ÜBER DEN

EINFLUSS DER ELASTICITÄT AUF DIE SCHWANKUNGEN DER POLHÖHE

VON

DR. CARL HILLEBRAND,

ASSISTENT DER K. K. STERNWARTE IN WIEN.

(VORGELEGT IN DER SITZUNG VOM 5. NOVEMBER 1896.)

Die Ergebnisse der Beobachtungen, welche über die Änderung der Polhöhen angestellt wurden, zeigen jetzt schon, dass die Annahme eines vollkommen unveränderlichen Erdkörpers zur Erklärung derselben unzureichend ist. Welche von den thatsächlichen Abweichungen von der vorausgesetzten vollkommenen Starrheit bei der erwähnten Erscheinung massgebend sind, ist eine Frage, deren Beantwortung erst bei einem grösseren Beobachtungsmaterial und nach der theoretischen Feststellung über die Art der Einflussnahme jeder dieser Eventualitäten möglich sein wird.

Als Beitrag zu dieser Frage soll im Folgenden untersucht werden, in welcher Weise die Rotationsbewegung der Erde durch die Elasticität derselben beeinflusst wird, wobei es sich zeigen wird, dass letztere thatsächlich keine Rolle spielen kann, da dieselbe nur Perioden in der Polbewegung hervorbringt, welche Bruchtheile eines Jahres sind, entgegen dem Ergebnisse der Beobachtungen.

Die Gleichungen, welche die Rotationsbewegung eines veränderlichen materiellen Systems definiren, sind bekanntlich

$$\frac{df}{dt}+qh-rg = L$$

$$\frac{dg}{dt}+rf-ph = M$$

$$\frac{dh}{dt}+pg-qf = N.$$

Dabei bedeuten f, g, h die Momente der Bewegungsgrössen, zerlegt nach den Axen irgend eines im Raume beweglichen Coordinatensystems, das momentan als fest betrachtet wird, das heisst, die Projectionen der Momente der absoluten Bewegungsgrössen auf die Axen des beweglichen Systems; p, q, r sind die Rotationsgeschwindigkeiten dieses Systems um seine eigenen, momentan als fest gedachten Axen und L, M, N die Drehungsmomente der äusseren Kräfte, in derselben Weise auf das Coordinatensystem bezogen.

Bezeichnet man mit f, g, h die Momente der relativen Bewegungsgrössen, so ist

$$f = f_1 + Ap - Fq - Er$$
$$g = g_1 - Fp + Bq - Dr$$
$$h = h_1 - Ep - Dq + Cr,$$

wo A, B, C die Trägheitsmomente, D, E, F die Deviationsmomente bezüglich der Coordinationnaxen sind.

Diese letzteren Relationen lassen aber eine allgemeinere Auffassung zu. Sie besagen nämlich nichts anderes, als dass das Moment der absoluten Bewegungsgrösse bezüglich irgend einer Richtung gleich ist dem Momente der relativen Bewegungsgrösse, vermehrt um das Moment jener Bewegungsgrösse, die aus den Geschwindigkeiten der coincidirenden Systempunkte entsteht, bezogen auf dieselbe Richtung.

Da es nun nicht nothwendig ist, dass diese Richtung mit einer der beweglichen Coordinatenaxen zusammenfällt, so können sich die in den Ausdrücken für f, g, h auftretenden Grössen f_1, g_1, h_1, p, q, r auch auf ein anderes bewegliches Coordinatensystem beziehen, und man kann überhaupt

$$f = f_1 + Ap_1 - Fq_1 - Er_1$$
$$g = g_1 - Fp_1 + Bq_1 - Dr_1$$
$$h = h_1 - Ep_1 - Dq + Cr_1$$

setzen, wo p_1, q_1, r_1 die Rotationen eines zweiten beweglichen Coordinatensystems, aber zerlegt nach den momentan als fest betrachteten Axen des ersten bedeuten, f_1, g_1, h_1 aber die Momente der relativen Bewegungsgrössen bezüglich des zweiten Systems sind aber der Richtung nach ebenso zerlegt. p_1, q_1, r_1 stellen also eine für alle Punkte des materiellen Systems gemeinsame Rotationsbewegung vor, während $f_1\ g_1, h_1$ von den noch übrig bleibenden relativen Verschiebungen abhängen.

Was nun die Wahl der Coordinatensysteme anbelangt, so läge es wohl nahe, für das erste System, d. h. dasjenige, welches die Zerlegung der Richtung nach bestimmen soll, die Hauptträgheitsaxen zu wählen, wodurch die Gleichungen eine besonders einfache Gestalt annehmen. Dieses System hat aber den Nachtheil, dass die Bewegung desselben im veränderlichen Massensystem nicht von der Ordnung der relativen Verschiebungen zu sein braucht; denn wenn letztere auch kleine Grössen erster Ordnung und mit ihnen die Änderungen der Grösse der Hauptträgheitsmomente von derselben Ordnung sind, so können doch die Änderungen der Lage der Hauptträgheitsaxen 0^{ter} Ordnung werden, wenn die Differenz derselben von der Ordnung der Verschiebungen ist. Es soll daher ein Coordinatensystem gewählt werden, das mit dem nicht deformirten Erdkörper fest verbunden ist. Die Bewegung desselben im Raume ist daher jene des veränderlichen Systems, wenn in jedem Momente die Verschiebungen mit verkehrtem Vorzeichen an die thatsächlich stattfindenden Lagen der Massentheilchen angebracht werden, und nicht zu verwechseln mit der Bewegung des starren Massensystems.

Die Zerlegung der Deformationen in eine allen Massenelementen gemeinsame Rotationsbewegung und den relativen Verschiebungen soll so geschehen, dass die aus den letzteren resultirenden Momente der relativen Bewegungsgrössen verschwinden, die Rotation daher die mittlere Rotationsbewegung des veränderlichen Systems vorstellt.

Sind x, y, z die Coordinaten eines Massenelementes des nicht deformirten Erdkörpers, bezogen auf ein mit diesem fest verbundenes Coordinatensystem, α, β, γ die entsprechenden Componenten der Verschiebung, die als gegebene Functionen der Zeit und der Coordinaten vorausgesetzt werden, so sind letztere demgemäss so zu zerlegen, dass, wenn

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$\beta = \beta_1 + \beta_2$$
$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

gesetzt wird, die α_1, β_1, γ_1 der gemeinsamen mittleren Rotationsbewegung angehören, die α_2, β_2, γ_2 die Momente der Bewegungsgrössen zu Null machen.

Da diese letztere Bedingung sich auf die ersten Differentialquotienten der Verschiebungen nach der Zeit bezieht, die absolute Lage dieses so definirten zweiten beweglichen Coordinatensystems willkürlich ist und daher auch mit dem ersten zusammenfallend gedacht werden kann, so können die entsprechenden Bedingungsgleichungen unmittelbar in diesem aufgestellt werden.

Bedeuten π_1, π_2, π_3 die mittleren Rotationsgeschwindigkeiten um die Axen dieses Systems, so sind die daraus sich ergebenden Geschwindigkeiten der coincidirenden Systempunkte eben die Ableitungen der erstgenannten Componenten der Deformationen nach der Zeit, d. h.:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -\pi_3 y + \pi_2 z$$

$$\frac{d\beta_1}{dt} = -\pi_1 z + \pi_3 x$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = -\pi_2 x + \pi_1 y.$$

Die Grössen π_1, π_2, π_3 müssen nun so beschaffen sein, dass

$$\sum m \left[(y+\beta_2) \frac{d\gamma_2}{dt} - (z+\gamma_2) \frac{d\beta_2}{dt} \right] = 0$$

$$\sum m \left[(z+\gamma_2) \frac{d\alpha_2}{dt} - (x+\alpha_2) \frac{d\gamma_2}{dt} \right] = 0$$

$$\sum m \left[(x+\alpha_2) \frac{d\beta_2}{dt} - (y+\beta_2) \frac{d\alpha_2}{dt} \right] = 0.$$

Die Deformationen sollen als kleine Grössen vorausgesetzt werden, von denen nur erste Potenzen zu berücksichtigen sind. Sie sind — wie es in der Natur der hier behandelten Veränderlichkeit der Erde liegt — periodische Functionen der Zeit, und da Perioden, deren Dauer eine kleine Grösse erster Ordnung ist, offenbar nicht in Betracht kommen können, so werden auch die Ableitungen erster Ordnung sein.

Es ist also

$$\sum m \left(y \frac{d\gamma_2}{dt} - z \frac{d\beta_2}{dt} \right) = 0$$

$$\sum m \left(z \frac{d\alpha_2}{dt} - x \frac{d\gamma_2}{dt} \right) = 0$$

$$\sum m \left(x \frac{d\beta_2}{dt} - y \frac{d\alpha_2}{dt} \right) = 0.$$

Nun ist aber

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \pi_3 y - \pi_2 z$$

$$\frac{d\beta_2}{dt} = \frac{d\beta}{dt} + \pi_1 z - \pi_3 x$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} + \pi_2 x - \pi_1 y,$$

wodurch die Bedingungsgleichungen übergehen in

$$\sum m\left(y\frac{d\gamma}{dt}-z\frac{d\beta}{dt}\right)-\pi_1\sum m\,(y^2+z^2)+\pi_2\sum m\,xy+\pi_3\sum m\,zx=0$$

$$\sum m\left(z\frac{d\alpha}{dt}-x\frac{d\gamma}{dt}\right)-\pi_2\sum m\,(z^2+x^2)+\pi_3\sum m\,yz+\pi_1\sum m\,xy=0$$

$$\sum m\left(x\frac{d\beta}{dt}-y\frac{d\alpha}{dt}\right)-\pi_3\sum m\,(x^2+y^2)+\pi_1\sum m\,zx+\pi_2\sum m\,yz=0.$$

Ist nun das Coordinatensystem so gewählt, dass seine Axen mit den Hauptträgheitsaxen des nicht deformirten Erdkörpers zusammenfallen, und bezeichnet man die diesbezüglichen Hauptträgheitsmomente mit A_0, B_0, C_0, so ergeben die Gleichungen

$$\pi_1=\frac{1}{A_0}\sum m\left(y\frac{d\gamma}{dt}-z\frac{d\beta}{dt}\right)$$

$$\pi_2=\frac{1}{B_0}\sum m\left(z\frac{d\alpha}{dt}-x\frac{d\gamma}{dt}\right)$$

$$\pi_3=\frac{1}{C_0}\sum m\left(x\frac{d\beta}{dt}-y\frac{d\alpha}{dt}\right)$$

π_1, π_2, π_3 sind also von der Ordnung der Verschiebungen.

Diese Grössen stellen die aus den Deformationen sich ergebende mittlere Rotationsbewegung bezüglich der Axen des ersten Coordinatensystems dar. Bezeichnet man mit ω_1, ω_2, ω_3 die mittleren Rotationen um die momentan als fest gedachten Axen dieses Systems, so ist jetzt

$$f=A\omega_1-F\omega_2-E\omega_3$$

$$g=-F\omega_1+B\omega_2-D\omega_3$$

$$h=-E\omega_1-D\omega_2+C\omega_3.$$

Da aber mit p, q, r die Rotationsgeschwindigkeiten des ersten Systems bezüglich der eigenen momentan festen Axen bezeichnet wurden, so ist offenbar

$$p=\omega_1-\pi_1,\quad q=\omega_2-\pi_2,\quad r=\omega_3-\pi_3.$$

Die Differentialgleichungen für die mittlere Rotationsbewegung sind daher

$$\frac{d}{dt}(A\omega_1-F\omega_2-E\omega_3)+(\omega_2-\pi_2)(-E\omega_1-D\omega_2+C\omega_3)-(\omega_3-\pi_3)(-F\omega_1+B\omega_2-D\omega_3)=L$$

$$\frac{d}{dt}(-F\omega_1+B\omega_2-D\omega_3)+(\omega_3-\pi_3)(A\omega_1-F\omega_2-E\omega_3)-(\omega_1-\pi_1)(-E\omega_1-D\omega_2+C\omega_3)=M$$

$$\frac{d}{dt}(-E\omega_1-D\omega_2+C\omega_3)+(\omega_1-\pi_1)(-F\omega_1+B\omega_2-D\omega_3)-(\omega_2-\pi_2)(A\omega_1-F\omega_2-E\omega_3)=N.$$

Da Glieder zweiter Ordnung in den Deformationen vernachlässigt wurden, so lassen die Gleichungen sofort eine Vereinfachung zu. Es folgt nämlich aus dem Umstande, dass das Coordinatensystem von den Hauptträgheitsaxen des nicht deformirten Erdkörpers gebildet wird, dass die Deviationsmomente von der Ordnung der Deformationen sind, und da von diesen nur erste Potenzen berücksichtigt wurden, so hat man

$$A\frac{d\omega_1}{dt}-F\frac{d\omega_2}{dt}+\omega_1\left[\frac{dA}{dt}+F\omega_3\right]+\omega_2\left[-\frac{dF}{dt}+(C-B)\omega_3+\pi_3B\right]-E\omega_1\omega_2-D\omega_2^2=L+\frac{d(E\omega_3)}{dt}+\pi_2C\omega_3-D\omega_3^2$$

$$B\frac{d\omega_2}{dt}-F\frac{d\omega_1}{dt}+\omega_2\left[\frac{dB}{dt}-F\omega_3\right]+\omega_1\left[-\frac{dF}{dt}-(C-A)\omega_3-\pi_3A\right]+E\omega_1^2+D\omega_1\omega_2=M+\frac{d(D\omega_3)}{dt}-\pi_1C\omega_3+E\omega_3^2$$

$$C\frac{d\omega_3}{dt}+\omega_3\left(\frac{dC}{dt}-D\omega_1+E\omega_2\right)=N+\frac{d}{dt}(E\omega_1+D\omega_2)-\pi_2A\omega_1+\pi_1B\omega_2+(A-B)\omega_1\omega_2+F(\omega_1^2-\omega_2^2).$$

Es ist zu bemerken, dass, sobald es sich um elastische Deformationen handelt, unter allen Umständen diese nicht mehr ganz strenge Form der Gleichungen zu Grunde gelegt werden muss. Die ganze Theorie der Elasticität fester Körper, bei denen keine der Dimensionen unendlich klein ist, basirt auf der Voraussetzung, dass Grössen zweiter Ordnung in den Deformationen vernachlässigt werden können, so dass consequenterweise nur von dem obigen Gleichungssystem ausgegangen werden kann und die verschiedenen Annäherungen nur durch die Annahmen über die Ordnung der störenden Kräfte und die Beschaffenheit der Grössen ω_1, ω_2, ω_3 bedingt werden.

Was die letzteren anbelangt, so ist dabei der Umstand massgebend, dass die Abweichung der augenblicklichen mittleren Rotationsaxe von der dritten Hauptträgheitsaxe erfahrungsgemäss äusserst klein ist. Nimmt man nun als erste Annäherung an, dass Producte von ω_1 oder ω_2 in Grössen von der Ordnung der Deformationen vernachlässigt werden können, und bedenkt, dass die veränderlichen Theile der Trägheitsmomente auch von dieser Ordnung sind, so nehmen die Gleichungen die Form an:

$$A\frac{d\omega_1}{dt}-\omega_2\omega_3(B-C)=L+\frac{d(E\omega_3)}{dt}+\pi_2 C\omega_3-D\omega_3^2$$

$$B\frac{d\omega_2}{dt}+\omega_1\omega_3(A-C)=M+\frac{d(D\omega_3)}{dt}-\pi_1 C\omega_3+E\omega_3^2$$

$$\frac{d(C\omega_3)}{dt}=N.$$

Aus der dritten Gleichung geht hervor, dass $C\omega_3$ bis auf Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte constant ist. Die veränderlichen Theile von ω_3 sind daher von dieser, theils von der Ordnung der Deformationen. Macht man die weitere Voraussetzung, dass auch Producte der störenden Kräfte in die Deformationen und die Grössen ω_1 und ω_2 vernachlässigt werden können und dass auch $A-B$ von der Ordnung der Deformationen ist, so hat man

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dt}-n\frac{A-C}{A}\omega_2&=\frac{1}{A}\left(L+n\frac{dE}{dt}-\pi_2 nC+n^2D\right)=L_1\\ \frac{d\omega_2}{dt}+n\frac{A-C}{A}\omega_1&=\frac{1}{A}\left(M+n\frac{dD}{dt}-\pi_1 nC+n^2E\right)=M_1,\end{aligned}\qquad(1)$$

wenn mit n der constante Theil von ω_3 bezeichnet wird.

Diese Gleichungen haben dieselbe Form, wie die analogen für ein starres System. Die Integrale sind nach der Darstellungsweise Gyldén's (»Recherches sur la rotation de la Terre.« Actes de la Société royale des Sciences d'Upsal 1871)

$$\begin{aligned}\omega_1&=a\cos n\nu t-b\sin n\nu t+\int_0^t L_1\cos n\nu(\bar{t}-t)dt-\int_0^t M_1\sin n\nu(\bar{t}-t)dt\\ \omega_2&=a\sin n\nu t+b\cos n\nu t+\int_0^t L_1\sin n\nu(\bar{t}-t)dt+\int_0^t M_1\cos n\nu(\bar{t}-t)dt.\end{aligned}\qquad(2)$$

Dabei bedeuten a und b zwei willkürliche Constante, $\nu=\frac{A-C}{C}$; $\bar{t}$ unter dem Integrationszeichen bedeutet, dass dieses $\bar{t}$ nicht als Integrationsvariable zu betrachten, sondern dass erst nach durchgeführter Integration $\bar{t}=t$ zu setzen ist. Die von a, x und b abhängigen Glieder gehören der ungestörten Bewegung des unveränderlichen Systems an. Was die übrigen Theile anbelangt, so erkennt man leicht, dass, wenn in L_1 und M_1 periodische Glieder vorkommen, die Durchführung der Quadratur keine neuen periodischen Glieder hervorbringen kann; d. h. also, dass bei dem vorliegenden Grad der Annäherung in der Bewegung des Rotationspoles ausser der Euler'schen Periode nur solche auftreten können, welche die störenden Kräfte oder die Deformationen selbst besitzen.

Die von der Deformation des Erdkörpers abhängigen Theile von ω_1 und ω_2 sind daher

$$\omega_1' = \int_0^t \frac{1}{A}\left(\frac{dE}{dt} - \pi_2 nC + n^2 D\right)\cos n\nu(\bar{t}-t)\,dt - \int_0^t \frac{1}{A}\left(n\frac{dD}{dt} - \pi_1 nC + n^2 E\right)\sin n\nu(\bar{t}-t)\,dt$$

$$\omega_2' = \int_0^t \frac{1}{A}\left(n\frac{dE}{dt} - \pi_2 nC + n^2 D\right)\sin n\nu(\bar{t}-t)\,dt + \int_0^t \frac{1}{A}\left(n\frac{dD}{dt} - \pi_1 nC + n^2 E\right)\cos n\nu(\bar{t}-t)\,dt.$$

A, C, E, D, π_1 und π_1 sind also jetzt so als Functionen der Zeit zu bestimmen, wie es die in Folge der Elasticität der Erde eintretenden Verschiebungen bedingen. Es ist daher die nächste Aufgabe, Ausdrücke für letztere zu entwickeln.

— —

Die Bewegungsgleichungen der Elasticität lassen sich nur in dem Fall integriren, als die äusseren Kräfte von der Zeit unabhängig sind; die Bewegungen finden dann so statt, wie wenn diese äusseren Kräfte nicht vorhanden wären, nur geschehen diese Bewegungen nicht um die ursprünglichen Ruhelagen, sondern um die durch jene Kräfte bedingten Gleichgewichtslagen.

Für die vorliegende Frage sind daher derartige Kräfte belanglos und es kann hier insbesondere von der Wirkung der Centrifugalkraft abgesehen werden.

Die Einwirkung äusserer, von der Zeit abhängiger Kräfte kann nur in jener Annäherung untersucht werden, welche voraussetzt, dass das Massensystem in jedem Momente die durch dieselben bedingte Gleichgewichtslage annimmt.

Es werden daher ganz allgemein zwei verschiedene Arten von Deformationen zu behandeln sein: diejenigen, welche ohne dem Einfluss continuirlich wirkender äussere Kräfte durch das Schwingen der einzelnen Theile um ihre Gleichgewichtslagen entstehen, und diejenigen, welche die störenden Kräfte verursachen, also die eigentlichen elastischen Gezeiten.

Was die ersteren anbelangt, so ist es allerdings kaum wahrscheinlich, dass solche in dem Erdkörper vorhanden sind, nichtsdestoweniger soll der Vollständigkeit halber auch der Einfluss dieser Verschiebungen untersucht werden.

Es soll bei der Ermittlung der elastischen Deformationen die weitere vereinfachende Voraussetzung gemacht werden, dass die Erde eine homogene, isotrope Kugel ist.

Die von äusseren Kräften unabhängigen Schwingungen einer elastischen Kugel sind bereits mehrfach eingehend behandelt worden. Naturgemäss wurden dabei sphärische Coordinaten angewendet, wodurch die Oberflächenbedingungen in sehr einfacher Weise dargestellt werden können. Es sollen nun im Folgenden — wie es das vorliegende Problem verlangt — diese Schwingungen im rechtwinkeligen System dargestellt werden.

Bezeichnen also jetzt α, β, γ die rechtwinkeligen Componenten dieser Art der elastischen Schwingung und setzt man die Volumänderung $\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = \sigma$, bedeutet ferner ∇^2 die Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, so sind die Bewegungsgleichungen eines elastischen Körpers ohne Einwirkung äusserer Kräfte:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= \lambda\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \mu\nabla^2(\alpha) \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} &= \lambda\frac{\partial\sigma}{\partial y} + \mu\nabla^2(\beta) \\ \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= \lambda\frac{\partial\sigma}{\partial z} + \mu\nabla^2(\gamma), \end{aligned} \tag{3}$$

dabei sind λ und μ Constante, welche von der Dichte und den Elasticitätsverhältnissen des betreffenden Körpers abhängen, so zwar, dass, wenn δ die Dichte, E den Elasticitätsmodul und E^1 den Quercontractionscoëfficienten vorstellt,

$$\lambda = \frac{1}{\delta}\,\frac{E}{2(1+E')(1-2E')} \text{ und } \mu = \frac{1}{\delta}\,\frac{E}{2(1+E')}$$

ist.

Dieses Gleichungssystem lässt sich auch in der Form schreiben:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\alpha}{dt^2} &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)\right] \\
\frac{d^2\beta}{dt^2} &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial y} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\right] \\
\frac{d^2\gamma}{dt^2} &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)\right]
\end{aligned}$$

aus welcher sich sofort ergibt, wenn die erste nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differentiirt wird und die Gleichungen addirt werden:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = (\lambda+\mu)\nabla^2(\sigma). \tag{4}$$

Setzt man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y} &= \mathfrak{A} \\
\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial z} &= \mathfrak{B} \\
\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x} &= \mathfrak{C}
\end{aligned}$$

so lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\alpha}{dt^2} &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}\right) \\
\frac{d^2\beta}{dt^2} &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial x}\right) \\
\frac{d^2\gamma}{dt^2} &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial y}\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Differentiirt man man die zweite nach z, die dritte nach y und subtrahirt, so erhält man

$$\frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2} = \mu\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial z}\right)\right]$$

und auf dieselbe Weise:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\mathfrak{B}}{dt^2} &= \mu\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}\right)\right] \\
\frac{d^2\mathfrak{C}}{dt^2} &= \mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial y}\right)\right],
\end{aligned} \tag{6}$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial y}\right) = 0. \tag{7}$$

Aus dem letzten Gleichungssystem ersieht man, dass $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, was die beiden Parameter $\lambda+\mu$ und μ anbelangt, nur von μ abhängen, während nach Gleichung (4) σ nur von $(\lambda+\mu)$ abhängt; da aber in den Bewegungsgleichungen (5) die von σ abhängigen Glieder nur $(\lambda+\mu)$, die von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ abhängigen Glieder nur μ zum Factor haben, so müssen auch α, β, γ je aus zwei Theilen bestehen, von denen die einen nur von $\gamma+\mu$, die anderen nur von μ abhängen. Setzt man in diesem Sinne $\alpha = \alpha'+\alpha''$, $\beta=\beta'+\beta''$, so ist demgemäss

$$\frac{d^2\alpha'}{dt} = (\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial x}$$
$$\frac{d^2\beta'}{dt} = (\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial y} \tag{8}$$
$$\frac{d^2\gamma'}{dt^2} = (\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial z}$$

$$\frac{d^2\alpha''}{dt^2} = \mu\left(\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}\right)$$
$$\frac{d^2\beta''}{dt^2} = \mu\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial x}\right) \tag{9}$$
$$\frac{d^2\gamma''}{dt^2} = \mu\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial y}\right)$$

Da $\alpha' \ldots \lambda''$ jedenfalls periodische Functionen der Zeit sein werden, so kann man dieselben als ein Aggregat von Sinus und Cosinus von Vielfachen der Zeit voraussetzen und dafür stellvertretend setzen

$$\alpha' = u_1 \sin p_1 t \qquad \alpha'' = u_2 \sin p_2 t$$
$$\beta' = v_1 \sin p_1 t \qquad \beta'' = v_2 \sin p_2 t$$
$$\gamma' = w_1 \sin p_1 t \qquad \gamma'' = w_2 \sin p_2 t$$

und dementsprechend

$$\sigma = s \sin p_1 t$$
$$\mathfrak{A} = A \sin p_1 t$$
$$\mathfrak{B} = B \sin p_1 t$$
$$\mathfrak{C} = C \sin p_2 t$$

wo p_1 und p_2 Constante bedeuten, deren Werthe von den Oberflächenbedingungen abhängen; u_1, v_1 $\ldots w_2$, s, A, B, C sind Functionen der Coordinaten, und zwar ist

$$s = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z},$$

$$A = \frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad C = \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

Aus (4) folgt

$$(\lambda+\mu)\nabla^2(s)+p_1^2 s = 0,$$

dann ist nach (8)

$$u_1 = -\frac{\lambda+\mu}{p_1^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}, \quad v_1 = -\frac{\lambda+\mu}{p_1^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}, \quad w_1 = -\frac{\lambda+\mu}{p_1^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial z}.$$

Die Gleichungen (9) ergeben

$$\frac{p_2^2}{\mu} u_2 = \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}, \quad \frac{p_2^2}{\mu} v_2 = \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x}, \quad \frac{p_2^2}{\mu} w_2 = \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass u_2, v_2, w_2, A, B, C denselben Gleichungen genügen müssen. Zunächst sieht man aus dem unmittelbar Vorhergehenden, dass

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0$$

$$\frac{p_2^2}{\mu}u_2=\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)=-\nabla^2(u_2)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}\right).$$

Es ist also

$$\frac{p_2^2}{\mu}u_2=-\nabla^2(u_2),\qquad \frac{p_2^2}{\mu}v_2=-\nabla^2(v_2),\qquad \frac{p_2^2}{\mu}w_2=-\nabla^2(w_2).$$

Auf gleiche Weise folgt aus dem Gleichungssystem (6):

$$\frac{p_2^2}{\mu}A=-\nabla^2(A),\qquad \frac{p_2^2}{\mu}B=-\nabla^2(B),\qquad \frac{p_2^2}{\mu}C=-\nabla^2(C).$$

Eine Gleichung von der Form $\nabla(f)+h^2f=0$ wird aber befriedigt durch jede Function $\omega_n g_n$, in welchem Product ω_n eine räumliche Kugelfunction n^{ter} Ordnung bedeutet, g_n eine blosse Function von $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ist, welche der Gleichung

$$\frac{\partial^2 g_n}{\partial r^2}+2(n+1)\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial g_n}{\partial r}+h^2g_n=0$$

genügt. Setzt man damit $rh=\theta$, so hat man

$$\frac{\partial^2 g_n}{\partial\theta^2}+2(n+1)\frac{1}{\theta}\frac{\partial g_n}{\partial\theta}+g_n=0,$$

eine Gleichung, welche die in Heine's »Handbuch der Kugelfunctionen« mit $j_{n+\frac{1}{2}}(\theta)$ bezeichnete Function zum Integral hat.

Es wird daher

$$s=\omega_n g_n\left(\frac{p_1}{\sqrt{\lambda+p}}r\right)$$

und

$$u_1=-\frac{\lambda+\mu}{p_1^2}\frac{\partial}{\partial x}(\omega_n g_n),\qquad v_1=-\frac{\lambda+\mu}{p_1^2}\frac{\partial}{\partial y}(\omega_n g_n),\qquad w_1=-\frac{\lambda+\mu}{p_1^2}\frac{\partial}{\partial x}(\omega_n g_n),$$

wenn der Kürze halber mit g_n die Function mit dem Argumente $\frac{p_1}{\sqrt{\lambda+\mu}}.r$ bezeichnet wird.

Die Grössen u_2, v_2, w_2 werden ähnliche Producte sein, nur müssen sie noch die Bedingung

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0$$

erfüllen. Sind daher ξ_n, η_n, ζ_n räumliche Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung, und bezeichnet g_n die Function $g_n\left(\frac{p_2}{\sqrt{\mu}}r\right)$, so können u_2, v_2, w_2 nicht ohne weiteres mit $\xi_n g_n'$ u. s. w. identificirt werden. Integrale, welche dieser Bedingung genügen, sind hingegen:

$$
\begin{aligned}
u_2 &= \xi_n g_n' + \frac{\mu}{p_2^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\xi_n g_n') + \frac{\partial}{\partial y}(\eta_n g_n) + \frac{\partial}{\partial z}(\zeta_n g_n')\right]\\
v_2 &= \eta_n g_n' + \frac{\mu}{p_2^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\xi_n g_n') + \frac{\partial}{\partial y}(\eta_n g_n') + \frac{\partial}{\partial z}(\zeta_n g_n')\right] \qquad (10)\\
w_2 &= \zeta_n g_n' + \frac{\mu}{p_2^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\xi_n g_n') + \frac{\partial}{\partial y}(\eta_n g_n') + \frac{\partial}{\partial z}(\zeta_n g_n')\right].
\end{aligned}
$$

Es folgt das aus dem Umstande, dass jeder Differentialquotient einer Function $\xi_n g_n'$ eine Function derselben Art ist; denn es ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\xi_n g_n') &= \xi_n\frac{x}{r}\cdot\frac{\partial g_n'}{\partial r} + g_n'\frac{\partial \xi_n}{\partial x}\\
&= \frac{r}{2n+1}\left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x} - r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi_n}{r^{2n+1}}\right)\right) + g_n'\frac{\partial \xi_n}{\partial x}\\
&= \frac{\partial \xi_n}{\partial x}\left(g_n' + \frac{r}{2n+1}\cdot\frac{\partial g_n'}{\partial r}\right) - \frac{r^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{\partial g_n'}{\partial r}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi_n}{r^{2n+1}}\right).
\end{aligned}
$$

Nun bestehen aber die Relationen

$$
\begin{aligned}
g_{n-1}(\theta) - g_n(\theta) &= \frac{\theta}{2n+1}\cdot\frac{\partial g_n(\theta)}{\partial\theta}\\
-\frac{\theta}{2n+3}\,g_{n+1}(\theta) &= \frac{\partial g_n(\theta)}{\partial\theta},
\end{aligned} \qquad (11)
$$

woraus folgt

$$
\frac{\partial}{\partial x}(\xi_n g_n') = \frac{\partial \xi_n}{\partial x}g_{n-1}' + \frac{p_2^2}{\mu}\cdot\frac{g_{n+1}'}{(2n+1)(2n+3)}\,r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi_n}{r^{2n+1}}\right). \qquad (12)
$$

$\frac{\partial \xi_n}{\partial x}$ ist eine räumliche Kugelfunction $(n-1)^{\text{ter}}$, $r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi_n}{r^{2n+1}}\right)$ eine solche $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Man sieht also, dass jeder Differentialquotient ein Aggregat von Functionen derselben Art sein wird. Die Ausdrücke für u_2, v_2, w_2 genügen daher den Differentialgleichungen, ausserdem aber auch noch der Bedingungsgleichung

$$
\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0,
$$

denn, wenn man

$$
\frac{\partial}{\partial x}(\xi_n g_n') + \frac{\partial}{\partial y}(\eta_n g_n') + \frac{\partial}{\partial z}(\zeta_n g_n') = \Phi
$$

setzt, so ist

$$
\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = \Phi + \frac{\mu}{p_2^2}\nabla^2(\Phi)
$$

ein Ausdruck, welcher verschwindet, da Φ eine Function von der Art $\xi_n g_n'$ ist.

Für die Grössen A, B, C erhält man daraus

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\partial}{\partial z}(\eta_n g_n') - \frac{\partial}{\partial y}(\zeta_n g_n')\\
B &= \frac{\partial}{\partial x}(\zeta_n g_n') - \frac{\partial}{\partial z}(\eta_n g_n') \qquad (13)\\
C &= \frac{\partial}{\partial y}(\xi_n g_n') - \frac{\partial}{\partial x}(\eta_n g_n')
\end{aligned}
$$

Da nun die A, B, C und u_2, v_2, w_2 denselben Gleichungen genügen, so bilden die Systeme (10) und (13) zwei Lösungssysteme der Gleichungen für u_2, v_2, w_2, und zwar enthalten dieselben sämmtliche aus denselben weiter hervorgehende Lösungen, denn wenn man die obigen Werthe für A, B, C in

$$\frac{p_2^2}{\mu} u_2 = \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}$$

u. s. w. substituirt, so erhält man wieder die Ausdrücke in (10).

Die Grössen α, β, γ unterliegen noch gewissen Oberflächenbedingungen. Im vorliegenden Falle kann man die Annahme einer freien Oberfläche machen. Die Verschiebungen α, β, γ müssen daher so beschaffen sein, dass die ihnen entsprechenden Druckkräfte für die Oberfläche verschwieden. Die Componenten derselben nach den Coordinatenaxen sind

$$P_x = \frac{\lambda-\mu}{\mu} x\sigma + \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\alpha - \alpha + \frac{\partial}{\partial x}(x\alpha + y\beta + z\gamma)$$

$$P_y = \frac{\lambda-\mu}{\mu} y\sigma + \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\beta - \beta + \frac{\partial}{\partial y}(x\alpha + y\beta + z\gamma)$$

$$P_z = \frac{\lambda-\mu}{\mu} z\sigma + \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\gamma - \gamma + \frac{\partial}{\partial z}(x\alpha + y\beta + z\gamma).$$

Bezeichnet man mit a den Radius der als kugelförmig angenommenen Erde, so müssen die Grössen P_x, P_y, P_z für $r = a$ identisch verschwinden.

Es ist $\alpha = u_1 \sin p_1 t + u_2 \sin p_2 t$ u. s. w., daher werden die Druckcomponenten dieselbe Form haben, und da p_1 und p_2 willkürliche Constante sind, so müssen die von den u_1, v_1, w_1 und die von den u_2, v_2, w_2 abhängigen Theile für sich verschwinden.

Was nun die ersteren anbelangt, so sieht man zunächst, dass, wenn die Verschiebungen Differentialquotienten Einer Function nach x, y, z sind,

$$\frac{\partial}{\partial x}(xu_1 + yv_1 + zw_1) - u_1 = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)u_1$$

ist, daher der Factor von $\sin p_1 t$ in P_x

$$\frac{\lambda-\mu}{\mu} x\sigma + 2\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)u_1 \tag{14}$$

ist.

$$u_1 = -\frac{\lambda+\mu}{p_1^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\omega_n g_n) = -\frac{\lambda+\mu}{p_2^1}\left[\frac{\partial\omega_n}{\partial x} g_{n-1} + \frac{p_1^2}{\lambda+\mu}\cdot\frac{r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega_n}{r^{2n+1}}\right) g_{n+1}\right].$$

Ist p_n irgend eine homogene Function n^{ten} Grades und R eine nur von r abhängige Function, so ist

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)(Rp_n) = \left(r\frac{\partial R}{\partial r} + nR\right)p_n. \tag{15}$$

Daraus ergibt sich mit Benützung von (11) für den Factor von $\sin p_1 t$:

$$-\frac{\lambda+\mu}{p_1^2}\left\{\left[\frac{\lambda}{\mu}\, r\frac{\partial g_{n-1}}{\partial r} + (n-1)g_{n-1}\right]\frac{\partial\omega_n}{\partial x} - \left[\frac{\lambda-2\mu}{\mu}\cdot\frac{1}{2n+3}\, r\frac{\partial g_{n+1}}{\partial x} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\lambda-\mu}{\mu} + \frac{n+1}{2n+3}\right)g_{n+1}\right]\frac{r^{2n+3}}{2n+1}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega_n}{r^{2n+1}}\right)\right\}.$$

Dieser Ausdruck soll für $r = a$ verschwinden. $\frac{\partial\omega_n}{\partial x}$ geht dann in eine harmonische Flächenfunction $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, $r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega}{r^{2n+1}}\right)$ in eine harmonische Flächenfunction $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung über. Für das identische Verschwinden ist es daher nothwendig, dass der Factor jeder dieser Functionen für sich Null wird. g^{n-1} und g^{n+1} sind aber Functionen des Argumentes $\frac{p_1}{\sqrt{\lambda+\mu}} = a$, wo p_1 eine noch unbestimmte Constante bedeutet. Diese Grösse erscheint somit überbestimmt, woraus folgt, dass diese Art der Schwingung für sich allein nicht möglich ist.

Was die von p_2 abhängigen Theile der Druckcomponenten anbelangt, so soll von den zwei Lösungssystemen (10) und (13) zunächst das erstere zu Grunde gelegt werden.

Setzt man

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial x} + \frac{\partial \eta_n}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_n}{\partial z} = H_{n-1}$$

$$r^{2n+3}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi_n}{r^{2n+1}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\eta_n}{r^{2n+1}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\zeta_n}{r^{2n+1}}\right)\right] = K_{n+1},$$

wo also H_{n-1} und K_{n+1} Kugelfunctionen von der Ordnung ihrer Indices sind, so ist mit Benützung von (12)

$$u_2 = \xi_n g'_n + \frac{\mu}{p_2^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(H_{n-1} g'_{n-1}) + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(K_{n+1} g'_{n+1})$$

$$v_2 = \eta_n g'_n + \frac{\mu}{p_2^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(H_{n-1} g'_{n-1}) + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(K_{n+1} g'_{n+1})$$

$$w_2 = \zeta_n g'_n + \frac{\mu}{p_2^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(H_{n-1} g'_{n-1}) + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(K_{n+1} g'_{n+1}).$$

Sind p_x, p_y, p_z die Factoren von $\sin p_2 t$ in den Druckcomponenten, so ist

$$p_x = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) u_2 - u_2 + \frac{\partial}{\partial x}(xu_2 + yv_2 + zw_2)$$

und ähnlich p_y und p_z.

Wenn man bedenkt, dass

$$x\xi_n + y\eta_n + z\zeta_n = \frac{1}{2n+1}(r^2 H_{n-1} - K_{n+1}), \tag{16}$$

so erhält man unter Berücksichtigung von (14) und (15) zunächst

$$p_x = \xi_n\left(r\frac{\partial g'_n}{\partial r} + (n-1) g'_n\right) + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(r^2 H_{n-1} + K_{n+1})$$
$$+ 2\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\frac{\mu}{p_2^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(H_{n-1} g_{n-1}) + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(K_{n+1} g'_{n+1})\right].$$

Die Ausführung der rechten Seite ergibt bei mehrfacher Anwendung der Relationen (11), (12), (15) und der Differentialgleichung der Function g_n einen Ausdruck von der Form

$$p_x = \xi_n\left(r\frac{\partial g'_n}{\partial r} + (n-1) g'_n\right) + R_1 \frac{\partial H_{n-1}}{\partial x} + R_2 r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)$$
$$+ R_3 \frac{\partial K^{n+1}}{\partial x} + R_4 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K_{n+1}}{r^{2n+3}}\right).$$

R_1, R_2, R_3 und R_4 sind Functionen von r, und zwar ist

$$R_1 = \frac{r^2}{(2n-1)(2n+1)}[4g'_n - (4n-1) g'_{n-1}] + \frac{2n}{p_2^2}(n-2) g_{n-1}$$

$$R_2 = \frac{1}{(2n-1)}[(n-2) g'_n - (2n+1) g'_{n-1}]$$

$$R_3 = \frac{1}{2n+3}\left[+\frac{(n-1)(n+1)}{2n+1} g'_n - (2n-1) g'_{n-1}\right]$$

$$R_4 = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{2n+3}\left[\frac{n-2}{2n+1} g'_{n+1} - n\frac{4n+1}{2n+1} g'_n - (2n+1) g'_{n-1}\right].$$

p_x soll nun für $r = a$ identisch verschwinden. Das kann wieder nur dadurch geschehen, dass die durch diese Substitution auftretenden harmonischen Flächenfunctionen derselben Ordnung für sich verschwinden. Es muss daher

$$\left.\begin{aligned} &\xi_n\left(r\frac{\partial g'_n}{\partial r} + (n-1) g'_n\right) + R_2 r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H_{n-1}}{r^{2n-1}}\right) + R_3 \frac{\partial K_{n+1}}{\partial x} = 0 \\ &R_1 \frac{\partial H_{n-1}}{\partial x} = 0, \qquad R_4 r^{2n+5} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K_{n+1}}{r^{2n+3}}\right) = 0 \text{ werden} \end{aligned}\right\} \text{ für } r = a.$$

Die Oberflächenbedingungen involviren also wieder eine Überbestimmung für p_2. Denselben kann nur dadurch genügt werden, dass die Functionen H_{n-1} und K_{n+1} selbst für $r = a$ verschwinden. H_{n-1} und K_{n+1} sind also Functionen, welche sammt ihren ersten Ableitungen endlich und stetig sind, der Gleichung $\nabla^2 f = 0$ genügen und auf der Oberfläche der Kugel $r = a$ verschwinden. Sie müssen daher überhaupt innerhalb der Kugel verschwinden. Es muss also $K_{n+1} = 0$ und $H_{n-1} = 0$ nach (16) daher auch

$$x\xi_n + y\eta_n + z\zeta_n = 0$$

sein. Die Functionen ξ_n, η_n, ζ_n sind daher so zu bestimmen, dass

$$x\xi_n + y\eta_n + z\zeta_n = 0$$

und

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial x} + \frac{\partial \eta_n}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_n}{\partial z} = 0$$

Die erste Bedingung wird erfüllt, wenn man

$$\xi_n = yZ - zY, \quad \eta_n = zX - xZ, \quad \zeta_n = xY - yX$$

setzt, wo X, Y, Z Functionen von x, y, z sind. Dann ist

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial x} + \frac{\partial \eta_n}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_n}{\partial z} = x\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

und dieser Ausdruck verschwindet identisch für

$$X = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Es wird also

$$\xi_n = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}$$

u. s. w. sein. Nun kann man sich leicht überzeugen, dass, wenn χ_n eine räumliche Kugelfunction ist, Ausdrücke von der Form

$$x\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y\frac{\partial \chi_n}{\partial x}$$

u. s. w. wieder räumliche Kugelfunctionen — offenbar derselben Ordnung — sind. Substituirt man also für f die Function χ_n, so werden ξ_n, η_n, ζ_n wieder als räumliche Kugelfunctionen erhalten, und man hat somit das Lösungssystem

$$\begin{aligned} u_2 &= g'_n\left(y\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial \chi_n}{\partial y}\right) \\ v_2 &= g'_n\left(z\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right) \qquad (17) \\ w_2 &= g'_n\left(x\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y\frac{\partial \chi_n}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

Dann aber kann der Oberflächenbedingung genügt werden, die sich darauf reducirt, p_2 so zu bestimmen, dass

$$\left| r\frac{\partial g_n'}{\partial r} + (n-1) g_n' \right|_{r=a} = 0$$

ist.

Es ist weiter zu bemerken, dass die Oberflächenbedingung bei Zugrundelegung des zweiten Lösungssystems zu denselben Formen führt; denn setzt man

$$u_2 = A, \quad v_2 = B, \quad w_2 = C,$$

wo unter A, B, C die in (13) gegebenen Grössen verstanden sind, so ist

$$u_2 = g_n'\left(\frac{\partial \eta_n}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_n}{\partial y}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial g_n'}{\partial r}(z\eta_n - y\zeta_n)$$

$$v_2 = g_n'\left(\frac{\partial \zeta_n}{\partial x} - \frac{\partial \xi_n}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial g_n'}{\partial r}(x\zeta_n - z\xi_n)$$

$$w_2 = g_n'\left(\frac{\partial \xi_n}{\partial y} - \frac{\partial \eta_n}{\partial x}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial g_n'}{\partial r}(y\xi_n - x\eta_n).$$

Daraus ergibt sich für die zur x-Axe parallele Druckcomponente

$$\left(r\frac{\partial g_n'}{\partial r} + (n-2) g_n'\right)\left(\frac{\partial \eta_n}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_n}{\partial y}\right) + \left((n+3)\frac{1}{r}\frac{\partial g_n'}{\partial r} - \frac{p_2^2}{\mu} g_n'\right)(z\eta_n - y\zeta_n)$$
$$+ g_{n-1}'\frac{\partial \Omega_n}{\partial x} + \frac{p_2^2}{\mu} g_{n+1}' \frac{r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Omega_n}{r^{2n+1}}\right).$$

Dabei bedeutet

$$\Omega_n = z\frac{\partial \xi_n}{\partial y} - y\frac{\partial \xi_n}{\partial z} + x\frac{\partial \eta_n}{\partial z} - z\frac{\partial \eta_n}{\partial x} + y\frac{\partial \zeta_n}{\partial x} - x\frac{\partial \zeta_n}{\partial y}.$$

Man sieht, dass in dieser Allgemeinheit die Oberflächenbedingung wieder nicht befriedigt werden kann, sondern eine specielle Wahl der Functionen ξ_n, η_n, ζ_n verlangt.

Setzt man

$$\xi_n = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \eta_n = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \zeta_n = \frac{\partial f}{\partial z}$$

oder

$$\xi_n = xF, \quad \eta_n = yF, \quad \zeta_n = zF,$$

so bleibt in beiden Fällen in den Druckcomponenten nur Ein Glied übrig, dessen Verschwinden eine erfüllbare Bedindungsgleichung für p_2 involvirt. Beide Systeme geben aber den Grössen u_2, v_2, w_2 die in (17) angegebene Form.

Aus diesem Lösungssystem lässt sich aber sofort ein zweites herleiten, wenn man bedenkt, dass die aus irgend einem Werthsystem u_2, v_2 w_2 sich ergebenden A, B, C wieder ein Werthsystem für die ersteren Grössen bilden.

Es ist aber

$$A = \frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{\partial g_n'}{\partial r}\left[\frac{z}{r}\left(z\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right) - \frac{y}{r}\left(x\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - \frac{\partial \chi_n}{\partial x}\right)\right]$$
$$+ g_n'\left[\frac{\partial \chi_n}{\partial x} + z\frac{\partial^2 \chi_n}{\partial x \partial z} - x\frac{\partial^2 \chi_n}{\partial z^2} - x\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial \chi_n}{\partial x} + y\frac{\partial^2 \chi_n}{\partial x \partial y}\right]$$
$$= \frac{\partial g_n'}{\partial r}\left(r\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - \frac{x}{r} n\chi_n\right) + g_n'(n+1)\frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

Mit Benützung von (11) folgt daraus, dass

$$A = (n+1) g_{n-1}'\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - \frac{n}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{p_2^2}{\mu} g_{n+1}' r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\chi_n}{r^{2n+1}}\right).$$

Dieser Ausdruck bildet einen zweiten Werth für u_2.

Sind daher χ_n und φ_n zwei räumliche Kugelfunctionen n. Ordnung, so ist

$$u_2 = g_n'\left(y\frac{\partial\chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial\chi_n}{\partial y}\right) + (n+1)g_{n-1}'\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} - \frac{n}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{p_2^2}{\mu}\,g_{n+1}'\,r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}\right)$$

$$v_2 = g_n'\left(z\frac{\partial\chi_n}{\partial x} - x\frac{\partial\chi_n}{\partial z}\right) + (n+1)g_{n-1}'\frac{\partial\varphi_n}{\partial y} - \frac{n}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{p_2^2}{\mu}\,g_{n+1}'\,r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}\right)$$

$$w_2 = g_n'\left(x\frac{\partial\chi_n}{\partial y} - y\frac{\partial\chi_n}{\partial x}\right) + (n+1)g_{n-1}'\frac{\partial\varphi_n}{\partial z} - \frac{n}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{p_2^2}{\mu}\,g_{n+1}'\,r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}}\right).$$

Das ist das Lösungssystem, das Professor H. Lamb seinen Untersuchungen über die Schwingung einer elastischen Kugel zu Grunde legt (»On the Vibrations of an Elastic Sphere«. Proceedings of the London Mathematical Society vol. XIII pp. 189—212) und das er auf einem von diesem verschiedenen Wege gefunden hat (v. »On the Oscillations of a Viscous Spheroid« ibid. vol. XIII. p. 51—66).

Die Frage, um die es sich hier nun dreht, ist die, ob solche Schwingungsperioden möglich sind, welche auf die Polbewegung einen merklichen Einfluss haben können.

Von den hier auftretenden unendlich vielen Arten elastischer Verschiebungen können aber — wenn man die Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde beibehält — nur eine ganz bestimmte Gattung Einfluss auf die Polbewegung haben.

In den Ausdrücken für ω_1' und ω_2' sind die die Grössen D, E, π_1 und π_2 aus den gegebenen Verschiebungen zu bestimmen; A und C können als constant betrachtet werden, weil sie mit Grössen erster Ordnung multiplicirt erscheinen. Ist dm das den Coordinaten x, y, z entsprechende Massenelement der Erde, so ist

$$D = \int(z\beta+y\gamma)\,dm, \qquad E = \int(x\gamma+z\alpha)\,dm$$

$$\pi_1 = \frac{1}{A}\int\left(y\frac{d\gamma}{dt} - z\frac{d\beta}{dt}\right)dm, \qquad \pi_2 = \frac{1}{A}\int\left(z\frac{d\alpha}{dt} - x\frac{d\gamma}{dt}\right)dm,$$

wobei die Integration über die ganze Kugel auszudehnen ist.

Bei einer solchen Integration verschwinden aber Producte von Kugelfunctionen verschiedener Ordnung identisch. Da die Grössen x, y, z selbst Kugelfunctionen erster Ordnung sind, so sieht man, dass in den oben gefundenen Ausdrücken für u_1, u_2 u. s. w. für ω_n und φ_n nur Kugelfunctionen zweiter, für χ_n nur Kugelfunctionen erster Ordnung zu substituiren sind. Bemerkt man noch, dass jedes über die Kugel ausgedehnte Integral

$$\int x^l y^m z^n\,dx\,dy\,dz$$

verschwindet, wenn einer der Exponenten ungerade ist, so ergibt sich, dass nur die Functionen

$$\omega_2 = K_0 yz + K_1 zx$$

$$\varphi_2 = K_2 yz + K_3 zx$$

$$\chi_1 = K_4 x + K_5 y$$

— wo die K willkürliche Constante bedeuten — von Null verschiedene Resultate geben.

Daraus ergibt sich, wenn die auftretenden constanten Factoren in die willkürlichen Constanten einbezogen werden:

$$\alpha = K_1 g_1 z \sin p_1 t + (K_3 - K_5) g_1 z \sin p_2 t$$

$$\beta = K_0 g_1 z \sin p_1 t + (K_2 + K_4) g_1 z \sin p_2 t$$

$$\gamma = (K_1 x + K_0 y) g_1 \sin p_1 t - ([K_3 + K_5]x + [K_2 - K_4]y) \sin p_2 t$$

und daraus

$$D = \frac{8\pi\delta}{3}\int_0^a g_1 r^4 dr (K_0 \sin p_1 t + K_2 \sin p_2 t)$$

$$E = \frac{8\pi\delta}{3}\int_0^a g_1 r^4 dr (K_1 \sin p_1 t + K_3 \sin p_2 t)$$

$$\pi_1 = -\frac{8\pi\delta}{3}\cdot\frac{p_2}{A}\int_0^a g_1 r_4 dr \,.\, K_4 \cos p_2 t$$

$$\pi_2 = -\frac{8\pi\delta}{3}\cdot\frac{p_2}{A}\int_0^a g_1 r^4 dr \,.\, K_5 \cos p_2 t,$$

wo δ die Dichte bedeutet.

Dann ist — die Erde immer als Kugel vorausgesetzt :

$$\omega_1' = \frac{n}{A}\cdot\frac{8\pi\delta}{3}\int_0^a g_1 r^4 dr \Big\{ K_1 \sin p_1 t + K_3 \sin p_2 t - K_5 \cos p_2 t - \frac{n}{p_1} K_0 \cos p_1 t - \frac{n}{p_2} K_2 \cos p_2 t \Big\}$$

$$\omega_2' = \frac{n}{A}\cdot\frac{8\pi\delta}{3}\int_0^a g_1 r^4 dr \Big\{ K_0 \sin p_1 t + K_2 \sin p_2 t - K_4 \cos p_2 t - \frac{n}{p_1} K_1 \cos p_1 t - \frac{n}{p_2} K_2 \cos p_2 t \Big\}.$$

Die Werthe für p_1 und p_2 ergeben sich aus den Oberflächenbedingungen. Diese verlangen — wie in der erstcitirten Abhandlung H. Lamb's gezeigt wird — dass die von der Function χ_n abhängigen Theile der Druckcomponenten an der Oberfläche verschwinden und ebenso die von ω_n und φ_n abhängigen.

Die daraus folgenden Werte lassen aber erkennen, dass elastische Verschiebungen dieser Art keinen Einfluss auf die Polbewegung haben können, da dieselben von äusserst kurzer Periode sind. Setzt man

$$ap_1\sqrt{\frac{1}{\mu}} = \theta_1,$$

so muss θ_1 der transcendenten Gleichung

$$tg\theta_1 = \frac{3\theta_1}{3-\theta_1^2}$$

genügen, deren kleinste Lösung $\theta_1 = \pi \,.\, 1\cdot 8346\ldots$ ist.

Es war

$$\mu = \frac{1}{\delta}\cdot\frac{E}{2(1+E')}$$

gesetzt worden. Setzt man $E = 6\cdot 10^{11}$, was ungefähr dem Elasticitätsmodul für Flintglas gleichkommt und für E' den Werth $0\cdot 25$, der demselben Körper beiläufig entsprechen würde, die mittlere Dichte $\delta = 5\cdot 56$ und $a = 6\cdot 37 \,.\, 10^8$ (sämmtliche Werthe im sogenannten *CGS*-System genommen), so erhält man für p_1 den Werth $0\cdot 0005983\,\pi$. Diese Grösse stellt, wie aus der Betrachtung der Dimensionen der obigen Werthe hervorgeht, eine Winkelgeschwindigkeit per Secunde, ausgedrückt in Theilen des Radius vor. Derselben entspricht eine Periode von ungefähr $55^m 43^s$.

Von derselben Ordnung ist auch die von p_2 herrührende Periode.

Setzt man

$$ap_2\sqrt{\frac{1}{\lambda+\mu}} = \theta, \qquad ap_2\sqrt{\frac{1}{\mu}} = \theta', \qquad g(\theta) = g, \qquad g(\theta') = g',$$

so ist die aus den Oberflächenbedingungen sich ergebende Gleichung für p_2:

$$1-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\theta'^2}\left[3\frac{g_1'}{g_2'}+2\frac{g_1}{g_2}\right]+\frac{8}{25}\left[\frac{3}{\theta}\cdot\frac{\frac{dg_2}{d\theta}}{g_2}+\frac{2}{\theta'}\cdot\frac{\frac{dg_2'}{d\theta'}}{g_2'}\right]$$

$$-\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{\theta'^2}\left[\frac{3}{\theta}\cdot\frac{\frac{dg_2}{d\theta}}{g_2}\cdot\frac{g_1'}{g_2'}+\frac{2}{\theta'}\cdot\frac{\frac{dg_2'}{d\theta'}}{g_2'}\cdot\frac{g_1}{g_2}\right]=0.$$

Professor Lamb findet als kleinsten Werth — bei der Annahme $E' = 0\cdot 25$

$$\theta' = 0\cdot 840\,.\,\pi,$$

woraus sich

$$p_2 = 0\cdot 0002739\pi$$

ergibt. Diesem Werthe entspricht eine Periode von $2^h 1^m 41^s$.

Will man daher nicht ganz abnorme Elasticitätsverhältnisse annehmen, so werden die elastischen Deformationen, welche ohne Einwirkung äusserer Kräfte möglich sind, nur Schwankungen zur Folge haben, deren Perioden Bruchtheile eines Tages nicht überschreiten.

Was die von äusseren Kräften herrührenden Deformationen anbelangt, so soll, wie bereits bemerkt wurde, vorausgesetzt werden, dass der Erdkörper in jedem Momente seine Gleichgewichtsfigur annimmt.

Behält man das frühere Coordinatensystem bei und setzt die in jedem Massenelement auf die Masseneinheit wirkenden Componenten der äusseren Kräfte X, Y, Z, so sind die Gleichgewichtsbedingungen der Elasticität:

$$0=\lambda\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\mu\nabla^2(\alpha)+X$$

$$0=\lambda\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\mu\nabla^2(\beta)+Y$$

$$0=\lambda\frac{\partial\sigma}{\partial z}+\mu\nabla^2(\gamma)+Z.$$

Die Integration dieser Gleichungen ist für Kugelschalen in rechtwinkeligen Coordinaten von W. Thomson durchgeführt worden (vid. »On the rigiditty of the Earth« Phil. Trans. 1863 und »Dynamical problems regarding elastic spheroidal shells ibid.», sowie Thomson & Tait: »Treatise on Natural Philosophy«).

Existirt eine Kräftefunction W, so findet man darnach ein System particulärer Integrale, indem zunächst die Function ϑ so bestimmt wird, dass

$$\nabla^2(\vartheta) = -\frac{W}{\lambda+\mu},$$

dann sind

$$\alpha' = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}, \qquad \beta' = \frac{\partial\vartheta}{\partial y}, \qquad \gamma' = \frac{\partial\vartheta}{\partial z}$$

Lösungen des obigen Systems.

Allgemeine Integrale erhält man, wenn man dazu noch Grössen α'', β'', γ'' treten lässt, welche definirt sind durch

$$\alpha''=\sum\left(U_n-M_n r^2\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x}\right), \qquad \beta''=\sum\left(V_n-M_n r^2\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial y}\right), \qquad \gamma''=\sum\left(W_n-M_n r^2\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial z}\right).$$

U_n, V_n, W_n sind willkürliche Kugelfunctionen von der Ordnung ihrer Indices

$$\psi_{n-1}=\frac{\partial U_n}{\partial x}+\frac{\partial V_n}{\partial y}+\frac{\partial W_n}{\partial z} \text{ und } M_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{(2n-1)\,\nu+(n-1)\,\lambda}.$$

Die α'', β'', γ'' genügen den Gleichgewichtsgleichungen, wenn keine äusseren Kräfte vorhanden sind und die darin auftretenden willkürlichen Functionen werden durch die Oberflächenbedingungen bestimmt.

Im vorliegenden Falle ist

$$W = \frac{Km_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}} = \frac{Km_1}{R_1},$$

wenn m_1 die Masse, x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwerpunktes des störenden Körpers bezeichnen.

Es soll

$$\nabla^2(\vartheta) = -\frac{1}{\lambda+\mu}\cdot\frac{Km_1}{R_1}$$

sein. Man überzeigt sich leicht, dass

$$\vartheta = -\frac{K}{2}\cdot\frac{m_1}{\lambda+\mu}R_1$$

der Gleichung genügt.

Um nun, wie es erforderlich sein wird, diesen Ausdruck in eine Reihe von Kugelfunctionen zu entwickeln, setzt man

$$R_1 = \frac{1}{R_1}\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\right] = \frac{1}{R_1}(r_1^2+r^2-2r_1 r\cos\omega),$$

wo ω den Winkel (r_1, r) bedeutet.

Es ist

$$\frac{1}{R_1} = \sum\frac{r_n}{r_1^{n+1}}P_n(\cos\omega),$$

wo $P_n(\cos\omega)$ die n_{te} Kugelfunction ist, daher:

$$\frac{r_1 r}{R_1}\cos\omega = \sum\frac{r^{n+1}}{r_1^{n}}\cos\omega\, P_n(\cos\omega).$$

Unter Zuziehung der Recursionsformel

$$\cos\omega P_n(\cos\omega) = \frac{n P_{n-1}(\cos\omega)+(n+1)P_{n+1}(\cos\omega)}{2n+1}$$

findet man, wenn man die Glieder mit Kugelfunctionen gleich hoher Ordnung vereinigt

$$\frac{r_1 r}{R_1}\cos\omega = \sum\left(\frac{n}{2n-1}+\frac{n+1}{2n+3}\cdot\frac{r^2}{r_1^2}\right)\frac{r_n}{r_1^{n-1}}P_n(\cos\omega).$$

Substituirt man diesen Ausdruck, sowie die Entwicklung für $\frac{1}{R_1}$ in R_1, so findet sich

$$R_1 = r_1^2\sum\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{r_n}{r_1^{n+1}}P_n(\cos\omega)+r^2\sum\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{r_n}{r_1^{n+1}}P_n(\cos\omega).$$

Die erste Reihe kann aber offenbar in ϑ vernachlässigt werden.

Denn $r_n P_n(\cos\omega)$ ist eine räumliche Kugelfunction in x, y, z, daher auch die Differentialquotienten nach diesen Grössen ebensolche Functionen sind. Der Beitrag dieser Reihe in den α', β', γ' besteht also in räumlicher Kugelfunction der Variabeln x, y, z.

In den allgemeinen Integralen $\alpha'+\alpha''$, $\beta'+\beta''$, $\gamma'+\gamma''$ können daher diese Theile mit den willkürlichen Kugelfunctionen U_n, V_n, W_n vereinigt gedacht werden.

Man hat daher

$$\vartheta = -\frac{K}{2}\cdot\frac{m_1}{\lambda+\mu}r^2\sum\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{r_n}{r_1^{n+1}}P_n(\cos\omega).$$

Setzt man $r_n P_n(\cos\omega) = p_n$, wo p_n also eine räumliche Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist, so ergibt sich

$$\alpha' = -\frac{K}{2}\cdot\frac{m_1}{\lambda+\mu} r^2 \sum \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{r_1^{n+1}}\cdot\frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{Km_1}{\lambda+\mu}\sum\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{1}{r_1^{n+1}} r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_n}{r^{2n+1}}\right)$$

und ähnlich β und γ.

Die willkürlichen Functionen U_n, V_n, W_n sind nun so zu bestimmen, dass die den Verschiebungen $\alpha'+\alpha''$, $\beta'+\beta''$, $\gamma'+\gamma''$ entsprechenden Druckcomponenten an der Oberfläche verschwinden. Für eine Kugel erhält man nach Thomson (s. oben) dann für die Gesammtdeformation $\alpha = \alpha'+\alpha''$ u. s. w.

$$\alpha = \frac{Km_1}{[2(n+1)^2+1]\lambda-(2n+1)\mu}\left\{\frac{n[(n+2)\lambda-\mu]}{2(n-1)\mu} a^2\frac{\partial p_n}{\partial x} - \frac{(n+1)(2n+3)\lambda-(2n+1)\mu}{2(2n+1)\mu} r^2\frac{\partial p_n}{\partial x} - \frac{n\lambda}{(2n+1)\mu} r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_n}{r^{2n+1}}\right)\right\}\cdot\frac{1}{r_1^{n+1}}$$

und ähnliche Ausdrücke für β und γ.

Von diesen in den Deformationen auftretenden Gliedern können nun gewisse als für das Resultat belanglos von Vornherein ausgeschieden werden. In α kommen ausser den Gliedern mit $r^2\frac{\partial p_n}{\partial x}$ nur Kugelfunctionen vor. Die Multiplication mit der ersten Potenz einer Coordinate und Integration über die ganze Kugel bewirkt, dass von der Kugelfunction nur $\frac{\partial p_2}{\partial x}$ ein von Null verschiedenes Resultat liefert. Ausserdem können auch von den Gliedern, welche $r^2\frac{\partial p_n}{\partial x}$ enthalten, sämmtliche mit ungeraden n fortgelassen werden, denn in diesem Fall sind $xr^2\frac{\partial p_n}{\partial x}$ u. s. w. homogene Functionen ungerader Dimension, jedes Glied muss daher mindestens Eine ungerade Potenz enthalten, so dass dasselbe, über die Kugel integrirt, verschwindet.

Da

$$p_2 = \frac{3}{2} r^2\left[\left(\frac{xx_1+yy_1+zz_1}{rr_1}\right)^2 - \frac{1}{3}\right]$$

ist, so wird

$$\alpha = \frac{4\lambda-\mu}{19\lambda-5\mu}\cdot\frac{Km_1}{\mu}\cdot\frac{a^2}{r_1^3}\left[-x+\frac{3x_1}{r_1}\left(\frac{x_1}{r_1}x+\frac{y_1}{r_1}y+\frac{z_1}{r_1}z\right)\right] - Km_1 r^2\sum_{n=2,4\ldots}\frac{1}{r_1^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)(2n+3)\lambda-(2n+1)\mu}{\{[2(n+1)^2+1]\lambda-(2n+1)\mu\}2(2n+1)\mu}\cdot\frac{\partial p_n}{\partial x}.$$

$$\beta = \frac{4\lambda-\mu}{19\lambda-5\mu}\cdot\frac{Km_1}{\mu}\cdot\frac{a^2}{r_1^3}\left[-y+\frac{3y_1}{r_1}\left(\frac{x_1}{r_1}x+\frac{y_1}{r_1}y+\frac{z_1}{r_1}z\right)\right] - Km_1 r^2\sum_{n=2,4\ldots}\frac{1}{r_1^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)(2n+3)\lambda-(2n+1)\mu}{\{[2(n+1)^2+1]\lambda-(2n+1)\mu\}2(2n+1)\mu}\cdot\frac{\partial p_n}{\partial y}.$$

$$\gamma = \frac{4\lambda-\mu}{19\lambda-5\mu}\cdot\frac{Km_1}{\mu}\cdot\frac{a_2}{r_1^3}\left[-z+\frac{3z_1}{r_1}\left(\frac{x_1}{r_1}x+\frac{y_1}{r_1}y+\frac{z_1}{r_1}z\right)\right] - Km_1 r^2\sum_{n=2,4\ldots}\frac{1}{r_1^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)(2n+3)\lambda-(2n+1)\mu}{\{[2(n+1)^2+1]\lambda-(2n+1)\mu\}2(2n+1)\mu}\cdot\frac{\partial p_n}{\partial z}.$$

Diese Ausdrücke sind in die für ω_1' und ω_2' gefundenen zu substituiren. Von Wichtigkeit ist dabei der Umstand, dass von den Grössen, welche von den Deformationen abhängen, nur D, E, π_1 und π_2 bei der hier gemachten Annäherung im Resultat auftreten, ein Umstand, der — wie sich leicht zeigen lässt — zur Folge hat, dass überhaupt keine merklichen Glieder in ω_1' und ω_2' eintreten können.

Die genannten Grössen enthalten nämlich nur die Verbindungen

$$z\frac{\partial p_n}{\partial x},\quad z\frac{\partial p_n}{\partial y},\quad x\frac{\partial p_n}{\partial z},\quad y\frac{\partial p_n}{\partial z}.$$

Unter p_n hat man sich irgend ein Product von Potenzen der drei Coordinaten zu denken, dessen Dimension eine gerade ist. Die vier angegebenen Ausdrücke müssen aber, damit sie die Integration über die Kugel nicht zum Verschwinden bringt, auch in den einzelnen Coordinaten von gerader Dimension sein: der erste und dritte Ausdruck wird daher nur solche Glieder von p_n übrig lassen, in welchen

x in ungerader, y in gerader, z in ungerader Potenz vorkommen;

der zweite und vierte hingegen solche, in denen

z in gerader, y in ungerader, z in ungerader Potenz vorkommen.

Wesentlich dabei ist, dass die Potenzexponenten von x und y immer verschiedenen Charakters sind.

Die Functionen p_n sind aber symmetrisch in Bezug auf x und x_1, y und y_1, z und z_1, es werden daher auch x_1 und y_1 nur in Potenzen miteinander multiplicirt erscheinen, deren Exponenten verschiedenen Charakters sind.

Bezeichnet man mit ψ den Präcessionswinkel bezüglich einer festen Ekliptik, θ den Winkel derselben mit der xy-Ebene, φ den Winkel der Knotenlinie mit der x-Axe, mit Ω und i Knoten und Neigung der wahren Ekliptik, mit N und c Knotenlänge und Neigung der Bahnebene des störenden Körpers bezüglich der wahren Ekliptik, χ die Länge desselben in der Bahn, sämmtliche Längen von demselben Punkt der festen Ekliptik gezählt, und berücksichtigt von i und c nur erste Potenzen, so ist

$$\frac{x_1}{r_1} = \cos(\chi+\psi)\cos\varphi + \sin(\chi+\psi)\sin\varphi\cos\theta - [i\sin(\chi-\Omega)+c\sin(\chi-N)]\sin\varphi\sin\theta$$

$$\frac{y_1}{r_1} = -\cos(\chi+\psi)\sin\varphi + \sin(\chi+\psi)\cos\varphi\cos\theta - [i\sin(\chi-\Omega)+c\sin(\chi-N)]\cos\varphi\sin\theta$$

$$\frac{z_1}{r_1} = \sin(\chi+\psi)\sin\theta + [i\sin(\chi-\Omega)+c\sin(\chi-N)]\cos\theta.$$

Man sieht daraus sofort, dass nur dann, wenn die Exponenten von x und y gleichen Charakter haben, Glieder entstehen können, die von φ unabhängig sind. Es werden also nach dem Obigen in D, E, π_1 und π_2 nur Glieder auftreten, welche von der täglichen Bewegung abhängig sind, mithin werden durch das elastische Nachgeben in ω_1 und ω_2 nur Perioden hinzukommen, die nur wenig von einem Sterntag abweichen.

Bei der Ermittlung der Deformationen sowohl als auch bei der Behandlung der Volumintegrale wurde die Erde als kugelförmig vorausgesetzt, d. h. Grössen von der Ordnung Abplattung $\times$ Deformation vernachlässigt. Man sieht also, dass bei dem hier angewendeten Grad der Annäherung bei der Integration der Differentialgleichungen nur jene Glieder Perioden längerer Dauer zur Folge haben können, welche von der genannten Ordnung sind, d. h., von den Veränderungen abhängen, welche die angegebenen Deformationen bei Berücksichtigung der Abplattung der Erde erleiden.

Es soll nun untersucht werden, ob — ohne auf diese letzteren Glieder recurriren zu müssen — eine weitere Annäherung bei der Integration der Differentialgleichungen Glieder längerer Periode erzeugen kann

Vernachlässigt mann zunächst nur Glieder, in welchen die Deformationen mit einer zweiten Dimension von ω_1 oder ω_2 multiplicirt erscheinen, so hat man die Gleichungen:

$$A\frac{d\omega_1}{dt} - F\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\left[\frac{dA}{dt} + F\omega_3\right] + \omega_2\left[-\frac{dF}{dt} - (B-C)\omega_3 + \pi_3 B\right]$$
$$= L + \frac{d(E\omega_3)}{dt} + \pi_2 C\omega_3 - D\omega_3^2$$

$$B\frac{d\omega_2}{dt} - F\frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\left[\frac{dB}{dt} - F\omega_3\right] + \omega_1\left[-\frac{dF}{dt} + (A-C)\omega_3 - \pi_3 A\right]$$
$$= M + \frac{d(D\omega_3)}{dt} - \pi_1 C\omega_3 + E\omega_3^2.$$

$$C\frac{d\omega_3}{dt}+\omega_3\left(\frac{dC}{dt}-D\omega_1+E\omega_2\right)=N+\frac{d}{dt}(E\omega_1+D\omega_2)-\pi_2 A\omega_1+\pi_1 B\omega_2.$$

Aus der letzten Gleichung erhält man

$$\omega_3=\frac{1}{C}e^{-\int\left(\omega_2\frac{E}{C}-\omega_1\frac{D}{C}\right)dt}\left\{K_0+\int e^{\int\left(\omega_2\frac{E}{C}-\omega_1\frac{D}{C}\right)dt}\left[N+\frac{d}{dt}(E\omega_1+D\omega_2)+\pi_1 B\omega_2-\pi_2 A\omega_1\right]dt\right\}$$

wo K_0 eine willkürliche Constante bedeutet. ω_3 enthält daher in seinem veränderlichen Theile ausser einem von den störenden Kräften abhängigen Gliede nur solche, welche von der Ordnung der Deformationen und der Polbewegung sind. Da aber in den beiden ersten Gleichungen ω_3 nur in Verbindung mit Grössen von einer der angeführten Ordnung vorkommt, so ist es nach der jetzt zu machenden Annäherung genügend

$$\omega_3=n+n_1\int N dt$$

zu setzen. Dabei wird vorausgesetzt, dass durch die Integration nach der Zeit die Ordnung nicht geändert wird, was aus der weiter unten folgenden Ausführung der in obigen Ausdruck vorkommenden Grössen ersichtlich sein wird.

Aus den beiden Gleichungen ergibt sich durch die Sonderung der beiden Differentialquotienten:

$$\frac{d\omega_1}{dt}+\frac{\omega_1}{A}\left(\frac{dA}{dt}+F.\frac{A+B-C}{B}\omega_3\right)+\frac{\omega_2}{A}\left(-\frac{dF}{dt}-[B-C]\omega_3+\pi_3 B\right)$$
$$=\frac{1}{A}\left(L+\frac{FM}{B}+\frac{d(E\omega_3)}{dt}+\pi_2 C\omega_3-D\omega_3^2\right)$$

$$\frac{d\omega_2}{dt}+\frac{\omega_2}{B}\left(\frac{dB}{dt}-F.\frac{A+B-C}{A}\omega_3\right)+\frac{\omega_1}{B}\left(-\frac{\partial F}{dt}+[A-C]\omega_3-\pi_3 A\right)$$
$$=\frac{1}{B}\left(M+\frac{LF}{A}+\frac{d(D\omega_3)}{dt}-\pi_1 C\omega_3+E\omega_3^2\right).$$

Die Integration dieser Gleichungen soll zunächst für eine Kugel vorgenommen werden, da in diesem Falle sich die Grössen ω_1 und ω_2 sofort und ohne schrittweise Annäherung ergeben. Es sind nämlich dann die Differenzen der Trägheitsmomente und daher auch die störenden Kräfte von der Ordnung der Deformationen, so dass man zwei Gleichungen von der Form

$$\frac{d\omega_1}{dt}+P\omega_1+Q\omega_2=V$$

$$\frac{d\omega_2}{dt}+P\omega_2+Q\omega_1=V'$$

hat, bei deren Integration nur erste Potenzen der Grössen $P, \ldots V'$ zu berücksichtigen sind. Differentiirt man die erste nach t und eliminirt $\frac{d\omega_2}{dt}$ und ω_2, so erhält man demgemäss

$$\frac{d^2\omega_1}{dt^2}+\frac{d\omega_1}{dt}\left(P-\frac{1}{Q}\cdot\frac{dQ}{dt}\right)+\omega_1\left(\frac{dP}{dt}-\frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dt}\right)=\frac{dV}{dt}-\frac{V}{Q}\cdot\frac{dQ}{dt}.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist aber immer bekannt, wenn man ein particuläres der Gleichung

$$\frac{d^2\zeta_1}{dt}+\frac{d\zeta_1}{dt}\left(P-\frac{1}{Q}\cdot\frac{dQ}{dt}\right)+\zeta_1\left(\frac{dP}{dt}-\frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dt}\right)=0$$

kennt.

Nun ist aber

$$\zeta_1=e^{-\int Pdt}$$

ein solches particuläres Integral, woraus folgt, dass

$$\omega_1=K_1 e^{-\int Pdt}+e^{-\int Pdt}\int Ze^{2\int Pdt}dt,$$

wo

$$Z = e^{-\int\left(P-\frac{1}{Q}\cdot\frac{dQ}{dt}\right)dt}\left[K_2+\int e^{\int\left(P-\frac{1}{Q}\cdot\frac{dQ}{dt}\right)dt} e^{\int P dt}\left(\frac{dV}{dt}-QV'-\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt}V\right)dt\right].$$

K_1 und K_2 sind die arbiträren Constanten.

Ebenso ist

$$\omega_2 = K_1' e^{-\int P' dt} + e^{-\int P' dt}\int Z' e^{2\int P' dt} dt,$$

wo Z' von P' und Q' in gleicher Weise abhängt, wie Z von P und Q.

Mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in den Deformationen, findet man

$$Z = K_2 Q + V, \qquad Z' = K_2' Q' + V',$$

woraus

$$\omega_1 = K_1 - \int(K_1 P - K_2 Q - V)dt$$
$$\omega_2 = K_1' - \int(K_1' P' - K_2' Q' - V')dt$$

folgt.

Bezeichnet man mit A_1, B_1, C_1 die veränderlichen Theile der Trägheitsmomente, so ist jetzt

$$A = A_0 + A_1, \qquad B = A_0 + B_1, \qquad C = A_0 + C_1.$$

Es ist dann

$$P = \frac{1}{A_0}\left(\frac{dA_1}{dt}+Fn\right) \qquad P' = \frac{1}{A_0}\left(\frac{dB}{dt}-Fn\right)$$

$$Q = -\frac{1}{A_0}\cdot\frac{dF}{dt} - n\frac{B_1-C_1}{A_0} + \pi_3 \qquad Q' = -\frac{1}{A_0}\cdot\frac{dF}{dt} + n\frac{A_1-C_1}{A_0} - \pi_3$$

$$V = \frac{L}{A_0} + \frac{n}{A_0}\cdot\frac{dE}{dt} + n\pi_2 - n^2\frac{D}{A_0} \qquad V' = \frac{M}{A_0} + \frac{n}{A_0}\cdot\frac{dD}{dt} - n\pi_1 + n^2\frac{E}{A_0}.$$

Es ist weiter

$$A_1 = 2\int(y\beta+z\gamma)dm, \qquad B_1 = 2\int(z\gamma+x\alpha)dm, \qquad C_1 = 2\int(x\alpha+y\beta)dm,$$

$$D = \int(z\beta+y\gamma)dm, \qquad E = \int(x\gamma+z\alpha)dm, \qquad F = \int(y\alpha+x\beta)dm,$$

$$\pi_1 = \frac{1}{A_0}\int\left(y\frac{d\gamma}{dt}-z\frac{d\beta}{dt}\right)dm, \qquad \pi_2 = \frac{1}{A_0}\int\left(z\frac{d\alpha}{dt}-x\frac{d\gamma}{dt}\right)dm, \qquad \pi_3 = \frac{1}{A_0}\int\left(x\frac{d\beta}{dt}-y\frac{d\alpha}{dt}\right)dm.$$

Berücksichtigt man von den Deformationen nur die Glieder mit $\frac{1}{r_1^3}$, so erhält man

$$\alpha = \frac{1}{r_1^3}\cdot\frac{Km_1}{(19\lambda-5\mu)\mu}\left[(3\lambda-\mu)a^2-\frac{21\lambda-5\mu}{10}r^2\right]\left[-x+\frac{3x_1}{r_1}\left(\frac{x_1}{r_1}x+\frac{y_1}{r_1}y+\frac{z_1}{r_1}z\right)\right]$$

und analoge Ausdrücke für die beiden andern.

Eine einfache Überlegung zeigt wieder, dass in den Grössen D, E, F, π_1, π_2, π_3 die Integration über die Kugel nur solche Glieder übrig lässt, welche von der täglichen Bewegung abhängen und nur in A_1, B_1, C_1 Glieder längerer Periode enthalten sein können. Behält man nur diese bei, so findet sich

$$A_1 = \frac{7\lambda-3\mu}{(19\lambda-5\mu)\mu}\cdot Km_1\delta\cdot\frac{4\pi}{35}\cdot\frac{a^7}{r_1^3}\left(1-3\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)$$

oder mit Hinweglassung des constanten Theiles und Unterdrückung der von der Excentricität abhängigen Glieder:

$$A_1 = \frac{7\lambda-3\mu}{(19\lambda-5\mu)\mu}\cdot K_1 m\delta\frac{12\pi}{35}\cdot\frac{a^7}{r_1^3}\left(\frac{x_1}{r_1}\right)^2$$

$$B_1 = \frac{7\lambda-3\mu}{(19\lambda-5\mu)\mu}\cdot K_1 m\delta\frac{12\pi}{35}\cdot\frac{a^2}{r_1^3}\left(\frac{y_1}{r_1}\right)^2 \qquad (18)$$

$$C_1 = -\frac{7\lambda-3\mu}{(19\lambda-5\mu)\mu}\cdot K_1 m\delta\frac{12\pi}{35}\cdot\frac{a^7}{r_1^3}\left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2.$$

Vereinigt man die hier auftretenden constanten Coëfficienten mit den willkürlichen Constanten, so ist demnach

$$\omega_1 = K_1 \frac{1}{r_1^3}\left(\frac{x_1}{r_1}\right)^2 + K_2 \cdot \frac{1}{r_1^3} \int \left[\left(\frac{y_1}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2\right] dt$$

$$\omega_2 = K_1' \cdot \frac{1}{r_1^3}\left(\frac{y_1}{r_1}\right)^2 + K_2' \cdot \frac{1}{r_1^3} \int \left[\left(\frac{x_1}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2\right] dt.$$

Führt man für $\frac{x_1}{r_1}$ u. s. w. die Werthe ein und vernachlässigt die von i und c abhängigen Glieder, so erhält man nur solche periodische, welche von dem Winkel $2(\chi+\psi)$ abhängen. Die von der Abplattung nicht beeinflusste Polbewegung in Folge des elastischen Nachgebens hat eine Periode, die nahezu gleich ist der halben Umlaufszeit des störenden Körpers. Ausserdem tritt aber hier ein säculares Glied in Folge der Integration auf, und zwar in ω_1

$$\frac{K_2}{2r_1^3}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta\right).t$$

und in ω_2

$$\frac{K_2'}{r_1^2}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta\right).t,$$

wobei man θ als constant annimmt. Wäre demnach keine Abplattung vorhanden, oder besser, würden sich die Trägheitsmomente um Grössen unterscheiden, die von derselben Ordnung sind wie die elastischen Deformationen, so würden letztere im Stande sein, eine Instabilität in der Lage der Rotationsaxe im Erdkörper hervorzubringen.

Nimmt man Rücksicht auf die Abplattung, so hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} - n\nu\omega_2 &= L_1 - \omega_1 R - \omega_2 T + \nu\omega_3'\omega_2 \\ \frac{d\omega_2}{dt} + n\nu\omega_1 &= M_1 - \omega_2 R' - \omega_1 T' - \nu\omega_3'\omega_1, \end{aligned} \tag{19}$$

wobei

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{A_0} \cdot \frac{dA_1}{dt} + F\frac{2A_0 - C_0}{A_0}\omega_3 & \qquad T &= -\frac{1}{A_0}\frac{dF}{dt} + \pi_3 + \frac{\nu}{A_0}A_1 - \frac{B_1 - C_1}{A_0} \\ R' &= \frac{1}{A_0} \cdot \frac{dB_1}{dt} - F\frac{2A_0 - C_0}{A_0}\omega_3 & \qquad T' &= -\frac{1}{A_0} \cdot \frac{dF}{dt} - \pi_3 - \frac{\nu}{A_0}B_1 + \frac{A_1 - C_1}{A_0} \end{aligned} \tag{20}$$

und ω_3' der veränderliche Theil von ω_3 ist.

Während man in der ersten Annäherung $\omega_1 R$ u. s. w. vernachlässigt, hat man jetzt darin für ω_1 und ω_2 die genäherten Werthe einzuführen, und da $R, \ldots T'$ von der Ordnung der Deformationen sind, nur diejenigen Theile dieser Grössen, welche nicht von den Deformationen abhängen, also der Rotation des starren Körpers angehören. Nennt man diese Theile (ω_1) und (ω_2), so ist

$$(\omega_1) = a\cos n\nu t - b\sin n\nu t + \int L\cos n\nu(\bar{t}-t)dt - \int M\sin n\nu(\bar{t}-t)dt$$

$$(\omega_2) = a\sin n\nu t + b\cos n\nu t + \int L\sin n\nu(\bar{t}-t)dt - \int M\cos n\nu(\bar{t}-t)dt.$$

Das Hauptglied S der Störungsfunction ist

$$S = \frac{Km_1}{r_1^3}(A+B+C-3J),$$

wo J das Trägheitsmoment in Bezug auf die Gerade: Erdschwerpunkt — störender Körper ist. Daher ist

$$J = A\left(\frac{x_1}{r_1}\right)^2 + B\left(\frac{y_1}{r_1}\right)^2 + C\left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2.$$

Dabei ist auf die Deformationen natürlich keine Rücksicht genommen. Daraus folgt

$$L = y_1 \frac{\partial S}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial S}{\partial y_1} = 3Km_1 \frac{y_1 z_1}{r_1^5} (B-C)$$

$$M = z_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial S}{\partial z_1} = 3Km_1 \frac{z_1 x_1}{r_1^5} (C-A)$$

$$N = x_1 \frac{\partial S}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} = 3Km_1 \frac{x_1 y_1}{r_1^5} (A-B).$$

Man sieht übrigens aus dem letzten Ausdruck, dass ω_3' nur von der Ordnung der Deformationen ist.

Die Integrale von (19) werden dieselbe Form haben wie (2), nur hat man statt L_1 und M_1 die obigen rechten Seiten einzuführen. Dabei ist aber zu bemerken, dass jetzt bei der in L_1 und M_1 eintretenden Störungsfunction auch die Deformationen zu berücksichtigen sind, weil die davon abhängigen Glieder von derselben Ordnung wie (ω_1) R u. s. w. sind. In S hat man daher bei den Trägheitsmomenten auch die von der Zeit abhängigen Glieder mitzunehmen, und hat ferner, da die Coordinatenaxen nicht mehr mit den Hauptträgheitsaxen zusammenfallen,

$$J = A\left(\frac{x_1}{r_1}\right)^2 + B\left(\frac{y_1}{r_1}\right)^2 + C\left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2 - 2D\frac{y_1 z_1}{r_1^2} - 2E\frac{z_1 x_1}{r_1^2} - 2F\frac{x_1 y_1}{r_1^2}$$

zu setzen.

Bei der Ermittlung der Deviationsmomente zeigt es sich, dass in D nur Glieder mit $y_1 z_1$, in E nur solche mit $z_1 x_1$ und in F nur solche mit $x_1 y_1$ übrig bleiben.

Führt man dieselben in J ein und eruirt die durch die Deformationen bedingten Zusätze in L, M, N, so erhält man ausschliesslich Aggregate von Potenzen von $\frac{x_1}{r_1}, \frac{y_1}{r_1}, \frac{z_1}{r_1}$ bis zur sechsten Dimension.

Man erhält demnach ausser Gliedern, die von der täglichen Bewegung abhängen und Constanten, die vermöge der in (2) angegebenen Operation wieder auf die Euler'sche Periode führen, nur Glieder, deren Periode die Hälfte oder ein Viertel oder ein Sechstel der Umlaufszeit des störenden Körpers beträgt.

Die noch weiter in L_1 und M_1 enthaltenen Grössen [s. (1)] sind dieselben wie in der ersten Annäherung und sind bereits als belanglos erkannt worden.

Von den folgenden Gliedern der rechten Seite können wohl $\nu\omega_3'\omega_2$ und $\nu\omega_3'\omega_1$ wegen ihrer relativen Kleinheit ausser Acht gelassen werden. Es handelt sich noch um die Grössen $\omega_1 R, \ldots \omega_1 T'$. Setzt man in (20) für $A_1 \ldots . F$ ihre Werthe in den Deformationen ein und drückt durch die Symbole [. . .] nur aus, welche Verbindungen der Coordinaten des störenden Körpers in diesn Grössen eintreten, so erhält man

$$R = [x_1^2] + [x_1 y_1] \qquad T = [x_1^2] + [y_1^2] + [z_1^2] + [x_1 y_1]$$

$$R' = [y_1^2] + [x_1 y_1] \qquad T' = [x_1^2] + [y_1^2] + [z_1^2] + [x_1 y_1]$$

$$(\omega_1) = [n\nu] + [y_1 z_1] + [z_1 x_1]$$

$$(\omega_2) = [n\nu] = [y_1 z_1] + [z_1 x_1].$$

Durch $[n\nu]$ sollen Glieder bezeichnet werden, die von der Euler'schen Periode abhängen.

Bildet man darnach die Grössen $\omega_1 R$ u. s. w., so sieht man, dass nur jene Glieder frei von der täglichen Bewegung sind, die aus der Combination $[n\nu]$ einerseits und $[x_1^2]$ oder $[y_1^2]$ oder $[z_1^2]$ anderseits entstehen.

Diese Glieder werden nun von den Winkeln $2(\chi+\psi) \mp n\nu t$ abhängen; die Periode derselben ist also gleich der Summe oder Differenz der Euler'schen Periode und der halben Umlaufszeit des störenden Körpers. Die grösstmöglichste Periode wird daher eine Dauer von ungefähr sechzehn Monaten haben. Die Amplitude dieser Bewegung des Poles muss aber immer im Vergleich zu der der Euler'schen äusserst klein sein, denn als Verhältnis dieser beiden Grössen findet sich, wenn mit l die mittlere Bewegung des störenden Körpers in seiner Bahn bezeichnet wird,

$$\frac{7\lambda - 3\mu}{(19\lambda - 5\mu)\mu} Km_1 \delta . \frac{12\pi}{35} \cdot \frac{a^7}{r_1^3} \cdot \frac{\sin^2\theta}{8A_0}\left(3 \pm \frac{1}{2l}\right).$$

eine Grösse, die unter allen Umständen sehr klein bleibt. Wäre daher eine derartige Polbewegung überhaupt merklich, so müsste eine weitaus auffallendere zehnmonatliche Periode in dieser Bewegung vorhanden sein.

Da unter Polhöhe der Winkel der Lothlinie mit der Rotationsaxe verstanden wird und die Beobachtungen auch unmittelbar nur diese Grösse geben, so könnte eine Variation derselben auch durch eine Veränderlichkeit jenes ersten Elementes hervorgebracht werden. Es soll daher schliesslich noch gesucht werden, in welcher Weise die elastischen Deformationen die Richtung der Lothlinie beeinflussen. Bei dieser Frage genügt es, die nicht deformirte Erde als vollkommene Kugel vorauszusetzen.

Wenn ein Körper aus Schichten gleicher Dichte δ besteht, deren Gleichung gegeben ist durch

$$r + r_0[1+\varepsilon(U_0+U_1+U_2+\dots)],$$

wo r_0 das Argument jener Function ist, durch welche die Dichte dargestellt wird, und die U harmonische Flächenfunctionen von der Ordnung ihrer Indices (ausserdem beliebige Functionen von r_0), gehört ferner die Oberfläche auch zu jenen Flächen gleicher Dichte und weichen diese so wenig von der Kugelform ab, dass zweite Potenzen von ε vernachlässigt werden können, so ist nach Laplace das Potential dieses Körpers auf einen ausserhalb desselben gelegenen Punkt

$$W = \frac{m}{r'} + 4\pi\varepsilon \sum_{2}^{\infty}{}_{n} \frac{1}{r'^{\,n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} \int_{0}^{a_0} \delta \frac{\partial (r^{n+3} U'_n)}{\partial r_0}\, dr_0,$$

wenn r', l', b' die Polarcoordinaten des angezogenen Punktes sind, m die Masse des Körpers bedeutet und U'_n aus U_n erhalten wird, indem in letztere Function l' und b' als Argumente gesetzt werden.

Im vorliegendem Falle sind die $U\varepsilon$ die nach dem Radius genommenen Componenten der elastischen Deformationen.

Dieselben sind nach Thomson gegeben durch

$$\frac{Km_1}{r_1^{n+1}} \cdot \frac{n\{n[(n+2)\lambda-\mu]a_0^2-(n-1)[(n+1)\lambda-\mu]r^2\}}{2(n-1)\mu\{[2(n+1)^2+1]\lambda-(2n+1)\mu\}}\, r^{n-1} s_n,$$

wo s_n die der räumlichen Kugelfunction p_n entsprechende harmonische Flächenfunction bezeichnet.

Beschränkt man sich auf $n = 2$, so erhält man, da

$$r = r_0(1+\varepsilon U_2) = r_0\left[1 + \frac{2(4\lambda-\mu)a_0^2-(3\lambda-\mu)r_0^2}{\mu(19\lambda-5\mu)}\, s_2\right]$$

ist und δ nicht von r_0 abhängt,

$$W = \frac{m}{r'} + \frac{4\pi\delta}{5r'^{\,3}} Km_1 a^7 \frac{5\lambda-\mu}{\mu(19\lambda-\mu)}\, s_2.$$

l' und b' seien jetzt geographische Länge und Breite des angezogenen Punktes, l_1 und b_1 Stundenwinkel und Declination des störenden Körpers, dann ist

$$s_2 = \left(\frac{3}{2}\sin^2 b' - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\sin^2 b_1 - \frac{1}{2}\right) + 3\sin b'\cos b'\sin b_1\cos b_1\sin(l'-l_1) + \frac{3}{4}\cos^2 b'\cos^2 b_1\cos 2(l'-l_1).$$

Setzt man $r'\cos b' = \xi$, $r'\sin b' = \eta$, so ist

$$W = \frac{m}{r'} + \frac{4\pi\delta}{5r'^{\,5}} Km_1 a^7 \frac{5\lambda-\mu}{\mu(19\lambda-\mu)} \left\{\left(\frac{3}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\sin^2 b_1 - \frac{1}{2}\right) + 3\xi\eta\sin b_1\cos b_1\cos(l'-l_1) + \frac{3}{4}\xi^2\cos^2 b_1\cos 2(l'-l_1)\right\}.$$

Die Gleichung einer Niveaufläche ist $W =$ Const. Setzt man in derselben l' constant, so stellt dieselbe die Gleichung der Schnittcurve in der durch l' bestimmten Meridianebene vor. Da es sich bei der Variation der Polhöhe blos um die in die Meridianebene fallende Componente der Richtungsänderung der Normalen handelt, so genügt die Betrachtung dieser Curve. Ist b'' der Winkel der veränderten Normalenrichtung mit der des Äquators, so ist

$$tg\,b'' = -\frac{d\xi}{d\eta}.$$

Setzt man

$$W = \frac{m}{r} + W_2,$$

so ist

$$tg\,b'' = \frac{\eta}{\xi}\left(1 + \frac{1}{\xi}\cdot\frac{r'^3}{m}\cdot\frac{\partial W_2}{\partial\xi} - \frac{1}{\eta}\cdot\frac{r'^3}{m}\cdot\frac{\partial W_2}{\partial\eta}\right).$$

Da aber

$$tg\,b' = \frac{\eta}{\xi}$$

ist, so folgt

$$b''-b' = \frac{r'^3}{m}\left(\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial W_2}{\partial\xi} - \frac{1}{\eta}\cdot\frac{\partial W_2}{\partial\eta}\right)\sin 2b'.$$

Unterdrückt man wieder die Glieder, die von der täglichen Bewegung abhängen und setzt schliesslich $r' = a_0$, so erhält man

$$b''-b' = -\frac{9}{10}Km_1a^2\cdot\frac{5\lambda-\mu}{\mu(19\lambda-5\mu)}(3\cos^2 b_1 - 1)\sin 2b',$$

also eine Variation mit halbjähriger, respective halbmonatlicher Periode; eine Veränderlichkeit, die aber von der Polhöhe selbst abhängt und an den Polen und am Äquator verschwindet.

Zeitschrift/Journal: Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.

Jahr/Year: 1897

Band/Volume: 64

Autor(en)/Author(s): Hillebrand Carl

Artikel/Article: Über den Einfluss der Elasticität auf die Schwankungen der Polhöhe. 283-308