}\right]\right)\varphi\left(\left[P, \frac{kP}{n}\right]\right) \pmod{p}, \qquad \left(\mu\left(\left[P, \frac{kP}{n}\right]\right) = 0 \text{ für } \frac{kP}{n} \text{ nicht ganzzahlig}\right)$$

wo P das Product aller Primtheiler von n vorstellt.

Nach dieser Relation ist nun die über alle Theiler τ von k erstreckte Summe

$$\sum_{\tau} s_{\frac{k}{\tau}}\chi(\tau) \equiv \frac{n}{p}\mu(P)\sum_{\tau}\mu\left(\left[P,\frac{kP}{n\tau}\right]\right)\varphi\left(\left[P,\frac{kP}{n\tau}\right]\right)\chi(\tau) \pmod{p}$$

und daher hat man auf Grund der Gleichungen 4) und 5) die Congruenzen

$$10)\qquad \sum_{\tau} s_{\frac{k}{\tau}}\chi(\tau) \equiv \frac{n}{p}\mu(P)\overline{X}\left(P,\left[P,\frac{kP}{n}\right]\right)\sum_{\tau_1}\mu\left(\frac{\left[P,\frac{kP}{n}\right]}{\tau_1}\right)\varphi\left(\frac{\left[P,\frac{kP}{n}\right]}{\tau_1}\right)\chi(\Delta_1\tau_1)\left(\sum_{d'}\chi(d')\right) \pmod{p}$$

$$11)\qquad \sum_{\tau} s_{\frac{k}{\tau}}\chi(\tau) \equiv$$

$$\equiv \frac{n}{p}\mu(P)X\left(\frac{kP}{n}\right)\frac{X\left(P,\left[P,\frac{kP}{n}\right]\right)}{\overline{X}\left(P,\left[P,\frac{kP}{n}\right]\right)}\sum_{\tau_1}\mu\left(\frac{\left[P,\frac{kP}{n}\right]}{\tau_1}\right)\varphi\left(\frac{\left[P,\frac{kP}{n}\right]}{\tau_1}\right)\chi(\Delta_1\tau_1)\left(\sum_{d'}\chi(d')\right) \pmod{p}\left(X\left(\frac{kP}{n}\right)\equiv c \pmod{p},\ c>0\right)$$

in denen die Summation bezüglich τ_1 über alle Theiler von $\left[P,\frac{kP}{n}\right]$, hinsichtlich d' aber über alle Divisoren des zu τ_1 theilerfremden Factors von $\dfrac{kP}{n\left[P,\frac{kP}{n}\right]D_1}$ zu erstrecken ist, wenn D_1 der zu $\left[P,\frac{kP}{n}\right]$ theilerfremde Factor von $\frac{kP}{n}$ und endlich

$$n\,\Delta_1\,\Delta_2\,D_1\left[P,\frac{kP}{n}\right] = kP$$

ist.

1. Von den zahlreichen bemerkenswerthen speciellen Fällen dieser allgemeinen Congruenzen ist bisher meines Wissens nur ein einziger von Herrn Migotti * aufgestellt worden, und zwar der der Annahme

$$\chi(x) = \mu(x)$$

entsprechende. Für diese Specialisirung der zahlentheoretischen Function $\chi(x)$ geht die Congruenz 10) zunächst über in

$$\sum_{\tau} s_{\frac{k}{\tau}}\mu(\tau) \equiv \begin{cases} 0 & \left(\dfrac{kP}{n} > \left[P,\dfrac{kP}{n}\right];\ \text{und}\ \dfrac{kP}{n}\ \text{nicht ganzzahlig}\right) \\ & \hfill \pmod{p} \\ \dfrac{n}{p}\mu(P)\displaystyle\sum_{\tau_1}\mu\left(\frac{kP}{n\tau_1}\right)\varphi\left(\frac{kP}{n\tau_1}\right)\mu(\tau_1) & \left(\dfrac{kP}{n} = \left[P,\dfrac{kP}{n}\right]\right) \end{cases}$$

Da im zweiten Falle $\frac{kP}{n}$ durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar ist, so ist in demselben

$$\mu\left(\frac{kP}{n\tau_1}\right)\mu(\tau_1) = \mu\left(\frac{kP}{n}\right)$$

und es sind $\frac{n}{k}$ und $\frac{kP}{n}$ theilerfremd und daher wird auch

$$\mu\left(\frac{kP}{n}\right)\mu\left(\frac{n}{k}\right) = \mu(P).$$

* »Zur Theorie der Kreistheilung.« Sitzungsber. d. mathem.-naturw. Cl. d. kais. Akad. d. Wissensch. Bd. LXXXVII, 2. Abth., S. 7—15.

Die eben aufgeschriebene Doppelcongruenz lässt sich demnach in der folgenden eleganten Form schreiben:

12) $$\sum_{\tau} s_{\frac{k}{\tau}}\, \mu(\tau) \equiv \mu\left(\frac{n}{k}\right) k \pmod{p}$$

2. Hat $\frac{kP}{n}$ keinen quadratischen Theiler, so gehen die Formeln 11) und 12) in die folgenden über:

14) $$\sum_{\tau} s_{\frac{k}{\tau}}\, \chi(\tau) \equiv \frac{n}{p}\,\mu(P) \sum_{\tau_2} \chi(\tau_2) \sum_{\tau_1} \mu\left(\frac{\left[P, \frac{kP}{n}\right]}{\tau_1}\right) \varphi\left(\frac{\left[P, \frac{kP}{n}\right]}{\tau_1}\right) \chi(\tau_1) \pmod{p}$$

$$\sum_{\tau} s_{\frac{k}{\tau}}\, \chi(\tau) \equiv \frac{n}{p}\,\mu(P) \sum_{\tau_1} \mu\left(\frac{\left[P, \frac{kP}{n}\right]}{\tau_1}\right) \varphi\left(\frac{\left[P, \frac{kP}{n}\right]}{\tau_1}\right) \chi(\tau_1)\, \frac{X\left(\frac{kP}{n}\right)}{\sum_{\tau} \chi(\tau_1)} \pmod{p}, \left(X\left(\frac{kP}{n}\right) \equiv c \pmod{p},\ c > 0\right)$$

wo die Summation bezüglich τ_2 über alle Theiler von $\frac{kP}{n\left[P, \frac{kP}{n}\right]}$ auszudehnen ist.

Es mögen nun einige specielle Fälle dieser zwei Formeln besonders behandelt werden.

Ist

$$\chi(x) = \varphi(x),$$

so geht die erste von ihnen über in die Relation

$$\sum_{\tau} s_{\frac{k}{\tau}}\, \varphi(\tau) \equiv \frac{\mu(P) k}{\left[P, \frac{kP}{n}\right]}\, \varphi\left(\left[P, \frac{kP}{n}\right]\right) \sum_{\tau} \mu\left(\frac{\left[P, \frac{kP}{n}\right]}{\tau}\right) \pmod{p}, \left(\mu^2\left(\frac{kP}{n}\right) = 1\right)$$

welche, da

$$\sum_{\tau} \mu\left(\frac{\left[P, \frac{kP}{n}\right]}{\tau}\right)$$

nur dann einen von Null verschiedenen Werth $(+1)$ besitzt, wenn $\left[P, \frac{kP}{n}\right] = 1$ ist, in folgender Form geschrieben werden kann.

15) $$\sum_{\tau} s_{\frac{k}{\tau}}\, \varphi(\tau) \equiv \mu\left(P\left[P, \frac{kP}{n}\right]\right) k \pmod{p} \quad \left(\mu^2\left(\frac{kP}{n}\right) = 1\right).$$

Setzt man ferner

$$\chi(x) = \psi_\nu(x)\, \lambda(x)$$

und beachtet, dass, wie ich gezeigt habe,*

$$\sum_{d} \varphi_{k_1}(d)\, \psi_\nu\left(\frac{n}{d}\right) = n^{k_1}\, \psi_{\nu - k_1}(n)$$

$$\sum_{d} \psi_\nu(d)\, \lambda(d) = \rho_{\nu, 2}(n)\, \lambda(n)$$

ist, so erhält man aus 14) die specielle Congruenz

---

* »Über einige zahlentheoretische Functionen.« Sitzungsber. d. mathem.-naturw. Cl. d. kais. Akad. d. Wissensch. Bd. LXXXIX, 2. Abth., S. 37–79.

$$\sum_{\tau} s_{\frac{k}{\tau}} \psi_\nu(\tau)\, \lambda(\tau) \equiv \frac{n\left[P, \frac{kP}{n}\right]}{P} \mu\left(\frac{n}{k}\right) \rho_{\nu,2}\left(\frac{kP}{n\left[P, \frac{kP}{n}\right]}\right) \psi_{\nu-1}\left(\left[P, \frac{kP}{n}\right]\right) (\text{mod. } p) \left(\mu^2\left(\frac{kP}{n}\right) = 1\right)$$

oder, da in diesem Falle der einzige Theiler von $\dfrac{kP}{n\left[P, \frac{kP}{n}\right]}$, dessen complementärer Divisor ein Quadrat ist, diese Zahl selbst ist,

16) $$\sum_{\tau} s_{\frac{k}{\tau}} \psi_\nu(\tau)\, \lambda(\tau) \equiv \left(\frac{P}{\left[P, \frac{kP}{n}\right]}\right)^{\nu-1} \mu\left(\frac{n}{k}\right) \psi_{\nu-1}\left(\left[P, \frac{kP}{n}\right]\right) k^\nu \;(\text{mod. } p) \left(\mu^2\left(\frac{kP}{n}\right) = 1\right)$$

und speciell

$$\sum_{\tau} s_{\frac{k}{\tau}} \psi_0(\tau)\, \lambda(\tau) \equiv \mu\left(\frac{n}{k}\right) \frac{n}{P} \psi_1\left(\left[P, \frac{kP}{n}\right]\right) (\text{mod. } p) \left(\mu^2\left(\frac{kP}{n}\right) = 1\right)$$

Für

$$\chi(x) = \varphi(x)\, \mathrm{P}_{\nu, 2\rho}(x)$$

verwandelt sich die Relation 14) wegen der von mir aufgestellten Formeln *

$$\sum_{d} \varphi_{k_1}(d)\, \mathrm{P}_{\nu,\sigma}\left(\frac{n}{d}\right) = n^\nu \rho_{k_1-\nu,\sigma}(n)$$

$$\sum_{d} \mathrm{P}_{\nu, 2\sigma}(d)\, \lambda(d) = \begin{cases} \mathrm{P}_{2\nu,\sigma}(\sqrt{n})\, \lambda(n) & (n = \text{Quadratzahl}) \\ 0 & (n \text{ keine Quadratzahl}) \end{cases}$$

in die folgende:

$$\sum_{\tau} s_{\frac{k}{\tau}} \varphi(\tau)\, \mathrm{P}_{\nu, 2\sigma}(\tau) \equiv \begin{cases} 0 & \left(\left[P, \frac{kP}{n}\right] > 1\right) \qquad (\text{mod. } p) \\ \frac{n}{P} \mu(P) \left(\frac{kP}{n}\right)^\nu \rho_{1-\nu,\sigma}\left(\frac{kP}{n}\right) & \left(\left[\frac{kP}{n}, P\right] = 1\right) \end{cases}$$

oder, da in diesem Falle

$$\rho_{1-\nu,\sigma}\left(\frac{kP}{n}\right) = \left(\frac{kP}{n}\right)^{1-\nu}$$

ist.

17) $$\sum_{\tau} s_{\frac{k}{\tau}} \varphi(\tau)\, \mathrm{P}_{\nu, 2\sigma}(\tau) \equiv \mu\left(P\left[P, \frac{kP}{n}\right]\right) k \;(\text{mod. } p). \left(\mu^2\left(\frac{kP}{n}\right) = 1\right)$$

Nimmt man weiters

$$\chi(x) = \lambda(x)\, \omega(x),$$

so erhält man aus 14) unter Berücksichtigung der bekannten Relation

$$\sum_{d} \lambda(d)\, \omega(d) = \lambda(n)$$

zunächst die Congruenz

$$\sum_{\tau} s_{\frac{k}{\tau}} \lambda(\tau)\, \omega(\tau) \equiv \frac{n}{P} \mu(P)\, \mu\left(\frac{kP}{n}\right) \sum_{\tau_1} \varphi\left(\frac{\left[P, \frac{kP}{n}\right]}{\tau_1}\right) \omega(\tau_1) \;(\text{mod. } p).$$

* Siehe die vorige Note.

Durch Multiplication der Formeln

18)
$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\varphi_\sigma(m)}{m^s} = \frac{\zeta(s-\sigma)}{\zeta(s)}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\omega(n)}{n^s} = \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}$$

erhält man die Beziehung

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\varphi_\sigma(m)\,\omega(n)}{(m\,n)^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\,\zeta(s-\sigma)$$

$$= \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\mu_2(m)\,n^\sigma}{(m\,n)^s}$$

und daher ist

$$\sum_d \varphi_\sigma\left(\frac{n}{d}\right)\omega(d) = n^\sigma \sum_d \frac{\mu_2(d)}{d^\sigma}$$

$$= n^\sigma \prod_{\lambda=1}^{r} \left\{1 + \frac{1}{p_\lambda^\sigma}\right\}$$

$$= \frac{\varphi_{2\sigma}(n)}{\varphi_\sigma(n)}.$$

Die letzte Congruenz kann also in folgender Form geschrieben werden:

19)
$$\sum_\tau s_{\frac{k}{\tau}}\,\lambda(\tau)\,\omega(\tau) \equiv \frac{n}{P}\,\mu(P)\,\mu\left(\frac{kP}{n}\right)\frac{\varphi_2\left(\left[P,\,\frac{kP}{n}\right]\right)}{\varphi\left(\left[P,\,\frac{kP}{n}\right]\right)}\ (\mathrm{mod.}\ p)\left(\mu^2\left(\frac{kP}{n}\right) = 1\right)$$

Es möge endlich

$$\chi(x) = 1$$

gesetzt werden; alsdann verwandelt sich 14) in

$$\sum_\tau s_{\frac{k}{\tau}} \equiv \frac{n}{P}\,\mu(P)\,\psi\left(\frac{kP}{n\left[P,\,\frac{kP}{n}\right]}\right)\sum_{\tau_1}\mu\left(\frac{\left[P,\,\frac{kP}{n}\right]}{\tau_1}\right)\varphi\left(\frac{P,\left[\frac{n}{kP}\right]}{\tau_1}\right)\ (\mathrm{mod.}\ p)$$

$$\equiv \frac{n}{P}\,\mu(P)\,\mu\left(\left[P,\,\frac{kP}{n}\right]\right)\psi\left(\frac{kP}{n\left[P,\,\frac{kP}{n}\right]}\right)\sum_{\tau_1}\mu(\tau_1)\,\varphi\left(\frac{\left[P,\,\frac{kP}{n}\right]}{\tau_1}\right)\ (\mathrm{mod.}\ p).$$

Multiplicirt man nun die Gleichung 18) mit

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)},$$

so entsteht die Beziehung

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\varphi_\sigma(m)\,\mu(n)}{(m\,n)^s} = \frac{\zeta(s-\sigma)}{\zeta^2(s)}$$

$$= \prod_p \frac{1-\dfrac{2}{p^s}+\dfrac{1}{p^{2s}}}{1-\dfrac{1}{p^s}}$$

$$= \prod_p \left\{1+\frac{p^\sigma-2}{p^s}+\frac{(p^\sigma-1)^2}{p^s(p^s-p^\sigma)}\right\} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\rho_\sigma(n)}{n^s}$$

wo das Product bezüglich p über alle Primzahlen zu erstrecken ist, und demnach ist die Function $\rho_\sigma(n)$ gleich dem über alle Primtheiler p_λ von n erstreckten Producte $\prod_{\lambda=1}^{r} \left(p_\lambda^\sigma - 1 - \varepsilon\left(\frac{1}{\alpha_\lambda}\right)\right)^{2-\varepsilon\left(\frac{1}{\alpha_\lambda}\right)} p_\lambda^{\sigma\left(\alpha_\lambda-1-\varepsilon\left(\frac{\alpha_\lambda}{2}\right)\right)}$. Aus dieser Gleichung folgt sofort die Beziehung

$$\sum_d \varphi(d)\,\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \rho_1(n),$$

mit Hilfe deren sich die letzte Congruenz in die folgende verwandeln lässt:

$$\text{20)}\qquad \sum_\tau s_{\frac{k}{\tau}} \equiv \frac{n}{P}\,\mu(P)\,\mu\left(\left[P,\frac{kP}{n}\right]\right)\rho_1\left(\left[P,\frac{kP}{n}\right]\right)\psi\left(\frac{kP}{n\left[P,\frac{kP}{n}\right]}\right) (\mathrm{mod.}\ p)\ \left(\mu^2\left(\frac{kP}{n}\right)=1\right)$$

welche zeigt, dass stets

$$\sum_\tau s_{\frac{k}{\tau}} \equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ p)\ \left(\mu^2\left(\frac{kP}{n}\right)=1\right)$$

ist, wenn der grösste gemeinsame Theiler von P und $\frac{kP}{n}$ gerade ist.

Da in der Congruenz 14) τ_1 nur verschiedene Primtheiler enthält, so geht auf der rechten Seite derselben, falls $\chi(x)$ durch $\chi(x)\mu_\sigma(x)$ ersetzt wird, nur die erste Summe in $\sum_{\tau_2} \chi(\tau_2)\mu_\sigma(\tau_2)$ über, während alle anderen Factoren ungeändert bleiben, und daher hat man die Beziehung

$$\sum_{\tau_2} \chi(\tau_2)\mu_\sigma(\tau_2) \sum_\tau s_{\frac{k}{\tau}}\,\chi(\tau) \equiv \sum_{\tau_2} \chi(\tau_2) \sum_\tau s_{\frac{k}{\tau}}\,\chi(\tau)\mu_\sigma(\tau)\ (\mathrm{mod.}\ p)\left(\mu^2\left(\frac{kP}{n}\right)=1\right)$$

aus der u. A. die Relation

$$\sum_\tau s_{\frac{k}{\tau}}\,\mu_2(\tau) = \frac{n}{P}\,\mu(P)\,\mu\left(\left[P,\frac{kP}{n}\right]\right)\omega\left(\frac{kP}{n\left[P,\frac{kP}{n}\right]}\right)\rho_1\left(\left[P,\frac{kP}{n}\right]\right) (\mathrm{mod.}\ p)\ \left(\mu^2\left(\frac{kP}{n}\right)=1\right)$$

folgt.

β) Addirt man in der quadratischen Determinante n^{ter} Ordnung

$$|f([i,k])|\quad (i,k=n_1,n_2,\ldots,n_n)\,,$$

in welcher $n_1, n_2, \ldots, n_n$ ein geschlossenes, d. h. ein solches System von ganzen Zahlen bilden, welches alle Theiler der einzelnen Elemente in sich enthält, zur σ^{ten} Verticalreihe die entsprechenden Elemente der $\psi(\sigma)-1$ zu den übrigen Theilern d von σ gehörigen Verticalreihen, nachdem die d^{te} mit $\chi\left(\frac{\sigma}{d}\right)$ multiplicirt wurde, so erhält man nach 4) und 5) die Relationen

$$|f([i,k])| = |\bar{X}(i,[i,k])\,\bar{F}(i,[i,k])|_{(i,k=n_1,n_2,\ldots,n_n)}$$

21) $$|f([i,k])| = \prod_{1}^{n}{}_{\lambda} X(n_\lambda) \left|\frac{\bar{F}(i,[i,k])}{\bar{X}(i,[i,k])}\right|_{(i,k=n_1,n_2,\ldots,n_n)} \quad (X(n_\lambda) \gtrless 0).$$

Nimmt man in der ersten von diesen zwei Gleichungen speciell

$$\chi(x) = \mu(x),$$

so wird nach 6) die auf der rechten Seite derselben stehende Determinante gleich dem Producte ihrer Hauptdiagonalglieder, und daher hat man die specielle Relation

$$|f([i,k])|_{(i,k=n_1,n_2,\ldots,n_n)} = \prod_{1}^{n}{}_{\lambda} \sum_{d_\lambda} f\left(\frac{n_\lambda}{d_\lambda}\right)\mu(d_\lambda),$$

in welcher die Summation bezüglich d_λ über alle Theiler von n_λ zu erstrecken ist. Dieselbe ist eine bekannte Verallgemeinerung der Smith'schen Formel

$$|[i,k]|_{(i,k=1,2\ldots,n)} = \prod_{1}^{n}{}_{x} \varphi(x).$$

Die durch die Gleichung

$$\sum_{d} h\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d) = \sum_{d} \chi(d)$$

definirte Function $h(n)$ ist, wie man sofort erkennt, durch die Formel

$$h(n) = \sum_{d} \psi\left(\frac{n}{d}\right)\chi(d)$$

gegeben, und demnach lässt sich auf Grund des eben ermittelten speciellen Resultates die Gleichung 21) auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{|f([i,k])|}{\left|\sum_{\tau_1} \psi\left(\frac{[i,k]}{\tau_1}\right)\chi(\tau_1)\right|} = \left|\frac{\bar{F}(i,[i,k])}{\bar{X}(i,[i,k])}\right|_{(i,k=n_1,n_2,\ldots,n_n)},$$

in welcher sie eine bemerkenswerthe Darstellung des Quotienten zweier arithmetischer Determinanten gleicher Ordnung durch eine Determinante derselben Ordnung liefert.

§. 6.

In diesem Paragraphe werde ich einige Bemerkungen mittheilen, welche sich auf mehrere auf dem verallgemeinerten Gauss'schen Lemma beruhende Beweise des quadratischen Reciprocitätsgesetzes beziehen.

Die Gauss'sche charakteristische Zahl einer ganzen Zahl n in Bezug auf eine zu ihr theilerfremde ungerade Zahl m ist bekanntlich gleich der Anzahl der negativen absolut kleinsten Reste der Producte

1) $$1.n,\ 2.n,\ 3.n,\ldots,\frac{m-1}{2}n$$

nach dem Modul m, sie stimmt daher mit der Anzahl derjenigen unter den Differenzen

$$\left[\frac{xn}{m}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{xn}{m}\right] \quad \left(x=1,2,\ldots,\frac{m-1}{2}\right)$$

übereìn, welche von Null verschieden sind. Da nun nach dem verallgemeinerten Gauss'schen Lemma das Jacobi-Legendre'sche Symbol $\left(\frac{n}{m}\right)$ den Werth $+1$ oder -1 besitzt, je nachdem die eben erwähnte charakteristische Zahl gerade oder ungerade ist, so hat man die bekannte Gleichung

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left\{ \left[\frac{xn}{m}+\frac{1}{2}\right] - \left[\frac{xn}{m}\right] \right\}}$$

welche auf Grund der Gleichung 4) des §. 3 sofort in die folgende, für Primzahlen schon von Gauss und in ihrer allgemeinen Gestalt von Kronecker und mir wiederholt benützte Relation

$$\text{2)} \qquad \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{2xn}{m}\right]}$$

übergeführt werden kann. Beachtet man, dass

$$\sum_{x=1}^{x=m-1} \left[\frac{xn}{m}\right] = \sum_{x=1}^{x=m-1} \left[\frac{(m-x)n}{m}\right]$$

$$= (m-1)(n-1) - \sum_{x=1}^{x=m-1} \left[\frac{xn}{m}\right]$$

und demnach, falls m und n ungerade sind,

$$\sum_{x=1}^{x=m-1} \left[\frac{xn}{m}\right] \equiv 0 \pmod{2}$$

ist, so kann man in diesem Falle für 3) auch schreiben

$$\text{3)} \qquad \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)n}{m}\right]}.$$

Da aus der Gleichung

$$xn = m\left[\frac{xn}{m}\right] + r_x$$

bei ungeradem m und n folgt, dass r_x nur dann ungerade ist, wenn x und $\left[\frac{xn}{m}\right]$ nach dem Modul 2 incongruent sind, so erkennt man aus den Gleichungen 2) und 3), dass die verallgemeinerte Gauss'sche charakteristische Zahl in diesem Falle auch gleich der Anzahl der ungeraden, beziehungsweise geraden Reste ist, welche bei der Division der Producte

4) $\qquad 2.n,\ 4.n,\ 6.n, \ldots, (m-1).n$

beziehungsweise

5) $\qquad 1.n,\ 3.n,\ 5.n, \ldots, (m-2).n$

durch m auftreten. Aus den Relationen

$$kn = m\left[\frac{kn}{m}\right] + \rho_1 \quad (k \text{ ganzzahlig, } 0 \leqq \rho_1 < m)$$

$$(m-k)\,n = m\left[\frac{(m-k)n}{m}\right] + \rho_2 \quad (0 \leqq \rho_2 < m)$$

$$= m(n-1) - \left[\frac{kn}{m}\right] + \rho_2$$

folgt

$$m = \rho_1 + \rho_2$$

und demnach entspricht jedem oberhalb $\frac{m-1}{2}$ liegenden Multiplicator von n in der Reihe 4), (beziehungsweise 5]) ein ungerader (beziehungsweise gerader) Multiplicator der Reihe 1) in der Art, dass die zugehörigen Reste in Bezug auf den Modul 2 incongruent sind. Beachtet man nun, dass unter den in der Reihe 1) auftretenden Multiplicatoren der Zahl n, falls

$$m \equiv \varepsilon \pmod{4}$$

ist, $\frac{m-\varepsilon}{4}$ ungerade und $\frac{m+\varepsilon-2}{4}$ gerade vorkommen, so ergibt sich sofort das Theorem

»Bezeichnet $g_{n,m}$, beziehungsweise $u_{n,m}$ die Anzahl der positiven geraden, beziehungsweise ungeraden Reste, welche bei der Division der Producte

$$1.n,\ 2.n,\ 3.n, \ldots, \frac{m-1}{2}.n \quad (n \text{ ungerade})$$

durch m auftreten, so ist

6)
$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{g_{n,m} - \frac{m+\varepsilon-2}{4}}$$
$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{u_{n,m} - \frac{m-\varepsilon}{4}},\text{«}$$

dessen auf $u_{n,m}$ bezüglichen Theil für den speciellen Fall, dass m und n Primzahlen sind, Herr A. Stern in seiner interessanten Arbeit »Über einen einfachen Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes und einige damit zusammenhängende Sätze«[1] abgeleitet hat.

Da nach der eben gemachten Bemerkung

$$u_{n,m} \equiv \sum_{x=1}^{x=\frac{m+\varepsilon-2}{4}} \left[\frac{2xn}{m}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-\varepsilon}{4}} \left\{\left[\frac{(2x-1)n}{m}\right] - 1\right\} \pmod{2}$$
$$\equiv \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m}\right] - \frac{m-\varepsilon}{4} \pmod{2}$$

ist, so führt die verallgemeinerte Stern'sche Relation ohne weiters zu der bekannten Gleichung

7)
$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m}\right]}$$

deren Verbindung mit 2) die von Busche, Kronecker, Stern und mir auf anderem Wege bewiesene Congruenz

7a)
$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m} + \frac{1}{2}\right] \equiv 0 \pmod{2}.$$

liefert.[2]

---

[1] Göttinger Nachrichten aus dem Jahre 1870, S. 237—252.

[2] Diese Congruenz kann auch auf folgende Weise hergeleitet werden. Es ist

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m} + \frac{1}{2}\right] = \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{2xn}{m}\right] - \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m}\right]$$
$$= \sum_{\frac{m+1}{2}}^{m-1} \left[\frac{g_1 n}{m}\right] - \sum_{1}^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{u_1 n}{m}\right]$$

1. Es mögen nun einige auf die im Exponenten von r in der Gleichung 2) auftretenden grössten ganzen Zahlen bezügliche Sätze abgeleitet werden, durch deren Verbindung mit den obigen Erörterungen sich sofort Beweise des quadratischen Reciprocitätsgesetzes ergeben.

α) Ist $m < n$ und $\left[\frac{2xn}{m}\right]$ gleich einer geraden Zahl $2k$, so besteht die Ungleichung

$$2k \leqq \frac{2xn}{m} < 2k+1 \left(1 \leqq x \leqq \frac{m-1}{2};\ 1 \leqq k \leqq \frac{n-1}{2}\right)$$

oder

$$\frac{km}{n} + \frac{m}{2n} > x \geqq \frac{km}{n},$$

welche zeigt, dass zwischen $\frac{km}{n} + \frac{m}{2n}$ und $\frac{km}{n}$ eine ganze Zahl liegt, so dass also

$$\left[\frac{km}{n} + \frac{m}{2n}\right] = \left[\frac{km}{n}\right] + 1$$

ist. Dies kann aber, wie man sofort sieht, nur dann der Fall sein, wenn

8) $$\left[\frac{km}{n}\right] = \left[\frac{km}{n}\right] + 1 - \frac{\varepsilon'}{2n}\ (\varepsilon' \ m)$$

ist, woraus folgt

$$\left[\frac{2km}{n}\right] = 2\left[\frac{km}{n}\right] + 1.$$

Es entspricht demnach jedem geraden $\left[\frac{2xn}{m}\right] \left(1 \leqq x \leqq \frac{m-1}{2}\right)$ ein ganz bestimmtes ungerades $\left[\frac{2km}{n}\right] \left(1 \leqq k \leqq \frac{n-1}{2}\right)$, für welche der zugehörige (ungerade) Rest grösser als $n-m$ ist, und umgekehrt.

β) Ist $m < n$ und $\left[\frac{2xn}{m}\right]$ gleich einer ungeraden Zahl $2k-1$ $\left(1 \leqq x \leqq \frac{m-1}{2};\ 1 \leqq k \leqq \frac{n-1}{2}\right)$, so ist

$$2k-1 \leqq \frac{2xn}{m} < 2k$$

oder

$$\frac{km}{n} - \frac{m}{2n} \leqq x < \frac{km}{n},$$

so dass also zwischen $\frac{km}{n} - \frac{m}{2n}$ und $\frac{km}{n}$ eine ganze Zahl liegt, und demnach

$$\left[\frac{km}{n}\right] = \left[\frac{km}{n} - \frac{m}{2n}\right] + 1$$

wird. Soll nun aber diese Gleichung bestehen, so muss

9) $$\frac{km}{n} = \left[\frac{km}{n}\right] + \frac{\varepsilon'}{2n}\ (\varepsilon' < m)$$

wo die Summation nach g_1 über alle geraden, nach u_1 aber über alle ungeraden Zahlen des angegebenen Bereiches auszudehnen ist. Nun lässt sich aber jedem g_1 ein u_1 so zugesellen, dass $g_1 = m - u_1$ ist und demnach hat man für

$$n \equiv \eta\ (\text{mod. } 4).$$

die Beziehung

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m} + \frac{1}{2}\right] = (m-1)\frac{n-\eta}{4} - 2\sum_{1}^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{u_1 n}{m}\right] \equiv 0\ (\text{mod. } 2).$$

sein, aus welcher Beziehung folgt

$$\left[\frac{2km}{n}\right] = 2\left[\frac{km}{n}\right]$$

Es lässt sich daher jedem ungeraden $\left[\frac{2xn}{m}\right] \left(1 \leqq x \leqq \frac{m-1}{2}\right)$ ein ganz bestimmtes gerades $\left[\frac{2km}{n}\right] \left(1 \leqq k \leqq \frac{n-1}{2}\right)$ zuordnen, für welches der zugehörige (gerade) Rest kleiner als m ist, und umgekehrt.

γ) Aus der Relation

$$\left[\frac{(n+1-2k)\,m}{n}\right] = m-1-\left[\frac{2km}{n}-\frac{m}{n}\right]$$

folgt, dass $\left[\frac{2km}{n}\right]$ und $\left[\frac{(n+1-2k)m}{n}\right]$ nach dem Modul 2 einander congruent sind, oder nicht, je nachdem

$$\left[\frac{2ym}{n}\right] = \left[\frac{2ym}{n}-\frac{m}{n}\right] + \begin{cases}0\\1\end{cases}$$

ist, oder, was dasselbe besagt, je nachdem in der Gleichung 9) $\varepsilon' \lesseqgtr m$ ist ($\varepsilon = m$ kann bei ungeradem m offenbar nicht vorkommen). Auf Grund des in β) gewonnenen Resultates kann man daher den Satz aussprechen:

Es lässt sich jedem ungeraden $\left[\frac{2xn}{m}\right]\left(1 \leqq x \leqq \frac{m-1}{2}\right)$ ein ungerades und ein gerades $\left[\frac{2km}{n}\right]\left(1 \leqq k \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ zuordnen, und es ist überdies die eine Hälfte der noch übrigen $\left[\frac{2km}{n}\right]$ gerade, die andere ungerade, ausser wenn $\frac{n+1}{4}$ eine ganze Zahl, also $n \equiv -1$ ist, in welchem Falle diesem Werthe von k weder ein x, noch ein anderes k entspricht.

Dasselbe gilt selbstverständlich auch von den Resten, welche bei der Division der Producte 3) durch m und der Zahlen

$$2\,.\,m,\ 4\,.\,m,\ 6\,.\,m, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] m$$

durch n auftreten.

Für den ausgeschlossenen Werth von k hat man

$$\left[\frac{2km}{n}\right] = \frac{m-1}{2},\quad \frac{2km}{n} - \left[\frac{2km}{n}\right] = \frac{m+n}{2}$$

welche zwei Zahlen nur für

$$m \equiv -1\ (\text{mod. } 4)$$

ungerade sind.

δ) Aus der Beziehung

10) $$\left[\frac{(n-1-2k)m}{n}\right] = m-1-\left[\frac{2km}{n}+\frac{m}{n}\right]$$

ergibt sich, dass $\left[\frac{2km}{n}\right]$ und $\left[\frac{(n-1-2k)\,m}{n}\right]$ in Beziehung auf den Modul 2 einander congruent sind, oder nicht, je nachdem

$$\left[\frac{2km}{n}+\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{2km}{n}\right] + \begin{cases}0\\1\end{cases}$$

ist, oder, was dasselbe besagt, je nachdem in der Gleichung 8) $\varepsilon' \lesseqgtr m$ ist. ($\varepsilon = m$ kann auch in diesem Falle nicht vorkommen.)

Von der durch die Gleichung 10) vermittelten paarweisen Zuordnung ist nur diejenige von den ganzen Zahlen $\left[\frac{2km}{n}\right]$ ausgeschlossen, welche dem der Gleichung

$$n-1-2k = 2k$$

oder also $k = \frac{n-1}{4}$ genügenden Werthe entspricht; dieselbe kann natürlich nur dann auftreten, wenn $\eta = 1$ ist. Nun ist aber

$$\frac{(n-1)m}{2n} = \frac{m-1}{2} + \frac{n-m}{2n}$$

und demnach erhält man durch die Vereinigung des in α) gefundenen Resultates mit dem eben aufgestellten den Satz:

Die Anzahl der ungeraden $\left[\frac{2km}{n}\right]\left(1 \leqq k \leqq \frac{n-1}{2}\right)$ unterscheidet sich von der Summe aus $\frac{(1-\varepsilon)(1+\eta)}{4}$ und der Anzahl der geraden $\left[\frac{2xn}{m}\right]\left(1 \leqq x \leqq \frac{m-1}{2}\right)$ um eine gerade Zahl.

Dasselbe gilt selbstredend auch von den zu den betreffenden grössten ganzen Zahlen gehörigen Resten.

Berücksichtigt man, dass

$$\frac{n-1}{2} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} (\text{mod. } 2)$$

ist, je nachdem $\eta = \pm 1$, so erhält man sowohl unter Zuhilfenahme des in γ), als auch des in δ) aufgestellten Satzes aus der Gleichung 2) unmittelbar die Gleichung

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}},$$

welche das quadratische Reciprocitätsgesetz ausspricht.

Der erstere Beweis dieses Fundamentaltheorems ist im Wesentlichen der von Herrn Zeller* gegebene, der zweite aber der von Herrn Petersen** mitgetheilte.

In ähnlicher Weise liefert, wie man unmittelbar erkennt, die Verbindung der zweiten von den Gleichungen 6)*** mit jedem dieser Theoreme einen Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes.

2. Nach den Entwicklungen in β) kann man die Gleichung 2) auch in folgender Form schreiben:

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \left\{\left[\frac{km}{n}\right] - \left[\frac{km}{n} - \frac{m}{2n}\right]\right\}},$$

oder, da keiner der Reste, welche bei der Division der Zahlen $(2k-1)m$ durch $2n$ auftreten, kleiner als $\frac{1}{2n}$ sein kann, und demnach im Exponenten von -1 stets

$$\left[\frac{km}{n} - \frac{m}{2n}\right] = \left[\frac{km}{n} - \frac{m+1}{2n}\right]$$

ist,

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \left\{\left[\frac{km}{n}\right] - \left[\frac{km}{n} - \frac{m+1}{2n}\right]\right\}},$$

welche Relation, falls in der zweiten Summe im Exponenten von -1 k durch $\frac{n+1}{2} - k$ ersetzt wird, in die folgende übergeht

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \left\{\left[\frac{km}{n}\right] - \left[\frac{m}{2} - \frac{km}{n} - \frac{1}{2n}\right]\right\}}.$$

---

* Monatsberichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften in Berlin, 1872.

** American Journal of Mathematics, Vol. II.

*** Einen anderen auf der verallgemeinerten Stern'schen Bestimmung des Legendre-Jacobi'schen Symbols beruhenden Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes werde ich im vierten Jahrgange der Monatshefte für Mathematik und Physik von G. v. Escherich und E. Weyr mittheilen.

Nun stellt aber $\left[\frac{km}{n}\right]$, beziehungsweise $\left[\frac{m}{2}-\frac{km}{n}-\frac{1}{2n}\right]$ die Anzahl der dem Intervalle $1\ldots\frac{m-1}{2}$ angehörigen Werthe von λ dar, für welche bei festem $k\left(1\leqq k\leqq\frac{n-1}{2}\right)$ die Differenz

$$\frac{\lambda}{m}-\frac{k}{n}\ \text{beziehungsweise}\ \frac{\lambda}{m}+\frac{k}{m}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2mn}$$

negativ wird, und daher lässt sich die letzte Gleichung in die folgende, die Reciprocitätseigenschaft des Legendre-Jacobi'schen Symbols unmittelbar in Evidenz setzende Formel transformiren:

$$\left(\frac{n}{m}\right)=\text{sign.}\prod_{\lambda,k}\left(\frac{\lambda}{m}-\frac{k}{n}\right)\left(\frac{\lambda}{m}+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2mn}\right)\left(1\leqq k\leqq\frac{n-1}{2};\ 1\leqq\lambda\leqq\frac{m-1}{2}\right)$$

welche im Wesentlichen von Herrn A. Genocchi schon im Jahre 1852 in den Abhandlungen der Brüsseler Akademie der Wissenschaften und in den Jahren 1880 und 1885 in den Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences (Paris) abgeleitet wurde.

Eine analoge, für den Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes nicht minder zweckmässige Umformung kann auch mit der rechten Seite der Gleichung 3) vorgenommen werden. Da nämlich aus der Gleichung

$$\left[\frac{(2x-1)n}{m}\right]=2k-1$$

die Beziehung

$$2k-1\leqq\frac{(2x-1)n}{m}<2k$$

oder

$$\frac{km}{n}-\frac{m}{2n}+\frac{1}{2}\leqq x<\frac{km}{n}+\frac{1}{2}$$

folgt, welche zeigt, dass zwischen $\frac{km}{n}-\frac{m}{2n}+\frac{1}{2}$ und $\frac{km}{n}+\frac{1}{2}$ eine ganze Zahl liegt, so kann man dieselbe auch in folgender Weise schreiben:

$$\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}}\left\{\left[\frac{km}{n}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{km}{n}-\frac{m}{2n}+\frac{1}{2}\right]\right\}}$$

oder wegen der Congruenz 7 *a*)

$$\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{km}{n}-\frac{m}{2n}+\frac{1}{2}\right]}$$

Diese Darstellung des Legendre-Jacobi'schen Zeichens habe ich vor Kurzem * auf anderem Wege abgeleitet und bald darauf ** aus derselben eine Reihe von bemerkenswerthen Folgerungen gezogen. Nun stellt aber $\left[\frac{km}{n}-\frac{m}{2n}+\frac{1}{2}\right]$ die Anzahl der Werthepaare $k\left(1\leqq k\leqq\frac{n-1}{2};\ 1\leqq\lambda\leqq\frac{m-1}{2}\right)$ dar, für welche

$$\frac{\lambda}{m}-\frac{k}{n}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2m}$$

negativ ist, und daher kann man der letzten Gleichung auch folgende Gestalt geben:

$$\left(\frac{n}{m}\right)=\text{sign.}\prod_{k,\lambda}\left(\frac{2\lambda-1}{2m}-\frac{2k-1}{2n}\right)\left(k=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2};\ \lambda=1,2,\ldots,\frac{m-1}{2}\right)$$

---

* »Note über das Legendre-Jacobi'sche Symbol.« Sitzungsber. d. mathem.-naturw. Cl. d. kais. Akad. d. Wissensch. Bd. C, Abth. II *a*, S. 855—864.

** »Über den quadratischen Restcharakter.« A. e. a. O. S. 1072—1087.

deren Analogie mit der berühmten Kronecker'schen Productdarstellung des Legendre-Jacobi'schen Symbols unmittelbar in die Augen springt. Dieselbe liefert ebenfalls ohne weitere Rechnung das quadratische Reciprocitätsgesetz.

Zum Schlusse dieses Paragraphes will ich noch eine Darstellung des Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$ angeben, die sich leicht aus jeder der beiden Formeln 6) ableiten lässt. Bezeichnet man mit u_u, g_u; u_g, g_g die Anzahl der ungeraden, beziehungsweise geraden Reste in 1), welche zu ungeraden, beziehungsweise geraden Multiplicatoren von n gehören, so hat man die Gleichungen

$$u_{n,m} = u_u + u_g; \quad g_{n,m} = g_u + g_g$$

$$u_u + g_u = \frac{m-\varepsilon}{4}; \quad g_u + g_g = \frac{m+\varepsilon-2}{4}$$

und demnach ist jeder der in dem eben erwähnten Gleichungspaare auftretenden Exponenten von -1 dem absoluten Betrage nach gleich $|g_u - u_g|$.

Man hat daher, wie man auf Grund der obigen Erörterungen sofort erkennt, die Relation

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{k=\frac{m+\varepsilon-2}{4}} \left\{\left[\frac{km}{n}\right] - \left[\frac{km}{n} - \frac{m}{2n}\right]\right\} + \sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{m-\varepsilon}{4}} \left\{\left[\frac{\lambda m}{n} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{\lambda m}{n} - \frac{m}{2n} + \frac{1}{2}\right]\right\}}.$$

§. 7.

In diesem Schlussparagraphe will ich das Zeichen des constanten Gliedes im primitiven Factor der Theilungsgleichung der elliptischen Function $\sqrt{k}$ sinam (u, k), dessen absoluten Betrag schon Herr L. Kronecker in seiner meisterhaften Abhandlung »Zur Theorie der elliptischen Functionen« * bestimmt hat, ermitteln, da die Kenntniss desselben zum Beweise einer Formel über die Vertheilung der Primzahlen nöthig ist, welche ich im dritten Jahrgange der Monatshefte für Mathematik und Physik veröffentlicht habe.

Ist

$$F_m(x) = \prod_{h,h'} \left(x - \sqrt{k}\ \text{sinam}\left(\frac{4hK + 2h'K'i}{m}\right)\right),$$

wo das Product über alle $\varphi_2(m)$ Werthepaare h, h' des Intervalles $1 \ldots m$ zu erstrecken ist, deren grösster gemeinsamer Theiler zu m theilerfremd ist, so ist bekanntlich das über alle Theiler d von n erstreckte Product

$$\prod_{d} F_d(x) = \Phi_n(x) \quad (n \text{ ungerade})$$

die Theilungsgleichung von $\sqrt{k}$ sinam (u, k) und speciell $F_n(x)$ der primitive Factor derselben. Aus dieser Gleichung folgt sofort

$$F_n(x) = \prod_{d} \Phi_d(x)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$$

und demnach, da

$$\Phi_n(o) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$$

ist,

$$F_n(o) = (-1)^{\frac{1}{2}\sum d\,\mu\left(\frac{n}{d}\right) - \frac{1}{2}\sum \mu\left(\frac{n}{d}\right)} \prod_{d} d^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$$

$$= (-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \prod_{d} d^{-\mu(d)}.$$

Ist

$$n = p^{\alpha},$$

* Sitzungsberichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1886, S. 701 ff.

so wird offenbar

$$\prod_d d^{-\mu(d)} = p,$$

enthält aber n r Primfactoren $(r > 1)$, so erscheint jeder von diesen

$$\left\{ 1 + \binom{r-1}{2} + \binom{r-1}{4} + \ldots \right\}\text{—mal}$$

im Zähler und

$$\left\{ \binom{r-1}{1} + \binom{r-1}{3} + \ldots \right\}\text{—mal}$$

im Nenner, und demnach ist in diesem Falle

$$\prod_d d^{-\mu(d)} = 1$$

Da nun die Function $\varphi(n)$ durch 4 theilbar ist, wenn n mindestens zwei ungerade Primfactoren oder einen von der Form $4s+1$ besitzt, und nur dann einfach gerade ist, wenn n die Potenz einer Primzahl von der Form $4s-1$ ist, so hat man die Beziehung

$$F_n(o) = \begin{cases} 1 & (\bar{\omega}(n) > 1) \\ \varepsilon p & (n = p^\alpha;\ p \equiv \varepsilon \pmod{4}). \end{cases}$$