DIE SYMMETRISCHEN FUNCTIONEN

DER

GEMEINSCHAFTLICHEN VARIABLENPAARE TERNÄRER FORMEN.

TAFELN DER TERNÄREN SYMMETRISCHEN FUNCTIONEN VOM GEWICHT 1 BIS 6.

VON

DR. FR. JUNKER

IN URACH.

(VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 15. OCTOBER 1896.)

Bekanntlich lässt sich jede symmetrische Function $\Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots$ von beliebigen Variablenpaaren $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, \ldots$ durch die Elementarfunctionen $\Sigma x_1, \Sigma y_1, \Sigma x_1 x_2, \Sigma x_1 y_2, \Sigma y_1 y_2, \ldots$, bezw. einförmigen Functionen $\Sigma x_1, \Sigma y_1, \Sigma x_1^2, \Sigma x_1 y_1, \Sigma y_1^2, \ldots$ derselben darstellen. Umgekehrt kann auch jede Productcombination von elementaren durch solche der einförmigen Functionen und umgekehrt oder als lineare Function von mehrförmigen Functionen dargestellt werden. Auf diese Weise lassen sich für jede Art von symmetrischen Functionen vom gleichen Gewicht 6 Tabellen aufstellen, in denen die Productcombinationen der einen Art durch solche der andern oder durch symmetrische Functionen und umgekehrt ausgedrückt sind. Wir haben diese Tabellen für die Functionen vom Gewicht 1—6 incl. berechnet und in Abschnitt I neben den nothwendigsten Definitionen und Erklärungen auch die Methoden und Operationen zusammengestellt, nach denen die Berechnung stattgefunden hat. Gleichzeitig sind auch gewisse Eigenschaften dieser Tabellen angegeben, und ist gezeigt worden, wie die letzteren zur Ermittlung der identischen Relationen zwischen den Elementarfunctionen und einförmigen Functionen einer endlichen Anzahl von Gruppen benützt werden können.

Betrachtet man nun die Elemente $x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots$ als die Coordinaten der $r = mn$ Schnittpunkte zweier ebenen algebraischen Curven f und φ von den Ordnungen m und n, so tritt uns in erster Linie die Aufgabe entgegen, die symmetrischen Functionen der Schnittpunkte derselben, sowie die andere, die Coordinaten der letzteren zu berechnen. Hiebei begegnen wir Functionen, die wie die Resultante zweier algebraischen Gleichungen nach zwei Seiten hin symmetrisch sind und die ich deshalb zweifach symmetrisch genannt habe. Die Untersuchungen in Abschnitt II verfolgen deshalb den Zweck, die zweifach symmetrischen Functionen zu studiren und gewisse Differentialprocesse für dieselben aufzustellen und letztere zur Berechnung der symmetrischen Functionen der Schnittpunkte zweier Curven zu benützen.

Hierin anschliessend sind in Abschnitt III auch die Bedingungen ermittelt worden, dass drei ebene Curven durch mehrere an beliebigen Stellen befindliche Punkte gemeinschaftlich hindurchgehen. Dieselben sind durch gewisse symmetrische Functionen ausgedrückt und meines Wissens noch nicht aufgestellt worden. Hiezu sei noch bemerkt, dass die Methoden, welche zur Aufstellung derselben geführt haben, auch zur Ermittlung der Bedingungen benützt werden können, dass eine ebene algebraische Curve einen, zwei, ..., i Doppelpunkte an beliebigen nicht bekannten Stellen besitzt.

I. Abschnitt.

Die symmetrischen Functionen eines Systems von Variablenpaaren. Tabellen der symmetrischen Functionen des ternären Gebietes.

§. 1.

Die einfach symmetrischen Functionen eines Systems von Variablenpaaren. Definitionen und Erklärungen.

Zwei ternäre Formen $f = a_x^m$, $\varphi = b_x^n$ vom Grad m, beziehungsweise n, haben bekanntlich $r = mn$ Variablenpaare — Gruppen von je zwei Elementen —

$$x_1\, y_1, \quad x_2\, y_2, \ldots \ldots x_r\, y_r$$

gemeinschaftlich, die wir im Sinne der Geometrie als die (nicht homogenen) Coordinaten der $r = mn$ Schnittpunkte der beiden ebenen Curven f und φ betrachten können.

Eine Function dieser Gruppen, die sich nicht ändert, wenn man die Elemente zweier derselben vertauscht, heisst eine symmetrische Function jener Grössen. So ist beispielsweise

$$\Sigma x_1 y_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

eine symmetrische Function der drei Gruppen

$$x_1 y_1, \quad x_2 y_2, \quad x_3 y_3.$$

Wir betrachten zunächst nur ganze Functionen dieser Art und begnügen uns mit der Bemerkung, dass sich jede gebrochene Function der Gruppen $x_i\, y_i$ als Quotient zweier ganzen Functionen darstellen lässt.

Eine symmetrische Function von r Gruppen $x_1 y_1$, $x_2 y_2, \ldots$, $x_r y_r$, welche in jedem Glied die Elemente von i derselben enthält, heisst eine i-förmige oder auch i-theilige Function. Eine solche ist

$$J = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1}\, x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i} \tag{1}$$

Je nachdem $i = 1, 2, 3, \ldots, r$ ist, unterscheiden wir demnach einförmige, zweiförmige, ..., r-förmige oder auch eintheilige, zweitheilige, ..., r-theilige Functionen.

Die Zahlen

$$q_1 = \alpha_1 + \beta_1, \quad q_2 = \alpha_2 + \beta_2, \ldots \ldots q_i = \alpha_i + \beta_i$$

bezeichnet man als Theilgewichte und die weiteren

$$p_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \ldots + \alpha_i, \quad p_2 = \beta_1 + \beta_2 + \ldots \ldots + \beta_i$$

als Reihengewichtszahlen der zweireihigen Function J.

Da man den Ausdruck für die symmetrische Function erhält, indem man die unteren Indices irgend eines Gliedes auf alle möglichen Arten vertauscht und die erhaltenen Ausdrücke addirt, so ist J auch eine homogene Function vom Grad p_1, bzw. p_2 hinsichtlich der Elemente der Reihen $x_1\, x_2 \ldots x_r$, bzw. $y_1\, y_2 \ldots y_r$.

Das Totalgewicht oder das Gewicht der Function J ist dann angegeben durch

$$Q = q_1 + q_2 + \ldots \ldots + q_i = p_1 + p_2.$$

Eine symmetrische Function, welche linear ist hinsichtlich der Elemente jeder Gruppe, die sie enthält, für welche also

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_i = 1$$

ist, ist eine Elementarfunction derselben. Beispielsweise ist

$$\Sigma x_1 y_2 = x_1 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_3 y_2$$

eine zweiförmige Elementarfunction der drei Variablenpaare

$$x_1 y_1, \quad x_2 y_2, \quad x_3 y_3.$$

Bei r Variablenpaaren $x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_r y_r$ unterscheiden wir $\sigma = \frac{r(r+3)}{2}$ Elementarfunctionen, die wir in folgender Weise bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned}
&\Sigma x_1 = a_1, \quad \Sigma y_1 = a_2, \\
&\Sigma x_1 x_2 = a_{11}, \quad \Sigma x_1 y_2 = a_{12}, \quad \Sigma y_1 y_2 = a_{22}, \\
&\Sigma x_1 x_2 x_3 = a_{111}, \quad \Sigma x_1 x_2 y_3 = a_{112}, \quad \Sigma x_1 y_2 y_3 = a_{122}, \quad \Sigma y_1 y_2 y_3 = a_{222}, \\
&\qquad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
&\qquad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
&\Sigma x_1 x_2 \ldots x_r = a_{r,0}, \quad \Sigma x_1 x_2 \ldots x_{r-1} y_r = a_{r-1,1}, \ldots \Sigma y_1 y_2 \ldots y_r = a_{0,r}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Da die Anzahl der in denselben enthaltenen Elemente $x_i y_i$ nur $2r$ beträgt, so folgt, dass die Elementarfunctionen durch $\sigma - 2r = \frac{r.(r-1)}{2}$ identische Relationen untereinander zusammenhängen müssen. Auf das Vorhandensein dieser Relationen hat zuerst Schläfli in seiner berühmten Arbeit vom Jahre 1852 * hingewiesen, ohne auf die Frage nach ihrer Darstellung näher einzugehen. Wie diese gebildet werden können, habe ich später in mehreren Arbeiten ** gezeigt und gleichzeitig auch bewiesen, dass sie die Bedingungen repräsentiren, dsss eine ternäre Form in lineare Factoren zerfällt. Herr Brill und Herr Gordan haben in neuerer Zeit die Bildung der Relationen zurückgeführt auf Fragen der Invariantentheorie. Wie diese Relationen direct auch aus den Tabellen f entnommen werden können, werde ich weiter unten besprechen.

In ähnlicher Weise wie die Elementarfunctionen seien auch die einförmigen Functionen (welche in jedem Glied nur die Elemente einer Gruppe enthalten) durch den deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}$ und untergesetzte Indices 1, 2 bezeichnet. Wir setzen entsprechend den Functionen (2)

$$\begin{aligned}
&\Sigma x_1 = \mathfrak{a}_1, \quad \Sigma y_1 = \mathfrak{a}_2, \\
&\Sigma x_1^2 = \mathfrak{a}_{11}, \quad \Sigma x_1 y_1 = \mathfrak{a}_{12}, \quad \Sigma y_1^2 = \mathfrak{a}_{22}, \\
&\Sigma x_1^3 = \mathfrak{a}_{111}, \quad \Sigma x_1^2 y_1 = \mathfrak{a}_{112}, \quad \Sigma x_1 y_1^2 = \mathfrak{a}_{122}, \quad \Sigma y_1^3 = \mathfrak{a}_{222}, \\
&\qquad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
&\qquad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
&\Sigma x_1^r = \mathfrak{a}_{r,0}, \quad \Sigma x_1^{r-1} y_1 = \mathfrak{a}_{r-1,1}, \ldots \Sigma x_1^{r+1} = \mathfrak{a}_{r+1,0} \ldots
\end{aligned} \tag{3}$$

Während die Zahl der Elementarfunctionen (2) bei einer endlichen Anzahl von Gruppen eine endliche ist, ist die der einförmigen Functionen unendlich gross. Wir schliessen deshalb, dass die letzteren durch unendlich viele identische Relationen untereinander verbunden sind. Auch sie können direct, wie wir im §. 6 sehen werden, aus den Tabellen b und d entnommen werden.

Eine symmetrische Function, welche nur eine Reihe von Elementen, z. B. $x_1 x_2 \ldots x_r$ enthält, ist eine einreihige oder binäre Function. Eine Function, welche die beiden Reihen $x_1 x_2 \ldots x_r$; $y_1 y_2 \ldots y_r$ zugleich enthält, ist eine zweireihige oder ternäre symmetrische Function.

* Denkschriften der kaiserl. Akademie. Mathem.-naturw. Cl. Bd. IV.

** Mathem. Annalen, Bd. 38, 43 und 45.

Alle ganzen symmetrischen Functionen, welche hinsichtlich der Reihengewichtszahlen p_1 und p_2 übereinstimmen, bilden ein System von isobarischen Functionen, deren Anzahl stets eine endliche Grösse ist.

Für $p_1 = 2$, $p_2 = 2$ erhalten wir beispielsweise die isobarischen Functionen vom Gewicht 4:

$$\begin{array}{llll} \Sigma x_1^2 y_1^2; & & & \\ \Sigma x_1^2 y_1 y_2, & \Sigma x_1 y_1^2 x_2, & \Sigma x_1^2 y_2^2, & \Sigma x_1 y_1 x_2 y_2; \\ \Sigma x_1^2 y_2 y_3, & \Sigma x_1 y_1 x_2 y_3, & \Sigma y_1^2 x_2 x_3; & \\ \Sigma x_1 x_2 y_3 y_4. & & & \end{array} \tag{4}$$

In einem Product von elementaren oder einförmigen Functionen

$$a_{\varkappa_1\lambda_1}^{\pi_1} a_{\varkappa_2\lambda_2}^{\pi_2} \ldots \quad \text{oder} \quad \mathfrak{a}_{\varkappa_1\lambda_1}^{\pi_1} \mathfrak{a}_{\varkappa_2\lambda_2}^{\pi_2} \ldots$$

seien die Zahlen

$$p_1 = \varkappa_1\pi_1 + \varkappa_2\pi_2 + \ldots\ldots, \qquad p_2 = \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 + \ldots\ldots$$

ebenfalls als Reihengewichtszahlen eines solchen bezeichnet. Alle Producte von elementaren bzw. einförmigen Functionen, welche in diesen Zahlen übereinstimmen, heissen isobarische Productcombinationen der ersteren bezw. der letzteren. Wir werden sehen, dass die Productcombinationen der elementaren, bzw. einförmigen Functionen eindeutig aufeinander und auf die isobarischen symmetrischen Functionen von denselben Reihengewichtszahlen bezogen werden können. Infolge dessen können wir diese drei Arten von isobarischen Functionen in sechs Tabellen zusammenstellen, in denen die Functionen einer Art durch jede der beiden anderen ausgedrückt sind. Wir haben diese Tabellen nach den in den folgenden Paragraphen angegebenen Methoden für die symmetrischen Functionen von Gewicht 1 bis 6 berechnet und dabei alle diejenigen Tabellen weggelassen, deren Functionen sich durch Vertauschung der Indices 1 und 2 aus einer anderen ergeben. Für die Functionen vom Gewicht 5 ist beispielsweise nur die Berechnung der Functionen von den Reihengewichten

$$p_1 = 5,\ p_2 = 0; \quad p_1 = 4,\ p_2 = 1; \quad p_1 = 3,\ p_2 = 2$$

nöthig gewesen. Die übrigen Functionen von den Gewichtszahlen

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3; \quad p_1 = 1,\ p_2 = 4; \quad p_1 = 0,\ p_2 = 5$$

ergeben sich aus den ersteren durch einfache Vertauschung der unteren Indices 1 und 2.

§. 2.

Die einförmigen und die elementaren Functionen.

1. Bekanntlich lässt sich jede einförmige Function als ganze Function der Elementarfunctionen und umgekehrt darstellen. Die hiebei resultirenden Recursionsformeln heissen nach ihrem Entdecker die Newton'schen und sind für r Gruppen von je zwei Variablenpaaren angegeben durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= a_1 \\ \mathfrak{a}_2 &= a_2 \\ \mathfrak{a}_{11} &= a_1^2 - 2a_{11} \\ \mathfrak{a}_{12} &= a_1 a_2 - a_{12} \\ \mathfrak{a}_{22} &= a_2^2 - 2a_{22} \\ \mathfrak{a}_{111} &= a_1^3 - 3a_1 a_{11} + 3a_{111} \\ \mathfrak{a}_{112} &= a_1^2 a_2 - a_1 a_{12} - a_2 a_{11} + a_{112} \\ \mathfrak{a}_{122} &= a_1 a_2^2 - a_2 a_{12} - a_1 a_{22} + a_{122} \\ \mathfrak{a}_{222} &= a_2^3 - 3a_2 a_{22} + 3a_{222} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \mathfrak{a}_1 \\
a_2 &= \mathfrak{a}_2 \\
a_{11} &= \frac{1}{2!}\{\mathfrak{a}_1^2-\mathfrak{a}_{11}\} \\
a_{12} &= \frac{1}{1!\,1!}\{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_{12}\} \\
a_{22} &= \frac{1}{2!}\{\mathfrak{a}_2^2-\mathfrak{a}_{22}\} \\
a_{111} &= \frac{1}{3!}\{\mathfrak{a}_1^3-3\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}+2\mathfrak{a}_{111}\} \\
a_{112} &= \frac{1}{2!\,1!}\{\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2-2\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{12}-\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}+2\mathfrak{a}_{112}\} \\
a_{122} &= \frac{1}{1!\,2!}\{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2^2-2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{12}-\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{22}+2\mathfrak{a}_{122}\} \\
a_{222} &= \frac{1}{3!}\{\mathfrak{a}_2^3-3\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{22}+2\mathfrak{a}_{222}\}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Allgemeine Endformeln für dieselben hat in neuerer Zeit Herr Mac Mahon aufgestellt:

$$
\begin{aligned}
(-1)^{\varkappa+\lambda-1}\frac{(\varkappa+\lambda-1)!}{\varkappa!\,\lambda!}\mathfrak{a}_{\varkappa\lambda} &= \Sigma(-1)^{\Sigma\pi-1}\frac{(\Sigma\pi-1)!}{\pi_1!\,\pi_2!\dots}\,a_{\varkappa_1\lambda_1}^{\pi_1}\,a_{\varkappa_2\lambda_2}^{\pi_2}\dots \\
(-1)^{\varkappa+\lambda-1}a_{\varkappa\lambda} &= \Sigma\frac{(-1)^{\Sigma\pi-1}}{\pi_1!\,\pi_2!\dots}\left\{\frac{(\varkappa_1+\lambda_1-1)!}{\varkappa_1!\,\lambda_1!}\right\}^{\pi_1}\left\{\frac{(\varkappa_2+\lambda_2-1)!}{\varkappa_2!\,\lambda_2!}\right\}^{\pi_2}\dots\mathfrak{a}_{\varkappa_1\lambda_1}^{\pi_1}\mathfrak{a}_{\varkappa_2\lambda_2}^{\pi_2}\dots,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

die in analoger Weise hergeleitet werden können, wie die entsprechenden Formeln von Waring,* durch welche die Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung durch die Elementarfunctionen derselben und umgekehrt dargestellt sind. Diese letzteren erhalten wir auch aus (3), indem wir $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\ldots=0$ setzen:

$$
\begin{aligned}
(-1)^{\varkappa-1}\frac{1}{\varkappa}\,\mathfrak{a}_\varkappa &= \Sigma(-1)^{\Sigma\pi_1-1}\frac{(\Sigma\pi-1)!}{\pi_1!\,\pi_2!\dots}\,a_{\varkappa_1}^{\pi_1}a_{\varkappa_2}^{\pi_2}\dots \\
(-1)^{\varkappa-1}a_\varkappa &= \Sigma\frac{(-1)^{\Sigma\pi-1}}{\pi_1!\,\pi_2!}\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right)^{\pi_1}\left(\frac{1}{\varkappa_2}\right)^{\pi_2}\dots\mathfrak{a}_{\varkappa_1}^{\pi_1}\mathfrak{a}_{\varkappa_2}^{\pi_2}\dots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

2. Ist die Darstellung der Potenzsumme $\mathfrak{a}_p$ durch Elementarfunctionen, bzw. die der Elementarfunction a_p durch Potenzsummen bekannt

$$\mathfrak{a}_p=\varphi(a), \qquad a_p=f(\mathfrak{a}),$$

so erhält man die nächst höheren Functionen dieser Art auch durch die Formeln

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{p+1} &= \frac{1}{p}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}(a_1^2-2a_{11})+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{11}}(a_1a_{11}-3a_{111})+\ \ldots\ +\frac{\partial\varphi}{\partial a_{p,0}}a_1a_{p,0}\right\} \\
\mathfrak{a}_{p+1} &= \frac{1}{p+1}\left\{\mathfrak{a}_1 f-\frac{\partial f}{\partial\mathfrak{a}_1}\mathfrak{a}_{11}-2\frac{\partial f}{\partial a_{11}}\mathfrak{a}_{111}-\ldots-p\frac{\partial f}{\partial\mathfrak{a}_p}\mathfrak{a}_{p+1}\right\}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

* Misc. analyt. 1762 und Medit. algebr. 1770, p. 225.

die wir auch in der Form schreiben können:

$$\mathfrak{a}_{p+1} = \frac{1}{p}\left\{\Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial a_{i,0}}(a_1 a_{i,0} - (i+1)a_{i+1,0}\right\}_{i=1}^{i=p}$$

$$a_{p+1} = \frac{1}{p+1}\left\{\mathfrak{a}_1 f - \Sigma i \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{i,0}} \mathfrak{a}_{i+1,0}\right\}_{i=1}^{i=p}. \tag{6}$$

Diese Operationen bilden ein einfaches Mittel zur successiven Berechnung der Potenzsummen, bezw. Elementarfunctionen einer Reihe von Veränderlichen vom Gewicht 1, 2, 3, 4,. . .

Für $p = 1$ ist $\mathfrak{a}_1 = a_1$, daher

$$\mathfrak{a}_2 = a_1^2 - 2a_{11}, \qquad a_2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{a}_{11}).$$

Hieraus ergibt sich direct:

$$\mathfrak{a}_{111} = \frac{1}{2}\{2a_1(a_1^2 - 2a_{11}) - 2(a_1 a_{11} - 3a_{111})\} = a_1^3 - 3a_1 a_{11} + 3a_{111}$$

$$a_{111} = \frac{1}{3}\left\{\frac{\mathfrak{a}_1}{2}(\mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{a}_{11}) - \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{a}_{111}\right\} = \frac{1}{3!}\{\mathfrak{a}_1^3 - 3\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11} + 2\mathfrak{a}_{111}\}$$

. . . .

. . . .

3. Setzen wir wiederum voraus, die Summe der p^{ten} Potenzen einer Reihe von Veränderlichen, bzw. die p-förmige Elementarfunction derselben sei durch elementare bzw. einförmige Functionen ausgedrückt:

$$\mathfrak{a}_p = \Sigma x_1^p = \varphi(a)$$

$$a_p = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_p = f(\mathfrak{a}),$$

so erhalten wir hieraus alle weiteren einförmigen bzw. elementaren Functionen vom Totalgewicht p und den Reihengewichten $p-1,\ 1;\ p_1-2,\ 2;\ p_1-3,\ 3;\ldots$ nach einmaliger, zweimaliger, dreimaliger,.... Anwendung der Processe:

$$\Phi_x^y = \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} a_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial a_{11}} a_{12} + \frac{\partial\varphi}{\partial a_{111}} a_{112} + \ldots$$
$$+ 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a_{12}} a_{22} + \frac{\partial\varphi}{\partial a_{112}} a_{122} + \ldots\right) + 3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a_{122}} a_{222} + \frac{\partial\varphi}{\partial a_{1122}} a_{1222} + \ldots\right) + \ldots$$

$$\Psi_x^y = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_1} \mathfrak{a}_2 + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{12}} \mathfrak{a}_{22} + \ldots \tag{7}$$
$$+ 2\left(\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{11}} \mathfrak{a}_{12} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{112}} \mathfrak{a}_{122} + \ldots\right) + 3\left(\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{111}} \mathfrak{a}_{112} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{1112}} \mathfrak{a}_{1122} + \ldots\right) + \ldots$$

die wir auch in der Form schreiben können:

$$\Phi_x^y = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \frac{\partial\varphi}{\partial a_{\varkappa\lambda}}(1+\lambda) a_{\varkappa-1,\lambda+1}$$

$$\Psi_x^y = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{\varkappa,\lambda}} \varkappa \mathfrak{a}_{\varkappa-1,\lambda+1}. \tag{8}$$

Diese Processe habe ich in einer früheren Arbeit aufgestellt.[*]

Ausgehend von der Darstellung der Potenzsumme:

$$\Sigma x_1^4 = a_1^4 - 4a_1^2 a_{11} + 2a_{11}^2 + 4a_1 a_{111} - 4a_{1111}$$

[*] Mathem. Annalen, Bd. 45, p. 17 ff.

gelangen wir mit Hilfe der Operation Φ_x^y direct zu den weiteren Formeln:

$$\Sigma x_1^3 y_1 = a_1^3 a_2 - 2a_1 a_2 a_{11} - a_1^2 a_{12} + a_{11} a_{12} + a_2 a_{111} + a_1 a_{112} - a_{1112}$$

$$\Sigma x_1^2 y_1^2 = a_1^2 a_2^2 + \frac{1}{3}\{-2a_1^2 a_{22} - 2a_2^2 a_{11} - 4a_1 a_2 a_{12} + a_{12}^2 + 2a_{11} a_{22} + 2a_1 a_{122} + 2a_1 a_{112} - 2a_{1122}\}.$$

Die Processe (7), bezw. (8) sind bei der Berechnung der Tabellen stets mit Vortheil benützt worden.

§. 3.

Die isobaren Productcombinationen von elementaren, beziehungsweise einförmigen Functionen. Construction der Tabellen *a)* und *b)*.

Jeder Elementarfunction

$$a_{\varkappa\lambda} = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_\varkappa y_{\varkappa+1} \ldots y_{\varkappa+\lambda}$$

lässt sich diejenige einförmige Function

$$\mathfrak{a}_{\varkappa\lambda} = \Sigma x_1^\varkappa y_1^\lambda$$

eindeutig zuweisen, welche mit ihr isobar ist und umgekehrt. In Folge dieser eindeutigen Zuordnung entspricht auch jeder Productcombination von Elementarfunctionen $a_{\varkappa_1\lambda_1}^{\pi_1} a_{\varkappa_2\lambda_2}^{\pi_2} \ldots$ nur eine einzige Combination von einförmigen Functionen $\mathfrak{a}_{\varkappa_1\lambda_1}^{\pi_1} \mathfrak{a}_{\varkappa_2\lambda_2}^{\pi_2} \ldots$, deren Factoren mit denen der ersteren isobar sind und umgekehrt. Hieraus folgt der Satz:

Die Anzahl sämmtlicher isobaren Productcombinationen von Elementarfunctionen von den Reihengewichtszahlen p_1 und p_2 ist gleich der Anzahl aller Productcombinationen von einförmigen Functionen von denselben Gewichtszahlen p_1 und p_2. Hiebei ist vorausgesetzt, dass die Gruppenzahl r beliebig hoch angenommen wird.

Nun lassen sich nach den Methoden in §. 2 die Elementarfunctionen durch einförmige und umgekehrt darstellen. Wir erhalten deshalb auch diese oder jene Art von isobarern Productcombinationen ausgedrückt durch die Combinationen der andern Art, indem wir die Newton'schen Formeln in geeigneter Weise miteinander multipliciren. Man stellt diese Producte am einfachsten in zwei Tabellen a und b zusammen, in welchen einerseits die isobaren Productcombinationen der einförmigen Functionen durch solche der elementaren, anderseits die der Elementarfunctionen durch solche der einförmigen Functionen ausgedrückt sind. Bei der Anordnung derselben in den Tabellen sind stets zuerst die Combinationen vom Grad p_1+p_2, dann diejenigen vom Grad p_1+p_2-1, p_1+p_2-2, ... 3, 2, 1 von oben nach unten, bezw. von links nach rechts angeschrieben worden. Hiebei ist zu bemerken, dass in der Tabelle a, bezw. b stets nur die letzte Combiation $\mathfrak{a}_{p_1p_2} = \Sigma x_1^{p_1} y_1^{p_2}$, bezw. $a_{p_1p_2} = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_{p_1} y_{p_1+1} \ldots y_{p_1+p_2}$ nach den in §. 2 angegebenen Methoden zu berechnen ist, während die übrigen Productcombinationen durch Entnahme der Factoren aus den früheren Tabellen gebildet werden können.

Hat man nur eine Gruppe von Elementen $x_1 y_1$, so erhalten wir auch nur die Elementarfunctionen a_1 und a_2 vom Gewicht 1, während alle übrigen Elementarfunctionen $a_{11} a_{12} a_{22}, \ldots$ identisch verschwinden. Setzen wir alsdann noch $x_1 = y_1 = 1$, so nehmen auch sämmtliche einförmige Functionen $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_{11} \mathfrak{a}_{12} \mathfrak{a}_{22} \ldots$ und damit auch deren Productcombinationen den Werth 1 an. Infolge dessen steht auch in jedem Feld der ersten Colonne der Tabelle *a)* die Zahl 1. Da unter der obigen Voraussetzung, mit Ausnahme von $a_1^{p_1} a_2^{p_2}$, sämmtlicne Productcombinationen von elementaren Functionen der Tabellen *b)* verschwinden, so ergibt sich für dieselben die Regel:

Die algebraische Summe der Zahlencoëfficienten jeder Zeile in den Tabellen *b)* ist stets gleich Null.

Da für $r = 1$ auch jede höhere zweiförmige, dreiförmige, i-förmige Function identisch verschwindet, so gilt diese Regel auch für die Tabellen *d)*, in welchen die mehrförmigen Functionen durch isobare Producte der einförmigen Functionen ausgedrückt sind. Diese Regel kann als Controle der Rechnung bei der Bildung der Tabellen benützt werden.

§. 4.

Die primitiven Functionen. Transformation und Coincidenz von Reihen.

1. Sind $p_1 q_1 r_1 \ldots,\ p_2 q_2 r_2 \ldots, \ldots,\ p_r q_r r_r \ldots$ r Gruppen von beliebig vielen Elementen, so bezeichnen wir als primitive Function* derselben eine solche, welche linear ist hinsichtlich der Elemente jeder Reihe, die sie enthält.

Beispielsweise sind

$$\Sigma p_1,\quad \Sigma q_1,\quad \Sigma r_1;$$
$$\Sigma p_1 q_1,\quad \Sigma p_1 q_2,\quad \Sigma p_1 r_1,\quad \Sigma p_1 r_2,\quad \ldots;$$
$$\Sigma p_1 q_1 r_1,\quad \Sigma p_1 q_1 r_2,\quad \ldots,\quad \Sigma p_1 q_2 r_3,\quad \ldots$$

primitive Functionen vom Gewicht 1, 2, 3,....

Ein Product von primitiven Functionen, welche keine Reihe gemeinschaftlich enthalten, ist eine primitive Productcombination derselben.

Jede primitive Productcombination von primitiven Functionen — von elementaren oder einförmigen Functionen — lässt sich als eine Summe von primitiven symmetrischen Functionen darstellen, deren Coëfficienten sämmtlich gleich 1 sind. Die Darstellung von Tabellen von isobarischen primitiven Functionen ist deshalb sehr einfach. Vergleiche die Tabellen 93, 94, 99 und 100, in denen die primitiven Productcombinationen von einförmigen und elementaren Functionen vom Gewicht 3 und 4 zusammengestellt sind.

Bildet man insbesondere das Product von zwei, drei, vier,... der Summen

$$\Sigma p_1 \quad \Sigma q_1, \quad \Sigma r_1, \quad \ldots,$$

so ergeben sich die Grundformeln der in den Tabellen *c)* enthaltenen Functionen, deren Coëfficienten direct aus denselben abgelesen werden können. Für zwei, drei, vier Factoren erhalten wir beispielsweise die bekannten Formeln:

$$\begin{aligned}
\Sigma p_1 \Sigma q_1 &= \Sigma p_1 q_1 + \Sigma p_1 q_2, \\
\Sigma p_1 \Sigma q_1 \Sigma r_1 &= \Sigma p_1 q_1 r_1 + \Sigma q_1 r_1 p_2 + \Sigma r_1 p_1 q_2 + \Sigma p_1 q_1 r_2 + \Sigma p_1 q_2 r_3, \\
\Sigma p_1 \Sigma q_1 \Sigma r_1 \Sigma s_1 &= \Sigma p_1 q_1 r_1 s_1 + \Sigma q_1 r_1 s_1 p_2 + \Sigma r_1 s_1 p_1 q_2 + \Sigma s_1 p_1 q_1 r_2 + \Sigma p_1 q_1 r_1 s_2 + \Sigma p_1 q_1 r_2 s_2 + \Sigma p_1 r_1 q_2 s_2 + \\
&\quad + \Sigma p_1 s_1 q_2 r_2 + \Sigma p_1 q_1 r_2 s_3 + \Sigma p_1 r_1 q_2 s_3 + \Sigma p_1 s_1 q_2 r_2 + \Sigma q_1 r_1 p_2 s_3 + \Sigma q_1 s_1 p_2 r_3 + \Sigma r_1 s_1 p_2 q_3 + \Sigma p_1 q_2 r_3 s_4,
\end{aligned} \tag{1}$$

welche den Entwicklungen der Productcombinationen vom Gewicht 2, 3, 4 in den Tabellen *c)* zu Grunde liegen. Will man beispielsweise das Product der drei Factoren $\mathfrak{a}_{111}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ in Tabelle 57 bilden, so führe man die Transformation

$$p = x^3, \quad q = x, \quad r = y$$

in der zweiten der obigen Formeln aus, womit dieselbe übergeht in

$$\mathfrak{a}_{111}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = \Sigma x_1^4 y_2 + \Sigma x_1^3 y_1 x_2 + \Sigma x_1^4 y_2 + \Sigma x_1^3 x_2 y_2 + \Sigma x_1^3 x_2 y_3.$$

Durch eine derartige Transformation ändert sich im Allgemeinen die Zahl der Glieder der resultirenden symmetrischen Functionen nicht. Werden jedoch infolge einer solchen zwei, drei, vier,... Theile einer mehrförmigen Function einander gleich, so vermindert sich die Anzahl der Glieder derselben, bezw. um 2!, 3!, 4!,...

Die 5-förmige Function $\Sigma p_1 q_2 r_3 s_4 t_5$ hat beispielsweise für r-Gruppen $r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)$ Glieder. Sie geht über

* Schläfli gebraucht diesen Ausdruck auch für die Elementarfunctionen. Vergl. Denkschriften der kaiserl. Akademie. Math.-naturw. Classe, Bd IV, Wien 1852.

$$
\begin{array}{lll}
\text{für } t = s & \text{in} & 2\,\Sigma p_1 q_2 r_3 s_4 s_5, \\
\text{»}\ \ t = s = r & \text{»} & 6\,\Sigma p_1 q_2 r_3 r_4 r_5, \\
\text{»}\ \ t = p,\ s = r & \text{»} & 4\,\Sigma p_1 p_2 q_3 r_4 r_5, \\
\text{»}\ \ t = s = r = q & \text{»} & 24\,\Sigma p_1 q_2 q_3 q_4 q_5, \\
\text{»}\ \ t = s = q,\ r = p & \text{»} & 12\,\Sigma p_1 p_2 q_3 q_4 q_5, \\
\text{»}\ \ t = s = r = q = p & \text{»} & 120\,\Sigma p_1 p_2 p_3 p_4 p_5.
\end{array}
$$

Werden diese Regeln beobachtet, so ergeben sich beispielsweise durch Coincidenz von Reihen aus den Formeln (1) die weiteren

$$
\begin{aligned}
(\Sigma p_1)^2 &= \Sigma p_1^2 + 2 p_1 p_2, \\
(\Sigma p_1)^2 \Sigma q_1 &= \Sigma p_1^2 q_1 + \Sigma p_1^2 q_2 + 2\Sigma p_1 q_1 p_2 + 2\Sigma p_1 p_2 q_3, \\
(\Sigma p_1)^3 &= \Sigma p_1^3 + 3\Sigma p_1^2 p_2 + 6\Sigma p_1 p_2 p_3, \\
(\Sigma p_1)^2 \Sigma q_1 \Sigma r_1 &= \Sigma p_1^2 q_1 r_1 + \Sigma p_1^2 q_1 r_2 + \Sigma p_1^2 r_1 q_2 + 2\Sigma p_1 q_1 r_1 p_2 + \Sigma p_1^2 q_2 r_2 + 2\Sigma p_1 r_1 p_2 q_2 \\
&\quad + 2\Sigma q_1 r_1 p_2 p_3 + 2\Sigma p_1 q_1 p_2 r_3 + 2\Sigma p_1 r_1 p_2 q_3 + \Sigma p_1^2 q_2 r_3 + 2\Sigma p_1 p_2 q_3 r_4, \qquad (2) \\
(\Sigma p_1)^2 (\Sigma q_1)^2 &= \Sigma p_1^2 q_1^2 + 2\Sigma p_1 q_1^2 p_2 + 2\Sigma p_1^2 q_1 q_2 + \Sigma p_1^2 q_2^2 + 4\Sigma p_1 q_1 p_2 q_2 \\
&\quad + 2\Sigma q_1^2 p_2 p_3 + 2\Sigma p_1^2 q_2 q_3 + 4\Sigma p_1 q_1 p_2 q_3 + 4\Sigma p_1 p_2 q_3 q_4, \\
(\Sigma p_1)^3 \Sigma q_1 &= \Sigma p_1^3 q_1 + 3\Sigma p_1^2 q_1 p_2 + \Sigma p_1^3 q_2 + 3\Sigma p_1^2 p_2 q_2 + 6\Sigma p_1 q_1 p_2 p_3 + 3\Sigma p_1^2 p_2 q_3 + 6\Sigma p_1 p_2 p_3 q_4, \\
(\Sigma p_1)^4 &= \Sigma p_1^4 + 4\Sigma p_1^3 p_2 + 6\Sigma p_1^2 p_2^2 + 12\Sigma p_1^2 p_2 p_3 + 24\Sigma p_1 p_2 p_3 p_4
\end{aligned}
$$

die ebenfalls beim Anschreiben der Coëfficienten in den Tabellen *c)* mit Vortheil benützt werden können.

Den Formeln (1) und (2) entsprechen die Umkehrungen

$$
\begin{aligned}
\Sigma p_1 q_2 &= \Sigma p_1 \Sigma q_1 - \Sigma p_1 q_1, \\
\Sigma p_1 q_2 r_3 &= \Sigma p_1 \Sigma q_1 \Sigma r_1 - \{\Sigma p_1 q_1 \Sigma r_1 + \Sigma p_1 r_1 \Sigma q_1 + \Sigma q_1 r_1 \Sigma p_1\} + 2\Sigma p_1 q_1 r_1, \\
\Sigma p_1 q_2 r_3 s_4 &= \Sigma p_1 \Sigma q_1 \Sigma r_1 \Sigma s_1 - (\Sigma p_1 \Sigma q_1 \Sigma r_1 s_1 + \Sigma p_1 \Sigma r_1 \Sigma q_1 s_1 + \Sigma p_1 \Sigma s_1 \Sigma q_1 r_1 \qquad (3) \\
&\quad + \Sigma q_1 \Sigma r_1 \Sigma p_1 s_1 + \Sigma q_1 \Sigma s_1 \Sigma p_1 r_1 + \Sigma r_1 \Sigma s_1 \Sigma p_1 q_1) \\
&\quad + 2(\Sigma p_1 \Sigma q_1 r_1 s_1 + \Sigma q_1 \Sigma p_1 r_1 s_1 + \Sigma r_1 \Sigma p_1 q_1 s_1 + \Sigma s_1 \Sigma p_1 q_1 r_1) \\
&\quad + \Sigma p_1 q_1 \Sigma r_1 s_1 + \Sigma p_1 r_1 \Sigma q_1 s_1 + \Sigma p_1 s_1 \Sigma q_1 r_1 - 6\Sigma p_1 q_1 r_1 s_1,
\end{aligned}
$$

beziehungsweise

$$
\begin{aligned}
\Sigma p_1 p_2 &= \frac{1}{2}\{(\Sigma p_1)^2 - \Sigma p_1^2\} \\
\Sigma p_1 p_2 q_3 &= \frac{1}{2}\{(\Sigma p_1)^2 \Sigma q_1 - 2\Sigma p_1 \Sigma p_1 q_1 - \Sigma q_1 \Sigma p_1^2 + 2\Sigma p_1^2 q_1\} \\
\Sigma p_1 p_2 p_3 &= \frac{1}{6}\{(\Sigma p_1)^3 - 3\Sigma p_1 \Sigma p_1^2 + 2\Sigma p_1^3\} \\
\Sigma p_1 p_2 q_3 r_4 &= \frac{1}{2}(\Sigma p_1)^2 \Sigma q_1 \Sigma r_1 - \left\{\frac{1}{2}(\Sigma p_1)^2 \Sigma q_1 r_1 + \frac{1}{2}\Sigma q_1 \Sigma r_1 \Sigma p_1^2 + \Sigma p_1 \Sigma q_1 \Sigma p_1 r_1 + \Sigma p_1 \Sigma r_1 \Sigma p_1 q_1\right\} \\
&\quad + \{2\Sigma p_1 \Sigma p_1 q_1 r_1 + \Sigma q_1 \Sigma p_1^2 r_1 + \Sigma r_1 \Sigma p_1^2 q_1\} + \Sigma p_1 q_1 \Sigma p_1 r_1 + \frac{1}{2}\Sigma p_1^2 \Sigma q_1 r_1 - 3\Sigma p_1^2 q_1 r_1 \\
\Sigma p_1 p_2 q_3 q_4 &= \frac{1}{4}(\Sigma p_1)^2 (\Sigma q_1)^2 - \left\{\frac{1}{4}(\Sigma p_1)^2 \Sigma q_1^2 + \frac{1}{4}(\Sigma q_1)^2 \Sigma p_1^2 + \Sigma p_1 \Sigma q_1 \Sigma p_1 q_1\right\} \qquad (4) \\
&\quad + \{\Sigma p_1 \Sigma p_1 q_1^2 + \Sigma q_1 \Sigma p_1^2 q_1\} + \frac{1}{2}(\Sigma p_1 q_1)^2 + \frac{1}{4}\Sigma p_1^2 \Sigma q_1^2 - \frac{3}{2}\Sigma p_1^2 q_1^2,
\end{aligned}
$$

$$\Sigma p_1 p_2 p_3 q_4 = \frac{1}{6}(\Sigma p_1)^3 \Sigma q_1 - \frac{1}{2}\left\{(\Sigma p_1)^2 \Sigma p_1 q_1 + \Sigma p_1 \Sigma q_1 \Sigma p_1^2\right\} + \left\{\Sigma p_1 \Sigma p_1^2 q_1 + \frac{1}{3}\Sigma q_1 \Sigma p_1^3\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}\Sigma p_1 q_1 \Sigma p_1^2 - \Sigma p_1^3 q_1, \qquad \text{4a)}$$

$$\Sigma p_1 p_2 p_3 p_4 = \frac{1}{24}(\Sigma p_1)^4 - \frac{1}{4}(\Sigma p_1)^2 \Sigma p_1^2 + \frac{1}{3}\Sigma p_1 \Sigma p_1^3 + \frac{1}{8}(\Sigma p_1^2)^2 - \frac{1}{4}\Sigma p_1^4.$$

. . . .

durch welche die mehrförmigen Functionen durch einförmige ausgedrückt sind, und die die Grundformeln für die Entwicklung der zweiförmigen, dreiförmigen, vierförmigen Functionen der Tabellen *d)* bilden.

2. Am einfachsten sind die Tabellen der primitiven Functionen von irgend welchem Gewicht zu berechnen, da dieselben die einfachsten Zahlencoëfficienten besitzen. Wir haben in den Tabellen 91—108 die primitiven Functionen vom Gewicht 3 und 4 zusammengestellt.

Sind diese Tabellen berechnet, so ergeben sich aus denselben durch Coincidenz von gewissen Reihen direct weitere Tabellen für die Functionen von weniger Reihen und demselben Gewichte.

Setzen wir beispielsweise in den Tabellen 91—96 $z = x$, so gehen dieselben in die zweireihigen Functionen vom Gewicht 3 über, die wir in 25—30 zusammengestellt haben. Für $z = y = x$ ergeben sich schliesslich die Tabellen der einreihigen Functionen 19—24.

Ebenso gehen für $t = x$ die primitiven Functionen der Tabellen 97—102 in die dreireihigen Functionen vom Gewicht $p_1 = 2$, $p_2 = p_3 = 1$ der Tabellen 103—108 über. Aus diesen erhalten wir schliesslich für $z = y$, bezw. $z = x$ die zweireihigen Functionen der Tabellen 43—48, bezw. 37—42.

§. 5.

Die Differentialprocesse der zweireihigen symmetrischen Functionen.

1. Jede ternäre symmetrische Function von den Gewichtszahlen p_1 und p_2 hinsichtlich der Reihen x und y:

$$J = \varphi(a),$$

welche als Function der Elementarfunctionen dargestellt ist, genügt den beiden Differentialgleichungen:

$$p_1 J = a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{12}} + a_{122}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{122}} + \ldots$$

$$+ 2\left\{a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{11}} + a_{112}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{112}} + \ldots\right\} + 3\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial a_{111}} + a_{1112}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{1112}} + \ldots\right\} + \ldots$$

$$p_2 J = a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{12}} + a_{112}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{112}} + \ldots \qquad (1)$$

$$+ 2\left\{a_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{22}} + a_{122}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{122}} + a_{1122}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{1122}} + \ldots\right\} + 3\left\{a_{222}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{222}} + a_{1222}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{1222}} + \ldots\right\} + \ldots,$$

welche die Bedingungen ausdrücken, dass die Function J isobarisch und hinsichtlich der Reihen x und y vom Gewicht p_1, bezw. p_2 ist.

Um beispielsweise die erste der Formeln (1) zu beweisen, ersetze man in $J = \varphi\,(a)$ die Elemente $x_1\, x_2 \ldots x_r$ durch λx_1, λx_2, ..., λx_r, dann ergibt sich, weil φ isobarisch und vom Gewitch p_1 sein soll,

$$\lambda^{p_1} J = \varphi(a_1\lambda, a_{12}\lambda \ldots;\; a_{11}\lambda^2, a_{112}\lambda^2, \ldots).$$

Wird diese Gleichung beiderseits nach λ abgeleitet und nachträglich $\lambda = 1$ gesetzt, so folgt direct die erste der Gleichungen (1).

Ist die Function J in Function der einförmigen Functionen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_{12}$, $\mathfrak{a}_{22}$, ..., ... dargestellt $J = f\,(\mathfrak{a})$, so sind die Bedingungen, dass diese Darstellung isobarisch und vom Gewicht p_1, bezw. p_2

ist, durch analoge Gleichungen angegeben, die man aus (1) erhält, indem man den lateinischen Buchstaben a durch den Deutschen $\mathfrak{a}$ ersetzt und die Coëfficienten und unteren Indices beibehält.

2. Leitet man die zweireihige Elementarfunction

$$a_{p_1 p_2} = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_{p_1} y_{p_1+1} \ldots y_{p_1+p_2}$$

von den Gewichtszahlen p_1 und p_2 partiell nach den Elementen $x_1 x_2 \ldots x_r$ ab, so stellt die Summe der erhaltenen Ableitungen offenbar wieder eine Elementarfunction dar, deren Gewichtszahlen $p_1 - 1$, p_2 sind. Wir erhalten

$$\sum_1^r \frac{\partial a}{\partial x_1} = (r-p+1) a_{p_1-1,\, p_2}$$

und ebenso (2)

$$\sum_1^r \frac{\partial a}{\partial y_1} = (r-p+1) a_{p_1,\, p_2-1},$$

wo $p = p_1 + p_2$ das Totalgewicht der Function $a_{p_1 p_2}$ und r die Anzahl der Gruppen $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $\ldots$, $x_r y_r$ bezeichnet, welche in derselben auftreten.

Für die einförmige Function

$$\mathfrak{a}_{p_1 p_2} = \Sigma x_1^{p_1} y_1^{p_2}$$

ergeben sich als entsprechende Formeln die folgenden

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x_1} = p_1 \mathfrak{a}_{p_1-1,\, p_2}$$

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial y_1} = p_2 \mathfrak{a}_{p_1,\, p_2-1}, \qquad (2a)$$

in denen die Coëfficienten der resultirenden einförmigen Functionen unabhängig von der Gruppenzahl r sind.

3. Die Processe Δx, Δy.

Leitet man ebenso die mehrförmige (höhere) Function

$$J = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i} = \varphi(a)$$

nach den Elementen $x_1 x_2 \ldots x_r$ ab und addirt die erhaltenen Ableitungen, so ergibt sich der Process

$$\Delta x = \sum_1^r \frac{\partial J}{\partial x_1} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial a} \sum_1^r \frac{\partial a}{\partial x_1},$$

durch den eine symmetrische Function (oder eine Summe von solchen) vom Gewicht $p_1 - 1$, p_2 dargestellt ist und den wir auch in der Form schreiben können:

$$\Delta x = \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} = \sum (r-p+1) \frac{\partial \varphi}{\partial a_{p_1 p_2}} a_{p_1-1,\, p_2}, \qquad (3)$$

wo sich das Summenzeichen über alle Elementarfunctionen von $\varphi\,(a)$ erstreckt, in denen die Reihe $x_1 x_2 \ldots x_r$ enthalten ist.

Bildet man neben den Ableitungen nach $x_1 x_2 \ldots x_r$ auch diejenigen nach $y_1 y_2 \ldots y_r$ und führt die einzelnen Elementarfunctionen selbst ein, so ergeben sich die beiden Differentialprocesse:

$$\Delta x = \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} = r \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + (r-1) \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} a_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{12}} a_2 \right\} + (r-2) \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial a_{111}} a_{11} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{112}} a_{12} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{122}} a_{22} \right\} + \ldots$$

$$\Delta y = \sum \frac{\partial J}{\partial y_1} = r \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + (r-1) \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial a_{12}} a_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{22}} a_2 \right\} + (r-2) \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial a_{112}} a_{11} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{122}} a_{12} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{222}} a_{22} \right\} + \ldots \qquad (4)$$

welche vorzugsweise bei der Darstellung der symmetrischen Functionen durch elementare eine Rolle spielen, wie wir weiter unten sehen werden.

Ist die Function $J = f(\mathfrak{a})$ durch unförmige Functionen $\mathfrak{a}$ ausgedrückt, so erhalten wir die entsprechenden Processe

$$\Delta x = \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} = \Sigma p_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{p_1 p_2}} \mathfrak{a}_{p_1-1, p_2},$$
$$\Delta y = \sum \frac{\partial J}{\partial y_1} = \Sigma p_2 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{p_1 p_2}} \mathfrak{a}_{p_1, p_2-1}, \tag{5}$$

denen auch die specielle Form gegeben werden kann

$$\Delta x = r\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_1} + \left\{\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{12}} \mathfrak{a}_2 + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{122}} \mathfrak{a}_{22} + \ldots\right\}$$
$$+2\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{11}} \mathfrak{a}_1 + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{112}} \mathfrak{a}_{12} + \ldots\right\} + 3\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{111}} \mathfrak{a}_{11} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{1112}} \mathfrak{a}_{112} + \ldots\right\} + \ldots$$
$$\Delta y = r\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_2} + \left\{\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{12}} \mathfrak{a}_1 + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{112}} \mathfrak{a}_{11} + \ldots\right\} \tag{6}$$
$$+2\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{22}} \mathfrak{a}_2 + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{122}} \mathfrak{a}_{12} + \ldots\right\} + 3\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{222}} \mathfrak{a}_{22} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{1222}} \mathfrak{a}_{122} + \ldots\right\} + \ldots$$

4. Die Processe Δ_x^y, Δ_y^x.

Werden die partiellen Ableitungen der symmetrischen Function $J = \varphi(a)$ nach den Elementen $x_1 x_2 \ldots x_r$, bezw. mit $y_1 y_2 \ldots y_r$ multiplicirt und addirt, so ergibt sich ein neuer Process

$$\Delta_x^y = \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} y_1 = \sum (1+p_2) \frac{\partial \varphi}{\partial a_{p_1 p_2}} a_{p_1-1, p_2+1}, \tag{7}$$

durch den die Function $J = \varphi(a)$ von den Gewichtszahlen p_1 und p_2 in eine andere (oder in eine Summe von solchen) von den Gewichtszahlen p_1-1, p_2+1 übergeführt wird. Diesem gegenüber steht der analoge Process

$$\Delta_y^x = \sum \frac{\partial J}{\partial y_1} x_1 = \sum (1+p_1) \frac{\partial \varphi}{\partial a_{p_1 p_2}} a_{p_1+1, p_2-1}, \tag{8}$$

durch welchen die Gewichtszahl p_1 auf Kosten der Gewichtszahl p_2 um die Einheit erhöht wird.

Werden in (7) und (8) die Elementarfunctionen selbst eingeführt, so nehmen diese Processe die specielle Gestalt an:

$$\Delta_x^y = \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} y_1 = \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} a_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} a_{12} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{111}} a_{112} + \ldots\right\}$$
$$+2\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial a_{12}} a_{22} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{112}} a_{122} + \ldots\right\} + 3\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial a_{122}} a_{222} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{1122}} a_{1222} + \ldots\right\} + \ldots \tag{9}$$
$$\Delta_y^x = \sum \frac{\partial J}{\partial y_1} x_1 = \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial a_2} a_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{22}} a_{12} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{222}} a_{122} + \ldots\right\}$$
$$+2\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial a_{12}} a_{11} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{122}} a_{112} + \ldots\right\} + 3\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial a_{112}} a_{111} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{1122}} a_{1112} + \ldots\right\} + \ldots$$

§. 6.

Die mehrförmigen Functionen und die Relationen zwischen den elementaren und einförmigen Functionen. Einrichtung und Eigenschaften der Tabellen *c), d), e)* und *f).*

1. Das Product von i ganzen einförmigen Functionen

$$P_i = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \Sigma x_1^{\alpha_2} y_1^{\beta_2} \ldots \Sigma x_1^{\alpha_i} y_1^{\beta_i} \tag{1}$$

gibt aus multipliciert bekanntlich eine Summe von isobaren ganzen symmetrischen Functionen, deren Reihengewichtszahlen

$$p_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i, \quad p_2 = \beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_i,$$

je gleich der Summe der Reihengewichtszahlen der einzelnen Factoren sind. Wir erhalten

$$P_i = S_1 + \Sigma S_2 + \Sigma S_3 + \ldots + \Sigma S_{i-1} + S_i, \tag{2}$$

wo $\Sigma S_\varkappa$ die Summe aller $\varkappa$-förmigen Functionen bezeichnen soll, die sich bei der Entwicklung des Productes P_i in symmetrische Functionen ergeben. In derselben ist S_1 nichts anderes als die einförmige Function $\mathfrak{a}_{p_1 p_2}$ und

$$S_i = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i}$$

die i-förmige Function, deren Theile die Factoren von P_i sind. Diese kann somit durch P_i und die übrigen Functionen linear ausgedrückt werden. Es ist

$$S_i = P_i - S_1 - \Sigma S_2 - \Sigma S_3 - \ldots \Sigma S_{i-1}.$$

Die hierin auftretenden (i—1)-förmigen Functionen ΣS_{i-1} können in derselben Weise durch (i—2)-förmige und diese durch (i—3)-förmige, ...etc. und wenigerförmige Functionen ausgedrückt werden. Indem wir so successive an Stelle jeder mehrförmigen Function eine Summe von wenigerförmigen setzen, gelangen wir schliesslich zu einem Ausdruck für die Function S_i, welcher nur noch isobare Productcombinationen von einförmigen Functionen linear enthält:

$$S_i = \mathfrak{A}_i + \Sigma \mathfrak{A}_{i-1} + \Sigma \mathfrak{A}_{i-2} + \ldots \mathfrak{A}_1, \tag{3}$$

wo die unteren Indices den Grad bezeichnen sollen, in welchem die einförmigen Functionen in den Productcombinationen auftreten. Hieraus fliesst aber der Satz:

Jede ganze i-förmige symmetrische Function lässt sich als ganze Function i^{ten} Grades von einförmigen Functionen darstellen.

Sind die i Theile der Function S_i oder — was dasselbe ist — die Zahlen $\alpha_1 + \beta_1$, $\alpha_2 + \beta_2$, ..., $\alpha_i + \beta_i$, sämmtlich von einander verschieden, so lässt sich S_i durch die Formel ausdrücken:

$$(-1)^{i-1} S_i = \Sigma (\tau_1 - 1)!(\tau_2 - 1)! \ldots (-1)^{\sigma-1} E_{\tau_1} E_{\tau_2} \ldots, \tag{4}$$

wo E_{τ_1}, E_{τ_2}, ... einförmige Functionen bezeichnen, welche bezw. aus $\tau_1, \tau_2, \ldots$ Theilen der i-förmigen Functionen S_i zusammengesetzt sind und σ die Anzahl dieser Functionen in jedem Glied angibt.

Mit Hilfe dieser Formel können die Coëfficienten der Tabellen *d)* ebenfalls sehr leicht angeschrieben werden.

Ersetzt man die einförmigen Functionen in (3) oder (4) nach §. 2 oder mit Hilfe der Tabellen (*a*) durch ihre Ausdrücke in den isobaren Combinationen der Elementarfunctionen, so erhalten wir S_i ausgedrückt als ganze Function der letzteren. Wir können diese Darstellung allgemein in der Form annehmen

$$S_i = \alpha A_p + \Sigma \beta A_{p-1} + \Sigma \gamma A_{p-2} + \Sigma \delta A_{p-3} + \ldots + \sigma A p_1 p_2, \tag{5}$$

wo $p = p_1 + p_2$ das Gewicht der Function S_i und $\Sigma \tau A_{p-\varkappa}$ die Summe aller isobaren Productcombinationen elementarer Functionen vom Grad $p - \varkappa$ und dem Gewicht p bezeichnen soll.

Hierin ist beispielsweise

$$
\begin{aligned}
A_p &= a_1^{p_1} a_2^{p_2}, \\
\Sigma \beta A_{p-1} &= \beta_1 a_1^{p_1-2} a_2^{p_2} a_{11} + \beta_2 a_1^{p_1-1} a_2^{p_2-1} a_{12} + \beta_3 a_1^{p_1} a_2^{p_2-2} a_{22}, \\
\Sigma \gamma A_{p-2} &= \gamma_1 a_1^{p_1-3} a_2^{p_2} a_{111} + \gamma_2 a_1^{p_1-2} a_2^{p_2-1} a_{112} + \ldots, \ \ldots, \\
A_{p_1 p_2} &= a_{p_1 p_2},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Zahlencoëfficienten sind, die sich bei der Entwicklung von S_i ergeben.

Nun ist bei der Darstellung der Function S_i die Gruppenzahl r gar nicht in Betracht gekommen. Dieselbe wird deshalb auch, so lange r unbestimmt gelassen oder beliebig hoch gedacht wird, von dieser Zahl unabhängig sein müssen, d. h., die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sind constante Grössen, welches auch der Werth von r sein mag.

Nun enthalten, wie die Formeln (6) zeigen, mit Ausnahme der ersten sämmtliche Productcombinationen der Entwicklung (5) zweiförmige, dreiförmige, ..., (p_1+p_2)-förmige Elementarfunctionen, die sämmtlich, wie auch die i-förmige Function S_i selbst, identisch verschwinden, wenn die Gruppenzahl $r = 1$ wird. Da für diesen Fall aber die Combination $Ap = 1$ wird, so folgt, dass in jeder mehrförmigen Function S_i, wo $i > 1$ ist, der Coëfficient $\alpha = 0$ sein muss.

Für $r = 2$ und $i > 2$ verschwinden mit S_i ebenfalls sämmtliche Glieder von (5), in denen dreiförmige und höhere Elementarfunctionen enthalten sind. Das Aggregat der übrig bleibenden Glieder ist alsdann von der Form

$$
0 = \beta_1 a_1^{p_1-2} a_2^{p_2} a_{11} + \beta_2 a_1^{p_1-1} a_2^{p_2-1} a_{12} + \beta_3 a_1^{p_1} a_2^{p_2-2} a_{22} + \gamma_1 a_1^{p_1-4} a_2^{p_2} a_{11}^2 + \gamma_2 a_1^{p_1-3} a_2^{p_2-1} a_{11} a_{12} + \ldots \tag{7}
$$

Da hierin die Coefficienten $\beta, \gamma, \ldots$ constante Zahlen sind, die durch die Entwicklung (5) von S_i bestimmt sind, so kann dasselbe im Allgemeinen nicht illusorisch werden und stellt daher eine identische Relation zwischen den Elementarfunctionen $a_1 a_2 a_{11} a_{12} a_{22}$ zweier Gruppen $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ dar. Nun besteht zwischen den letzteren nur eine Relation vom Grad 3 und dem Gewicht 4:

$$
\Pi_{22} = a_1^2 a_{22} + a_2^2 a_{11} + a_{12}^2 - a_1 a_2 a_{12} - 4 a_{11} a_{22}, \tag{8}
$$

daher ist das Aggregat (7) allgemein von der Form:

$$
\Pi_{22}^{\pi_1} A_{p-4\pi_1} + \Pi_{22}^{\pi_2} A_{p-4\pi_2} + \ldots = 0,
$$

wo die Functionen A Productcombinationen von Elementarfunctionen von dem beigefügten Gewicht bezeichnen.

Ist $i > 3$, so ergibt sich ebenso für $r = 3$ aus der Darstellung (5) eine identische Relation oder eine Combination von solchen für drei Gruppen $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, für $r = 4$ eine solche für vier Gruppen etc. Allgemein stellt die rechte Seite der Identität (5) für $r = i-1, i-2, \ldots, 3, 2$ eine identische Relation vom Gewicht p und dem Grad $p-1$ (oder eine Combination von solchen) zwischen den Elementarfunctionen von $i-1, i-2, \ldots, 3, 2$ Gruppen dar.

Aus diesen Überlegungen geht weiter hervor, dass im Allgemeinen ausser α kein Coëfficient von (5) Null ist. Somit ergibt sich hiebei der Satz:

Jede zweireihige i-förmige Function

$$
S_i = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i}
$$

von den Gewichtszahlen p_1 und p_2 lässt sich als ganze Function der Elementarfunctionen vom Grad $p-1 = p_1 + p_2 - 1$ darstellen.

Eine Ausnahme hievon machen nur diejenigen zweireihigen Functionen, welche in Bezug auf eine der Reihen $x_1 x_2 \ldots x_i$ oder $y_1 y_2 \ldots y_i$ linear sind oder für welche p_1 oder p_2 gleich 1 ist. Eine solche lässt sich nämlich linear durch i-förmige Functionen darstellen und verschwindet daher für jeden Werth von $r < i$ identisch. Beispielsweise ist eine derartige Function durch

$$S_i = \Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_i^{\alpha_{i-1}} y_i = a_{i-1,1} \Sigma x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \ldots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}-1}$$
$$-a_{i,0}\left\{\Sigma y_1 x_1^{\alpha_1-2} x_2^{\alpha_2-1} \ldots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} + \Sigma x_1^{\alpha_1-1} y_2 x_2^{\alpha_2-2} x_3^{\alpha_3-1} \ldots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}-1} + \ldots\right\}$$

angegeben, für welche $p_1 = \Sigma\alpha_1$ und $p_2 = 1$ ist.

Dies ist auch der Grund, wesshalb in den Tabellen *f)* Nr. 42, 60, 78 der Functionen vom Gewicht $p_2 = 1$ und $p_1 > 1$ — im Gegensatz zu den übrigen Tabellen *f)* der Functionen vom Gewicht $p_1 > 1$, $p_2 > 1$ — nur die Hälfte Fächer durch Zahlencoëfficienten auszufüllen sind.

Aus den Tabellen *f)* derjenigen Functionen dagegen, für welche $p_1 > 1$, $p_2 > 1$ ist, können die Relationen zwischen den Elementarfunctionen direct entnommen werden.

In Tabelle (48) ergibt sich aus den Entwicklungen jeder der dreiförmigen Functionen

$$\Sigma x_1^2 y_2 y_3, \quad \Sigma x_1 y_1 x_2 y_3, \quad \Sigma y_1^2 x_2 x_3$$

die Relation

$$\mathrm{II}_{22} = 0,$$

die wir in (8) angegeben haben.

Jeder der vierförmigen Functionen

$$\Sigma x_1^2 x_2 y_3 y_4, \quad \Sigma x_1 y_1 x_2 x_3 y_4, \quad \Sigma y_1^2 x_2 x_3 x_4$$

der Tabelle (66) entnehmen wir die Relation vom Grad 4 und dem Gewicht 5 für drei Gruppen:

$$\mathrm{III}_{32} = a_1 \mathrm{II}_{22} - 3a_{111}(a_2^2 - 3a_{22}) + a_{112}(2a_1 a_2 - 3a_{12}) - a_{122}(a_1^2 - 3a_{11}) = 0, \tag{9}$$

aus welcher durch Vertauschung der Indices 1 und 2 die analoge Relation hervorgeht

$$\mathrm{III}_{23} = a_2 \mathrm{II}_{22} - 3a_{222}(a_1^2 - 3a_{11}) + a_{122}(2a_1 a_2 - 3a_{12}) - a_{112}(a_2^2 - 3a_{22}) = 0. \tag{10}$$

Die 5-förmigen Functionen der Tabellen (84) und (90) liefern die Relationen für vier Gruppen vom Grad 5 und dem Gewicht 6:

$$\begin{aligned} \mathrm{IV}_{42} = {} & 3a_1 \mathrm{III}_{32} - 2a_{11}\mathrm{II}_{22} - 6a_1 a_{22} a_{111} + 6a_2 a_{12} a_{111} \\ & + 2a_1 a_{11} a_{122} - 4a_2 a_{11} a_{112} - 18a_{111} a_{122} + 6a_{112}^2 \\ & + 6a_{1111}(3a_2^2 - 8a_{22}) - 3a_{1112}(3a_1 a_2 - 4a_{12}) + a_{1122}(3a_1^2 - 8a_{11}) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

bezw.

$$\begin{aligned} \mathrm{IV}_{33} = {} & 3a_1 \mathrm{III}_{23} + 3a_2 \mathrm{III}_{32} - 2a_{12}\mathrm{II}_{22} + 6a_1 a_{11} a_{222} + 6a_2 a_{22} a_{111} + 2a_1 a_{12} a_{122} \\ & + 2a_2 a_{12} a_{112} - 6a_1 a_{22} a_{112} - 6a_2 a_{11} a_{122} - 54a_{111} a_{222} + 6a_{112} a_{122} \\ & + 3a_{1112}(3a_2^2 - 8a_{22}) - 4_{1122}(3a_1 a_2 - 4a_{12}) + 3a_{1222}(3a_1^2 - 8a_{11}) = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

aus denen wir auch direct für $r = 3$ die Relationen vierten Grades vom Gewicht 6 für drei Gruppen erhalten:

$$\mathrm{III}_{42} = -a_{11}\mathrm{II}_{22} - 3a_1 a_{22} a_{111} + 3a_2 a_{12} a_{111} + a_1 a_{11} a_{122} - 2a_2 a_{11} a_{112} - 9a_{111} a_{122} + 3a_{112}^2 = 0, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{III}_{33} = {} & -a_{12}\mathrm{II}_{22} + 3a_1 a_{11} a_{222} + 3a_2 a_{22} a_{111} + a_1 a_{12} a_{122} \\ & + a_2 a_{12} a_{112} - 3a_1 a_{22} a_{112} - 3a_2 a_{11} a_{122} - 27a_{111} a_{122} + 3a_{112} a_{122} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Durch Vertauschung der Indices 1 und 2 in III_{42} ergibt sich die entsprechende Formel $\mathrm{III}_{24} = 0$.

Jede der vierförmigen Functionen der Tabellen (84) und (90) liefert eine Relation für drei Gruppen vom Gewicht 6 und dem Grad 5 von der Form:

$$\mathrm{III}_{42} = \lambda a_1 \mathrm{III}_{32} + \mu \mathrm{III}_{42} = 0,$$

bezw.

$$\mathrm{III}_{33} = \alpha a_2 \mathrm{III}_{32} + \beta a_1 \mathrm{III}_{23} + \gamma \mathrm{III}_{33},$$

wo λ, μ, bezw. α, β, γ, Zahlencoëfficienten bezeichnen, die für die verschiedenen Arten der vierförmigen Functionen dieser Tabellen verschiedene Werthe annehmen.

Die dreiförmigen Functionen dieser Tabellen endlich ergeben für $r = 2$ gewisse Combinationen der Relation $\mathrm{II}_{22} = 0$ mit symmetrischen Functionen.

Damit ist gezeigt, wie die Tabellen *f)* der zweireihigen symmetrischen Functionen zur Ermittlung der Relationen zwischen den Elementarfunctionen derselben dienen können.

Weiter unten werden wir zeigen, wie wir, von einer einzigen bekannten (niedrigsten) Relation für irgend welche Gruppenzahl ausgehend, direct zu allen weiteren Relationen desselben Grades, aber verschiedenen Gewichtes gelangen können.

2. Da eine einförmige Function, z. B. $\mathfrak{a}_{\alpha_1\beta_1}$ als eine Summe von r-Grössen

$$x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} + x_2^{\alpha_1} y_2^{\beta_2} + \ldots + x_r^{\alpha_r} y_r^{\beta_r}$$

für keinen Werth von r Null werden kann, während dies für S_i für jeden Werth von $r < i$ der Fall ist, so stellt die rechte Seite der Gleichung (3)

$$\mathfrak{A}_i + \Sigma \mathfrak{A}_{i-1} + \Sigma \mathfrak{A}_{i-2} + \ldots$$

gleich Null gesetzt, für

$$r = i-1, \quad i-2, \quad i-3, \quad \ldots, \quad 3, 2, 1$$

Gruppen eine identische Relation vom Grad i und dem Gewicht p zwischen den einförmigen Functionen $\mathfrak{a}$ dar. Diese Relationen können am einfachsten für jede Gruppenzahl aus den Tabellen *d)* und *b)* entnommen werden.

Für $r = 1$ wird jede einförmige Function gleich 1, daher muss die algebraische Summe der Zahlencoëfficienten jeder Zeile (ausgenommen der ersten) der Tabellen *d)* (und *b)* verschwinden.

3. Jeder i-theiligen symmetrischen Function

$$S_i = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i},$$

lässt sich das Product von i-einförmigen Functionen

$$\mathfrak{a}_{\alpha_1\beta_1} \mathfrak{a}_{\alpha_2\beta_2} \cdots \mathfrak{a}_{\alpha_i\beta_i},$$

bezw. von i-Elementarfunctionen

$$a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \cdots a_{\alpha_i\beta_i},$$

dessen Factoren mit den i-Theilfunctionen von S_i isobar sind, eindeutig zuweisen und umgekehrt. Infolge dieser Beziehung gilt der Satz:

Die Anzahl aller isobaren symmetrischen Functionen von den Reihengewichtszahlen p_1 und p_2 ist gleich der Anzahl aller isobaren Productcombinationen von einförmigen oder elementaren Functionen von denselben Gewichtszahlen p_1 und p_2.

Man kann deshalb die isobaren symmetrischen Functionen von irgend welchen Gewichtszahlen in vier Tabellen *c)*, *d)*, *e)*, *f)* zusammenstellen, in denen einerseits die isobaren Productcombinationen von einförmigen, bezw. elementaren Functionen durch isobare symmetrische Functionen und umgekehrt dargestellt sind. In denselben sind die Combinationen der einförmigen und elementaren Functionen genau in derselben Weise eingetragen worden, wie in den Tabellen *a)* und *b)*. Infolge der oben angegebenen eindeutigen Beziehung von Productcombinationen und symmetrischen Functionen ist dann auch der Weg gezeigt, wie letztere in dieselbe einzuordnen sind. In den Tabellen *c)* und *e)*, bezw. *d)* und *f)*, sind von links nach rechts, bezw. von oben nach unten die einförmigen, zweiförmigen,... (p_1+p_2)-förmigen Functionen angeschrieben worden, welche der Reihe nach den Productcombinationen von einförmigen und elementaren Functionen vom Grad 1, 2, 3, . . . (p_1+p_2) in diesen Tabellen (von rechts nach links, bezw. von unten nach oben) entsprechen.

Wie die Coëfficienten der Tabellen *c)* und *d)* in einfacher Weise eingeschrieben werden können, ist schon in §. 4 besprochen worden. Ist dies geschehen, so berechnet man die Tabellen *e)* und *f)* wohl am einfachsten Zeile für Zeile mit Hilfe der Tabellen *a)* und *c)*, bezw. *b)* und *d)*.

Von denselben sind meines Wissens die Tabellen *c)* und *d)* noch nicht aufgestellt worden und von den Tabellen *e)* und *f)* nur diejenigen, welche den symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung entsprechen. Derartige Tabellen für einreihige Functionen haben zuerst Vandermonde * und später Meyer Hirsch ** berechnet. Dieselben sind von Herrn Cayley *** bis zum Gewicht 10 reproducirt und mit den Umkehrungen *(e)* derselben versehen worden. Vermehrt wurden diese Tabellen durch Herrn Walter †, der zu den Tabellen *f)* vom Gewicht 10 eine solche vom Gewicht 11 hinzugefügt hat und gleichzeitig vom Herrn Rehořovsky ††, der die einreihigen Functionen vom Gewicht 11 und 12 in zwei Tabellen zusammengestellt hat. Im Gebiet der zweireihigen Functionen hat Herr Macmahon ††† die symmetrischen Functionen bis zum Gewicht 4 durch Elementarfunctionen und umgekehrt dargestellt.

4. Die Tabellen *e)* und *f)*, durch welche die ternären symmetrischen Functionen durch Productcombinationen der Elementarfunctionen und umgekehrt ausgedrückt sind, haben einige bemerkenswerthe Eigenschaften, die wir in den übrigen Tabellen nicht finden.

α) Der Coëfficient in der $\varkappa^{\text{ten}}$ Colonne und λ^{ten} Zeile dieser Tabellen ist gleich dem Coëfficienten der λ^{ten} Colonne in der $\varkappa^{\text{ten}}$ Zeile.

Diese Eigenschaft rührt davon her, dass der Coëfficient einer symmetrischen Function

$$\Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots$$

einer Tabelle *e)* in der Entwicklung des Productes $a_{\varkappa_1\lambda_1} a_{\varkappa_2\lambda_2} \ldots$ gleich ist dem Coëfficienten der entsprechenden Function

$$\Sigma x_1^{\varkappa_1} y_1^{\lambda_1} x_2^{\varkappa_2} y_2^{\lambda_2} \ldots$$

in der Entwicklung des Productes $a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \ldots$.

Ebenso ist in den Tabellen *f)* der Coëfficient einer Productcombination $a_{\varkappa_1\lambda_1} a_{\varkappa_2\lambda_2} \ldots$ in der Entwicklung der Function

$$\Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots$$

gleich dem Coëfficienten der entsprechenden Combination $a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \ldots$ in der Entwicklung der Function

$$\Sigma x_1^{\varkappa_1} y_1^{\lambda_1} x_2^{\varkappa_2} y_2^{\lambda_2} \ldots$$

In Folge dieser Eigenschaft lassen sich die Coëfficienten in den Tabellen *e)* und *f)* symmetrisch zu einer Diagonale der Tabellen anordnen, welche von links unten nach rechts oben geht. Die in dieser Diagonale stehenden Coëfficienten entsprechen sich selbst.

In Folge dieser Eigenschaft genügt es, nur die Hälfte der Coëfficienten jeder Tabelle zu berechnen, um dieselbe anschreiben zu können.

Werden die Coëfficienten in den Colonnen oder Zeilen der Tabellen *e)*, bezw. *f)*, mit den entsprechenden Coëfficienten in der Entwicklung der Function $\Sigma x_1^{p_1} y_1^{p_2}$ durch Elementarfunctionen, bezw. des Products $a_1^{p_1} a_2^{p_2}$ durch symmetrische Functionen multiplicirt, so ist die algebraische Summe der erhaltenen Producte für jede Colonne oder Zeile gleich Null.

* Vandermonde, Hist. de l'Acad. de Paris 1771.

** Meyer Hirsch, Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. Berlin 1809.

*** Cayley, Memoir on the Symmetric functions. Philos. Transact. 1857, p. 489.

† Faà di Bruno, übersetzt von Dr. Th. Walter. Leipzig 1881.

†† Rehořovsky, Tafeln der symmetrischen Functionen vom Gewicht 11 und 12. Denkschriften der kais. Akad. Wien 1882.

††† Macmahon, Memoir on the symmetric functions etc. Philos. Transact. 1890, p. 326 ff.

Die Functionen $\Sigma x_1^{p_1} y_1^{p_2}$, bezw. $a_1^{p_1} a_2^{p_2}$ finden wir aber in der ersten Zeile der Tabellen *f)*, bezw. *e)* entwickelt. Deshalb können wir auch sagen:

Werden die Coëfficienten in den Colonnen oder Zeilen der Tabellen *e)*, bezw. *f)*, mit den entsprechenden Coëfficienten der ersten Zeile (oder Colonne) von *f)*, bezw. *e)*, multiplicirt, so ist die algebraische Summe der erhaltenen Zahlen gleich Null.

Diese Eigenschaft der beiden Arten von Tabellen bietet ein vortreffliches Mittel zur Controle der Richtigkeit der Rechnung dar. Dieselbe kann im allgemeinen rasch ausgeführt werden, indem man sich die Coëfficienten, mit denen die Colonnen oder Reihen multiplicirt werden sollen, auf einen Streifen Papier schreibt und denselben vertical oder horizontal verschiebt. Findet sich alsdann in einer Colonne (oder Zeile) ein Fehler, so muss derselbe auch in einer Zeile (oder Colonne) wieder auftreten, wodurch man sofort erkennt, in welchem Fach der Fehler zu suchen ist.

Als Beispiel seien hier die Tabellen (47) und (48) mit den entsprechenden Coëfficienten von $\Sigma x_1^2 y_1^2$ und $a_1^2 a_1^2$ angeschrieben:

$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	
1	2	2	1	4	2	4	2	4	1
	1			2	1	2		2	$-\frac{2}{3}$
	1	1	1	2	2	3	2	4	$-\frac{4}{3}$
		1		2		2	1	2	$-\frac{2}{3}$
			1	2	2	2	2	4	$\frac{1}{3}$
				1		1		1	$\frac{2}{3}$
					1	1		2	$\frac{2}{3}$
						1	1	2	$\frac{2}{3}$
								1	$-\frac{2}{3}$

4	2	4	2	4	1	2	2	1	
1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2
	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	2
	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2
	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	4
	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2
								1	4

§. 7.

Anwendung der Differentialprocesse von §. 5 zur Darstellung symmetrischer Functionen.

1. Der Process Δ_x und Δ_y.

a) Ist die i-förmige symmetrische Function

$$J = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i}$$

von den Gewichtszahlen $p_1 = \Sigma\alpha_1$, $p_2 = \Sigma\beta_1$ durch die Elementarfunctionen $a_1 a_2$, $a_{11} a_{12} a_{22}$, ... auszudrücken, so bilde man sämmtliche isobare Producte $A_1 A_2 \ldots A_\sigma$ von denselben Gewichtszahlen p_1 und p_2 und setze

$$J = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_\sigma A_\sigma = \Psi(a), \tag{1}$$

wo $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\sigma$ Zahlencoëfficienten bedeuten, welche zu ermitteln sind.

Wendet man hierauf auf die Function J die Operation Δ_x (oder Δ_y) an, so geht dieselbe in eine Summe von i isobaren symmetrischen Functionen

$$\sum \frac{\partial J}{\partial x_1} = \alpha_1 \Sigma x_1^{\alpha_1-1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \dots + \alpha_2 \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2-1} y_2^{\beta_2} \dots + \dots \tag{2}$$

von den Reihengewichtszahlen $p_1 - 1$, p_2 über, während die rechte Seite der Gleichung (1) die Gestalt annimmt:

$$\lambda_1 \Sigma \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \Sigma \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_\sigma \sum \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_1}, \tag{3}$$

wo beispielsweise

$$\sum \frac{\partial A}{\partial x_1} = r \frac{\partial A}{\partial a_1} + (r-1)\left(\frac{\partial A}{\partial a_{11}} a_1 + \frac{\partial A}{\partial a_{12}} a_2\right) + (r-2)\left(\frac{\partial A}{\partial a_{111}} a_{11} + \frac{\partial A}{\partial a_{112}} a_{12} + \frac{\partial A}{\partial a_{122}} a_{22}\right) + \dots \tag{4}$$

ist.

Sind die Darstellungen der symmetrischen Functionen (2) vom Gewichte $p_1 - 1$, p_2 bekannt, so erhalten wir durch Vergleichen mit (3) eine Anzahl von linearen Gleichungen für $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\sigma$, aus denen sich dieselben im Allgemeinen ohne Schwierigkeiten ermitteln lassen. Da in diese Gleichungen in Folge der Operationen (4) die Gruppenzahl r linear eintritt, von welcher die Coëfficienten λ bekanntlich unabhängig sein müssen, so muss jede derselben in zwei neue Gleichungen zerfallen, indem der Coëfficient von r und damit auch der übrige Theil jeder Gleichung verschwinden muss. In vielen Fällen ist es jedoch zweckmässiger, die Gruppenzahl r in jenen Gleichungen zu lassen und diese Grösse gleich 0, 1, 2, ... zu setzen, wobei sich ebenfalls die Zahlen $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\sigma$ ermitteln lassen.

Sind beispielsweise die Functionen vom Gewicht $p_1 = 3$, $p_2 = 1$ zu berechnen, so setze man

$$J = \sum (\overset{3}{x}, \overset{1}{y}) = \alpha a_1^3 a_2 + \beta a_1^2 a_{12} + \gamma a_1 a_2 a_{11} + \delta a_1 a_{112} + \varepsilon a_2 a_{111} + \xi a_{11} a_{12} + \rho a_{1112},$$

dann geht dieselbe nach einmaliger Anwendung der Operation Δ_x über in:

$$\sum \frac{\partial J}{\partial x_1} = a_1^2 a_2 \{3\alpha r + (r-1)(\beta+\gamma)\} + a_1 a_{12}\{2\beta r + \xi(r-1) + \delta(r-2)\}$$
$$+ a_2 a_{11}\{\gamma r + \xi(r-1) + \varepsilon(r-2)\} + a_{112}\{\delta r + \rho(r-3)\}.$$

Ist nun J eine der 7 Functionen vom Gewichte $p_1 = 3$, $p_2 = 1$, z. B. $J = \Sigma x_1^3 y_1$ zu bilden, so ist

$$\sum \frac{\partial J}{\partial x_1} = 3\Sigma x_1^2 y_1 = 3(a_1^2 a_2 - a_1 a_{12} - a_2 a_{11} + a_{112}).$$

Durch Coëfficientenvergleichung ergeben sich alsdann die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} 3 &= 3\alpha r + (\beta+\gamma)(r-1) \\ -3 &= 2\beta r + \xi(r-1) + \delta(r-2) \\ -3 &= \gamma r + \xi(r-1) + \varepsilon(r-2) \\ 3 &= \delta r + \rho(r-3), \end{aligned}$$

die nach dem, was wir oben gesagt haben, selbst wieder je in zwei weitere Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3\alpha + \beta + \gamma &= 0, & \beta + \gamma + 3 &= 0, \\ 2\beta + \xi + \delta &= 0, & 2\delta + \xi - 3 &= 0, \\ \gamma + \xi + \varepsilon &= 0, & \xi + 2\varepsilon - 3 &= 0, \\ \delta + \rho &= 0, & \rho + 1 &= 0 \end{aligned}$$

zerfallen müssen, aus denen wir direct

$$\alpha = -\beta = \delta = \varepsilon = \xi = -\rho = 1, \; \gamma = -2$$

erhalten. Die zu berechnende Function ist somit dargestellt durch

$$\Sigma x_1^3 y_1 = a_1^3 a_2 - a_1^2 a_{12} - 2a_1 a_2 a_{11} + a_1 a_{112} + a_2 a_{111} + a_{11} a_{12} - a_{1112}.$$

Ist die Function J, welche durch Elementarfunctionen auszudrücken ist, i-förmig, wo $i > 2$ ist, so verschwindet dieselbe für jeden Werth von $r = i_1 < i$ und damit auch alle Productcombinationen von (1), in denen höhere als i_1-förmige Elementarfunctionen auftreten. Das Aggregat der übrig bleibenden Producte muss alsdann, wie wir in §. 6 gesehen haben, eine identische Relation zwischen den Elementarfunctionen von i_1 Gruppen sein. Ist diese bekannt, so kann man auch durch Coëfficientenvergleichung die Coëfficienten des restirenden Aggregats ermitteln.

So erhalten wir beispielsweise für die Function

$$\Sigma x_1^2 y_2 y_3 = \lambda_1 a_1^2 a_2^2 + \lambda_2 a_1^2 a_{22} + \lambda_3 a_1 a_2 a_{12} + \lambda_4 a_2^2 a_{11} + \lambda_5 a_{12}^2 + \lambda_6 a_{11} a_{22} + \lambda_7 a_1 a_{122} + \lambda_8 a_2 a_{112} + \lambda_9 a_{1122}$$

für $r = 2$ durch Vergleichen mit der Relation

$$\mathrm{II}_{22} = a_1^2 a_{22} + a_2^2 a_{11} + a_{12}^2 - a_1 a_2 a_{12} - 4a_{11} a_{22} = 0$$

die Coëfficienten

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 : \lambda_5 : \lambda_6 = 1 : -1 : 1 : 1 : -4.$$

b) In gleicher Weise kann die Function J auch durch einförmige Functionen ausgedrückt werden. Man setze

$$J = \lambda_1 \mathfrak{A}_1 + \lambda_2 \mathfrak{A}_2 + \ldots + \lambda_\sigma \mathfrak{A}_\sigma = f(\mathfrak{a}), \tag{5}$$

wo $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\sigma$ sämmtliche Productcombinationen von einförmigen Functionen bezeichnen, die mit J isobar und vom Gewicht p_1, bezw. p_2 sind; dann geht dieselbe nach einmaliger Anwendung der Operation Δ_x, §. 5 Nr. (6) in eine Summe von symmetrischen Functionen über

$$\sum \frac{\partial J}{\partial x_1} = \lambda_1 \sum \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \sum \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_\sigma \sum \frac{\partial \mathfrak{A}_\sigma}{\partial x_1},$$

deren Gewichtszahlen $p_1 - 1$ und p_2 sind. Sind diese berechnet, so erhält man durch Coëfficientenvergleichung direct die nöthige Anzahl von linearen Gleichungen zur Ermittlung von $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\sigma$.

Zur Berechnung der Functionen der Tabelle Nr. 40 können wir setzen:

$$J = \sum (\overset{3}{x}, \overset{1}{y}) = \alpha \mathfrak{a}_1^3 \mathfrak{a}_2 + \beta \mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_{12} + \gamma \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_{11} + \delta \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_{112} + \varepsilon \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_{111} + \xi \mathfrak{a}_{11} \mathfrak{a}_{12} + \rho \mathfrak{a}_{1112},$$

woraus wir nach einmaliger Anwendung der Operation Δ_x (6) in §. 5 erhalten.

$$\sum \frac{\partial J}{\partial x_1} = \mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_2 (3\alpha r + \beta + 2\gamma) + \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_{12} (2\beta r + 2\delta + 2\xi) + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_{11} (\gamma r + \xi + 3\varepsilon) + \mathfrak{a}_{112} (\delta r + 3\rho).$$

Ist nun beispielsweise $J = \Sigma x_1 x_2 x_3 y_4$ zu berechnen, so ist

$$\sum \frac{\partial J}{\partial x_1} = (r-3) \Sigma x_1 x_2 y_3 = (r-3) \left\{ \frac{1}{2} \mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_{12} - \frac{1}{2} \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{a}_{112} \right\},$$

ein Ausdruck, der aus Tabelle (28) zu entnehmen ist.

Durch Vergleichung der Coëfficienten erhalten wir alsdann die vier Gleichungen:

$$\frac{1}{2}(r-3) = 3\alpha r + \beta + 2\gamma; \quad -(r-3) = 2\beta r + 2\delta + 2\xi$$

$$-\frac{1}{2}(r-3) = \gamma r + \xi + 3\varepsilon; \qquad r-3 = \delta r + 3\rho,$$

die selbst wieder in die acht weiteren zerfallen müssen:

$$\frac{1}{2} = 3\alpha, \quad -\frac{3}{2} = \beta+2\gamma; \quad -1 = 2\beta, \quad 3 = 2\delta+2\xi,$$

$$-\frac{1}{2} = \gamma, \quad \frac{3}{2} = \xi+3\varepsilon; \quad 1 = \delta, \quad -3 = 3\rho,$$

woraus sich direct ergibt

$$\alpha = \frac{1}{6}, \quad \beta = \gamma = -\frac{1}{2}, \quad \delta = 1, \quad \rho = -1, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{3}.$$

c) Es sei hier auch bemerkt, dass sich die Functionen in den Tabellen *c)* und *e)* in ähnlicher Weise mit Hilfe unbestimmter Coëfficienten und der Operationen Δ_x und Δ_y berechnen lassen wie die Functionen der Tabellen *d)* und *f)*.

Diese Methode kann auch zur successiven Darstellung der Productcombinationen der Tabellen *a)* und *b)* benützt werden.

2. Die Processe Δ_x^y und Δ_y^x.

Ebenso wichtig wie die Processe Δ_x und Δ_y zur successiven Berechnung der symmetrischen Functionen sind auch die Processe Δ_x^y und Δ_y^x, die in erster Linie dazu dienen, eine bekannte symmetrische Function in andere, vom gleichen Totalgewicht aber verschiedenen Reihengewichten überzuführen.

Ist insbesondere diese Function einreihig und bezw. von der Form

$$1) \qquad \Sigma x_1^{\varkappa} = \varphi(a),$$

$$2) \qquad \Sigma x_1 x_2 \ldots x_p = f(\mathfrak{a}),$$

$$3) \qquad \Sigma x_1^{\alpha} x_2^{\alpha} \ldots x_{\varkappa}^{\alpha} = \Psi(a) = f(a),$$

so geht dieselbe mit Hilfe der Operation Δ_x^y direct in die zweireihigen Functionen über

$$1) \qquad \Sigma x_1^{\varkappa-1} y_1 \quad \Sigma x_1^{\varkappa-2} y_1^2, \ldots, \text{ bezw.}$$

$$2) \qquad \Sigma x_1 x_2 \ldots y_p, \; \Sigma x_1 x_2 \ldots y_{p-1} y_p, \ldots, \text{ bezw.}$$

$$3) \qquad \Sigma x_1^{\alpha-1} y_1 x_2^{\alpha} \ldots x_{\varkappa}^{\alpha},$$

welche ebenfalls durch elementare oder einförmige Functionen ausgedrückt sind. Auf diese Weise kann ein grosser Theil der Functionen der Tabellen *f)* und *d)* berechnet werden.

Auch eine Reihe weiterer Functionen lässt sich vortheilhaft mit Hilfe der Operation Δ_x^y ermitteln.

Die mehrförmige Function

$$\Sigma x_1^{\lambda} y_2^{\mu} y_3^{\nu} \ldots = \varphi(a) = f(\mathfrak{a}),$$

welche nur in einer Theilfunction die Elemente der Reihe $x_1 x_2 \ldots x_r$ enthält, geht nach mehrmaliger Anwendung der Operation Δ_x^y successive in die weiteren Functionen über

$$\Sigma x_1^{\lambda-1} y_1 y_2^{\mu} y_3^{\nu} \ldots, \quad \Sigma x_1^{\lambda-2} y_1^2 y_2^{\mu} y_3^{\nu} \ldots, \quad \ldots,$$

wodurch wiederum ein Theil der Functionen in den Tabellen *d)* und *f)* berechnet werden kann.

Ist die mehrförmige Function

$$J = \Sigma x_1^{\lambda} y_2^{\mu} y_3^{\nu} \ldots = f(a),$$

welche nur in einer Theilfunction die $x_1 x_2 \ldots$ (oder auch $y_1 y_2 \ldots$) enthält, durch einförmige Functionen $\mathfrak{a}$ ausgedrückt, so erhalten wir hieraus mit Hilfe der Processe

$$\Delta_x^{\lambda^{\varkappa}} = \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} x_1^{\varkappa},$$

bezw.

$$\Delta_x^{y^{\varkappa}} = \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} y_1^{\varkappa},$$

direct die beiden weiteren Functionen

$$\Sigma x_1^{\lambda+\varkappa-1} y_2^{\mu} y_3^{\nu} \ldots,$$

bezw.

$$\Sigma x_1^{\lambda-1} y_1^{\varkappa} y_2^{\mu} y_3^{\nu} \ldots$$

Es ist

$$\Sigma x_1^{\lambda+\varkappa-1} y_2^{\mu} y_3^{\nu} \ldots = \frac{1}{\lambda} \Delta_x^{x^{\varkappa}} = \frac{1}{\lambda} \Big\{ \frac{\partial f}{\partial a_2} a_{\varkappa,0} + \frac{\partial f}{\partial a_{12}} a_{\varkappa,1} + \frac{\partial f}{\partial a_{122}} a_{\varkappa,2} + \ldots$$

$$+2\left(\frac{\partial f}{\partial a_{11}} a_{\varkappa+1,0} + \frac{\partial f}{\partial a_{112}} a_{\varkappa+1,1} + \ldots\right) + 3\left(\frac{\partial f}{\partial a_{111}} a_{\varkappa+2,0} + \frac{\partial f}{\partial a_{1112}} a_{\varkappa+2,1} + \ldots\right) + \ldots \Big\}$$

$$\Sigma x_1^{\lambda-1} y_1^{\varkappa} y_2^{\mu} y_3^{\nu} \ldots = \frac{1}{\lambda} \Delta_x^{y^{\varkappa}} = \frac{1}{\lambda} \Big\{ \frac{\partial f}{\partial a_1} a_{0,\varkappa} + \frac{\partial f}{\partial a_{12}} a_{0,\varkappa+1} + \ldots$$

$$+2\left(\frac{\partial f}{\partial a_{11}} a_{1,\varkappa} + \frac{\partial f}{\partial a_{112}} a_{1,\varkappa+1} + \ldots\right) + 3\left(\frac{\partial f}{\partial a_{111}} a_{2,\varkappa} + \frac{\partial f}{\partial a_{1112}} a_{2,\varkappa+1} + \ldots\right) + \ldots \Big\},$$

wo $\varkappa = 1, 2, 3 \ldots$ zu setzen ist.

Durch diese Operation lässt sich ebenfalls ein grösserer Theil der in den Tabellen *d)* enthaltenen Functionen berechnen.

Wendet man dieselben Processe auf die einreihige Function

$$\Sigma x_1 x_2 \ldots x_i = f(a)$$

an, so ergeben sich die weiteren Functionen

$$\Sigma x_1^{\varkappa} x_2 \ldots x_i = \frac{\partial f}{\partial a_1} a_{\varkappa,0} + 2\frac{\partial f}{\partial a_{11}} a_{\varkappa+1,0} + 3\frac{\partial f}{\partial a_{111}} a_{\varkappa+2,0} + \ldots$$

$$\Sigma y_1^{\varkappa} x_2 \ldots x_i = \frac{\partial f}{\partial a_1} a_{0,\varkappa} + 2\frac{\partial f}{\partial a_{11}} a_{1,\varkappa} + 3\frac{\partial f}{\partial a_{111}} a_{2,\varkappa} + \ldots,$$

von denen die letztere wieder Veranlassung zur Bildung der weiteren Functionen gibt:

$$\Sigma y_1^{\varkappa} x_2^{\lambda} x_3 \ldots x_i, \quad \Sigma y_1^{\varkappa} y_2^{\mu} x_3 \ldots x_i, \quad \Sigma y_1^{\varkappa} y_2^{\mu} x_3^{\nu} x_4 \ldots x_i, \quad \Sigma y_1^{\varkappa} y_2^{\lambda} y_3^{\nu} x_4 \ldots x_i \quad \text{etc.}$$

Kennt man die Entwicklung der Potenz a_1^p durch isobare symmetrische Functionen S_1, $S_2 \ldots$

$$a_1^p = \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \ldots,$$

wo $\lambda_1 \lambda_2 \ldots$ Zahlencoëfficienten bezeichnen sollen, so geht dieselbe mit Hilfe des Processes Δ_x^y direct in die weiteren Productcombinationen über

$$a_1^{p-1} a_2, \quad a_1^{p-2} a_2^2, \quad \ldots, \quad a_2^p.$$

Beispielsweise erhalten wir aus

$$a_1^4 = \Sigma x_1^4 + 4\Sigma x_1^3 x_2 + 6\Sigma x_1^2 x_2^2 + 12\Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 24\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4,$$

ohne Schwierigkeiten die Entwicklungen der zweireihigen Productcombinationen

$$a_1^3 a_2 = \Sigma x_1^3 y_1 + \{\Sigma x_1^3 y_2 + 3\Sigma x_1^2 y_1 x_2\} + 3\Sigma x_1^2 x_2 y_2 + \{3\Sigma x_1^2 x_2 y_3 + 6\Sigma x_1 y_1 x_2 x_3\} + 6\Sigma x_1 x_2 x_3 y_4,$$

$$a_1^2 a_2^2 = \Sigma x_1^2 y_1^2 + 2\{\Sigma x_1^2 y_1 y_2 + \Sigma y_1^2 x_1 x_2\} + \{\Sigma x_1^2 y_2^2 + 4\Sigma x_1 y_1 x_2 y_2\} +$$

$$+ 2\{\Sigma x_1^2 y_2 y_3 + \Sigma x_1 y_1 x_2 y_3 + \Sigma y_1^2 x_2 x_3\} + 4\Sigma x_1 x_2 y_3 y_4.$$

3. Eine weitere sehr wichtige Anwendung finden die Processe Δ_x^y und Δ_y^x bei der Bildung der Relationen zwischen den elementaren oder einförmigen Functionen einer endlichen Anzahl von Gruppen $x_1 y_1$, $x_2 y_2, \ldots, x_r y_r$.

Ist nämlich

$$R_{p_1 p_2} = 0$$

eine identische Relation zwischen den Elementarfunctionen von r Gruppen vom Gewicht p_1, bezw. p_2 in Bezug auf die Reihen $x_1 x_2 \ldots x_r$, bezw. $y_1 y_2 \ldots y_r$, so gewinnt man hieraus nach wiederholter Anwendung von Δ_x^y die weiteren Relationen

$$R_{p_1-1,\, p_2+1} = 0, \quad R_{p_1-2,\, p_2+2} = 0, \ldots$$

und ebenso umgekehrt mit Hilfe von Δ_y^x die Relationen:

$$R_{p_1+1,\, p_2-1} = 0, \quad R_{p_1+2,\, p_2-2} = 0, \ldots$$

welche sämmtlich den gleichen Grad und das gleiche Totalgewicht $p_1 + p_2$, aber verschiedene Reihengewichtszahlen besitzen.

So erhalten wir beispielsweise aus der Relation

$$\mathrm{III}_{42} = 0$$

vom Gewicht 6 für drei Gruppen mit Hilfe der Operation Δ_x^y der Reihe nach die weiteren Relationen

$$\mathrm{III}_{33} = 0, \quad \mathrm{III}_{24} = 0,$$

die wir in §. 6 kennen gelernt haben.

Zum Schluss möge auch noch ein Verfahren angegeben werden, mittelst dessen sämmtliche Relationen gleichen Grades, aber verschiedenen Gewichtes aus einer einzigen bekannten Relation hergeleitet werden können.

In Band 45, S. 20 u. ff. der Math. Annalen habe ich verschiedene Methoden zur allgemeinen Bildung der Relationen entwickelt und auch gezeigt, dass die niedrigsten derselben für r Gruppen vom Grad $r+1$ sein müssen. Damals habe ich solche vom Gewicht $r+2$, $r+3$, $\ldots$, $2r$ gefunden, während höhere Relationen geichen Grades vom Gewicht $2r+1$, $2r+2, \ldots$ nach jenen Methoden nicht gewonnen werden konnten. Zu diesen weiteren Relationen gelangen wir auf folgende Weise.

Wir nehmen an, es sei auf irgend eine Weise eine niedrigste Relation für r Gruppen

$$R = \varphi(a_1 a_2 a_{11} \ldots) = 0$$

vom Grad $r+1$ in den Elementarfunctionen a_1, a_2; $a_{11}\, a_{12}\, a_{22}$; $\ldots$; $a_{r,0}$, $a_{r-1,1}$, $\ldots$, $a_{0,r}$ gefunden worden Setzen wir alsdann an Stelle der Elemente $x_1 x_2, \ldots, x_r$; $y_1 y_2, \ldots, y_r$ die homogenen Elemente $\frac{x_1}{z_1} \frac{x_2}{z_2} \ldots \frac{x_r}{z_r}$; $\frac{y_1}{z_1} \frac{y_2}{z_2} \ldots \frac{y_r}{z_r}$, so geht jede Elementarfunction, zum Beispiel a_{1122} in das Verhältniss zweier $r$förmigen elementären Functionen, zum Beispiel $\frac{\Sigma x_1 x_2 y_3 y_4 z_5 \ldots z_r}{z_1 z_2 \ldots z_r} = \frac{a_{2,2,r-4}}{a_{0,0,r}}$ und damit die Relation φ selbst in eine homogene Relation von demselben Grad $r+1$ und dem Gewicht $r(r+1)$ über. Besitzt die Function φ hinsichtlich der Reihen $x_1 x_2 \ldots$, bezw. $y_1 y_2 \ldots$ die Gewichtszahlen p_1, bezw. p_2, so erhält sie nach obiger Transformation und Multiplication mit $a_{0,0,r}^{r+1}$ hinsichtlich $z_1 z_2 \ldots$ das Gewicht

$$p_3 = r^2 + r - p_1 - p_2.$$

Sie sei deshalb mit

$$R_{p_1 p_2 p_3} = 0$$

bezeichnet. Indem wir nun auf dieselbe die Processe Δ_z^x, Δ_z^y wiederholt anwenden, gelangen wir schliesslich zu einer Reihe weiterer Relationen, welchen die Gewichtszahlen entsprechen

$$p_1+1,\ p_2,\ p_3-1;\quad p_1,\ p_2+1,\ p_3-1;$$

$$p_1+2,\ p_2,\ p_3-2;\quad p_1+1,\ p_2+1,\ p_3-2;\quad p_1,\ p_2+2,\ p_3-2;$$

$$p_1+3,\ p_2,\ p_3-3;\quad p_1+2,\ p_2+1,\ p_3-3;\quad p_1+1,\ p_2+2,\ p_3-3;\quad p_1,\ p_2+3,\ p_3-3;$$

. . . .

. . . .

Hiebei ist zu bemerken, dass die Gewichtszahlen p_1 und p_2 dieser Relationen hinsichtlich der Reihen $x_1 x_2 \ldots$ und $y_1 y_2 \ldots$ beständig zunehmen auf Kosten der Gewichtszahl p_3 in Bezug auf die Reihe $z_1 z_2 \ldots$

Setzt man in denselben nachträglich $z_1 = z_2 = \ldots = z_r = 1$, so geht jede dieser Relationen wieder in eine zweireihige über, welcher beziehungsweise die Gewichtzahlen

$$p_1+1,\ p_2;\ p_1,\ p_2+1;\ p_1+2,\ p_2;\ p_1+1,\ p_2+1;\ p_1,\ p_2+2;\ldots$$

entsprechen. Bei dieser Gelegenheit zeigt sich, dass ein Theil derselben illusorisch wird, und zwar alle diejenigen, welche hinsichtlich z das Gewicht $p_3 = 0$, 1 oder 2 besassen. Für die übrigen ist dies jedoch nicht der Fall. Wir sehen somit, dass in der That neben den Relationen vom Gewicht $r+2$, $r+3, \ldots, 2r$ auch solche vom Gewicht $2r+1$, $2r+2, \ldots, r(r+1)-2$ existiren.

Für drei Gruppen $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ haben wir beispielsweise früher nur die fünf Relationen vom Grad 4.

$$\mathrm{III}_{32} = 0,\quad \mathrm{III}_{23} = 0,$$
$$\mathrm{III}_{42} = 0,\quad \mathrm{III}_{33} = 0,\quad \mathrm{III}_{24} = 0$$

gefunden. Führt man jedoch in eine derselben, zum Beispiel in III_{32} die homogenisirende Reihe $z_1 z_2 \ldots$ ein, so geht diese über in die dreireihige Relation

$$\begin{aligned}\mathrm{III}_{327} = a_{133}\{a_{133}^2 a_{223} + a_{233}^2 a_{113} + a_{123}^2 a_{333} - a_{133} a_{233} a_{123} - 4a_{113} a_{223} a_{333}\} - 3a_{111} a_{333}(a_{233}^2 - 3a_{223} a_{333}) \\ + a_{112} a_{333}(2a_{133} a_{233} - 3a_{123} a_{333}) - a_{122} a_{333}(a_{133}^2 - 3a_{113} a_{333}) = 0,\end{aligned}$$

welche als Ausgangspunkt zur Darstellung der weiteren Relationen gleichen Grades dient:

$$\mathrm{III}_{52},\ \mathrm{III}_{43},\ \mathrm{III}_{34},\ \mathrm{III}_{25};$$
$$\mathrm{III}_{62},\ \mathrm{III}_{53},\ \ldots,\ \mathrm{III}_{26};$$
$$\mathrm{III}_{72},\ \mathrm{III}_{63},\ \ldots,\ \mathrm{III}_{27};$$
$$\mathrm{III}_{82},\ \mathrm{III}_{73},\ \ldots,\ \mathrm{III}_{28},$$

welche wir nach den früheren Methoden nicht erhalten.

Ausgeführt nehmen einige dieser Relationen die Gestalt an:

$$\begin{aligned}\mathrm{III}_{53} = -a_2(2a_1 a_{112}^2 + a_{11}^2 a_{122} + a_{12}^2 a_{111} - a_{11} a_{12} a_{112}) - a_1(3a_{11}^2 a_{222} \\ + 3a_{12} a_{22} a_{111} - 3a_{11} a_{22} a_{112} - 4a_2 a_{111} a_{122} - 12a_1 a_{111} a_{222}) + a_{112}(-12a_{22} a_{111} \\ + 3a_{12} a_{112} - 3a_{11} a_{122} + 4a_2^2 a_{111} - 2a_1 a_2 a_{112}) + a_{111}(3a_{12} a_{122} - 9a_{11} a_{222} + a_2 a_{11} a_{22}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{III}_{44} = a_1(a_{22}^2 a_{111} + a_{11} a_{12} a_{222} - a_{11} a_{22} a_{122}) + a_2(a_{11}^2 a_{222} + a_{22} a_{12} a_{111} - a_{11} a_{22} a_{112}) \\ + a_{112}(a_{22} a_{112} + 3a_{11} a_{222}) + a_{122}(a_{11} a_{122} + 3a_{22} a_{111}) + 2a_1 a_2 a_{112} a_{122} \\ - 2a_{12} a_{112} a_{122} - 6a_1 a_2 a_{111} a_{222} - 2a_1^2 a_{112} a_{222} - 2a_2^2 a_{122} a_{111}^2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{III}_{62} = -a_1(a_1 a_{112}^2 + a_{11}^2 a_{122} + a_{12}^2 a_{111} - a_{11} a_{12} a_{112} - 4a_1 a_{111} a_{122}) \\ + a_{111}(-9a_{22} a_{111} + 3a_{12} a_{112} - 3a_{11} a_{122} + 3a_2^2 a_{111} + a_1 a_{11} a_{22} - 2a_1 a_2 a_{112} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{III}_{72} = a_{11}(a_{11}^2 a_{122} + a_1 a_{112}^2 + a_{12}^2 a_{111} - a_{11} a_{12} a_{112} - 4a_1 a_{111} a_{122}) \\ - 3a_{111}(a_{112}^2 - 3a_{111} a_{122}) + a_2 a_{111}(2a_{11} a_{112} - 3a_{12} a_{111}) - a_{22} a_{111}(a_{12}^2 - 3a_1 a_{111}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{III}_{63} = & -a_{12}(a_{11}^2a_{122}+a_1a_{112}^2+a_{12}^2a_{111}-a_{11}a_{12}a_{112}-4a_1a_{111}a_{122}) \\ & +a_{111}(3a_{112}a_{122}+3a_1a_{11}a_{222}+a_2a_{12}a_{112}+a_{11}a_{12}a_{22}-3a_1a_{22}a_{112} \\ & -3a_2a_{11}a_{122}+3a_2a_{22}a_{111}-27a_{111}a_{222}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{III}_{54} = & -a_{12}(+3a_{11}^2a_{222}+5a_{12}a_{22}a_{111}-3a_2a_{111}a_{122}-5a_{11}a_{22}a_{112}-15a_1a_{111}a_{222}) \\ & +a_{22}(-5a_1a_{112}^2-2a^2{}_1a_{122}+2a_1a_{111}a_{122})+a_{112}(3a_1a_{11}a_{222}+3a_{112}a_{122}-3a_2a_{11}a_{122} \\ & +5a_2a_{22}a_{111}-45a_{111}a_{222})+a_{111}(6a_{122}^2-6a_2a_{11}a_{222}+2a_{11}a_{22}^2) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{III}_{73} = & \, a_{112}(a_{11}^2a_{122}+a_1a_{112}^2-a_{11}a_{12}a_{112}-4a_1a_{111}a_{122}+a_{111}a_{12}^2) \\ & +a_{111}(-3a_{11}^2a_{222}+2a_{11}a_{22}a_{112}-3a_{12}a_{22}a_{111}-a_2a_{112}^2+3a_2a_{11}a_{122}+9a_1a_{111}a_{222}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{III}_{64} = & \, a_{122}(a_{11}^2a_{122}+a_1a_{112}^2-a_{11}a_{21}a_{112}-4a_1a_{111}a_{122}+a_{111}a_{12}^2) \\ & +a_{111}(2a_{11}a_{22}a_{122}-3a_{11}a_{12}a_{222}-3a_{22}^2a_{111}+3a_1a_{112}a_{222}-a_2a_{112}a_{122}+9a_2a_{111}a_{222}) = 0.\end{aligned}$$

2. Abschnitt.

Die zweifach symmetrischen Functionen.

§. 8.

Die zwei- und mehrfach symmetrischen Functionen.

Treten zwei Systeme, zum Beispiel

$$\begin{array}{c} x_1y_1,\ x_2y_2,\ldots,\ x_my_m \\ x'_1y'_1,\ x'_2y'_2,\ldots,\ x'_ny'_n \end{array} \tag{1}$$

von m, beziehungsweise n Variablenpaaren zu einander in Beziehung, so lassen sich auch Functionen bilden, die sich nicht ändern, wenn man zwei Gruppen des einen oder des andern Systems miteinander vertauscht. Eine solche Function verhält sich symmetrisch hinsichtlich der Gruppen jedes der beiden Systeme. Ich nenne dieselbe eine zweifach symmetrische Function jener Gruppen.

Eine zweifach symmetrische Function der Gruppen zweier Systeme von Elementen ist eine solche, die sich nicht ändert, wenn man zwei Gruppen des einen oder auch zwei Gruppen des andern Systems miteinander vertauscht. Beispielsweise ist

$$J = (x_1y'_1)(x_1y'_2)(x_2y'_1)(x_2y'_2)$$

eine zweifach symmetrische Function der beiden Systeme von je zwei Variablenpaaren

$$x_1y_1,\ x_2y_2;\quad x'_1y'_1,\ x'_2y'_2.$$

Wir werden weiter unten solchen Functionen begegnen. Allgemein wollen wir definiren:

Eine i-fach symmetrische Function der Gruppen von i-Systemen von Elementen ist eine solche, die sich nicht ändert, wenn man zwei Gruppen irgend eines Systems mit einander vertauscht.

Betrachtet man in einer solchen die Elemente von $i-1$ Systemen als constant, so ist dieselbe symmetrisch hinsichtlich der Gruppen des i-ten Systems und kann deshalb einerseits durch die Elementarfunctionen, anderseits durch die einförmigen Functionen derselben dargestellt werden. Da dies für jedes der i-Systeme der Fall ist, so gilt der Satz:

Eine i-fach symmetrische Function von i-Systemen von beliebig vielen Gruppen von Elementen lässt sich als Function der Elementarfunctionen, beziehungsweise einförmigen Functionen der Gruppen jedes der i-Systeme darstellen. Ist die i-fach symmetrische Function eine ganze Function der Elemente der i-Systeme, so kann sie auch als ganze Function der Elementarfunctionen, beziehungsweise einförmigen Functionen derselben dargestellt werden.

Die oben angeführte zweifach symmetrische Function J nimmt durch die Elementarfunctionen ausgedrückt die Gestalt an:

$$J = a_{11}^2 b_{22}^2 - a_{11} a_{12} b_{12} b_{22} + a_{12}^2 b_{11} b_{22} - 2 a_{11} a_{22} b_{11} b_{22} + a_{11} a_{22} b_{12}^2 - a_{12} a_{22} b_{11} b_{12} + a_{22}^2 b_{11}^2,$$

wo die Functionen der beiden Systeme mit dem Buchstaben a, beziehungsweise b bezeichnet sind.

Ist

$$J = \varphi(a_1 a_2 \ldots;\ b_1 b_2 \ldots) \tag{2}$$

eine zweifach symmetrische Function der beiden Systeme (1) von m, beziehungsweise n Gruppen, dargestellt durch die Elementarfunctionen der letzteren, so ergeben sich hieraus die weiteren Darstellungsarten:

$$\begin{aligned} J' &= \varphi'\ (a_1 a_2 \ldots;\ \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots), \\ J'' &= \varphi''(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots;\ b_1 b_2 \ldots), \\ J''' &= \varphi'''(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots;\ \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots), \end{aligned} \tag{3}$$

je nach dem die Elementarfunctionen eines der beiden Systeme oder sämmtliche Elementarfunctionen durch ihre Ausdrücke in den einförmigen Functionen $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots;\ \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots$ ersetzt sind.

Ist durch irgend ein Gesetz bestimmt, in welcher Weise die Elemente zweier Systeme von Gruppen zu zweifach symmetrischen Functionen zusammentreten sollen, so kann man auch von Elementen und Elementarfunctionen der letzteren reden. Sind $t_1 t_2 \ldots t_r$ die Elemente derselben, so bezeichnen wir mit

$$\Sigma t_1 = A_1, \quad \Sigma t_1 t_2 = A_2, \quad \Sigma t_1 t_2 t_3 = A_3, \ldots$$

deren Elementarfunctionen und mit

$$\Sigma t_1 = S_1, \quad \Sigma t_1^2 = S_2, \quad \Sigma t_1^3 = S_3, \ldots$$

deren Potenzsummen.

Da diese Functionen in der vorliegenden Form als einfach symmetrische Functionen erscheinen, so gelten für dieselben auch die Newton'schen Formeln:

$$\begin{aligned} S_1 &= A_1 \\ S_2 &= A_1^2 - 2A_2 \\ S_3 &= A_1^3 - 3A_1 A_2 + 3A_3 \\ S_4 &= A_1^4 - 4A_1^2 A_2 + 2A_2^2 + 4A_1 A_3 - 4A_4 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= S_1 \\ A_2 &= \frac{1}{2!}(S_1^2 - S_2) \\ A_3 &= \frac{1}{3!}(S_1^3 - 3S_1 S_2 + 2S_3) \\ A_4 &= \frac{1}{4!}(S_1^4 - 6S_1^2 S_2 + 8S_1 S_3 + 3S_2^2 - 6S_4), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

wodurch die Potenzsummen als ganze Functionen der Elementarfunctionen und umgekehrt ausgedrückt sind.

Hat man auf irgend welchem Wege die Darstellung der Summe der $p$ten Potenzen S_p durch Elementarfunctionen oder umgekehrt die der p-förmigen Function Ap durch Potenzsummen:

$$S_p = \varphi(A_1 A_2 \ldots), \quad A_p = f(S_1 S_2 \ldots)$$

kennen gelernt, so gewinnt man hieraus, wie ich gezeigt habe,* die Darstellung der nächst höheren Potenzsummen, bezw. Elementarfunctionen durch die Formeln:

$$S_p+1 = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{i=r} \frac{\partial \varphi}{\partial A_i}(A_1 A_i-(i+1)A_{i+1})$$
$$A_p+1 = \frac{1}{p+1}\left\{S_1 f - \sum_{i=1}^{i=p} i\frac{\partial f}{\partial S_i}\, S_{i+1}\right\}. \tag{6}$$

Allgemeine Endformeln für diese Functionen hat zuerst Waring** aufgestellt, denen dann später Herr Măcmahon*** die Gestalt gegeben hat:

$$(-1)^{r-1}\frac{1}{p}S_p = \sum (-1)^{\Sigma\lambda-1}\frac{(\Sigma\lambda-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\dots}A_{p_1}^{\lambda_1}A_{p_2}^{\lambda_2}\dots$$
$$(-1)^{p-1}A_p = \sum \frac{(-1)^{\Sigma\lambda-1}}{\lambda_1!\lambda_2!\dots}\left(\frac{1}{p_1}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{1}{p_2}\right)^{\lambda_2}\dots S_{p_1}^{\lambda_1}S_{p_2}^{\lambda_2}\dots, \tag{7}$$

wo sich das Summenzeichen über alle isobaren Producte von Elementarfunctionen, bezw. Potenzsummen vom Gewicht p erstreckt.

Um ein einfaches Beispiel von zweifach symmetrischen Functionen zu haben, wollen wir die Aufgabe zu lösen suchen:

Die Gleichung aufzustellen, deren Wurzeln die Differenzen der Wurzeln zweier algebraischen Gleichungen $m$ten und $n$ten Grades sind.

Bezeichnen mit $x_1 x_2 \dots x_m$, bezw. $y_1 y_2 \dots y_n$ die Wurzeln der gegebenen Gleichungen $m$ten und $n$ten Grades $f_m = 0$, bezw. $f_n = 0$ und deren Elementarfunctionen, bezw. Potenzsummen mit

$$a_1 a_2 \dots a_m;\; b_1 b_2 \dots b_n,$$

bezw.

$$s_1 s_2 s_3 \dots;\; s'_1 s'_2 s'_3 \dots,$$

so erhalten wir als Wurzeln der zu bildenden Gleichung:

$$\begin{gathered} t_1 = x_1-y_1,\; t_2 = x_1-y_2, \dots, t_n = x_1-y_n \\ t_{n+1} = x_2-y_1,\; t_{n+2} = x_2-y_2, \dots, t_{2n} = x_2-y_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ t_{mn-n+1} = x_m-y_1, \dots, t_{mn} = x_m-y_n. \end{gathered} \tag{8}$$

Da die Anzahl derselben $r = mn$, so erhellt, dass die gesuchte Gleichung vom Grad r und von der Form sein muss:

$$T(t) = t^r - A_1 t^{r-1} + A_2 t^{r-2} \dots + (-1)^r A_r = 0.$$

Es handelt sich nun darum, die Coëfficienten A in Function der Elementarfunctionen $a_1 a_2 \dots b_1 b_2 \dots$ zu berechnen.

Werden zu diesem Zweck zunächst die Elemente (8) in die erste, zweite, dritte, ..., $p$te Potenz erhoben und addirt, so ergeben sich direct die Potenzsummen:

---

* Zeitschrift für Mathematik und Physik 1896, S. 199 u. ff.

** Medidationes algebraicae. Editio tertia, p. 13.

*** Memoir on Symmetric Functions of the Roots of Systems of Equations. Philos. Transact. Vol. 181 (1890), p. 481—536.

$$
\begin{aligned}
S_1 &= ns_1 - ms'_1\\
S_2 &= ns_2 - 2s_1 s_2 + ms_2\\
S_3 &= ns_3 - 3s_2 s'_1 + 3s_1 s'_2 - ms'_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S_p &= n s_p - \binom{p}{1} s_{p-1} s'_1 + \binom{p}{2} s_{p-2} s'_2 - \ldots + (-1)^p m s'_p .
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Ersetzt man hierin die Potenzsummen s, bezw. s' durch die Elementarfunctionen a, bezw. b, so ergeben sich für die Functionen S die weiteren Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= na_1 - mb_1\\
S_2 &= n(a_1^2 - 2a_2) - 2a_1 b_1 + m(b_1^2 - 2b_2)\\
S_3 &= n(a_1^3 - 3a_1 a_2 + 3a_3) - 3(a_1^2 - 2a_2)b_1 + 3a_1(b_1^2 - 2b_2) - m(b_1^3 - 3b_1 b_2 + 3b_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{10}
$$

welche, in die Formeln (5) substituirt, direct zur Darstellung der gesuchten Functionen A führen:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= na_1 - mb_1\\
A_2 &= \frac{1}{2!}\{a_1^2 n(n-1) - 2a_1 b_1(mn-1) + b_1^2 m(m-1) + 2na_2 + 2mb_2\}\\
A_3 &= \frac{1}{3!}\{a_1^3 n(n^2 - 3n - 2) + 6na_1 a_2(n+1) - 6na_3 + 3a_1^2 b_1(-n^2 m + mn + 2n + 2)\\
&\quad - 3a_1 b_1^2(-m^2 n + mn + 2m + 2) + 6(mn+1)(a_1 b_2 - b_1 a_2) - b_1^3 m(m^2 - 3m - 2) - 6mb_1 b_2(m+1) + 6mb_3\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{11}
$$

womit die Aufgabe als gelöst angesehen werden mag. Hiebei fällt in die Augen, dass das Product A_r aller Differenzen (8) nichts anderes als die Resultante der gegebenen Gleichungen $f_m = 0$ und $f_n = 0$ darstellt. Ist dieselbe auf irgend eine Weise berechnet worden, so ergibt sich hieraus:

$$
A_{r-1} = \sum \frac{\partial A_r}{\partial t_1},\quad A_{r-2} = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial A_{r-1}}{\partial t_1} = \frac{1}{2!}\sum \frac{\partial^2 A_r}{\partial t_1^2},\qquad A_{r-3} = \frac{1}{3}\sum \frac{\partial A_{r-2}}{\partial t_1} = \frac{1}{3!}\sum \frac{\partial^3 A_r}{\partial t_1^3},\ \ldots
$$

Dasselbe Resultat erhält man offenbar auch, indem man an Stelle der Ableitungen nach $t_1 t_2 \ldots t_r$ die Summe der partiellen Ableitungen nach $x_1 x_2 \ldots x_m$ oder nach $y_1 y_2 \ldots y_n$ setzt. Es ist deshalb:

$$
\begin{aligned}
A_{r-1} &= \sum_1^m \frac{\partial A_r}{\partial x_1} = -\sum_1^n \frac{\partial A_r}{\partial y_1}\\
A_{r-2} &= \frac{1}{2!}\sum \frac{\partial^2 A_r}{\partial x_1^2} = +\frac{1}{2!}\sum \frac{\partial^2 A_r}{\partial y_1^2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_2 &= \frac{1}{(r-2)!}\sum \frac{\partial^{r-2} A_r}{\partial x_1^{r-2}} = \frac{(-1)^{r-2}}{(r-2)!}\sum \frac{\partial^{r-2} A_r}{\partial y_1^{r-2}}\\
A_1 &= \frac{1}{(r-1)!}\sum \frac{\partial^{r-1} A_r}{\partial x_1^{r-1}} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\sum \frac{\partial^{r-1} A_r}{\partial y_1^{r-1}} .
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Ist nun der Coëfficient $A = A_\varkappa = \varphi(a, b)$ auf irgend einem Wege durch die Elementarfunctionen von $x_1 x_2 \ldots x_m$ und $y_1 y_2 \ldots y_n$ ausgedrückt, so ergibt sich hieraus die $(\varkappa - 1)$-förmige Function $A_{\varkappa-1}$ durch die Operation:

$$A_{\varkappa-1} = \frac{1}{r-\varkappa+1}\left\{m\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + (m-1)a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + (m-2)a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + \ldots\right\}$$

oder durch (13)

$$A_{\varkappa-1} = \frac{-1}{(r-\varkappa+1)}\left\{n\frac{\partial\varphi}{\partial b_1} + (n-1)b_1\frac{\partial\varphi}{\partial b_2} + (n-2)b_2\frac{\partial\varphi}{\partial b_3} + \ldots\right\}.$$

Um die Coëfficienten $A_1 A_2 \ldots A_{r-1}$ mit Hilfe der Processe (12) und (13) berechnen zu können, ist demnach nur die Kenntniss der Resultante A_r vorauszusetzen.

Werden i-Wurzeln von $f_m = 0$ und $f_n = 0$ einander gleich, so müssen i-Wurzeln der Gleichung $T(t) = 0$ gleich Null sein. Dies tritt, wie schon Lagrange* gezeigt hat, ein, wenn die i-Bedingungen erfüllt sind.

$$A_r = 0, \quad A_{r-1} = 0, \; \ldots, \quad A_{r-i+1} = 0. \tag{14}$$

Während aber Lagrange diese Bedingungen durch partielle Ableitung der Resultante nach dem Coëfficienten des letzten Gliedes von f_m oder f_n erhält, werden dieselben hier mit Hilfe der Differentialprocesse (12) oder (13) gewonnen.

§. 9.

Die zweifach symmetrischen Functionen der Coordinaten zweier Punktsysteme in der Ebene.

Bezeichnen wir mit $P_1 P_2 \ldots P_m$, bezw. $P'_1 P'_2 \ldots P'_n$ zwei Systeme von m, bezw. n Punkten der Ebene mit den homogenen Coordinaten $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $\ldots$, $x_m y_m z_m$, bezw. $x'_1 y'_1 z'_1$, $x'_2 y'_2 z'_2, \ldots\ldots, x'_n y'_n z'_n$ so sind beispielsweise zwei Punkte derselben $P_\varkappa$, P'_λ angegeben durch:

$$ux_\varkappa + vy_\varkappa + wz_\varkappa = 0, \quad ux'_\lambda + vy'_\lambda + wz'_\lambda = 0, \tag{1}$$

woraus sich die Coordinaten der Verbindungslinie $P_\varkappa P'_\lambda$ ergeben:

$$u : v : w = y_\varkappa z'_\lambda - z_\varkappa y'_\lambda : z_\varkappa x'_\lambda - x_\varkappa z'_\lambda : x_\varkappa y'_\lambda - y_\varkappa x'_\lambda, \tag{2}$$

die wir in folgender Weise schreiben wollen:

$$u : v : w = (y_\varkappa z'_\lambda) : (z_\varkappa x'_\lambda) : (x_\varkappa y'_\lambda). \tag{2'}$$

Legt man hierin den Zahlen $\varkappa$ und λ alle möglichen Werthe von 1 bis m, bezw. 1 bis n bei, so ergeben sich hieraus die Coordinaten $u_1 v_1 w_1$, $u_2 v_2 w_2, \ldots$, $u_r v_r w_r$, wo $r = mn$ ist, sämmtlicher Verbindungslinien der Punkte des Systems P mit denen des Systems P'.

Nun ändert sich, wie leicht zu erkennen ist, eine symmetrische Function dieser Coordinaten nicht, wenn man zwei Gruppen $x_i y_i z_i$ und $x_\varkappa y_\varkappa z_\varkappa$ des Systems P oder auch zwei Gruppen $x'_i y'_i z'_i$ und $x'_\varkappa y'_\varkappa z'_\varkappa$ des Systems P' miteinander vertauscht.

Jede symmetrische Function der Coordinaten

$$u_1 v_1 w_1, \quad u_2 v_2 w_2, \quad \ldots\ldots, \quad u_r v_r w_r \tag{3}$$

der Geraden $P_\varkappa P'_\lambda$ ist somit eine zweifach symmetrische Function in Bezug auf die Coordinaten der Punkte der beiden Systeme $P_\varkappa$ und P'_λ, und kann deshalb in der in §. 2 beschriebenen Weise durch die Elementarfunctionen, bezw. einförmigen Functionen der letzteren ausgedrückt werden.

---

* Abhandlungen der Berliner Akademie 1770 und 1771.

Bezeichnen wir die Elementarfunctionen der Coordinaten (3) durch den lateinischen Buchstaben A, und deren Gewichtszahlen λ, μ, ν hinsichtlich der Reihen $u_1 u_2 \ldots$, $v_1 v_2 \ldots$; $w_1 w_2 \ldots$ durch untergesetzte Indices λ, μ, ν, so erhalten wir das System von elementaren doppelt-symmetrischen Functionen:

$$\begin{array}{c} A_{1,0,0} \quad A_{0,1,0} \quad A_{0,0,1} \\ A_{2,0,0} \quad A_{1,1,0} \quad A_{1,0,1} \quad A_{0,2,0} \quad A_{0,1,1} \quad A_{0,0,2} \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{r,0,0} \quad A_{r-1,1,0} \ldots \qquad A_{0,0,r} \end{array} \tag{4}$$

deren Anzahl $\sigma = \frac{r(r+3)}{2}$ ist.

Werden in ähnlicher Weise die einförmigen Functionen der Gruppen (3) durch den deutschen Buchstaben $\mathfrak{A}$ und entsprechende untere Indices, zum Beispiel

$$\Sigma u_1^\lambda v_1^\mu w_1^\nu \text{ mit } \mathfrak{A}_{\lambda,\,\mu,\,\nu}$$

bezeichnet, so ergibt sich ein dem System (4) analoges System von einförmigen Functionen, deren Anzahl, wie leicht zu sehen ist, unendlich ist.

Da aber die Anzahl der dieselben zusammensetzenden Elemente der beiden Systeme $P_\varkappa$ und P'_λ der Voraussetzung gemäss eine endliche Grösse ist, so folgt auch hier wie im binären Gebiet*, dass die einförmigen Functionen $\mathfrak{A}$ nicht unabhängig voneinander sein können, sondern durch unendlich viele identische Relationen untereinander zusammenhängen müssen.

§. 10.

Die Bedingungen der gemeinschaftlichen Punktepaare zweier Punktsysteme in der Ebene.

Nehmen wir an, die Elementarfunctionen A sowie die einförmigen Functionen $\mathfrak{A}$ seien durch die Elementarfunctionen $a_1 a_2 \ldots$ und $b_1 b_2 \ldots$, bezw. durch die einförmigen Functionen $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots$ und $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots$ der beiden Punktsysteme $P_1 P_2 \ldots P_m$; $P'_1 P'_2 \ldots P'_n$ dargestellt, so kann man verlangen, die Bedingungen aufzustellen, dass ein Punkt $P_\varkappa$ des ersten Systems mit einem beliebigen P'_λ des zweiten zusammenfällt. Die Bedingungen hiefür ergeben sich einfach durch folgende Überlegung.

Fallen die Punkte $P_\varkappa$ und P'_λ zusammen, so verschwinden offenbar die Coordinaten

$$u : v : w = (y_\varkappa z'_\lambda) : (z_\varkappa x'_\lambda) : (x_\varkappa y'_\lambda)$$

ihrer Verbindungslinie $P_\varkappa P'_\lambda$. Verbinden wir dieselben durch die lineare Gleichung

$$t_i = \alpha(y_\varkappa z'_\lambda) + \beta(z_\varkappa x'_\lambda) + \gamma(x_\varkappa y'_\lambda), \tag{1}$$

wo α, β, γ willkürliche Grössen bezeichnen sollen, und legen wir den Zahlen $\varkappa$, λ alle möglichen Werthe von $\varkappa = 1$ bis $\varkappa = m$, bezw. $\lambda = 1$ bis $\lambda = n$ bei, so ergeben sich $r = mn$ Werthe

$$t_1 t_2 \ldots t_r$$

für t_i, welche den mn Verbindungslinien der Punkte des Systems P mit denen des Systems P' entsprechen.

Die algebraische Gleichung, welche diese Grössen als Wurzeln enthält, ist dann angegeben durch

$$T^r - T^{r-1}\Sigma t_1 + T^{r-2}\Sigma t_1 t_2 - \ldots + (-1)^r t_1 t_2 \ldots t_r = 0. \tag{2}$$

Soll nun ein Punkt $P_\varkappa$ mit einem Punkt P'_λ zusammenfallen, so muss nothwendig eine Wurzel t_i dieser Gleichung Null werden. Dies ist aber bekanntlich der Fall, wenn der Coëfficient des letzten Gliedes derselben verschwindet. Diese Bedingung ist also angegeben durch

$$t_1 t_2 t_3 \ldots t_r \equiv \alpha^r A_{r,0,0} + \alpha^{r-1}\beta A_{r-1,1,0} + \ldots + \gamma^r A_{0,0,r} = 0. \tag{3}$$

* Vergleiche die Abhandlung des Verfassers: Zeitschrift für Mathematik und Physik. Jahrgang 1896, S. 207.

Da nun hierin die Grössen α, β, γ vollständig willkürlich gewählt sind, so leuchtet ein, dass auch die Coëfficienten der Potenzen und Producte von α, β, γ verschwinden müssen, wenn diese Gleichung bestehen soll.

Die Bedingungen, dass die beiden Punktsysteme P und P' ein gemeinschafliches Punktepaar besitzen, sind somit angegeben durch das Verschwinden der r-förmigen symmetrischen Functionen der Coordinaten der $r = mn$ Verbindungslinien der Punkte des einen Systems mit denen des andern:

$$A_{r,0,0} = 0, \quad A_{r-1,1,0} = 0, \quad \ldots, \quad A_{0,0,r} = 0. \tag{4}$$

Fallen zwei Punkte der beiden Systeme zusammen, so muss noch eine weitere Wurzel der Gleichung $T = 0$ verschwinden. Dies ist aber der Fall, wenn nicht nur der Coëfficient des letzten Gliedes jener Gleichung, sondern auch der des vorletzten $\Sigma t_1 t_2 \ldots t_{r-1} = 0$ ist. Da diese Function sich aus den sämmtlichen $(r-1)$-förmigen zweifach symmetrischen Functionen des Systems (4) im vorigen Paragraph zusammensetzt, so folgt, dass

$$A_{r-1,0,0} = 0, \quad A_{r-2,1,0} = 0, \quad \ldots, \quad A_{0,0,r-1} = 0 \tag{5}$$

mit den Gleichungen (4) die Bedingungen repräsentiren, die nothwendig und hinreichend sind, dass die beiden Punktsysteme P und P' zwei gemeinschaftliche Punktepaare besitzen.

Allgemein leuchtet ein, dass die i-Systeme von r-förmigen, $(r-1)$-förmigen, $\ldots$, $(r-i+1)$-förmigen Elementarfunctionen:

$$\left.\begin{array}{ll}
A_{r,0,0} = 0, \quad A_{r-1,1,0} = 0, \; \ldots, \; A_{0,0,r} = 0 & (1) \\
A_{r-1,0,0} = 0, \quad A_{r-2,1,0} = 0, \; \ldots, \; A_{0,0,r-1} = 0 & (2) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
A_{r-i+1,0,0} = 0, \quad A_{r-i,1,0} = 0, \quad A_{r-i-1,2,0} = 0, \ldots A_{0,0,r-i+1} = 0 & (i)
\end{array}\right\} \tag{6}$$

verschwinden müssen, wenn die beiden Punktsysteme P und P' i Paare von gemeinschaftlichen an beliebigen Stellen befindlichen Punkten besitzen sollen.

Da diese Bedingungen zweifach symmetrische Functionen der Coordinaten der beiden Punktsysteme $P_1 P_2 \ldots P_m$ und $P'_1 P'_2 \ldots P'_n$ sind, so können sie als ganze Functionen der Elementarfunctionen, bezw. einförmigen Functionen der letzteren dargestellt werden. Hiebei ist zu bemerken, dass die Functionen (1), (2), $\ldots$, (i) des Systems (6), bezw. vom Gewicht $2mn$, $2(mn-1)$, $\ldots$, $2(mn-i+1)$ sind.

Für $m = 2$, $n = 2$ ergeben sich beispielsweise die beiden Punktsysteme $P_1 P_2$ und $P'_1 P'_2$, denen die 34 Elementarfunctionen der Coordinaten der Verbindungslinien entsprechen

$$\begin{array}{llll}
A_{4,0,0} = u_1 u_2 u_3 u_4, & A_{3,1,0} = \Sigma u_1 u_2 u_3 v_4, & \ldots, & A_{0,0,4} = w_1 w_2 w_3 w_4 \\
A_{3,0,0} = \Sigma u_1 u_2 u_3, & A_{2,1,0} = \Sigma u_1 u_2 v_3, & \ldots, & A_{0,0,3} = \Sigma w_1 w_2 w_3 \\
A_{2,0,0} = \Sigma u_1 u_2, & A_{1,1,0} = \Sigma u_1 v_2, & \ldots, & A_{0,0,2} = \Sigma w_1 w_2 \\
A_{1,0,0} = \Sigma u_1, & A_{0,1,0} = \Sigma v_1, & \ldots, & A_{0,0,1} = \Sigma w_1.
\end{array} \tag{7}$$

In den Elementarfunctionen der Gruppen $x_1 y_1$, $x_2 y_2, \ldots, x_m y_m$, und $x'_1 y'_1$, $x'_2 y'_2, \ldots, x'_n y'_n$ ausgedrückt, nehmen beispielsweise die Functionen die Gestalt an:

$$\left.\begin{array}{l}
A_{0,0,4} = a_{11}^2 b_{22}^2 - a_{11} a_{12} b_{12} b_{22} + a_{12}^2 b_{11} b_{22} - 2 a_{11} a_{22} b_{11} b_{22} + a_{11} a_{22} b_{12}^2 - a_{12} a_{22} b_{11} b_{12} + a_{22}^2 b_{11}^2, \\
A_{0,0,3} = a_{11} b_2 (a_1 b_{22} - a_2 b_{12}) - a_{22} b_1 (a_2 b_{11} - a_1 b_{12}) + b_{11} b_2 (a_{12} a_2 - a_{22} a_1) - b_{22} b_1 (a_{12} a_1 - a_{11} a_2) \\
A_{0,0,2} = a_{11} b_2^2 + a_{22} b_1^2 + a_1^2 b_{22} + a_2^2 b_{11} - 2 a_{11} b_{22} - 2 a_{22} b_{11} - a_1 a_2 b_{12} - a_{12} b_1 b_2 + a_{12} b_{12} \\
A_{0,0,1} = a_1 b_2 + a_2 b_1,
\end{array}\right\} \tag{8}$$

aus denen, wie wir in §. 11 und §. 12 sehen werden, alle übrigen mit Hilfe gewisser Differentialprocesse hergeleitet werden können. Dieselben sind bezw. vom Grad 4, 4, 3, 2 in den Elementarfunctionen und vom Gewicht 8, 6; 4, 2.

§. 11.

Die Differentialprocesse der zweifach symmetrischen Functionen.

α. Da eine zweifach symmetrische Function eine symmetrische Function sowohl der Gruppen des einen als auch des andern Systems ist, so gelten für dieselben auch die Differentialprocesse, die wir in §. 5, (3) kennen gelernt haben:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x &= \sum_1^m \frac{\partial J}{\partial x_1} = \sum (m-p+1)\frac{\partial\varphi}{\partial a_{p_1 p_2}}\, a_{p_1-1\,p_2} \\ \Delta_y &= \sum_1^m \frac{\partial J}{\partial y_1} = \sum (m-p+1)\frac{\partial\varphi}{\partial a_{p_1 p_2}}\, a_{p_1\,p_2-1} \end{aligned}\right\} p = p_1+p_2$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta'_x &= \sum_1^n \frac{\partial J}{\partial x'_1} = \sum (n-q+1)\frac{\partial\varphi}{\partial b_{q_1 q_2}}\, b_{q_1-1\,q_2} \\ \Delta'_y &= \sum_1^n \frac{\partial J}{\partial y'_1} = \sum (n-q+1)\frac{\partial\varphi}{\partial b_{q_1 q_2}}\, b_{q_1\,q_2-1} \end{aligned}\right\} q = q_1+q_2 \qquad (1)$$

wodurch wiederum zweifach symmetrische Functionen erhalten werden, deren Gewicht hinsichtlich der Reihen x, y, x', y', bezw. um die Einheit niedriger ist als das entsprechende Gewicht der Function J.

β. Den Operationen (9) des §. 5 entsprechen die folgenden:

$$\begin{aligned} \Delta_x^y &= \sum_1^m \frac{\partial J}{\partial x_1}\, y_1 = \sum (p_2+1)\frac{\partial\varphi}{\partial a_{p_1 p_2}}\, a_{p_1-1,\,p_2+1} \\ \Delta_y^x &= \sum_1^m \frac{\partial J}{\partial y_1}\, x_1 = \sum (p_1+1)\frac{\partial\varphi}{\partial a_{p_1 p_2}}\, a_{p_1+1,\,p_2-1} \\ \Delta_{x'}^{y'} &= \sum_1^n \frac{\partial J}{\partial x'_1}\, y'_1 = \sum (q_2+1)\frac{\partial\varphi}{\partial b_{q_1 q_2}}\, b_{q_1-1,\,q_2+1} \\ \Delta_{y'}^{x'} &= \sum_1^n \frac{\partial J}{\partial y'_1}\, x'_1 = \sum (q_1+1)\frac{\partial\varphi}{\partial b_{q_1 q_2}}\, b_{q_1+1,\,q_2-1}\,, \end{aligned} \qquad (2)$$

welche zur Bildung weiterer zweifach symmetrischen Functionen vom gleichen Totalgewicht, aber verschiedenen Reihengewichten verwendet werden können.

γ. Sind $P_\varkappa$, bezw. P'_λ zwei Punkte der beiden Punktsysteme $P_1P_2\ldots P_m$, bezw. $P'_1P'_2\ldots P'_n$ in §. 9, deren Coordinaten $x_\varkappa y_\varkappa z_\varkappa$, bezw. $x'_\lambda y'_\lambda z'_\lambda$ sein sollen, so entsprechen der Verbindungslinie $P_\varkappa P'_\lambda$ derselben die homogenen Coordinaten

$$u_i = (y_\varkappa z'_\lambda), \quad v_i = (z_\varkappa x'_\lambda), \quad w_i = (x_\varkappa y'_\lambda). \qquad (3)$$

Durch partielle Ableitung der Function w_i nach x, x', bezw. y, y' erhalten wir hieraus

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_\varkappa} z_\varkappa + \frac{\partial w_i}{\partial x'_\lambda} z'_\lambda = -u_i\,, \quad \frac{\partial w_i}{\partial y_\varkappa} z_\varkappa + \frac{\partial w_i}{\partial y'_\lambda} z'_\lambda = -v_i\,. \qquad (4)$$

Setzen wir in (3) $\varkappa = 1, 2, \ldots, m$ und $\lambda = 1, 2, \ldots, n$, so erhalten wir die Coordinaten sämmtlicher Verbindungslinien der Punkte des Systems P mit denen des Systems P'.

Ist nun $A_{\alpha, \beta, \gamma}$ eine zweifach symmetrische Elementarfunction der Coordinaten (3) ausgedrückt durch die Elementarfunctionen der Gruppen $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2, \ldots$, bezw. $x_1' y_1' z_1'$, $x_2' y_2' z_2', \ldots$,

$$A_{\alpha, \beta, \gamma} = \psi(u, v, w) = \varphi(a, b), \tag{5}$$

welche die Reihen $u_1 u_2 \ldots$, $v_1 v_2 \ldots$, $w_1 w_2 \ldots$, bezw. im Grad α, β, γ enthalten soll, so ist zufolge (4):

$$\sum \frac{\partial A}{\partial x_\varkappa} z_\varkappa + \sum \frac{\partial A}{\partial x'_\lambda} z'_\lambda = -\sum_1^r \frac{\partial A}{\partial w_1} u_1 = -(\alpha+1) A_{\alpha+1, \beta, \gamma-1}. \tag{6}$$

Diese Operation kann demnach dazu dienen, die Function $A_{\alpha\beta\gamma}$ in eine andere von demselben Totalgewicht, aber verschiedenen Reihengewichten überzuführen. Neben (6) gilt die analoge Operation

$$\sum \frac{\partial A}{\partial y_\varkappa} z_\varkappa + \sum \frac{\partial A}{\partial y'_\lambda} z'_\lambda = -\sum \frac{\partial A}{\partial w_1} v_1 = -(\beta+1) A_{\alpha, \beta+1, \lambda-1}. \tag{7}$$

Weil nun $A = \varphi(a, b)$ eine Function der Elementarfunctionen $a_1 a_2 a_{11} \ldots$, bezw. $b_1 b_2 b_{11} \ldots$ der beiden Systeme $x_i y_i z_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, bezw. $x'_\varkappa y'_\varkappa z'_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2 \ldots, n)$ ist, so gehen die Operationen (6) und (7) über in:

$$\begin{aligned} \Delta_x^z + \Delta_{x'}^{z'} &= -(\alpha+1) A_{\alpha+1, \beta, \gamma-1} \\ \Delta_y^z + \Delta_{y'}^{z'} &= -(\beta+1) A_{\alpha, \beta+1, \gamma-1}, \end{aligned} \tag{8}$$

woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} A_{\alpha+1, \beta, \gamma-1} &= -\frac{1}{\alpha+1} \left\{ \Delta_x^z + \Delta_{x'}^{z'} \right\}^{(1)} \\ A_{\alpha, \beta+1, \gamma-1} &= -\frac{1}{\beta+1} \left\{ \Delta_y^z + \Delta_{y'}^{z'} \right\}^{(1)}, \end{aligned} \tag{9}$$

wo Δ_x^z, $\Delta_{x'}^{z'}, \ldots$ Differentialprocesse von der Form (2) bezeichnen.

Enthält nun die Function A nur die Elemente $w_1 w_2 \ldots w_r$ oder $(x_1 y_1')$, $(x_1 y_2')$, $(x_m y_n')$, so können wir nach wiederholten Anwendungen der Processe (9) auf

$$A = A_{0, 0, r} = w_1 w_2 \ldots w_r$$

direct zu allen übrigen Functionen A vom gleichen Totalgewicht gelangen. Wir erhalten die Processe:

$$\begin{aligned} A_{1, 0, r-1} &= -\frac{1}{1!} \left\{ \Delta_x^z + \Delta_{x'}^{z'} \right\}^{(1)} \\ A_{0, 1, r-1} &= -\frac{1}{1!} \left\{ \Delta_y^z + \Delta_{y'}^{z'} \right\}^{(1)} \\ A_{2, 0, r-2} &= +\frac{1}{2!} \left\{ \Delta_x^z + \Delta_{x'}^{z'} \right\}^{(2)} \\ A_{1, 1, r-2} &= +\frac{1}{1!\,1!} \left\{ \Delta_x^z + \Delta_{x'}^{z'} \right\}^{(1)} \left\{ \Delta_y^z + \Delta_{y'}^{z'} \right\}^{(1)} \\ A_{0, 2, r-2} &= +\frac{1}{2!} \left\{ \Delta_y^z + \Delta_{y'}^{z'} \right\}^{(2)} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{\varkappa, \lambda, r-\varkappa-\lambda} &= (-1)^{\varkappa+\lambda} \frac{1}{\varkappa!\,\lambda!} \left\{ \Delta_x^z + \Delta_{x'}^{z'} \right\}^{(\varkappa)} \left\{ \Delta_y^z + \Delta_{y'}^{z'} \right\}^{(\lambda)}, \end{aligned} \tag{10}$$

wo die Differentialprocesse rechts zur Abkürzung symbolisch bezeichnet sind.

Legen wir den vorstehenden Untersuchungen nichthomogene Coordinaten zu Grunde, was der Fall ist, wenn $z_1 = z_2 = \ldots = z'_1 = z'_2 = \ldots = 1$ gesetzt wird, so gehen die Coordinaten (3) über in

$$\rho u_i = y_\varkappa - y'_\lambda, \quad \rho v_i = x'_\lambda - x_\varkappa, \quad \rho w_i = (x_\varkappa y'_\lambda). \tag{11}$$

An Stelle der zweifach symmetrischen Functionen der $3r$ zweigliedrigen Determinanten (3) treten in diesem Falle solche der r-Determinanten $w_1 w_2 \ldots w_r$ und der $2r$-Differenzen (11) $u_1 u_2 \ldots u_r$, $v_1 v_2 \ldots v_r$. Ist insbesondere das Product aller Determinanten w durch die Elementarfunctionen $a_1 a_2 a_{11} \ldots$ und $b_1 b_2 b_{11} \ldots$ der beiden Systeme $x_1 y_1$, $x_2 y_2, \ldots$, $x_m y_m$ und $x'_1 y'_1$, $x'_2 y'_2, \ldots$, $x'_n y'_n$ ausgedrückt

$$\begin{aligned} C &= (x_1 y'_1)(x_1 y'_2)\ldots(x_1 y'_n) \times (x_2 y'_1)(x_2 y'_2)\ldots(x_2 y'_n) \times \ldots \times (x_m y'_1)(x_m y'_2)\ldots(x_m y'_n) \\ &= \varphi(ab), \end{aligned} \tag{12}$$

so erhalten wir hieraus mit Hilfe der Operationen

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial C}{\partial x_1} + \sum \frac{\partial C}{\partial x'_1} &= \sum (m-p+1) \frac{\partial \varphi}{\partial a_{p_1 p_2}} a_{p_1-1, p_2} + \sum (n-q+1) \frac{\partial \varphi}{\partial b_{q_1 q_2}} b_{q_1-1, q_2} \\ \sum \frac{\partial C}{\partial y_1} + \sum \frac{\partial C}{\partial y'_1} &= \sum (m-p+1) \frac{\partial \varphi}{\partial a_{p_1 p_2}} a_{p_1, p_2-1} + \sum (n-q+1) \frac{\partial \varphi}{\partial b_{q_1 q_2}} b_{q_1, q_2-1} \end{aligned} \tag{13}$$

sämmtliche r-förmige Functionen der Determinanten $w_1 w_2 \ldots$ und der Differenzen $u_1 u_2 \ldots$, $v_1 v_2 \ldots$. Versteht man unter $C_{\varkappa\lambda}$ eine r-förmige Elementarfunction der letzteren von der Form:

$$C_{\varkappa\lambda} = \Sigma u_1 u_2 \ldots u_\varkappa v_{\varkappa+1} \ldots v_{\varkappa+\lambda} w_{\varkappa+\lambda+1} \ldots w_r,$$

so ist:

$$\begin{aligned} C_{1,0} &= -\frac{1}{1!}\left\{\sum \frac{\partial C}{\partial x} + \sum \frac{\partial C}{\partial x'}\right\}^{(1)} \\ C_{0,1} &= -\frac{1}{1!}\left\{\sum \frac{\partial C}{\partial y} + \sum \frac{\partial C}{\partial y'}\right\}^{(1)} \\ C_{2,0} &= +\frac{1}{2!}\left\{\sum \frac{\partial C}{\partial x} + \sum \frac{\partial C}{\partial x'}\right\}^{(2)} \\ C_{1,1} &= +\frac{1}{1!\,1!}\left\{\sum \frac{\partial C}{\partial x} + \sum \frac{\partial C}{\partial x'}\right\}^{(1)} \left\{\sum \frac{\partial C}{\partial y} + \sum \frac{\partial C}{\partial y'}\right\}^{(1)} \\ C_{0,2} &= +\frac{1}{2!}\left\{\sum \frac{\partial C}{\partial y} + \sum \frac{\partial C}{\partial y'}\right\}^{(2)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{\varkappa,\lambda} &= (-1)^{\varkappa+\lambda} \frac{1}{\varkappa!\,\lambda!}\left\{\sum \frac{\partial C}{\partial x} + \sum \frac{\partial C}{\partial x'}\right\}^{(\varkappa)} \left\{\sum \frac{\partial C}{\partial y} + \sum \frac{\partial C}{\partial y'}\right\}^{(\lambda)}, \end{aligned} \tag{14}$$

wo wir wieder zur Abkürzung symbolische Bezeichnung gewählt haben.

Hiebei fällt in die Augen, dass die Function C nichts anderes als die Resultante zweier algebraischen Gleichungen von den Ordnungen m und n darstellt, deren Wurzeln $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_m}{y_m}$ bezw. $\frac{x'_1}{y'_1}, \frac{x'_2}{y'_2}, \ldots, \frac{x'_n}{y'_n}$ sind. Diese kann aber leicht nach den bekannten Methoden von Bézout, Sylvester, Cayley etc. durch deren Coëfficienten ausgedrückt werden. Die Berechnung dieser Function allein genügt, um mit Hilfe der Operationen (14) direct alle übrigen symmetrischen Functionen der Verbindungslinien der Punkte des Systems P mit denen von P' ermitteln zu können.

Wir werden dieser Function weiter unter bei der Berechnung der symmetrischen Functionen der Schnittpunkte zweier algebraischen Curven wieder begegnen.

§. 12.

Ermittlung der symmetrischen Functionen der gemeinschaftlichen Variablenpaare zweier ternären Formen.

α. Eliminationsmethode.

Zwei ternäre Formen f und φ vom Grad m, bezw. n haben bekanntlich $r = mn$ Variablenpaare $x_1 y_1$, $x_2 y_2, \dots, x_r y_r$ gemeinschaftlich, welche durch $\sigma = \frac{r(r+3)}{2}$ Elementarfunctionen verbunden sind. Um diese Functionen zu berechnen, verbinde man nach bekannten Vorgängen die Variablen xy durch die Gleichung

$$t = \lambda x + \mu y,$$

wo λ und μ litterale Zahlencoëfficienten bedeuten mögen, dann gehört zu einer Gruppe gemeinschaftlicher Variablenpaare von f und φ die Grösse $t_i = \lambda x_i + \mu y_i$. Eliminirt man hierauf aus den drei simultanen Gleichungen

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad t - \lambda x - \mu y = 0. \tag{1}$$

die Veränderlichen x und y, so erhält man ein Eliminationsresultat von der Form

$$\begin{aligned} R(t\lambda\mu) = A_0 t^r - t^{r-1}\{\lambda A_1 + \mu A_2\} + t^{r-2}\{\lambda^2 A_{11} + \lambda\mu A_{12} + \mu^2 A_{22}\} - \dots + \\ + (-1)^r \{\lambda^r A_{r,0} + \lambda^{r-1}\mu A_{r-1,1} + \dots + \mu^r A_{0,r}\} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

welches hinsichtlich t, λ, μ vom Grad $r = mn$ ist und in welchem $A_0 A_1 A_2 \dots$ ganze Functionen der Coëfficienten von f und φ repräsentieren.

Da anderseits die Resultante der Functionen (1) auch ausgedrückt ist durch:

$$\begin{aligned} R &= (t - \lambda x_1 - \mu y_1)(t - \lambda x_2 - \mu y_2) \dots (t - \lambda x_r - \mu y_r) \\ &= t^r - t^{r-1}\{\lambda \Sigma x_1 + \mu \Sigma y_1\} + t^{r-2}\{\lambda^2 \Sigma x_1 x_2 + \lambda\mu \Sigma x_1 y_2 + \mu^2 \Sigma y_1 y_2\} - \dots = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

so ist ersichtlich, dass die Verhältnisse der Grössen $A_1 A_2 A_{11} A_{12} A_{22} \dots$ zur Function A_0 die Elementarfunctionen der gemeinschaftlichen Variablenpaare von f und φ darstellen. Es ist:

$$\begin{aligned} &\Sigma x_1 = A_1 : A_0, \quad \Sigma y_1 = A_2 : A_0, \\ &\qquad \Sigma x_1 x_2 = A_{11} : A_0, \quad \Sigma x_1 y_2 = A_{12} : A_0, \quad \Sigma y_1 y_2 = A_{22} : A_0, \quad \dots \end{aligned} \tag{4}$$

Dies ist der gewöhnliche Weg zur Ermittlung der symmetrischen Functionen zweier ternärer Formen.

β. Differentialmethode zur Ermittlung der symmetrischen Functionen mit Hilfe eines Leitgliedes.

So übersichtlich und einfach auch die oben dargelegte Methode zur Ermittlung der gemeinschaftlichen Variablenpaare zweier ternärer Functionen auf den ersten Blick auch erscheinen mag, so wenig eignet sie sich praktisch zur Durchführung selbst einfacherer Beispiele. Den Fall ausgenommen, dass eine der Functionen f oder φ linear ist, führt sie sofort zu nur schwer zu bewältigenden Rechnungen. In diesem Fall erscheint es wünschenswerth, ein anderes Verfahren kennen zu lernen, das auf einfachem und vorgezeichnetem Wege zum gewünschten Ziele führt. Ein solches Verfahren glaube ich durch die im vorigen Paragraph ermittelten Differentialprocesse (13) und (14) der zweifach symmetrischen Functionen gefunden zu haben, vermittelst deren sämmtliche symmetrische Functionen der Schnittpunkte von f und φ von einer Leitfunction hergeleitet werden können.

Wir gelangen zu diesen Processen am einfachsten, indem wir uns die Formen f und φ in Linearfactoren zerfällt denken.

Denken wir uns dieselben mit dem Coëfficienten des letzten Gliedes durchdividirt und auf die Gestalt gebracht:

$$\begin{aligned} f &= a_{m,0}x^m + a_{m-1,1}x^{m-1}y + \ldots + a_1x + a_2y + 1 \\ \varphi &= b_{n,0}x^n + b_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + b_1x + b_2y + 1, \end{aligned} \tag{5}$$

wo die unabhängigen Coëfficienten entsprechend den Exponenten der betreffenden Glieder durch untere Indices bezeichnet sind und denken wir uns ferner f und φ in Linearfactoren von der Form $u_ix + v_iy + 1$, $u'_\varkappa x + v'_\varkappa y + 1$ zerfällt, so ist

$$\begin{aligned} f &= (u_1x + v_1y + 1)(u_2x + v_2y + 1)\ldots(u_mx + v_my + 1) \\ \varphi &= (u'_1x + v'_1y + 1)(u'_2x + v'_2y + 1)\ldots(u'_nx + v'_ny + 1). \end{aligned} \tag{6}$$

Diese Producte sind lineare symmetrische Functionen der Gruppen u_1v_1, $u_2v_2, \ldots$, bezw. $u'_1v'_1$, $u'_2v'_2, \ldots$ und können demgemäss durch die Elementarfunctionen derselben linear dargestellt werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} f &= x^m \Sigma u_1u_2\ldots u_m + x^{m-1}y\Sigma u_1u_2\ldots v_m + \ldots + x\Sigma u_1 + y\Sigma v_1 + 1 \\ \varphi &= x^n \Sigma u'_1u'_2\ldots u'_n + x^{n-1}y\Sigma u'_1u'_2\ldots v'_n + \ldots + x\Sigma u'_1 + y\Sigma v'_1 + 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Durch Vergleichen von (5) und (7) ist zu erkennen, dass die Coëfficienten $a_1a_2a_{11}\ldots$, bezw. $b_1b_2b_{11}\ldots$ identisch sind mit den symmetrischen Functionen Σu_1, Σv_1, $\Sigma u_1u_2, \ldots$, bezw. $\Sigma u'_1$, $\Sigma v'_1$, $\Sigma u'_1u'_2, \ldots$ der Gruppen $u\,v$, bezw. $u'\,v'$.

Nehmen wir nun zu den Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ noch die lineare Gleichung $t = \lambda x + \mu y$ hiezu, so ist die Resultante derselben angegeben durch die Gleichung (2): $R(t\lambda\mu) = 0$. Da der Annahme gemäss die Formen f und φ in lineare Factoren zerfallen sollen, so erhalten wir die gemeinschaftlichen Variablenpaare derselben auch, indem wir diejenigen von jedem Factor von f mit jedem Factor von φ suchen. Sind $u_ix + v_iy + 1$, bezw. $u'_\varkappa x + v'_\varkappa y + 1$ zwei solche Factoren von f, bezw. φ, so hat das gemeinschaftliche Variablenpaar derselben den Werth:

$$x = -\frac{v'_\varkappa - v_i}{(u_iv'_\varkappa)}, \quad y_i = -\frac{(u_i - u'_\varkappa)}{(u_iv'_\varkappa)}.$$

Für $i = 1, 2, \ldots, m$; $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$ ergeben sich hieraus sämmtliche zusammengehörige Elemente der mn-Variablenpaare von f und φ. Irgend ein Factor $t_{i\varkappa} - \lambda x - \mu y$ von (3) ist dann angegeben durch

$$t_{i\varkappa} = t(u_iv'_\varkappa) + \lambda(v'_\varkappa - v_i) + \mu(u_i - u'_\varkappa), \tag{8}$$

wo mit dem Nenner $(u_iv'_\varkappa)$ durchdividirt worden ist, um die Resultante R als ganze Function der Gruppen uv, bezw. $u'v'$ zu erhalten. Diese selbst ist dann angegeben durch das Product der mn Factoren:

$$\begin{aligned} R &= t_{11}t_{12}\ldots t_{1n} \times t_{21}t_{22}\ldots t_{2n} \times \ldots \times t_{m1}t_{m2}\ldots t_{m,n} \\ &= C_0t^r + t^{r-1}\{\lambda C_1 + \mu C_2\} + t^{r-2}\{\lambda^2C_{11} + \lambda\mu C_{12} + \mu^2C_{22}\} + \ldots \end{aligned} \tag{9}$$

Da nun hierin sämmtliche Factoren $t_{i\varkappa}$ linear enthalten sind, die wir aus (8) für $i = 1, 2, \ldots, m$; $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$ erhalten, so leuchtet ein, dass C_0; C_1C_2; $C_{11}C_{12}C_{22}; \ldots$; $C_{r,0}$, $C_{r-1,1}, \ldots, C_{0,r}$ die sämmtlichen r-förmigen Elementarfunctionen der r-Determinanten $(u_iv'_\varkappa)$ und der $2r$-Reihen von Differenzen $v'_\varkappa - v_i$, bezw. $u_i - u'_\varkappa$ repräsentiren. Dieselben sind bezw. vom Gewicht $2r$, $2r-1$, $2r-2; \ldots, r$ hinsichtlich der Reihen $u_1u'_1u_2u'_2, \ldots$ und $v_1v'_1v_2v'_2, \ldots$ Von denselben ist C_0 gleich dem Product der r-Determinanten $(u_iv'_\varkappa)$. Die Functionen C_1C_2 enthalten ebenfalls in jedem Glied $r-1$ derselben und ausserdem noch eine der Differenzen $v'_\varkappa - v_i$, bezw. $u_i - u'_\varkappa$. Die Functionen $C_{11}C_{12}C_{22}$ sind vom 2. Grad in Bezug auf die Elemente dieser Differenzen u. s. w.

Es sind dieselben Functionen, die wir im vorigen Paragraph in (12), (13) und (14) kennen gelernt haben.

Ersetzen wir nun in C_0, $C_1 C_2$, $C_{11} C_{12} C_{22}, \ldots$ die symmetrischen Functionen der Gruppen $u_1 v_1$, $u_2 v_2, \ldots$, $u_m v_m$, bezw. $u'_1 v'_1$, $u'_2 v'_2, \ldots$, $u'_n v'_n$ durch ihre Ausdrücke in den Elementarfunctionen der letzteren oder, was dasselbe ist, durch die Coëfficienten a von f, bezw. b von φ, so geht die Resultante (9) in die Form (2) oder C_0; C_1, C_2; C_{11}, C_{12}, C_{22}; ... in $A_0, -A_1, -A_2$; A_{11}, A_{12}, $A_{22}, \ldots$ über. Für die letzteren Grössen als Functionen der Elementarfunctionen $a_1 a_2 a_{11} a_{12} a_{22} \ldots$, bezw. $b_1 b_2 b_{11} b_{12} b_{22} \ldots$ gelten deshalb nach dem vorigen Paragraph die Operationen:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{1}{1!}\left\{\sum \frac{\partial A_0}{\partial u} + \sum \frac{\partial A_0}{\partial u'}\right\}^{(1)} \\
A_2 &= -\frac{1}{1!}\left\{\sum \frac{\partial A_0}{\partial v} + \sum \frac{\partial A_0}{\partial v'}\right\}^{(1)} \\
A_{11} &= +\frac{1}{2!}\left\{\sum \frac{\partial A_0}{\partial u} + \sum \frac{\partial A_0}{\partial u'}\right\}^{(2)} \\
A_{12} &= \frac{1}{1!\,1!}\left\{\sum \frac{\partial A_0}{\partial u} + \sum \frac{\partial A_0}{\partial u'}\right\}^{(1)}\left\{\sum \frac{\partial A_0}{\partial v} + \sum \frac{\partial A_0}{\partial v'}\right\}^{(1)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{\varkappa,\lambda} &= \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda}}{\varkappa!\,\lambda!}\left\{\sum \frac{\partial A_0}{\partial u} + \sum \frac{\partial A_0}{\partial u'}\right\}^{(\varkappa)}\left\{\sum \frac{\partial A_0}{\partial v} + \sum \frac{\partial A_0}{\partial v'}\right\}^{(\lambda)},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

wo die Differentialprocesse wie in §. 11 symbolisch bezeichnet sind.

Ist $A_{\varkappa,\lambda}$ irgend ein Coëfficient von (2), so erhält man hieraus die nächst höheren durch die Operationen:

$$
\begin{aligned}
A_{\varkappa+1,\lambda} &= \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda+1}}{\varkappa+1}\left\{\sum \frac{\partial A_{\varkappa\lambda}}{\partial u} + \sum \frac{\partial A_{\varkappa\lambda}}{\partial u'}\right\}^{(1)} \\
A_{\varkappa,\lambda+1} &= \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda+1}}{\lambda+1}\left\{\sum \frac{\partial A_{\varkappa\lambda}}{\partial v} + \sum \frac{\partial A_{\varkappa\lambda}}{\partial v'}\right\}^{(1)}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Für irgend eine Function A der Coëfficienten von f und φ haben diese Processe die specielle Gestalt

$$
\begin{aligned}
\sum \frac{\partial A}{u} + \sum \frac{\partial A}{\partial u'} &= m\frac{\partial A}{\partial a_1} + (m-1)\left(\frac{\partial A}{\partial a_{11}}a_1 + \frac{\partial A}{\partial a_{12}}a_2\right) + \ldots \\
&\quad + n\frac{\partial A}{\partial b_1} + (n-1)\left(\frac{\partial A}{\partial b_{11}}b_1 + \frac{\partial A}{\partial b_{12}}b_2\right) + \ldots \\
\sum \frac{\partial A}{\partial v} + \sum \frac{\partial A}{\partial v_1} &= m\frac{\partial A}{\partial a_2} + (m-1)\left(\frac{\partial A}{\partial a_{22}}a_2 + \frac{\partial A}{\partial a_{12}}a_1\right) + \ldots \\
&\quad + n\frac{\partial A}{\partial b_2} + (n-1)\left(\frac{\partial A}{\partial b_{22}}b_2 + \frac{\partial A}{\partial b_{12}}b_1\right) + \ldots
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Mit Hilfe dieser Processe gelangen wir demnach von A_0 als Leitfunction ausgehend zu sämmtlichen übrigen Coëfficienten $A_1 A_2 A_{11} A_{12} A_{22} \ldots$ der Resultante (2). Die Function A_0 ist aber bekanntlich nichts anderes als die Resultante zweier binären Formen m^{ten} und n^{ten} Grades

$$
a_{m,0}x^m + a_{m-1,1}x^{m-1}y + \ldots + a_{0,m}y^m
$$

$$
b_{n,0}x^n + b_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + b_{0,n}y^n,
$$

nämlich der Glieder höchsten Grades von f und φ und kann als solche nach den bekannten Methoden von Bézont, Sylvester etc. berechnet werden. Ist dies geschehen, so führen die Operationen (10), auf A_0 angewendet, unmittelbar zur Berechnung der Grössen $A_1 A_2 A_{11} A_{12} A_{22} \ldots$. Sind diese auch ermittelt, so sind die Elementarfunctionen der Coordinaten der Schnittpunkte von f und φ oder der gemeinschaftlichen Variablenpaare dieser Formen dargestellt durch

$$\Sigma x_1 = \frac{A_1}{A_0}, \quad \Sigma y_1 = \frac{A_2}{A_0}, \quad \Sigma x_1 x_2 = \frac{A_{11}}{A_0}, \quad \Sigma x_1 y_2 = \frac{A_{12}}{A_0}, \quad \ldots \tag{13}$$

womit unsere Aufgabe als gelöst betrachtet werden kann.

Beispielsweise ist für zwei Kegelschnitte

$$f = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{22}y^2 + a_{23}yz + a_{33}z^2$$
$$\varphi = b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{13}xz + b_{22}y^2 + b_{23}yz + b_{33}z^2$$
$$A_0 = -(a_{11}b_{12})(a_{22}b_{12}) - (a_{11}b_{22})^2,$$

woraus wir direct mit Hilfe der Operationen (10) die weiteren Grössen erhalten:

$$-A_1 = (a_{22}b_{23})(a_{12}b_{11}) + (a_{22}b_{12})(a_{23}b_{11}) + (a_{22}b_{12})(a_{12}b_{13}) - 2(a_{11}b_{22})(a_{13}b_{22}),$$
$$A_{11} = (a_{22}b_{23})(a_{23}b_{11}) + (a_{22}b_{23})(a_{12}b_{13}) + (a_{22}b_{12})(a_{23}b_{13}) + (a_{22}b_{12})(a_{12}b_{33}) - (a_{13}b_{22})^2 + 2(a_{11}b_{22})(a_{22}b_{33}),$$
$$A_{12} = (a_{12}b_{23})(a_{23}b_{11}) + (a_{12}b_{13})(a_{13}b_{22}) - (a_{11}b_{23})(a_{22}b_{13}) + (a_{12}b_{13})(a_{12}b_{23})$$
$$+ (a_{11}b_{13})(a_{22}b_{23}) + 2(a_{11}b_{22})(a_{13}b_{23}) + 2(a_{11}b_{12})(a_{22}b_{33}) + 2(a_{22}b_{12})(a_{11}b_{33})$$
$$-A_{111} = (a_{22}b_{23})(a_{23}b_{13}) + (a_{22}b_{23})(a_{12}b_{33}) + (a_{22}b_{12})(a_{23}b_{33}) + 2(a_{13}b_{22})(a_{22}b_{33})$$
$$-A_{112} = (a_{12}b_{23})(a_{23}b_{13}) + (a_{22}b_{13})(a_{23}b_{13}) + (a_{12}b_{23})(a_{12}b_{33}) + 2(a_{22}b_{23})(a_{11}b_{33})$$
$$+ 2(a_{22}b_{11})(a_{23}b_{33}) + (a_{22}b_{12})(a_{13}b_{33}) + 2(a_{13}b_{12})(a_{22}b_{33}) + (a_{13}b_{22})(a_{12}b_{33})$$
$$A_{1111} = (a_{22}b_{23})(a_{23}b_{33}) - (a_{22}b_{33})^2$$
$$A_{1112} = (a_{12}b_{23})(a_{23}b_{33}) + (a_{22}b_{13})(a_{23}b_{33}) + (a_{22}b_{23})(a_{13}b_{33}) - 2(a_{22}b_{33})(a_{12}b_{33})$$
$$A_{1122} = (a_{11}b_{23})(a_{23}b_{33}) + (a_{22}b_{13})(a_{13}b_{33}) + (a_{12}b_{13})(a_{23}b_{33}) + (a_{12}b_{23})(a_{13}b_{33}) - 2(a_{11}b_{33})(a_{22}b_{33}) - (a_{33}b_{12})^2.$$

Die weiteren Functionen A_2, A_{22}; A_{122}, A_{222}; A_{1222}, A_{2222} erhält man hieraus durch Vertauschung der Indices 1 und 2. Charakteristisch sind von diesen Functionen nur $A_0 A_1 A_{11} A_{12}$, da sich hieraus alle übrigen durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3 ermitteln lassen.

§. 13.

Berechnung der gemeinschaftlichen Variablenpaare zweier ternären Formen.

Sind nach dem vorigen Paragraph die symmetrischen Functionen der gemeinschaftlichen Variablenpaare $x_1 y_2$, $x_2 y_2 \ldots$, $x_r y_r$ von f und φ ermittelt, so erübrigt noch, diese Variablen selbst zu berechnen.

Zu diesem Zwecke drücken wir die symmetrischen Functionen von $r-1$ derselben, z. B. von $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, ..., $x_r y_r$ durch die Elemente der r^{ten} Gruppe, z. B. $x_1 y_1$ aus, indem wir hiezu der Reihe nach die symmetrischen Functionen vom Gewicht 1, 2, 3, ..., $r-1$ des Systems (2) in §. 1 benützen. Wir erhalten hiefür die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} &\Sigma x_2 = a_1 - x, \quad \Sigma y_2 = a_2 - y \\ &\Sigma x_2 x_3 = a_{11} - a_1 x + x^2, \quad \Sigma x_2 y_3 = a_{12} - a_1 y - a_2 x + 2xy, \quad \Sigma y_2 y_3 = a_{22} - a_2 y + y^2, \\ &\Sigma x_2 x_3 x_4 = a_{111} - a_{11} x + a_1 x^2 - x^3, \ldots \\ &\Sigma x_2 x_3 \ldots x_r = a_{r,0} - a_{r-1,0} x + a_{r-2,0} x^2 - \ldots + (-1)^{r-1} x^{r-1}, \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

wo an Stelle von $x_1 y_1$ die Elemente xy gesetzt sind.

Setzt man diese Ausdrücke in die r-förmigen Functionen des Systems (2) in §. 1 ein, so ergeben sich die $r+1$ identischen Gleichungen vom Grad r in xy:

$$
\begin{aligned}
&x^r - a_1 x^{r-1} + a_{11} x^{r-2} - \dots + (-1)^r a_{r,0} = 0, \\
&r x^{r-1} y - (r-1) a_1 x^{r-2} y - a_2 x^{r-1} + (r-2) a_{11} x^{r-3} y + a_{12} x^{r-2} - \dots + (-1)^r a_{r-1,1} = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&r y^{r-1} x - (r-1) a_2 y^{r-2} x - a_1 y^{r-1} + (r-2) a_{22} y^{r-3} x + a_{12} y^{r-2} - \dots + (-1)^r a_{1,r-1} = 0, \\
&y^r - a_2 y^{r-1} + a_{22} y^{r-2} - \dots + (-1)^r a_{0,r} = 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

die auch in der Form geschrieben werden können:

$$
\begin{aligned}
&(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_r) = 0 \\
&\Sigma(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{r-1})(y-y_r) = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\Sigma(x-x_1)(y-y_2)\dots(y-y_r) = 0 \\
&(y-y_1)(y-y_2)\dots(y-y_r) = 0,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

wo jede Function sowohl homogen hinsichtlich der Elemente der Reihe $x_1 x_1 x_2 \dots x_r$ als auch hinsichtlich $y y_1 y_2 \dots y_r$ ist.

Diese Gleichungen besitzen in der That interessante Eigenschaften.

In erster Linie leuchtet ein, dass sie durch jedes Variablenpaar $x_i y_i$ befriedigt werden, welches den Formen f und φ gemeinschaftlich angehört. Sie können deshalb zur Berechnung derselben benütz. werden. Die erste der Gleichungen (2) oder (3) stellt eine algebraische Gleichung r^{ten} Grades in x dar. Sie liefert deshalb aufgelöst direct als Wurzeln die Elemente der Reihe $x_1 x_2 \dots x_r$. Da die zweite Gleichung (2) linear in y ist, so lässt sich diese Grösse rational in Function von x und der Elementarfunctionen ausdrücken.

Wir erhalten

$$
y = \frac{a_2 x^{r-1} - a_{12} x^{r-2} + a_{112} x^{r-3} - \dots}{r x^{r-1} - (r-1) a_1 x^{r-2} + (r-2) a_{11} x^{r-3} - \dots}
\tag{4}
$$

und hieraus zu jeder Wurzel x_i direct durch Substitution das zugehörige Element

$$
y_i = \frac{a_2 x_i^{r-1} - a_{12} x_i^{r-2} + a_{112} x_i^{r-3} - \dots}{r x_i^{r-1} - (r-1) a_1 x_i^{r-2} + (r-2) a_{11} x_i^{r-3} - \dots},
\tag{5}
$$

womit unsere Aufgabe gelöst ist.

Wir sehen somit, dass zur Ermittlung der gemeinschaftlichen Variablenpaare zweier ternären Formen f und φ vom Grad m und n nur die Auflösung einer einzigen Gleichung mn^{ten} Grades nöthig ist.

Bezeichnen wir irgend eine symmetrische Function des Systems (3) mit π, so ändert sich eine solche nicht, wenn man die Elemente der Reihe $x x_1 x_2 \dots x_r$ oder der Reihe $y y_1 y_2 \dots y_r$ um die gleiche Grösse λ wachsen oder abnehmen lässt. Entwickelt man dieselbe nach Potenzen von λ, so zeigt sich, dass jede derselben nothwendig den beiden Differentialgleichungen genügen muss:

$$
\sum_1^r \frac{\partial \pi}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi}{\partial x} = 0, \qquad \sum_1^r \frac{\partial \pi}{\partial y_1} + \frac{\partial \pi}{\partial y} = 0,
\tag{6}
$$

welche nach weiterer Ausführung die Gestalt annehmen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \pi}{\partial x} + r \frac{\partial \pi}{\partial a_1} + (r-1)\left\{\frac{\partial \pi}{\partial a_{11}} a_1 + \frac{\partial \pi}{\partial a_{12}} a_2\right\} + (r-2)\left\{\frac{\partial \pi}{\partial a_{111}} a_{11} + \frac{\partial \pi}{\partial a_{112}} a_{12} + \frac{\partial \pi}{\partial a_{122}} a_{22}\right\} + \dots \quad 0 \\
&\frac{\partial \pi}{\partial y} + r \frac{\partial \pi}{\partial a_2} + (r-1)\left\{\frac{\partial \pi}{\partial a_{22}} a_2 + \frac{\partial \pi}{\partial a_{12}} a_1\right\} + (r-2)\left\{\frac{\partial \pi}{\partial a_{222}} a_{22} + \frac{\partial \pi}{\partial a_{122}} a_{12} + \frac{\partial \pi}{\partial a_{112}} a_{11}\right\} + \dots \equiv 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Wir bezeichnen diese Gleichungen als die Differentialgleichungen der symmetrischen Functionen der Differenzen $x-x_i$, $y-y_i$.

Hiebei ist jedoch zu beachten, dass dieselben nicht allein den r-förmigen Functionen (3), sondern auch den $(r-1)$-förmigen, $(r-2)$-förmigen, ... 3, 2, einförmigen und jeder höheren symmetrischen Function der Differenzen $x-x_i$, $y-y_i$ genügen.

Bezeichnet $\pi = 0$ irgend eine Function des Systems (2), so geht dieselbe, wie leicht einzusehen ist, nach Anwendung des weiteren Processes

$$0 = \sum_1^r \frac{\partial \pi}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \pi}{\partial x} y$$

oder (8)

$$0 = \frac{\partial \pi}{\partial x} y + \frac{\partial \pi}{\partial a_1} a_2 + \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial a_{11}} a_{12} + \frac{\partial \pi}{\partial a_{111}} a_{112} + \ldots \right\} + 2 \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial a_{12}} a_{22} + \frac{\partial \pi}{\partial a_{112}} a_{122} + \ldots \right\}$$
$$+ 3 \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial a_{122}} a_{222} + \frac{\partial \pi}{\partial a_{1122}} a_{1222} + \ldots \right\} + \ldots$$

direct in eine andere derselben Art über. Ausgehend von der Function

$$x^r - a_1 x^{r-1} + a_{11} x^{r-2} - \ldots + (-1)^r a_{r,0} = 0$$

gelangt man auf diesem Wege der Reihe nach zu sämmtlichen übrigen Functionen (2).

3. Abschnitt.

Die Bedingungen der gemeinschaftlichen Schnittpunkte dreier Curven.

§. 14.

Ermittlung der Bedingungen der gemeinschaftlichen Schnittpunkte dreier Curven.

a) Gegeben seien die Gleichungen dreier ebenen algebraischen Curven

$$\begin{aligned} f &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \ldots + a_\lambda z^m = 0 \\ \varphi &= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + \ldots + b_\mu z^n = 0 \qquad (1) \\ \psi &= c_0 x^p + c_1 x^{p-1} y + \ldots + c_\nu z^p = 0 \end{aligned}$$

von den Ordnungen m, n, p, welche zunächst keinen Bedingungen unterworfen sein sollen und daher beziehungsweise $s_1 = \frac{m(m+3)}{2}$, $s_2 = \frac{n(n+3)}{2}$, $s_3 = \frac{p(p+3)}{2}$ unabhängige Constanten und beziehungsweise s_1+1, s_2+1, s_3+1 Glieder besitzen.

Schneiden sich zwei derselben, z. B. f und φ in $r = mn$ Punkten mit den nicht homogenen Coordinaten $x_1 y_1$, $x_2 y_2, \ldots, x_r y_r$, so ist bekanntlich die Bedingung, dass einer dieser Punkte auch auf der Curve ψ liegt ausgedrückt durch das Verschwinden des Products

$$R_r = \psi(x_1 y_1)\psi(x_2 y_2)\ldots\psi(x_r y_r) = \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_r \qquad (2)$$

das man allgemein als die Resultante der drei Gleichungen (1) bezeichnet. Um dieselbe als ganze Function der Coëfficienten von f und φ zu erhalten, hat man R_r noch mit dem Factor A_0^p zu multipliciren, wo A_0 die aus §. 11 und §. 12 bekannte Resultante der Glieder höchsten Grades von f und φ darstellt. Die Resultante R_r enthält, wie wir wissen, die Coëfficienten f, φ, ψ, bezw. im Grad np, pm, mn und drückt die nothwendige und hinreichende Bedingung aus, dass irgend ein Schnittpunkt von f und φ auch auf der Curve ψ liegt.

Sind nämlich $x_i y_i$ die Coordinaten irgend eines Schnittpunktes von f und φ, so ist offenbar $\psi(x_i y_i) = 0$ sobald die Curve ψ durch denselben hindurchgeht. Da nun ψ_i in dem Product (2) als Factor enthalten ist, so leuchtet ein, dass dasselbe nothwendig verschwinden muss, sobald dies für ψ_i der Fall ist. Daher ist

$R_r = 0$ die nothwendige Bedingung, dass f, φ und ψ durch einen Punkt gemeinschaftlich hindurchgehen. Sie ist aber auch vollständig ausreichend, da sie stets das Mittel darbietet, irgend eine Constante einer der Curven (1) so zu bestimmen, dass eine solche durch einen Schnittpunkt der beiden anderen hindurchgeht. Die Gleichung $\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_r = 0$ ist beispielsweise hinsichtlich der Coëfficienten von ψ homogen vom Grad $r = mn$. Setzen wir daher von denselben alle bis auf einen als bekannt voraus, so stellt dieselbe eine Gleichung r-ten Grades hinsichtlich des letzten dieser Coëfficienten dar, deren r-Wurzeln je für sich betrachtet, die Bedingung erfüllen, dass die Curve ψ durch einen der r-Schnittpunkte von f und φ hindurchgeht.

b) Liegen zwei der Schnittpunkte von f und φ, deren Coordinaten $x_i y_i$, $x_\varkappa y_\varkappa$ sein sollen, auf der Curve ψ, so ist

$$\psi(x_i y_i) = 0, \quad \psi(x_\varkappa y_\varkappa) = 0.$$

In diesem Falle verschwindet neben R_r auch noch die Summe $R_{r-1} = \sum_1^r \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_{r-1}$ von je $r-1$ der Grössen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$, da in jedem Glied derselben mindestens einer der beiden Factoren ψ_i oder $\psi_\varkappa$ (oder auch beide) enthalten ist. Daher stellen

$$R_r = \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_r = 0, \qquad R_{r-1} = \sum_1^r \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_{r-1} = 0 \tag{3}$$

zwei Bedingungen dar, die nothwendig erfüllt sein müssen, wenn die drei Curven f, φ, ψ zwei gemeinschaftliche an beliebigen Stellen der Ebene befindliche Punkte besitzen sollen. Von denselben enthält R_{r-1} die Coëfficienten von f, φ und ψ, bezw. im Grad np, pm, $mn-1$ und hat deshalb den Grad

$$g = np + pm + mn - 1.$$

Dass diese Bedingungen auch hinreichen, um die Forderung zu erfüllen, dass die Curven f, φ, ψ durch zwei Punkte der Ebene gemeinschaftlich hindurchgehen, lässt sich zeigen.

Nehmen wir an, die Curven f und φ seien fest und schneiden sich in $r = mn$ Punkten $P_1 P_2 \ldots P_r$ mit den Coordinaten $x_1 y_1$, $x_2 y_2, \ldots, x_r y_r$, so lassen sich dieselben auf $\binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2}$ verschiedene Gruppen von je zwei Punkten zusammenstellen. Wir schliessen deshalb, dass eine dritte Curve ψ auf $\binom{r}{2}$ verschiedene Arten durch je zwei der Schnittpunkte von f und φ hindurch gelegt werden kann. Soll eine Curve durch zwei Punkte der Ebene einfach hindurchgehen, so werden durch diese Forderung zwei Bestimmungsstücke derselben absorbirt. Denken wir uns deshalb ψ auf die Form gebracht:

$$\psi = g + \lambda h + \mu l,$$

wo g, h, l drei Curven p-ter Ordnung repräsentiren, so können wir stets λ und μ so bestimmen, dass ψ durch zwei Schnittpunkte P_i und $P_\varkappa$ von f und φ geht. Angenommen, dies sei der Fall, so müssen nach dem, was wir oben gesehen haben, nothwendig die Bedingungen erfüllt sein:

$$R_r \equiv (g_1 + \lambda h_1 + \mu l_1)(g_2 + \lambda h_2 + \mu l_2) \ldots (g_r + \lambda h_r + \mu l_r) = 0$$

$$R_{r-1} \equiv \sum (g_1 + \lambda h_1 + \mu l_1)(g_2 + \lambda h_2 + \mu l_2) \ldots (g_{r-1} + \lambda h_{r-1} + \mu l_{r-1}) = 0,$$

oder

$$R_r = b_{r,0,0} + \lambda b_{r-1,1,0} + \mu b_{r-1,0,1} + \ldots + \lambda^r b_{0,r,0} + \ldots + \mu^r b_{0,0,r} = 0$$

$$R_{r-1} = b_{r-1,0,0} + \lambda b_{r-2,1,0} + \mu b_{r-2,0,1} + \ldots + \lambda^{r-1} b_{0,r-1,0} + \ldots + \mu^{r-1} b_{0,0,r-1} = 0,$$

wo die Coëfficienten b von R_r r-förmige und die von R_{r-1} $(r-1)$-förmige Elementarfunctionen der Gruppen $g_1 h_1 l_1$, $g_2 h_2 l_2, \ldots, g_r h_r l_r$ darstellen, die nach irgend einem Verfahren durch die Coëfficienten von f und φ ausgedrückt werden mögen.

Als Functionen von λ und μ aufgefasst, stellen R_r und R_{r-1} zwei Curven r-ter, bezw. $(r-1)$-ter Ordnung dar, die sich im allgemeinen in $r(r-1)$-Punkten schneiden. Wir wollen nun zeigen, dass sich diese Zahl auf die Hälfte reducirt, wie es sein muss.

Da ihrer Definition nach die Curve R_r in r gerade Linien von der Form $\psi_i = g_i+\lambda h_i+\mu l_i$ zerfällt, so erhalten wir die Schnittpunkte von R_r und R_{r-1} auch, indem wir jede dieser Geraden mit R_{r-1} schneiden. Nun ist die Function R_{r-1} gleich der Summe der r-Producte von je $r-1$ der linearen Factoren von R_r. Jeder derselben ist in $r-1$ jener Producte enthalten, während das r-te Product die $r-1$ übrigen Linearfactoren enthält. Die Schnittpunkte einer Geraden, zum Beispiel $g_1+\lambda h_1+\mu l_1$ von R_r mit R_{r-1} sind daher identisch mit den $r-1$-Schnittpunkten derselben mit den $r-1$ übrigen Geraden $g_2+\lambda h_2+\mu l_2, \ldots, g_r+\lambda h_r+\mu l_r$ von R_r. Wir sehen somit, dass sich die Schnittpunkte von R_r und R_{r-1} als die Schnittpunkte der r-Geraden $g_i+\lambda h_i+\mu l_i$ darstellen, deren Anzahl $\binom{r}{2}$ beträgt, wie es sein soll.

Sind zwei gerade Linien

$$\psi_i = g_i+\lambda h_i+\mu l_i, \quad \psi_\varkappa = g_\varkappa+\lambda h_\varkappa+\mu l_\varkappa$$

von R_r bekannt, so schneiden sich dieselben in einem Punkte mit den Coordinaten

$$\lambda : \mu : 1 = \left\| \begin{matrix} h_i & l_i & g_i \\ h_\varkappa & l_\varkappa & g_\varkappa \end{matrix} \right\|.$$

Die Curve ψ, welche durch die beiden Schnittpunkte P_i und $P_\varkappa$ von f und φ geht, hat alsdann die Gleichung:

$$g(h_i l_\varkappa)+h(l_i g_\varkappa)+l(g_i h_\varkappa) = \begin{vmatrix} g & h & l \\ g_i & h_i & l_i \\ g_\varkappa & h_x & l_x \end{vmatrix} = 0.$$

Sind die Coordinaten der Schnittpunkte von f und φ nicht bekannt, wohl aber deren symmetrische Elementarfunctionen nach §. 12 berechnet und sind R_r und R_{r-1} durch die Coëfficienten (wozu auch λ und μ gehört) von f, φ und ψ ausgedrückt, so lassen sich diese Functionen auf die Gestalt bringen:

$$R_r \equiv 1+\lambda A_1+\mu A_2+\lambda^2 A_{11}+\lambda\mu A_{12}+\ldots+\lambda^r A_{r,0}+\ldots+\mu^r A_{0,r}$$

$$R_{r-1} \equiv 1+\lambda B_1+\mu B_2+\lambda^2 B_{11}+\lambda\mu B_{12}+\ldots+\lambda^{r-1} B_{r-1,0}+\ldots+\mu^{r-1} B_{0,r-1},$$

wo $A_1, A_2, \ldots; B_1, B_2, \ldots$ rationale (gebrochene) Functionen der Coëfficienten von f, φ und ψ sind. Da ihrer Definition gemäss die Resultante R_r in lineare Factoren $1+\lambda_i\lambda+\mu_i\mu (i = 1, 2, \ldots r)$ zerfallen muss, so müssen für die Functionen $A_1 A_2 A_\varkappa \ldots$ nothwendig die Bedingungen des Zerfallens in Linearfactoren erfüllt sein, welche ich früher* aufgestellt habe. Die Elemente $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r$ habe ich damals als Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$\lambda^r - A_1\lambda^{r-1}+A_{11}\lambda^{r-2}-A_{111}\lambda^{r-3}+\ldots+(-1)^r A_{r,0} = 0$$

und zu einer derselben λ_i das zugehörige Element μ_i aus

$$\mu_i = \frac{A_2\lambda_i^{r-1}-A_{12}\lambda_i^{r-2}+A_{112}\lambda_i^{r-3}-\ldots}{r\lambda_i^{r-1}-(r-1)A_1\lambda^{r-2}+(r-2)A_{11}\lambda_i^{r-3}-\ldots}$$

gefunden.

Sind auf diese Weise die r-linearen Factoren

$$1+\lambda_i\lambda+\mu_i\mu, \quad (i = 1, 2, \ldots, r$$

ermittelt, so ist die Gleichung einer Curve ψ, welche durch zwei Schnittpunkte von f und φ hindurchgeht, angegeben durch:

$$g(\lambda_i\mu_\varkappa)+h(\lambda_i-\mu_\varkappa)+l(\lambda_\varkappa-\lambda_i) \equiv \begin{vmatrix} g & h & l \\ 1 & \lambda_i & \mu_i \\ 1 & \lambda_\varkappa & \mu_\varkappa \end{vmatrix} = 0.$$

* Mathem. Annalen, Bd. 43 und 45.

Legt man den Zahlen i, $\varkappa$ alle möglichen Werthe von 1 bis r bei, so erhält man sämmtliche $\binom{r}{2}$ Curven ψ, welche durch je zwei Schnittpunkte von f und φ gehen.

Zur Ermittlung derselben ist also nur die Auflösung einer einzigen Gleichung r-ten Grades nothwendig, deren Coëfficienten durch die symmetrischen Functionen der Gruppen $g_i h_i l_i$ ausgedrückt sind. Sind die Gruppen $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2, \ldots, \lambda_r\mu_r$ berechnet, so muss sich als Probe ergeben, dass

$$\Sigma(1+\lambda_1\lambda+\mu_1\mu)(1+\lambda_2\lambda+\mu_2\mu)\ldots(1+\lambda_{r-1}\lambda+\mu_{r-1}\mu) = R_{r-1}$$

ist.

c) Soll die Curve ψ durch drei Schnittpunkte P_i, P_k, P_l von f und ψ gehen, so ist:

$$\psi_i = 0, \quad \psi_k = 0, \quad \psi_l = 0.$$

Daher muss nothwendig neben $\psi_1\psi_2\ldots\psi_r$ und $\Sigma\psi_1\psi_2\ldots\psi_{r-1}$ auch noch die $(r-2)$-förmige symmetrische Function $\Sigma\psi_1\psi_2\ldots\psi_{r-2}$ verschwinden, da dieselbe in jedem Glied mindestens eine der Grössen ψ_i, ψ_k, ψ_l als Factor enthält.

Ebenso wie in b lässt sich auch hier zeigen, dass die Bedingungen

$$\psi_1\psi_2\ldots\psi_r = 0, \quad \Sigma\psi_1\psi_2\ldots\psi_{r-1} = 0, \quad \psi_1\psi_2\ldots\psi_{r-2} = 0$$

nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend sind, um die Forderung zu erfüllen, dass die drei Curven f, φ, ψ durch drei Punkte der Ebene gemeinschaftlich hindurchgehen.

Nimmt man ψ in der Form an

$$\psi = g+\lambda h+\mu l+\nu m,$$

so erhalten wir $\binom{r}{3}$ Curven dieser dreifach unendlichen Schaar, welche je durch drei Schnittpunkte von f und φ hindurchgehen. Die oben erhaltenen Bedingungen $R_r = 0$, $R_{r-1} = 0$, $R_{r-2} = 0$ gehen mit dieser Annahme hinsichtlich der Veränderlichen $\lambda\mu\nu$ in drei Flächen von den Ordnungen r, $r-1$, $r-2$ über, die sich im Allgemeinen in $r(r-1)(r-2)$-Punkten schneiden. Da sich diese Punkte aber als Schnittpunkte der r-Ebenen

$$\psi_i = g_i+\lambda h_i+\mu l_i+\nu m, \quad (i = 1, 2, \ldots r)$$

ergeben, so erhellt, dass sich diese Zahl auf $\binom{r}{3}$ reducirt, wie es sein soll. Ist die Resultante R_r, die wir uns auf die Form

$$R_r = 1+\lambda A_1+\mu A_2+\nu A_3+\lambda^2 A_{11}+\ldots+\nu^r A_{0,0,r}$$

gebracht denken können, durch die Coëfficienten von f und φ ausgedrückt, so muss dieselbe ihrer Definition zufolge in lineare Factoren zerfällbar sein. Wir erhalten die Coëfficienten dieser Factoren, indem wir die Gleichung

$$\lambda^r - \lambda^{r-1}A_1 + \lambda^{r-2}A_{11} - \ldots + (-1)^r A_{r,0,0} = 0$$

auflösen und die zu einer Wurzel λ_i gehörigen Elemente μ_i und ν_i durch Substitution aus

$$\mu_i = \frac{A_2\lambda_i^{r-1} - A_{12}\lambda_i^{r-2} + A_{112}\lambda_i^{r-3} - \ldots}{r\lambda_i^{r-1} - (r-1)A_1\lambda_i^{r-2} + (r-2)A_{11}\lambda_i^{r-3} - \ldots}$$

$$\nu_i = \frac{A_3\lambda_i^{r-1} - A_{13}\lambda_i^{r-2} + A_{113}\lambda_i^{r-3} - \ldots}{r\lambda_i^{r-1} - (r-1)A_1\lambda_i^{r-2} + (r-2)A_{11}\lambda_i^{r-3} - \ldots}$$

berechnen.

d) Allgemein finden wir, dass durch

$$R_r = 0, \quad R_{r-1} = 0, \quad R_{r-2} = 0, \quad \ldots, \quad R_{r-i+1} = 0.$$

die Bedingungen ausgedrückt werden, die nothwendig und hinreichend sind, dass i Schnittpunkte zweier Curven f und φ auf einer dritten Curxe ψ liegen. Um dieselben als ganze Functionen der Coëfficienten von f und φ zu erhalten, hat man noch mit einem Factor A_0^p zu multipliciren, wo A_0 die Resultante der Glieder höchsten Grades von f und φ bezeichnet.

§. 15.

Andere Methode der Ermittlung der Bedingungen der gemeinschaftlichen Punkte dreier Curven.

In seiner berühmten Arbeit vom Jahre 1770, die in den Abhandlungen der Berliner Akademie enthalten ist, hat Lagrange die Bedingungen aufgestellt, dass zwei algebraische Gleichungen $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ mehrere gemeinschaftliche Wurzeln, oder was dasselbe ist, mehrere gemeinschaftliche lineare Factoren besitzen. Diese Aufgabe lässt sich in entsprechender Weise auch für das ternäre, quaternäre etc. Gebiet stellen. Im ternären Gebiet wollen wir dieselbe in folgender Weise fassen:

Die Bedingungen zu ermitteln, dass drei ternäre Formen f, φ, ψ i verschiedene gemeinschaftliche Variablenpaare oder dass drei ebene Curven durch i an beliebigen Stellen der Ebene befindliche Punkte je einfach gemeinschaftlich hindurchgehen.

Nehmen wir an, die drei Curven f, φ, ψ seien bezw. von den Ordnungen m, n, p, so schneiden sich zwei derselben, z. B. f und φ in $r = mn$ Punkten, deren Coordinaten x_1y_1, x_2y_2, $\ldots$, x_ry_r sein sollen. Indem wir die letzteren der Reihe nach für xy in $\psi(xy)$ substituiren, erhalten wir r verschiedene Werthe dieser Function $t_1 = \psi_1$, $t_2 = \psi_2$, $\ldots$, $t_r = \psi_r$, welche im allgemeinen von Null verschieden sind. Eine solche wird offenbar nur dann Null, wenn ein Schnittpunkt von f und φ auf die Curve ψ zu liegen kommt. Die algebraische Gleichung, welche die Grössen $\psi_1\psi_2\ldots\psi_r$ als Wurzeln enthält, ist angegeben durch:

$$\begin{aligned} T(t) &\equiv (t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_r) \\ &= t^r - t^{r-1}\Sigma\psi_1 + t^{r-2}\Sigma\psi_1\psi_2 - \ldots + (-1)^r\psi_1\psi_2\ldots\psi_r = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

wo $\Sigma\psi_1$, $\Sigma\psi_1\psi_2$, $\ldots$, $\psi_1\psi_2\ldots\psi_r$ die r symmetrischen Elementarfunctionen der Elemente $\psi_1\psi_2\ldots\psi_r$ bezeichnen. Damit irgend ein Schnittpunkt von f und φ auf die Curve ψ zu liegen kommt, muss eine Wurzel dieser Gleichung verschwinden. Dies ist aber der Fall, wenn das letzte Glied dieser Gleichung

$$R_r = \psi_1\psi_2\ldots\psi_r = 0$$

wird. Diese Grösse stellt bekanntlich die Resultante der Functionen f, φ, ψ dar. Soll ausserdem noch ein zweiter Schnittpunkt von f und φ auf ψ liegen, so muss noch eine weitere Wurzel dieser Gleichung verschwinden. Dies tritt bekanntlich ein, wenn nicht nur der Coëfficient des letzten, sondern auch der des vorletzten Gliedes der Gleichung (1) Null ist. Daher sind

$$\begin{aligned} R_r &= \psi_1\psi_2\ldots\psi_r = 0 \\ R_{r-1} &= \Sigma\psi_1\psi_2\ldots\psi_{r-1} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

die Bedingungen, die nothwendig und hinreichend sind, dass drei ebene Curven f, φ, ψ durch zwei an beliebigen Stellen der Ebene befindliche Punkte je einfach hindurchgehen.

Allgemein wird einleuchten, dass i Wurzeln der Gleichung (1) verschwinden müssen, wenn i Schnittpunkte von f und φ auf der Curve ψ liegen sollen. Dieser Forderung wird aber genügt, wenn die Coëfficienten der i letzten Glieder der Gleichung $T(t) = 0$ Null sind. Wir sehen also, dass

$$\begin{aligned} R_r &= \psi_1\psi_2\ldots\psi_r = 0 \\ R_{r-1} &= \Sigma\psi_1\psi_2\ldots\psi_{r-1} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{r-i+1} &= \Sigma\psi_1\psi_2\ldots\psi_{r-i+1} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

die Bedingungen ausdrücken, die nothwendig und hinreichend sind, dass drei Curven durch i an beliebigen Stellen der Ebene befindliche Punkte gemeinschaftlich hindurchgehen.

Sollen sämmtliche r Schnittpunkte von f und φ auf die Curve ψ fallen, so müssen sämmtliche symmetrische Elementarfunctionen

$$\Sigma\psi_1,\quad \Sigma\psi_1\psi_2,\quad \Sigma\psi_1\psi_2\psi_3,\quad \ldots,\quad \psi_1\psi_2\ldots\psi_r \tag{3}$$

der Grössen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ verschwinden.

Jede dieser Functionen ändert sich nicht, wenn man zwei der Gruppen $x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ry_r$ miteinander vertauscht. Dieselben sind somit symmetrische Functionen dieser Gruppen, d. h. der Coordinaten der r Schnittpunkte von f und φ und können als solche durch die Elementarfunctionen derselben dargestellt werden.

Werden diese nach §. 12 durch ihre Ausdrücke $\frac{A}{A_0}$ in den Coëfficienten von f und φ ersetzt, so sind die Bedingungen R allgemein durch die Coëfficienten der drei Functionen f, φ, ψ ausgedrückt. Da die Elementarfunctionen der Gruppen x_iy_i in den symmetrischen Functionen (3) im Grad p auftreten, so ist jede der letzteren noch mit dem Factor A_0^p zu multipliciren, um sie als ganze Functionen der Coëfficienten zu erhalten. Jede der Bedingungen (3) ist hinsichtlich der Coëfficienten von f und φ, bezw. vom Grad np und mp und hinsichtlich derjenigen von ψ, resp. vom Grad 1, 2, . . ., mn. Daher haben diese Bedingungen den Gesammtgrad, bezw. $np+mp+1$, $np+mp+2, \ldots np+pm+mn$.

§. 16.

Die partiellen Ableitungen der Resultante.

Ist die Resultante der drei Formen f, φ und ψ wiederum dargestellt durch die r-förmige symmetrische Function $R_r = \psi_1\psi_2\ldots\psi_r$, so erhalten wir hieraus auch die $r-1$-förmige Function R_{r-1}, indem wir R_r nach den Elementen der Reihe $\psi_1\psi_2\ldots\psi_r$ ableiten und die erhaltenen Ableitungen addiren. Es ist deshalb

$$R_{r-1} = \sum_1^r \frac{\partial R_r}{\partial\psi_1} = \Sigma\psi_1\psi_2\ldots\psi_{r-1}.$$

Ebenso ist leicht zu sehen, dass (1)

$$R_{r-2} = \frac{1}{2!}\sum\frac{\partial^2 R_r}{\partial\psi_1^2} = \Sigma\psi_1\psi_2\ldots\psi_{r-2}$$

$$R_{r-3} = \frac{1}{3!}\sum\frac{\partial^3 R_r}{\partial\psi_1^3} = \Sigma\psi_1\psi_2\ldots\psi_{r-3}$$

u. s. w. ist.

Wir können deshalb auch aussprechen den Satz: Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass drei Curven f, φ und ψ i gemeinschaftliche an verschiedenen Stellen der Ebene befindliche Punkte besitzen, sind ausgedrückt durch das Verschwinden der Resultante R_r derselben und der Summen der partiellen Ableitungen erster, zweiter, . ., $i$ter Ordnung der letzteren nach den Elementen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$, welche man erhält, indem man jedes gemeinschaftliche Variablenpaar von f und φ in die dritte Form ψ substituirt.

Nimmt man ψ in der Form an:

$$\psi = c_0x^p + c_1x^{p-1}y + \ldots + c_{\nu-2}x + c_{\nu-1}y + c_\nu, \tag{2}$$

wo c_ν das letzte Glied oder auch eine willkürliche Grösse darstellen soll, so lässt sich R_r auf die Gestalt bringen

$$R_r = c_\nu^r + c_\nu^{r-1}\chi_1 + c_\nu^{r-2}\chi_2 + \ldots + c_\nu\chi_{r-1} + \chi_r. \tag{3}$$

wo $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_r$ symmetrische Functionen der Gruppen $x_1y_1, x_2y_2, \ldots$ vom Grad $1, 2, \ldots, r$ bezeichnen. Da nun R_r eine Function der Grössen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ ist und diese Functionen des Coëfficienten c_ν sind, so ist

$$\frac{\partial R}{\partial c_\nu} = \frac{\partial R}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial c_\nu} + \frac{\partial R}{\partial \psi_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial c_\nu} + \ldots + \frac{\partial R}{\partial \psi_r}\frac{\partial \psi_r}{\partial c_\nu}.$$

Da ferner, wie leicht zu sehen ist,

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial c_\nu} = 1$$

ist, so geht diese Ableitung nach dem Coëfficienten c_ν über in

$$\frac{\partial R_r}{\partial c_\nu} = \sum_1^r \frac{\partial R_r}{\partial \psi_1} = R_{r-1}. \tag{4}$$

Ebenso ist

$$\frac{\partial^2 R_r}{\partial c_\nu^2} = \sum \frac{\partial^2 R_r}{\partial \psi_1^2} = R_{r-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2 R_r}{\partial c_\nu^i} = \sum \frac{\partial_i R_r}{\partial \psi_1^i} = R_{r-i+1}.$$

Daher sehen wir, dass die Bedingungen $R_{r-1}, R_{r-2}, \ldots$ auch gewonnen werden, indem man die Resultante R_r einmal, zweimal, ... partiell nach dem Coëfficienten c_ν ableitet. Die Bedingungen (1) sind deshalb auch ausgedrückt durch:

$$R = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial c_\nu} = 0, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial c_\nu^2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial^{i-1} R}{\partial c_\nu^{i-1}} = 0. \tag{5}$$

Da sich die Resultante der drei Formen f, φ, ψ symmetrisch hinsichtlich der Coëfficienten jeder derselben verhält, so leuchtet ein, dass auch die partiellen Ableitungen nach dem Coëfficienten a_λ, b_μ der letzten Glieder von f, bezw. φ dieselben Bedingungen erfüllen, wie die Ableitungen (5) nach dem Coëfficienten c_ν der Function ψ. Wir erhalten somit den Satz:

Ist $R(a, b, c)$ die Resultante dreier ternären Formen, so sind die Bedingungen, dass die durch dieselben dargestellten Curven durch i (nicht bekannte) an beliebigen Stellen der Ebene befindliche Punkte hindurchgehen, ausgedrückt durch das Verschwinden jener Resultante und der $i-1$ partiellen Ableitungen derselben nach dem Coëfficienten a_λ von z^m von f oder nach b_μ von z^n von φ oder nach c_ν von z^p in ψ. Dieselben sind somit angegeben durch jedes der drei Systeme von Gleichungen:

$$\begin{array}{ccc} R = 0 & R = 0 & R = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial a_\lambda} = 0 & \frac{\partial R}{\partial b_\mu} = 0 & \frac{\partial R}{\partial c_\nu} = 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^{i-1} R}{\partial a_\lambda^{i-1}} = 0 & \frac{\partial^{i-1} R}{\partial b_\mu^{i-1}} = 0 & \frac{\partial^{i-1} R}{\partial c_\nu^{i-1}} = 0, \end{array} \tag{6}$$

die auch sämmtlich gleichzeitig nebeneinander bestehen müssen.

Denken wir uns die Formen f, φ, ψ mit z homogen gemacht, so gelangt man offenbar stets zu der nämlichen Resultante, ob man die Verhältnisse $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ oder $\frac{x}{y}, \frac{z}{y}$ oder $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}$ eliminirt. Wir schliessen deshalb, dass auch die partiellen Ableitungen nach dem Coëfficienten von x^m in f oder x^n in φ oder x^p in ψ oder auch nach dem Coëfficienten von y^m in f oder y^n in φ oder y^p in ψ denselben Dienst leisten, wie die partiellen Ableitungen nach den Coëfficienten a_λ, b_μ, c_ν von z^m, z^n und z^p. Wir erhalten infolge dessen 9 Systeme von je i-Gleichungen; welche je für sich betrachtet, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen darstellen, dass die drei Curven f, φ, ψ durch i-Punkte der Ebene gemeinsam hindurchgehen.

Sind beispielsweise f, φ, ψ drei Kegelschnitte von der Form

$$f = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + \ldots + a_{33}z^2$$

$$\varphi = b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2 + \ldots + b_{33}z^2$$

$$\psi = c_{11}x^2 + c_{12}xy + c_{22}y^2 + \ldots + c_{33}z^2,$$

so ist die Bedingung, dass dieselben durch einen Punkt der Ebene gemeinschaftlich hindurchgehen, dargestellt durch die vierförmige Function

$$R_4 = R\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = A_0^2 \psi(x_1 y_1)\psi(x_2 y_2)\psi(x_3 y_3)\psi(x_4 y_4) = 0,$$

wo $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, $x_4 y_4$ die Coordinaten der vier Schnittpunkte von f und φ bezeichnen. Dieselbe ist bekanntlich vom Grad 4 hinsichtlich der Coëfficienten jeder der drei Formen f, φ, ψ. Liegt noch ein weiterer Schnittpunkt von f und φ auf der Curve ψ, so muss neben R_4 noch die dreiförmige Function

$$R_3 = A_0^2 \sum_1^4 \psi(x_1 y_1)\psi(x_2 y_2)\psi(x_3 y_3) = 0$$

sein. Kommt schliesslich auch noch der dritte und vierte Schnittpunkt von f und ψ auf φ zu liegen, so müssen ausserdem noch die Bedingungen erfüllt sein:

$$R_2 = A_0^2 \sum_1^4 \psi(x_1 y_1)\psi(x_2 y_2) = 0$$

$$R_1 = A_0^2 \sum_1^4 \psi(x_1 y_1) = 0,$$

deren linke Seite, bezw. eine zweiförmige, einförmige Function der Coordinaten der Schnittpunkte von f und φ ist. Ersetzt man dieselben durch ihre Ausdrücke in den Coëfficienten von f und φ, so erscheinen die Bedingungen $R_4 R_3 R_2 R_1$ in Function der Coëfficienten sämmtlicher drei Curven f, φ und ψ. Es leuchtet ein, dass man $R_3 R_2 R_1$ auch erhält, wenn man R_4 partiell nach c_{33} ableitet. Es ist

$$R_3 = \frac{\partial R_4}{\partial c_{33}}, \qquad R_2 = \frac{\partial^2 R_4}{\partial c_{33}^2}, \qquad R_1 = \frac{\partial^3 R_4}{\partial c_{33}^3}.$$

Neben diesen Bedingungen müssen gleichzeitig noch die partiellen Ableitungen von R_4 nach b_{33}, a_{33}; c_{22}, b_{22}, a_{22}; c_{11}, b_{11}, a_{11} verschwinden.

§. 17.

Die reducirte Resultante und deren Ableitungen.

Haben die drei Curven f, φ, ψ schon zum voraus gewisse bekannte Punkte der Ebene mit den Coordinaten $a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots$ gemeinsam, die für

$$\left.\begin{array}{llll} f & \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, \ldots \\ \varphi & \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, \ldots \\ \psi & \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, \ldots \end{array}\right\} \text{-fache Punkte sein sollen,}$$

so ist die Bedingung, dass dieselben ausser diesen noch einen weiteren Schnittpunkt gemein haben, nach Herrn Brill dargestellt durch die »reducirte Resultante«

$$R_r = A_0^p \frac{\Psi}{\pi(\rho)} = A_0^p \frac{\psi(x_1 y_1)\psi(x_2 y_2)\ldots\psi(x_r y_r)}{\rho_1^{\gamma_1}\rho_2^{\gamma_2}\rho_3^{\gamma_3}\ldots},$$

wo der Divisor ρ_i die Resultante der niedersten Glieder der nach Dimensionen von $x-a_i, y-b_i$ entwickelten Functionen f und φ bezeichnet.

A_0 ist wie oben §. 12 der Coëfficient von t^r in Gleichung (2), r ist die Anzahl der Schnittpunkte von f und φ, durch welche ψ nicht zum voraus hindurchgeht. Diese Zahl ist offenbar $r = mn - \Sigma\alpha_i\beta_i$. Die reducirte Resultante enthält demnach die Coëfficienten von f, φ, ψ, bezw. im Grad $m' = np - \Sigma\beta_i\gamma_i$, $n' = pm - \Sigma\gamma_i\alpha_i$, $p' = mn - \Sigma\alpha_i\beta_i$ und hat deshalb den Gesammtgrad $m'+n'+p'$.

Es wird nun wohl keiner besonderen Auseinandersetzung bedürfen, um einzusehen, dass die Bedingungen, dass die Curven f, φ, ψ ausser den bekannten Punkten $C_1 C_2 C_2 \ldots$ noch weitere, an beliebigen Stellen befindliche Punkte gemeinschaftlich besitzen, in derselben Weise aus der reducirten Resultante herzuleiten sind, wie die entsprechenden Bedingungen aus der allgemeinen Resultante. Sollen dieselben noch durch i weitere nicht bekannte Punkte $P_1 P_2 \ldots P_i$ je einfach hindurchgehen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die i Gleichungen bestehen:

$$R_r = \frac{A_0^p}{\pi(\rho)} \psi_1\psi_2\ldots\psi_r = 0$$

$$R_{r-1} = \frac{A_0^p}{\pi(\rho)} \Sigma\psi_1\psi_2\ldots\psi_{r-1} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R_{r-i+1} = \frac{A_0^p}{\pi(\rho)} \Sigma\psi_1\psi_2\ldots\psi_{r-i+1} = 0,$$

an deren Stelle auch die folgenden gesetzt werden können:

$$R_r = 0, \quad \frac{\partial R_r}{\partial c_\nu} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{r-i+1} R_r}{\partial c_\nu^{r-i+1}} = 0.$$

§. 18.

Schlussbemerkungen.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass die Methoden der vorhergehenden Paragraphen auch zur Ermittlung der Bedingungen benützt werden können, dass eine algebraische Curve an beliebigen Stellen Doppelpunkte besitzt.

Eine solche hat im Allgemeinen keinen singulären Punkt, solange ihre Coëfficienten $a_0 a_1 a_2 \ldots a_s$ beliebige von einander unabhängige Grössen derselben. Soll ein solcher an irgend einer Stelle vorhanden sein, so müssen dieselben nothwendig eine Bedingung $D_r = 0$ erfüllen, die man als Discriminante von f bezeichnet.

Da für jeden Doppelpunkt P mit den Coordinaten xyz der Curve f die Gleichung der Tangente illusorisch wird, so müssen für denselben ausser f noch die partiellen Ableitungen verschwinden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

welche mit f durch die Euler'sche Gleichung zusammenhängen

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = mf. \tag{2}$$

Die Resultante der drei Formen (1) ist die Discriminante von f, welche bekanntlich die Coëfficienten im Grad $3\,(m-1)^2$ enthält.

Wie nun für jeden singulären Punkt P von f die partiellen Ableitungen (1) verschwinden müssen, so schliessen wir auch umgekehrt, dass jeder gemeinsame Schnittpunkt der drei Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung (1) ein singulärer Punkt von f ist.

Wir erhalten deshalb die Bedingungen für die Doppelpunkte von f, indem wir diejenigen der gemeinschaftlichen Schnittpunkte der drei Curven (1) aufstellen. Wie dies ausgeführt werden kann, haben wir in den vorhergehenden Paragraphen gezeigt. Setzen wir beispielsweise $\frac{df}{dz} = \varphi$ und bezeichnen wir die Coordinaten der $r = (m-1)^2$ gemeinschaftlichen Schnittpunkte von $\frac{df}{dx} = 0$ und $\frac{df}{dy} = 0$ mit $x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_r y_r$, so sind die Bedingungen, dass die Curve f i an beliebigen Stellen befindliche Doppelpunkte besitzt, angegeben durch

$$D_r = \varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_r = 0, \quad D_{r-1} = \Sigma\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_{r-1} = 0, \ldots D_{r-i+1} = \Sigma\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_{r-i+1} = 0, \tag{3}$$

an deren Stelle auch die partiellen Ableitungen von D_r nach dem Coefficienten von x^m oder y^m oder z^m (oder auch nach dem Coëfficienten von $x^{m-1}y$ oder xy^{m-1} oder $x^{m-1}z$ oder $z^{m-1}x$ oder $y^{m-1}z$ oder $z^{m-1}y$) von f gesetzt werden können. Dies sind eben jene 9 Systeme von Gleichungen, die wir in §. 16 kennen gelernt haben.

Im Fall einer Curve 3. Ordnung müssen daher für einen Doppelpunkt derselben sämmtliche partielle Ableitungen der Discriminante nach den Coëfficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_9$ verschwinden.

Da eine Curve m-ter Ordnung höchstens $\sigma = \frac{m-1\,.\,m-2}{2}$ Doppelpunkte erhalten kann, ohne dass sie in niedrigere Curven zerfällt, so gibt das System (3) für $i = \sigma, \sigma-1, \sigma-2, \ldots$ ganz allgemein die Bedingungen an, dass dieselbe rational, vom Geschlecht 1, 2, . . ist. Für $i > \sigma$ muss die Curve nothwendig zerfallen. Unter gewissen Umständen ist dies bekanntlich auch schon der Fall, wenn $i \lesseqgtr \sigma$ ist. So zerfällt beispielsweise eine rationale Curve 4. Ordnung in eine Gerade und eine Curve 3. Ordnung, wenn die drei Doppelpunkte derselben in eine gerade Linie fallen. Diese Linie muss ein Theil der Curve sein. Kommen die 6 Doppelpunkte einer rationalen Curve 5. Ordnung auf einen Kegelschnitt zu liegen, so sondert sich letzterer als Theil der Curve ab, da er andernfalls mit der Curve 12 Punkte gemein haben würde, was nicht der Fall sein kann.

Hat die Curve f an gewissen Stellen schon zum voraus bekannte Doppelpunkte, so lassen sich die Bedingungen, dass dieselbe ausser in diesen noch eine Anzahl weiterer singulärer Punkte an nicht bekannten Stellen besitzt, in ähnlicher Weise wie in §. 17 durch die reducirte Resultante der drei Functionen (1) und deren partielle Ableitungen angeben, die wir in diesem Fall als reducirte Discriminante von f bezeichnen können.

Tabellen der ternären symmetrischen Functionen vom Gewicht 1—6.

Die symmetrischen Functionen einer beliebigen Anzahl von Variablenpaaren.

I. Die symmetrischen Functionen vom Gewicht 1.

a) Nr. 1.

	a_1
$\mathfrak{a}_1$	1

b) Nr. 2.

	$\mathfrak{a}_1$
a_1	1

c) Nr. 3.

Σ	x_1
$\mathfrak{a}_1$	1

d) Nr. 4.

Σ	$\mathfrak{a}_1$
x_1	1

e) Nr. 5.

Σ	x_1
a_1	1

f) Nr. 6.

Σ	a_1
x_1	1

II. Die symmetrischen Functionen vom Gewicht 2.

α. Die symmetrischen Functionen vom Gewicht $p_1 = 2$.

a) Nr. 7.

	a_1^2	a_{11}
$\mathfrak{a}_1^2$	1	
$\mathfrak{a}_{11}$	1	-2

b) Nr. 8.

	$\mathfrak{a}_1^2$	$\mathfrak{a}_{11}$
a_1^2	1	
a_{11}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

c) Nr. 9.

Σ	x_1^2	x_1x_2
$\mathfrak{a}_1^2$	1	2
$\mathfrak{a}_{11}$	1	

d) Nr. 10.

Σ	$\mathfrak{a}_1^2$	$\mathfrak{a}_{11}$
x_1^2		1
x_1x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

e) Nr. 11.

Σ	x_1^2	x_1x_2
a_1^2	1	2
a_{11}		1

f) Nr. 12.

Σ	a_1^2	a_{11}
x_1^2	1	-2
x_1x_2		1

β. Die zweireihigen Functionen vom Gewicht $p_1 + p_2 = 1 + 1 = 2$.

a) Nr. 13.

	a_1a_2	a_{12}
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$	1	
$\mathfrak{a}_{12}$	1	-1

b) Nr. 14.

	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_{12}$
a_1a_2	1	
a_{12}	1	-1

c) Nr. 15.

Σ	x_1y_1	x_1y_2
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$	1	1
$\mathfrak{a}_{12}$	1	

d) Nr. 16.

Σ	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_{12}$
x_1y_1		1
x_1y_2	1	-1

e) Nr. 17.

Σ	x_1y_1	x_1y_2
a_1a_2	1	1
a_{12}		1

f) Nr. 18.

Σ	a_1a_2	a_{12}
x_1y_1	1	-1
x_1y_2		1

III. Die symmetrischen Functionen vom Gewicht 3.

α. Die einreihigen Functionen vom Gewicht $p_1 = 3$.

a) Nr. 19.

	a_1^3	a_1a_{11}	a_{111}
$\mathfrak{a}_1^3$	1		
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$	1	-2	
$\mathfrak{a}_{111}$	1	-3	3

b) Nr. 20.

	$\mathfrak{a}_1^3$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$	$\mathfrak{a}_{111}$
a_1^3	1		
a_1a_{11}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
a_{111}	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

c) Nr. 21.

Σ	x_1^3	$x_1^2x_2$	$x_1x_2x_3$
$\mathfrak{a}_1^3$	1	3	6
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$	1	1	
$\mathfrak{a}_{111}$	1		

d) Nr. 22.

Σ	$\mathfrak{a}_1^3$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}$	$\mathfrak{a}_{111}$
x_1^3			1
$x_1^2x_2$		1	-1
$x_1x_2x_3$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

e) Nr. 23.

Σ	x_1^3	$x_1^2x_2$	$x_1x_2x_3$
a_1^3	1	3	6
a_1a_{11}		1	3
a_{111}			1

f) Nr. 24.

Σ	a_1^3	a_1a_{11}	a_{111}
x_1^3	1	-3	3
$x_1^2x_2$		1	-3
$x_1x_2x_3$			1

β. Die zweireihigen Functionen vom Gewicht $p_1 = 2$, $p_2 = 1$.

a) Nr. 25.

	$a_1^2a_2$	a_1a_{12}	a_2a_{11}	a_{112}
$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2$	1			
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{12}$	1	-1		
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}$	1		-2	
$\mathfrak{a}_{112}$	1	-1	-1	1

b) Nr. 26.

	$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}$	$\mathfrak{a}_{112}$
$a_1^2a_2$	1			
a_1a_{12}	1	-1		
a_2a_{11}	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
a_{112}	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1

c) Nr. 27.

Σ	$x_1^2y_1$	$x_1^2y_2$	$x_1y_1x_2$	$x_1x_2y_3$
$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2$	1	1	2	2
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{12}$	1		1	
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}$	1	1		
$\mathfrak{a}_{112}$	1			

d) Nr. 28.

Σ	$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}$	$\mathfrak{a}_{112}$
$x_1^2y_1$				1
$x_1^2y_2$			1	-1
$x_1y_1x_2$		1		-1
$x_1x_2y_3$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1

e) Nr. 29.

Σ	$x_1^2y_1$	$x_1^2y_2$	$x_1y_1x_2$	$x_1x_2y_3$
$a_1^2a_2$	1	1	2	2
a_1a_{12}		1	1	2
a_2a_{11}			1	1
a_{112}				1

f) Nr. 30.

Σ	$a_1^2a_2$	a_1a_{12}	a_2a_{11}	a_{112}
$x_1^2y_1$	1	-1	-1	1
$x_1^2y_2$		1	-1	-1
$x_1y_1x_2$			1	-1
$x_1x_2y_3$				1

IV. Die symmetrischen Functionen vom Gewicht 4.

α. Die einreihigen Functionen vom Gewicht $p_1 = 4$.

a) Nr. 31.

	a_1^4	$a_1^2a_{11}$	a_{11}^2	a_1a_{111}	a_{1111}
$\mathfrak{a}_1^4$	1				
$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_{11}$	1	-2			
$\mathfrak{a}_{11}^2$	1	-4	4		
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{111}$	1	-3		3	
$\mathfrak{a}_{1111}$	1	-4	2	4	-4

b) Nr. 32.

	$\mathfrak{a}_1^4$	$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_{11}$	$\mathfrak{a}_{11}^2$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{111}$	$\mathfrak{a}_{1111}$
a_1^4	1				
$a_1^2a_{11}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			
a_{11}^2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		
a_1a_{111}	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	
a_{1111}	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

c) Nr. 33.

Σ	x_1^4	$x_1^3x_2$	$x_1^2x_2^2$	$x_1^2x_2x_3$	$x_1x_2x_3x_4$
a_1^4	1	4	6	12	24
$a_1^2a_{11}$	1	2	2	2	
a_{11}^2	1		2		
a_1a_{111}	1	1			
a_{1111}	1				

d) Nr. 34.

Σ	a_1^4	$a_1^2a_{11}$	a_{11}^2	a_1a_{111}	a_{1111}
x_1^4					1
$x_1^3x_2$				1	-1
$x_1^2x_2^2$			$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$
$x_1^2x_2x_3$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1
$x_1x_2x_3x_4$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

e) Nr. 35.

	x_1^4	$x_1^3x_2$	$x_1^2x_2^2$	$x_1^2x_2x_3$	$x_1x_2x_3x_4$
a_1^4	1	4	6	12	24
$a_1^2a_{11}$		1	2	5	12
a_{11}^2			1	2	6
a_1a_{111}				1	4
a_{1111}					1

f) Nr. 36.

	a_1^4	$a_1^2a_{11}$	a_{11}^2	a_1a_{111}	a_{1111}
x_1^4	1	-4	2	4	-4
$x_1^3x_2$		1	-2	-1	4
$x_1^2x_2^2$			1	-2	2
$x_1^2x_2x_3$				1	-4
$x_1x_2x_3x_4$					1

β) Die zweireihigen Functionen vom Gewicht $p_1 = 3$, $p_2 = 1$.

a) Nr. 37.

	$a_1^3a_2$	$a_1^2a_{12}$	$a_1a_2a_{11}$	$a_{11}a_{12}$	a_1a_{112}	a_2a_{111}	a_{1112}
$a_1^3a_2$	1						
$a_1^2a_{12}$	1	-1					
$a_1a_2a_{11}$	1		-2				
$a_{11}a_{12}$	1	-1	-2	2			
a_1a_{112}	1	-1	-1		1		
a_2a_{111}	1		-3			3	
a_{1112}	1	-1	-2	1	1	1	-1

b) Nr. 38.

	$a_1^3a_2$	$a_1^2a_{12}$	$a_1a_2a_{11}$	$a_{11}a_{12}$	a_1a_{112}	a_2a_{111}	a_{1112}
$a_1^3a_2$	1						
$a_1^2a_{12}$	1	-1					
$a_1a_2a_{11}$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$				
$a_{11}a_{12}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
a_1a_{112}	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$		1		
a_2a_{111}	$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{3}$	
a_{1112}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	-1

c) Nr. 39.

Σ	$x_1^3y_1$	$x_1^3y_2$	$x_1^2y_1x_2$	$x_1^2x_2y_2$	$x_1^2x_2y_3$	$x_1y_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3y_1$
$a_1^3a_2$	1	1	3	3	3	6	6
$a_1^2a_{12}$	1		2	1		2	
$a_1a_2a_{11}$	1	1	1	1	1		
$a_{11}a_{12}$	1			1			
a_1a_{112}	1		1				
a_2a_{111}	1	1					
a_{1112}	1						

d) Nr. 40.

Σ	$a_1^3a_2$	$a_1^2a_{12}$	$a_1a_2a_{11}$	$a_{11}a_{12}$	a_1a_{112}	a_2a_{111}	a_{1112}
$x_1^3y_1$							1
$x_1^3y_2$						1	-1
$x_1^2y_1x_2$					1		-1
$x_1^2x_2y_2$				1			-1
$x_1^2x_2y_3$			1	-1	-1	-1	2
$x_1y_1x_2x_3$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	-1		1
$x_1x_2x_3y_4$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	-1

e) Nr. 41.

Σ	$x_1^3y_1$	$x_1^3y_2$	$x_1^2y_1x_2$	$x_1^2x_2y_2$	$x_1^2x_2y_3$	$x_1y_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3y_4$
$a_1^3a_2$	1	1	3	3	3	6	6
$a_1^2a_{12}$		1	1	2	3	4	6
$a_1a_2a_{11}$			1	1	1	3	3
$a_{11}a_{12}$				1	1	2	3
a_1a_{112}					1	1	3
a_2a_{111}						1	1
a_{1112}							1

f) Nr. 42.

Σ	$a_1^3a_2$	$a_1^2a_{12}$	$a_1a_2a_{11}$	$a_{11}a_{12}$	a_1a_{112}	a_2a_{111}	a_{1112}
$x_1^3y_1$	1	-1	-2	1	1	1	-1
$x_1^3y_2$		1	-1	-1	-1	2	1
$x_1^2y_1x_2$			1	-1		-1	1
$x_1^2x_2y_2$				1	-1	-1	1
$x_1^2x_2y_3$					1	-1	-2
$x_1y_1x_2x_3$						1	-1
$x_1x_2x_3y_1$							1

γ) Die zweireihigen Functionen vom Gewicht $p_1 = 2$, $p_2 = 2$.

a) Nr. 43.

	$a_1^2a_2^2$	$a_1^2a_{22}$	$a_1a_2a_{12}$	$a_2^2a_{11}$	a_{12}^2	$a_{11}a_{22}$	a_1a_{122}	a_2a_{112}	a_{1122}
$a_1^2a_2^2$	1								
$a_1^2a_{22}$	1	-2							
$a_1a_2a_{12}$	1		-1						
$a_2^2a_{11}$	1			-2					
a_{12}^2	1		-2		1				
$a_{11}a_{22}$	1	-2		-2		4			
a_1a_{122}	1	-1	-1				1		
a_2a_{112}	1		-1	-1				1	
a_{1122}	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$

b) Nr. 44.

	$a_1^2a_2^2$	$a_1^2a_{22}$	$a_1a_2a_{12}$	$a_2^2a_{11}$	a_{12}^2	$a_{11}a_{22}$	a_1a_{122}	a_2a_{112}	a_{1122}
$a_1^2a_2^2$	1								
$a_1^2a_{22}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$							
$a_1a_2a_{12}$	1		-1						
$a_2^2a_{11}$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$					
a_{12}^2	1		-2		1				
$a_{11}a_{22}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$			
a_1a_{122}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1				1		
a_2a_{112}	$\frac{1}{2}$		-1	$-\frac{1}{2}$				1	
a_{1122}	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	1	$-\frac{3}{2}$

c) Nr. 45.

Σ	$x_1^2y_1^2$	$x_1^2y_1y_2$	$y_1^2x_1x_2$	$x_1^2y_2^2$	$x_1y_1x_2y_2$	$x_1^2y_2y_3$	$x_1y_1x_2y_3$	$y_1^2x_2x_3$	$x_1x_2y_3y_4$
$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2$	1	2	2	1	4	2	4	2	4
$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_{22}$	1		2	1				2	
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{12}$	1	1	1		2		1		
$\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_{11}$	1	2		1		2			
$\mathfrak{a}_{12}^2$	1				2				
$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}$	1			1					
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{122}$	1		1						
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{112}$	1	1							
$\mathfrak{a}_{1122}$	1								

d) Nr. 46.

Σ	$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2$	$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_{22}$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_{11}$	$\mathfrak{a}_{12}^2$	$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{122}$	$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{112}$	$\mathfrak{a}_{1122}$
$x_1^2y_1^2$									1
$x_1^2y_1y_2$								1	-1
$y_1^2x_1x_2$							1		-1
$x_1^2y_2^2$						1			1
$x_1y_1x_2y_2$					$\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{2}$
$x_1^2y_2y_3$				$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		-1	1
$x_1y_1x_2y_3$			1		-1		-1	-1	2
$y_1^2x_2x_3$		$\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{2}$	-1		1
$x_1x_2y_3y_4$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	1	$-\frac{3}{2}$

e) Nr. 47.

Σ	$x_1^2y_1^2$	$x_1^2y_1y_2$	$y_1^2x_1x_2$	$x_1^2y_2^2$	$x_1y_1x_2y_2$	$x_1^2y_2y_3$	$x_1y_1x_2y_3$	$y_1^2x_2x_3$	$x_1x_2y_3y_4$
$a_1^2a_2^2$	1	2	2	1	4	2	4	2	4
$a_1^2a_{22}$		1			2	1	2		2
$a_1a_2a_{12}$		1	1	1	2	2	3	2	4
$a_2^2a_{11}$			1		2		2	1	2
a_{12}^2				1	2	2	2	2	4
$a_{11}a_{22}$					1		1		1
a_1a_{122}						1	1		2
a_2a_{112}							1	1	2
a_{1122}									1

f) Nr. 48.

Σ	$a_1^2a_2^2$	$a_1^2a_{22}$	$a_1a_2a_{12}$	$a_2^2a_{11}$	a_{12}^2	$a_{11}a_{22}$	a_1a_{122}	a_2a_{112}	a_{1122}
$x_1^2y_1^2$	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$x_1^2y_1y_2$		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$y_1^2x_1x_2$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$x_1^2y_2^2$		$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$x_1y_1x_2y_2$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_1^2y_2y_3$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$x_1y_1x_2y_3$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
$y_1^2x_2x_3$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$x_1x_2y_3y_4$									1

V. Die symmetrischen Functionen vom Gewicht 5.

α) Die einreihigen Functionen vom Gewicht $p_1 = 5$.

a) Nr. 49.

	a_1^5	$a_1^3 a_{11}$	$a_1^2 a_{111}$	$a_1 a_{11}^2$	$a_{11} a_{111}$	$a_1 a_{1111}$	a_{11111}
a_1^5	1						
$a_1^3 a_{11}$	1	−2					
$a_1^2 a_{111}$	1	−3	3				
$a_1 a_{11}^2$	1	−4		4			
$a_{11} a_{111}$	1	−5	3	6	−6		
$a_1 a_{1111}$	1	−4	4	2		−4	
a_{11111}	1	−5	5	5	−5	−5	5

b) Nr. 50.

	a_1^5	$a_1^3 a_{11}$	$a_1^2 a_{111}$	$a_1 a_{11}^2$	$a_{11} a_{111}$	$a_1 a_{1111}$	a_{11111}
a_1^5	1						
$a_1^3 a_{11}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$					
$a_1^2 a_{111}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$				
$a_1 a_{11}^2$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			
$a_{11} a_{111}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$		
$a_1 a_{1111}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$		$-\frac{1}{4}$	
a_{11111}	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

c) Nr. 51.

Σ	x_1^5	$x_1^4 x_2$	$x_1^3 x_2^2$	$x_1^2 x_2^2 x_3$	$x_1^3 x_2 x_3$	$x_1^2 x_2 x_3 x_4$	$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$
a_1^5	1	5	10	30	20	60	120
$a_1^3 a_{11}$	1	3	4	6	6	6	
$a_1^2 a_{111}$	1	2	1		2		
$a_1 a_{11}^2$	1	1	2	2			
$a_{11} a_{111}$	1		1				
$a_1 a_{1111}$	1	1					
a_{11111}	1						

d) Nr. 52.

Σ	a_1^5	$a_1^3 a_{11}$	$a_1^2 a_{111}$	$a_1 a_{11}^2$	$a_{11} a_{111}$	$a_1 a_{1111}$	a_{11111}
x_1^5							1
$x_1^4 x_2$						1	−1
$x_1^3 x_2^2$					1		−1
$x_1^2 x_2^2 x_3$				$\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	1
$x_1^3 x_2 x_3$			$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	−1	1
$x_1^2 x_2 x_3 x_4$		$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	1	−1
$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

e) Nr. 53.

Σ	x_1^5	$x_1^4 x_2$	$x_1^3 x_2^2$	$x_1^2 x_2^2 x_3$	$x_1^3 x_2 x_3$	$x_1^2 x_2 x_3 x_4$	$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$
a_1^5	1	5	10	30	20	60	120
$a_1^3 a_{11}$		1	3	12	7	27	60
$a_1^2 a_{111}$				2	1	7	20
$a_1 a_{11}^2$			1	5	2	12	30
$a_{11} a_{111}$				1		3	10
$a_1 a_{1111}$						1	5
a_{11111}							1

f) Nr. 54.

Σ	a_1^5	$a_1^3 a_{11}$	$a_1^2 a_{111}$	$a_1 a_{11}^2$	$a_{11} a_{111}$	$a_1 a_{1111}$	a_{11111}
x_1^5	1	−5	5	5	−5	−5	5
$x_1^4 x_2$		1	−1	−3	5	1	−5
$x_1^3 x_2^2$			−2	1	−1	5	−5
$x_1^2 x_2^2 x_3$					1	−3	5
$x_1^3 x_2 x_3$			1		−2	−1	5
$x_1^2 x_2 x_3 x_4$						1	−5
$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$							1

β) Die zweireihigen Functionen vom Gewicht $p_1 = 4$, $p_2 = 1$.

a) Nr. 55.

	$a_1^4a_2$	$a_1^3a_{12}$	$a_1^2a_2a_{11}$	$a_1^2a_{112}$	$a_1a_2a_{111}$	$a_1a_{11}a_{12}$	$a_2a_{11}^2$	$a_{11}a_{112}$	$a_{12}a_{111}$	a_1a_{1112}	a_2a_{1111}	a_{11112}
$a_1^4a_2$	1											
$a_1^3a_{12}$	1	−1										
$a_1^2a_2a_{11}$	1		−2									
$a_1^2a_{112}$	1	−1	−1	1								
$a_1a_2a_{111}$	1		−3		3							
$a_1a_{11}a_{12}$	1	−1	−2			2						
$a_2a_{11}^2$	1		−2				4					
$a_{11}a_{112}$	1	−1	−3	1		2	2	−2				
$a_{12}a_{111}$	1	−1	−3		3	3			−3			
a_1a_{1112}	1	−1	−2	1	1	1				−1		
a_2a_{1111}	1		−4		4		2				−4	
a_{11112}	1	−1	−3	1	2	2	1	−1	−1	−1	−1	1

b) Nr. 56.

	$a_1^4a_2$	$a_1^3a_{12}$	$a_1^2a_2a_{11}$	$a_1^2a_{112}$	$a_1a_2a_{111}$	$a_1a_{11}a_{12}$	$a_2a_{11}^2$	$a_{11}a_{112}$	$a_{12}a_{111}$	a_1a_{1112}	a_2a_{1111}	a_{11112}
$a_1^4a_2$	1											
$a_1^3a_{12}$	1	−1										
$a_1^2a_2a_{11}$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$									
$a_1^2a_{112}$	$\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	1								
$a_1a_2a_{111}$	$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$							
$a_1a_{11}a_{12}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$						
$a_2a_{11}^2$	$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{2}$				$\frac{1}{4}$					
$a_{11}a_{112}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$				
$a_{12}a_{111}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{3}$			
a_1a_{1112}	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$				−1		
a_2a_{1111}	$\frac{1}{24}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{8}$				$-\frac{1}{4}$	
a_{11112}	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	−1	$-\frac{1}{4}$	1

c) Nr. 57.

	$x_1^4y_1$	$x_1^4y_2$	$x_1^3y_1x_2$	$x_1^3x_2y_2$	$x_1^2y_1x_2^2$	$x_1^2x_2^2y_3$	$x_1^2x_2y_2x_3$	$x_1^3x_2y_3$	$x_1^2y_1x_2x_3$	$x_1^2x_2x_3y_4$	$x_1y_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4y_5$
$\mathfrak{a}_1^4\mathfrak{a}_2$	1	1	4	4	6	6	12	4	12	12	24	24
$\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_{12}$	1		3	1	3		3		6		6	
$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}$	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2		
$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_{112}$	1		2		1				2			
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{111}$	1	1	1	1				1				
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{12}$	1		1	1	1		1					
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}^2$	1	1			2	2						
$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{112}$	1				1							
$\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{111}$	1			1								
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{1112}$	1		1									
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{1111}$	1	1										
$\mathfrak{a}_{11112}$	1											

d) Nr. 58.

Σ	$\mathfrak{a}_1^4\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}$	$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_{112}$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{111}$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}^2$	$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{112}$	$\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{111}$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{1112}$	$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{1111}$	$\mathfrak{a}_{11112}$
$x_1^4y_1$												1
$x_1^4y_2$											1	-1
$x_1^3y_1x_2$										1		-1
$x_1^3x_2y_2$									1			-1
$x_1^2y_1x_2^2$								1				-1
$x_1^2x_2^2y_3$							$\frac{1}{2}$	-1			$-\frac{1}{2}$	1
$x_1^2x_2y_2x_3$						1		-1	-1	-1		2
$x_1^3x_2y_3$					1				-1	-1	-1	2
$x_1^2y_1x_2x_3$				$\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{2}$		-1		1
$x_1^2x_2x_3y_4$			$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	2	1	-3
$x_1y_1x_2x_3x_4$		$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1		-1
$x_1x_2x_3x_4y_5$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{4}$	1

e) Nr. 59.

	$x_1^4y_1$	$x_1^4y_2$	$x_1^3y_1x_2$	$x_1^3x_2y_2$	$x_1^2y_1x_2^2$	$x_1^2x_2^2y_3$	$x_1^2x_2y_2x_3$	$x_1^3x_2y_3$	$x_1^2y_1x_2x_3$	$x_1^2x_2x_3y_4$	$x_1y_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4y_5$
$a_1^4a_2$	1	1	4	4	6	6	12	4	12	12	24	24
$a_1^3a_{12}$		1	1	3	3	6	9	4	6	12	18	24
$a_1^2a_2a_{11}$			1	1	2	2	5	1	5	5	12	12
$a_1^2a_{112}$						2	2	1	1	5	6	12
$a_1a_2a_{111}$							1		1	1	4	4
$a_1a_{11}a_{12}$				1	1	2	4	1	2	5	9	12
$a_2a_{11}^2$					1	1	2		2	2	6	6
$a_{11}a_{112}$						1	1			2	3	6
$a_{12}a_{111}$							1			1	3	4
a_1a_{1112}										1	1	4
a_2a_{1111}											1	1
a_{11112}												1

f) Nr. 60.

Σ	$a_1^4a_2$	$a_1^3a_{12}$	$a_1^2a_2a_{11}$	$a_1^2a_{112}$	$a_1a_2a_{111}$	$a_1a_{11}a_{12}$	$a_2a_{11}^2$	$a_{11}a_{112}$	$a_{12}a_{111}$	a_1a_{1112}	a_2a_{1111}	a_{11112}
$x_1^4y_1$	1	−1	−3	1	2	2	1	−1	−1	−1	−1	1
$x_1^4y_2$		1	−1	−1	2	−2	1	1	1	1	−3	−1
$x_1^3y_1x_2$			1		−1	−1	−1	1	1		1	−1
$x_1^3x_2y_2$				−1	1	1	−1	1	−2	1	1	−1
$x_1^2y_1x_2^2$					−2		1	−1	1	1	1	−1
$x_1^2x_2^2y_3$								1	−1	−1	1	1
$x_1^2x_2y_2x_3$									1	−1	−2	2
$x_1^3x_2y_3$				1	−1			−2	1	−1	2	2
$x_1^2y_1x_2x_3$					1				−1		−1	1
$x_1^2x_2x_3y_4$										1	−1	−3
$x_1y_1x_2x_3x_4$											1	−1
$x_1x_2x_3x_4y_5$												1

γ) Die zweireihigen Functionen vom Gewicht $p_1 = 3$, $p_2 = 2$.

a)

Nr. 61.

	$d_1^3d_2^2$	$d_1^3d_{22}$	$d_1^2d_2d_{12}$	$d_1d_2^2d_{11}$	$d_2d_{11}d_{12}$	$d_1d_{12}^2$	$d_1d_{11}d_{22}$	$d_1^2d_{122}$	$d_1d_2d_{112}$	$d_2^2d_{111}$	$d_{11}d_{122}$	$d_{12}d_{112}$	$d_{22}d_{111}$	d_2d_{1112}	d_1d_{1122}	d_{11122}
$a_1^3a_2^2$	1															
$a_1^3a_{22}$	1	−2														
$a_1^2a_2a_{12}$	1		−1													
$a_1a_2^2a_{11}$	1			−2												
$a_2a_{11}a_{12}$	1		−1	−2	2											
$a_1a_{12}^2$	1		−2			1										
$a_1a_{11}a_{22}$	1	−2		−2			4									
$a_1^2a_{122}$	1	−1	−1					1								
$a_1a_2a_{112}$	1		−1	−1					1							
$a_2^2a_{111}$	1			−3						3						
$a_{11}a_{122}$	1	−1	−1	−2	2		2	1			−2					
$a_{12}a_{112}$	1		−2	−1	1	1			1			−1				
$a_{22}a_{111}$	1	−2		−3			6			3			−6			
a_2a_{1112}	1		−1	−2	1				1	1				−1		
a_1a_{1122}	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$						$-\frac{2}{3}$	
a_{11122}	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

b)

Nr. 62.

	$\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_2^2$	$\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_{22}$	$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_{11}$	$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{12}^2$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}$	$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_{122}$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{112}$	$\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_{111}$	$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{122}$	$\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{112}$	$\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{111}$	$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{1112}$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{1122}$	$\mathfrak{a}_{11122}$
$a_1^3a_2^2$	1															
$a_1^3a_{22}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$														
$a_1^2a_2a_{12}$	1		-1													
$a_1a_2^2a_{11}$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$												
$a_2a_{11}a_{12}$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$											
$a_1a_{12}^2$	1		-2			1										
$a_1a_{11}a_{22}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$									
$a_1^2a_{122}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1					1								
$a_1a_2a_{112}$	$\frac{1}{2}$		1	$-\frac{1}{2}$					1							
$a_2^2a_{111}$	$\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{2}$						$\frac{1}{3}$						
$a_{11}a_{122}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$					
$a_{12}a_{112}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1			1			-1				
$a_{22}a_{111}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$		$-\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{6}$			
a_2a_{1112}	$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				1	$\frac{1}{3}$				-1		
a_1a_{1122}	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	1						$-\frac{3}{2}$	
a_{11122}	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{6}$	-1	$-\frac{3}{2}$	2

c) Nr. 63.

Σ	$x_1^3y_1^2$	$x_1^2y_1^2x_2$	$x_1^3y_1y_2$	$x_1^3y_2^2$	$x_1^2y_1x_2y_2$	$x_1y_1^2x_2^2$	$x_1^3y_2y_3$	$x_1^2y_1x_2y_3$	$x_1y_1^2x_2x_3$	$x_1^2y_2^2x_3$	$x_1y_1x_2y_2x_3$	$x_1^2x_2y_2y_3$	$x_1^2x_2y_3y_4$	$x_1y_1x_2x_3y_4$	$y_1^2x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3y_4y_5$
$a_1^3a_2^2$	1	3	2	1	6	3	2	6	6	3	12	6	6	12	6	12
$a_1^3a_{22}$	1	3		1		3			6	3					6	
$a_1^2a_2a_{12}$	1	2	1		3	1		2	2		4	1		2		
$a_1a_2^2a_{11}$	1	1	2	1	2	1	2	2		1		2	3			
$a_2a_{11}a_{12}$	1		1		1	1						1				
$a_1a_{12}^2$	1	1			2						2					
$a_1a_{11}a_{22}$	1	1		1		1				1						
$a_1^2a_{122}$	1	2				1			2							
$a_1a_2a_{112}$	1	1	1		1			1								
$a_2^2a_{111}$	1		2	1			2									
$a_{11}a_{122}$	1					1										
$a_{12}a_{112}$	1				1											
$a_{22}a_{111}$	1			1												
a_2a_{1112}	1		1													
a_1a_{1122}	1	1														
a_{11122}	1															

d) Nr. 64.

Σ	$a_1^3a_2^2$	$a_1^3a_{22}$	$a_1^2a_2a_{12}$	$a_1a_2^2a_{11}$	$a_2a_{11}a_{12}$	$a_1a_{12}^2$	$a_1a_{11}a_{22}$	$a_1^2a_{122}$	$a_1a_2a_{112}$	$a_2^2a_{111}$	$a_{11}a_{122}$	$a_{12}a_{112}$	$a_{22}a_{111}$	a_2a_{1112}	a_1a_{1122}	a_{11122}
$x_1^3y_1^2$																1
$x_1^2y_1^2x_2$															1	−1
$x_1^3y_1y_2$														1		−1
$x_1^3y_2^2$													1			−1
$x_1^2y_1x_2y_2$												1				−1
$x_1y_1^2x_2^2$											1					−1
$x_1^3y_2y_3$										$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$	−1		−1
$x_1^2y_1x_2y_3$									1			−1		−1	−1	2
$x_1y_1^2x_2x_3$								$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$				−1	1
$x_1^2y_2^2x_3$							1				−1		−1		−1	2
$x_1y_1x_2y_2x_3$						$\frac{1}{2}$						−1			$-\frac{1}{2}$	1
$x_1^2x_2y_2y_3$					1						−1	−1		−1		2
$x_1^2x_2y_3y_4$				$\frac{1}{2}$	−1		$-\frac{1}{2}$		−1	$-\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	2	1	−3
$x_1y_1x_2x_3y_4$			$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	−1		$-\frac{1}{2}$	−1		$\frac{1}{2}$	2		1	2	−3
$y_1^2x_2x_3x_4$		$\frac{1}{6}$					$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		1	−1
$x_1x_2x_3y_4y_5$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{1}{6}$	−1	$-\frac{3}{2}$	2

c)

Nr. 65.

	$x_1^3y_1^2$	$x_1^2y_1^2x_2$	$x_1^3y_1y_2$	$x_1^3y_2^2$	$x_1^2y_1x_2y_2$	$x_1y_1^2x_2^2$	$x_1^3y_2y_3$	$x_1^2y_1x_2y_3$	$x_1y_1^2x_2x_3$	$x_1^2y_2^2x_3$	$x_1y_1x_2y_2x_3$	$x_1^2x_2y_2y_3$	$x_1^2x_2y_3y_4$	$x_1y_1x_2x_3y_4$	$y_1^2x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3y_1y_5$
$a_1^3a_2^2$	1	3	2	1	6	3	2	6	6	3	12	6	6	12	6	12
$a_1^3a_{22}$			1		3		1	3			6	3	3	6		6
$a_1^2a_2a_{12}$		1	1	1	3	2	2	4	4	3	8	5	6	10	6	12
$a_1a_2^2a_{11}$		1			2	1		2	3	1	6	2	2	6	3	6
$a_2a_{11}a_{12}$					1	1		1	2	1	4	2	2	5	3	6
$a_1a_{12}^2$				1	2	1	2	2	2	3	6	4	6	8	6	12
$a_1a_{11}a_{22}$					1			1			3	1	1	3		3
$a_1^2a_{122}$							1	1			2	2	3	4		6
$a_1a_2a_{112}$								1	1	1	2	1	2	4	3	6
$a_2^2a_{111}$									1		2			2	1	2
$a_{11}a_{122}$											1	1	1	2		3
$a_{12}a_{112}$										1	2	1	2	3	3	6
$a_{22}a_{111}$											1			1		1
a_2a_{1112}														1	1	2
a_1a_{1122}													1	1		3
a_{11122}																1

f)

Nr. 66.

Σ	$a_1^3a_2^2$	$a_1^3a_{22}$	$a_1^2a_2a_{12}$	$a_1a_2^2a_{11}$	$a_2a_{11}a_{12}$	$a_1a_{12}^2$	$a_1a_{11}a_{22}$	$a_1^2a_{122}$	$a_1a_2a_{112}$	$a_2^2a_{111}$	$a_{11}a_{122}$	$a_{12}a_{112}$	$a_{22}a_{111}$	a_2a_{1112}	a_1a_{1122}	a_{11122}
$x_1^3y_1^2$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_1^2y_1^2x_2$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	-1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$x_1^3y_1y_2$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$x_1^3y_2^2$		$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	5	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$x_1^2y_1x_2y_2$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$x_1y_1^2x_2^2$		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$x_1^3y_2y_3$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_1^2y_1x_2y_3$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		-1		-1		$-\frac{1}{3}$	1
$x_1y_1^2x_2x_3$		$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$x_1^2y_2^2x_3$		$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	-2	1	-1	5	-1	$-\frac{1}{3}$	1
$x_1y_1x_2y_2x_3$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$x_1^2x_2y_2y_3$											1		-1		-1	1
$x_1^2x_2y_3y_4$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{2}$
$x_1y_1x_2x_3y_4$		$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{2}$
$y_1^2x_2x_3x_4$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$x_1x_2x_3y_4y_5$																1

VI. Die symmetrischen Functionen vom Gewicht 6.

α) Die einreihigen Functionen vom Gewicht 6.

a) Nr. 67.

	a_1^6	$a_1^4 a_{11}$	$a_1^2 a_{11}^2$	$a_1^3 a_{111}$	a_{11}^3	$a_1 a_{11} a_{111}$	$a_1^2 a_{1111}$	a_{111}^2	$a_{11} a_{1111}$	$a_1 a_{11111}$	a_{111111}
a_1^6	1										
$a_1^4 a_{11}$	1	−2									
$a_1^2 a_{11}^2$	1	−4	4								
$a_1^3 a_{111}$	1	−3		3							
a_{11}^3	1	−6	8		−8						
$a_1 a_{11} a_{111}$	1	−5	6	3		−6					
$a_1^2 a_{1111}$	1	−4	2	4			−4				
a_{111}^2	1	−6	9	6		−18		9			
$a_{11} a_{1111}$	1	−6	10	4	−4	−8	−4		8		
$a_1 a_{11111}$	1	−5	5	5		−5	−5			5	
a_{111111}	1	−6	9	6	−2	−12	−6	3	6	6	−6

b) Nr. 68.

	a_1^6	$a_1^4 a_{11}$	$a_1^2 a_{11}^2$	$a_1^3 a_{111}$	a_{11}^3	$a_1 a_{11} a_{111}$	$a_1^2 a_{1111}$	a_{111}^2	$a_{11} a_{1111}$	$a_1 a_{11111}$	a_{111111}
a_1^6	1										
$a_1^4 a_{11}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$									
$a_1^2 a_{11}^2$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$								
$a_1^3 a_{111}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$							
a_{11}^3	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$		$-\frac{1}{8}$						
$a_1 a_{11} a_{111}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{6}$					
$a_1^2 a_{1111}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$			$-\frac{1}{4}$				
a_{111}^2	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{9}$			
$a_{11} a_{1111}$	$\frac{1}{48}$	$-\frac{7}{48}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		
$a_1 a_{11111}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$			$\frac{1}{5}$	
a_{111111}	$\frac{1}{720}$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{48}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$

c) Nr. 69.

Σ	x_1^6	$x_1^5x_2$	$x_1^4x_2^2$	$x_1^3x_2^3$	$x_1^4x_2x_3$	$x_1^3x_2^2x_3$	$x_1^2x_2^2x_3^2$	$x_1^3x_2x_3x_4$	$x_1^2x_2^2x_3x_4$	$x_1^2x_2x_3x_4x_5$	$x_1x_2x_3x_4x_5x_6$
a_1^6	1	6	15	20	30	60	90	120	180	360	720
$a_1^4a_{11}$	1	4	7	8	12	16	18	24	24	24	
$a_1^2a_{11}^2$	1	2	3	4	2	4	6		4		
$a_1^3a_{111}$	1	3	3	2	6	3		6			
a_{11}^3	1		3				6				
$a_1a_{11}a_{111}$	1	1	1	2		1					
$a_1^2a_{1111}$	1	2	1		2						
a_{111}^2	1			1							
$a_{11}a_{1111}$	1		1								
a_1a_{11111}	1	1									
a_{111111}	1										

d) Nr. 70.

Σ	a_1^6	$a_1^4a_{11}$	$a_1^2a_{11}^2$	$a_1^3a_{111}$	a_{11}^3	$a_1a_{11}a_{111}$	$a_1^2a_{1111}$	a_{111}^2	$a_{11}a_{1111}$	a_1a_{11111}	a_{111111}
x_1^6											1
$x_1^5x_2$										1	-1
$x_1^4x_2^2$									1		-1
$x_1^3x_2^3$								$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$
$x_1^4x_2x_3$							$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	-1	1
$x_1^3x_2^2x_3$						1		1	-1	-1	2
$x_1^2x_2^2x_3^2$					$\frac{1}{6}$				$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$
$x_1^3x_2x_3x_4$				$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	-1
$x_1^2x_2^2x_3x_4$			$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{3}{2}$
$x_1^2x_2x_3x_4x_5$		$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{4}$	-1	1
$x_1x_2x_3x_4x_5x_6$	$\frac{1}{720}$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{48}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$

e) Nr. 71.

Σ	x_1^6	$x_1^5x_2$	$x_1^4x_2^2$	$x_1^3x_2^3$	$x_1^4x_2x_3$	$x_1^3x_2^2x_3$	$x_1^2x_2^2x_3^2$	$x_1^3x_2x_3x_4$	$x_1^2x_2^2x_3x_4$	$x_1^2x_2x_3x_4x_5$	$x_1x_2x_3x_4x_5x_6$
a_1^6	1	6	15	20	30	60	90	120	180	360	720
$a_1^4a_{11}$		1	4	6	9	22	30	48	78	168	360
$a_1^2a_{11}^2$			1	2	2	8	15	18	34	78	180
$a_1^3a_{111}$					1	3	6	10	18	48	120
a_{11}^3				1		3	6	6	15	36	90
$a_1a_{11}a_{111}$						1	3	3	8	22	60
$a_1^2a_{1111}$								1	2	9	30
a_{111}^2							1		2	6	20
$a_{11}a_{1111}$									1	4	15
a_1a_{11111}										1	6
a_{111111}											1

f) Nr. 72.

Σ	a_1^6	$a_1^4a_{11}$	$a_1^2a_{11}^2$	$a_1^3a_{111}$	a_{11}^3	$a_1a_{11}a_{111}$	$a_1^2a_{1111}$	a_{111}^2	$a_{11}a_{1111}$	a_1a_{11111}	a_{111111}
x_1^6	1	−6	9	6	−2	−12	−6	3	6	6	−6
$x_1^5x_2$		1	−4	−1	2	7	1	−3	−6	−1	6
$x_1^4x_2^2$			1	−2	−2	4	2	−3	2	−6	6
$x_1^3x_2^3$					1	−3	3	3	−3	−3	3
$x_1^4x_2x_3$				1		−3	−1	3	2	1	−6
$x_1^3x_2^2x_3$						1	−3	−3	4	7	−12
$x_1^2x_2^2x_3^2$								1	2	2	−2
$x_1^3x_2x_3x_4$							1		−2	−1	6
$x_1^2x_2^2x_3x_4$									1	−4	9
$x_1^2x_2x_3x_4x_5$										1	−6
$x_1x_2x_3x_4x_5x_6$											1

β. Die zweireihigen Functionen vom Gewicht $p_1 = 5$, $p_2 = 1$.

a)

Nr. 73.

	$a_1^5a_2$	$a_1^4a_{12}$	$a_1^3a_2a_{11}$	$a_1^2a_{11}a_{12}$	$a_1a_2a_{11}^2$	$a_1^3a_{112}$	$a_1^2a_2a_{111}$	$a_{11}^2a_{12}$	$a_1a_{11}a_{112}$	$a_1a_{12}a_{111}$	$a_2a_{11}a_{111}$	$a_1^2a_{1112}$	$a_1a_2a_{1111}$	$a_{111}a_{112}$	$a_{11}a_{1112}$	$a_{12}a_{1111}$	a_1a_{11112}	a_2a_{11111}	a_{111112}
$a_1^5a_2$	1																		
$a_1^4a_{12}$	1	−1																	
$a_1^3a_2a_{11}$	1		−2																
$a_1^2a_{11}a_{12}$	1	−1	−2	2															
$a_1a_2a_{11}^2$	1		−4		4														
$a_1^3a_{112}$	1	−1	−1			1													
$a_1^2a_2a_{111}$	1		−3				3												
$a_{11}^2a_{12}$	1	−1	−4	4	4			−4											
$a_1a_{11}a_{112}$	1	−1	−3	2	2	1			−2										
$a_1a_{12}a_{111}$	1	−1	−3	3			3			−3									
$a_2a_{11}a_{111}$	1		−5		6		3				−6								
$a_1^2a_{1112}$	1	−1	−2	1		1	1					−1							
$a_1a_2a_{1111}$	1		−4		2		4						−4						
$a_{111}a_{112}$	1	−3	−6	3	3	3	3		−3	−3	−3			−3					
$a_{11}a_{1112}$	1	−1	−4	3	4	1	1	−2	−2		−2	1			2				
$a_{12}a_{1111}$	1	−4	−4	4	2		4	−2		−4			−4			4			
a_1a_{11112}	1	−1	−3	2	1	1	2		−1	−1		−1	−1				1		
a_2a_{11111}	1		−5		5		5				−5		−5					5	
a_{111112}	1	−1	−4	3	3	1	3	−1	−2	−2	−2	−1	−2	1	1	1	1	1	−1

b)

Nr. 74.

	$a_1^5a_2$	$a_1^4a_{12}$	$a_1^3a_2a_{11}$	$a_1^2a_{11}a_{12}$	$a_1a_2a_{11}^2$	$a_1^3a_{112}$	$a_1^2a_2a_{111}$	$a_{11}^2a_{12}$	$a_1a_{11}a_{112}$	$a_1a_{12}a_{111}$	$a_2a_{11}a_{111}$	$a_1^2a_{1112}$	$a_1a_2a_{1111}$	$a_{111}a_{112}$	$a_{11}a_{1112}$	$a_{12}a_{1111}$	a_1a_{11112}	a_2a_{11111}	a_{111112}
$a_1^5a_2$	1																		
$a_1^4a_{12}$	1	-1																	
$a_1^3a_2a_{11}$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$																
$a_1^2a_{11}a_{12}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$															
$a_1a_2a_{11}^2$	$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$														
$a_1^3a_{112}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$			1													
$a_1^2a_2a_{111}$	$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{2}$				$\frac{1}{3}$												
$a_{11}^2a_{12}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$			$-\frac{1}{4}$											
$a_1a_{11}a_{112}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$										
$a_1a_{12}a_{111}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{3}$			$-\frac{1}{3}$									
$a_2a_{11}a_{111}$	$\frac{1}{12}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{6}$				$-\frac{1}{6}$								
$a_1^2a_{1112}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		1	$\frac{1}{3}$					-1							
$a_1a_2a_{1111}$	$\frac{1}{24}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{3}$						$-\frac{1}{4}$						
$a_{111}a_{112}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$			$\frac{1}{3}$					
$a_{11}a_{1112}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$				
$a_{12}a_{1111}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{8}$		$-\frac{1}{3}$			$-\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$			
a_1a_{11112}	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$		-1	$-\frac{1}{4}$				1		
a_2a_{11111}	$\frac{1}{120}$		$-\frac{1}{12}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{6}$				$-\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{4}$					$\frac{1}{5}$	
a_{111112}	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{5}$	-1

c) Nr. 75.

	$x_1^5y_1$	$x_1^5y_2$	$x_1^4y_1x_2$	$x_1^4x_2y_2$	$x_1^3y_1x_2^2$	$x_1^3x_2^2y_2$	$x_1^4x_2y_3$	$x_1^3y_1x_2x_3$	$x_1^3x_2^2y_3$	$x_1^3x_2y_2x_3$	$x_1^2y_1x_2^2x_3$	$x_1^2x_2^2x_3y_3$	$x_1^3x_2x_3y_4$	$x_1^2y_1x_2x_3x_4$	$x_1^2x_2^2x_3y_4$	$x_1^2x_2y_2x_3x_4$	$x_1^2x_2x_3x_4y_5$	$x_1y_1x_2x_3x_4x_5$	$x_1x_2x_3x_4x_5y_6$
$\mathfrak{a}_1{}^5\mathfrak{a}_2$	1	1	5	5	10	10	5	20	10	20	30	30	20	60	30	60	60	120	120
$\mathfrak{a}_1{}^4\mathfrak{a}_{12}$	1		4	1	6	4		12		4	12	6		24		12		24	
$\mathfrak{a}_1{}^3\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}$	1	1	3	3	4	4	3	6	4	6	6	6	6	6	6	6	6		
$\mathfrak{a}_1{}^2\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{12}$	1		2	1	1	2		2		2	2	2				2			
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}{}^2$	1	1	1	1	2	2	1		2		2	2			2				
$\mathfrak{a}_1{}^3\mathfrak{a}_{112}$	1		3		3	1		6			3			6					
$\mathfrak{a}_1{}^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{111}$	1	1	2	2	1	1	2	2	1	2			2						
$\mathfrak{a}_{11}{}^2\mathfrak{a}_{12}$	1			1	2							2							
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{112}$	1		1		1	1					1								
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{111}$	1		1	1		1				1									
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{111}$	1	1			1	1			1										
$\mathfrak{a}_1{}^2\mathfrak{a}_{1112}$	1		2		1			2											
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{1111}$	1	1	1	1			1												
$\mathfrak{a}_{111}\mathfrak{a}_{112}$	1					1													
$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{1112}$	1				1														
$\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{1111}$	1			1															
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11112}$	1		1																
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11111}$	1	1																	
$\mathfrak{a}_{111112}$	1																		

d) Nr. 76.

	$a_1^5a_2$	$a_1^4a_{12}$	$a_1^3a_2a_{11}$	$a_1^2a_{11}a_{12}$	$a_1a_2a_{11}^2$	$a_1^3a_{112}$	$a_1^2a_2a_{111}$	$a_{11}^2a_{12}$	$a_1a_{11}a_{112}$	$a_1a_{12}a_{111}$	$a_2a_{11}a_{111}$	$a_1^2a_{1112}$	$a_1a_2a_{1111}$	$a_{111}a_{112}$	$a_{11}a_{1112}$	$a_{12}a_{1111}$	a_1a_{11112}	a_2a_{11111}	a_{111112}
$x_1^5y_1$																			1
$x_1^5y_2$																		1	-1
$x_1^4y_1x_2$																	1		-1
$x_1^4x_2y_2$																1			-1
$x_1^3y_1x_2^2$															1				-1
$x_1^3x_2^2y_2$														1					-1
$x_1^4x_2y_3$													1			-1	-1	-1	2
$x_1^3y_1x_2x_3$												$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$		-1		1
$x_1^3x_2^2y_3$											1			-1	-1			-1	2
$x_1^3x_2y_2x_3$										1				-1		-1	-1		2
$x_1^2y_1x_2^2x_3$									1					-1	-1		-1		2
$x_1^2x_2^2x_3y_3$								$\frac{1}{2}$							-1	$-\frac{1}{2}$			1
$x_1^3x_2x_3y_4$							$\frac{1}{2}$			-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	1	2	1	-3
$x_1^2y_1x_2x_3x_4$						$\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$		1		-1
$x_1^2x_2^2x_3y_4$					$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$	-1		-1		$-\frac{1}{2}$	1	2	$\frac{1}{2}$	1	1	-3
$x_1^2x_2y_2x_3x_4$				$\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{2}$	-1	-1		$-\frac{1}{2}$		1	$\frac{3}{2}$	1	2		-3
$x_1^2x_2x_3x_4y_5$			$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{6}$	1	1	$-\frac{4}{3}$	-2	-1	-3	-1	4
$x_1y_1x_2x_3x_4x_5$		$\frac{1}{24}$		$-\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-1		1
$x_1x_2x_3x_4x_5y_6$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{5}$	-1

e) Nr. 77.

	$x_1^5y_1$	$x_1^5y_2$	$x_1^4y_1x_2$	$x_1^4x_2y_2$	$x_1^3y_1x_2^2$	$x_1^3x_2^2y_2$	$x_1^4x_2y_3$	$x_1^3y_1x_2x_3$	$x_1^3x_2^2y_3$	$x_1^3x_2y_2x_3$	$x_1^2y_1x_2^2x_3$	$x_1^2x_2^2x_3y_3$	$x_1^3x_2x_3y_4$	$x_1^2y_1x_2x_3x_4$	$x_1^2x_2^2x_3y_4$	$x_1^2x_2y_2x_3x_4$	$x_1^2x_2x_3x_4y_5$	$x_1y_1x_2x_3x_4x_5$	$x_1x_2x_3x_4x_5y_6$
$a_1^5a_2$	1	1	5	5	10	10	5	20	10	20	30	30	20	60	30	60	60	120	120
$a_1^4a_{12}$		1	1	4	4	6	5	8	10	16	18	24	20	36	30	48	60	96	120
$a_1^3a_2a_{11}$			1	1	3	3	1	7	3	7	12	12	7	27	12	27	27	60	60
$a_1^2a_{11}a_{12}$				1	1	2	1	2	3	6	7	10	7	15	12	22	27	48	60
$a_1a_2a_{11}^2$					1	1		2	1	2	5	5	2	12	5	12	12	30	30
$a_1^3a_{112}$							1	1	3	3	3	6	7	9	12	15	27	36	60
$a_1^2a_2a_{111}$								1		1	2	2	1	4	2	7	7	20	20
$a_{11}^2a_{12}$						1			1	2	3	4	2	6	5	10	12	24	30
$a_1a_{11}a_{112}$									1	1	1	3	2	3	5	7	12	18	30
$a_1a_{12}a_{111}$										1	1	2	1	3	2	6	7	16	20
$a_2a_{11}a_{111}$											1	1		3	1	3	3	10	10
$a_1^2a_{1112}$													1	1	2	2	7	8	20
$a_1a_2a_{1111}$														1		1	1	5	5
$a_{111}a_{112}$												1			1	2	3	6	10
$a_{11}a_{1112}$															1	1	3	4	10
$a_{12}a_{1111}$																1	1	4	5
a_1a_{11112}																	1	1	5
a_2a_{11111}																		1	1
a_{111112}																			1

f) Nr. 78.

Σ	$a_1^5a_2$	$a_1^4a_{12}$	$a_1^3a_2a_{11}$	$a_1^2a_{11}a_{12}$	$a_1a_2a_{11}^2$	$a_1^3a_{112}$	$a_1^2a_2a_{111}$	$a_{11}^2a_{12}$	$a_1a_{11}a_{112}$	$a_1a_{12}a_{111}$	$a_2a_{11}a_{111}$	$a_1^2a_{1112}$	$a_1a_2a_{1111}$	$a_{111}a_{112}$	$a_{11}a_{1112}$	$a_{12}a_{1111}$	a_1a_{11112}	a_2a_{11111}	a_{111112}
$x_1^5y_1$	1	−1	−4	3	3	1	3	−1	−2	−2	−2	−1	−2	1	1	1	1	1	−1
$x_1^5y_2$		1	−1	−3	2	−1	2	1	2	2	−3	1	−3	−1	−1	−1	−1	4	1
$x_1^4y_1x_2$			1	−1	−2		−1	1	1	1	2		1	−1	−1	−1		−1	1
$x_1^4x_2y_2$				1	1	−1	1	−1	2	−2	2	1	−2	−1	−1	3	−1	−1	1
$x_1^3y_1x_2^2$					1		−2	−1		2			2	−1	1	−1	−1	−1	1
$x_1^3x_2^2y_2$								1	−1	−1	−1	1	2	2	−1	−1	−1	−1	1
$x_1^4x_2y_3$						1	−1		−3	1	1	−1	2	2	2	−2	1	−3	−2
$x_1^3y_1x_2x_3$							1			−1	−1		−1	1		1		1	−1
$x_1^3x_2^2y_3$									1	−1		−1	1	−1		2	2	−3	−2
$x_1^3x_2y_2x_3$										1	−1	−1	1	−1	2	−2	1	2	−2
$x_1^2y_1x_2^2x_3$											1		−3	−1		2	1	2	−2
$x_1^2x_2^2x_3y_3$														1	−1	−1	1	1	−1
$x_1^3x_2x_3y_4$												1	−1		−2	1	−1	2	3
$x_1^2y_1x_2x_3x_4$													1			−1		−1	1
$x_1^2x_2^2x_3y_4$															1	−1	−2	2	3
$x_1^2x_2y_2x_3x_4$																1	−1	−3	3
$x_1^2x_2x_3x_4y_5$																	1	−1	−4
$x_1y_1x_2x_3x_4x_5$																		1	−1
$x_1x_2x_3x_4x_5y_6$																			1

7. Die zweireihigen Functionen

a) Nr.

	$a_1^4a_2^2$	$a_1^4a_{22}$	$a_1^3a_2a_{12}$	$a_1^2a_2^2a_{11}$	$a_1^2a_{11}a_{22}$	$a_1^2a_{12}^2$	$a_1a_2a_{11}a_{12}$	$a_2^2a_{11}^2$	$a_1^3a_{122}$	$a_1^2a_2a_{112}$	$a_1a_2^2a_{111}$	$a_{11}^2a_{22}$	$a_{11}a_{11}a_{12}^2$
$a_1^4a_2^2$	1												
$a_1^4a_{22}$	1	-2											
$a_1^3a_2a_{12}$	1		-1										
$a_1^2a_2^2a_{11}$	1			-2									
$a_1^2a_{11}a_{22}$	1	-2		-2	4								
$a_1^2a_{12}^2$	1		-2			1							
$a_1a_2a_{11}a_{12}$	1		-1	-2			2						
$a_2^2a_{11}^2$	1			-4				4					
$a_1^3a_{122}$	1	-1	-1						1				
$a_1^2a_2a_{112}$	1		-1	-1						1			
$a_1a_2^2a_{111}$	1			-3							3		
$a_{11}^2a_{22}$	1	-2		-4	8			4				-8	
$a_{11}a_{12}^2$	1		-2	-2		1	4						-2
$a_2a_{12}a_{111}$	1		-1	-3			3				3		
$a_1a_{22}a_{111}$	1	-2		-3	6						3		
$a_2a_{11}a_{112}$	1		-1	-3			2	2		1			
$a_1a_{12}a_{112}$	1		-2	-1		1	1			1			
$a_1a_{11}a_{122}$	1	-1	-1	-2	2		2		1				
$a_1a_2a_{1112}$	1		-1	-2			1			1	1		
$a_1^2a_{1122}$	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$			$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$			
$a_2^2a_{1111}$	1			-4				2			4		
a_{112}^2	1		-2	-2		1	2	1		2			
$a_{111}a_{122}$	1	-1	-1	-3	3		3		1		3		
$a_{22}a_{1111}$	1	-2		-4	8			2			4	-4	
$a_{12}a_{1112}$	1		-2	-2		1	3			1	1		-1
$a_{11}a_{1122}$	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{8}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$		$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$
a_2a_{11112}	1		-1	-3			2	1		1	2		
a_1a_{11122}	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		
a_{111122}	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{12}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$

vom Gewicht $p_1 = 4$, $p_2 = 2$.

79.

$a_2 a_{12} a_{111}$	$a_1 a_{22} a_{111}$	$a_2 a_{11} a_{112}$	$a_1 a_{12} a_{112}$	$a_1 a_{11} a_{122}$	$a_1 a_2 a_{1112}$	$a_1^2 a_{1122}$	$a_2^2 a_{1111}$	a_{112}^2	$a_{111} a_{122}$	$a_{22} a_{1111}$	$a_{12} a_{1112}$	$a_{11} a_{1122}$	$a_2 a_{11112}$	$a_1 a_{11122}$	a_{111122}
-3															
	-6														
		-2													
			-1												
				-2											
					-1										
						$-\frac{2}{3}$									
							-4								
		-2	-2					1							
-3	-3								3						
	-8						-4			8					
-1			-1		-1						1				
		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{2}{3}$						$\frac{4}{3}$			
-1		-1			-1		-1						1		
	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$								$\frac{1}{2}$	
$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$

b) Nr.

	$a_1^4a_2^2$	$a_1^4a_{22}$	$a_1^3a_2a_{12}$	$a_1^2a_2^2a_{11}$	$a_1^2a_{11}a_{22}$	$a_1^2a_{12}^2$	$a_1a_2a_{11}a_{12}$	$a_2^2a_{11}^2$	$a_1^3a_{122}$	$a_1^2a_2a_{112}$	$a_1a_2^2a_{111}$	$a_{11}^2a_{22}$	$a_{11}a_{12}^2$
$a_1^4a_2^2$	1												
$a_1^4a_{22}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$											
$a_1^3a_2a_{12}$	1		-1										
$a_1^2a_2^2a_{11}$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$									
$a_1^2a_{11}a_{22}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$								
$a_1^2a_{12}^2$	1		-2			1							
$a_1a_2a_{11}a_{12}$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$						
$a_2^2a_{11}^2$	$\frac{1}{4}$			$-\frac{1}{2}$				$\frac{1}{4}$					
$a_1^3a_{122}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1						1				
$a_1^2a_2a_{112}$	$\frac{1}{2}$		-1	$-\frac{1}{2}$						1			
$a_1a_2^2a_{111}$	$\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{2}$							$\frac{1}{3}$		
$a_{11}^2a_{22}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{8}$				$-\frac{1}{8}$	
$a_{11}a_{12}^2$	$\frac{1}{2}$		-1	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	1						$-\frac{1}{2}$
$a_2a_{12}a_{111}$	$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{3}$		
$a_1a_{22}a_{111}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$						$\frac{1}{6}$		
$a_2a_{11}a_{112}$	$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$			
$a_1a_{12}a_{112}$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$						
$a_1a_{11}a_{122}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
$a_1a_2a_{1112}$	$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$			1	$\frac{1}{3}$		
$a_1^2a_{1122}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$			1	1			
$a_2^2a_{1111}$	$\frac{1}{24}$			$-\frac{1}{4}$				$\frac{1}{8}$			$\frac{1}{3}$		
a_{112}^2	$\frac{1}{4}$		-1	$-\frac{1}{2}$		1	1	$\frac{1}{4}$		1			
$a_{111}a_{122}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		
$a_{22}a_{1111}$	$\frac{1}{48}$	$-\frac{1}{48}$		$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$			$\frac{1}{16}$			$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{16}$	
$a_{12}a_{1112}$	$\frac{1}{6}$		$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	1			1	$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{2}$
$a_{11}a_{1122}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	1	1		$-\frac{1}{2}$	-1
a_2a_{11112}	$\frac{1}{24}$		$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$		
a_1a_{11122}	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$		
a_{111122}	$\frac{1}{48}$	$-\frac{1}{48}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{4}$

80.

$a_2a_{12}a_{111}$	$a_1a_{22}a_{111}$	$a_2a_{11}a_{112}$	$a_1a_{12}a_{112}$	$a_1a_{11}a_{122}$	$a_1a_2a_{1112}$	$a_1^2a_{1122}$	$a_2^2a_{1111}$	a_{112}^2	$a_{111}a_{122}$	$a_{22}a_{1111}$	$a_{12}a_{1112}$	$a_{11}a_{1122}$	a_2a_{11112}	a_1a_{11122}	a_{111122}
$-\frac{1}{3}$															
	$-\frac{1}{6}$														
		$-\frac{1}{2}$													
			-1												
				$-\frac{1}{2}$											
					1										
						$-\frac{3}{2}$									
							$-\frac{1}{4}$								
		-1	-2					1							
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{2}$					$\frac{1}{3}$						
	$-\frac{1}{6}$						$-\frac{1}{8}$			$\frac{1}{8}$					
$-\frac{1}{3}$			-1		1						1				
		-2		-2		$-\frac{3}{2}$						3			
$-\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{2}$			-1		$-\frac{1}{4}$						1		
	$-\frac{1}{6}$		-1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$								2	
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{3}{4}$	1	2	$-\frac{5}{2}$

c) Nr.

Σ	$x_1^4y_1^2$	$x_1^3y_1^2x_2$	$x_1^4y_1y_2$	$x_1^2y_1^2x_2^2$	$x_1^3y_1x_2y_2$	$x_1^4y_2^2$	$x_1^3x_2y_2^2$	$x_1^2y_1x_2^2y_2$	$x_1^4y_2y_3$	$x_1^2y_1^2x_2x_3$	$x_1^3y_1x_2y_3$	$x_1y_1^2x_2^2x_3$	$x_1^2y_1x_2y_2x_3$
$a_1^4a_2^2$	1	4	2	6	8	1	4	12	2	12	8	12	24
$a_1^4a_{22}$	1	4		6		1	4			12		12	
$a_1^3a_2a_{12}$	1	3	1	3	4		1	6		6	3	3	9
$a_1^2a_2^2a_{11}$	1	2	2	2	4	1	2	4	2	2	4	2	4
$a_1^2a_{11}a_{22}$	1	2		2		1	2			2		2	
$a_1^2a_{12}^2$	1	2		1	2			4		2			4
$a_1a_2a_{11}a_{12}$	1	1	1	1	2		1	2			1	1	1
$a_2^2a_{11}^2$	1		2	2		1		4	2				
$a_1^3a_{122}$	1	3		3			1			6		3	
$a_1^2a_2a_{112}$	1	2	1	1	2			2		2	2		2
$a_1a_2^2a_{111}$	1	1	2		2	1	1		2		2		
$a_{11}^2a_{22}$	1			2		1							
$a_{11}a_{12}^2$	1			1	2								
$a_2a_{12}a_{111}$	1		1		1		1						
$a_1a_{22}a_{111}$	1	1				1	1						
$a_2a_{11}a_{112}$	1		1	1				1					
$a_1a_{12}a_{112}$	1	1			1			1					1
$a_1a_{11}a_{122}$	1	1		1			1					1	
$a_1a_2a_{1112}$	1	1	1		1						1		
$a_1^2a_{1122}$	1	2		1						2			
$a_2^2a_{1111}$	1		2			1			2				
a_{112}^2	1							1					
$a_{111}a_{122}$	1						1						
$a_{22}a_{1111}$	1					1							
$a_{12}a_{1112}$	1				1								
$a_{11}a_{1122}$	1			1									
a_2a_{11112}	1		1										
a_1a_{11122}	1	1											
a_{111122}	1												

81.

$x_1^2y_1x_2^2y_3$	$x_1^3y_2^2x_3$	$x_1^3x_2y_2y_3$	$x_1^2x_2y_2x_3y_3$	$x_1^2x_2^2y_3^2$	$x_1^3x_2y_3y_4$	$x_1^2y_1x_2x_3y_4$	$x_1y_1^2x_2x_3x_4$	$x_1^2x_2^2y_3y_4$	$x_1^2x_2y_2x_3y_4$	$x_1y_1x_2y_2x_3x_4$	$x_1^2y_2^2x_3x_4$	$x_1^2x_2x_3y_4y_5$	$x_1y_1x_2x_3x_4y_5$	$y_1^2x_2x_3x_4x_5$	$x_1x_2x_3x_4y_5y_6$
12	4	8	24	6	8	24	24	12	24	48	12	24	48	24	48
	4			6			24				12			24	
3		1	6			6	6		3	12			6		
4	2	4	4	2	4	4		4	4		2	4			
	2			2							2				
			2							4					
1		1	2						1						
4				2				4							
							6								
1						2									
	1	2			2										
				2											
			2												
		1													
	1														
1															

d) Nr.

Σ	$a_1^4a_2^2$	$a_1^4a_{22}$	$a_1^3a_2a_{12}$	$a_1^2a_2^2a_{11}$	$a_1^2a_{11}a_{22}$	$a_1^2a_{12}^2$	$a_1a_2a_{11}a_{12}$	$a_2^2a_{11}^2$	$a_1^3a_{122}$	$a_1^2a_2a_{112}$	$a_1a_2^2a_{111}$	$a_{11}^2a_{22}$	$a_{11}a_{12}^2$
$x_1^4y_1^2$													
$x_1^3y_1^2x_2$													
$x_1^4y_1y_2$													
$x_1^2y_1^2x_2^2$													
$x_1^3y_1x_2y_2$													
$x_1^4y_2^2$													
$x_1^3x_2y_2^2$													
$x_1^2y_1x_2^2y_2$													
$x_1^4y_2y_3$													
$x_1^2y_1^2x_2x_3$													
$x_1^3y_1x_2y_3$													
$x_1y_1^2x_2^2x_3$													
$x_1^2y_1x_2y_2x_3$													
$x_1^2y_1x_2^2y_3$													
$x_1^3y_2^2x_3$													
$x_1^3x_2y_2y_3$													
$x_1^2x_2y_2x_3y_3$													$\frac{1}{2}$
$x_1^2x_2^2y_3^2$												$\frac{1}{2}$	
$x_1^3x_2y_3y_4$											$\frac{1}{2}$		
$x_1^2y_1x_2x_3y_4$										$\frac{1}{2}$			
$x_1y_1^2x_2x_3x_4$									$\frac{1}{6}$				
$x_1^2x_2^2y_3y_4$								$\frac{1}{4}$				$-\frac{1}{4}$	
$x_1^2x_2y_2x_3y_4$							1						-1
$x_1y_1x_2y_2x_3x_4$						$\frac{1}{4}$							$-\frac{1}{4}$
$x_1^2y_2^2x_3x_4$					$\frac{1}{2}$							$\frac{1}{2}$	
$x_1^2x_2x_3y_4y_5$				$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$		-1	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$x_1y_1x_2x_3x_4y_5$			$\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$
$y_1^2x_2x_3x_4x_5$		$\frac{1}{24}$			$-\frac{1}{4}$				$-\frac{1}{6}$			$\frac{1}{8}$	
$x_1x_2x_3x_4y_5y_6$	$\frac{1}{48}$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{4}$

82.

$a_2a_{12}a_{111}$	$a_1a_{22}a_{111}$	$a_2a_{11}a_{112}$	$a_1a_{12}a_{112}$	$a_1a_{11}a_{122}$	$a_1a_2a_{1112}$	$a_1^2a_{1122}$	$a_2^2a_{1111}$	a_{112}^2	$a_{111}a_{122}$	$a_{22}a_{1111}$	$a_{12}a_{1112}$	$a_{11}a_{1122}$	a_2a_{11112}	a_1a_{11122}	a_{111122}
															1
														1	−1
													1		−1
												1			−1
											1				−1
										1					−1
									1						−1
								$\frac{1}{2}$							$\frac{1}{2}$
							$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$			1		1
						$\frac{1}{2}$						$-\frac{1}{2}$		−1	1
					1						−1		−1	−1	2
				1					−1			−1		−1	2
			1					−1			−1			−1	2
		1						−1				−1	−1		2
	1								−1	1				−1	2
1									1		−1		−1		2
											−1	$\frac{1}{2}$			1
										$-\frac{1}{2}$		−1			1
−1	$-\frac{1}{2}$				−1		$-\frac{1}{2}$		1	$\frac{1}{2}$	1		2	1	−3
		$\frac{1}{2}$	−1		−1	$-\frac{1}{2}$		1			1	$\frac{1}{2}$	1	2	−3
				$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$		1	−1
		−1					$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		1	1		$\frac{3}{2}$
−1		−1	−1	−1	−1			1	1		3	2	2	2	−6
			−1			$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$			1	$\frac{1}{4}$		1	$\frac{3}{2}$
	−1			1		$-\frac{1}{2}$			1	1		$\frac{3}{2}$		2	3
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	−1	$-\frac{1}{2}$	−2	−2	−3	−3	6
		$\frac{5}{6}$	2	$\frac{1}{2}$	1	1		−1	$-\frac{1}{3}$		−2	−1	−1	−3	4
	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{2}$		−1	1
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{3}{4}$	1	2	$\frac{5}{2}$

c) Nr.

Σ	$x_1^4y_1^2$	$x_1^3y_1^2x_2$	$x_1^4y_1y_2$	$x_1^2y_1^2x_2^2$	$x_1^3y_1x_2y_2$	$x_1^4y_2^2$	$x_1^3x_2y_2^2$	$x_1^2y_1x_2^2y_2$	$x_1^4y_2y_3$	$x_1^2y_1^2x_2x_3$	$x_1^3y_1x_2y_3$	$x_1y_1^2x_2^2x_3$	$x_1^2y_1x_2y_2x_3$
$a_1^4a_2^2$	1	4	2	6	8	1	4	12	2	12	8	12	24
$a_1^4a_{22}$			1		4			6	1		4		12
$a_1^3a_2a_{12}$		1	1	3	4	1	3	6	2	6	5	9	15
$a_1^2a_2^2a_{11}$		1		2	2		2	4		5	2	5	10
$a_1^2a_{11}a_{22}$					1			2			1		5
$a_1^2a_{12}^2$				1	2	1	2	4	2	2	2	6	10
$a_1a_2a_{11}a_{12}$				1	1		1	2		2	1	4	6
$a_2^2a_{11}^2$				1				2		2		2	4
$a_1^3a_{122}$									1		1		3
$a_1^2a_2a_{112}$										1	1	2	3
$a_1a_2^2a_{111}$										1		1	2
$a_{11}^2a_{22}$								1					2
$a_{11}a_{12}^2$							1	2				3	4
$a_2a_{12}a_{111}$												1	1
$a_1a_{22}a_{111}$													1
$a_2a_{11}a_{112}$												1	1
$a_1a_{12}a_{112}$													
$a_1a_{11}a_{122}$													
$a_1a_2a_{1112}$													
$a_1^2a_{1122}$													
$a_2^2a_{1111}$													
a_{112}^2													
$a_{111}a_{122}$													
$a_{22}a_{1111}$													
$a_{12}a_{1112}$													
$a_{11}a_{1122}$													
a_2a_{11112}													
a_1a_{11122}													
a_{111122}													

83.

$x_1^2y_1x_2^2y_3$	$x_1^3y_2^2x_3$	$x_1^3x_2y_2y_3$	$x_1^2x_2y_2x_3y_3$	$x_1^2x_2^2y_3^2$	$x_1^3x_2y_3y_4$	$x_1^2y_1x_2x_3y_4$	$x_1y_1^2x_2x_3x_4$	$x_1^2x_2^2y_3y_4$	$x_1^2x_2y_2x_3y_4$	$x_1y_1x_2y_2x_3x_4$	$x_1^2y_2^2x_3x_4$	$x_1^2x_2x_3y_4y_5$	$x_1y_1x_2x_3x_4y_5$	$y_1^2x_2x_3x_4x_5$	$x_1x_2x_3x_4y_5y_6$
12	4	8	24	6	8	24	24	12	24	48	12	24	48	24	48
6		4	12		4	12		6	12	24		12	24		24
9	4	7	18	6	8	18	18	12	21	30	12	24	42	24	48
4	1	2	10	2	2	10	12	4	10	24	5	10	24	12	24
2		1	5		1	5		2	5	12		5	12		12
6	4	6	14	6	8	12	12	12	18	28	12	24	30	24	48
3	1	2	8	2	2	7	9	4	9	18	5	10	21	12	24
2			4	1		4	6	2	4	12	2	4	12	6	12
3		3	6		4	6		6	9	12		12	18		24
2	1	1	4	2	2	6	6	4	7	12	5	10	18	12	24
			2			2	4		2	8	1	2	8	4	8
1			2			2		1	2	6		2	6		6
2	1	2	6	2	2	4	6	4	8	14	5	10	18	12	24
			2			1	3		2	6	1	2	7	4	8
			1			1			1	4		1	4		4
1			2	1		2	3	2	3	6	2	4	9	6	12
1	1	1	4	2	2	3	3	4	6	10	5	10	15	12	24
1		1	3		1	2		2	4	6		5	9		12
						1	1		1	2	1	2	5	4	8
					1	1		2	2	2		5	6		12
							1			2			2	1	2
			2	1				2	2	4	2	4	6	6	12
			1						1	2		2	3		4
										1			1		1
									1	2	1	2	4	4	8
								1	1	1		2	3		6
													1	1	2
												1	1		4
															1

f) Nr.

Σ	$a_1^4a_2^2$	$a_1^4a_{22}$	$a_1^3a_2a_{12}$	$a_1^2a_2^2a_{11}$	$a_1^2a_{11}a_{22}$	$a_1^2a_{12}^2$	$a_1a_2a_{11}a_{12}$	$a_2^2a_{11}^2$	$a_1^3a_{122}$	$a_1^2a_2a_{112}$	$a_1a_2^2a_{111}$	$a_{11}^2a_{22}$	$a_{11}a_{12}^2$
$x_1^4y_1^2$	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{12}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$
$x_1^3y_1^2x_2$		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$x_1^4y_1y_2$		$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$x_1^2y_1^2x_2^2$		$-\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{8}{15}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{14}{15}$	$-\frac{4}{15}$
$x_1^3y_1x_2y_2$		$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$x_1^4y_2^2$		$-\frac{8}{5}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{34}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{12}{5}$	$\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{14}{5}$	$-\frac{18}{5}$	$\frac{2}{5}$
$x_1^3x_2y_2^2$		$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$x_1^2y_1x_2^2y_2$		$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$x_1^4y_2y_3$		$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{14}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{2}{5}$
$x_1^2y_1^2x_2x_3$		$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{7}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$
$x_1^3y_1x_2y_3$		$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{7}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
$x_1y_1^2x_2^2x_3$		$\frac{11}{30}$	$-\frac{11}{30}$	$\frac{11}{30}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{11}{15}$	$-\frac{11}{10}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$
$x_1^2y_1x_2y_2x_3$		$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{7}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{9}{10}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
$x_1^2y_1x_2^2y_3$		$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$-\frac{2}{15}$
$x_1^3y_2^2x_3$		$\frac{7}{10}$	$-\frac{7}{10}$	$\frac{7}{10}$	$-\frac{18}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{7}{10}$	$\frac{7}{5}$	$-\frac{21}{10}$	$\frac{10}{5}$	$-\frac{4}{5}$
$x_1^3x_2y_2y_3$		$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
$x_1^2x_2y_2x_3y_3$		$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$
$x_1^2x_2^2y_3^2$		$\frac{4}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{10}{15}$	$\frac{4}{15}$
$x_1^3x_2y_3y_4$		$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{7}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{9}{10}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
$x_1^2y_1x_2x_3y_4$		$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{14}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$-\frac{2}{15}$
$x_1y_1^2x_2x_3x_4$		$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{7}{15}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$
$x_1^2x_2^2y_3y_4$		$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$
$x_1^2x_2y_2x_3y_4$		$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$
$x_1y_1x_2y_2x_3x_4$		$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{7}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$
$x_1^2y_2^2x_3x_4$		$-\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$-\frac{7}{15}$	$\frac{31}{15}$	$-\frac{7}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{15}$	$-\frac{14}{15}$	$\frac{7}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
$x_1^2x_2x_3y_4y_5$		$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{7}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$
$x_1y_1x_2x_3x_4y_5$		$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{7}{15}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$
$y_1^2x_2x_3x_4x_5$		$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{7}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$
$x_1x_2x_3x_4y_5y_6$													

84.

$a_2a_{12}a_{111}$	$a_1a_{22}a_{111}$	$a_2a_{11}a_{112}$	$a_1a_{12}a_{112}$	$a_1a_{11}a_{122}$	$a_1a_2a_{1112}$	$a_1^2a_{1122}$	$a_2^2a_{1111}$	a_{112}^2	$a_{111}a_{122}$	$a_{22}a_{1111}$	$a_{12}a_{1112}$	$a_{11}a_{1122}$	a_2a_{11112}	a_1a_{11122}	a_{111122}
-4/5	-4/5	-4/5	-4/5	-4/5	-4/5	-2/5	-2/5	1/5	2/5	2/5	2/5	2/5	2/5	2/5	-2/5
4/5	3/10	4/5	3/10	3/10	3/10	-1/10	2/5	-1/5	-2/5	-2/5	-2/5	-2/5	-2/5	1/10	2/5
-1/5	4/5	-1/5	4/5	4/5	-1/5	2/5	-3/5	-1/5	-2/5	-2/5	-2/5	-2/5	3/5	-2/5	2/5
4/5	4/5	-8/15	4/5	-8/15	4/5	-4/15	2/5	-1/5	-2/5	-2/5	-2/5	14/15	-2/5	-2/5	2/5
-1/5	4/5	4/5	-1/5	4/5	-1/5	2/5	2/5	-1/5	-2/5	-2/5	3/5	-2/5	-2/5	-2/5	2/5
4/5	-36/5	4/5	4/5	4/5	4/5	2/5	-18/5	-1/5	-2/5	38/5	-2/5	-2/5	-2/5	-2/5	2/5
-11/5	-11/5	4/5	4/5	4/5	4/5	2/5	2/5	-1/5	13/5	-2/5	2/5	-2/5	-2/5	-2/5	2/5
2/5	2/5	-3/5	-3/5	-11/10	2/5	1/5	1/5	2/5	-1/5	-1/5	-1/5	-1/5	-1/5	-1/5	1/5
1/5	16/5	1/5	-4/5	-4/5	1/5	-2/5	3/5	1/5	2/5	-18/5	2/5	2/5	3/5	2/5	-2/5
-4/5	-3/10	-2/15	-3/10	11/30	-3/10	1/10	-2/5	1/5	2/5	2/5	2/5	-4/15	2/5	-1/10	-2/5
2/5	-11/10	-3/5	-1/10	-11/10	-1/10	-3/10	1/5	2/5	4/5	4/5	-1/5	4/5	-1/5	3/10	-4/5
7/5	19/10	-4/15	-11/10	-53/30	-11/10	11/30	-4/5	-11/10	4/5	4/5	4/5	-8/15	4/5	3/10	-4/5
-3/5	-11/10	2/5	9/10	-11/10	1/10	-3/10	-4/5	-3/5	4/5	4/5	-1/5	4/5	4/5	3/10	-4/5
-3/5	-8/5	11/15	2/5	-4/15	-3/5	-2/15	1/5	-3/5	4/5	4/5	4/5	-8/15	-1/5	4/5	-4/5
7/5	39/10	-8/5	-11/10	19/10	-11/10	-3/10	16/5	2/5	-11/5	-36/5	4/5	4/5	4/5	3/10	-4/5
2/5	7/5	-3/5	-3/5	7/5	2/5	-4/5	1/5	2/5	-11/5	4/5	-1/5	4/5	-1/5	4/5	4/5
1/5	-4/5	2/15	1/5	-2/15	1/5	-1/15	-2/5	1/5	2/5	2/5	-3/5	-4/15	2/5	2/5	-2/5
-4/5	16/5	8/15	-4/5	8/15	-4/5	4/15	8/5	1/5	2/5	-18/5	2/5	-14/15	-2/5	2/5	-2/5
-3/5	-21/10	2/5	9/10	-11/10	-1/10	7/10	-4/5	-3/5	9/5	14/5	-1/5	-6/5	4/5	-7/10	6/5
2/5	7/5	-4/15	-3/5	11/15	2/5	1/5	1/5	2/5	-6/5	-6/5	-1/5	-8/15	-1/5	-1/5	6/5
-1/5	-7/10	2/15	3/10	-11/30	3/10	-1/10	2/5	-1/5	3/5	-2/5	-2/5	4/15	-2/5	1/10	2/5
1/5	-4/5	-2/15	1/5	-2/15	1/5	-1/15	-2/5	1/5	-3/5	7/5	-3/5	11/15	2/5	-3/5	3/5
-1/5	4/5	2/15	-1/5	2/15	-1/5	1/15	2/5	-1/5	3/5	-12/5	3/5	4/15	-2/5	-7/5	12/5
1/5	7/10	-2/15	-3/10	11/30	-3/10	1/10	3/5	1/5	-3/5	-3/5	2/5	-4/15	-3/5	-1/10	3/5
-3/5	-18/5	2/5	7/5	-8/5	7/5	-7/15	-14/5	-3/5	9/5	34/5	-6/5	4/5	-6/5	-1/5	6/5
1/5	7/10	-2/15	-3/10	11/30	-3/10	1/10	3/5	1/5	-3/5	-8/5	2/5	-4/15	-3/5	9/10	-12/5
-1/5	-7/10	2/15	3/10	-11/30	3/10	-1/10	-3/5	-1/5	3/5	8/5	-2/5	4/15	3/5	1/10	-8/5
1/5	7/10	-2/15	-3/10	11/30	-3/10	1/10	3/5	1/5	-3/5	-8/5	2/5	-4/15	2/5	-1/10	-2/5
															1

δ. Die zweireihigen Functionen

a) Nr.

	$a_1^3a_2^3$	$a_1a_2^3a_{11}$	$a_1^3a_2a_{22}$	$a_1^2a_2^2a_{12}$	$a_2^2a_{11}a_{12}$	$a_1^2a_{22}a_{12}$	$a_1a_2a_{12}^2$	$a_1a_2a_{11}a_{22}$	$a_2^3a_{111}$	$a_1^3a_{222}$	$a_1a_2^2a_{112}$	$a_1^2a_2a_{122}$	a_{12}^3	$a_{11}a_{22}a_{12}$
$\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_2^3$	1													
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2^3\mathfrak{a}_{11}$	1	-2												
$\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{22}$	1		-2											
$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_{12}$	1			1										
$\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{12}$	1	-2		-1	2									
$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{12}$	1		-2	-1		2								
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{12}^2$	1			-2			1							
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}$	1	-2	-2					4						
$\mathfrak{a}_2^3\mathfrak{a}_{111}$	1	-3							3					
$\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_{222}$	1		-3							3				
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_{112}$	1	1		-1							1			
$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{122}$	1		-1	1								1		
$\mathfrak{a}_{12}^3$	1			-3			3						-1	
$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{12}$	1	-2	-2	-1	2	2		4						-4
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{111}$	1	-3	-2					6	3					
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{222}$	1	-2	-3					6		3				
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{112}$	1	-1		-2	1		1				1			
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{122}$	1		-1	-2		1	1					1		
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{122}$	1	-2	-1	-1	2			2				1		
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{112}$	1	-1	-2	-1		2		2			1			
$\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_{1112}$	1	-2		-1	1				1		1			
$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_{1222}$	1		-2	-1		1				1		1		
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{1122}$	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$			$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$			$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$		
$\mathfrak{a}_{112}\mathfrak{a}_{122}$	1	-1	-1	-2	1	1	1	1			1	1		
$\mathfrak{a}_{111}\mathfrak{a}_{222}$	1	-3	-3					9	3	3				
$\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{1112}$	1	-2	-2	-1	1	2		4	1		1			-2
$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{1222}$	1	-2	-2	-1	2	1		4		1		1		-2
$\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{1122}$	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$			$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11122}$	1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1		$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		1	$\frac{1}{2}$		
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11222}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$		1	$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1		
$\mathfrak{a}_{111222}$	1	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{5}$

vom Gewichte $p_1 = 3$, $p_2 = 3$.

85.

$a_2 a_{22} a_{111}$	$a_1 a_{11} a_{222}$	$a_2 a_{12} a_{112}$	$a_1 a_{12} a_{122}$	$a_2 a_{11} a_{122}$	$a_1 a_{22} a_{112}$	$a_2^2 a_{1112}$	$a_1^2 a_{1222}$	$a_1 a_2 a_{1122}$	$a_{112} a_{122}$	$a_{111} a_{222}$	$a_{22} a_{1112}$	$a_{11} a_{1222}$	$a_{12} a_{1122}$	$a_2 a_{11122}$	$a_1 a_{11222}$	a_{111222}
-6																
	-6															
		-1														
			-1													
				-2												
					-2											
						-1										
							-1									
								$-\frac{2}{3}$								
		-1	-1	-1	-1				1							
-9	-9									9						
-2					-2	-1					2					
	-2			-2			-1					2				
		$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$					$-\frac{2}{3}$					$\frac{2}{3}$			
$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$						$\frac{1}{2}$		
	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$							$\frac{1}{2}$	
$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$

b) Nr.

	$a_1^3a_2^3$	$a_1a_2^3a_{11}$	$a_1^3a_2a_{22}$	$a_1^2a_2^2a_{12}$	$a_2^2a_{11}a_{12}$	$a_1^2a_{22}a_{12}$	$a_1a_2a_{12}^2$	$a_1a_2a_{11}a_{22}$	$a_2^3a_{111}$	$a_1^3a_{222}$	$a_1a_2^2a_{112}$	$a_1^2a_2a_{122}$	a_{12}^3	$a_{11}a_{22}a_{12}$
$a_1^3a_2^3$	1													
$a_1a_2^3a_{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$												
$a_1^3a_2a_{22}$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$											
$a_1^2a_2^2a_{12}$	1			-1										
$a_2^2a_{11}a_{12}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$									
$a_1^2a_{22}a_{12}$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$								
$a_1a_2a_{12}^2$	1			-2			1							
$a_1a_2a_{11}a_{22}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$					$\frac{1}{4}$						
$a_2^3a_{111}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$							$\frac{1}{3}$					
$a_1^3a_{222}$	$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{2}$							$\frac{1}{3}$				
$a_1a_2^2a_{112}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		-1							1			
$a_1^2a_2a_{122}$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	-1								1		
a_{12}^3	1			-3			3						-1	
$a_{11}a_{22}a_{12}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$						$-\frac{1}{4}$
$a_2a_{22}a_{111}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$					$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$					
$a_1a_{11}a_{222}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{4}$					$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{6}$				
$a_2a_{12}a_{112}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$		1				1			
$a_1a_{12}a_{122}$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$		1					1		
$a_2a_{11}a_{122}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{4}$				$\frac{1}{2}$		
$a_1a_{22}a_{112}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{2}$			
$a_2^2a_{1112}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{3}$		1			
$a_1^2a_{1222}$	$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{3}$		1		
$a_1a_2a_{1122}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	-1			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$			1	1		
$a_{112}a_{122}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$a_{111}a_{222}$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$					$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$				
$a_{22}a_{1112}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{4}$
$a_{11}a_{1222}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$
$a_{12}a_{1122}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$			1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
a_2a_{11122}	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$		1	$\frac{1}{2}$		
a_1a_{11222}	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1		
a_{111222}	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

86.

$a_2a_{22}a_{111}$	$a_1a_{11}a_{222}$	$a_2a_{12}a_{112}$	$a_1a_{12}a_{122}$	$a_2a_{11}a_{122}$	$a_1a_{22}a_{112}$	$a_2^2a_{1112}$	$a_1^2a_{1222}$	$a_1a_2a_{1122}$	$a_{112}a_{122}$	$a_{111}a_{222}$	$a_{22}a_{1112}$	$a_{11}a_{1222}$	$a_{12}a_{1122}$	a_2a_{11122}	a_1a_{11222}	a_{111222}
$-\frac{1}{6}$																
	$-\frac{1}{6}$															
		-1														
			-1													
				$-\frac{1}{2}$												
					$-\frac{1}{2}$											
						-1										
							-1									
								$-\frac{3}{2}$								
		-1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$				1							
$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$									$\frac{1}{9}$						
$\frac{1}{6}$					$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$					$\frac{1}{2}$					
	$-\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$					$\frac{1}{2}$				
		-1	-1					$-\frac{3}{2}$					$\frac{3}{2}$			
$-\frac{1}{6}$		-1		$-\frac{1}{2}$		-1		$-\frac{3}{2}$						2		
	$-\frac{1}{6}$		-1		$-\frac{1}{2}$		-1	$-\frac{3}{2}$							2	
$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	-1	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	2	$\frac{10}{3}$

c) Nr.

Σ	$x_1^3y_1^3$	$x_1^2y_1^3x_2$	$x_1^3y_1^2y_2$	$x_1^2y_1^2x_2y_2$	$x_1y_1^3x_2^2$	$x_1^3y_1y_2^2$	$x_1^3y_2^3$	$x_1^2y_1x_2y_2^2$	$x_1^2y_1^2x_2y_3$	$x_1y_1^3x_2x_3$	$x_1^3y_1y_2y_3$	$x_1^2y_1y_2^2x_3$	$x_1y_1^2x_2^2y_3$	$x_1y_1^2x_2y_2x_3$
$\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_2^3$	1	3	3	9	3	3	1	9	9	6	6	9	9	18
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2^3\mathfrak{a}_{11}$	1	1	3	3	1	3	1	3	3		6	3	3	
$\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{22}$	1	3	1	3	3	1	1	3	3	6		3	3	6
$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_{12}$	1	2	2	5	1	1		4	4	2	2	2	2	6
$\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{12}$	1		2	1	1	1		2			2		2	
$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{12}$	1	2		1	1	1		2		2		2		2
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{12}^2$	1	1	1	3				2	1					2
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1	1	
$\mathfrak{a}_2^3\mathfrak{a}_{111}$	1		3			3	1				6			
$\mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_{222}$	1	3			3		1			6				
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_{112}$	1	1	2	2		1		1	2		2	1		
$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{122}$	1	2	1	2	1			1	2	2			1	2
$\mathfrak{a}_{12}^3$	1			3										
$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{12}$	1			1	1	1								
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{111}$	1		1			1	1							
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{222}$	1	1			1		1							
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{112}$	1		1	1				1						
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{122}$	1	1		1				1						1
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{122}$	1		1		1			1					1	
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{112}$	1	1				1		1				1		
$\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_{1112}$	1		2			1					2			
$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_{1222}$	1	2			1					2				
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{1122}$	1	1	1	1					1					
$\mathfrak{a}_{112}\mathfrak{a}_{122}$	1							1						
$\mathfrak{a}_{111}\mathfrak{a}_{222}$	1						1							
$\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{1112}$	1					1								
$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{1222}$	1				1									
$\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{1122}$	1			1										
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11122}$	1		1											
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11222}$	1	1												
$\mathfrak{a}_{111222}$	1													

87.

$x_1^2y_1x_2y_2y_3$	$y_1^3x_2^2x_3$	$x_1^3y_2^2y_3$	$x_1^2y_2^2x_3y_3$	$x_1y_1x_2y_2x_3y_3$	$x_1y_1^2x_2x_3y_4$	$x_1^2y_1x_2y_3y_4$	$y_1^3x_2x_3y_4$	$x_1^3y_2y_3y_4$	$x_1^2y_2^2x_3y_4$	$x_1y_1x_2y_2x_3y_4$	$x_1y_1y_2^2x_3x_4$	$x_1y_1x_2^2y_3y_4$	$x_1y_1x_2x_3y_4y_5$	$y_1^2x_2x_3x_4y_5$	$x_1^2y_2y_3y_4y_5$	$x_1x_2x_3y_4y_5y_6$
18	3	3	9	36	18	18	6	6	9	36	18	18	36	18	18	36
6	1	3	3			6		6	3			6			6	
	3	1	3		6		6		3		6			6		
6			1	12	4	4				8	2	2	4			
2			1									2				
			1								2					
2				6						2						
	1	1	1						1							
		3						6								
	3						6									
2						2										
					2											
				6												
			1													
		1														
	1															
1																

d) Nr.

N	$a_1^3a_2^3$	$a_1a_2^3a_{11}$	$a_1^3a_2a_{22}$	$a_1^2a_2^2a_{12}$	$a_2^2a_{11}a_{12}$	$a_1^2a_{22}a_{12}$	$a_1a_2a_{12}^2$	$a_1a_2a_{11}a_{22}$	$a_2^3a_{111}$	$a_1^3a_{222}$	$a_1a_2^2a_{112}$	$a_1^2a_2a_{122}$	a_{12}^3	$a_{11}a_{22}a_{12}$
$x_1^3y_1^3$														
$x_1^2y_1^3x_2$														
$x_1^3y_1^2y_2$														
$x_1^2y_1^2x_2y_2$														
$x_1y_1^3x_2^2$														
$x_1^3y_1y_2^2$														
$x_1^3y_2^3$														
$x_1^2y_1x_2y_2^2$														
$x_1^2y_1^2x_2y_3$														
$x_1y_1^3x_2x_3$														
$x_1^3y_1y_2y_3$														
$x_1^2y_1y_2^2x_3$														
$x_1y_1^2x_2^2y_3$														
$x_1y_1^2x_2y_2x_3$														
$x_1^2y_1x_2y_2y_3$														
$y_1^3x_2^2x_3$														
$x_1^3y_2^2y_3$														
$x_1^2y_2^2x_3y_3$														1
$x_1y_1x_2y_2x_3y_3$													$\frac{1}{6}$	
$x_1y_1^2x_2x_3y_4$												$\frac{1}{2}$		
$x_1^2y_1x_2y_3y_4$											$\frac{1}{2}$			
$y_1^3x_2x_3x_4$										$\frac{1}{6}$				
$x_1^3y_2y_3y_4$									$\frac{1}{6}$					
$x_1^2y_2^2x_3y_4$								1						-1
$x_1y_1x_2y_2x_3y_4$							$\frac{1}{2}$						$-\frac{1}{2}$	
$x_1y_1y_2^2x_3y_4$						$\frac{1}{2}$								$-\frac{1}{2}$
$x_1y_1x_2^2y_3y_4$					$\frac{1}{2}$									$-\frac{1}{2}$
$x_1y_1x_2x_3y_4y_5$				$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-1				$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$y_1^2x_2x_3x_4y_5$			$\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
$x_1^2y_2y_3y_4x_5$		$\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$
$x_1x_2x_3y_4y_5y_6$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$

88.

$a_2a_{22}a_{111}$	$a_1a_{11}a_{222}$	$a_2a_{12}a_{112}$	$a_1a_{12}a_{122}$	$a_2a_{11}a_{122}$	$a_1a_{22}a_{112}$	$a_2^2a_{1112}$	$a_1^2a_{1222}$	$a_1a_2a_{1122}$	$a_{112}a_{122}$	$a_{111}a_{222}$	$a_{22}a_{1112}$	$a_{11}a_{1222}$	$a_{12}a_{1122}$	a_2a_{11122}	a_1a_{11222}	a_{111222}
																1
															1	−1
														1		−1
													1			−1
												1				−1
											1					−1
										1						−1
									1							−1
								1					−1	−1	−1	2
							$\frac{1}{2}$					$-\frac{1}{2}$			−1	1
						$\frac{1}{2}$					$-\frac{1}{2}$			−1		1
					1				−1		−1				−1	2
				1					−1			−1		−1		2
			1						−1				−1		−1	2
		1							−1				−1	−1		2
	1									1		−1			−1	2
1										−1	−1			−1		2
											−1	−1	−1			2
													$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{3}$
			−1	$-\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$	−1	1			$\frac{1}{2}$	1	1	2	−3
		−1			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		−1	1		$\frac{1}{2}$		1	2	1	−3
	$-\frac{1}{2}$						$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$			1	−1
$\frac{1}{2}$						$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$			1		−1
−1	−1			−1	−1			−1	1	1	2	2	1	2	2	−6
		−1	−1					$-\frac{1}{2}$	1				$\frac{5}{2}$	1	1	−3
			−1		−1		$-\frac{1}{2}$		1		1	$\frac{1}{2}$	1		2	−3
		−1		−1		$-\frac{1}{2}$			1		$\frac{1}{2}$	1	1	2		−3
		2	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	−2		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	−3	−3	6
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$		1	$\frac{1}{2}$		1	1	1	−1	$-\frac{1}{3}$	−1	−1	−1	−1	−3	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1			$\frac{1}{2}$	1	1	1	−1	$-\frac{1}{3}$	−1	−1	−1	−3	−1	4
$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	−1	−1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	2	$-\frac{10}{3}$

c/ Nr.

Σ	$x_1^3y_1^3$	$x_1^2y_1^3x_2$	$x_1^3y_1^2y_2$	$x_1^2y_1^2x_2y_2$	$x_1y_1^3x_2^2$	$x_1^3y_1y_2^2$	$x_1^3y_2^3$	$x_1^2y_1x_2y_2^2$	$x_1^2y_1^2x_2y_3$	$x_1y_1^3x_2x_3$	$x_1^3y_1y_2y_3$	$x_1^2y_1y_2^2x_3$	$x_1y_1^2x_2^2y_3$	$x_1y_1^2x_2y_2x_3$
$a_1^3a_2^3$	1	3	3	9	3	3	1	9	9	6	6	9	9	18
$a_1a_2^3a_{11}$		1		3	1			3	3	3		3	3	9
$a_1^3a_2a_{22}$			1	3		1		3	3		3	3	3	6
$a_1^2a_2^2a_{12}$		1	1	4	2	2	1	5	5	4	4	7	7	12
$a_2^2a_{11}a_{12}$				1	1			2	1	2		2	3	6
$a_1^2a_{22}a_{12}$				1		1		2	1		2	3	2	4
$a_1a_2a_{12}^2$				2	1	1	1	3	2	2	2	5	5	8
$a_1a_2a_{11}a_{22}$				1				1	1			1	1	3
$a_2^3a_{111}$										1				3
$a_1^3a_{222}$											1			
$a_1a_2^2a_{112}$									1	1		2	1	3
$a_1^2a_2a_{122}$									1		1	1	2	2
a_{12}^3							1	3				3	3	6
$a_{11}a_{22}a_{12}$								1				1	1	2
$a_2a_{22}a_{111}$														1
$a_1a_{11}a_{222}$														
$a_2a_{12}a_{112}$												1	1	2
$a_1a_{12}a_{122}$												1	1	1
$a_2a_{11}a_{122}$													1	1
$a_1a_{22}a_{112}$												1		1
$a_2^2a_{1112}$														
$a_1^2a_{1222}$														
$a_1a_2a_{1122}$														
$a_{112}a_{122}$														
$a_{111}a_{222}$														
$a_{22}a_{1112}$														
$a_{11}a_{1222}$														
$a_{12}a_{1122}$														
a_2a_{11122}														
a_1a_{11222}														
a_{111222}														

89.

$x_1^2y_1x_2y_2y_3$	$y_1^3x_2^2x_3$	$x_1^3y_2^2y_3$	$x_1^2y_2^2x_3y_3$	$x_1y_1x_2y_2x_3y_3$	$x_1y_1^2x_2x_3y_4$	$x_1^2y_1x_2y_3y_4$	$y_1^3x_2x_3x_4$	$x_1^3y_2y_3y_4$	$x_1^2y_2^2x_3y_4$	$x_1y_1x_2y_2x_3y_4$	$x_1y_1y_2^2x_3x_4$	$x_1y_1x_2^2y_3y_4$	$x_1y_1x_2x_3y_4y_5$	$y_1^2x_2x_3x_4y_5$	$x_1^2y_2y_3y_4y_5$	$x_1x_2x_3y_4y_5y_6$
18	3	3	9	36	18	18	6	6	9	36	18	18	36	18	18	36
6	1		3	18	9	6	3		3	18	9	6	18	9	6	18
9		1	3	18	6	9		3	3	18	6	9	18	6	9	18
12	3	3	8	24	14	14	6	6	9	28	16	16	32	18	18	36
4	1		3	12	7	4	3		3	14	8	6	16	9	6	18
6		1	3	12	4	7		3	3	14	6	8	16	6	9	18
8	3	3	7	18	10	10	6	6	9	22	14	14	28	18	18	36
3			1	9	3	3			1	9	3	3	9	3	3	9
				6	3		1			6	3		6	3		6
3				6		3		1		6		3	6		3	6
2	1		2	6	5	4	3		3	10	7	4	14	9	6	18
3		1	2	6	4	5		3	3	10	4	7	14	6	9	18
6	3	3	6	12	6	6	6	6	9	18	12	12	24	18	18	36
2			1	6	2	2			1	7	3	3	8	3	3	9
				3	1					3	1		3	1		3
1				3		1				3		1	3		1	3
1	1		2	6	3	2	3		3	8	6	4	12	9	6	18
2		1	2	6	2	3		3	3	8	4	6	12	6	9	18
1			1	3	2	1			1	5	2	3	7	3	3	9
1			1	3	1	2			1	5	3	2	7	3	3	9
					1		1			2	2		4	3		6
						1		1		2		2	4		3	6
					1	1			1	2	1	1	5	3	3	9
			1	3					1	3	2	2	5	3	3	9
				1						1			1			1
										1	1		2	1		3
										1		1	2		1	3
									1	2	1	1	4	3	3	9
													1	1		3
													1		1	3
																1

f) Nr.

ν	$a_1^3a_2^3$	$a_1a_2^3a_{11}$	$a_1^3a_2a_{22}$	$a_1^2a_2^2a_{12}$	$a_2^2a_{11}a_{12}$	$a_1^2a_{22}a_{12}$	$a_1a_2a_{12}^2$	$a_1a_2a_{11}a_{22}$	$a_2^3a_{111}$	$a_1^3a_{222}$	$a_1a_2^2a_{112}$	$a_1^2a_2a_{122}$	a_{12}^3	$a_{11}a_{22}a_{12}$
$x_1^3y_1^3$	1	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{5}$
$x_1^2y_1^3x_2$		$\frac{7}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
$x_1^3y_1^2y_2$		$-\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
$x_1^2y_1^2x_2y_2$		$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$	$-\frac{8}{15}$	$-\frac{7}{30}$	$-\frac{7}{30}$	$\frac{23}{30}$	$-\frac{17}{15}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{7}{30}$	$-\frac{7}{30}$	$\frac{7}{30}$	$-\frac{1}{15}$
$x_1y_1^3x_2^2$		$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{11}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{7}{5}$
$x_1^3y_1y_2^2$		$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{7}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{5}$
$x_1^3y_2^3$		$-\frac{9}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{27}{10}$	$\frac{27}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
$x_1^2y_1x_2y_2^2$		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
$x_1^2y_1^2x_2y_3$		$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{8}{15}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{8}{15}$
$x_1y_1^3x_2x_3$		$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
$x_1^3y_1y_2y_3$		$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
$x_1^2y_1y_2^2x_3$		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
$x_1y_1^2x_2^2y_3$		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
$x_1y_1^2x_2y_2x_3$		$-\frac{7}{30}$	$-\frac{7}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{11}{30}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{11}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{8}{15}$
$x_1^2y_1x_2y_2y_3$		$-\frac{7}{30}$	$-\frac{7}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{11}{30}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{11}{30}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{8}{15}$
$y_1^3x_2^2x_3$		$\frac{11}{10}$	$\frac{11}{10}$	$-\frac{11}{10}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{13}{10}$	$\frac{22}{5}$	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{13}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
$x_1^3y_2^2y_3$		$\frac{11}{10}$	$\frac{11}{10}$	$-\frac{11}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{13}{10}$	$-\frac{22}{5}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{13}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
$x_1^2y_2^2x_3y_3$		$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{16}{15}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{8}{15}$
$x_1y_1x_2y_2x_3y_3$		$-\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$
$x_1y_1^2x_2x_3y_4$		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$
$x_1^2y_1x_2y_3y_4$		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$
$y_1^3x_2x_3x_4$		$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$
$x_1^3y_2y_3y_4$		$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$
$x_1^2y_2^2x_3y_4$		$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{16}{15}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{16}{15}$
$x_1y_1x_2y_2x_3y_4$		$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{16}{15}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$
$x_1y_1y_2^2x_3x_4$		$-\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$
$x_1y_1x_2^2y_3y_4$		$-\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$
$x_1y_1x_2x_3y_4y_5$		$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{4}{15}$
$y_1^2x_2x_3x_4y_5$		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$
$x_1^2x_2y_3y_4y_5$		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$
$x_1x_2x_3y_4y_5y_6$														

90.

$a_2a_{22}a_{111}$	$a_1a_{11}a_{222}$	$a_2a_{12}a_{112}$	$a_1a_{12}a_{122}$	$a_2a_{11}a_{122}$	$a_1a_{22}a_{112}$	$a_2^2a_{1112}$	$a_1^2a_{1222}$	$a_1a_2a_{1122}$	$a_{112}a_{122}$	$a_{111}a_{222}$	$a_{22}a_{1112}$	$a_{11}a_{1222}$	$a_{12}a_{1122}$	a_2a_{11122}	a_1a_{11222}	a_{111222}
$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{11}{30}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
$\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{7}{10}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{17}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
$-\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{17}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
$-\frac{42}{5}$	$-\frac{42}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{87}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
$-\frac{7}{10}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$
$\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{5}$
$-\frac{7}{10}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$-\frac{6}{5}$	$-\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{5}$
$\frac{7}{10}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$\frac{39}{5}$	$\frac{43}{10}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{7}{10}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{9}{10}$	$-\frac{7}{10}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{42}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{5}$
$\frac{43}{10}$	$\frac{39}{5}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{10}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{42}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{15}$	$-\frac{8}{15}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{8}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{7}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{13}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{11}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{7}{30}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{9}{10}$
$-\frac{1}{5}$	$\frac{13}{10}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{11}{30}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	$-\frac{7}{30}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{9}{10}$
$-\frac{12}{5}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{27}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$
$-\frac{9}{10}$	$-\frac{12}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{27}{10}$	$\frac{7}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
$-\frac{22}{5}$	$-\frac{22}{5}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{14}{15}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{11}{5}$	$-\frac{17}{15}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{9}{5}$
$\frac{13}{10}$	$\frac{13}{10}$	$-\frac{11}{30}$	$-\frac{11}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{8}{15}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{23}{30}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{9}{10}$
$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{7}{30}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$
$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{10}$	$-\frac{7}{30}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$
$-\frac{11}{10}$	$-\frac{11}{10}$	$\frac{7}{30}$	$+\frac{7}{30}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{5}$
$\frac{11}{10}$	$\frac{11}{10}$	$-\frac{7}{30}$	$-\frac{7}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{6}{5}$
$\frac{11}{10}$	$\frac{11}{10}$	$-\frac{7}{30}$	$-\frac{7}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{8}{15}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	$-\frac{6}{5}$
																1

VII. Die primitiven Functionen vom Gewicht 3.

a) Nr. 91.

	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{13}$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{23}$	$\mathfrak{a}_{123}$
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$	1				
$\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_{12}$	1	1			
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{13}$	1		-1		
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{23}$	1			-1	
$\mathfrak{a}_{123}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

b) Nr. 92.

	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{13}$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{23}$	$\mathfrak{a}_{123}$
$a_1a_2a_3$	1				
a_3a_{12}	1	1			
a_2a_{13}	1		1		
a_1a_{23}	1			1	
a_{123}	1	-1	-1	-1	2

c) Nr. 93.

Σ	$x_1y_1z_1$	$y_1z_1x_2$	$z_1x_1y_2$	$x_1y_1z_2$	$x_1y_2z_3$
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$	1	1	1	1	1
$\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_{12}$	1			1	
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{31}$	1		1		
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{23}$	1	1			
$\mathfrak{a}_{123}$	1				

d) Nr. 94.

Σ	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{13}$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{23}$	$\mathfrak{a}_{123}$
$x_1y_1z_1$					1
$y_1z_1x_2$				1	1
$z_1x_1y_2$			1		1
$x_1y_1z_2$		1			1
$x_1y_2z_3$	1	-1	-1	-1	2

e) Nr. 95.

Σ	$x_1y_1z_1$	$y_1z_1x_2$	$z_1x_1y_2$	$x_1y_1z_2$	$x_1y_2z_3$
$a_1a_2a_3$	1	1	1	1	1
a_3a_{12}		1	1		1
a_2a_{13}		1		1	1
a_1a_{23}			1	1	1
a_{123}					1

f) Nr. 96.

Σ	$a_1a_2a_3$	a_3a_{12}	a_2a_{13}	a_1a_{23}	a_{123}
$x_1y_1z_1$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$y_1z_1x_2$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$
$z_1x_1y_2$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_1y_1z_2$			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$x_1y_2z_3$					1

Aus diesen Tabellen ergeben sich durch Coincidenz von Reihen

1. für $z_i = x_i$ direct die Tabellen 25 bis 30 und
2. für $z_i = y_i = x_i$ direct die Tabellen 18 bis 24.

VIII. Die primitiven Functionen vom Gewicht 4.

a) Nr. 97.

	$a_1a_2a_3a_4$	$a_1a_2a_{34}$	$a_1a_3a_{24}$	$a_1a_4a_{23}$	$a_2a_3a_{14}$	$a_2a_4a_{13}$	$a_3a_4a_{12}$	$a_{12}a_{34}$	$a_{13}a_{24}$	$a_{14}a_{23}$	a_1a_{234}	a_2a_{134}	a_3a_{124}	a_4a_{123}	a_{1234}
$a_1a_2a_3a_4$	1														
$a_1a_2a_{34}$	1	-1													
$a_1a_3a_{24}$	1		-1												
$a_1a_4a_{23}$	1			-1											
$a_2a_3a_{14}$	1				-1										
$a_2a_4a_{13}$	1					-1									
$a_3a_4a_{12}$	1						-1								
$a_{12}a_{34}$	1	-1					-1	1							
$a_{13}a_{24}$	1		-1			-1			1						
$a_{14}a_{23}$	1			-1	-1					1					
a_1a_{234}	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$							$\frac{1}{2}$				
a_2a_{134}	1	$-\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$						$\frac{1}{2}$			
a_3a_{124}	1		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$						$\frac{1}{2}$		
a_4a_{123}	1			$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$							$\frac{1}{2}$	
a_{1234}	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$

b) Nr. 98.

	$a_1a_2a_3a_4$	$a_1a_2a_{34}$	$a_1a_3a_{24}$	$a_1a_4a_{23}$	$a_2a_3a_{14}$	$a_2a_4a_{13}$	$a_3a_4a_{12}$	$a_{12}a_{34}$	$a_{13}a_{24}$	$a_{14}a_{23}$	a_1a_{234}	a_2a_{134}	a_3a_{124}	a_4a_{123}	a_{1234}
$a_1a_2a_3a_4$															
$a_1a_2a_{34}$	1	-1													
$a_1a_3a_{24}$	1		-1												
$a_1a_4a_{23}$	1			-1											
$a_2a_3a_{14}$	1				-1										
$a_2a_4a_{13}$	1					-1									
$a_3a_4a_{12}$	1						-1								
$a_{12}a_{34}$	1	-1					-1	1							
$a_{13}a_{24}$	1		-1			-1			1						
$a_{14}a_{23}$	1			-1	-1					1					
a_1a_{234}	1	-1	-1	-1							2				
a_2a_{134}	1	-1			-1	-1						2			
a_3a_{124}	1		-1		-1		-1						2		
a_4a_{123}	1			-1		-1	-1							2	
a_{1234}	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	2	2	2	2	0

c) Nr. 99.

Σ	$x_1y_1z_1t_1$	$x_1y_1z_1t_2$	$x_1y_1t_1z_2$	$x_1z_1t_1y_2$	$y_1z_1t_1x_2$	$x_1t_1y_2z_2$	$x_1z_1y_2t_2$	$x_1y_1z_2t_2$	$x_1y_1z_2t_3$	$x_1z_1y_2t_3$	$x_1t_1y_2z_3$	$y_1z_1x_2t_3$	$y_1t_1x_2z_3$	$z_1t_1x_2y_3$	$x_1y_2z_3t_1$
$a_1a_2a_3a_4$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$a_1a_2a_{34}$	1			1	1			1						1	
$a_1a_3a_{24}$	1		1		1		1						1		
$a_1a_4a_{23}$	1	1			1	1						1			
$a_2a_3a_{14}$	1		1	1		1					1				
$a_2a_4a_{13}$	1	1		1			1			1					
$a_3a_4a_{12}$	1	1	1					1	1						
$a_{12}a_{34}$	1							1							
$a_{13}a_{24}$	1						1								
$a_{14}a_{23}$	1					1									
a_1a_{234}	1				1										
a_2a_{134}	1			1											
a_3a_{124}	1		1												
a_4a_{123}	1	1													
a_{1234}	1														

d) Nr. 100.

Σ	$a_1a_2a_3a_4$	$a_1a_2a_{34}$	$a_1a_3a_{24}$	$a_1a_4a_{23}$	$a_2a_3a_{14}$	$a_2a_4a_{13}$	$a_3a_4a_{12}$	$a_{12}a_{34}$	$a_{13}a_{24}$	$a_{14}a_{23}$	a_1a_{234}	a_2a_{134}	a_3a_{124}	a_4a_{123}	a_{1234}
$x_1y_1z_1t_1$															1
$x_1y_1z_1t_2$														1	−1
$x_1y_1t_1z_2$													1		−1
$x_1z_1t_1y_2$												1			−1
$y_1z_1t_1x_2$											1				−1
$x_1t_1y_2z_2$										1					−1
$x_1z_1y_2t_2$									1						−1
$x_1y_1z_2t_2$								1							1
$x_1y_1z_2t_3$							1	−1					−1	−1	2
$x_1z_1y_2t_3$						1			−1			−1		−1	2
$x_1t_1y_2z_3$					1					−1		−1	−1		2
$y_1z_1x_2t_3$				1						−1	−1			−1	2
$y_1t_1x_2z_3$			1						−1		−1		−1		2
$z_1t_1x_2y_3$		1						−1			−1	−1			2
$x_1y_2z_3t_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	−6

e) Nr. 101.

Σ	$x_1y_1z_1t_1$	$x_1y_1z_1t_2$	$x_1y_1t_1z_2$	$x_1z_1t_1y_2$	$y_1z_1t_1x_2$	$x_1t_1y_2z_2$	$x_1z_1y_2t_2$	$x_1y_1z_2t_2$	$x_1y_1z_2t_3$	$x_1z_1y_2t_3$	$x_1t_1y_2z_3$	$y_1z_1x_2t_3$	$y_1t_1x_2z_3$	$z_1t_1x_2y_3$	$x_1y_2z_3t_4$
$a_1a_2a_3a_4$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$a_1a_2a_{34}$		1	1			1	1		1	1	1	1	1		1
$a_1a_3a_{24}$		1		1		1		1	1	1	1	1		1	1
$a_1a_4a_{23}$			1	1			1	1	1	1	1		1	1	1
$a_2a_3a_{14}$		1			1		1	1	1	1		1	1	1	1
$a_2a_4a_{13}$			1		1	1		1	1		1	1	1	1	1
$a_3a_4a_{12}$				1	1	1	1			1	1	1	1	1	1
$a_{12}a_{34}$						1	1			1	1	1	1		1
$a_{13}a_{24}$						1		1	1		1	1		1	1
$a_{14}a_{23}$							1	1	1	1			1	1	1
a_1a_{234}									1	1	1				1
a_2a_{134}									1			1	1		1
a_3a_{124}										1		1		1	1
a_4a_{123}											1		1	1	1
a_{1234}															1

f) Nr. 102.

Σ	$a_1a_2a_3a_4$	$a_1a_2a_{34}$	$a_1a_3a_{24}$	$a_1a_4a_{23}$	$a_2a_3a_{14}$	$a_2a_4a_{13}$	$a_3a_4a_{12}$	$a_{12}a_{34}$	$a_{13}a_{24}$	$a_{14}a_{23}$	a_1a_{234}	a_2a_{134}	a_3a_{124}	a_4a_{123}	a_{1234}
$x_1y_1z_1t_1$	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$x_1y_1z_1t_2$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$x_1y_1t_1z_2$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$x_1z_1t_1y_2$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$y_1z_1t_1x_2$		$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$y_1z_1x_2t_2$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$y_1t_1x_2z_2$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$z_1t_1x_2y_2$		$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$x_1y_1z_2t_3$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
$x_1z_1y_2t_3$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
$x_1t_1y_2z_3$		$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$y_1z_1x_2t_3$		$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
$y_1t_1x_2z_3$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$z_1t_1x_2y_3$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$x_1y_2z_3t_4$															1

Hieraus ergaben sich durch Coincidenz der Reihen $t_1 t_2 t_3 \ldots$ und $x_1 x_2 x_3 \ldots$

Die Tabellen für die dreireihigen Functionen vom Gewicht $p_1 = 2$, $p_2 = p_3 = 1$.

a) Nr. 103

Σ	$a_1^2a_2a_3$	$a_2a_3a_{11}$	$a_1a_3a_{12}$	$a_1a_2a_{13}$	$a_1^2a_{23}$	$a_{12}a_{13}$	$a_{11}a_{23}$	a_3a_{112}	a_2a_{113}	a_1a_{123}	a_{1123}
$a_1^2a_2a_3$	1										
$a_2a_3a_{11}$	1	-2									
$a_1a_3a_{12}$	1		-1								
$a_1a_2a_{13}$	1			-1							
$a_1^2a_{23}$	1				-1						
$a_{12}a_{13}$	1		-1	-1		1					
$a_{11}a_{23}$	1	-2			-1		2				
a_3a_{112}	1	-1	-1					1			
a_2a_{113}	1	-1		-1					1		
a_1a_{123}	1		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$					$\frac{1}{2}$	
a_{1123}	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

b) Nr. 104.

	$a_1^2a_2a_3$	$a_2a_3a_{11}$	$a_1a_3a_{12}$	$a_1a_2a_{13}$	$a_1^2a_{23}$	$a_{12}a_{13}$	$a_{11}a_{23}$	a_3a_{112}	a_2a_{112}	a_1a_{123}	a_{1123}
$a_1^2a_2a_3$	1										
$a_2a_3a_{11}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$									
$a_1a_3a_{12}$	1		-1								
$a_1a_2a_{13}$	1			-1							
$a_1^2a_{23}$	1				-1						
$a_{12}a_{13}$	1		-1	-1		1					
$a_{11}a_{23}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
a_3a_{112}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1					1			
a_2a_{112}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		-1					1		
a_1a_{123}	1		-1	-1	-1					2	
a_{1123}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	2	-3

c) Nr. 105.

Σ	$x_1^2y_1z_1$	$x_1y_1z_1x_2$	$x_1^2z_1y_2$	$x_1^2y_1z_2$	$x_1^2y_2z_2$	$x_1y_1x_2z_2$	$y_1z_1x_2x_3$	$x_1z_1x_2y_3$	$x_1y_1x_2y_3$	$x_1^2y_2z_3$	$x_1x_2y_3z_4$
$a_1^2a_2a_3$	1	2	1	1	1	2	2	2	2	1	2
$a_2a_3a_{11}$	1		1	1	1					1	
$a_1a_3a_{12}$	1	1		1		1			1		
$a_1a_2a_{13}$	1	1	1			1		1			
$a_1^2a_{23}$	1	2			1		2				
$a_{12}a_{13}$	1					1					
$a_{11}a_{23}$	1				1						
a_3a_{112}	1			1							
a_2a_{112}	1		1								
a_1a_{123}	1	1									
a_{1123}	1										

d) Nr. 106.

Σ	$a_1^2a_2a_3$	$a_2a_3a_{11}$	$a_1a_3a_{12}$	$a_1a_2a_{13}$	$a_1^2a_{23}$	$a_{12}a_{13}$	$a_{11}a_{23}$	a_3a_{112}	a_2a_{113}	a_1a_{123}	a_{1123}
$x_1^2y_1z_1$											1
$x_1y_1z_1x_2$										1	−1
$x_1^2z_1y_2$									1		−1
$x_1^2y_1z_2$								1			−1
$x_1^2y_2z_2$							1				−1
$x_1y_1x_2z_2$						1					−1
$y_1z_1x_2x_3$					$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$			−1	1
$x_1z_1x_2y_3$				1		−1			−1	−1	2
$x_1y_1x_2z_3$			1			−1		−1		−1	2
$x_1^2y_2z_3$		1					−1	−1	−1		2
$x_1x_2y_3z_4$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	−1	1 —	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	2	−3

e) Nr. 107.

Σ	$x_1^2y_1z_1$	$x_1y_1z_1x_2$	$x_1^2z_1y_2$	$x_1^2y_1z_2$	$x_1^2y_2z_2$	$x_1y_1x_2z_2$	$y_1z_1x_2x_3$	$x_1z_1x_2y_3$	$x_1y_1x_2z_3$	$x_1^2y_2z_3$	$x_1x_2y_3z_4$
$a_1^2a_2a_3$	1	2	1	1	1	2	2	2	2	1	2
$a_2a_3a_{11}$		1				1	1	1	1		1
$a_1a_3a_{12}$		1	1		1	1	2	2	1	1	2
$a_1a_2a_{13}$		1		1	1	1	2	1	2	1	2
$a_1^2a_{23}$			1	1		2		2	2	1	2
$a_{12}a_{13}$					1	1	2	1	1	1	2
$a_{11}a_{23}$						1		1	1		1
a_3a_{112}							1	1			1
a_2a_{113}							1		1		1
a_1a_{123}								1	1	1	2
a_{1123}											1

f) Nr. 108.

Σ	$a_1^2a_2a_3$	$a_2a_3a_{11}$	$a_1a_3a_{12}$	$a_1a_2a_{13}$	$a_1^2a_{23}$	$a_{12}a_{13}$	$a_{11}a_{23}$	a_3a_{112}	a_2a_{113}	a_1a_{123}	a_{1123}
$x_1^2y_1z_1$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_1y_1z_1x_2$		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$x_1^2z_1y_2$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_1^2y_1z_2$		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_1^2y_2z_2$		$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_1y_1x_2z_2$		$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$y_1z_1x_2x_3$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
$x_1z_1x_2y_3$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$
$x_1y_1x_2z_2$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$
$x_1^2y_2z_3$		$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$x_1x_2y_3z_4$											1