ÜBER

GESTALT UND LAGE DER MILCHSTRASSE

VON

ADALBERT PREY.

(Mit 1 Tafel.)

(VORGELEGT IN DER SITZUNG VOM 19. MÄRZ 1896.)

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Wenn wir der Herschel'schen Hypothese entsprechend eine derartige Vertheilung der Fixsterne annehmen, dass sie einen linsenförmigen Raum einnehmen, so muss sich, von einem dem Centrum nahegelegenen Standpunkte aus, auf der Sphäre jene fortlaufende, scheinbare Verdichtung der Sternstellung projiciren, welche wir als Milchstrasse bezeichnen. Auf die thatsächliche Sterndichte kommt es dabei in erster Linie nicht an. Ob die Sterne gleichmässig in dem Raume vertheilt sind, oder ob sich eine Verdichtung gegen das Centrum oder die Peripherie hin findet, immer wird sich die Milchstrasse zeigen müssen, nur in verschiedener Stärke. Es soll nun hier versucht werden, gestützt auf die scheinbare Vertheilung der Sterne über die Himmelskugel, also ganz unabhängig von der thatsächlichen Vertheilung, durch Rechnung die Gestalt der Milchstrasse herzuleiten. Zu diesem Zwecke soll auf Grund gegebener Beobachtungen die Sternvertheilung auf der Sphäre in eine Function entwickelt werden, welche die Beobachtungen bis zu einer gewissen Annäherung wiedergibt, und durch deren Differentiation das Maximum der Sterndichte gefunden werden soll. Dieses Maximum soll uns den Hauptzug der Milchstrasse darstellen, und zwar als Schnitt einer Ebene mit der Sphäre, also als Kreis. Wir müssen daher zuerst feststellen, wie die Function überhaupt beschaffen sein muss, damit diejenigen Maxima, welche nicht dem Hauptzweige angehören, keinen Einfluss auf das Resultat gewinnen. Die durch diese Function nicht dargestellten Maxima sollen dann für sich betrachtet werden, und versucht werden, dieselben ebenfalls als auf einem Kreise liegend anzusehen, also eine zweite Ebene zu bestimmen, welche den zweiten Zweig der Milchstrasse darstellen soll. Schliesslich soll der Winkel zwischen beiden Ebenen bestimmt, und aus der Lage derselben zur Sonne geschlossen werden, ob wir berechtigt sind, zu sagen, dass die Sonne dem Milchstrassensysteme angehört, oder nicht.

Zusammenstellung der Beobachtungen.

Wir legen den Rechnungen jene Zusammenstellung der Sternzählungen zu Grunde, welche Herr Dr. Ristenpart in seinen »Untersuchungen über die Constante der Präcession und die Eigenbewegung der Sonne im Fixsternsysteme« (Veröffentlichungen der grossherzogl. Sternwarte in Karlsruhe, IV. Heft, 1892) gibt. Sie besteht im Wesentlichen aus der Abzählung der Sterne der Bonner Durchmusterung (B. D.), wie sie Seeliger in den Berichten der math.-phys. Classe der k. bair. Akad. der Wissenschaften zu München, 1884, 4. Heft gegeben hat. In dieser Arbeit sind die Sternzahlen der Grössenclassen 1—6·5, 6·6—7·0,

7·1—7·5, 7·6—8·0, 8·1—8·5, 8·6—9·0, 9·1—9·5 nach Trapezen angegeben, die begrenzt sind durch die Meridiane im Abstande von 10° zu 10° und durch die Parallelkreise im Abstande von 5° zu 5° für die Sterne der ganzen nördlichen Hemisphäre. Von diesen Zahlen hat Dr. Ristenpart die Zahlen der Sterne der Grössenclassen 1·0—6·0 mit Hilfe der photometrischen Durchmusterung von Pickering getrennt. Auf diese Sterne soll, da sie ihrer geringen Zahl wegen einflusslos sind, keine weitere Rücksicht genommen werden. Für die südliche Durchmusterung (S. D.), für welche Seeliger die Abzählung nach Trapezen durchgeführt hat, deren Höhe nur 1° beträgt, wurde von Dr. Ristenpart die Zusammenziehung in Trapeze von der Höhe 5° vorgenommen. Die letzte Trapezreihe ist 3° hoch, weil die Zählung nur bis 23° südl. Declination reicht. Aus den so gefundenen Sternzahlen für alle Trapeze zwischen —23° und +90° Declination und alle Grössenclassen von 6·0—9·5 der B. D. und von 6·0—10·0 der S. D. hat Dr. Ristenpart durch Multiplication mit der Secante der mittleren Declination jedes Trapezes jene Zahlen hergeleitet, welche die Sterndichte für gleiche Flächen, nämlich von der Grösse eines Trapezes, welches vom Äquator durchschnitten wird, angeben.

Die genauen Untersuchungen Schönfeld's haben nun gezeigt, dass die Grössenclasse 9·5 der B. D zwischen den Grössenclassen 9·5 und 10·0 der S. D. liegt. Die Zahlen dieser Classe sind also in dieser Weise nicht zu brauchen. Da es nun namentlich auf die Sterne der höheren Classen ankommt, da sie an Zahl bedeutend überwiegend sind, so wurde, um auf diese nicht ganz verzichten zu müssen, eine Reduction vorgenommen. Wir gehen dabei von einer Annahme aus, die durch Seeliger's Untersuchungen hinlänglich gestützt erscheint; nämlich, dass beide Hemisphären nahezu denselben Sternreichtum zeigen.

Tafel der Sternzahlen der Grössen 6·0—9·5

δ	87·5	82·5	77·5	72·5	67·5	62·5	57·5	52·5	47·5	42·5	37·5
5°	916·9	681·8	614·5	645·3	843·5	1303·5	1244·8	1247·1	1487·2	1059·1	873·2
15	779·6	727·8	549·7	691·8	788·6	1123·7	1377·3	1293·2	1416·3	939·6	910·9
25	756·7	727·8	549·9	718·5	684·1	1413·9	1585·7	1406·3	1255·0	901·7	976·4
35	733·7	697·2	540·5	615·4	658·0	1026·3	1637·8	1105·8	1077·4	1061·8	957·5
45	435·6	773·7	605·2	552·0	569·4	905·1	842·9	770·5	1019·6	980·3	903·5
55	550·4	804·4	642·2	542·8	527·5	785·9	714·6	800·1	859·8	969·5	769·2
65	642·0	758·5	559·0	638·6	550·9	565·1	692·1	867·5	782·9	1113·2	671·6
75	550·3	681·8	577·6	525·4	540·5	537·1	491·1	740·9	840·5	1479·5	1449·1
85	664·9	758·4	563·6	515·6	457·1	565·1	565·7	684·9	708·9	1229·9	1354·4
95	848·3	743·2	536·0	469·0	417·7	523·9	636·4	688·5	685·2	1058·9	1122·5
105	733·8	620·5	637·5	518·8	428·2	550·0	621·6	649·0	640·7	779·0	926·2
115	825·2	674·2	568·3	512·1	436·2	498·1	491·2	550·5	623·1	695·7	714·4
125	756·6	750·9	475·9	545·5	462·2	461·2	455·9	481·4	584·6	625·1	631·2
135	825·4	819·8	522·1	419·0	467·5	439·6	411·4	471·6	538·7	565·4	589·4
145	596·2	789·2	522·2	432·5	433·5	422·2	374·1	469·8	541·8	534·2	458·6
155	687·8	827·3	452·7	352·7	422·9	426·6	383·2	391·0	489·9	436·6	464·8
165	825·5	651·2	508·2	405·9	355·1	411·3	394·5	404·1	427·8	444·7	404·4
175	710·8	636·9	489·8	389·2	412·6	396·4	366·5	425·5	423·4	475·9	355·4
185	710·8	651·1	494·4	385·9	368·1	396·2	396·5	410·8	410·0	442·1	420·9
195	687·8	766·3	503·6	452·3	355·2	411·5	415·0	430·3	402·6	448·9	488·9
205	917·1	743·2	406·5	405·9	438·7	454·8	437·2	440·4	411·4	410·8	454·8
215	825·4	726·2	448·0	389·2	438·7	450·2	431·8	459·9	423·4	457·0	501·3
225	687·9	735·5	503·2	465·6	472·7	485·1	419·3	410·7	461·6	458·1	444·7
235	825·3	727·8	494·3	515·5	443·9	484·9	454·0	481·5	546·2	490·9	482·6
245	527·3	789·1	554·4	595·4	454·4	508·8	545·3	484·6	559·5	528·7	575·8
255	665·9	773·8	595·9	538·9	553·5	530·5	565·6	506·0	654·1	595·2	593·5
265	573·3	827·4	646·7	598·6	634·6	563·0	660·7	703·2	808·0	941·0	970·2
275	963·0	750·8	577·5	635·2	592·8	506·6	576·8	974·2	881·9	1163·4	1330·5
285	825·4	842·7	596·0	555·5	715·4	790·3	859·6	1051·6	1007·9	1271·8	1663·1
295	756·6	796·8	669·9	628·6	799·0	1006·9	1204·1	1325·9	1177·8	1708·5	1934·1
305	894·2	903·9	730·4	532·1	624·1	740·6	1161·1	1370·2	1385·3	1751·9	1953·4
315	687·9	781·3	637·5	518·8	853·9	840·2	878·6	1104·1	1604·4	1567·5	1737·5
325	802·5	842·7	549·9	529·0	1036·6	1011·1	1060·7	1439·1	1881·0	1488·9	1192·0
335	710·7	781·3	674·6	745·1	924·3	969·9	1161·3	1718·5	1691·6	1309·9	1122·7
345	710·7	927·0	748·5	705·1	820·0	1158·4	1332·4	1368·7	1552·5	1171·5	935·0
355	802·5	988·4	660·7	658·5	955·8	1351·0	1146·4	1309·5	1553·4	1072·6	725·7
	26413·1	27473·9	20406·9	19344·6	20937·2	25015·0	26993·2	29436·9	31815·4	32628·8	32059·4

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Es werden also gleichbreite Zonen zu beiden Seiten des Äquators im Mittel gleich viele Sterne derselben Grössenclasse aufweisen. Hier wurden nun den Sternen der Grössen 9·0—10·0 der S. D. zwischen 0° und 23° südl. Declination, die Sterne 9·0—9·5 der B. D. zwischen 0° und 25° nördl. Declination gegenübergestellt. Die nördliche Zone ist also breiter. Es soll damit der Unvollständigkeit der B. D. in der Classe 9·0—9·5 Rechnung getragen werden, von welcher diese Declinationen hauptsächlich betroffen werden. Wir erhalten auf diese Weise, da die Zahl der betrachteten Sterne der B. D. gleich 88981·0, die der S. D. gleich 105436 ist, durch Division dieser beiden Zahlen jenen Factor, mit welchem wir die Zahlen der Grössen 9·0—10·0 zu multipliciren haben, um die Zahl der Sterne, welche schwächer sind als 9·5 der B. D. auszuscheiden, gleich $\frac{88981}{105436} = 0 \cdot 8440$.

Der Factor mag immerhin etwas zu gross sein, jedenfalls sind die Unterschiede belanglos, da es uns nur auf die Lage und nicht auf die Grösse der Maxima ankommen soll. Überdies stimmen die Gesammtzahlen der Sterne der südlichen Parallelkreise der Grösse nach ganz gut mit den Zahlen der nördlichen.

Da es sich nun im Folgenden nur um die scheinbare Vertheilung der Sterne auf der Sphäre und nicht um ihre Entfernung oder ihre Grösse handeln soll, da ferner die Maxima in allen Sternclassen nahezu an denselben Stellen auftreten, und daher die Rechnung für die einzelnen Sternclassen keine erheblich anderen Resultate liefern würde, so wurde für jedes einzelne Trapez die Summe aller Sternzahlen der Grössen 6·0—9·5 gebildet, welche in der folgenden Tabelle verzeichnet sind. Sie bildet die Grundlage der weiteren Rechnungen.

von 23° südl. Declination bis 90° nördl. Declination.

32·5	27·5	22·5	17·5	12·5	7·5	2·5	—2·5	—7·5	—12·5	—17·5	—21·5
696·7	704·4	598·8	540·1	499·7	510·5	583·5	456·6	594·9	716·9	611·8	473·9
740·7	639·0	540·3	502·6	499·7	514·7	572·5	476·9	545·8	688·4	549·9	470·7
720·5	634·5	489·5	467·9	559·2	517·6	534·4	524·8	582·5	627·8	582·7	473·0
739·4	383·8	513·2	510·8	543·9	487·4	502·4	518·5	586·5	656·5	595·9	457·7
751·3	469·9	515·5	587·3	451·7	468·2	540·5	545·6	580·2	686·3	618·0	472·5
675·4	643·4	740·9	590·6	463·9	497·5	497·4	565·5	654·0	764·0	625·0	581·1
596·0	359·6	565·2	566·5	443·4	618·5	617·6	774·4	746·7	830·8	759·7	643·4
970·5	593·8	829·6	719·7	818·3	949·4	1027·0	890·5	855·0	939·2	824·0	686·7
1236·0	1383·8	1555·2	1259·9	1161·5	1094·8	995·9	966·9	948·4	1026·4	982·6	736·6
1166·0	1404·3	1534·6	1356·6	1388·8	1478·3	1443·4	1224·1	1274·1	1365·4	1097·4	899·8
916·1	1055·9	1231·6	1210·8	1331·5	1380·5	1476·5	1409·9	1675·6	1747·3	1527·3	1322·0
770·1	894·9	968·3	994·5	920·7	1019·0	1035·0	1174·7	1440·3	1884·5	1677·4	1276·5
738·4	675·2	768·8	893·8	733·4	778·9	846·8	942·6	1182·7	1389·1	1398·6	1052·4
585·4	547·7	559·8	746·9	618·5	597·3	705·7	763·3	825·2	1021·2	939·5	843·3
555·7	532·0	532·9	539·1	578·6	511·6	487·4	628·9	742·6	871·9	876·6	768·1
521·3	499·3	461·3	444·8	596·8	519·5	419·4	541·8	667·6	805·0	775·5	641·5
456·3	442·9	466·8	454·2	444·6	471·1	422·4	477·3	666·3	776·4	689·8	575·3
405·3	460·9	389·9	391·2	428·1	406·7	469·4	493·3	563·7	679·1	691·0	582·9
433·6	439·5	376·8	466·7	407·7	416·7	428·4	493·2	602·1	634·0	654·1	531·0
443·3	431·6	411·5	408·1	386·1	382·4	408·4	468·9	625·9	678·0	618·6	462·4
462·1	421·5	459·1	447·9	386·2	488·3	400·4	459·3	615·0	732·3	659·5	509·9
465·7	464·2	466·8	487·3	460·9	475·2	453·4	458·0	603·1	762·2	674·9	468·9
488·4	439·5	462·5	487·8	501·9	521·7	502·5	455·4	608·9	799·0	726·9	499·8
517·9	548·9	517·6	481·6	569·5	597·3	459·4	460·4	739·4	776·4	731·8	591·4
606·8	582·7	538·2	509·0	655·4	676·0	668·6	540·4	612·0	745·7	558·9	502·6
713·3	724·6	711·4	783·6	717·9	646·9	693·6	471·0	460·5	732·4	869·0	685·3
814·0	894·9	850·1	986·3	845·9	945·4	852·8	612·7	519·8	953·6	1079·0	872·4
1030·9	948·8	1189·2	1288·3	1249·5	1502·5	1020·0	674·5	769·9	1205·7	1353·2	1012·0
1431·4	1347·8	1154·4	1308·3	1324·3	1134·0	1059·1	951·7	1147·7	1305·0	1343·5	997·9
1834·3	1476·0	1390·7	1406·9	1429·8	1399·6	1090·1	792·6	984·3	1120·7	1019·0	856·3
1592·7	1403·0	1426·5	1116·4	1184·0	1021·1	843·9	879·4	975·5	997·8	950·1	766·6
1466·0	1123·5	1020·2	933·7	935·1	821·4	639·5	711·9	763·2	875·0	817·8	656·2
1059·6	996·2	802·5	703·9	716·9	701·2	535·4	579·9	680·4	868·5	671·4	539·5
991·9	874·4	763·5	696·6	685·2	611·5	459·4	530·0	653·0	796·8	594·7	525·3
821·2	796·8	644·5	571·8	604·2	540·9	440·4	520·6	653·3	707·9	639·6	445·3
792·8	717·9	573·1	604·1	476·2	490·3	438·4	531·4	596·9	637·2	550·7	479·5
29207·0	27157·1	27021·1	26556·1	25929·0	26184·9	24570·9	23966·9	27735·0	32804·4	30335·4	24359·7

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Entwicklung der Sternvertheilung in eine Function.

Um die Lage des Maximums, das ist die Lage der Milchstrasse festzustellen, bedienen wir uns jener Methode, die man gewöhnlich zur Auffindung eines Maximums oder Minimums verwendet, nämlich der Differentiation. Dazu ist es aber nothwendig, die Sternvertheilung in eine Function zu entwickeln. Entsprechend den auf der Sphäre verwendeten Coordinaten, eignet sich dazu am besten eine Entwicklung nach Kugelfunctionen, wobei Rectascension und Declination die Argumente sind.

Setzen wir $\sin\delta = \mu$, so lautet der Ausdruck für die Kugelfunction $n$ter Ordnung:

$$P_n(\mu) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}\left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4}\ldots\right]. \qquad 1.$$

Bezeichnet man noch mit P_{ni} den Ausdruck:

$$P_{ni} = (\sqrt{1-\mu^2})^i \frac{d^i P_n(\mu)}{d\mu^i} \qquad 2.$$

so muss unsere Entwicklung die Gestalt haben:

$$\begin{aligned} F = C_{00}P_{00} &+ C_{10}P_{10} + C_{20}P_{20} + C_{30}P_{30} + \ldots \\ &+ [C_{11}P_{11} + C_{21}P_{21} + C_{31}P_{31} + \ldots]\cos\alpha \\ &+ [S_{11}P_{11} + S_{21}P_{21} + S_{31}P_{31} + \ldots]\sin\alpha \\ &+ [C_{22}P_{22} + C_{32}P_{32} + \ldots]\cos 2\alpha \\ &+ [S_{22}P_{22} + S_{32}P_{32} + \ldots]\sin 2\alpha \\ &+ [C_{33}P_{33} + \ldots]\cos 3\alpha \\ &+ [S_{33}P_{33} + \ldots]\sin 3\alpha \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad 3.$$

die gewöhnliche Form einer Entwicklung nach Kugelfunctionen.

Die Grössen C_{ni} und S_{ni} sind reine Constante, um deren Bestimmung es sich bei der Entwicklung handeln wird.

Es ist nun bekannt, dass wir durch eine Entwicklung dieser Form jedes vorgegebene Werthsystem mit beliebiger Genauigkeit darstellen können, wenn wir nur genügend viele Glieder der Entwicklung berücksichtigen. Es wäre also naheliegend, die Sternvertheilung in allen ihren Einzelheiten und Unregelmässigkeiten mit grosser Genauigkeit darzustellen, und daraus das Maximum zu suchen. Bei einem solchen Vorgehen stossen wir aber sofort auf Schwierigkeiten, welche in den Eigenschaften der angewandten Function ihren Grund haben. Gesetzt, es wäre gelungen, die Sternvertheilung mit hinreichender Genauigkeit durch eine Entwicklung darzustellen, welche bis zu dem $n$fachen des Winkels α fortschreitet. Setzen wir für δ specielle Werthe so erhalten wir für jeden Parallelkreis eine Entwicklung von der Form

$$\begin{aligned} F = a_0 + a_1\cos\alpha + a_2\cos 2\alpha + \ldots + a_n\cos n\alpha \\ + b_1\sin\alpha + b_2\sin 2\alpha + \ldots + b_n\sin n\alpha, \end{aligned}$$

welche die Sternvertheilung längs jedes Parallelkreises darstellt. Durch Differentiation nach α erhalten wir, wenn wir $\frac{dF}{d\alpha} = 0$ setzen, die Lage der Maxima.

Diese Function hat nun die Eigenschaft, immer eine bestimmte Anzahl, nämlich n Maxima darzustellen. Da nun n für alle Parallelkreise gleich ist, die Sternvertheilung aber auf verschiedenen Parallelkreisen verschieden viele Maxima aufweist, da dieselbe äusserst complicirt ist, so werden auf manchen Parallelkreisen zu viel, auf manchen zu wenig Maxima dargestellt werden. Auf die Genauigkeit der Entwicklung hat dies keinen Einfluss, denn die nicht dargestellten, respective überschüssigen Maxima, können sehr klein sein. Nach der Differentiation aber werden alle diese Maxima mit gleichem Gewichte in Rechnung gehen, und es wäre unmöglich, die wahren Maxima von den falschen zu trennen. Aber auch

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

wenn diese Trennung möglich wäre, so käme dann noch die weitere Schwierigkeit, von den thatsächlichen Maximis jene abzutrennen, welche von der Milchstrasse herrühren, um die allein es uns zu thun ist. Viel leichter gelingt diese Trennung, so lange die Maxima der Milchstrasse durch ihre Grösse gegenüber den kleinen und zufälligen Maximis hervortreten, also noch vor der Differentiation. Daraus folgt, dass wir gleich von Anfang an die Entwicklung so einrichten müssen, oder nur so viele Glieder entwickeln dürfen, dass die Function F gerade so viele Maxima hat, als die Milchstrasse thatsächlich auf jedem Parallelkreise erzeugt. Wir haben also die einzelnen Parallelkreise auf die Anzahl ihrer Maxima zu untersuchen. Um dabei von jenen Maximis, welche ihrer geringen absoluten Höhe wegen nicht zur Milchstrasse gehören können, unabhängig zu sein, sollen nur jene Maxima berücksichtigt werden, welche höher sind, als das Mittel der Sternzahlen des ganzen Parallelkreises. Wir erhalten für die Anzahl und Grösse der Maxima jedes Parallelkreises die folgende Tafel. Dieselbe enthält in der ersten Zeile das Mittel für den Parallelkreis. In den ferneren Zeilen stehen die Zahlen, um welche die Maxima das entsprechende Mittel übersteigen. Die letzte Zeile endlich gibt die Zahl der Maxima auf jedem Kreise.

Tafel der Maxima.

δ	87·5		82·5		77·5		72·5
Mittel							
α	733·7	α	763·2	α	566·9	α	537·4
5°	183·2	55°	41·2	55°	75·3	25°	181·1
95	114·6	135	56·6	75	10 7	65	101·2
115	91·5	155	64·1	105	70·6	125	8·1
135	91·7	195	3·1				
165	91·8	245	25·9				
205	183·4	265	64·2			245	58·0
235	91·6	285	79·5	265	79·8	275	97·8
275	229·3	305	140·7	305	163·5	295	91·2
305	160 5	325	79·5	345	181·6	335	167·7
325	68·8	355	225·2				
	10		10		6		7

δ	67·5		62·5		57·5		52·5
Mittel							
α	581·6	α	694·9	α	749·8	α	817·7
265°	53·0	25°	719·0	35°	888·0	25°	588·6
295	217·4	295	312·0			65	49·8
325	455·0	325	316·2	295	454·3	305	552·5
355	374·2	355	656·1	345	582·6	335	900·8
	4		4		3		4

δ	47·5		42·5		37·5		32·5
Mittel							
α	883·8	α	906·4	α	890·5	α	811·3
		35°	155·4	25°	85·9	85°	424·7
		75	573·1	75	558·6		
325°	997·2						
355	669·6	305	845·5	305	1062·9	295	1023·0
	2		3		3		2

δ	27·5		22·5		17·5		12·5
Mittel							
α	754·4	α	750·6	α	737 7	α	720·2
95°	649·9	85°	804·6	95°	618·9	95°	668·6
		275	438·6				
295	721·6	305	675·9	295	669·2	295	709·6
	2		3		2		2

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

δ	7·5		2·5		−2·5		−7·5
Mittel							
α	727·3	α	682·5	α	665·7	α	770·4
95°	751·0	75°	344 5	105°	744·2	105°	905·2
		105	794·0				
275	775·2			285	286·0		
295	672·3	295	407·6	305	213·7	285	377·3
	3		3		3		2

δ	−12·5		−17·5		−21·5
Mittel					
α	911·2	α	842·6	α	676·7
115°	973·3	115°	834·8	105°	645·3
285	393·8	275	510·6	275	335·3
	2		2		2

Aus dieser Tafel erkennen wir sofort eine eigenthümliche Eigenschaft der Maxima, welche noch deutlicher in der folgenden Zusammenstellung hervortritt, in welcher wir die grössten Maxima auf der einen Seite des Himmels, d. i. in der Nähe von $\alpha = 90°$ mit den grössten auf der anderen, d. i. bei $\alpha = 270°$ ihrer Grösse nach vergleichen, indem wir für jeden Parallelkreis die Differenz dieser Maxima bilden.

δ / α	90°	270°	Differenz	δ / α	90°	270°	Differenz
62·5°	1413·9	1011·1	+ 402·8	17·5°	1356·6	1406·9	− 50·3
57·5	1637·8	1332·4	+ 305·4	12·5	1388·8	1429·8	− 41·0
52·5	1406·3	1718·5	− 312·2	7·5	1478·3	1502·5	− 24·2
47·5	840·5	1881·0	− 1040·5	2·5	1476·5	1090·1	+ 386·4
42·5	1479 5	1751·8	− 272·4	− 2·5	1409·9	951·7	+ 458 2
37·5	1449·1	1953·4	− 504·3	− 7·5	1675·6	1147·7	+ 527·9
32·5	1236·0	1834·3	− 598·3	− 12 5	1884·5	1305·0	+ 579·5
27·5	1404·3	1476·0	− 71·7	−17·5	1677·4	1353 2	+ 324·2
22·5	1555·2	1426·5	+ 128·7	−21·5	1322·0	1012·0	+ 310·0

Wir sehen aus dieser Tafel, dass bei den Parallelkreisen zwischen $\delta = +52°5$ und $\delta = +7°5$ die bei 90° Rectascension liegenden Maxima kleiner sind, als die bei 270°. In den Declinationen $\delta = +2°5$ bis $\delta = -21°5$ zeigt sich das Umgekehrte, und dasselbe scheint bei den Parallelkreisen nördlich 52°5 der Fall zu sein. In noch höheren Declinationen laufen dann die Maxima schon in eines zusammen.

Was nun die Anzahl der Maxima betrifft, so weisen die nördlichsten Parallelkreise die meisten auf. Dieselben sind aber nicht gross und ziemlich gleichmässig über den ganzen Kreis vertheilt. Die beiden nördlichsten Trapezreihen liegen nämlich so, dass sie die Milchstrasse nirgends treffen. Es findet sich daher kein bedeutendes Maximum, und die Sternzahlen weichen nur um geringe Beträge nach beiden Seiten des Mittels ab. Diese durch die Declinationen $\delta = 87°5$ und $\delta = 82°5$ bezeichneten Trapezreihen dürfen wir bei der Entwicklung nicht berücksichtigen, denn es würden durch dieselbe Maxima dargestellt werden, welche mit der Milchstrasse nichts zu thun haben, und später von den Milchstrassenmaximis nicht zu trennen wären.

Auch auf die nächsten Reihen, mit den mittleren Declinationen $\delta = 77°5$, 72°5, 67°5, 62°5 und 57°5, muss verzichtet werden. Diese Kreise liegen schon mit einem Theile ihres Verlaufes in der Milchstrasse. Diese zeigt nun vom Sternbilde des Perseus bis zum Scorpion einen zweifachen Zug. Die ersten beiden Kreise (77°5, 72°5) erreichen nur den nördlichen Zweig, die nächsten beiden (67°5, 62°5) bereits den südlichen. Der Kreis $\delta = 57°5$ verläuft theilweise schon südlich der Milchstrasse. Diese Kreise können deshalb nicht berücksichtigt werden, weil sie die Milchstrasse unter zu kleinen Winkeln schneiden. Es sind daher die Schnittpunkte sehr unsicher.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Von der mit $\delta = 52°5$ bezeichneten Trapezreihe an müssen nun alle weiteren Reihen die Milchstrasse auf beiden Seiten des Himmels schneiden. Die Schnittpunkte werden durch die grossen Sternzahlen kenntlich sein. Wäre nun die Milchstrasse in ihrem ganzen Verlaufe doppelt, so müssten auf jedem Parallelkreise vier Maxima liegen. Diese vier Maxima zeigen sich nur bei $\delta = 52°5$. Auf den übrigen Parallelkreisen zeigt sich eine Theilung der Milchstrasse nur an dem bei 270° A. R. verlaufenden Zweige. In der That ist die Theilung nur auf dieser Seite deutlich, und reicht auf der anderen Seite des Poles nur bis etwas südlich von 52°5. Aber auch ein dreifaches Maximum, wie es sich bei einer Theilung der Milchstrasse auf der einen Seite des Himmels zeigen müsste, zeigt sich nur auf sechs Kreisen. Der Grund, warum die hier thatsächlich vorhandene Theilung verschwindet, liegt in der verwendeten Sternzählung, indem die Ausdehnung der Trapeze über 10° A. R. zu gross ist. Das Minimum zwischen den beiden Maximis wird sich nur dann in den Zahlen aussprechen, wenn die Lage der Trapeze derartig ist, dass eines derselben mit dem grössten Theile seiner Ausdehnung in den Zwischenraum zwischen den beiden Maximis fällt. Liegen aber die Trapeze so, dass eines noch theilweise in den einen Zweig der Milchstrasse fällt, während das nächste schon den zweiten Zweig erreicht, so werden beide Trapeze hohe Zahlen aufweisen, und das Minimum wird verschwinden.

Es ist somit weder eine Entwicklung bis Kugelfunctionen 4. Ordnung, noch bis 3. Ordnung zulässig. Weniger als zwei Maxima dagegen weist kein Parallelkreis auf. Wir werden also bis Kugelfunctionen 2. Ordnung entwickeln. Diese Entwicklung wird auf jedem Parallelkreise zwei Maxima darstellen, welche dem Hauptzuge der Milchstrasse angehören. Die übrigen Maxima werden in der Entwicklung verschwinden, und auf die Rechnung weiter keinen Einfluss üben.

Es ist also nicht möglich, durch eine einzige Rechnung beide Theile der Milchstrasse darzustellen, sondern wir sind gezwungen, den Hauptzug der Milchstrasse für sich zu berechnen, und dann zu versuchen, ob sich aus den wenigen Punkten, die von dem anderen Theile der Milchstrasse aufgefunden werden können, auch dieser darstellen lässt.

Wenn wir nun für $P_{00}\, P_{10}\, P_{20}\, P_{11}\, P_{21}\, P_{22}$ die Werthe einsetzen; welche sich aus Gleichung 1 ergeben:

$$P_{00} = 1 \quad P_{10} = \sin\delta \quad P_{20} = \frac{3}{2}\sin^2\delta - \frac{1}{2}$$

$$P_{11} = \cos\delta \quad P_{21} = 3\sin\delta\cos\delta$$

$$P_{22} = 3\cos^2\delta,$$

so haben wir die auf den übrigen 16 Parallelkreisen liegenden 576 Werthe in eine Function zu entwickeln von der Form

$$\begin{aligned} F = C_{00} &+ C_{10}\sin\delta + C_{20}\left(\frac{3}{2}\sin^2\delta - \frac{1}{2}\right) \\ &+ [C_{11}\cos\delta + C_{21}\,.\,3\sin\delta\cos\delta]\cos\alpha \\ &+ [C_{11}\cos\delta + S_{21}\,.\,3\sin\delta\cos\delta]\sin\alpha \\ &+ C_{22}\,.\,3\cos^2\delta\cos 2\alpha \\ &+ S_{22}\,.\,3\cos^2\delta\sin 2\alpha. \end{aligned} \qquad 4.$$

Um die Coefficienten zu bestimmen, müssen wir die Methode der kleinsten Quadrate anwenden, welche uns jene Entwicklung gibt, die die vorgegebenen Werthe mit der besten Annäherung wiedergibt, welche bei der verlangten Gliederzahl möglich ist.

Eine andere Methode zur Entwicklung eines gegebenen Werthsystems nach Kugelfunctionen wurde von Franz Neumann (Vorlesungen über Potential- und Kugelfunctionen) angegeben. Die so erhaltene Entwicklung muss der Herleitung entsprechend die Beobachtungen genau wiedergeben. Diese Methode ist daher nicht anwendbar. Denn wenn die Entwicklung nach der Methode der kleinsten Quadrate, welche die Werthe nur näherungsweise darstellt, die beste ist, so kann eine Entwicklung, welche die Werthe

Digitized by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

genau wiedergibt, überhaupt nicht existiren. Die Methode ist nur anwendbar, entweder, wenn die vorgegebenen Werthe schon die Eigenschaft besitzen, durch eine Entwicklung von bestimmter Ordnung genau dargestellt zu werden, so dass die Glieder höherer Ordnung sämmtlich gleich 0 sind, welcher Fall bei der Complicirtheit der Sternvertheilung nicht eintreten kann, oder, wenn wir so viele Coefficienten bestimmen wollen, als darzustellende Werthe gegeben sind, was der genannten Gliederzahl nicht entspricht. In beiden Fällen aber würde die Methode der kleinsten Quadrate dasselbe Resultat liefern. Wir haben uns daher nur an die letztere zu halten.

Die Zahl der darzustellenden Werthe ist 16 mal 36, d. i. 576. Wir hätten also für F der Reihe nach diese 576 Werthe einzusetzen, während wir rechts die durch A. R. und Decl. gegebenen Positionen der Werthe substituiren müssten. Wir erhalten so 576 Gleichungen zur Bestimmung der 9 Unbekannten $C_{00}\, C_{10}\, C_{20};\ C_{11}\, C_{21}\, C_{22};\ S_{11}\, S_{21}\, S_{22}$.

Ohne jedoch einen bedeutenden Fehler zu begehen, können wir uns eine derartige ungeheure Rechnung ersparen, indem wir nach den beiden Coordinaten getrennt entwickeln. Wir werden also die auf jedem Parallelkreise liegenden 36 Sternzahlen für sich in eine Function der Rectascension entwickeln, und die so gefundenen Coëfficienten durch Reihen in Declination darstellen. Wir könnten auch umgekehrt zuerst nach Declination entwickeln, allein die erste Anordnung ist vorzuziehen, weil wir so den Vortheil, den die gleichmässige Vertheilung der Werthe über den ganzen Kreisumfang gewährt, besser ausnützen können.

Die Entwicklung der Sternzahlen jedes Parallelkreises hat nun die Gestalt:

$$F = a_0 + a_1 \cos\alpha + a_2 \cos 2\alpha$$
$$+ b_1 \sin\alpha + b_2 \sin 2\alpha.$$

Ist also der ganze Umfang in s (=36) Theile von der Grösse $\frac{2\pi}{s}$ getheilt, so haben wir, während wir links die Werthe $F_0, F_1 \ldots F_{s-1}$ einsetzen, rechts für α die Werthe $0, \frac{2\pi}{s}, 2.\frac{2\pi}{s} \ldots (s-1)\frac{2\pi}{s}$ zu setzen. Wir erhalten daher die Gleichungen

$$\begin{array}{lllll}
a_0 + a_1 \cos 0^\circ & + a_2 \cos 0^\circ & + b_1 \sin 0^\circ & + b_2 \sin 0^\circ & = F_0 \\
a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{s} & + a_2 \cos \frac{4\pi}{s} & + b_1 \sin \frac{2\pi}{s} & + b_2 \sin \frac{4\pi}{s} & = F_1 \\
a_0 + a_1 \cos 2 \frac{2\pi}{s} & + a_2 \cos 2 \frac{4\pi}{s} & + b_1 \sin 2 \frac{2\pi}{s} & + b_2 \sin 2 \frac{4\pi}{s} & = F_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_0 + a_1 \cos (s-1).\frac{2\pi}{s} & + a_2 \cos (s-1).\frac{4\pi}{s} & + b_1 \sin (s-1).\frac{2\pi}{s} & + b_2 \sin (s-1).\frac{4\pi}{s} & = F_{s-1}
\end{array} \qquad 5.$$

in welchen $a_0\, a_1\, a_2\, b_1\, b_2$ die Unbekannten sind.

Aus den Normalgleichungen erhalten wir dann die gesuchten Grössen in der Form

$$a_0 = \frac{\sum_{n=0}^{s-1} F_n}{s} = \frac{\sum_{n=0}^{35} F_n}{36}$$

$$a_1 = \frac{\sum F_n \cos n . \frac{2\pi}{s}}{\frac{s}{2}} = \frac{\sum F_n \cos n . 10^\circ}{18} \qquad 6.$$

$$a_2 = \frac{\sum F_n \operatorname{sos} n . \frac{4\pi}{s}}{\frac{s}{2}} = \frac{\sum F_n \cos n . 20^\circ}{18}$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$b_1 = \frac{\sum F_n \sin n \cdot \frac{2\pi}{s}}{\frac{s}{2}} = \frac{\sum F_n \sin n \cdot 10^\circ}{18}$$

$$b_2 = \frac{\sum F_n \sin n \cdot \frac{4\pi}{s}}{\frac{s}{2}} = \frac{\sum F_n \sin n \cdot 20^\circ}{18} \qquad 6.$$

Da wir die Rechnung für jeden Parallelkreis durchführen müssen, so erhalten wir 16 Systeme von Grössen $a_0\, a_1\, a_2\, b_1\, b_2$. Die 16 Werthe jedes dieser Coefficienten sind dann noch nach Declination zu entwickeln, so dass wir zur Berechnung der Grössen $C_{00}\, C_{10}\, C_{20}$; $C_{11}\, C_{21}$; $S_{11}\, S_{21}$; C_{22}; S_{22} fünf Systeme von je 16 Gleichungen erhalten.

Da die Rechnung immerhin noch sehr umfangreich ist, so wollen wir noch eine Abkürzung eintreten lassen, welche auf das Resultat keinen grossen Einfluss auszuüben vermag. Da nämlich jeder der in Betracht kommenden Parallelkreise wegen der günstigen Lage zur Milchstrasse schon grosses Gewicht hat, und die Aufeinanderfolge der Maxima von Parallelkreis zu Parallelkreis keine erheblichen Unregelmässigkeiten aufweist, so brauchen wir bei der Rechnung nicht alle Parallelkreise zu berücksichtigen, sondern es genügt 10 auszuwählen, welche in den grösseren Declinationen je 10°, in der Nähe des Äquators aber, wo der Winkel zwischen Parallelkreis und Milchstrasse den grössten Werth erreicht, nur je 5° voneinander entfernt sind. Wir betrachten also die Trapezreihen mit den mittleren Declinationen 52°5, 42°5, 32°5, 22°5, 12°5, 7°5, 2°5, —2°5, —7°5, —12°5.

Die Meridiane dagegen müssen wir in möglichst grosser Anzahl in Rechnung bringen. Die Milchstrasse verläuft nämlich in dem hauptsächlich in Betracht kommenden Theile des Himmels nahezu in meridionaler Richtung, und da wäre es bei grösserer Distanz der betrachteten Meridiane möglich, dass die Milchstrasse zwischen zweien derselben hindurchgeht. In diesem Falle würden wir einen grossen Theil unserer Maximalpunkte verlieren. Wir ziehen also alle 36 Meridiane der Seeliger'schen Abzählung in Rechnung. Nachdem noch, um nicht mit allzu grossen Zahlen rechnen zu müssen, sämmtliche noch übrigen 360 Sternzahlen durch die grösste unter ihnen, d. i. durch 1834·3 ($\alpha = 295^\circ$ $\delta = 32 \cdot 5$) dividirt worden sind, erhalten wir die folgende Tafel der darzustellenden Werthe.

[Tafel der darzustellenden Werthe, S. 10.]

Führen wir auf Grund dieses Werthsystemes zuerst die Entwicklung nach Rectascension für jeden Parallelkreis durch, so erhalten wir folgende 10 Reihen:

$$\begin{aligned}
F = {} & 0\cdot4458 + 0\cdot2852 \cos\alpha + 0\cdot0303 \cos 2\alpha - 0\cdot0794 \sin\alpha - 0\cdot0720 \sin 2\alpha \\
& 0\cdot4941 + 0\cdot2373 \cos\alpha - 0\cdot1065 \cos 2\alpha - 0\cdot0548 \sin\alpha - 0\cdot0755 \sin 2\alpha \\
& 0\cdot4423 + 0\cdot1350 \cos\alpha - 0\cdot1465 \cos 2\alpha - 0\cdot0704 \sin\alpha - 0\cdot0975 \sin 2\alpha \\
& 0\cdot4092 + 0\cdot0712 \cos\alpha - 0\cdot1969 \cos 2\alpha - 0\cdot0068 \sin\alpha - 0\cdot0743 \sin 2\alpha \\
& 0\cdot3927 + 0\cdot0416 \cos\alpha - 0\cdot1923 \cos 2\alpha - 0\cdot0296 \sin\alpha - 0\cdot0769 \sin 2\alpha \\
& 0\cdot3965 + 0\cdot0297 \cos\alpha - 0\cdot2037 \cos 2\alpha - 0\cdot0123 \sin\alpha - 0\cdot0552 \sin 2\alpha \\
& 0\cdot3721 + 0\cdot0185 \cos\alpha - 0\cdot1810 \cos 2\alpha + 0\cdot0407 \sin\alpha - 0\cdot0324 \sin 2\alpha \\
& 0\cdot3629 + 0\cdot0091 \cos\alpha - 0\cdot1341 \cos 2\alpha + 0\cdot0790 \sin\alpha - 0\cdot0564 \sin 2\alpha \\
& 0\cdot4200 - 0\cdot0110 \cos\alpha - 0\cdot1270 \cos 2\alpha + 0\cdot0763 \sin\alpha - 0\cdot0751 \sin 2\alpha \\
& 0\cdot4594 - 0\cdot0422 \cos\alpha - 0\cdot1665 \cos 2\alpha + 0\cdot0332 \sin\alpha - 0\cdot0780 \sin 2\alpha.
\end{aligned}$$

Jede dieser 5 Columnen muss entsprechend der verlangten Form der Function nach Declination entwickelt werden. Dazu müssen wir folgende 5 Systeme von je 10 Gleichungen auflösen:

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Tafel der darzustellenden Werthe.

α / δ	52·5	42·5	32·5	22·5	12·5	7·5	2·5	−2·5	−7·5	−17·5
5	0·6798	0·5773	0·3798	0·3264	0·2724	0·2783	0·3181	0·2489	0·3242	0·3335
15	0·7050	0·5121	0·4037	0·2945	0·2724	0·2806	0·3121	0·2599	0·2976	0·2998
25	0·7667	0·4916	0·3927	0·2669	0·3049	0·2822	0·2913	0·2861	0·3176	0·3177
35	0·6029	0·5788	0·4030	0·2798	0·2965	0·2657	0·2739	0·2827	0·3198	0·3248
45	0·4201	0·5344	0·4095	0·2810	0·2462	0·2552	0·2946	0·2975	0·3163	0·3369
55	0·4362	0·5286	0·3682	0·4038	0·2528	0·2712	0·2711	0·3082	0·3566	0·3407
65	0·4729	0·6069	0·3249	0·3081	0·2417	0·3372	0·3357	0·4221	0·4070	0·4141
75	0·4038	0·8067	0·5290	0·4533	0·4462	0·5127	0·5599	0·4855	0·4662	0·4491
85	0·3733	0·6705	0·6737	0·8478	0·6332	0·5967	0·5430	0·5271	0·5170	0·5357
95	0·3753	0·5773	0·6356	0·8366	0·7570	0·8059	0·7868	0·6673	0·6945	0·5983
105	0·3538	0·4246	0·4994	0·6714	0·7259	0·7527	0·8050	0·7686	0·9135	0·8322
115	0·3001	0·3793	0·4199	0·5278	0·5020	0·5555	0·5641	0·6403	0·7852	0·9143
125	0·2624	0·3408	0·4025	0·4191	0·3997	0·4246	0·4616	0·5138	0·6448	0·7624
135	0·2571	0·3081	0·3192	0·3052	0·3372	0·3256	0·3847	0·4161	0·4499	0·5122
145	0·2561	0·2912	0·3030	0·2905	0·3154	0·2789	0·2657	0·3429	0·4049	0·4778
155	0·2132	0·2380	0·2842	0·2515	0·2763	0·2832	0·2287	0·2953	0·3639	0·4228
165	0·2203	0·2424	0·2488	0·2545	0·2424	0·2568	0·2302	0·2602	0·3633	0·3760
175	0·2319	0·2594	0·2210	0·2136	0·2333	0·2217	0·2560	0·2689	0·3073	0·3767
185	0·2239	0·2410	0·2364	0·2054	0·2223	0·2272	0·2335	0·2689	0·3283	0·3567
195	0·2346	0·2447	0·2417	0·2244	0·2105	0·2084	0·2226	0·2557	0·3412	0·3372
205	0·2401	0·2239	0·2519	0·2502	0·2106	0·2663	0·2183	0·2504	0·3353	0·3596
215	0·2507	0·2491	0·2539	0·2545	0·2513	0·2590	0·2472	0·2497	0·3288	0·3679
225	0·2239	0·2498	0·2663	0·2521	0·2736	0·2843	0·2740	0·2482	0·3319	0·3962
235	0·2625	0·2676	0·2823	0·2822	0·3105	0·3256	0·2504	0·2510	0·4030	0·3990
245	0·2641	0·2882	0·3308	0·2935	0·3573	0·3685	0·3646	0·2945	0·3336	0·3047
255	0·2759	0·3244	0·3888	0·3878	0·3913	0·3526	0·3781	0·2567	0·2511	0·4737
265	0·3834	0·5130	0·4437	0·4634	0·4612	0·5153	0·4648	0·3340	0·2833	0·5882
275	0·5311	0·6343	0·5621	0·6483	0·6813	0·8193	0·5560	0·3677	0·4197	0·7377
285	0·5731	0·6933	0·7802	0·6295	0·7220	0·6181	0·5773	0·5188	0·6256	0·7325
295	0·7228	0·9314	1·0000	0·7581	0·7793	0·7630	0·5942	0·4321	0·5365	0·5555
305	0·7470	0·9550	0·8682	0·7776	0·6456	0·5567	0·4601	0·4794	0·5317	0·5180
315	0·6019	0·8544	0·7992	0.5562	0·5098	0·4477	0·3486	0·3881	0·4160	0·4459
325	0·7845	0·8117	0·5776	0·4376	0·3907	0·3822	0·2918	0·3161	0·3709	0·3660
335	0·9370	0·7142	0·5408	0·4162	0·3735	0·3333	0·2504	0·2890	0·3560	0·3242
345	0·7462	0·6387	0·4476	0·3514	0·3294	0·2948	0·2401	0·2838	0·3561	0·3486
355	0·7138	0·5846	0·4322	0·3125	0·2596	0·2673	0·2390	0·2896	0·3254	0·3003

$$a_{0\lambda} = C_{00} + C_{10} \sin \delta_\lambda + C_{20} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \delta_\lambda - \frac{1}{2} \right) \qquad \lambda = 1, 2, \ldots 10$$

$$a_{1\lambda} = C_{11} \cos \delta_\lambda + C_{21} \,.\, 3 \sin \delta_\lambda \cos \delta_\lambda \qquad \ldots\ldots$$

$$b_{1\lambda} = S_{11} \cos \delta_\lambda + S_{21} \,.\, 3 \sin \delta_\lambda \cos \delta_\lambda \qquad \ldots\ldots$$

$$a_{2\lambda} = C_{22} \,.\, 3 \cos^2 \delta_\lambda \qquad \ldots\ldots$$

$$b_{2\lambda} = S_{22} \,.\, 3 \cos^2 \delta_\lambda \qquad \ldots\ldots$$

wo $\delta_1\ \delta_2 \ldots \delta_{10}$ der Reihe nach die Declinationen $\delta = 52°5,\ 42°5,\ 32°5,\ 22°5,\ 12°5,\ 7°5,\ 2°5,\ -2°5,\ -7°5,\ -17°5$ bedeuten. Die Auflösung ergibt endlich die gesuchte Entwicklung für F

$$\begin{aligned} F = 0{\cdot}4747 &- 0{\cdot}0726 \sin \delta + 0{\cdot}1566\,(1{\cdot}5 \sin^2 \delta - 0{\cdot}5) \\ &+ [0{\cdot}0126 \cos \delta + 0{\cdot}1171 \,.\, 3 \sin \delta \cos \delta] \cos \alpha \\ &+ [0{\cdot}0310 \cos \delta - 0{\cdot}0578 \,.\, 3 \sin \delta \cos \delta] \sin \alpha \\ &- 0{\cdot}0619 \,.\, 3 \cos^2 \delta \cos 2\alpha \\ &- 0{\cdot}0315 \,.\, 3 \cos^2 \delta \sin 2\alpha. \end{aligned} \qquad 7.$$

Um nun darzuthun, in wie weit die so gefundene Function imstande ist die gegebenen Werthe darzustellen, wurden durch Einsetzen der speciellen Werthe für α und δ die Beobachtungen zurückberechnet. Es ergab sich das in der folgenden Tafel gegebene System der dargestellten Werthe. Die Unterschiede: Beobachtung—Rechnung sind auf der 2. Tafel gegeben.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Tafel der dargestellten Werthe.

α / δ	52·5	42·5	32·5	22·5	12·5	7·5	2·5	−2·5	−7·5	−17·5
5°	0·5953	0·5380	0·4629	0·3803	0·3012	0·2663	0·2361	0·2119	0·1943	0·1818
15	0·5735	0·5127	0·4362	0·3546	0·2787	0·2460	0·2187	0·1975	0·1832	0·1777
25	0·5560	0·4958	0·4224	0·3461	0·2773	0·2486	0·2252	0·2081	0·1975	0·2065
35	0·5432	0·4874	0·4216	0·3550	0·2969	0·2736	0·2551	0·2426	0·2362	0·2434
45	0·5344	0·4869	0·4324	0·3790	0·3345	0·3174	0·3049	0·2976	0·2955	0·3085
55	0·5286	0·4913	0·4509	0·4132	0·3845	0·3748	0·3687	0·3672	0·3696	0·3879
65	0·5234	0·4978	0·4725	0·4520	0·4400	0·4380	0·4388	0·4430	0·4503	0·4738
75	0·5167	0·5022	0·4920	0·4883	0·4931	0·4987	0·5065	0·5178	0·5287	0·5578
85	0·5064	0·5013	0·5041	0·5157	0·5360	0·5492	0·5634	0·5794	0·5963	0·6314
95	0·4907	0·4920	0·5048	0·5288	0·5624	0·5818	0·5824	0·6240	0·6456	0·6876
105	0·4688	0·4725	0·4911	0·5237	0·5676	0·5924	0·6182	0·6450	0·6713	0·7210
115	0·4403	0·4422	0·4622	0·4990	0·5497	0·5785	0·6087	0·6398	0·6707	0·7288
125	0·4066	0·4024	0·4191	0·4560	0·5094	0·5408	0·5744	0·6092	0·6441	0·7114
135	0·3696	0·3555	0·3649	0·3976	0·4507	0·4832	0·5187	0·5564	0·5950	0·6711
145	0·3316	0·3057	0·3046	0·3300	0·3793	0·4116	0·4479	0·4876	0·5291	0·6137
155	0·2966	0·2572	0·2560	0·2596	0·3031	0·3340	0·3701	0·4106	0·4542	0·5458
165	0·2676	0·2154	0·1896	0·1947	0·2305	0·2590	0·2940	0·3343	0·3789	0·4757
175	0·2479	0·1849	0·1478	0·1422	0·1699	0·1954	0·2283	0·2675	0·3118	0·4113
185	0·2405	0·1694	0·1233	0·1087	0·1282	0·1503	0·1803	0·2173	0·2603	0·3592
195	0·2465	0·1717	0·1200	0·0984	0·1105	0·1290	0·1555	0·1895	0·2298	0·3249
205	0·2670	0·1928	0·1392	0·1133	0·1171	0·1340	0·1568	0·1867	0·2231	0·3111
215	0·3008	0·2318	0·1802	0·1526	0·1535	0·1648	0·1833	0·2086	0·2402	0·3176
225	0·3460	0·2861	0·2398	0·2130	0·2101	0·2180	0·2321	0·2522	0·2779	0·3425
235	0·3998	0·3517	0·3129	0·2888	0·2829	0·2874	0·2971	0·3113	0·3306	0·3803
245	0·4582	0·4234	0·3937	0·3728	0·3644	0·3656	0·3704	0·3790	0·3933	0·4252
255	0·5171	0·4956	0·4744	0·4567	0·4457	0·4435	0·4435	0·4460	0·4515	0·4694
265	0·5724	0·5623	0·5485	0·5329	0·5184	0·5124	0·5076	0·5044	0·5031	0·5060
275	0·6203	0·6190	0·6098	0·5942	0·5750	0·5652	0·5556	0·5468	0·5394	0·5290
285	0·6580	0·6615	0·6535	0·6353	0·6100	0·5946	0·5820	0·5680	0·5553	0·5340
295	0·6835	0·6876	0·6770	0·6536	0·6207	0·6025	0·5837	0·5654	0·5481	0·5192
305	0·6962	0·6968	0·6799	0·6484	0·6070	0·5844	0·5616	0·5396	0·5191	0·4852
315	0·6968	0·6899	0·6637	0·6224	0·5715	0·5450	0·5187	0·4938	0·4712	0·4355
325	0·6868	0·6697	0·6324	0·5800	0·5201	0·4898	0·4607	0·4338	0·4103	0·3757
335	0·6686	0·6400	0·5906	0·5276	0·4593	0·4260	0·3951	0·3674	0·3438	0·3128
345	0·6454	0·6052	0·5448	0·4723	0·3975	0·3624	0·3304	0·3029	0·2805	0·2547
355	0·6201	0·5699	0·5004	0·4212	0·3425	0·3068	0·2751	0·2487	0·2284	0·2089

[Tafel der Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung, S. 12.]

Zum besseren Vergleiche wurden auf der beiliegenden Tafel die Werthe, welche Beobachtung und Rechnung ergaben, durch Curven dargestellt.

Wir sehen, dass auf allen Parallelkreisen dieser Unterschied 6 oder noch mehr Zeichenwechsel aufweist, mit Ausnahme des nördlichsten, welcher nur 4 zeigt. Wir sehen daraus, dass sich hier unter den vernachlässigten Gliedern noch eines befindet, welches von dem doppelten Winkel abhängig ist, ohne ganz unbedeutend zu sein. Der Grund dieser der Natur der Entwicklung nach eigentlich unstatthaften Abweichung liegt in dem Fehler, den wir dadurch begehen, dass wir die Entwicklung nach Rectascension von der nach Declination vollständig trennen. Da nämlich die letztere von den bereits fehlerhaften Werthen der ersteren ausgeht, und dieselben wieder nur mit einer gewissen Annäherung darstellt, so können sich die Fehler beider Entwicklungen summiren und die Ursache solcher Abweichungen bilden. Da wir sonst überall mehr Zeichenwechsel haben, so zeigt uns dies, dass unter den vernachlässigten Gliedern erst diejenigen, welche das Drei- oder Mehrfache der Rectascension enthalten, von Bedeutung sein können, so dass die Function Alles darstellt, was eine Function dieser Form überhaupt darzustellen im Stande ist.

Die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung erreichen aber noch eine bedeutende Grösse, namentlich sind die Maxima ihrer Höhe nach meist sehr schlecht dargestellt, so dass wir sagen müssen, dass die Entwicklung zur Darstellung der Sternvertheilung selbst unzulänglich wäre, und dass zu diesem Zwecke die Function eine viel grössere Anzahl von Gliedern haben müsste.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Dagegen leistet uns die Function das, was wir von ihr verlangen, vollständig. Sie stellt nämlich auf jedem Parallelkreis zwei Maxima dar, welche ihrer Lage nach mit den Maximis der thatsächlichen Sternvertheilung übereinstimmen; wir können die Function daher benützen, um die Lage der Milchstrasse herzuleiten.

Tafel der Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung.

α / δ	52·5	42·5	32·5	22·5	12·5	7·5	2·5	−2·5	−7·5	−17·5
5°	0·0845	0·0393	−0·0831	−0·0539	−0·0288	0·0120	0·0826	0·0370	0·1299	0·1517
15	0·1315	−0·0006	−0·0325	−0·0601	−0·0063	0·0346	0·0934	0·0624	0·1144	0·1221
25	0·2107	−0·0042	−0·0297	−0·0792	0·0276	0·0336	0·0601	0·0780	0·1201	0·1112
35	0·0597	0·0914	−0·0186	−0·0752	−0·0004	−0·0079	0·0188	0·0401	0·0836	0·0814
45	−0·1143	0·0475	−0·0229	−0·0980	−0·0883	−0·0622	−0·0103	−0·0001	0·0208	0·0284
55	−0·0924	0·0373	−0·0827	−0·0094	−0·1317	−0·1036	0·0976	−0·0590	−0·0130	−0·0472
65	−0·0505	0·1091	−0·1476	−0·1439	−0·1983	−0·1008	0·1031	−0·0209	−0·0433	−0·0597
75	−0·1129	0·3045	0·0370	−0·0350	−0·0469	0·0140	0·0534	−0·0323	−0·0625	−0·1087
85	−0·1331	0·1692	0·1696	0·3321	0·0972	0·0475	−0·0204	−0·0523	−0·0793	−0·0957
95	−0·1154	0·0853	0·1308	0·3078	0·1946	0·2241	0·2044	0·0433	0·0489	−0·0893
105	−0·1150	−0·0479	0·0083	0·1477	0·1583	0·1603	0·1868	0·1236	0·2422	0·1112
115	−0·1402	−0·0629	−0·0423	0·0288	−0·0477	−0·0230	−0·0446	0·0005	0·1145	0·1855
125	−0·1442	−0·0616	−0·0166	−0·0369	−0·1097	−0·1162	−0·1128	−0·0954	0·0007	0·0510
135	−0·1125	−0·0474	−0·0457	−0·0924	−0·1135	−0·1576	−0·1340	−0·1403	−0·1451	−0·1589
145	−0·0755	−0·0145	−0·0016	−0·0395	−0·0639	0·1327	−0·1822	−0·1447	−0·1242	−0·1359
155	−0·0834	−0·0192	0·0282	−0·0081	−0·0268	−0·0508	−0·1414	−0·1153	−0·0903	−0·1230
165	−0·0473	0·0270	0·0592	0·0598	0·0119	−0·0022	−0·0638	−0·0741	−0·0156	−0·0997
175	−0·0160	0·0745	0·0732	0·0714	0·0634	0·0263	0·0277	0·0014	−0·0045	−0·0346
185	−0·0166	0·0716	0·1131	0·0967	0·0941	0·0769	0·0532	0·0516	0·0680	−0·0025
195	−0·0119	0·0730	0·1217	0·1260	0·1000	0·0794	0·0671	0·0662	0·1114	0·0123
205	−0·0269	0·0311	0·1127	0·1369	0·0935	0·1323	0·0615	0·0637	0·1122	0·0485
215	−0·0501	0·0173	0·0737	0·1019	0·0978	0·0942	0·0639	0·0411	0·0886	0·0503
225	−0·1221	−0·0363	0·0265	0·0391	0·0635	0·0663	0·0419	−0·0040	0·0540	0·0537
235	−0·1373	−0·0841	−0·0306	−0·0066	0·0276	0·0382	−0·0467	−0·0603	0·0724	0·0187
245	−0·1941	−0·1352	−0·0629	−0·0793	−0·0071	0·0029	−0·0058	−0·0845	−0·0597	−0·1205
255	−0·2412	−0·1712	−0·0856	−0·0689	−0·0544	−0·0909	−0·0654	−0·1893	−0·2004	0·0043
265	−0·1890	−0·0493	−0·1048	−0·0695	−0·0572	0·0029	−0·0428	−0·1704	−0·2198	0·0822
275	−0·0892	0·0153	−0·0477	0·0541	0·1063	0·2541	0·0004	−0·1791	−0·1197	0·2087
285	−0·0849	0·0318	0·1267	−0·0058	0·1120	0·0235	−0·0047	−0·0492	0·0703	0·1985
295	0·0393	0·2438	0·3230	0·1045	0·1586	0·1605	0·0105	−0·1333	−0·0116	0·0363
305	0·0508	0·2582	0·1883	0·1292	0·0386	−0·0277	−0·1015	−0·0602	0·0126	0·0328
315	−0·0949	0·1645	0·1355	−0·0662	−0·0617	−0·0973	−0·1701	−0·1057	−0·0552	0·0104
325	0·0977	0·1420	−0·0548	−0·1425	−0·1294	−0·1076	−0·1689	−0·1177	−0·0394	−0·0097
335	0·2684	0·0742	−0·0498	−0·1114	−0·0858	−0·0927	−0·1447	−0·0784	0·0122	0·0114
345	0·1008	0·0335	−0·0972	−0·1209	−0·0681	−0·0676	−0·0903	−0·0191	0·0756	0·0939
355	0·0937	0·0147	−0·0082	−0·1087	−0·0829	−0·0395	−0·0361	0·0409	0·0970	0·0914

Herleitung der Lage des Maximums.

Um aus dieser Function die Lage des Maximums herzuleiten, haben wir zu differentiiren. Nach welcher der beiden Variabeln wir differentiiren, ist theoretisch ganz gleichgiltig, für die Sicherheit der Resultate ist es aber keineswegs bedeutungslos.

Da die Meridiane in dem von uns hauptsächlich betrachteten Theile des Himmels die Milchstrasse entweder gar nicht oder nur unter sehr kleinen Winkeln schneiden, so sind die Maximalpunkte auf den Meridianen sehr unsicher, und die Differentiation nach δ würde keine guten Resultate liefern.

Viel sichere Resultate erhalten wir durch Differentiation nach α, denn die betrachteten Parallelkreise schneiden die Milchstrasse zweimal, und zwar immer unter günstigen Winkeln

Setzen wir also $\frac{dF}{d\alpha} = 0$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} &-[0{\cdot}0126 \cos\delta + 0{\cdot}3513 . \sin\delta \cos\delta] \sin\alpha \\ &+[0{\cdot}0310 \cos\delta - 0{\cdot}1734 . \sin\delta \cos\delta] \cos\alpha \\ &\qquad + 0{\cdot}3714 . \cos^2\delta \sin 2\alpha \\ &\qquad - 0{\cdot}1890 . \cos^2\delta \cos 2\alpha \quad = 0. \end{aligned} \tag{8.}$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Der Bequemlichkeit halber führen wir statt der Polareoordinaten rechtwinkelige ein. Wir nehmen die Äquatorebene als xy Ebene, und legen die x Axe so, dass sie nach dem Punkte $\alpha = 0$, die y Axe nach $\alpha = 90°$ gerichtet ist. Die z Axe zeigt nach dem Nordpol. Dann ist

$$x = \cos\delta \cos\alpha$$
$$y = \cos\delta \sin\alpha$$
$$z = \sin\delta,$$

wobei wir den Radius der Sphäre gleich 1 setzen.

Wir erhalten somit:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \left.\begin{array}{l} 0\cdot1890\,x^2 - 0\cdot1890\,y^2 \\ -0\cdot7428\,xy + 0\cdot3513\,yz + 0\cdot1734\,xz \\ -0\cdot0310\,x + 0\cdot0126\,y \end{array}\right\} = 0. \qquad 9.$$

Diese Gleichung zusammen mit der Bedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

stellt den Zug des Maximums und des Minimums auf der Sphäre dar. Wir erhalten also die Gleichung einer Fläche 2. Ordnung, deren Schnittlinie mit der Sphäre den Zug des Maximums in sich begreifen muss.

Dabei haben wir nur noch zu berücksichtigen, dass unsere Rectascensionen nicht von dem wahren Frühlingspunkte gezählt sind, sondern von einem Punkte, dessen Rectascension gleich 5° ist, da wir bei der Entwicklung nach Rectascension die Werthe $\alpha = 0°, 10°, 20° \ldots\ldots$ statt $\alpha = 5°, 15°, 25°$, substituirt haben. Wir haben somit alle Werthe der Rectascension, welche wir erhalten, um 5° zu vermehren.

Durch eine Parallelverschiebung des Coordinatensystems um die Grössen

$a = -0\cdot0368$ in der Richtung der x Axe
$b = 0\cdot0180$ » » » y »
$c = -0\cdot0221$ » » » » z »

erhalten wir die Mittelpunktsgleichung der Fläche:

$$0\cdot1890\,x^2 - 0\cdot1890\,y^2$$
$$+0\cdot1734\,xz - 0\cdot7428\,xy + 0\cdot3513\,yz + 0\cdot0020 = 0.$$

Für die reciproken Werthe der Quadrate der Halbaxen finden wir

$$\lambda_1 = 247\cdot1$$
$$\lambda_2 = -38\cdot2$$
$$\lambda_3 = -208\cdot7,$$

so dass die Gleichung der Fläche inbezug auf die 3 Hauptaxen lautet:

$$247\cdot1\,x^2 - 38\cdot2\,y^2 - 208\cdot7\,z^2 = 1. \qquad 10.$$

Die Gleichung stellt uns ein zweischaliges Hyperboloid dar. Die Winkel, welche die reele Axe desselben mit unseren Coordinatenaxen einschliesst, sind:

$$\alpha = 94\cdot70°$$
$$\beta = 73\cdot15°$$
$$\gamma = 17\cdot50°.$$

Soll sich nun die Milchstrasse durch eine Ebene, oder vielmehr durch deren Schnitt mit der Sphäre darstellen lassen, so muss diese Fläche 2. Ordnung diese Ebene wenigstens näherungsweise enthalten. Sie muss dann annähernd in zwei Ebenen zerfallen, von denen die eine mit der Milchstrasse zusammenfallen und das Maximum bestimmen wird, während die andere so weit als möglich, die Lage des Minimums geben wird.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Wir suchen also aus der Gleichung der Fläche einen linearen Factor herauszuheben, welcher dann die Gleichung der einen Ebene darstellt, während der zurückbleibende andere Factor die zweite Ebene bedeutet. Damit nun die Gleichung der Fläche 2. Ordnung in zwei lineare Factoren zerfällt, müssen die bei der Division durch den einen Factor auftretenden Reste verschwinden.

Wenn wir den allgemeinen Ausdruck für die Fläche 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{23}yz + a_{13}xz \\ + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned} \qquad 11.$$

durch den linearen Ausdruck

$$Ax + By + Cz + D \qquad 12.$$

nach den gewöhnlichen Vorschriften dividiren, so erhalten wir folgende Reste:

$$\begin{aligned}
&a_{23} - \frac{C}{A}\left(a_{12} - a_{11}\frac{B}{A}\right) - \frac{B}{A}\left(a_{13} - a_{11}\frac{C}{A}\right) \\
&a_{24} - \frac{D}{A}\left(a_{12} - a_{11}\frac{B}{A}\right) - \frac{B}{A}\left(a_{14} - a_{11}\frac{D}{A}\right) \\
&a_{34} - \frac{D}{A}\left(a_{13} - a_{11}\frac{C}{A}\right) - \frac{C}{A}\left(a_{14} - a_{11}\frac{D}{A}\right) \\
&a_{22} - \frac{B}{A}\left(a_{12} - a_{11}\frac{B}{A}\right) \\
&a_{33} - \frac{C}{A}\left(a_{13} - a_{11}\frac{C}{A}\right) \\
&a_{44} - \frac{D}{A}\left(a_{14} - a_{11}\frac{D}{A}\right).
\end{aligned} \qquad 13.$$

Der Quotient hat die Form:

$$\frac{a_{11}}{A}x + \frac{1}{A}\left(a_{12} - a_{11}\frac{B}{A}\right)y + \frac{1}{A}\left(a_{13} - a_{11}\frac{C}{A}\right)z + \frac{1}{A}\left(a_{14} - a_{11}\frac{D}{A}\right) \qquad 14.$$

Die sechs Reste gleich 0 gesetzt, geben sechs Gleichungen für die drei Unbekannten $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}$ oder x, y, z, wie wir sie von nun an bezeichnen wollen. Diese sechs Gleichungen haben wir wieder nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösen.

Durch Auflösung der letzten drei dieser Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{22} - a_{12}x + a_{11}x^2 = 0 \\ a_{33} - a_{13}y + a_{11}y^2 = 0 \\ a_{44} - a_{14}z + a_{11}z^2 = 0 \end{aligned} \qquad 15.$$

verschaffen wir uns Näherungswerthe $x_0\, y_0\, z_0$. Dieselben würden, in die ersten drei Gleichungen substituirt, dieselben genau erfüllen, wenn die Fläche 2. Ordnung thatsächlich aus zwei Ebenen bestünde. Eine derartige Erfüllung der Gleichungen findet, wie vorauszusehen, nicht statt, wohl aber eine näherungsweise. Wir fügen also zu $x_0\, y_0\, z_0$ noch die Correctionen dx, dy, dz hinzu, und verwandeln unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung die sechs Gleichungen in lineare mit den Unbekannten $dx\, dy\, dz$. Dieselben lauten dann:

$$\begin{aligned}
(2a_{11}y_0 - a_{13})\,dx + (2a_{11}x_0 - a_{12})\,dy &= -a_{23} + a_{13}x_0 + a_{12}y_0 - 2a_{11}x_0y_0 \\
(2a_{11}z_0 - a_{14})\,dx + (2a_{11}x_0 - a_{12})\,dz &= -a_{24} + a_{14}x_0 + a_{12}z_0 - 2a_{11}x_0z_0 \\
+ (2a_{11}z_0 - a_{14})\,dy + (2a_{11}y_0 - a_{13})\,dz &= -a_{34} + a_{14}y_0 + a_{13}z_0 - 2a_{11}y_0z_0 \\
(2a_{11}x_0 - a_{12})\,dx &= -a_{22} + a_{12}x_0 - a_{11}x_0^2 = 0 \\
(2a_{11}y_0 - a_{13})\,dy &= -a_{33} + a_{13}y_0 - a_{11}y_0^2 = 0 \\
(2a_{11}z_0 - a_{14})\,dz &= -a_{44} + a_{14}z_0 - a_{11}z_0^2 = 0.
\end{aligned} \qquad 16.$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Für die Grössen a_{11} a_{12}... haben wir die früher gefundenen Werthe zu substituiren:

$$\begin{array}{llll} a_{11} = 0\cdot1890 & a_{12} = -0\cdot7428 & a_{13} = 0\cdot1734 & a_{14} = -0\cdot0310 \\ & a_{22} = -0\cdot1890 & a_{23} = 0\cdot3513 & a_{24} = 0\cdot0126 \\ & & a_{33} = 0 & a_{34} = 0 \\ & & & a_{44} = 0. \end{array} \qquad 17.$$

Wir finden dann für $x_0\, y_0\, z_0$ je zwei Werthe aus den Gleichungen 15:

$$\begin{array}{lll} x_{01} = 0\cdot2398 & y_{01} = 0\cdot9173 & z_{01} = 0 \\ x_{02} = -4\cdot1698 & y_{02} = 0 & z_{02} = -0\cdot1640. \end{array} \qquad 18.$$

Legen wir zuerst die Werthe der ersten Zeile der Rechnung zu Grunde. Die Substitution in die Ausdrücke 13 gibt die Fehlerquadratsumme $s_1 = 1\cdot5742$.

Durch Auflösung des Systems 16 finden wir:

$$\begin{aligned} dx &= -0\cdot0128 \\ dy &= -1\cdot4390 \\ dz &= -0\cdot0195, \end{aligned}$$

daher:

$$\begin{aligned} x &= 0\cdot2270 \\ y &= -0\cdot5217 \\ z &= -0\cdot0195. \end{aligned}$$

Die Summe der Fehlerquadrate, die wir durch Substitution dieser Werthe in 13 erhalten, wird $s_2 = 0\cdot0349$.

Der grosse Werth von dy lässt eine zweite Näherung als nothwendig erscheinen. Indem wir die neuen Werthe von x, y, z statt x_0, y_0, z_0 zu Grunde legen, erhalten wir für dx, dy, dz

$$\begin{aligned} dx &= 0\cdot0296 \\ dy &= 0\cdot1960 \\ dz &= -0\ 0062, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} x &= 0\cdot2566 = \frac{B}{A} \\ y &= -0\cdot3257 = \frac{C}{A} \\ z &= -0\cdot0257 = \frac{D}{A} \end{aligned}$$

mit der Fehlerquadratsumme $s_3 = 0\cdot0072$.

Die Gleichung der ersten Ebene wird somit, da es auf constante Factoren nicht ankommt,

$$x + 0\cdot2566y - 0\cdot3257z - 0\cdot0257 = 0.$$

Die durch den Quotienten dargestellte zweite Ebene hat die Form

$$0\cdot1890x - 0\cdot7913y + 0\cdot2350z - 0\cdot0261 = 0.$$

Zur Prüfung der Richtigkeit dieser Resultate versuchen wir, dieselben auf Grund der zweiten Näherungswerthe x_{02}, y_{02}, z_{02} ebenfalls herzuleiten. Da auch hier die erste Näherung zu unsichere Werthe liefert, wurde die Rechnung ebenfalls wiederholt. Es ergaben sich der Reihe nach folgende Werthe:

$$\begin{aligned} x_0 &= -4\cdot1698 \\ y_0 &= 0\cdot0000 \\ z_0 &= -0\cdot1640 \quad s_1 = 1\cdot1553, \end{aligned}$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

daraus

$$\begin{array}{llll} dx = & 0\cdot0105 & \text{also } x = -4\cdot1593 & \\ dy = & 1\cdot2330 & y = 1\cdot2330 & \\ dz = & 0\cdot0206 & z = -0\cdot1434 & s_2 = 0\cdot0080. \end{array}$$

Ferner die zweite Näherung:

$$\begin{array}{llll} dx = & -0\cdot0220 & \text{also } x = -4\cdot1813 & \\ dy = & 0\cdot0189 & y = 1\cdot2519 & \\ dz = & 0\cdot0049 & z = -0\cdot1385 & s_3 = 0\cdot0073. \end{array}$$

Aus diesen Werthen erhalten wir zuerst die Gleichung der zweiten Ebene in der Form:

$$x - 4\cdot1813y + 1\cdot2519y - 0\cdot1385 = 0,$$

oder durch Multiplication mit $0\cdot1890$:

$$0\cdot1890x - 0\cdot7903y + 0\cdot2367z - 0\cdot0262 = 0.$$

Die Formel für den Quotienten ergibt daraus die Gleichung der ersten Ebene:

$$x + 0\cdot2513y - 0\cdot3349z - 0\cdot0254 = 0.$$

Da die beiden Resultate noch nicht vollkommen übereinstimmen, müssen wir noch weitere Näherungen versuchen. Das zweite Resultat wird durch eine Wiederholung der Rechnung nur mehr sehr wenig beeinflusst.

$$\begin{array}{llll} dx = & 0\cdot0003 & \text{daher } x = -4\cdot1810 & \\ dy = & -0\cdot0010 & y = 1\cdot2509 & \\ dz = & -0\cdot0003 & z = -0\cdot1388 & s_4 = 0\cdot0071. \end{array} \qquad 19.$$

Etwas mehr ändert sich das erste Resultat, weshalb wir hier noch zwei Näherungen durchführen:

$$\begin{array}{llll} dx = & -0\cdot0048 & \text{somit } x = 0\cdot2518 & \\ dy = & -0\cdot0081 & y = -0\cdot3338 & \\ dz = & -0\cdot0003 & z = -0\cdot0260 & s_4 = 0\cdot0071, \end{array}$$

und

$$\begin{array}{llll} dx = & 0\cdot0000 & \text{somit } x = 0\cdot2518 & \\ dy = & 0\cdot0006 & y = -0\cdot3332 & \\ dz = & 0\cdot0006 & z = -0\cdot0254 & s_5 = 0\cdot0071. \end{array} \qquad 20.$$

Auf Grund der Werthe 19 und 20 für x, y, z finden wir für die Gleichung der ersten Ebene die folgenden beiden Ausdrücke, von denen der erste durch Multiplication mit $0\cdot1890$ mit dem zweiten vergleichbar gemacht wurde:

$$\begin{array}{l} 0\cdot1890x + 0\cdot0476y - 0\cdot0630z - 0\cdot0048 = 0 \\ 0\cdot1890x + 0\cdot0477y - 0\cdot0631z - 0\cdot0048 = 0, \end{array} \qquad 21.$$

für die zweite Ebene:

$$\begin{array}{l} 0\cdot1890x - 0\cdot7904y + 0\cdot2364z - 0\cdot0262 = 0 \\ 0\cdot1890x - 0\cdot7905y + 0\cdot2365z - 0\cdot0262 = 0, \end{array} \qquad 22.$$

wo jetzt die Werthe nahezu vollständig übereinstimmen.

Um nun zu untersuchen, inwieweit diese beiden Ebenen die ursprüngliche Fläche 2. Ordnung bilden, haben wir die beiden Gleichungen mit einander zu multipliciren, wobei wir natürlich so vorgehen müssen, dass $a'_{11} = 0\cdot1890$ wird, um die Resultate vergleichen zu können. Wir erhalten:

$$\begin{array}{llll} a'_{11} = 0\cdot1890 & a'_{12} = -0\cdot7428 & a'_{13} = 0\cdot1734 & a'_{14} = -0\cdot0310 \\ & a'_{22} = -0\cdot1993 & a'_{23} = 0\cdot3232 & a'_{24} = 0\cdot0135 \\ & & a'_{33} = -0\cdot0788 & a'_{34} = 0\cdot0027 \\ & & & a'_{44} = 0\cdot0007. \end{array} \qquad 23.$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Vergleichen wir diese Grössen $a'_{11}\ a'_{12}\ldots$ mit den Grössen $a_{11}\ a_{12}\ldots$ in 17, so finden wir für die Differenzen $a_{11}-a'_{11}=da_{11}$, $a_{12}-a'_{12}=da_{12}\ldots$ die folgenden Werthe:

$$\begin{array}{llll} da_{11}=0\cdot0000 & da_{12}=0\cdot0000 & da_{13}=0\cdot0000 & da_{14}=\ \ 0\cdot0000 \\ & da_{22}=0\cdot0103 & da_{23}=0\cdot0281 & da_{24}=-0\cdot0009 \\ & & da_{33}=0\cdot0788 & da_{34}=-0\cdot0027 \\ & & & da_{44}=-0\cdot0007 \end{array} \qquad 24.$$

oder in Procenten der entsprechenden Grössen $a_{11}\ a_{12}\ldots$:

$$\begin{array}{llll} da_{11}=0\cdot0\,\% & da_{12}=0\cdot0\,\% & da_{13}=0\cdot0\,\% & da_{14}=0\cdot0\,\% \\ & da_{22}=5\cdot5 & da_{23}=7\cdot9 & da_{24}=7\cdot1 \\ & & da_{33}=\ \ - & da_{34}=- \\ & & & da_{44}=-. \end{array} \qquad 25.$$

Die Übereinstimmung in der ersten Zeile ist eine vollständige. Dieselbe ist in der Natur des Verfahrens begründet. Die Grössen $a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}$ sind nämlich die Coëfficienten derjenigen Glieder der Flächengleichung, welche x enthalten, und diese Coordinate nimmt eine besondere Stellung in unserer Rechnung ein. Bei der Division der Flächengleichung durch den linearen Factor wurden nämlich immer die Glieder des Dividenden, welche das x enthalten, durch das erste Glied des Divisors, also durch Ax dividirt, und so das entsprechende Glied des Quotienten erhalten. Wenn wir daher den Divisor mit dem Quotienten multipliciren, so erhalten wir die Grössen $a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}$ immer genau, welche Werthe wir auch für A, B, C, D aus den weiteren Rechnungen finden. Hätten wir bei der Division die y Coordinate vorangesetzt, so würden die Coëfficienten $a_{12}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}$ genau dargestellt sein.

Dass diese genaue Wiedergabe einer Coëfficientenreihe auf Kosten der übrigen geht, ist selbstverständlich, und der Umstand, dass diese trotzdem keine bedeutenden Abweichungen zeigen, sagt uns eben, dass die Fläche dem Zerfallen sehr nahe steht.

Einen besseren Ausgleich hätten wir allerdings erhalten, wenn wir nicht die zweite Ebene von der ersten abhängig gemacht hätten, so dass die Werthe der einen auch für die andere bestimmend sind, sondern, wenn wir die Coëfficienten des Productes

$$(Ax+By+Cz+D)\,(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)$$

direct den Coëfficienten in der Flächengleichung gleichgesetzt hätten. Allein wir hätten so 10 Gleichungen mit 8 Unbekannten erhalten, so dass die Berechnung, namentlich wenn mehrere Näherungen nothwendig sind, äusserst weitläufig geworden wäre. Jedenfalls würden die Resultate keine bedeutenden Änderungen erfahren, da auch die Übereinstimmung in der zweiten Zeile nicht schlecht ist. Die grösste Differenz zeigt der Coëfficient a_{33}, doch ist diese nicht massgebend; a_{33} ist nämlich der Coëfficient von z^2 oder $\sin^2\delta$. Da wir nun nach α differentiirt haben, so mussten sämmtliche Glieder, welche constant sind oder nur δ enthalten, wegfallen. Es fehlen somit in dem Resultate der Differentiation immer die Grössen a_{33}, a_{34}, a_{44}. In dem Resultate der Multiplication der beiden Gleichungen für die Ebenen müssen sie aber, abgesehen von speciellen Lagen, immer entstehen. Es liegt somit in der Natur des Verfahrens, dass wir keine vollständig degenerirende Fläche erhalten können. Für die Grösse der Abweichung fehlt uns auch jeder Massstab.

Die Übereinstimmung kann daher nicht gerade als schlecht bezeichnet werden, und wir dürfen annehmen, dass die Fläche 2. Ordnung aus zwei Ebenen besteht, deren Gleichungen wir oben gefunden haben.

Nun haben wir noch die Pole und sphärischen Radien der beiden Ebenen zu bestimmen, und zu untersuchen, welche von beiden die Milchstrasse vorstellt.

Die Richtungswinkel der Normalen der ersten Ebene sind:

$$\begin{aligned} \alpha &= 22\cdot80^\circ \\ \beta &= 76\cdot58 \\ \gamma &= 107\cdot90, \end{aligned} \qquad 26.$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

die Länge des Perpendikels $p = 0 \cdot 0233$; für die andere Ebene

$$\begin{aligned} \alpha' &= 77 \cdot 10^\circ \\ \beta' &= 159 \cdot 00 \\ \gamma' &= 73 \cdot 78, \end{aligned} \qquad 27.$$

das Perpendikel $p' = 0 \cdot 0310$.

Da die Richtungswinkel der Perpendikel von unseren Coordinatenaxen gezählt sind, so finden wir Rectascension A und Declination D der Pole der Ebenen, sowie den sphärischen Radius R nach den Formeln:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos A \sin\gamma \quad \text{oder} \quad \cos A = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} \\ \cos\beta &= \sin A \sin\gamma \qquad\qquad \sin A = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad D = 90 - \gamma \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \cos\vartheta = \frac{p}{R} = p. \end{aligned} \qquad 28.$$

Wir finden:

$$\begin{aligned} A^\circ &= 14 \cdot 35^\circ & A'^\circ &= -76 \cdot 45 = 283 \cdot 55 \\ D^\circ &= -17 \cdot 90 & D'^\circ &= 16 \cdot 22 \\ \vartheta^\circ &= 88 \cdot 67 & \vartheta'^\circ &= 88 \cdot 23, \end{aligned} \qquad 29.$$

oder, da unsere Rectascensionen sämmtlich um 5° zu klein sind:

$$\begin{aligned} A &= 19 \cdot 35^\circ & A' &= 288 \cdot 55^\circ \\ D &= -17 \cdot 90 & D' &= 16 \cdot 22 \\ \vartheta &= 88 \cdot 67 & \vartheta' &= 88 \cdot 23, \end{aligned} \qquad 30.$$

Vermöge ihrer Lage gibt sich die erste der beiden Ebenen als die gesuchte Michstrassen-Ebene zu erkennen. Der Pol der anderen Ebene fällt selbst in die Milchstrasse. Diese zweite Ebene gibt die Lage des Minimums, mit welchem wir uns weiter nicht zu beschäftigen haben.

Die Milchstrassen-Ebene ist somit, wenn wir den Pol derselben auf der nördlichen Hemisphäre nehmen, durch die Grössen bestimmt:

$$\begin{aligned} A_1 &= 199 \cdot 35^\circ \\ D_1 &= 17 \cdot 90 \qquad 1. \\ \vartheta_1 &= 91 \cdot 33, \end{aligned} \qquad 31.$$

die wir durch den Index 1 bezeichnen wollen.

Bestimmung der Lage des zweiten Theiles der Milchstrasse.

Wir haben nun den zweiten Theil der Milchstrasse, den unsere Function nicht mehr darzustellen im Stande war, zu betrachten, und wollen versuchen, denselben ebenfalls durch eine Ebene wiederzugeben. Wir haben zu diesem Zwecke zuerst der Tafel der Maxima jene Punkte zu entnehmen, welche diesem zweiten Zweige angehören.

Die drei nördlichsten Parallelkreise lassen wir aus bekannten Gründen unberücksichtigt.

Auf dem Parallelkreise $\delta = 72 \cdot 5^\circ$ finden wir zwei Punkte bei $\alpha = 25^\circ$ und $\alpha = 335^\circ$. Die übrigen Maximalpunkte liegen theils in ganz anderen Regionen, als in welchen wir die Milchstrasse voraussetzen dürfen, theils sind die Maxima zu klein. Überhaupt können wir auf einem Parallelkreise nicht leicht mehr als zwei Schnittpunkte mit einem Zuge der Milchstrasse annehmen.

Bei $\delta = 67 \cdot 5^\circ$ sind nur die Punkte $\alpha = 325^\circ$ und $\alpha = 355^\circ$ zu brauchen.

Bei $\delta = 62 \cdot 5^\circ$ nehmen wir die Punkte $\alpha = 295^\circ$ und $\alpha = 325^\circ$, die anderen Punkte gehören schon dem ersten Theile der Milchstrasse an, welcher von hier ab immer zwei Maxima in Anspruch nimmt.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Bei $\delta = 57 \cdot 5°$ erhalten wir den Punkt $\alpha = 295°$, bei $\delta = 52 \cdot 5°$ die Punkte $\alpha = 65°$ und $\alpha = 305°$.

Bei $\delta = 47 \cdot 5°$ müssen wir den Punkt $\alpha = 355°$ weglassen, da er zu weit von der Milchstrasse abliegt. Es bleibt dann scheinbar nur ein Maximum über, da in Folge der Höhe und Ausdehnung desselben das zweite Hauptmaximum unter das Mittel fällt.

Von den weiteren Parallelkreisen haben wir nur mehr die zu betrachten, welche drei Maxima aufweisen, da zwei Maxima immer der ersten Hauptebene angehören.

Die Maxima bei $\delta = 42 \cdot 5°$, $\alpha = 35°$ und $\delta = 37 \cdot 5°$, $\alpha = 25°$ können wir ihrer Kleinheit wegen unberücksichtigt lassen.

Es bleiben dann noch die Punkte $\delta = 22 \cdot 5°$, $\alpha = 275°$ und $\delta = 7 \cdot 5°$, $\alpha = 275°$.

Die Maxima bei $\delta = 2 \cdot 5°$, $\alpha = 75°$ und $\delta = -2 \cdot 5°$, $\alpha = 305°$ müssen wir trotz ihrer Grösse weglassen, da sie zu weit von der Milchstrasse entfernt sind. Das Weglassen solcher Punkte mit dieser Begründung hat etwas Willkürliches an sich. Denn erstens wissen wir nicht genau, wie die Milchstrasse verläuft, und zweitens bestimmen ja eben die Maxima die Lage der Milchstrasse. Allein, da wir versuchen, diese durch Ebenen darzustellen, so müssen wir jene Maxima ausscheiden, welche so gelegen sind, dass ihre Lage mit der Richtung, welche die anderen Punkte angeben, nicht übereinstimmt, und wir dürfen diese Ausscheidung auch vornehmen, wenn wir nur dabei immer im Auge behalten, dass wir durch die so gefundenen Ebenen auch nicht alle Maxima dargestellt haben, indem wir die nicht dargestellten eben nicht zur Milchstrasse zählen.

Es bleiben uns somit für die zweite Ebene die folgenden 11 Punkte:

$$\begin{cases}\delta = 72 \cdot 5° \\ \alpha = 25°\end{cases} \quad \begin{cases}\delta = 72 \cdot 5° \\ \alpha = 335°\end{cases} \quad \begin{cases}\delta = 67 \cdot 5° \\ \alpha = 325°\end{cases} \quad \begin{cases}\delta = 67 \cdot 5° \\ \alpha = 355°\end{cases} \quad \begin{cases}\delta = 62 \cdot 5° \\ \alpha = 295°\end{cases} \quad \begin{cases}\delta = 62 \cdot 5° \\ \alpha = 325°\end{cases}$$

$$\begin{cases}\delta = 57 \cdot 5° \\ \alpha = 295°\end{cases} \quad \begin{cases}\delta = 52 \cdot 5° \\ \alpha = 65°\end{cases} \quad \begin{cases}\delta = 52 \cdot 5° \\ \alpha = 305°\end{cases} \quad \begin{cases}\delta = 22 \cdot 5° \\ \alpha = 275°\end{cases} \quad \begin{cases}\delta = 7 \cdot 5° \\ \alpha = 275°\end{cases} \qquad 32.$$

Durch diese 11 Punkte haben wir jene Ebene hindurchzulegen, welche dieselben am besten wiedergibt.

Dasselbe Verfahren hätten wir auch zur Bestimmung der ersten Ebene anwenden können; allein das Verfahren, welches wir eingeschlagen haben, hat den Vortheil der bedeutend grösseren Sicherheit der Resultate voraus, einerseits weil die Entscheidung, ob ein Maximum zur Milchstrasse gehört oder nicht, nicht der Willkür überlassen bleibt, anderseits, weil wir so die Gesammtvertheilung der Sterne ins Auge fassen, und nicht auf einzelne Punkte angewiesen sind.

Die Gleichung dafür, dass ein Punkt mit den Coordinaten α und δ auf einem Kreise liegt, dessen Pol die Lage A, D hat, und dessen sphärischer Radius die Grösse ϑ besitzt, lautet:

$$\sin\delta \sin D + \cos\delta \cos D \cos(\alpha - A) - \cos\vartheta = 0. \qquad 33.$$

Die Grössen A, D und ϑ bestimmen dann die Lage der gesuchten Ebene oder ihres Schnittkreises mit der Sphäre. Für jeden der 11 Punkte erhalten wir eine solche Gleichung, und dieses System haben wir nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösen. Dazu brauchen wir wieder Näherungswerthe, welche wir uns, da wir drei Unbekannte haben, mit Hilfe von drei Punkten verschaffen. Wir wählen dazu jene Punkte, welche uns die Lage der Schnittpunkte der Milchstrasse mit den Parallelkreisen am sichersten geben, und dabei ihrer Lage nach am besten in den muthmasslichen Zug der Milchstrasse hineinfallen. Wir nehmen also:

$$\begin{cases}\delta = 52 \cdot 5° \\ \alpha = 65°\end{cases} \quad \begin{cases}\delta = 52 \cdot 5° \\ \alpha = 305°\end{cases} \quad \begin{cases}\delta = 7 \cdot 5° \\ \alpha = 275°.\end{cases} \qquad 34.$$

Durch die exacte Auflösung der drei entsprechenden Gleichungen erhalten wir die Näherungswerthe:

$$\begin{aligned} A_0 &= 185\ 00° \\ D_0 &= 24 \cdot 67 \\ \vartheta_0 &= 86 \cdot 86. \end{aligned} \qquad 35$$

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Dieselben besitzen schon einen gewissen Grad von Sicherheit, da wir die Punkte mit besonderer Vorsicht gewählt haben. Wir wollen daher auch diesen Punkten einen sehr grossen Einfluss auf die Rechnung einräumen und geben ihnen daher das Gewicht 4 gegenüber den anderen Punkten.

Setzen wir in unseren Gleichungen:

$$A = A_0 + dA \quad D = D_0 + dD \quad \vartheta_0 = \vartheta + d\vartheta,$$

so gehen dieselben unter Vernachlässigung höherer Glieder in lineare Gleichungen mit den Unbekannten dA, dD, $d\vartheta$ über, und erhalten die Form:

$$\begin{aligned} &[\sin\delta \sin D_0 + \cos\delta \cos\alpha \cos D_0 \cos A_0 + \cos\delta \sin\alpha \cos D_0 \sin A_0 - \cos\vartheta_0] \\ &+[\sin\delta \cos D_0 - \cos\delta \cos\alpha \sin D_0 \cos A_0 - \cos\delta \sin\alpha \sin D_0 \sin A_0]\, dD \\ &\quad +[-\cos\delta \cos\alpha \cos D_0 \sin A_0 + \cos\delta \sin\alpha \cos D_0 \cos A_0]\, dA \\ &\quad +\sin\vartheta_0\, d\vartheta = 0. \end{aligned} \qquad 36.$$

Durch Auflösung dieses Systems von 11 linearen Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate finden wir unter Berücksichtigung der Gewichte die Correctionen:

$$\begin{aligned} dA &= -2\cdot893^\circ \\ dD &= -4\cdot975 \\ d\vartheta &= 2\cdot537. \end{aligned} \qquad 37.$$

Die Bestimmungsstücke der zweiten Ebene, welchen wir den Index 2 beifügen, sind somit:

$$\begin{aligned} A_2 &= 182\cdot11^\circ \\ D_2 &= 19\cdot69 \qquad \text{II.} \\ \vartheta_2 &= 89\cdot40. \end{aligned} \qquad 38.$$

Wechselseitige Lage der beiden Ebenen.

Wir haben somit zwei Ebenen gefunden, welche uns mit einer gewissen Annäherung die Lage der Milchstrasse bestimmen. Wir haben nur noch einige Grössen zu suchen, welche sich auf die gegenseitige Lage der beiden Ebenen beziehen. Solche Grössen sind:

1. Der Winkel, den die beiden Ebenen mit einander einschliessen,
2. die Richtung der Schnittlinie der Ebenen, und
3. die Richtung, in welcher wir den uns nächsten Punkt dieser Schnittlinie zu suchen haben, oder die Richtung des Perpendikels vom Beobachtungspunkt auf die Schnittlinie.

1. Der Winkel ψ zwischen den beiden Ebenen wird, wenn $A_1\, D_1$ und $A_2\, D_2$ die Coordinaten der beiden gefundenen Pole sind, nach der Formel gefunden:

$$\cos\psi = \sin D_1 \sin D_2 + \cos D_1 \cos D_2 \cos(A_1 - A_2),$$

und zwar ergibt sich

$$\psi = 16\cdot43^\circ. \qquad 39.$$

2. Indem wir, auf unser früheres Coordinatensystem zurückgehend, die Gleichungen der beiden Ebenen durch rechtwinkelige Coordinaten ausdrücken, und dann z, beziehungsweise y, eliminiren, bekommen wir die Gleichungen der Schnittlinie in der Form:

$$x = \frac{y - 0\cdot1196}{-0\cdot2339} = \frac{z - 0\cdot0140}{2\cdot8250}. \qquad 40.$$

Da die Nenner dem Richtungscosinus dieser Geraden proportional sind, so erhalten wir die Richtungswinkel derselben, die wir mit dem Index 3 bezeichnen:

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$P \begin{cases} \alpha_3 = 70 \cdot 57^\circ \text{ oder } A_3{}^\circ = 346 \cdot 55^\circ \\ \beta_3 = 94 \cdot 46 \qquad D_3{}^\circ = 70 \cdot 00 \\ \gamma_3 = 20 \cdot 00 \end{cases} \tag{41.}$$

3. Um noch die Richtung des Perpendikels zu finden, gehen wir so vor: Haben wir die Gleichung der Schnittlinie in der obigen Form (40) geschrieben, so lautet die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt geht und auf der Schnittlinie senkrecht steht:

$$x - 0 \cdot 2339 y + 2 \cdot 8250 z = 0. \tag{42.}$$

Diese Ebene enthält das gesuchte Perpendikel und trifft die Schnittlinie gerade im Fusspunkte desselben. Wir finden daher durch Auflösen der Gleichungen 40 und 42 nach xyz die Coordinaten dieses Schnittpunktes:

$$\begin{aligned} x &= -0 \cdot 0013 \\ y &= 0 \cdot 1199 \\ z &= 0 \cdot 0103. \end{aligned}$$

Die Richtung nach diesem Punkte, also die Richtung des gesuchten Perpendikels trifft die Sphäre in einem Punkte, dem wir den Index 4 beisetzen, und der die Coordinaten hat:

$$S \begin{cases} A_4{}^\circ = 90 \cdot 62^\circ \\ A_4{}^\circ = 4 \cdot 93 \end{cases} \tag{43.}$$

Wegen der Lage unseres Coordinatensystemes haben wir die Rectascensionen noch um 5° zu vermehren, somit:

$$P \begin{cases} A_3 = 351 \cdot 55^\circ \\ D_3 = 70 \cdot 00 \end{cases} \qquad S \begin{cases} A_4 = 95 \cdot 62^\circ \\ D_4 = 4 \cdot 93 \end{cases} \tag{44.}$$

Resultate und Folgerungen.

Wir wollen nun das Ergebniss der Rechnungen hier zusammenfassen.

Die Milchstrasse lässt sich mit ziemlicher Annäherung durch zwei Ebenen darstellen, deren Pole die Positionen haben:

$$\text{I.} \begin{cases} A_1 = 199 \cdot 35^\circ \\ D_1 = 17 \cdot 90 \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} A_2 = 182 \cdot 11^\circ \\ D_2 = 19 \cdot 69 \end{cases}$$

Die sphärischen Radien der Schnittkreise dieser Ebenen mit der Sphäre sind:

$$\vartheta_1 = 91 \cdot 33^\circ \qquad \vartheta_2 = 89 \cdot 40^\circ$$

Der Winkel zwischen beiden Ebenen beträgt:

$$\phi = 16 \cdot 43^\circ.$$

Die Schnittlinie derselben ist parallel der Richtung nach dem Punkte:

$$P \begin{cases} A_3 = 351 \cdot 55^\circ \\ D_3 = 70 \cdot 00 \end{cases}$$

und der uns nächste Punkt dieser Schnittlinie liegt in der Richtung:

$$S \begin{cases} A_4 = 95 \cdot 62^\circ \\ D = 4 \cdot 93. \end{cases}$$

Zuerst wollen wir nun unsere Resultate mit denen vergleichen, die andere Untersuchungen über die Milchstrassenpole ergeben haben, und die wir hier zusammenstellen.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

	Rectasc.	Declin.	Sphär. Rad.
Herschel (Philosophical transactions, 1785)	186°	32°	
Argelander (Über die Bewegung des Sonnensystems) .	189 41′	28 12′	
	189 15	31 28	
» (Einleitung zur III. Section der B. D., 1862) .	188 15	30	
Struve (Études d'astronomie stellaire, 1847)	189 30	31 30	92°
Houzeau (Uranométrie générale, 1878)	191 8	28 47	90 48′
	192 17	27 30	90 20
Gould (Uranometria Argentina, 1879)	190 20	27 21	93
Ristenpart (Über die Constante der Präcession, 1892) . .	196 36	18 42	91 40
Aus unseren Untersuchungen	199 21	17 54	91 20

Der Herschel'sche Pol ist aus den Sternaichungen abgeleitet. Argelander hat mehrere Pole gegeben. Die ersten beiden sind aus Bode's Uranographie abgeleitet, der eine mit Berücksichtigung des ganzen Zuges der Milchstrasse, der andere nur auf Grund des Theiles auf der nördlichen Hemisphäre. Der dritte Pol ist aus dem ersten und dem Herschel'schen zusammengezogen, wobei auch auf die Präcession Bedacht genommen wurde.

Dem Struve'schen Pol liegt nur die Sternvertheilung zwischen 15° nördl. und 15° südl. Declination zu Grunde, da die Reduction der Bessel'schen Zonenbeobachtungen noch nicht weiter gediehen war. Der Vorgang ist statistisch.

Houzeau schlägt ein ähnliches Verfahren ein, wie wir zur Ermittlung der Lage der zweiten Ebene angewendet haben. Aus 33 Punkten grössten Glanzes in der Milchstrasse, die theilweise auch auf die Süd-Hemisphäre fallen, wird nach der Methode der kleinsten Quadrate der Pol der Milchstrasse bestimmt. Der zweite Pol ist unter Annahme von Gewichten, die von der Helligkeit der Punkte abhängen, auf dieselbe Weise bestimmt.

Gould leitet den Pol aus 48 Punkten ab, indem er für jede halbe Stunde in Rectascension die Mitte des Milchstrassenzuges bestimmt. Dabei wurde aber die Gegend, wo der Zug doppelt ist, nicht in Betracht gezogen.

Wieder ein anderes Verfahren wendet Ristenpart an. Für jeden Parallelkreis und Meridian der Seeliger'schen Sternzählung wird auf graphischem Wege das Maximum der Sternzahl ermittelt, und nach Ausscheidung jener Punkte, welche zuweit von einem mittleren Zuge entfernt waren, aus den übrigen für jede Sternclasse ein Pol bestimmt, und aus diesen dann das Mittel genommen. Etwas weitläufiger wird das Verfahren dadurch, dass es zur gleichzeitigen Bestimmung beider Ebenen verwendet wird.

Wenn wir nun diese Resultate betrachten, so sehen wir, abgesehen von dem Ristenpart'schen keine besondere Übereinstimmung mit dem unsrigen. Die Rectascensionen erscheinen sämmtlich zu klein, die Declinationen sämmtlich zu gross. Der Grund dürfte darin zu suchen sein, dass bei den älteren Untersuchungen auf die Theilung der Milchstrasse nicht Rücksicht genommen wurde. Der zweite Zweig schneidet nun den Äquator in kleinerer Rectascension als der erste. Es kann also eine Untersuchung, bei welcher die Zweige nicht getrennt betrachtet werden, für den Pol eine kleinere Rectascension ergeben; doch müssen wir dabei bedenken, dass wir dem zweiten Zweige nicht zuviel Einfluss zuschreiben dürfen, da er immerhin undeutlich und in seinem Verlaufe sehr verwickelt ist. Dies ist auch der Grund, warum die Betrachtung dieses zweiten Theiles zu so verschiedenen Resultaten führt. Ristenpart findet nämlich für den Pol der zweiten Ebene die Coordinaten

$$A = 191° \; 6'$$
$$D = 55° 45'.$$

Es wird aber von ihm noch ein zweites Resultat abgeleitet, unter einer Bedingung, welche immer erfüllt sein muss, wenn die Milchstrasse thatsächlich in einer Ebene liegen soll, nämlich dass die für die

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

einzelnen Sternelassen bestimmten Maximal-Ebenen alle zusammenfallen. Unter dieser Bedingung, die bei der Herleitung des Poles der Haupt-Ebene nur als Controle verwendet wurde, ergeben sich die Werthe:

$$D = 191°48'$$
$$A = 38°51'.$$

Dass dieses zweite Resultat eine um nahezu 18° kleinere Declination zeigt, als das erste, liegt eben in der Undeutlichkeit der zweiten Ebene.

Auch Gould hat den Theil der Milchstrasse, der die Theilung zeigt, gesondert betrachtet, und für jeden einzelnen Zweig einen eigenen Pol berechnet. Er findet die Werthe:

1. Zweig (Hauptebene): $\begin{cases} A = 196°30' \\ D = 27°32' \quad \vartheta = 92°39' \end{cases}$

2. Zweig: $\begin{cases} A = 182°25' \\ D = 27°55' \quad \vartheta = 89°\ 8'. \end{cases}$

Die beiden Rectascensionen stimmen ganz gut mit unseren Resultaten, doch sind auch hier die Declinationen zu gross. Möglicher Weise äussern auch diejenigen Punkte, die wir wegzulassen uns genöthigt sahen, einen derartigen Einfluss.

Eine gute Übereinstimmung mit unseren Resultaten sehen wir also nur bei den Ristenpart'schen Werthen für den Pol der ersten Hauptebene, und es dürfte dies auch das sicherste Resultat sein, welches wir erhalten haben.

Was die Abweichung der Milchstrasse von einem grössten Kreise betrifft, so stimmen alle Resultate darin überein, dass dieselbe nicht gross ist. Die sphärischen Radien schwanken ihrer Grösse nach zwischen 90° 20′ und 93°. Die Sonne ist also, da dieselben grösser als 90° sind, nach dem nördlichen Pol der Hauptebene hin verschoben.

Wo auch die Lage der zweiten Ebene bestimmt wurde, ist der entsprechende sphärische Radius immer kleiner als 90°. Daraus folgt, dass die Sonne zwischen den beiden Ebenen liegt. Da bei unseren Resultaten die Abweichung des Schnittes der ersten Hauptebene von einem grössten Kreise grösser ist, als die bei der zweiten ($\vartheta_1 - 90 > 90 - \vartheta_2$), so folgt daraus, dass die Sonne der zweiten Ebene näher steht. Ristenpart findet das Entgegengesetzte; allein bei der Unsicherheit unserer zweiten Ebene, da sie nur aus wenigen Punkten abgeleitet ist, ist darauf kein Gewicht zu legen.

Entsprechend der Verschiedenheit der Resultate für die Lage der zweiten Ebene sind auch die Grössen, die sich auf die gegenseitige Lage der beiden Ebenen beziehen, äusserst verschieden.

Ristenpart findet für den Winkel zwischen beiden Ebenen, die Richtung der Schnittlinie und die Richtung des Perpendikels, indem er den ersten Pol der zweiten Ebene zu Grunde legt, die folgenden Werthe, indem wir dabei die frühere Bezeichnung für diese Grössen beibehalten:

$$\psi = 37 \cdot 3°$$

$$P \begin{cases} A_3 = 288 \cdot 2° \\ D_3 = 4 \cdot 8 \end{cases} \qquad S \begin{cases} A_4 = 21 \cdot 8° \\ D_4 = 36 \cdot 6. \end{cases}$$

Auf Grund des anderen von ihm abgeleiteten Poles der zweiten Ebene:

$$\vartheta = 20 \cdot 6°$$

$$P \begin{cases} A_3 = 290 \cdot 1° \\ D_3 = 10 \cdot 1 \end{cases} \qquad S \begin{cases} A_4 = 34 \cdot 1° \\ D_4 = 53 \cdot 7. \end{cases}$$

Besonders auffällig ist der grosse Werth des Winkels ψ im ersten Resultat. Bei dem zweiten stimmt er bedeutend besser mit unserem Werthe $\psi = 16 \cdot 43°$. Diese Werthe haben auch viel mehr Wahrscheinlichkeit, wenn man den äusseren Anblick, den die beiden Zweige gewähren, in Betracht zieht. Struve schätzt den Winkel nur auf 10°.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Es zeigt sich hier aber noch ein wesentlicher Unterschied. Die Richtung der Schnittlinie weist nämlich bei Ristenpart nach einem Punkte, der dem Äquator nahe liegt. Merkwürdiger Weise hat schon Struve dieses Resultat vermuthet, und die Schnittlinie sogar direct im Äquator angenommen. In unserer Rechnung findet sich dies nicht bestätigt, vielmehr ist unsere Schnittlinie stark nach Norden gerichtet, in jene Gegend, wo sich auch thatsächlich der Vereinigungspunkt der beiden Zweige findet. Derselbe lässt sich nun allerdings schwer angeben, jedenfalls wird er zwischen Schwan und Perseus, also in ziemlich nördlichen Sternbildern angenommen werden müssen. Zu einem ähnlichen Resultat würden die beiden Gould'schen Pole der Milchstrassenzweige führen, da hier, wie bei unserem Resultat, die Pole nur in Rectascension, in Declination dagegen fast gar nicht verschieden sind.

Aus allen Untersuchungen also, bei welchen die Zweige getrennt betrachtet wurden, finden wir nur das eine gemeinsame Resultat, dass die Sonne zwischen den beiden Ebenen steht. Wir sind daher jedenfalls berechtigt, anzunehmen, dass die Sonne dem Milchstrassensystem angehört.

Sonst können wir über die Lage der Sonne in dem Systeme aus unseren Resultaten nichts aussagen, da wir die wahren Abstände derselben von den beiden Ebenen und ihrer Schnittlinie nicht bestimmen können, weil der als Längeneinheit eingeführte Radius der Sphäre keine bestimmte Grösse hat.

Auch über die Lage der Sonne gegen den Mittelpunkt des Systems lässt sich nichts schliessen. Der Abstand der Sonne von den äussersten noch mitgezählten Sternen ist durchschnittlich nach allen Seiten derselbe, nämlich die mittlere Entfernung der Sterne 9:5. Grösse. Dabei wissen wir nicht, ob diese Sterne auf der einen Seite des Himmels der Grenze des Systems näher stehen, als auf der anderen. Erst eine Zählung der Sterne der höchsten Grössenclassen müsste zeigen, ob sich von einer gewissen Grösse an auf der einen Seite eine entschiedene Abnahme der Sternzahlen findet, woraus wir schliessen könnten, dass wir auf dieser Seite das Ende des Systems erreicht haben, dass wir also nach dieser Richtung der Grenze näher stehen, als nach der anderen.

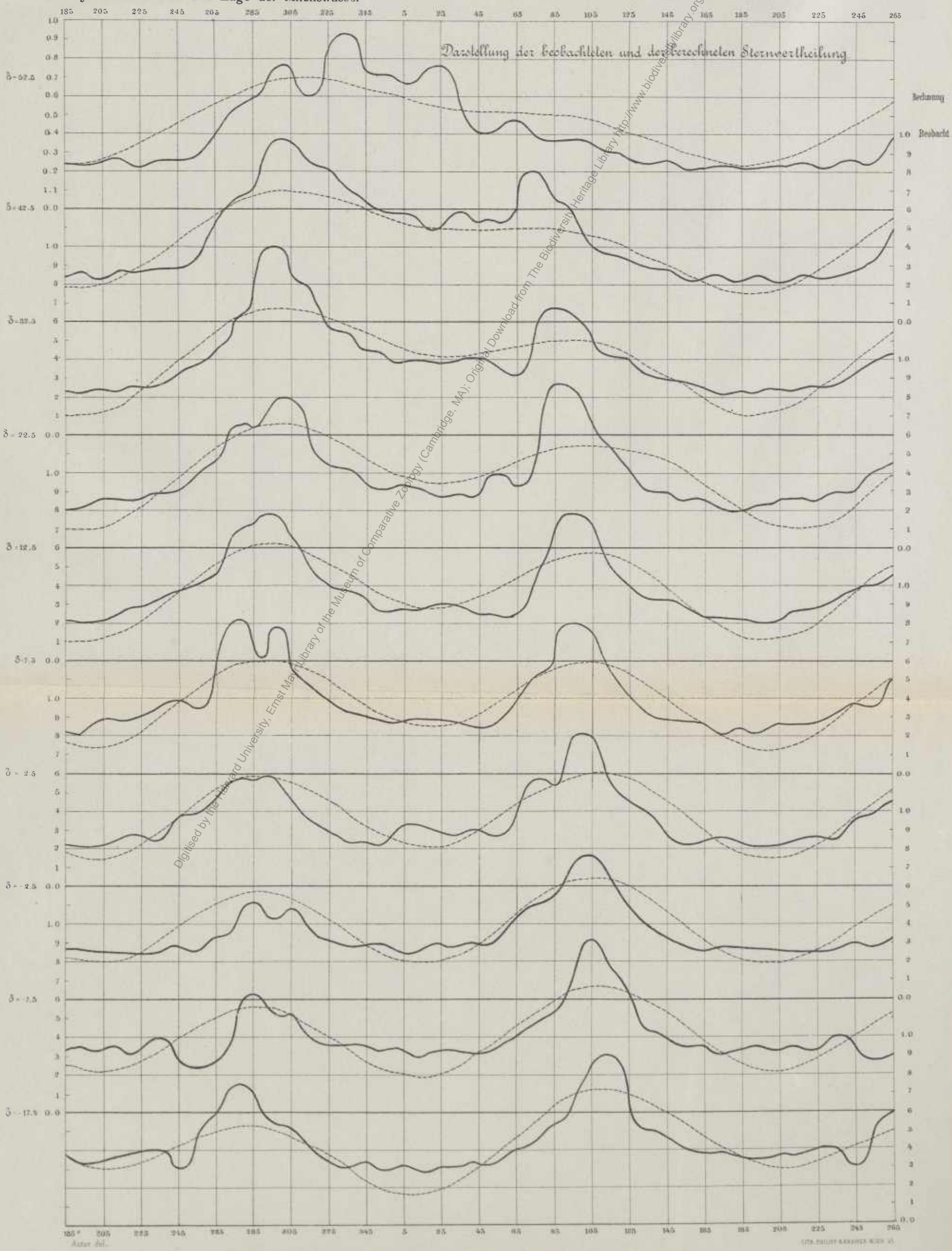
Da wir gesehen haben, dass die Milchstrasse in mittleren Declinationen auf der Seite bei $\alpha = 270°$ sternreicher ist, als bei $\alpha = 90°$, in den südlicheren Declinationen sich das Verhältniss aber umkehrt, so dass wir in den entsprechenden Richtungen in der Milchstrasse Verdichtungen zu suchen hätten, so widerspricht dies der Schönfeld'schen Hypothese, nach welcher gegen den Schwerpunkt des Systems hin die Sterndichte zunehmen müsste, denn wir finden hier zwei oder noch mehr Centren der Verdichtung.

Besser wäre die Übereinstimmung mit der Vorstellung der Ringgestalt, wenn wir annehmen, dass die Dichte des Ringes nicht überall dieselbe, sondern mindestens an zwei nahezu diametral gegenüberliegenden Stellen grösser sei.

Die Annahme zweier concentrischer Ringe, welche sich infolge der excentrischen Lage der Sonne als getrennte schief zu einanderstehende Kreise auf die Sphäre projiciren, stösst auf Widersprüche, denn es müsste der eine Zug der Milchstrasse durch Sterne einer anderen Grössenclasse gebildet werden, als der zweite, weil uns einer der Ringe näherstehen müsste. Da aber, wie früher bemerkt wurde, die Maxima in allen Sternclassen an denselben Punkten auftreten, so muss jede Sternclasse beide Theile der Milchstrasse zeigen.

Wir haben uns also die Milchstrasse thatsächlich aus zwei durch grössere Sterndichte gebildeten Ebenen bestehend vorzustellen, wobei aber die Dichte der Sterne in den Ebenen nicht überall dieselbe ist. Übersehen wir nicht, dass ausserdem noch bedeutende Maxima vorhanden sind, die wir wegen ihrer Lage nicht in die Milchstrasse einbeziehen konnten, so folgt, dass unser Milchstrassensystem, aus entsprechender Entfernung betrachtet, den Anblick eines ziemlich unregelmässigen Sternhaufens bieten wird.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at



Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.

Jahr/Year: 1896

Band/Volume: 63

Autor(en)/Author(s): Prey Adalbert

Artikel/Article: Über Gestalt und Lage der Milchstrasse. (Mit 1 Tafel.) 703-726