

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE BEWEGUNGSVERHÄLTNISSE DES SYSTEMS 70 OPHIUCHI

VON
DR. ADALBERT PREY,
ADJUNCT AM K. K. GRADMESSENGS-BUREAU.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 11 JULI 1901.

Das System 70 Ophiuchi, welches nun schon seit mehr als hundert Jahren bekannt ist, hat allen Versuchen einer Bahnbestimmung seit jeher die größten Hindernisse in den Weg gelegt. Die bedeutende Helligkeit der beiden Componenten (4^m und 6^m), sowie die rasche Eigenbewegung von $1''.2$ im Jahre ließ auf eine geringe Entfernung des Systems schließen, was auch durch die Parallaxenmessungen bestätigt wurde, und so hatte man die Hoffnung gehegt, gerade bei diesem System eine besonders genaue Bahnbestimmung durchführen zu können. Diese Hoffnung wurde aber getäuscht, und keine der vielen berechneten Bahnen reichte hin, die Bewegungsverhältnisse dieses interessanten Sternpaares darzustellen. Als Schur seine ersten Untersuchungen darüber durchführte, konnte er bereits ein Verzeichnis von 14 Bahnbestimmungen zusammenstellen (Astron. Nachr., Bd. 71). Seither hat sich diese Zahl noch bedeutend vermehrt. Ich lasse hier ein Verzeichnis folgen, welches aus dem von Schur und dem von See (Astron. Journal, vol. XV) publicierten combinirt ist. Es wurde nur noch die letzte Bahnbestimmung von Doolittle hinzugefügt. (Verzeichnis der Bahnbestimmungen siehe nächste Seite.)

Der Vergleich der einzelnen Elemente läßt sofort erkennen, was für bedeutende Unterschiede sich namentlich bei den älteren Bahnen finden. Die Beobachtungen der Jahre 1818 bis 1823 und 1823 bis 1827 zeigen ein so verschiedenes Verhalten, dass, je nachdem auf die ersteren oder die letzteren das größere Gewicht gelegt wird, die Elemente sehr verschieden ausfallen. Mit dem Hinzukommen der späteren Beobachtungen tritt natürlich das Gewicht der früheren mehr und mehr zurück, und die Elementensysteme werden ähnlicher. In den Umlaufzeiten aber bleibt ein auffallender Gang.

Da infolge dieser merkwürdigen Erscheinungen 70 Ophiuchi ein Gegenstand der aufmerksamsten ununterbrochenen Beobachtung war, so konnte Schur, als er seine zweiten Untersuchungen begann, über die stattliche Anzahl von 333 Jahresmitteln verschiedener Beobachter verfügen. Unter diesen Umständen

Verzeichnis der Bahnbestimmung.

U	T	e	a	i	π	Berechner	Publication
73.802	1808.77	0.430	43.284	40.42	125.37	Eneke	B. J. 1832, pag. 295
79.091	1814.155	0.34737	5.5538	04.2	110.89	"	dto.
80.340	1807.00	0.4607	4.392	48.1	145.77	Herschel	Mem. R. A. S. vol. VII, p. 217.
80.61	1800.746	0.47715	4.3159	42.87	145.73	Mädler	A. N. 289.
90.739	1805.104	0.0402	15.4291	18.44	181.37	"	A. N. 444
92.809	1812.73	0.4438	15.3102	04.80	129.68	"	dto.
98.140	1800.92	0.540	4.48	49.93	172.52	Baden Powell	M. N. XV, p. 42.
87.52	1807.60	0.4820	4.075	51.5	150.32	Jacob	Historical and descript. notes. (Bishop's observ. 1809—1851.
88.48	1807.48	0.4973	4.9917	47.32	108.10	Hind	M. N. IX, p. 145.
92.875	1811.195	0.44955	15.0032	02.17	143.48	Villargeau	C. R. XXXII, p. 51
92.338	1810.071	0.44440	4.9057	61.88	144.93	"	Mens. micr. CXXI.
91.937	1810.367	0.44873	5.070	61.92	148.43	"	dto.
93.10	1808.12	0.4894	—	55.27	159.53	Jacob	M. N. XV, p. 228
95.966	1808.270	0.49353	—	57.35	160.54	Klingert	A. N. 1135.
94.370	1808.791	0.49149	4.7039	57.93	155.74	Schur	A. N. 1682.
92.77	1807.9	0.3859	4.88	02.0	163.0	Flammario	C. R. LXXXIX, p. 1248.
94.93	1809.64	0.47280	4.770	60.0	169.72	Tisserand	Flam. Cat. et doubl., p. 166.
94.44	1808.90	0.4072	4.790	58.08	151.92	Pritchard	Obs. Obs., I, p. 63.
87.84	1807.05	0.4912	4.50	58.47	171.75	Gore	M. N. XV, Nr. 5.
88.04	1807.24	0.4994	4.45	57.0	174.92	Mann	Sid. Mess. Nov. 1890.
88.3954	1808.0707	0.4751	4.00	00.08	168.3	Schur	A. N. 3220 21
87.75	1807.85	0.550	4.56	58.3	169.2	Burnham	Astron. u. Astroph. Juni 1893.
78.70	1807.88	0.50	4.548	58.42	161.75	See	A. J. vol. XVI, p. 18.
80.6600	1808.851	0.4998	4.5227	50.72	166.58	Doolittle	A. J. vol. XVII, p. 121.

musste es natürlich Wunder nehmen, dass auch diese Bahnbestimmung, welche auf ein so umfassendes Material gegründet war, schon nach wenigen Jahren bedeutende und unerklärliche Abweichungen im Positionswinkel zeigte.

Es war daher sehr naheliegend, hier den störenden Einfluss einer dritten, unsichtbaren Masse zu vermuthen, worüber sich schon bei Mädler eine Äußerung findet (Astron. Nachr., Bd. XIX). Wenn es auch nicht bezweifelt werden kann, dass eine neue Bahnbestimmung nach dem Kepler'schen Gesetze wieder die großen Differenzen verschwinden lassen würde, so ist doch damit nicht erklärt, warum die früheren Bestimmungen, speciell die Schur'sche, dies nicht auch leistet, nachdem doch das Beobachtungsmaterial nach gewöhnlichem Maßstabe weitaus ausreichend wäre.

Der erste, der den Versuch machte, die Bewegungsverhältnisse einer dritten Masse in diesem System festzustellen, war Jacob (Monthly not., vol. XV), doch wurde damals wenig Gewicht darauf gelegt. Erst in neuester Zeit, als sich die Abweichungen von der Schur'schen Bahn gezeigt hatten, griff See wieder auf diese Hypothese zurück. Danach soll die dritte Masse in einer engen Bahn um den Hauptstern kreisen mit einer Umlaufszeit von 36 Jahren.

Die osculierenden Elemente, von denen See ausging, waren durch einen Anschluss an die Distanzen allein gewonnen worden (Astron. Journal, vol. XVI). Doolittle, der die nöthigen numerischen Rechnungen durchführte, machte einen zweiten Versuch, indem er die osculierenden Elemente aus Distanzen und Positionswinkel gleichmäßig herleitete. Er fand so für den dritten Körper eine etwas längere Periode.

Nach den Untersuchungen von Moulton (Astron. Journal, vol. XX) ist aber die Stabilität dieses Systems stark in Frage gestellt, da sich die lange Umlaufszeit mit der großen Masse, die der dritte Körper haben muss, nicht vereinbaren lässt.

Burnham hat auch bei seinen Nachforschungen mit dem 18zölligen Dearborn- und dem großen Lick-Refractor von einem dritten Stern in der Nähe der beiden anderen nichts entdecken können.

Es soll nun im Folgenden abermals versucht werden, die Anomalien der Bewegung an diesem System durch den Einfluss einer dritten Masse zu erklären, doch soll eine andere Configuration des Systems vorausgesetzt werden.

Die dritte Masse soll nicht um eine der Componenten, sondern um den Schwerpunkt beider eine Bahn von sehr großem Radius beschreiben. Wir wollen die Distanz sogar so groß voraussetzen, dass die Ortsveränderung des Körpers weiter nicht in Betracht kommt; die obige Periode, welche ungefähr die Hälfte der Hauptperiode ist, wäre dann als eine periodische Störung abhängig von der doppelten und mehrfachen mittleren Anomalie aufzufassen, während die Periode des dritten Körpers gar nicht in die Rechnung eintritt, weil sie zu lang ist.

Wir haben es also hier mit einem ähnlichen Störungsproblem zu thun, wie es bei ζ Cancri aufgetreten ist (Seeliger: Denksch. der kais. Akad. der Wiss., mathem.-naturw. Cl., Wien, 1882 und Abhandl. der kön. bayr. Akad. der Wiss., mathem.-naturw. Cl. 1888), nur ist es noch complicierter, da die 3. Componente nicht sichtbar ist.

Nachdem dort festgestellt war, dass man ohne Nachtheil die Bahn des dritten Sternes in die Projectionsebene legen kann und sich gleichzeitig ein Massenwert für denselben ergeben hatte, war es möglich, die Störungen vollständig zu berechnen, dieselben von den Beobachtungen abzuziehen und die Reste nach dem Kepler'schen Gesetze auszugleichen. Hier aber, wo von der dritten Masse gar nichts bekannt ist, bleibt nichts übrig als die Elemente desselben gleichzeitig mit denen der sichtbaren Componenten in die Gleichungen aufzunehmen, wodurch die Rechnungen bedeutend umfangreicher werden.

Natürlich werden auch die erhaltenen Resultate nicht sehr sicher sein, da, um die Rechnung überhaupt bewältigen zu können, vereinfachende Bedingungen eingeführt werden mussten, von denen es schließlich zweifelhaft erschien, ob sie für die in Betracht kommenden Zeiträume aufrecht erhalten werden können. Es kann daher das folgende nur zu einer Orientierung dienen, ob die durch die Beobachtungen constatierten Abweichungen von dem Kepler'schen Gesetze von der Art sind, dass sie sich durch ähnliche

Störungen, wie die hier betrachteten erklären lassen. Diese Frage muss auf Grund der folgenden Untersuchungen entschieden bejaht werden und ich halte in dieser Hinsicht die Übereinstimmung der für das Verhältnis zur Masse zur dritten Potenz der Entfernung des unbekannten Körpers gefundenen Werte für wichtiger als die Darstellung.

Eine wichtige Stütze erhielt die Hypothese aber dadurch, dass es gelungen ist, das Vorhandensein eines Sternes elfter Größe zu constatieren, der der Größe und Richtung nach dieselbe Eigenbewegung besitzt, wie 70 Ophiuchi.

Es ist kein Zweifel, dass unter den so gewonnenen Gesichtspunkten die Rechnungen zu wiederholen wären. Dazu ist jedoch der Zeitpunkt jetzt nicht günstig. Die Bewegung in Positionswinkel ist gerade jetzt auffällig groß und daher gerade jetzt die Zeit, wo sich die Anomalien der Bewegung am deutlichsten äußern, weil der Positionswinkel für jede kleine Änderung in den Elementen ungeheuer empfindlich ist. Es soll daher mit weiteren Untersuchungen dieser Art gewartet werden, bis diese kritische Zeit vorüber ist.

Aufstellung der Differentialgleichungen.

Wir gehen von der Annahme aus, dass das System der beiden sichtbaren Componenten, deren Massen m_1 und m_2 sein sollen, in einer bestimmten Richtung eine Beschleunigung erfahre, welche von einer dritten, unbekannten Masse m_3 herrühre.

Auf Grund der Voraussetzung, dass dieser dritte Körper sehr weit von den beiden anderen entfernt ist, können wir annehmen, dass die Richtung der Beschleunigung für m_1 und m_2 annähernd dieselbe ist.

Legen wir den Anfangspunkt eines sonst beliebigen rechtwinkligen Coordinatensystems in den gemeinsamen Schwerpunkt von m_1 und m_2 und bezeichnen die Entfernung von m_3 vom Anfangspunkte mit D , die Richtungswinkel der durch m_3 erzeugten Beschleunigung λ, μ, ν . So sind nach unserer Voraussetzung die Größen λ, μ, ν und D als constant zu betrachten. Es kommt dies darauf hinaus, dass M ein sehr kleines Stück einer Kreisbahn beschreibt.

Bezeichnen wir ferner mit r_1 und r_2 die Entfernung von m_1 , respective m_2 vom Anfangspunkte, mit r die gegenseitige Entfernung der beiden, so ist

$$r = r_1 + r_2 \quad r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r = \mu_1 r \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r = \mu_2 r \quad 1$$

und

$$m_1 \mu_1 - m_2 \mu_2 = 0. \quad 2.$$

Ist endlich ϑ der Winkel zwischen D und r , so erhalten wir für die Beschleunigung von m_1 und m_2 in der Richtung λ, μ, ν die Werte

$$\frac{k^2 m_1 m_3}{(D - r_1 \cos \vartheta)^2} \quad \text{und} \quad \frac{k^2 m_2 m_3}{(D + r_2 \cos \vartheta)^2}$$

Diese Beschleunigungen charakterisieren den störenden Einfluss von m_3 . Es entspricht ihnen eine Störungsfunction von der Form

$$R = \frac{k^2 m_1 m_3}{D - r_1 \cos \vartheta} + \frac{k^2 m_2 m_3}{D + r_2 \cos \vartheta}.$$

Wir wollen nun im folgenden genau der Jacobi'schen Integrationsmethode folgen, welche nach Integration der ungestörten Bewegung sofort die Differentialgleichungen der gestörten hinzuschreiben erlaubt. (Über diejenigen Probleme der Mechanik, in welchen eine Kräftefunction existiert und über die Theorie der Störungen: C. G. J. Jacobis gesammelte Werke, Bd. V, S. 355 A.N., Bd. 111.) Dasselbst findet sich für das Integral der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung der Ausdruck:

$$W = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \left[\int \sqrt{\frac{2k^2 m_1 m_2}{r} - 2\alpha - \frac{2\beta}{r^2}} dr + \int \sqrt{2\beta - \frac{2\gamma}{\sin^2 \varphi}} d\varphi + \sqrt{2\gamma} \psi \right]. \quad 1)$$

r, φ und ψ sind die Polarcordinaten der einen Masse in Bezug auf die andere, so dass

$$x = r \sin \varphi \cos \psi \quad y = r \sin \varphi \sin \psi \quad z = r \cos \varphi$$

ist

α, β und γ sind die Integrationsconstanten.

Daraus ergeben sich die Integralgleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \alpha' \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta' \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma} = \gamma',$$

wo α', β', γ' drei neue Constante sind.

Die Bedeutung dieser sechs Größen ist nach Jacobi

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{k^2 m_1 m_2}{2a} & \alpha' &= l_0 \\ \beta &= \frac{k^2 m_1 m_2}{2} a (1 - e^2) & \beta' &= \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \sqrt{\frac{1}{2\beta}} (\omega - 90) \\ \gamma &= \frac{k^2 m_1 m_2}{2} a (1 - e^2) \cos^2 i & \gamma' &= \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \sqrt{\frac{1}{2\gamma}} (\omega + 90), \end{aligned} \quad (5)$$

oder umgekehrt:

Die halbe große Achse der Bahn:

$$a = \frac{k^2 m_1 m_2}{2\alpha},$$

die Excentricität:

$$e = \sqrt{1 - \frac{4\alpha\beta}{k^4 m_1^2 m_2^2}},$$

der Cosinus der Neigung:

$$\cos i = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}, \quad (6)$$

der Winkel zwischen Perihel (Periastron) und dem Knoten:

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \sqrt{\frac{1}{2\beta}} (\omega + 90),$$

die Länge des Knotens:

$$\varpi_0 = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \gamma' \sqrt{\frac{1}{2\gamma}} (\omega - 90),$$

die Epoche:

$$l_0 = \alpha'.$$

Mit Hilfe unserer Störungsfunction R erhalten wir nun sofort die Differentialgleichungen für die gestörte Bewegung

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \alpha'} & \frac{d\alpha'}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha} \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \beta'} & \frac{d\beta'}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \beta} \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \gamma'} & \frac{d\gamma'}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \gamma}. \end{aligned} \quad (7)$$

Diese Differentialgleichungen sind nun zu integrieren. Zu diesem Zwecke muss die Störungsfunction R in eine entsprechende Form gesetzt werden.

Entwicklung der Störungsfunction.

Wir haben gefunden

$$\begin{aligned} R &= \frac{k^2 m_1 m_3}{D - r_1 \cos \vartheta} + \frac{k^2 m_2 m_3}{D + r_2 \cos \vartheta} \\ &= \frac{k^2 m_1 m_3}{D} \left[1 + \frac{r_1}{D} \cos \vartheta + \left(\frac{r_1}{D} \right)^2 \cos^2 \vartheta + \dots \right] \\ &\quad + \frac{k^2 m_2 m_3}{D} \left[1 - \frac{r_2}{D} \cos \vartheta + \left(\frac{r_2}{D} \right)^2 \cos^2 \vartheta + \dots \right]. \end{aligned}$$

Da R immer nur nach den Größen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ differentiiert erscheint, so können wir das constante Glied

$$\frac{k^2 m_3}{D} (m_1 + m_2)$$

von vornherein weglassen.

Da nach Gleichung 2

$$m_1 r_1 - m_2 r_2 = (m_1 u_1 - m_2 u_2) r = 0$$

ist, so fallen die zweiten Glieder der beiden Ausdrücke ebenfalls weg. Die Entwicklung beginnt daher mit Gliedern, welche den Factor $\frac{m_3}{D^3}$ enthalten. Wir wollen uns mit diesen begnügen und die weiteren Glieder, welche $\frac{m_3}{D^4}$ u. s. w. enthalten, vernachlässigen.

Es verbleibt somit der Ausdruck

$$R = \frac{k^2 m_3}{D^3} [m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2] \cos^2 \vartheta = \frac{k^2 m_3}{D^3} (m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2) r^2 \cos^2 \vartheta,$$

in welchen wir die Bahnelemente einzuführen haben.

Bezeichnen wir mit l, m, n die Richtungswinkel von r , so ist:

$$\begin{aligned} \cos l &= \cos \Omega \cos (\omega + v) - \sin \Omega \sin (\omega + v) \cos i \\ \cos m &= \sin \Omega \cos (\omega + v) + \cos \Omega \sin (\omega + v) \cos i \\ \cos n &= \sin (\omega + v) \sin i, \end{aligned}$$

wo v die wahre Anomalie bedeutet, oder wenn wir

$$r \cos v = \xi \qquad r \sin v = \eta$$

setzen

$$\begin{aligned} r \cos l &= \xi (\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i) + \eta (-\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i) = \xi p_1 + \eta q_1 \\ r \cos m &= \xi (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i) + \eta (-\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i) = \xi p_1 + \eta q_2 \\ r \cos n &= \xi \sin \omega \sin i + \eta \cos \omega \sin i = \xi p_3 + \eta q_3. \end{aligned}$$

Da nun

$$\cos \vartheta = \cos l \cos \lambda + \cos m \cos \mu + \cos n \cos \nu$$

ist, so folgt für $r \cos \vartheta$ der Ausdruck

$$r \cos \vartheta = \xi (p_1 \cos \lambda + p_2 \cos \mu + p_3 \cos \nu) + \eta (q_1 \cos \lambda + q_2 \cos \mu + q_3 \cos \nu).$$

Führen wir zur Abkürzung für die Klammerausdrücke die Bezeichnung A und B ein, so lautet nun die Störungsfunction:

$$R = \frac{k^2 m_3}{D^3} (m_1 p_1^2 + m_2 p_2^2) (\xi A + \eta B)^2 = \frac{k^2 m_3}{D^3} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\xi A + \eta B)^2. \quad (8)$$

Wir führen nun noch eine Vereinfachung durch: Wir setzen voraus, dass die drei Massen m_1 , m_2 und m_3 sich in derselben Ebene bewegen. Dann ist gleichzeitig

$$i = 0 \quad \nu = 90^\circ \quad \text{und} \quad \mu = 90 - \lambda,$$

und es wird

$$\begin{aligned} p_1 &= \cos(\varrho + \omega) & q_1 &= -\sin(\varrho + \omega) \\ p_2 &= \sin(\varrho + \omega) & q_2 &= \cos(\varrho + \omega) \\ p_3 &= 0 & q_3 &= 0. \end{aligned}$$

Das Element ϱ verliert seine Bedeutung und wir können $\varrho + \omega = \pi$ setzen, indem wir unter π die Länge des Periastrons von einem beliebigen Nullpunkt gezählt verstehen.

Dann folgt

$$\begin{aligned} A &= \cos(\lambda - \pi) \\ B &= \sin(\lambda - \pi) \end{aligned}$$

und

$$R = \frac{k^2 m_3}{D^3} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} [\xi \cos(\lambda - \pi) + \eta \sin(\lambda - \pi)]^2. \quad (9)$$

Die säcularen Störungen.

Indem wir den Entwicklungen von ξ und η nach Potenzen der Excentricität nur jene Glieder entnehmen, welche die mittlere Anomalie nicht enthalten, ergeben sich aus 7) die Differentialgleichungen für die säcularen Störungen.

Es ist also:

$$\xi^2 = \frac{a^2}{2} (1 + 4e^2) \quad \xi \eta = 0 \quad \eta^2 = \frac{a^2}{2} (1 - e^2)$$

zu nehmen und daher

$$R = \frac{k^2 m_3}{D^3} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{a^2}{2} [(1 + 4e^2) \cos^2(\lambda - \pi) + (1 - e^2) \sin^2(\lambda - \pi)], \quad (10)$$

welcher Ausdruck in 7) einzuführen ist.

Da R die Zeit nicht enthält, somit

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha'} = \frac{\partial R}{\partial t_0} = 0$$

ist, so folgt unmittelbar

$$\alpha = \text{const.},$$

und da α nur von dem einzigen Element a abhängt, so ist auch

$$a = \text{const.} \quad (1)$$

Wir behandeln nun zunächst die beiden Gleichungen für β und β' welche eine Beziehung zwischen e und π liefern.

Bezeichnen wir den Ausdruck:

$$(1 + 4e^2) \cos^2 (\lambda - \pi) + (1 - e^2) \sin^2 (\lambda - \pi)$$

mit S , so folgt aus den Gleichungen

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \varphi'} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi'}{dt} = - \frac{\partial R}{\partial \varphi},$$

unter Benützung von 5, wo jetzt ω durch π ersetzt ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -k^2 m_1 m_2 a e \cdot \frac{dc}{dt} = \frac{k^2 m_3}{D^3} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\partial S}{\partial \varphi'}, \\ \frac{d\varphi'}{dt} &= \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\varphi}} \cdot \frac{d\pi}{dt} = \frac{1}{(\sqrt{2\varphi})^3} \cdot \varphi' \sqrt{2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{k^2 m_3}{D^3} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\partial S}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (11)$$

S ist nur Function der Größen e und π ; daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= \frac{\partial S}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial \pi} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial S}{\partial \varphi'} &= \frac{\partial S}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial \varphi'} + \frac{\partial S}{\partial \pi} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial \varphi'} \end{aligned} \quad (12)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial \varphi} &= - \frac{2\alpha}{k^4 m_1^2 m_2^2} \cdot \frac{1}{e} \\ \frac{\partial e}{\partial \varphi'} &= 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} &= \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \cdot \frac{\varphi'}{\sqrt{2\varphi}} \\ \frac{\partial \pi}{\partial \varphi'} &= \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \cdot \sqrt{2\varphi}. \end{aligned} \quad (13)$$

Werden nun 12 und 13 in 11 substituiert, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -k^2 m_1 m_2 a e \cdot \frac{dc}{dt} = \frac{k^2 m_3}{D^3} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \cdot \sqrt{2\varphi} \cdot \frac{\partial S}{\partial \pi} \\ \frac{d\varphi'}{dt} &= \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\varphi}} \cdot \frac{d\pi}{dt} = \frac{\varphi'}{2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{k^2 m_3}{D^3} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{a^2}{2} \left[- \frac{2\alpha}{k^4 m_1^2 m_2^2} \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{\partial S}{\partial e} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \cdot \frac{\varphi'}{\sqrt{2\varphi}} \cdot \frac{\partial S}{\partial \pi} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

In der zweiten Gleichung 14 fällt das zweite Glied rechts und links vom Gleichheitszeichen zufolge der ersten Gleichung weg, und es folgt nun unter Beiziehung von 5:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= - \frac{k m_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - e^2}{e}} \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot \frac{\partial S}{\partial \pi} \\ \frac{d\pi}{dt} &= + \frac{k m_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - e^2}{e}} \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot \frac{\partial S}{\partial e}, \end{aligned} \quad (15)$$

so dass die Factoren, mit welchen $\frac{\partial S}{\partial \pi}$ und $\frac{\partial S}{\partial e}$ multipliciert erscheinen, sich nur durch das Vorzeichen voneinander unterscheiden.

Bilden wir das totale Differential $\frac{dS}{dt}$, so ergibt sich

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial e} \cdot \frac{de}{dt} + \frac{\partial S}{\partial \pi} \cdot \frac{d\pi}{dt} = 0,$$

daher

$$S = \text{const.} = c$$

oder

$$(1 + 4e^2) \cos^2 (\lambda - \pi) + (1 - e^2) \sin^2 (\lambda - \pi) = c. \quad (16)$$

Aus dieser Gleichung können wir e als Function von π bestimmen und in die zweite Gleichung 15 einsetzen.

Es wird

$$e^2 = \frac{1 - c}{1 - 5 \cos^2 (\lambda - \pi)}$$

$$1 - e^2 = \frac{c - 5 \cos^2 (\lambda - \pi)}{1 - 5 \cos^2 (\lambda - \pi)}$$

$$\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\frac{c - 5 \cos^2 (\lambda - \pi)}{1 - 5 \cos^2 (\lambda - \pi)}}$$

und

$$\frac{\partial S}{\partial e} = 2e[5 \cos^2 (\lambda - \pi) - 1],$$

daher

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{km_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \cdot a^2 \sqrt{[c - 5 \cos^2 (\lambda - \pi)][1 - 5 \cos^2 (\lambda - \pi)]}.$$

Da wir $e = \sin \varphi$ setzen können, wo φ einen Winkel bedeutet, der für elliptische Bahnen immer im ersten Quadranten liegt, so ist bei den auftretenden Wurzeln überall das positive Vorzeichen zu nehmen.

$$\frac{km_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \cdot a^2$$

ist eine Constante gleich q , so dass wir setzen können

$$\frac{d(\lambda - \pi)}{\sqrt{[c - 5 \cos^2 (\lambda - \pi)][1 - 5 \cos^2 (\lambda - \pi)]}} = q dt. \quad (17)$$

Führen wir $y = tg (\lambda - \pi)$ ein, so geht 17 über in:

$$\frac{dy}{\sqrt{4(5-c) \sqrt{\left(1 - \frac{c}{5-c} y^2\right) \left(1 - \frac{1}{4} y^2\right)}}} = q dt.$$

Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden:

Ist

$$c > 1$$

so substituieren wir

$$z = \sqrt{\frac{c}{5-c}} y \quad (18)$$

und erhalten:

$$q \, dt = \frac{dz}{\sqrt{4c} \sqrt{(1-z^2) \left(1 - \frac{5-c}{4c} z^2\right)}}.$$

Dabei ist

$$\frac{5-c}{4c} < 1.$$

Ist dagegen

$$c < 1$$

so substituieren wir

$$z = \frac{y}{2}$$

und erhalten

$$q \, dt = \frac{dz}{\sqrt{5-c} \sqrt{\left(1 - \frac{4c}{5-c} z^2\right) (1-z^2)}},$$

in welchem Falle nun $\frac{4c}{5-c} < 1$ ist.

Setzen wir für den ersten Fall

$$\frac{5-c}{4c} = k^2 \quad \text{und} \quad \sqrt{4c} \cdot q = q' \tag{20}$$

und für den zweiten Fall

$$\frac{4c}{5-c} = k^2 \quad \text{und} \quad \sqrt{5-c} \cdot q = q'. \tag{21}$$

so erhalten wir in beiden Fällen die Form:

$$q' \, dt = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2) (1-k^2 z^2)}}$$

oder das elliptische Integral

$$q'(t-t_0) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2) (1-k^2 z^2)}},$$

welches zusammen mit 18 und 20 oder 19 und 21 die Beziehung zwischen π und t darstellt.

Bezeichnen wir das Integral zwischen den Grenzen 0 und z_0 , welches eine Constante ist, mit A , so ist

$$q'(t-t_0) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2) (1-k^2 z^2)}} - \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2) (1-k^2 z^2)}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2) (1-k^2 z^2)}} - A,$$

mithin:

$$z = \sin am [A + q'(t-t_0)]$$

oder

$$1. \text{ Fall: } \sqrt{\frac{c}{5-c}} \operatorname{tg} (\lambda - \pi) = \sin am \left[A + \frac{km_3}{D^3} \cdot \frac{\sqrt{4c}}{\sqrt{m_1+m_2}} a^{\frac{3}{2}} (t-t_0) \right],$$

$$2. \text{ Fall: } \frac{1}{2} \operatorname{tg} (\lambda - \pi) = \sin am \left[A + \frac{km_3}{D^3} \sqrt{\frac{5-c}{m_1+m_2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} (t-t_0) \right]. \tag{II}$$

Jedem Wert von π entspricht ein Wert von c , der sich aus Gleichung 16 ergibt

$$c = \sqrt{\frac{1-c}{1-5\cos^2(\lambda-\pi)}}. \quad \text{III)}$$

Die Integration der beiden Gleichungen für β und β' ist damit beendet.

Es sei hier auf eine besondere Eigenschaft der Bewegung des Periastrons hingewiesen, welche sich aus Gleichung 17 ergibt.

Es war

$$\frac{d(\lambda-\pi)}{dt} = q \sqrt{|c-5\cos^2(\lambda-\pi)| |1-5\cos^2(\lambda-\pi)|}$$

und

$$(1+4c^2)\cos^2(\lambda-\pi) + (1-c^2)\sin^2(\lambda-\pi) = c.$$

$\lambda-\pi$ oder der Winkel zwischen dem Periastron und der Richtung nach m_3 ändert sich periodisch mit der Zeit. Es kann nämlich der Fall eintreten, dass $\frac{d(\lambda-\pi)}{dt} = 0$ wird, und zwar sowohl für

$$c = 5\cos^2(\lambda-\pi) \text{ als für } 1 = 5\cos^2(\lambda-\pi)$$

oder

$$\cos(\lambda-\pi) = \pm \sqrt{\frac{c}{5}} \quad \cos(\lambda-\pi) = \pm \sqrt{\frac{1}{5}}.$$

Es sei

I. zur Zeit

$$t = t_0 \quad \lambda = \pi \quad \text{und} \quad \cos^2(\lambda-\pi) = 1, \sin^2(\lambda-\pi) = 0,$$

dann ist

$$c = 1+4c^2 \text{ und} \\ 5 > c > 1$$

daher

$$\begin{aligned} c-5\cos^2(\lambda-\pi) &= c-5 < 0 & \frac{d(\lambda-\pi)}{dt} &\text{ reell.} \\ 1-5\cos^2(\lambda-\pi) &= 1-5 < 0 \end{aligned}$$

Das Maximum von $\lambda-\pi$ tritt ein für

$$\cos(\lambda-\pi) = \pm \sqrt{\frac{c}{5}},$$

da $\sqrt{\frac{c}{5}} > \sqrt{\frac{1}{5}}$ ist und $\cos(\lambda-\pi)$ zu Beginn seinen größten Wert hatte und abnehmen musste.

II. Es sei für

$$t = t_0 \quad \lambda-\pi = 90^\circ \quad \cos^2(\lambda-\pi) = 0, \sin^2(\lambda-\pi) = 1,$$

dann ist

$$\begin{aligned} c &= 1-c^2 \\ 1 &> c > 0. \end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned} c-5\cos^2(\lambda-\pi) &= c > 0 & \frac{d(\lambda-\pi)}{dt} &\text{ reell.} \\ 1-5\cos^2(\lambda-\pi) &= 1 > 0 \end{aligned}$$

Das Minimum von $\lambda - \pi$ tritt wieder ein für

$$\cos(\lambda - \pi) = \pm \sqrt{\frac{c}{5}},$$

da jetzt $\sqrt{\frac{c}{5}} < \sqrt{\frac{1}{5}}$ ist und $\cos(\lambda - \pi)$ von seinem kleinsten Werte an zunimmt.

Es folgt daher: Hat die Größe $\lambda - \pi$ einen derartigen Wert, dass $\cos(\lambda - \pi) > \sqrt{\frac{c}{5}}$ ist, so vollführt das Periastron eine schwingende Bewegung um die Richtung nach m_3 ; ist dagegen $\cos(\lambda - \pi) < \sqrt{\frac{c}{5}}$, so erfolgt die Schwingung um die darauf senkrechte Richtung.

Es muss noch darauf hingewiesen werden, dass gleichzeitig mit

$$\frac{d(\lambda - \pi)}{dt} = 0$$

immer auch $e = 1$ werden muss, so dass die Bahn für diesen Augenblick in eine Gerade übergeht. Die Quadratwurzel ändert nun das Vorzeichen und die Excentricität ist dann im zweiten Quadranten zu nehmen.

Für 70 Ophiuchi ergibt sich aus dem später folgenden Zahlenmateriale:

Für

$$l_0 = 1807.93 \text{ ist } \lambda - \pi = 74^\circ 692$$

$$\varphi = 29^\circ 372$$

$$\log e = \log \sin \varphi = 9.6909$$

findet man

$$c = 0.8661 < 1$$

$$\frac{c}{5} = 0.1738$$

und $\log \sqrt{\frac{c}{5}} = 9.6200$, während $\log \cos(\lambda - \pi) = 9.4216$ ist.

Es ist also

$$\cos(\lambda - \pi) < \sqrt{\frac{c}{5}}$$

und wir haben den zweiten Fall vor uns:

$$k^2 = \frac{4e}{1-c} = 0.8414,$$

$$q' = \frac{km_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \cdot a^3 \sqrt{\frac{5}{5-c}} = 0.0008714.$$

Die Schwingungsdauer ergibt sich aus der Periode der sinam.

Wenn

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = 2.3633$$

ist, so finden wir für die Periode eine Dauer von

$$4K = 10850 \text{ Jahre.}$$

Die größte Elongation dieser Schwingung, welche für $\cos(\lambda - \pi) = \sqrt{\frac{c}{5}}$, d. i. für $\lambda - \pi = 65^\circ 36'$ eintritt, während jetzt $\lambda - \pi = 74^\circ 69'$ ist, findet statt für

$$t - t_0 = \frac{1}{q'} \int_{65^\circ 36'}^{74^\circ 69'} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = 370 \text{ Jahre.}$$

Kommt der Masse m_3 eine Bewegung um den Schwerpunkt von m_1 und m_2 in der Richtung der Zählung der Positionswinkel zu, so kann der Eintritt der größten Elongation sich verzögern, eventuell ganz unterbleiben; ist jedoch m_3 rückläufig wie m_2 , so verfrüht sich dieser Moment. Es wäre dann schon im nächsten Apastron ein bedeutendes Anwachsen der Distanzen zu erwarten.

Es erübrigt noch die Integration der Differentialgleichung für t_0 . Wenn wir bedenken, dass nur die Elemente a und e von α abhängig sind, so geht die Gleichung

$$\frac{dt_0}{dt} = - \frac{\partial R}{\partial \alpha}$$

über in

$$\frac{dt_0}{dt} = - \frac{\partial R}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial \alpha} - \frac{\partial R}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial \alpha}. \quad (23)$$

Bezeichnen wir die mittlere Anomalie zur Zeit t_0 mit M_0 und die mittlere Bewegung mit μ ,

$$\mu = \sqrt{\frac{k^2(m_1 + m_2)}{a^3}},$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{dM_0}{dt} &= \mu \frac{dt_0}{dt} = \mu \frac{\partial R}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial \alpha} + \mu \frac{\partial R}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial \alpha} \\ &= - \frac{2km_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} c + \frac{km_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} [c - 5 \cos^2(\lambda - \pi)], \end{aligned} \quad (24)$$

wo c die frühere Bedeutung hat:

$$c = (1 + 4e^2) \cos^2(\lambda - \pi) + (1 - e^2) \sin^2(\lambda - \pi).$$

Schließlich

$$\frac{dM_0}{dt} = - \frac{km_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} c - \frac{5km_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cos^2(\lambda - \pi)$$

und M_0 (für eine beliebige Zeit t) $= M_0$ (für die Zeit t_0)

$$= - \frac{km_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} c(t - t_0) - \frac{5km_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \int_{t_0}^t \cos^2(\lambda - \pi) dt. \quad (25)$$

Damit ist die Integration der Differentialgleichungen 7 durchgeführt.

Für kleinere Zeiträume ist es praktischer, statt mit den complicierten Integralen nur mit den Differentialen zu rechnen. Wir gehen zu diesem Zwecke auf die Gleichungen 15 und 24 zurück.

Nach 16 ist, wenn wir den Cosinus des doppelten Winkels einführen:

$$S = c = \frac{2+3e^2}{2} + \frac{5e^2}{2} \cos 2(\lambda - \pi)$$

und

$$\frac{\partial S}{\partial c} = c[3+5 \cos 2(\lambda - \pi)]$$

$$\frac{\partial S}{\partial \pi} = 5e^2 \sin 2(\lambda - \pi).$$

Führen wir diese Relationen in 15 und 24 ein, so stellen sich die säcularen Änderungen der Elemente während der Zeit $t-t_0$ in folgender Form dar:

$$\Delta a = 0$$

$$\Delta e = -\frac{5}{2} \frac{km_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}} \cdot a^3 e \sqrt{1-e^2} \sin 2(\lambda - \pi) \cdot (t - t_0)$$

$$\Delta \pi = \frac{km_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}} \cdot a^3 \sqrt{1-e^2} \left[\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \cos 2(\lambda - \pi) \right] (t - t_0)$$

$$\Delta M_0 = \frac{km_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}} \cdot a^3 \left[-\frac{1}{2} (7+3e^2) - \frac{5}{2} (1+e^2) \cos 2(\lambda - \pi) \right] (t - t_0). \quad V)$$

Die periodischen Störungen.

Um die Ausdrücke für die periodischen Störungen zu erhalten, haben wir in R (Gl. 8) für ξ und η jene Glieder ihrer Entwicklungen nach Potenzen von e und Vielfachen der mittleren Anomalie einzuführen welche von der letzteren abhängig sind.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\left(\frac{\xi}{a} A + \frac{\eta}{a} B \right) = F,$$

wo für ξ und η bereits die Reihen gesetzt sein sollen, und

$$\frac{k^2 m_3}{D^3} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = g,$$

so ist jetzt

$$R = ga^2 F. \quad 25)$$

Die zu integrierenden Differentialgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \alpha'} = \frac{\partial R}{\partial t_0} & \frac{d\alpha'}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha} = -\frac{\partial R}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial \alpha} - \frac{\partial R}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial \alpha} \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \beta'} = \frac{\partial R}{\partial \pi} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial \beta'} & \frac{d\beta'}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \beta} = -\frac{\partial R}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial \beta} - \frac{\partial R}{\partial \pi} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad 26)$$

Es ist

$$\frac{dz}{dt} = ga^2 \cdot \frac{\partial F}{\partial t_0}$$

oder

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2ga^4}{k^2 m_1 m_2} \cdot \frac{\partial F}{\partial t_0}$$

und die Störung der großen Achse, wenn wir wieder für kleine Zeitintervalle die Elemente als constant voraussetzen

$$\Delta a = -2 \frac{k^2 m_3}{D^3} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{a^4}{k^2 m_1 m_2} \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial t_0} \cdot dt = \frac{2 m_3 a^4}{D^3 (m_1 + m_2)} \cdot F. \quad (VI)$$

Die Integrationsconstanten vereinigen sich hinlänglich genau mit den Ausgangselementen.

Die Gleichungen für β und β' werden wieder gemeinsam behandelt. Mit Rücksicht auf die Gleichungen 5, 6 und 13 findet sich

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{k^2 m_1 m_2}{2} \left[(1 - e^2) \frac{da}{dt} - 2ca \frac{dc}{dt} \right] = ga^2 \frac{\partial F}{\partial \pi} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \sqrt{2\beta}$$

$$\frac{d\beta'}{dt} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{1}{2\beta}} \cdot \frac{d\pi}{dt} - \frac{\beta'}{2\beta} \cdot \frac{d\beta}{dt} = -ga^2 \cdot \frac{\partial F}{\partial \pi} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \sqrt{\frac{\beta'}{2\beta}} + ga^2 \frac{\partial F}{\partial c} \cdot \frac{2a}{k^4 m_1^2 m_2^2} \cdot \frac{1}{c}$$

Bildet man mit Hilfe der ersten Gleichung den Ausdruck

$$-\frac{\beta'}{2\beta} \cdot \frac{d\beta}{dt},$$

so ist

$$-\frac{\beta'}{2\beta} \cdot \frac{d\beta}{dt} = -ga^2 \frac{\partial F}{\partial \pi} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \sqrt{\frac{\beta'}{2\beta}}$$

Mithin fallen diese beiden Glieder in der zweiten Gleichung fort und es bleibt

$$\frac{1}{\sqrt{2\beta}} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{d\pi}{dt} = ga^2 \frac{\partial F}{\partial c} \cdot \frac{2a}{k^4 m_1^2 m_2^2} \cdot \frac{1}{c}.$$

Wir bestimmen nun $\frac{dc}{dt}$ und $\frac{d\pi}{dt}$, indem wir gleichzeitig a und β nach 5 durch die Elemente ersetzen und finden

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1 - e^2}{2ca} \cdot \frac{da}{dt} - \frac{k^2 m_3}{D^3} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot a^2 \cdot \frac{\partial F}{\partial \pi} \cdot \sqrt{k^2 (m_1 + m_2) a (1 - e^2)} \cdot \frac{1}{k^2 m_1 m_2 c a}$$

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{k^2 m_3}{D^3} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot a^2 \cdot \frac{\partial F}{\partial c} \cdot \frac{1}{k^2 m_1 m_2 a c} \cdot \sqrt{k^2 (m_1 + m_2) a (1 - e^2)}$$

und schließlich nach Durchführung der einfachen Reductionen

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1 - e^2}{2ca} \cdot \frac{da}{dt} - \frac{km_3}{D^3} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{m_1 + m_2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - e^2}{c}} \frac{\partial F}{\partial \pi}$$

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{km_3}{D^3} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{m_1 + m_2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - e^2}{c}} \frac{\partial F}{\partial c}.$$

Daraus erhält man durch Integration unter Anwendung der Gleichung VI:

$$\Delta c = \frac{1-c^2}{c} \cdot \frac{a^3}{D^3} \cdot \frac{m_3}{m_1+m_2} \cdot F - \frac{km_3}{D^3} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{m_1+m_2}} \cdot \sqrt{\frac{1-c^2}{c}} \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial \pi} \cdot dt$$

$$\Delta \pi = \frac{km_3}{D^3} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{m_1+m_2}} \cdot \sqrt{\frac{1-c^2}{c}} \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial c} \cdot dt. \quad \text{VII}$$

Nun ist noch ΔM_0 zu berechnen; die entsprechende Gleichung lautet:

$$\frac{d\alpha'}{dt} = - \frac{\partial R}{\partial \alpha} = - \frac{\partial R}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial \alpha} - \frac{\partial R}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial \alpha},$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass a in R sowohl explicit, als implicit in der mittleren Bewegung μ enthalten ist.

Daher:

$$\begin{aligned} \frac{dM_0}{dt} &= -\mu \frac{dt_0}{dt} = \mu \frac{\partial R}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial \alpha} + \mu \frac{\partial R}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial \alpha} \\ &= \mu \cdot 2gaF \cdot \frac{\partial a}{\partial \alpha} + \mu ga^2 \cdot \frac{\partial F}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial \alpha} + \mu \frac{\partial R}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial \alpha} \\ &= \mu \cdot 2gaF \cdot \frac{\partial a}{\partial \alpha} + \mu ga^2 \cdot \frac{\partial F}{\partial M} \cdot \frac{\partial a}{\partial \alpha} \cdot (t-t_0) + \mu \cdot \frac{\partial R}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial \alpha}, \end{aligned}$$

da

und

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = \frac{\partial F}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial \mu} = \frac{\partial F}{\partial M} (t-t_0)$$

ist.

Mit Hilfe von

$$\alpha = \sqrt{\frac{k^2(m_1+m_2)}{a^3}}$$

folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dM_0}{dt} &= -2 \frac{k^2 m_3}{D^3} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \sqrt{\frac{k^2(m_1+m_2)}{a^3}} \cdot a \cdot F \cdot \frac{2a^2}{k^2 m_1 m_2} \\ &\quad + \frac{k^2 m_3}{D^3} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \cdot \sqrt{\frac{k^2(m_1+m_2)}{a^3}} \cdot a^2 \frac{\partial F}{\partial M} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{\frac{k^2(m_1+m_2)}{a^3}} \cdot \frac{2a^2}{k^2 m_1 m_2} (t-t_0) \\ &\quad - \frac{k^2 m_3}{D^3} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \cdot \sqrt{\frac{k^2(m_1+m_2)}{a^3}} \cdot \frac{\partial F}{\partial c} \cdot \frac{1}{2c} \cdot \frac{4}{k^4 m_1^2 m_2^2} \cdot \frac{k^2 m_1 m_2}{2} a(1-c^2), \end{aligned}$$

oder nach einfacher Reduction:

$$\frac{dM_0}{dt} = - \frac{4km_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}} \cdot a^2 \cdot F + \frac{3k^2 m_3}{D^3} \frac{\partial F}{\partial M} (t-t_0) - \frac{km_3}{D^3} \frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}} \cdot a^2 \frac{1-c^2}{c} \cdot \frac{\partial F}{\partial c}$$

und

$$\Delta M_0 = - \frac{4km_3}{D^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}} \cdot a^2 \int_{t_0}^t F dt + \frac{3k^2 m_3}{D^3} \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial M} (t-t_0) dt - \frac{km_3}{D^3} \frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}} \cdot a^2 \frac{1-c^2}{c} \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial c} \cdot dt. \quad \text{VIII}$$

Es erübrigt nun nur noch die Größen

$$F = \int F dt = \int \frac{\partial F}{\partial M} (t - t_0) dt = \int \frac{\partial F}{\partial e} dt = \int \frac{\partial F}{\partial \pi} dt$$

zu berechnen: ξ und η lassen sich in folgender Form schreiben:

$$\frac{\xi}{a} = c_0 + 2c_1 \cos M + 2c_2 \cos 2M + \dots$$

$$\frac{\eta}{a} = 2s_1 \sin M + 2s_2 \sin 2M + \dots$$

Die Coefficienten $c_1, c_2, \dots, s_1, s_2, \dots$ sind dann durch Bessel'sche Functionen darzustellen, welche von der Excentricität und ihren Vielfachen abhängen. Es ist

$$c_i = \frac{1}{i e} I'_i - \frac{1}{i} I_{i+1} = \frac{1}{i e} [P_{ic} - e I_{ic}^{i+1}]$$

$$s_i = \frac{\sqrt{1-e^2}}{i e} I'_i. \quad (27)$$

(Bessel: Untersuchung desjenigen Theiles der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht.)

Es wurde diese Form der Darstellung gewählt, weil sie F in einer Form liefert, welche die Integration nach der Zeit bedeutend vereinfacht.

Bildet man die Größen

$$\xi^2, \xi \eta \text{ und } \eta^2$$

und setzt die gefundenen Ausdrücke in

$$F = \frac{\xi^2}{a^2} \cos^2 (\lambda - \pi) + 2 \frac{\xi \eta}{a^2} \cos (\lambda - \pi) \sin (\lambda - \pi) + \frac{\eta^2}{a^2} \sin^2 (\lambda - \pi) \quad (28)$$

ein, so ergibt sich F in der Form:

$$F = a_0 + a_1 \cos M + a_2 \cos 2M + \dots$$

$$+ [b_0 + b_{11} \cos M + b_{12} \cos 2M + \dots] \cos 2(\lambda - \pi)$$

$$+ [b_{21} \sin M + b_{22} \sin 2M + \dots] \sin 2(\lambda - \pi).$$

a_0 und b_0 brauchen nicht weiter berücksichtigt zu werden, da sie den säcularen Theil darstellen, der für sich betrachtet wurde.

Bei den nun auszuführenden Integrationen nach der Zeit tritt in jedem Gliede der Factor $\frac{1}{p}$ auf, welchen wir gleich voraussetzen können.

Es findet sich

$$\int F dt = \frac{1}{p} \left[a_1 \sin M + \frac{1}{2} a_2 \sin 2M + \frac{1}{3} a_3 \sin 3M + \dots \right.$$

$$+ (b_{11} \sin M + \frac{1}{2} b_{12} \sin 2M + \frac{1}{3} b_{13} \sin 3M + \dots) \cos 2(\lambda - \pi)$$

$$\left. - (b_{21} \cos M + \frac{1}{2} b_{22} \cos 2M + \frac{1}{3} b_{23} \cos 3M + \dots) \sin 2(\lambda - \pi) \right] = \frac{1}{p} F_1. \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial M} &= a_1 \sin M - 2a_2 \sin 2M - 3a_3 \sin 3M - \dots \\
&= (b_{11} \sin M + 2b_{12} \sin 2M + 3b_{13} \sin 3M + \dots) \cos 2(\lambda - \pi) \\
&\quad + (b_{21} \cos M + 2b_{22} \cos 2M + 3b_{23} \cos 3M + \dots) \sin 2(\lambda - \pi).
\end{aligned} \tag{29}$$

Die Integration

$$\int \frac{\partial F}{\partial M} (t - t_0) dt$$

geschieht nach der Formel:

$$\begin{aligned}
\int \sin ax \cdot x dx &= -\frac{x}{a} \cos ax + \frac{1}{a^2} \sin ax \\
\int \cos ax \cdot x dx &= +\frac{x}{a} \sin ax + \frac{1}{a^2} \cos ax.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial F}{\partial M} (t - t_0) dt &= (t - t_0) \cdot \frac{1}{p} [a_1 \cos M + a_2 \cos 2M + a_3 \cos 3M + \dots \\
&\quad + (b_{11} \cos M + b_{12} \cos 2M + b_{13} \cos 3M + \dots) \cos 2(\lambda - \pi) \\
&\quad + (b_{21} \sin M + b_{22} \sin 2M + b_{23} \sin 3M + \dots) \sin 2(\lambda - \pi)] \\
&\quad + \frac{1}{p^2} \left[-a_1 \sin M - \frac{a_2}{2} \sin 2M - \frac{a_3}{3} \sin 3M - \dots \right. \\
&\quad - (b_{11} \sin M + \frac{1}{2} b_{12} \sin 2M + \frac{1}{3} b_{13} \sin 3M + \dots) \cos 2(\lambda - \pi) \\
&\quad \left. + (b_{21} \cos M + \frac{1}{2} b_{22} \cos 2M + \frac{1}{3} b_{23} \cos 3M + \dots) \sin 2(\lambda - \pi) \right].
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} E_2 &= \frac{1}{p} F(t - t_0) - \frac{1}{p^2} F_1. \\
\int \frac{\partial F}{\partial \pi} dt &= \frac{2}{p} \left[\left(b_{11} \sin M + \frac{1}{2} b_{12} \sin 2M + \frac{1}{3} b_{13} \cos 3M + \dots \right) \sin 2(\lambda - \pi) \right. \\
&\quad \left. + \left(b_{21} \cos M + \frac{1}{2} b_{22} \cos 2M + \frac{1}{3} b_{23} \sin 3M + \dots \right) \cos 2(\lambda - \pi) \right] = \frac{1}{p} F_1.
\end{aligned} \tag{31}$$

Schließlich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial e} &= \frac{\partial a_1}{\partial e} \cos M + \frac{\partial a_2}{\partial e} \cos 2M + \frac{\partial a_3}{\partial e} \cos 3M + \dots \\
&\quad + \left(\frac{\partial b_{11}}{\partial e} \cos M + \frac{\partial b_{12}}{\partial e} \cos 2M + \frac{\partial b_{13}}{\partial e} \cos 3M + \dots \right) \cos 2(\lambda - \pi) \\
&\quad + \left(\frac{\partial b_{21}}{\partial e} \sin M + \frac{\partial b_{22}}{\partial e} \sin 2M + \frac{\partial b_{23}}{\partial e} \sin 3M + \dots \right) \sin 2(\lambda - \pi).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial F}{\partial e} dt &= \frac{1}{p} \left[\frac{\partial a_1}{\partial e} \sin M + \frac{1}{2} \frac{\partial a_2}{\partial e} \sin 2M + \frac{1}{3} \frac{\partial a_3}{\partial e} \sin 3M + \dots \right. \\
&\quad + \left(\frac{\partial b_{11}}{\partial e} \sin M + \frac{1}{2} \frac{\partial b_{12}}{\partial e} \sin 2M + \frac{1}{3} \frac{\partial b_{13}}{\partial e} \sin 3M + \dots \right) \cos 2(\lambda - \pi) \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial b_{21}}{\partial e} \cos M + \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial e} \cos 2M + \frac{1}{3} \frac{\partial b_{23}}{\partial e} \sin 3M + \dots \right) \sin 2(\lambda - \pi) \right] = \frac{1}{p} F_3.
\end{aligned} \tag{32}$$

Die Coefficienten von $\frac{\partial F}{\partial e}$ verlangen die Kenntnis der Ausdrücke für $\frac{\partial \xi}{\partial e}$ und $\frac{\partial \eta}{\partial e}$

$$\frac{\partial \xi}{\partial e} = \frac{\partial c_0}{\partial e} + \frac{\partial c_1}{\partial e} \cos M + \frac{\partial c_2}{\partial e} \cos 2M + \dots$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial e} = \frac{\partial s_1}{\partial e} \sin M + \frac{\partial s_2}{\partial e} \sin 2M + \dots$$

Die Coefficienten dieser Reihen werden berechnet mit den Formeln

$$\frac{\partial s}{\partial e} = -\frac{1}{e(1-e^2)} s_i + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial I'_{ic}}{\partial (ie)}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial e} = \frac{e}{\sqrt{(1-e^2)^3}} s_i + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial e} - \frac{\partial I'_{ic}}{\partial (ie)^{i+1}}$$

und

$$\frac{\partial I'_{ei}}{\partial (ei)} = \frac{1}{e} I'_{ei} - I'_{ei+1}$$

Sind auf diese Weise $\frac{\partial \xi}{\partial e}$ und $\frac{\partial \eta}{\partial e}$ bestimmt, so ist weiter

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial e} &= \frac{\partial}{\partial e} [\xi \cos (\lambda - \pi) + \eta \sin (\lambda - \pi)]^2 \\ &= 2[\xi \cos (\lambda - \pi) + \eta \sin (\lambda - \pi)] \left[\frac{\partial \xi}{\partial e} \cos (\lambda - \pi) + \frac{\partial \eta}{\partial e} \sin (\lambda - \pi) \right] \\ &= 2 \left[\xi \frac{\partial \xi}{\partial e} \cos^2 (\lambda - \pi) + \eta \frac{\partial \eta}{\partial e} \sin^2 (\lambda - \pi) + \left(\xi \frac{\partial \eta}{\partial e} + \eta \frac{\partial \xi}{\partial e} \right) \sin (\lambda - \pi) \cos (\lambda - \pi) \right] \\ &= \left[\xi \frac{\partial \xi}{\partial e} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial e} \right] + \left[\xi \frac{\partial \xi}{\partial e} - \eta \frac{\partial \eta}{\partial e} \right] \cos 2(\lambda - \pi) + \left[\xi \frac{\partial \eta}{\partial e} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial e} \right] \sin 2(\lambda - \pi), \end{aligned} \quad (33)$$

wodurch $\frac{\partial F}{\partial e}$ auf die verlangte Form gebracht ist.

Nun haben wir noch die Größen F_1, F_3 und F_4 in die Ausdrücke für die Störungen einzuführen, wobei wir gleichzeitig μ durch $\sqrt{k^2(m_1 + m_2)} \frac{1}{a^3}$ ersetzen.

Wir kommen dann zu den Ausdrücken:

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{2m_3 \cdot a^4}{D^3(m_1 + m_2)} \cdot F \\ \Delta e &= \frac{m_3}{D^3} \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1-e^2}{e} \cdot a^3 F - \frac{m_3}{D^3} \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \cdot a^3 F_1 \\ \Delta \pi &= \frac{m_3}{D^3} \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \cdot a^3 F_3 \\ \Delta M_0 &= -\gamma \frac{m_3}{D^3} \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} a^3 F_1 - \frac{m_3}{D^3} \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{1-e^2}{e} \cdot a^3 F_3 + 3k \frac{m_3}{D^3} \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} a^{\frac{3}{2}} F(t-t_0). \end{aligned} \quad (IX)$$

Fügen wir diese Ausdrücke zu denen hinzu, welche wir für die säcularen Störungen erhalten haben, und ersetzen überdies die Größe Δe durch das in der Rechnung bequemere $\Delta \varphi$ nach der Relation

$$de = \cos \varphi \, d\varphi$$

$$d\varphi = \frac{de}{\cos \varphi}$$

so erhalten wir schließlich die vollständigen Ausdrücke für die Störungen:

$$\begin{aligned} \Delta a &= 2 \frac{m_3}{D^3} \cdot \frac{1}{m_1+m_2} a^4 F \\ \Delta \varphi &= -\frac{5}{2} \frac{k m_3}{D^3} \frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}} a^3 \cdot e \sin 2 (\lambda - \pi) (t - t_0) \\ &\quad + \frac{m_3}{D^3} \cdot \frac{1}{m_1+m_2} a^3 \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \cdot F - \frac{m_3}{D^3} \cdot \frac{1}{m_1+m_2} a^3 \cdot \frac{1}{e} \cdot F_1 \\ \Delta \pi &= \frac{k m_3}{D^3} \frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}} a^3 \sqrt{1-e^2} \left[\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \cos 2 (\lambda - \pi) \right] (t - t_0) \\ &\quad + \frac{m_3}{D^3} \cdot \frac{1}{m_1+m_2} a^3 \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \cdot F_3 \\ \Delta M_0 &= \frac{k m_3}{D^3} \frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}} a^3 \left[-\frac{1}{2} (7+3e^2) - \frac{5}{2} (1+e^2) \cos 2 (\lambda - \pi) \right] (t - t_0) + \frac{3 k m_3}{D^3} \frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}} a^3 F (t - t_0) \\ &\quad - 7 \frac{m_3}{D^3} \cdot \frac{1}{m_1+m_2} a F_1 - \frac{m_3}{D^3} \frac{1}{m_1+m_2} a^3 \frac{1-e^2}{e} F_3. \end{aligned} \quad \text{N)}$$

Auf Grund dieser Formeln soll nun eine Bahnbestimmung des Systems 70 Ophiuchi versucht werden.

Epoche	Beob. Positions- Winkel	Präcession	Positions- winkel für 1850·0	Zahl der Abende	Distanz	Zahl der Abende
Searle.						
Astron. Journal vol. XIII.						
1892·41	321°5	0·23	321°7·3	3	2°51	3
Washington, cathol. univers., Doppelbildmikrometer.						
Maw.						
Astron. Journal vol. XVI; The observatory XIII—XIX.						
1892·49	321°7	0·23	321°9·3	1	2°23	1
93·47	313·8	0·24	314·04	3	2°22	3
94·54	307·4	0·25	307·05	3	2°20	3
95·58	296·9	0·20	297·10	4	2°20	4
6inch Refractor v. Cooke & Sons. Privatsternwarte London.						
Comstock.						
Publ. of the Washburn Observ. of the univers. of Wisconsin vol. X, part 1.						
1892·57	321°28	0·24	321°52	4	2°195	4
93·62	312·60	0·24	312·90	5	2°344	5
94·75	302·48	0·25	302·73	4	2°303	4
95·61	290·50	0·20	290·70	3	2°190	3
96·03	287·72	0·20	287·98	4	2°223	4
40cm Clark-Refractor.						
Gledhill.						
Astr. Nachr. Bd. 135, p. 103.						
1893·45	311°8	0·24	312°04	7	2°25	4
Sternwarte zu Bermerside, Halifax, Refractor von Cooke 9 ¹ / ₂ inch.						
Lewis.						
Monthly Not. Bd. 1894, 1896, Astron. Journ. vol. XVII.						
1893·69	309°9	0·24	309°14	1	2°34	1
95·09	295·9	0·20	290·10	1	2°05	1
96·05	290·08	0·20	290·34	5	2°080	5
Greenwich, 28inch Refractor.						
Wilson.						
Astron. Journal Bd. XVI.						
1893·69	309°2	0·24	309°44	1	2°22	1

Goodsell Obs. Northfield Minn.

Epoche	Beob. Positions- Winkel	Präcession	Positions- winkel für 1850·0	Zahl der Abende	Distanz	Zahl der Abende
See.						
Astron. Journal vol XV, XVI, XVII.						
1895·32	298°03	0·25	298°88	3	2"223	3
95·70	290·0	0·20	290·20	5	2·04	5
95·72	295·85	0·20	290·11	4	2·028	4
90·01	287·94	0·20	288·20	8	2·133	8
97·41	283·15	0·20	283·41	0	2·022	0
1895: 40 cm Refractor des Washburn Observatory.						
1896 und 1897: Lowell Observatory, 24 inch.						
Hough.						
Astron. Journal vol. XVI. Astron. Nachr. Bd. 149.						
1895·62	295°02	0·20	295°28	5	2"238	5
Dearborn. Observatory. 181½ zöll. Refractor.						
Moulton						
Astron. Journal vol. XV.						
1895·72	290°2	0·20	290·40	3	2"21	1
40 cm Refractor des Washburn Observatory.						
Hussey.						
Astr. Journ. vol. XVII, XVIII.						
1890·39	292°27	0·20	292°53	0	2"190	0
97·07	380·30	0·27	280·03	8	2·050	8
Lick Observatory, 36 inch und 12 inch Refractor.						
Aitken.						
Astr. Nachr. Bd. 142, 145, 150. Astron. Journal vol. XVIII.						
1896·51	291°27	0·20	291°53	3	2·397	3
90·80	289·43	0·20	289·69	4	2·052	4
97·40	283·52	0·20	283·78	3	2·057	3
97·83	270·07	0·27	270·94	3	1·030	3
98·44	273·22	0·27	273·49	3	1·893	3
Lick Observatory, 36 und 12 inch Refractor.						

Epoche	Beob. Positions- Winkel	Präcession	Positions- winkel für 1850·0	Zahl der Abende	Distanz	Zahl der Abende
Niblett.						
Astron. Journal vol. XVII.						
1890·62	290°9	0·20	291°16	1	2"18	1
Greenwich. 28 inch Refractor.						
Morgan.						
Astron. Journal vol. XIX.						
1896·68	287°40	0·20	287°60	3	2"203	3
Leander Mc. Cormick. Observ. 26 inch Refractor.						
Leavenworth.						
Astron. Journal vol. XVII.						
1896·74	288°56	0·20	288°52	6	2"188	6
Observ. of the univ. of Minnesota. 10 1/2 inch Refractor.						
Doolittle.						
Astron. Journal vol. XVIII.						
1897·54	277°41	0·27	277°68	13	2"055	13
Flower Observ. 18 inch Equatoreal.						
Solà.						
Astron. Nachr. Bd. 148.						
1898·47	270°32	0·27	270°59	2	2"230	2
Observ. Catalá. Equatoreal double de 22 cm.						

Als Näherungswerte für die Elemente wurde dasselbe System gewählt, welches Schur benutzt hat (Astr. Nachr., Bd. 135, S. 65) und welches lautet:

Durchgangszeit durch das Periastron	$t_0 = 1807^{\circ} 93.$
Positionswinkel der Knotenlinie	$\Omega = 122^{\circ} 35'5.$
Neigung der Bahn gegen die Himmelskugel	$i = 61^{\circ} 14'4.$
Winkel zwischen der Apsiden- und der Knotenlinie	$\pi = 166^{\circ} 21'7.$
Excentricitätswinkel	$\varphi = 28^{\circ} 41'0.$
Excentricität	$e = 0.47996.$
Mittlere jährliche Bewegung	$\mu = -4^{\circ} 0744.$
Umlaufszeit in Jahren	$T = 88.356$ Jahre
Halbe große Achse	$a = 46870.$

Die Annahme dieses Systems bietet den Vortheil, dass die von Schur aufgestellten Bedingungen unmittelbar benützt werden konnten, was eine erhebliche Rechenersparnis bedeutet. Von den Schur'schen Normalorten wurden die mit 1 bis 20 bezeichneten, welche die Beobachtungen bis 1889 enthalten, direct herüber genommen (abgesehen von den Orten 7 und 9; siehe a. a. O. S. 69). Die dem Orte 21 zugrunde liegenden Beobachtungen wurden durch andere ergänzt, und die sämmtlichen neu hinzugekommenen Jahresmittel mit dem obigen Elementensystem verglichen. Das Resultat dieses Vergleiches findet sich in der folgenden Tabelle:

Nr.	Epoche	Beob.	Rechn.	B.-R.	Beob.	Rechn.	B.-R.	Gew.	Beobachter
324	1890.42	338.70	335.04	+ 3.72	2.400	2.107	+ 0.233	1	Glasenapp.
325	50	330.03	333.92	+ 2.11	2.134	2.182	- 0.048	2	Hall.
326	01	330.75	333.52	+ 3.23	2.01	2.187	- 0.177	1	Maw.
327	01	330.87	333.52	+ 3.35	2.10	2.187	- 0.027	1	Wellmann.
328	06	334.36	333.13	+ 1.23	2.2	2.193	+ 0.027	1	Tarrant.
329	70	334.80	332.82	+ 1.98	2.023	2.198	- 0.175	2	Schur.
330	71	335.81	332.74	+ 3.07	2.102	2.199	- 0.007	4	Bigourdan.
331	1891.50	328.75	320.81	+ 1.94	2.071	2.287	+ 0.384	3	See.
332	53	328.05	320.59	+ 1.46	2.20	2.291	- 0.031	1	Tarrant.
333	54	328.58	320.52	+ 2.00	2.11	2.292	- 0.182	1	Maw.
334	50	329.33	320.37	+ 2.96	2.435	2.294	+ 0.141	1	Collins
335	50	327.78	320.37	+ 1.41	2.228	2.294	- 0.066	2	Hall.
336	58	329.10	320.23	+ 2.87	2.105	2.290	- 0.131	2	Schur.
337	59	320.21	320.16	+ 0.05	2.328	2.297	+ 0.031	2	Knorre.
338	04	327.47	325.86	+ 1.67	2.375	2.302	+ 0.073	1	See.
339	07	320.92	325.59	+ 1.33	2.254	2.304	- 0.050	2	Bigourdan.
340	1892.37	322.10	320.70	+ 1.40	—	—	—	1	Burnham.
341	41	321.73	320.49	+ 1.24	2.51	2.377	+ 0.133	1	Searle.
342	41	320.72	320.40	+ 0.24	2.36	2.377	- 0.017	1	Collins.
343	42	319.97	320.42	- 0.55	2.420	2.378	+ 0.048	2	Knorre.
344	49	322.93	319.90	+ 1.97	2.23	2.384	- 0.154	1	Maw.
345	57	321.52	319.43	+ 2.09	2.195	2.391	- 0.196	1	Comstock.
346	01	—	—	—	2.300	2.394	- 0.094	1	Bigourdan.
	02	319.25	319.10	+ 0.15	—	—	—	2	Bigourdan.
347	03	321.41	319.03	+ 2.38	2.30	2.395	- 0.035	1	Tarrant.
348	04	320.99	318.90	+ 2.03	2.237	2.396	- 0.159	2	Schur.
349	08	317.77	318.70	+ 0.93	1.955	2.400	- 0.445	1	Glasenapp.

Nr.	Epoche	Beob.	Rechn.	B.-R.	Beob.	Rechn.	B.-R.	Gew.	Beobachter
350	1893.45	312.04	313.77	— 1.73	2.25	2.450	— 0.200	2, 1	Gledhill.
351	47	314.02	313.03	+ 0.39	2.22	2.451	— 0.231	1	Maw.
352	50	313.74	313.07	+ 0.07	2.310	2.455	— 0.145	1	Collins.
353	58	313.04	312.94	+ 0.70	2.41	2.456	— 0.040	1	Tucker.
354	02	312.90	312.09	+ 0.21	2.344	2.458	— 0.114	2	Comstock.
355	02	313.02	312.09	+ 0.93	2.253	2.458	— 0.205	1	Schur.
356	02	311.52	312.09	— 1.17	—	—	—	1	Knorre.
357	09	309.14	312.20	— 3.12	2.34	2.461	— 0.121	1	Lewis.
358	09	309.44	312.26	— 2.82	2.22	2.461	— 0.241	1	Wilson.
359	70	312.54	312.19	+ 0.35	2.21	2.461	— 0.251	3	Schiaparelli.
360	1894.49	309.51	307.31	+ 2.20	2.550	2.476	+ 0.080	2	Ebell.
361	51	306.40	307.18	— 0.78	2.672	2.470	+ 0.190	2, 1	Glasenapp.
362	51	311.52	307.18	+ 4.34	2.320	2.470	— 0.150	1	Ebell.
363	54	307.05	307.00	+ 0.05	2.29	2.470	— 0.160	1	Maw.
364	59	—	—	—	2.383	2.470	— 0.093	3	Knorre.
	00	304.90	300.03	— 1.73	—	—	—	3	Knorre.
365	00	300.00	300.03	— 0.03	2.203	2.476	— 0.213	1	Schur.
366	75	302.73	305.70	— 2.97	2.303	2.474	— 0.171	1	Comstock.
367	77	303.45	305.58	— 2.13	2.21	2.474	— 0.204	2	Schiaparelli.
368	78	—	—	—	2.323	2.474	— 0.151	2	Bigourdan.
369	78	301.53	305.52	— 3.99	2.450	2.474	— 0.024	2	Callandreaux.
	79	302.30	305.46	3.16	—	—	—	2	Bigourdan.
370	1895.32	298.88	302.17	— 3.29	2.223	2.457	— 0.234	1	See.
371	50	298.46	301.03	— 2.57	2.535	2.448	+ 0.087	1	Glasenapp.
372	51	301.88	300.97	+ 0.91	2.308	2.447	— 0.139	2	Schur.
373	58	297.10	300.53	— 3.37	2.320	2.443	— 0.183	1	Maw.
374	58	296.06	300.53	— 4.47	2.54	2.443	+ 0.097	1	Collins.
375	01	296.76	300.34	— 3.58	2.190	2.441	— 0.251	1	Comstock.
376	02	295.28	300.28	— 5.00	2.238	2.440	— 0.202	2	Hough.
377	09	296.16	299.83	— 3.67	2.65	2.430	+ 0.214	1	Lewis.
378	70	296.26	299.77	— 3.51	2.01	2.434	— 0.424	2	See.
379	72	296.11	299.64	— 3.53	2.028	2.434	— 0.400	1	See.
380	72	296.46	299.64	3.18	2.21	2.434	— 0.224	1	Moulton.
381	1896.39	292.53	295.27	— 2.74	2.190	2.375	— 0.185	2	Hussey.
382	51	291.53	294.41	— 2.93	2.397	2.361	+ 0.036	1	Aitken.
383	58	289.50	293.98	— 4.48	2.180	2.353	— 0.167	2	Pritchett.
384	59	288.34	293.91	— 5.57	2.333	2.352	— 0.019	2	Bowyer.
385	59	290.13	293.91	— 3.78	2.327	2.352	— 0.025	1	Wagner.
386	59	288.33	293.91	— 5.58	2.423	2.352	+ 0.071	1	Soulé.
387	61	288.20	293.78	— 5.58	2.133	2.350	— 0.217	2	See.
388	61	289.76	293.78	— 4.02	2.23	2.350	— 0.120	1	Dyson.
389	62	288.43	293.71	— 5.38	2.130	2.349	— 0.219	1	Cogshall.

Nr.	Epoche	Beob.	Rechn.	B.-R.	Beob.	Rechn.	B.-R.	Gew.	Beobachter
390	1890·02	291·10	293·71	— 2·55	2·18	2·340	— 0·169	1	Niblett.
391	03	287·98	293·64	— 5·66	2·223	2·347	— 0·124	1	Comstock.
392	05	290·34	293·50	— 3·16	2·080	2·345	— 0·265	2	Lewis.
393	00	287·40	293·43	— 6·03	2·121	2·345	— 0·224	2	Schur.
394	08	287·00	293·30	— 5·64	2·263	2·341	— 0·078	1	Morgan.
395	74	288·82	292·88	— 4·06	2·188	2·334	— 0·146	2	Leavenworth.
396	80	289·69	292·46	— 2·77	2·052	2·320	— 0·274	1	Aitken.
397	1897·40	283·48	288·12	— 4·64	2·095	2·242	— 0·147	1	Cogshall.
398	41	283·41	288·05	— 4·64	2·022	2·240	— 0·218	2	See.
399	46	283·76	287·67	— 3·91	2·057	2·232	— 0·175	1	Aitken.
400	54	277·68	287·06	— 9·38	2·055	2·220	— 0·165	3	Doolittle.
401	55	281·30	286·98	— 5·68	2·035	2·218	— 0·183	1	Glaserapp.
402	58	283·99	286·75	— 2·76	2·009	2·214	— 0·145	3	Schur.
403	59	270·85	286·07	9·82	2·025	2·212	— 0·187	1	Pritchett.
404	67	280·03	286·05	— 5·42	2·050	2·199	— 0·149	2	Hussey.
405	83	276·94	284·79	— 7·85	1·930	2·172	— 0·242	1	Aitken.
406	1898·44	273·49	279·65	— 6·16	1·893	2·004	— 0·171	2	Aitken.
407	47	270·59	279·38	— 8·79	2·230	2·059	+ 0·171	1	Solá.
408	51	271·28	279·03	— 7·75	2·120	2·051	+ 0·069	1	Glaserapp.
409	56	272·41	278·57	— 6·16	1·916	2·042	— 0·126	2	Schur.
410	1899·57	263·45	268·48	— 5·03	1·775	1·852	— 0·077	2	Schur.

Aus den hier gegebenen Unterschieden $B-R$ wurden 7 neue Normalorte mit den Nummern 21 bis 27 gebildet.

Die Gewichtsbestimmung erfolgte ebenfalls genau wie bei Schur nach dem Schema:

Mittel für	1— 4 Abende	Gewicht	1
»	5— 9 »	»	2
»	» 10— »	»	3 u. s. w.

Auf die Weise wurde für jedes Jahr ein Mittel gebildet und diese, wenn nöthig, nach demselben Gesetze weiter vereinigt.

Das System der Normalorte lautet nun:

Epoche	Zeitraum	Δp	Gew.	Δp	Gew.
1. 1780·75	—	—12°91	1	—	—
2. 1802·26	—	+ 2·36	1	—	—
3. 1804·42	—	+ 0·57	1	—	—
4. 1821·88	1820—23	+ 1·89	1	+0·66	1
5. 1827·25	1825—29	+ 2·70	2	+0·10	2
6. 1832·47	1830—34	+ 0·38	2	+0·21	2
7. 1837·44	1835—39	— 0·10	2	+0·16	2
8. 1842·28	1840—44	— 0·26	3	—0·10	2
9. 1847·27	1845—49	— 0·30	2	—0·14	2

Epoche	Zeitraum	Δp	Gew.	Δq	Gew.
10. 1852·77	1850—54	— 0·47	3	—0·23	2
11. 1857·43	1855—59	— 0·54	3	—0·17	2
12. 1862·73	1860—64	— 0·75	2	—0·04	2
13. 1867·42	1865—69	— 0·37	3	—0·04	2
14. 1872·45	1870—74	— 0·61	2	—0·06	2
15. 1877·51	1875—79	+ 0·44	3	+0·04	3
16. 1880·81	1880—81	+ 1·04	1	+0·10	
17. 1883·11	1882—83	+ 1·90	2	+0·16	1
18. 1885·00	1884—85	+ 3·38	2	+0·21	1
19. 1886·96	1886—87	+ 2·80	1	+0·06	1
20. 1889·16	1888—89	+ 3·05	2	—0·07	1
21. 1891·57	1890—91	+ 2·67	2	+0·31	2
22. 1892·53 (54)	1892	+ 0·90	1	—0·09	1
23. 1893·61 (62)	1893	— 0·46	1	—0·18	1
24. 1894·64 (65)	1894	— 1·11	1	—0·10	1
25. 1895·60	1895	— 3·06	1	—0·17	1
26. 1896·61	1896	— 4·42	2	—0·15	2
27. 1898·11	1897—99	— 6·07	2	—0·13	2

Die bei den Orten 22 bis 24 in Klammern beigeetzten Zahlen bedeuten, dass der Normalort aus den Distanzen für eine um 0·01 Jahr spätere Zeit gilt, worauf bei der Rechnung Rücksicht genommen wurde.

Wegen der raschen Änderung der Positionswinkel konnten von 1892 ab nur immer die Beobachtungen eines Jahres zu einem Normalorte vereinigt werden. Eine Ausnahme macht nur der letzte, was in der geringen Zahl der zur Verfügung stehenden Beobachtungen begründet ist: aus dem Jahre 1898 stammen nämlich nur 4, aus 1899 nur 1 Jahresmittel.

Die für diese Normalorte abzuleitenden Bedingungsgleichungen werden nun außer den Correctionen für die Elemente noch die Größen $\frac{m_3}{D_3}$ und $\lambda - \pi$ als Unbekannte enthalten, und zwar werden diese nur in den Verbindungen

$$\frac{m_3}{D_3}; \frac{m_3}{D_3} \cos 2(\lambda - \pi) \text{ und } \frac{m_3}{D_3} \sin 2(\lambda - \pi)$$

auftreten. Wir erhalten somit drei Größen, die aber nicht unabhängig voneinander sind. Bestimmen wir also diese drei Größen, die alle sehr klein sein werden, als unabhängige Variable, so wird es als Stütze für unsere Hypothese gelten können, wenn der direct gefundene mit dem aus

$$\frac{m_3}{D_3} \sin 2(\lambda - \pi) \text{ und } \frac{m_3}{D_3} \cos 2(\lambda - \pi) \text{ folgenden Wert von } \frac{m_3}{D_3}$$

wenigstens der Größengröße nach übereinstimmt.

Es soll auch hier wieder das Hauptgewicht auf die Darstellung der Positionswinkel gelegt und die Distanzen nur insoweit berücksichtigt werden, als es unumgänglich nöthig ist. Sind doch gerade bei dem in Rede stehenden Doppelstern systematische Unterschiede in der Distanzmessung constatirt worden, welche bereits jene Grenzen übersteigen, die für eine gute Darstellung erlaubt sind. (Bessel: Über den Doppelstern 70 Ophiuchi, Astr. Nachr., Bd. XV.)

Wir betrachten also vorerst die Bedingungsgleichungen für die Positionswinkel allein.

Vor allem mussten die Coefficientenreihen der Correctionen der Elemente für die neuen Normalorte ergänzt werden. Hierauf wurde an die Berechnung der Störungen gegangen. Der große Wert der Excentricität ($e = 0.5$) hat eine äußerst langsame Convergenz aller auftretenden Reihenentwicklungen zur Folge. Um daher eine ausreichende Genauigkeit zu erhalten, musste bei den Reihen für ξ und η bis zu Gliedern gegangen werden, welche die sechsfache mittlere Anomalie enthalten.

Die zur Bestimmung der Coefficienten in ξ und η und ihrer Differentialquotienten nach e nöthigen Bessels'schen Functionen haben folgende Werte.

$$\begin{aligned} I_c^1 &= 0.23313 & I_{2c}^2 &= 0.10659 & I_{3c}^3 &= 0.05454 & I_{4c}^4 &= 0.02933 & I_{5c}^5 &= 0.01623 & I_{6c}^6 &= 0.00915 \\ I_c^2 &= 0.02825 & I_{2c}^3 &= 0.01741 & I_{3c}^4 &= 0.01009 & I_{4c}^5 &= 0.00579 & I_{5c}^6 &= 0.00334 & I_{6c}^7 &= 0.00193 \\ I_c^3 &= 0.00227 & I_c^4 &= 0.00211 & I_{3c}^5 &= 0.00148 & I_{4c}^6 &= 0.00095 & I_{5c}^7 &= 0.00059 & I_{6c}^8 &= 0.00036. \end{aligned} \quad (34)$$

Damit finden sich folgende Reihen für ξ , η , $\frac{\partial \xi}{\partial e}$ und $\frac{\partial \eta}{\partial e}$, in welchen die Coefficienten logarithmisch angesetzt sind:

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{a} &= 9.85729 + 2[9.66037 \cos M + 0.01005 \cos 2M + 8.53807 \cos 3M + 8.14051 \cos 4M + \\ &\quad + 7.58462 \cos 5M + 7.45637 \cos 6M] \\ \frac{\eta}{a} &\quad + 2[9.62955 \sin M + 8.98865 \sin 2M + 8.52153 \sin 3M + 8.12710 \sin 4M + \\ &\quad + 7.77305 \sin 5M + 7.44560 \sin 6M] \\ \frac{1}{a} \frac{\partial \xi}{\partial e} &= 0.17609 + 2[9.24138 \cos M + 9.15467 \cos 2M + 9.04250 \cos 3M + 8.84073 \cos 4M + \\ &\quad + 8.61972 \cos 5M + 8.39287 \cos 6M] \\ \frac{1}{a} \frac{\partial \eta}{\partial e} &= 2[9.50160 \sin M + 9.04293 \sin 2M + 8.99704 \sin 3M + 8.81184 \sin 4M + \\ &\quad + 8.59824 \sin 5M + 8.37548 \sin 6M]. \end{aligned} \quad (35)$$

Durch Multiplication dieser Reihen sind die Ausdrücke

$$\frac{\xi^2}{a^2}, \quad \frac{\eta^2}{a^2}, \quad \frac{\xi \eta}{a^2},$$

sowie

$$\frac{1}{a^2} \left(\xi \frac{\partial \eta}{\partial e} + \eta \frac{\partial \xi}{\partial e} \right), \quad \frac{1}{a^2} \left(\xi \frac{\partial \xi}{\partial e} - \eta \frac{\partial \eta}{\partial e} \right) \text{ und } \frac{1}{a^2} \left(\xi \frac{\partial \eta}{\partial e} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial e} \right)$$

zu bilden, durch deren Substitution in 28) und 33) sich die Reihen für F und $\frac{\partial F}{\partial e}$ ergeben.

$$\begin{aligned} F &= 0.67275 - 0.46624 \cos M - 0.05334 \cos 2M - 0.01224 \cos 3M - 0.00390 \cos 4M - 0.00196 \cos 5M \\ &\quad - 0.00331 \cos 6M + [0.28793 - 0.64744 \cos M + 0.24700 \cos 2M + 0.12828 \cos 3M + \\ &\quad + 0.06052 \cos 4M + 0.02908 \cos 5M + 0.01425 \cos 6M] \cos 2(\lambda - \pi) \\ &\quad + [-0.61158 \sin M + 0.25064 \sin 2M + 0.12904 \sin 3M + 0.06070 \sin 4M + \\ &\quad + 0.02914 \sin 5M + 0.01434 \sin 6M] \sin 2(\lambda - \pi) \\ &= c + a_0 + a_1 \cos 2(\lambda - \pi) + a_1 \cos 2(\lambda - \pi), \end{aligned} \quad (36)$$

wo a_0 , a_1 , a_2 Abkürzungen für obige Reihen sind und c seine frühere Bedeutung hat. Es stellt den säcularen Theil vor, der selbständig berechnet wird.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v} = & -0.91542 \cos M - 0.20536 \cos 2M - 0.07052 \cos 3M - 0.03104 \cos 4M - 0.02064 \cos 5M - \\ & - 0.03466 \cos 6M \\ + [& -1.05190 \cos M - 0.91428 \cos 2M - 0.12188 \cos 3M + 0.06848 \cos 4M + 0.08936 \cos 5M + \\ & + 0.06982 \cos 6M] \cos 2(\lambda - \pi) \\ + [& -0.81024 \sin M - 0.88232 \sin 2M - 0.11414 \sin 3M + 0.07160 \sin 4M + 0.09044 \sin 5M + \\ & + 0.07176 \sin 6M] \sin 2(\lambda - \pi) \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Integration:

$$\begin{aligned} F_1 = & -0.46624 \sin M - 0.02667 \sin 2M - 0.00408 \sin 3M - 0.00098 \sin 4M - 0.00039 \sin 5M - \\ & - 0.00055 \sin 6M \\ + [& -0.61744 \sin M + 0.12350 \sin 2M + 0.04276 \sin 3M + 0.01513 \sin 4M + 0.00582 \sin 5M + \\ & + 0.00238 \sin 6M] \cos 2(\lambda - \pi) \\ + [& 0.61158 \cos M - 0.12532 \cos 2M - 0.04301 \cos 3M - 0.01518 \cos 4M - 0.00583 \cos 5M - \\ & - 0.00239 \cos 6M] \sin 2(\lambda - \pi) \\ = & b_0 + b_1 \cos 2(\lambda - \pi) + b_2 \sin 2(\lambda - \pi) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} F_2 = & -0.91542 \sin M - 0.10268 \sin 2M - 0.02351 \sin 3M - 0.00726 \sin 4M - 0.00413 \sin 5M - \\ & - 0.00578 \sin 6M \\ + [& -1.05190 \sin M - 0.45714 \sin 2M - 0.04063 \sin 3M + 0.01712 \sin 4M + 0.01787 \sin 5M + \\ & + 0.01164 \sin 6M] \cos 2(\lambda - \pi) \\ + [& 0.81024 \cos M + 0.41116 \cos 2M + 0.03805 \cos 3M - 0.01790 \cos 4M - 0.01809 \cos 5M - \\ & - 0.01196 \cos 6M] \sin 2(\lambda - \pi) \\ = & c_0 + c_1 \cos 2(\lambda - \pi) + c_2 \sin 2(\lambda - \pi). \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} F_1 = 2 [& -0.64744 \sin M + 0.12350 \sin 2M + 0.04276 \sin 3M + 0.01513 \sin 4M + 0.00582 \sin 5M + \\ & + 0.00238 \sin 6M] \sin 2(\lambda - \pi) \\ - 2 [& 0.61158 \cos M - 0.12532 \cos 2M - 0.04301 \cos 3M - 0.01518 \cos 4M - 0.00583 \cos 5M - \\ & - 0.00239 \cos 6M] \cos 2(\lambda - \pi). \\ = & -2b_2 \cos 2(\lambda - \pi) + 2b_1 \sin 2(\lambda - \pi). \end{aligned} \quad (39)$$

Noch mehr Glieder zu entwickeln würde wohl dem Charakter unseres Problems nicht entsprechen. Es erscheint unter allen Umständen die zweite Decimale als vollständig gesichert. Dass die Rechnung in der Folge mehrstellig (vierstellig) geführt wurde, hat den Zweck, Fehleranhäufungen zu vermeiden.

Durch Einsetzen der Werte von M für die einzelnen Normalorte unter Anwendung von $\mu = -4^\circ 07' 44''$ ergeben sich die folgenden Werte von $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1$ und c_2 .

	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	c_0	c_1	c_2
1	+ 0.1938	+ 0.1449	- 0.7500	- 0.4108	- 0.6955	0.1584	- 0.7789	- 0.6588	0.5751
2	- 0.4665	- 0.4050	+ 0.1580	- 0.2078	0.1030	+ 0.4055	0.4706	- 0.7397	+ 1.0815
3	- 0.5105	- 0.2734	+ 0.1490	- 0.1325	- 0.0511	+ 0.4407	0.3075	0.4034	+ 1.1840
4	- 0.2220	- 0.6003	+ 0.3388	+ 0.4141	+ 0.4394	+ 0.4339	+ 0.8520	+ 1.3390	+ 0.2249
5	- 0.0382	- 0.3640	+ 0.6244	+ 0.4040	+ 0.0283	+ 0.2447	+ 0.9190	+ 1.1740	- 0.2933
6	+ 0.1251	- 0.0388	+ 0.7545	+ 0.4470	+ 0.7056	0.0157	+ 0.8488	+ 0.8322	0.5301
7	+ 0.2485	+ 0.3018	+ 0.7179	+ 0.3802	+ 0.0584	- 0.2810	+ 0.7049	+ 0.5123	0.5814

	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	c_0	c_1	c_2
8	+ 0.3451	+ 0.5600	+ 0.5471	+ 0.2773	+ 0.5063	- 0.5015	+ 0.5091	+ 0.2636	0.5195
9	+ 0.4045	+ 0.7439	+ 0.2880	+ 0.1430	+ 0.2687	- 0.6533	+ 0.2504	+ 0.1000	0.4420
10	+ 0.4196	+ 0.8104	0.0430	- 0.0198	- 0.0384	- 0.7047	- 0.0348	- 0.0145	- 0.4193
11	+ 0.4010	+ 0.7307	- 0.3249	- 0.1568	- 0.2966	- 0.6426	0.2808	- 0.1205	- 0.4473
12	+ 0.3313	+ 0.5290	- 0.5809	- 0.2903	- 0.5373	- 0.4695	- 0.5453	- 0.2974	- 0.5336
13	+ 0.2339	+ 0.2598	- 0.7324	- 0.3912	- 0.6711	- 0.2478	- 0.7268	- 0.5519	- 0.5825
14	+ 0.1051	- 0.0807	- 0.7459	0.4526	- 0.7023	+ 0.0219	- 0.8043	- 0.8787	0.5105
15	- 0.0571	- 0.3942	- 0.0027	- 0.4421	- 0.0135	+ 0.2685	- 0.9197	1.1940	- 0.2539
16	- 0.1711	- 0.5490	- 0.4372	- 0.4354	- 0.5018	+ 0.3917	0.8806	- 1.3238	+ 0.0500
17	- 0.2479	- 0.6178	- 0.2843	0.4012	- 0.4058	+ 0.4511	- 0.8311	- 1.3318	+ 0.3178
18	- 0.3082	- 0.6313	- 0.1437	0.3638	- 0.3215	+ 0.4800	0.7072	- 1.2670	+ 0.5478
19	- 0.3678	- 0.5940	- 0.0027	- 0.3166	- 0.2353	+ 0.4899	- 0.6832	- 1.1320	+ 0.7712
20	- 0.4297	- 0.4938	+ 0.1173	0.2542	- 0.1497	+ 0.4801	0.5050	- 0.9124	+ 0.9781
21	- 0.4791	- 0.3699	+ 0.1638	- 0.1891	0.0879	+ 0.4599	- 0.4314	- 0.6708	+ 1.1134
22	- 0.5064	- 0.2872	+ 0.1547	- 0.1414	- 0.0500	+ 0.4435	- 0.3275	- 0.4958	+ 1.1752
23	- 0.5229	0.2319	+ 0.1258	- 0.1018	- 0.0303	+ 0.4326	- 0.2383	- 0.3540	+ 1.2080
24	- 0.5340	- 0.1932	+ 0.0839	- 0.0631	0.0208	+ 0.4240	- 0.1484	- 0.2179	+ 1.2292
25	- 0.5398	- 0.1728	+ 0.0364	- 0.0265	- 0.0083	0.4208	- 0.0023	0.0900	+ 1.2392
26	0.5399	- 0.1718	0.0330	+ 0.0239	+ 0.0075	- 0.4207	+ 0.0504	+ 0.0822	+ 1.2398
27	0.5326	- 0.1980	- 0.0919	+ 0.0690	+ 0.0233	+ 0.4258	+ 0.1638	+ 0.2409	+ 1.2204

Für die weiteren Berechnungen ist die Kenntnis der Größen k und $m_1 + m_2$ notwendig. Da für das System 70 Ophiuchi Parallaxenbestimmungen existieren (Krueger und Schur, Astr. Nachr., Bd. 51, 59, 135), so könnte man sich unter Einführung der Gauß'schen Constante für unser Sonnensystem einen Wert von $m_1 + m_2$ ableiten. Allein, abgesehen von der Unsicherheit, die solchen Parallaxenmessungen anhaftet, ist es jedenfalls besser, von den Verhältnissen in unserem Sonnensystem unabhängig zu bleiben und die Constante k aus dem Sternsystem selbst abzuleiten, indem man die Masseneinheit gleich $m_1 + m_2$ nimmt.

Mit den gegebenen Werten von μ und a findet sich dann, aus

$$\mu = \sqrt{\frac{k^2(m_1 + m_2)}{a^3}} = \sqrt{\frac{k^2}{a^3}}$$

$$\lg k = 9.8584$$

Wir finden weiter:

$$\begin{aligned} \log \frac{5}{2} e k a^{\frac{3}{2}} &= 0.9440 & \log \frac{1 - e^2}{e} a^3 &= 2.2178 \\ \log \frac{3}{2} \sqrt{1 - e^2} k a^{\frac{3}{2}} &= 0.9841 & \log \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} a^3 &= 2.2747 \\ \log \frac{5}{2} \sqrt{1 - e^2} k a^{\frac{3}{2}} &= 1.2060 & \log 3 k a^{\frac{3}{2}} &= 1.3419 \\ \log \frac{1}{2} (7 + e^2) k a^{\frac{3}{2}} &= 1.4498 & \log 7 a^3 &= 2.8578 \\ \log \frac{5}{2} (1 + e^2) k a^{\frac{3}{2}} &= 1.3529 & \log \frac{2a^3}{e} &= 2.6325. \end{aligned}$$

Damit erhalten nun $\Delta\varphi$, $\Delta\pi$ und ΔM die folgenden Werte, wobei wir von nun an die Größen $\frac{m_3}{D^3}$,

$\frac{m_3}{D^3} \cos 2(\lambda - \pi)$ und $\frac{m_3}{D^3} \sin 2(\lambda - \pi)$ mit x , y und z bezeichnen.

1.	$\Delta\varphi = + 36 \cdot 483x$	$- 40 \cdot 692y$	$- 82 \cdot 933z$	$\Delta\pi = + 115 \cdot 43x$	$+ 312 \cdot 77 y$	$- 108 \cdot 275z$
2.	$- 87 \cdot 820$	$+ 123 \cdot 510$	$+ 24 \cdot 089$	$- 33 \cdot 92$	$- 48 \cdot 105$	$+ 203 \cdot 57$
3.	$- 96 \cdot 100$	$+ 137 \cdot 587$	$+ 19 \cdot 245$	$- 24 \cdot 05$	$- 30 \cdot 849$	$+ 222 \cdot 89$
4.	$- 41 \cdot 900$	$+ 73 \cdot 167$	$- 2 \cdot 146$	$+ 25 \cdot 97$	$+ 27 \cdot 960$	$+ 42 \cdot 336$
5.	$- 7 \cdot 192$	$+ 36 \cdot 371$	$+ 17 \cdot 823$	$- 13 \cdot 15$	$- 89 \cdot 330$	$- 55 \cdot 213$
6.	$+ 23 \cdot 550$	$- 14 \cdot 039$	$+ 54 \cdot 953$	$- 76 \cdot 84$	$- 23 \cdot 73$	$- 99 \cdot 800$
7.	$+ 46 \cdot 789$	$- 63 \cdot 754$	$+ 112 \cdot 010$	$- 151 \cdot 85$	$- 377 \cdot 79$	$- 109 \cdot 450$
8.	$+ 64 \cdot 957$	$- 108 \cdot 650$	$+ 187 \cdot 800$	$- 235 \cdot 40$	$- 502 \cdot 51$	$- 97 \cdot 800$
9.	$+ 76 \cdot 150$	$- 140 \cdot 237$	$+ 284 \cdot 68$	$- 330 \cdot 98$	$- 612 \cdot 19$	$- 83 \cdot 200$
10.	$+ 78 \cdot 980$	$- 149 \cdot 827$	$+ 402 \cdot 56$	$- 438 \cdot 85$	$- 723 \cdot 40$	$- 78 \cdot 920$
11.	$+ 75 \cdot 480$	$- 138 \cdot 157$	$+ 501 \cdot 20$	$- 530 \cdot 08$	$- 818 \cdot 08$	$- 84 \cdot 200$
12.	$+ 62 \cdot 357$	$- 101 \cdot 870$	$+ 602 \cdot 96$	$- 630 \cdot 97$	$- 936 \cdot 59$	$- 100 \cdot 440$
13.	$+ 44 \cdot 022$	$- 57 \cdot 414$	$+ 672 \cdot 96$	$- 710 \cdot 23$	$- 1059 \cdot 67$	$- 109 \cdot 650$
14.	$+ 19 \cdot 785$	$- 6 \cdot 925$	$+ 728 \cdot 03$	$- 784 \cdot 67$	$- 1202 \cdot 18$	$- 96 \cdot 100$
15.	$- 10 \cdot 748$	$+ 41 \cdot 000$	$+ 761 \cdot 43$	$- 843 \cdot 98$	$- 1343 \cdot 20$	$- 47 \cdot 789$
16.	$- 32 \cdot 208$	$+ 64 \cdot 547$	$+ 773 \cdot 56$	$- 869 \cdot 44$	$- 1420 \cdot 53$	$+ 9 \cdot 526$
17.	$- 46 \cdot 667$	$+ 77 \cdot 250$	$+ 781 \cdot 45$	$- 881 \cdot 30$	$- 1458 \cdot 67$	$+ 59 \cdot 814$
18.	$- 58 \cdot 025$	$+ 87 \cdot 075$	$+ 788 \cdot 38$	$- 887 \cdot 40$	$- 1477 \cdot 00$	$+ 103 \cdot 100$
19.	$- 69 \cdot 233$	$+ 98 \cdot 365$	$+ 795 \cdot 11$	$- 890 \cdot 37$	$- 1483 \cdot 05$	$+ 145 \cdot 167$
20.	$- 80 \cdot 900$	$+ 113 \cdot 010$	$+ 800 \cdot 48$	$- 889 \cdot 85$	$- 1477 \cdot 42$	$+ 184 \cdot 100$
21.	$- 90 \cdot 180$	$+ 127 \cdot 417$	$+ 800 \cdot 22$	$- 883 \cdot 60$	$- 1463 \cdot 77$	$+ 209 \cdot 62$
22.	$- 95 \cdot 325$	$+ 136 \cdot 237$	$+ 796 \cdot 82$	$- 877 \cdot 24$	$- 1453 \cdot 00$	$+ 221 \cdot 20$
23.	$- 98 \cdot 425$	$+ 141 \cdot 950$	$+ 792 \cdot 43$	$- 870 \cdot 86$	$- 1443 \cdot 63$	$+ 227 \cdot 53$
24.	$- 100 \cdot 500$	$+ 145 \cdot 933$	$+ 786 \cdot 92$	$- 863 \cdot 93$	$- 1434 \cdot 35$	$+ 231 \cdot 42$
25.	$- 101 \cdot 600$	$+ 148 \cdot 027$	$+ 781 \cdot 98$	$- 856 \cdot 93$	$- 1426 \cdot 11$	$+ 233 \cdot 28$
26.	$- 101 \cdot 625$	$+ 148 \cdot 162$	$+ 776 \cdot 07$	$- 844 \cdot 18$	$- 1409 \cdot 53$	$+ 233 \cdot 33$
27.	$- 100 \cdot 250$	$+ 145 \cdot 317$	$+ 765 \cdot 46$	$- 838 \cdot 57$	$- 1403 \cdot 66$	$+ 230 \cdot 84$

1.	$\Delta M_0 = - 224 \cdot 03 x$	$+ 84 \cdot 120y$	$- 242 \cdot 85 z$
2.	$+ 9 \cdot 638$	$+ 18 \cdot 091$	$- 491 \cdot 50$
3.	$+ 8 \cdot 030$	$- 176 \cdot 607$	$- 501 \cdot 62$
4.	$+ 21 \cdot 906$	$- 39 \cdot 447$	$- 453 \cdot 76$
5.	$+ 74 \cdot 174$	$- 56 \cdot 683$	$- 393 \cdot 09$
6.	$+ 161 \cdot 546$	$- 71 \cdot 976$	$- 308 \cdot 05$
7.	$+ 279 \cdot 86$	$- 89 \cdot 700$	$- 166 \cdot 92$
8.	$+ 423 \cdot 34$	$- 61 \cdot 420$	$+ 31 \cdot 28$
9.	$+ 613 \cdot 16$	$+ 32 \cdot 397$	$+ 294 \cdot 93$
10.	$+ 869 \cdot 95$	$+ 242 \cdot 07$	$+ 619 \cdot 50$
11.	$+ 1117 \cdot 60$	$+ 554 \cdot 53$	$+ 890 \cdot 39$
12.	$+ 1448 \cdot 73$	$+ 1034 \cdot 24$	$+ 1126 \cdot 06$
13.	$+ 1771 \cdot 96$	$+ 1575 \cdot 95$	$+ 1231 \cdot 98$
14.	$+ 2137 \cdot 43$	$+ 2228 \cdot 13$	$+ 1126 \cdot 02$
15.	$+ 2517 \cdot 81$	$+ 2810 \cdot 69$	$+ 769 \cdot 87$
16.	$+ 2787 \cdot 16$	$+ 3103 \cdot 66$	$+ 109 \cdot 13$

18.	+	3.38	+	4.330	$d\varphi$	-	0.018	di	+	1.000	$d\lambda$	+	2.067	$d\pi$	+	2.420	dM	+	1.865	$100\ d\eta$	+	3374.3	x	+	5181.5	y	+	3159.5	z	+	0.714	
19.	+	2.80	+	4.185		-	0.631						+	1.859		+	2.629		+	2.078		+	6483.0		+	5988.1		+	3347.6		+	2.163
20.	+	3.05	+	3.080		-	0.912						+	1.316		+	2.325		+	1.888		+	6328.1		+	5312.2		+	1040.6		+	4.467
21.	+	2.11	+	1.771		-	0.913						+	0.802		+	1.832		+	1.524		+	5410.4		+	4044.6		+	93.6		+	6.019
22.	+	0.90	+	1.189		-	0.561						+	0.619		+	1.628		+	1.377		+	5009.5		+	3433.6		-	219.5		+	6.949
23.		0.46	+	0.812		-	0.326						+	0.531		+	1.535		+	1.316		+	4848.0		+	3114.6		-	384.7		+	7.646
24.	-	1.11	+	0.498		-	0.120						+	0.488		+	1.514		+	1.313		+	4871.6		+	2965.5		-	507.6		+	8.409
25.	-	3.06	+	0.216		+	0.070						+	0.484		+	1.555		+	1.364		+	5067.5		+	2966.6		-	617.8		+	9.268
26.	-	4.42		0.108		+	0.283						+	0.519		+	1.680		+	1.490		+	5494.6		+	3141.3		-	707.9		+	10.386
27.	-	6.07		0.746		+	0.667						+	0.670		+	2.055		+	1.853		+	6743.4		+	3820.5		-	1088.9		+	12.900

Nach Multiplication mit den Quadratwurzeln der Gewichte wurde jede Colonne durch den größten darin enthaltenen Coefficienten dividiert.

Hierauf ergaben sich folgende Normalgleichungen:

3.9545	$d\varphi$	+	0.1987	di	+	3.8998	$d\lambda$	+	3.6560	$d\pi$	+	3.9373	dM	+	3.7108	$100\ d\eta$	+	3.0555	x	+	3.4997	y	+	3.2801	z	=	+1.7050
0.1987		+	6.1006		+	1.0851		+	0.7039		-	0.7629		-	0.2166		-	0.6569		-	0.9572		+	1.6305		=	-2.0787
3.8998		+	1.0851		+	15.6539		+	7.9789		+	8.0161		+	6.9428		+	5.6883		+	5.0270		+	3.1613		=	+0.5581
3.6760		+	0.7039		+	7.9789		+	5.3175		+	5.7766		+	4.7488		+	3.8276		+	3.8970		+	3.3716		=	+1.3047
3.9373		-	0.7629		+	8.0161		+	5.2776		+	6.7762		+	6.2673		+	5.5883		+	5.4575		+	2.5231		=	+0.8808
3.7108		-	0.2166		+	6.9428		+	4.7488		+	6.2673		+	6.5381		+	5.9116		+	5.7110		+	2.5497		=	+0.3965
3.0555		-	0.6569		+	5.6883		+	3.8276		+	5.5883		+	5.9116		+	5.4877		+	5.2315		+	1.7608		=	+0.1161
3.4997		-	0.9572		+	5.0270		+	3.8970		+	5.4575		+	5.7110		+	5.2315		+	5.2302		+	2.2672		=	+0.7730
3.2801		+	1.6305		+	3.1613		+	3.3716		+	2.5231		+	2.5497		+	1.7608		+	2.2672		+	3.7463		=	+1.5980

Hiebei wurde so wie auch fernerhin der erste Normalort weggelassen, da er die sehr zweifelhaft beobachtete Beobachtung von 1781 enthält.

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt folgendes Resultat:

für x , y und z :

$$x = \frac{m_3}{D^3} = + 0.002906$$

$$y = \frac{m_3}{D^3} \cos 2(\lambda - \pi) = - 0.005913$$

$$z = \frac{m_3}{D^3} \sin 2(\lambda - \pi) = 0.000012$$

Aus y und z folgt

$$2(\lambda - \pi) = 180^\circ 119$$

und

$$\frac{m_3}{D^3} = 0.005913$$

Die beiden Werte von $\frac{m_3}{D^3}$ sind zwar dem absoluten Betrage nach stark verschieden, aber doch von derselben Größenordnung. Eine bessere Übereinstimmung war wohl nach der Natur des Problems nicht zu erwarten. Es könnte den Anschein haben, dass die Größen x, y und z nur Rechnungsgrößen ohne reelle Bedeutung sind, allein es wäre doch ein unwahrscheinlicher Zufall, dass für $\frac{m_3}{D^3}$ ein positiver Wert folgt, der überdies mit einem zweiten Werte vergleichbar ist.

Es wurde nun aus den beiden Werten von $\frac{m_3}{D^3}$ das Mittel genommen, die so erhaltenen Werte

$$\lg x = \lg \frac{m_3}{D^3} = 7.6444 - 10$$

$$\lg y = \lg \frac{m_3}{D^3} \cos 2(\lambda - \pi) = 7.6444 - 10$$

$$\lg z = \lg \frac{m_3}{D^3} \sin 2(\lambda - \pi) = 4.9624 - 10$$

in die Bedingungsgleichungen zurückschsubstituiert und für jeden Normalort die Summe der von den Störungen abhängigen Glieder gebildet. Da die Coefficienten alle reine Zahlen sind, während die rechte Seite der Gleichungen in Graden ausgedrückt ist, so sind schließlich alle Unbekannten und die oben erwähnten, von den Störungen abhängigen Summen in Graden ausgedrückt. Um den richtigen Wert von $\frac{m_3}{D^3}$ zu erhalten, wäre der oben gefundene daher noch durch 57.296 zu dividieren.

Die so gebildeten Summen stellen den Gesamtbetrag der Störungen im Positionswinkel dar; sie bilden die letzte Colonne auf S. 36 u. 37 [912 u. 213]. Dieselben mit den linken Seiten der Bedingungsgleichungen vereinigt, liefern neue Bedingungsgleichungen, welche nur mehr die Correctionen der Elemente als Unbekannte enthalten.

Es ist interessant, zu bemerken, welche riesigen Werte die Störungen annehmen; sie erreichen mehr als 13° im Positionswinkel, also bedeutend mehr, als die auszugleichenden Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung betragen. Sie sind aber viel kleiner als bei ξ Cancri.

Die Auflösung der neuen Bedingungsgleichungen führt zu folgendem Resultate:

$$d\varphi = +1^\circ 574$$

$$di = -4.801$$

$$d\varrho = -3.495$$

$$d\lambda = +8.068$$

$$dM_0 = -3.686$$

$$dp = -0.04829$$

Damit folgt das neue Elementensystem:

$$\varphi = 30^\circ 259$$

$$i = 56.439$$

$$\varrho = 119.097$$

$$\lambda = 174.430$$

$$M_0 = -3.686$$

$$p = -4.12269.$$

Substituiert man die obigen Correctionen in die Bedingungsgleichungen, so bleiben folgende Reste:

1		8	0.19	15	+0.35	22	+0.04
2	-0.51	9	0.00	16	-0.04	23	+0.28
3	-0.74	10	-0.02	17	-0.15	24	+0.59
4	0.56	11	-0.01	18	+0.42	25	0.42
5	+0.96	12	-0.19	19	-0.76	26	-0.58
6	-0.36	13	+0.15	20	-0.08	27	+0.12
7	0.30	14	-0.31	21	+0.06		

Es ist somit gelungen, den Bedingungsgleichungen in ausreichender Weise genüge zu leisten. Anders stellt sich aber die Sache, wenn wir die Positionswinkel nach der Formel aus den neuen Elementen zurückberechnen. Die Correctionen der Elemente sind nämlich zu groß, als dass die linearen Gleichungen schon eine hinreichende Näherung vorstellen könnten.

Um die neuen Reste im Sinne Beobachtung — Rechnung zu finden, müssen vor allem die Störungen der Elemente bestimmt werden, da es notwendig ist, wegen der großen Werte derselben für jeden einzelnen Normalort bereits die gestörten Elemente einzuführen. Zu diesem Zwecke setzen wir die gefundenen Werte von x , y und z in die Gleichungen S. 35, 211. In der folgenden Zusammenstellung finden sich die Werte der Störungen für φ , π und M_0 , sowie die für die einzelnen Normalorte geltenden Elemente.

	$\Delta \varphi$	$\Delta \pi$	ΔM_0	φ	π	M_0	dp
1	+ 0.341	- 0.869	- 1.343	30° 00.0	173° 56.1	- 5.029	+ 11.77
2	- 0.932	+ 0.061	- 0.033	29° 32.7	174° 49.1	- 3.719	- 0.45
3	1.031	+ 0.029	+ 0.819	29° 22.8	174° 45.9	- 2.867 ¹	- 0.82
4	0.507	- 0.009	+ 0.275	29° 7.52	174° 42.1	- 3.411	+ 0.70
5	- 0.192	+ 0.330	+ 0.581	30° 00.7	174° 70.6	- 3.105	- 0.78
6	+ 0.165	+ 0.710	+ 1.033	30° 42.4	175° 14.0	- 2.053	+ 1.86
7	+ 0.486	+ 0.997	+ 1.631	30° 74.5	175° 42.7	- 2.055	+ 0.93
8	+ 0.764	+ 1.179	+ 2.132	31° 02.3	175° 60.9	1.549	+ 0.80
9	+ 0.952	+ 1.241	+ 2.558	31° 21.1	175° 67.1	- 1.128	+ 0.61
10	+ 1.005	+ 1.256	+ 2.703	31° 26.4	175° 68.6	- 0.923	+ 0.60
11	+ 0.937	+ 1.271	+ 2.475	31° 19.6	175° 70.1	- 1.211	+ 0.55
12	+ 0.719	+ 1.349	+ 1.817	30° 97.8	175° 77.9	1.869	+ 0.64
13	+ 0.441	+ 1.542	+ 0.853	30° 70.0	175° 97.2	- 2.833	+ 0.18
14	+ 0.111	+ 1.842	- 0.410	30° 37.0	176° 27.2	- 4.090	- 0.07
15	- 0.235	+ 2.202	- 1.298	30° 02.4	176° 03.2	- 4.984	- 0.73
16	- 0.434	+ 2.444	- 1.400	29° 52.5	176° 00.1	- 5.086	- 0.94
17	0.554	+ 2.540	- 1.206	29° 70.5	176° 07.0	- 4.892	- 1.59
18	- 0.647	+ 2.599	- 0.726	29° 01.2	177° 02.9	- 4.412	- 2.81
19	- 0.747	+ 2.612	+ 0.168	29° 51.2	177° 04.2	- 3.518	- 3.51
20	- 0.862	+ 2.589	+ 1.601	29° 39.7	177° 01.9	- 2.085	3.42
21	0.967	+ 2.550	+ 3.102	29° 29.2	176° 98.6	- 0.584	- 1.00
22	- 1.029	+ 2.537	+ 4.054	29° 23.0	176° 60.7	+ 0.308	1.30
23	- 1.067	+ 2.524	+ 4.077	29° 19.2	176° 95.4	+ 0.991	- 0.62
24	- 1.092	+ 2.514	+ 5.106	29° 10.7	176° 94.4	+ 1.420	- 0.73
25	- 1.108	+ 2.508	+ 5.335	29° 15.1	176° 93.8	+ 1.049	+ 0.44
26	- 1.109	+ 2.491	+ 5.338	29° 15.0	176° 92.1	- 1.1052	+ 0.07
27	- 1.090	+ 2.489	+ 5.070	29° 16.9	176° 91.9	- 1.1384	+ 1.58

¹ Hier wurde ein Fehler gefunden, der aber in den späteren Rechnungen corrigiert wurde.

Werden mit diesen die Positionswinkel zurückberechnet, so bleiben die in der letzten Columnne stehenden Reste im Sinne Beobachtung — Rechnung. Die großen Differenzen gegen Ende der Beobachtungsreihe sind nun zwar verschwunden, doch sind die starken Abweichungen der Normalorte 17 bis 21 ziemlich unverändert geblieben, und es zeigt sich ein sehr stark ausgesprochener Gang der Differenzen.

Da diese schlechte Darstellung auf die großen Correctionen der Elemente geschoben werden muss, weil die Bedingungsgleichungen gut dargestellt sind, so steht zu erwarten, dass ein zweiter Ausgleich ein besseres Resultat liefern wird.

Anlässlich dieser Neurechnung mussten aber einige Änderungen im Rechnungsmechanismus vorgenommen werden, wie sich überhaupt auch im folgenden mancher Schritt, der gemacht wurde, im Laufe der späteren Rechnungen als unzweckmäßig oder überflüssig herausgestellt hat.

Die Rechnung begann wieder mit der Berechnung der Störungen unter Zugrundelegung der neuen Elemente. Die mit der neuen Excentricität berechneten Bessel'schen Functionen führten nun auf folgende Reihen für ξ und η und ihre Differentialquotienten:

$$\begin{aligned}\xi &= 9'' 87852 + 2[9'' 65630 \cos M + 9'' 02387 \cos 2M + 8'' 57019 \cos 3M + 8'' 19117 \cos 4M + \\ &\quad + 7'' 85309 \cos 5M + 7'' 54238 \cos 6M] \\ \eta &= 2[9'' 62148 \sin M + 8'' 99957 \sin 2M + 8'' 55133 \sin 3M + 8'' 17580 \sin 4M + \\ &\quad + 7'' 94011 \sin 5M + 7'' 52148 \sin 6M] \\ \frac{\partial \xi}{\partial c} &= 0'' 17609 + 2[9'' 26104 \cos M + 9'' 12304 \cos 2M + 9'' 03833 \cos 3M + 8'' 85661 \cos 4M + \\ &\quad + 8'' 65485 \cos 5M + 8'' 44700 \cos 6M] \\ \frac{\partial \eta}{\partial c} &= 2[9'' 52617 \sin M + 8'' 98417 \sin 2M + 8'' 98399 \sin 3M + 8'' 82302 \sin 4M + \\ &\quad + 8'' 63063 \sin 5M + 8'' 42781 \sin 6M]. \quad (40)\end{aligned}$$

Indem man beachtet, dass nun $\cos 2(\lambda - \pi) = -1$, $\lg \sin 2(\lambda - \pi) = 7'' 3180$ zu setzen ist, findet man nun

$$\begin{aligned}F &= 0'' 18400 \cos M - 0'' 28318 \cos 2M - 0'' 13884 \cos 3M - 0'' 06666 \cos 4M - 0'' 03364 \cos 5M \\ &\quad - 0'' 02010 \cos 6M \\ &\quad + 0'' 00131 \sin M - 0'' 00048 \sin 2M - 0'' 00026 \sin 3M - 0'' 00013 \sin 4M - 0'' 00006 \sin 5M - \\ &\quad - 0'' 00003 \sin 6M \\ \frac{\partial F}{\partial c} &= 0'' 10036 \cos M + 0'' 71912 \cos 2M + 0'' 08896 \cos 3M - 0'' 07776 \cos 4M - 0'' 10320 \cos 5M - \\ &\quad - 0'' 10832 \cos 6M \quad (41)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\quad + 0'' 00153 \sin M + 0'' 00186 \sin 2M + 0'' 00032 \sin 3M - 0'' 00009 \sin 4M - 0'' 00017 \sin 5M - \\ &\quad - 0'' 00014 \sin 6M \\ F_1 &= 0'' 18400 \sin M - 0'' 14139 \sin 2M - 0'' 04628 \sin 3M - 0'' 01667 \sin 4M - 0'' 00673 \sin 5M - \\ &\quad - 0'' 00335 \sin 6M \quad (42) \\ &\quad + 0'' 00131 \cos M + 0'' 00024 \cos 2M + 0'' 00009 \cos 3M + 0'' 00003 \cos 4M + 0'' 00001 \cos 5M + \\ &\quad + 0'' 00001 \cos 6M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_2 &= 0'' 10036 \sin M + 0'' 35956 \sin 2M + 0'' 02965 \sin 3M - 0'' 01944 \sin 4M - 0'' 02064 \sin 5M - \\ &\quad - 0'' 01805 \sin 6M \\ &\quad - 0'' 00153 \cos M - 0'' 00093 \cos 2M - 0'' 00011 \cos 3M + 0'' 00002 \cos 4M + 0'' 00003 \cos 5M + \\ &\quad + 0'' 00002 \cos 6M \quad (43)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_3 &= 2[0'' 00140 \sin M - 0'' 00024 \sin 2M - 0'' 00009 \sin 3M - 0'' 00003 \sin 4M - 0'' 00001 \sin 5M - \\ &\quad - 0'' 00001 \sin 6M] \\ &\quad + 2[0'' 63016 \cos M - 0'' 11466 \cos 2M - 0'' 01192 \cos 3M - 0'' 01554 \cos 4M - 0'' 00624 \cos 5M - \\ &\quad - 0'' 00267 \cos 6M]. \quad (44)\end{aligned}$$

Nachdem mit diesen Reihen und den gefundenen Elementen die Störungen neu berechnet waren ergab sich das überraschende Resultat, dass sich die Darstellung der Normalorte wesentlich gebessert hatte.

Es ist nun

	$B-R$		$B-R$		$B-R$		$B-R$	
1	—	11.83	8	— 0.77	15	+ 0.83	22	+ 0.59
2	+	0.61	9	— 0.58	16	+ 0.94	23	+ 0.25
3	+	2.51	10	— 0.54	17	+ 1.05	24	+ 0.65
4	—	0.77	11	— 0.40	18	+ 1.35	25	— 0.15
5	+	0.76	12	— 0.53	19	— 0.36	26	— 0.22
6	—	0.91	13	— 0.02	20	+ 0.13	27	+ 0.54
7	—	0.93	14	+ 0.89	21	+ 0.52		

Die großen negativen Abweichungen der Normalorte 17 bis 22 sind verschwunden und theilweise in positive übergegangen. Immerhin bleibt die Darstellung noch ungenügend, zumal als die Distanzen nur eine sehr schlechte Übereinstimmung zeigen.

Der Vergleich derselben mit der Rechnung gestaltet sich wie folgt:

	$B-R$		$B-R$		$B-R$		$B-R$	
1	—		8	— 0.242	15	— 0.264	22	+ 0.020
2			9	— 0.300	16	— 0.119	23	— 0.077
3	—		10	— 0.547	17	+ 0.003	24	— 0.022
4	+ 0.454		11	— 0.563	18	+ 0.101	25	— 0.137
5	— 0.010		12	— 0.492	19	+ 0.025	26	— 0.153
6	+ 0.138		13	— 0.496	20	— 0.018	27	— 0.195
7	+ 0.073		14	— 0.348	21	+ 0.119		

Es ergibt sich somit die Nothwendigkeit, auch den Distanzen einige Aufmerksamkeit zuzuwenden. In der That hat auch der Wert der großen Achse einen bedeutenden Einfluss auf die Störungen und somit auch auf die Positionswinkel. Es musste daher der Coefficient berechnet werden, mit welchem da in den Bedingungsgleichungen auftritt. Zu diesem Zwecke wurden die Differentialquotienten der Störungen nach der großen Achse

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial a}, \quad \frac{\partial \Delta \pi}{\partial a} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Delta M}{\partial a}$$

berechnet und dieselben mit den entsprechenden Coefficienten der Bedingungsgleichungen multipliciert; es hat dann der Coefficient von da in den Gleichungen für die Positionswinkel die Form:

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial a} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Delta \pi}{\partial a} \cdot \frac{\partial p}{\partial \pi} + \frac{\partial \Delta M_0}{\partial a} \cdot \frac{\partial p}{\partial M_0};$$

für die Distanzen hat man die Form:

$$\frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial a} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Delta \pi}{\partial a} \cdot \frac{\partial p}{\partial \pi} + \frac{\partial \Delta M}{\partial a} \cdot \frac{\partial p}{\partial M};$$

so dass also rücksichtlich der großen Achse Störungen zweiter Ordnung berechnet wurden.

Aus diesen zuletzt bestimmten Coefficienten und der obigen Darstellung der Distanzen ergab sich vorerst ohne Rücksicht auf die übrigen Elemente als Correction der großen Axe

$$da = -0''1569,$$

so dass der neue Wert nun lautet:

$$a = 4''5301.$$

Dieser Versuch der Bestimmung der großen Achse war in der Hoffnung unternommen worden, dadurch vielleicht einen zweiten Ausgleich vermeiden zu können; allein diese Hoffnung hat sich als trügerisch erwiesen, indem die Darstellung der Positionswinkel dadurch nicht verbessert wurde.

Ein Versuch, mit der großen Achse gleichzeitig die Excentricität zu ändern, ist misslungen.

Es blieb somit nichts übrig, als mit dem neuen Werte der Achse die Störungen zum drittenmale zu berechnen und mit den so gefundenen Werten der Elemente für die einzelnen Normalorte einerseits wieder die Positionswinkel zurückzuberechnen, anderseits die Coefficienten der Bedingungsgleichungen zu bestimmen. Dabei konnten jetzt noch zwei Correctionen angebracht werden, nämlich der Einfluss der Störung Δa

$$\Delta a = 2 a^4 \frac{m_3}{D^3} F$$

und der Einfluss der Störung $\Delta \varphi$ auf die periodischen Störungen, während bis jetzt in den Größen F, F_1, F_3 und F_4 nur constantes φ angewendet wurde. Es konnten nämlich aus den Reihen 36 bis 39 und 41 bis 44 mit Hilfe der beiden zugehörigen Excentricitäten die Differentialquotienten der Coefficienten berechnet werden, so dass sich Reihen ergaben für

$$\frac{\partial F}{\partial e}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial e}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial e} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F_4}{\partial e},$$

welche nun mit den den einzelnen Normalorten entsprechenden $\Delta e = \Delta \varphi \cdot \cos \varphi$ multipliciert wurden; so ergab sich der Einfluss von $\Delta \varphi$ auf die Ausdrücke F, F_1, F_3 und F_4 .

	$\frac{\partial F}{\partial e} . de$	$\frac{\partial F_1}{\partial e} . de$	$\frac{\partial F_3}{\partial e} . de$	$\frac{1}{2} \frac{\partial F_4}{\partial e} . de$
1	— 0'0015	— 0'0004	— 0'0051	— 0'0017
2	— 0'0106	— 0'0035	— 0'0040	— 0'0153
3	— 0'0106	— 0'0021	0'0042	— 0'0181
4	+ 0'0035	+ 0'0030	0'0092	— 0'0008
5	+ 0'0018	+ 0'0004	— 0'0045	+ 0'0008
6	— 0'0014	+ 0'0002	+ 0'0040	— 0'0013
7	— 0'0019	+ 0'0016	+ 0'0090	— 0'0030
8	+ 0'0017	+ 0'0020	+ 0'0078	— 0'0047
9	+ 0'0053	+ 0'0010	+ 0'0035	— 0'0048
10	+ 0'0055	— 0'0005	— 0'0009	— 0'0048
11	+ 0'0045	— 0'0017	0'0050	— 0'0047
12	— 0'0004	— 0'0022	— 0'0082	0'0042
13	— 0'0018	— 0'0007	— 0'0002	— 0'0023
14	+ 0'0005	0'0000	+ 0'0014	+ 0'0003
15	+ 0'0042	— 0'0018	+ 0'0098	+ 0'0007
16	+ 0'0029	— 0'0037	+ 0'0092	— 0'0018
17	— 0'0007	— 0'0047	+ 0'0058	— 0'0047
18	— 0'0043	— 0'0050	+ 0'0023	— 0'0075
19	— 0'0070	— 0'0048	— 0'0011	— 0'0100
20	— 0'0102	— 0'0041	0'0040	— 0'0140
21	— 0'0109	— 0'0031	— 0'0049	— 0'0107
22	— 0'0108	— 0'0022	0'0044	— 0'0181
23	— 0'0105	— 0'0015	— 0'0034	— 0'0190
24	— 0'0102	— 0'0008	0'0019	— 0'0196
25	— 0'0100	— 0'0001	0'0003	— 0'0198
26	— 0'0101	+ 0'0006	+ 0'0015	— 0'0196
27	— 0'0105	+ 0'0018	+ 0'0038	— 0'0180

Der Gesamteinfluss dieser Glieder, sowie der von Δa auf den Positionswinkel und die Distanzen findet sich in der folgenden Zusammenstellung, in welcher die entsprechenden Columnen mit Δa und $\Delta \varphi$ überschrieben sind.

Positionswinkel:

	Δa	$\Delta \varphi$		Δa	$\Delta \varphi$		Δa	$\Delta \varphi$		Δa	$\Delta \varphi$
1	— 0'002	— 0'002	8	— 0'005	— 0'003	15	— 0'000	— 0'012	22	— 0'044	+ 0'208
2	— 0'009	+ 0'050	9	— 0'007	— 0'005	16	— 0'008	+ 0'003	23	— 0'058	+ 0'179
3	+ 0'010	+ 0'033	10	— 0'009	— 0'005	17	— 0'010	+ 0'002	24	— 0'009	+ 0'158
4	+ 0'015	— 0'021	11	— 0'008	— 0'002	18	— 0'004	+ 0'150	25	— 0'078	+ 0'144
5	+ 0'006	— 0'003	12	— 0'004	+ 0'003	19	+ 0'003	+ 0'244	26	— 0'083	+ 0'137
6	+ 0'002	+ 0'002	13	+ 0'001	+ 0'003	20	— 0'004	+ 0'281	27	— 0'080	+ 0'145
7	— 0'002	+ 0'002	14	+ 0'004	— 0'001	21	— 0'027	+ 0'246			

Distanzen:

	Δa		Δa		Δa		Δa
1	—	8	0'022	15	+ 0'017	22	— 0'008
2	—	9	— 0'034	16	+ 0'014	23	— 0'010
3	—	10	— 0'037	17	+ 0'010	24	— 0'012
4	+ 0'017	11	0'029	18	+ 0'007	25	— 0'013
5	+ 0'018	12	0'015	19	+ 0'003	26	— 0'013
6	+ 0'008	13	+ 0'002	20	— 0'001	27	— 0'010
7	— 0'008	14	+ 0'016	21	— 0'005		

Das von $\Delta \varphi$ herrührende Glied kann bei den Distanzen ganz vernachlässigt werden, während dies bei den anderen Gliedern namentlich gegen Schluss der Reihe offenbar unzulässig wäre. Die obigen Beträge wurden mit verkehrttem Zeichen an der Darstellung der Normalorte angebracht.

Es stellte sich nun auch die Nothwendigkeit heraus, die Werte von $\frac{m_3}{D^3}$ und $2(\lambda - \pi) = \omega$ zu verbessern, zu welchem Zwecke statt $\frac{m_3}{D^3} : \frac{m_3}{D^3} (1 + \delta)$ und statt $\omega : \omega + d\omega$ gesetzt wurde.

Als Coefficient von δ tritt die Summe aller Störungen im Positionswinkel oder Distanz auf, da alle diese Glieder den Factor $\frac{m_3}{D^3}$ enthalten.

Die Coefficienten von $d\omega$ ergeben sich nach folgender Formel:

$$\begin{aligned} \text{für die Positionswinkel} &= \frac{\partial \Delta a}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Delta \pi}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial p}{\partial \pi} + \frac{\partial \Delta M_0}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial p}{\partial M_0}, \\ \text{» » Distanzen} &= \frac{\partial \Delta a}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial a} + \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Delta \pi}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \pi} + \frac{\partial \Delta M_0}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \pi}. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung wurden die Glieder mit $\sin \omega$ vernachlässigt, während $\cos \omega = -1$ gesetzt wurde. Es kam daher von den Reihen für F, F_1, F_2 und F_4 nur die letzte Zeile in Rechnung, doch mussten auch hier die Werte von $\frac{\partial F}{\partial \omega}, \frac{\partial F_1}{\partial \omega}, \frac{\partial F_2}{\partial \omega}$ und $\frac{1}{2} \frac{\partial F_4}{\partial \omega}$ wegen der veränderlichen Excentricität verbessert werden.

Wir haben somit für den zweiten Ausgleich folgende Änderungen getroffen, welche wir hier nochmals zusammenfassen: 1. Die Aufnahme der Correction da in die Bedingungsgleichungen. 2. Die Einführung des variablen Wertes von φ in die Ausdrücke F, F_1, F_2, F_4 und 3. Die Einführung der Unbekannten δ und $d\omega$ für x, y und z .

Als Resultat ergab sich das folgende System der Bedingungsgleichungen für die Positionswinkel, dem wir gleich das Entsprechende für die Distanzen anfügen.

Die linke Seite der folgenden Gleichungen enthält das Resultat des Vergleiches der Normalorte mit der Rechnung, wie er sich nun nach Einführung der neuesten Elemente und Anbringung der oben erwähnten Correctionen gestaltet.

Alle Zahlen sind logarithmisch angesetzt. Bedingungsgleichungen für die Positionswinkel:

$1^{\circ}07'55''$	$9^{\circ}48'49''$	$da + 9^{\circ}22'19''$	$d\varphi + 9^{\circ}72'14''$	$di + 0^{\circ}00'00''$	$d\lambda + 9^{\circ}86'44''$	$d\pi + 9^{\circ}55'59''$	$dM_0 + 8^{\circ}99'02''$	$100\,d\eta + 9^{\circ}89'10''$	$\delta + 9^{\circ}94'25''$	dw
$9^{\circ}5441$	$0^{\circ}06'07''$	$0^{\circ}3408$	$9^{\circ}85'68$	$9^{\circ}99'68$	$0^{\circ}3739$	$9^{\circ}12'75$	$0^{\circ}2828$	$0^{\circ}5676$		
$0^{\circ}3747$	$9^{\circ}76'26$	$0^{\circ}0152$	$9^{\circ}62'69$	$9^{\circ}82'06$	$0^{\circ}2926$	$8^{\circ}83'79$	$9^{\circ}99'26$	$0^{\circ}5172$		
$9^{\circ}8129$	$9^{\circ}80'93$	$0^{\circ}26'33$	$9^{\circ}86'57$	$0^{\circ}0166$	$9^{\circ}95'92$	$9^{\circ}10'38$	$0^{\circ}0402$	$0^{\circ}2003$		
$9^{\circ}9191$	$9^{\circ}53'70$	$0^{\circ}00'11$	$9^{\circ}74'84$	$9^{\circ}88'14$	$9^{\circ}68'17$	$8^{\circ}96'77$	$9^{\circ}84'76$	$0^{\circ}0145$		
$9^{\circ}9243$	$9^{\circ}42'57$	$9^{\circ}79'16$	$9^{\circ}59'42$	$9^{\circ}80'94$	$9^{\circ}51'35$	$8^{\circ}90'34$	$9^{\circ}82'28$	$9^{\circ}89'71$		
$9^{\circ}9395$	$9^{\circ}43'81$	$9^{\circ}59'87$	$9^{\circ}41'00$	$9^{\circ}77'10$	$9^{\circ}41'19$	$8^{\circ}88'19$	$9^{\circ}87'85$	$9^{\circ}75'05$		
$9^{\circ}8261$	$9^{\circ}47'13$	$9^{\circ}37'71$	$9^{\circ}13'89$	$9^{\circ}75'10$	$9^{\circ}35'07$	$8^{\circ}88'67$	$9^{\circ}93'15$	$9^{\circ}48'29$		
$9^{\circ}6721$	$9^{\circ}52'12$	$9^{\circ}01'15$	$8^{\circ}38'27$	$9^{\circ}74'28$	$9^{\circ}31'92$	$8^{\circ}91'40$	$9^{\circ}99'17$	$7^{\circ}07'92$		
$9^{\circ}6128$	$9^{\circ}57'90$	$8^{\circ}58'91$	$8^{\circ}99'28$	$9^{\circ}74'68$	$9^{\circ}31'81$	$8^{\circ}96'98$	$0^{\circ}05'46$	$9^{\circ}68'84$		
$9^{\circ}5315$	$9^{\circ}60'68$	$9^{\circ}22'64$	$9^{\circ}31'24$	$9^{\circ}76'08$	$9^{\circ}34'55$	$9^{\circ}04'01$	$0^{\circ}08'96$	$0^{\circ}02'33$		
$9^{\circ}6128$	$9^{\circ}62'49$	$9^{\circ}54'52$	$9^{\circ}52'72$	$9^{\circ}79'18$	$9^{\circ}41'34$	$9^{\circ}15'22$	$0^{\circ}12'25$	$0^{\circ}27'35$		
$0^{\circ}0792$	$9^{\circ}59'41$	$9^{\circ}76'42$	$9^{\circ}66'92$	$9^{\circ}83'76$	$9^{\circ}51'46$	$9^{\circ}28'90$	$0^{\circ}11'83$	$0^{\circ}47'70$		
$0^{\circ}0000$	$9^{\circ}42'68$	$9^{\circ}99'28$	$9^{\circ}79'29$	$9^{\circ}91'64$	$9^{\circ}68'92$	$9^{\circ}49'09$	$0^{\circ}04'38$	$0^{\circ}67'80$		
$9^{\circ}9638$	$8^{\circ}23'04$	$0^{\circ}24'82$	$9^{\circ}87'39$	$0^{\circ}0428$	$9^{\circ}93'16$	$9^{\circ}77'41$	$9^{\circ}83'25$	$0^{\circ}88'00$		
$9^{\circ}9823$	$9^{\circ}53'70$	$0^{\circ}43'32$	$9^{\circ}84'19$	$0^{\circ}1536$	$0^{\circ}1463$	$0^{\circ}00'89$	$9^{\circ}45'48$	$0^{\circ}99'58$		
$0^{\circ}0212$	$9^{\circ}69'16$	$0^{\circ}55'16$	$9^{\circ}64'65$	$0^{\circ}2274$	$0^{\circ}3042$	$0^{\circ}1803$	$9^{\circ}68'21$	$1^{\circ}03'02$		
$0^{\circ}1271$	$9^{\circ}42'52$	$0^{\circ}61'07$	$8^{\circ}60'20$	$0^{\circ}2578$	$0^{\circ}4086$	$0^{\circ}2955$	$0^{\circ}22'58$	$0^{\circ}98'68$		
$9^{\circ}4771$	$9^{\circ}65'42$	$0^{\circ}59'76$	$9^{\circ}65'21$	$0^{\circ}2266$	$0^{\circ}4587$	$0^{\circ}3565$	$0^{\circ}60'38$	$0^{\circ}81'50$		
$9^{\circ}6128$	$0^{\circ}1799$	$0^{\circ}46'98$	$9^{\circ}87'26$	$0^{\circ}1040$	$0^{\circ}4321$	$0^{\circ}3419$	$0^{\circ}83'30$	$0^{\circ}33'18$		
$0^{\circ}0170$	$0^{\circ}3506$	$0^{\circ}25'85$	$9^{\circ}82'28$	$9^{\circ}94'70$	$0^{\circ}3609$	$0^{\circ}2812$	$0^{\circ}91'68$	$9^{\circ}82'28$		
$0^{\circ}0864$	$0^{\circ}4129$	$0^{\circ}06'17$	$9^{\circ}68'73$	$9^{\circ}84'60$	$0^{\circ}3111$	$0^{\circ}2385$	$0^{\circ}94'50$	$0^{\circ}25'67$		
$9^{\circ}9956$	$0^{\circ}4519$	$9^{\circ}84'84$	$9^{\circ}48'90$	$9^{\circ}78'38$	$0^{\circ}2812$	$0^{\circ}2141$	$0^{\circ}96'28$	$0^{\circ}38'40$		
$0^{\circ}1584$	$0^{\circ}4877$	$9^{\circ}50'72$	$9^{\circ}08'36$	$9^{\circ}74'90$	$0^{\circ}2662$	$0^{\circ}2043$	$0^{\circ}98'20$	$0^{\circ}46'39$		
$9^{\circ}8692$	$0^{\circ}5246$	$8^{\circ}55'55$	$8^{\circ}82'75$	$9^{\circ}7446$	$0^{\circ}2675$	$0^{\circ}2104$	$1^{\circ}00'54$	$0^{\circ}53'05$		
$9^{\circ}8692$	$0^{\circ}5684$	$9^{\circ}64'81$	$9^{\circ}44'37$	$9^{\circ}7746$	$0^{\circ}2874$	$0^{\circ}2352$	$1^{\circ}03'64$	$0^{\circ}60'50$		
$0^{\circ}2304$	$0^{\circ}6427$	$0^{\circ}0940$	$9^{\circ}7541$	$9^{\circ}8852$	$0^{\circ}3525$	$0^{\circ}3076$	$1^{\circ}09'20$	$0^{\circ}7514$		

Bedingungs­gleichungen für die Distanzen

9.7356	=	9.8485	d <i>u</i> + 0.6951	d <i>φ</i> + 0.2829	d <i>i</i> + 0.3635	d <i>π</i> + 0.5355	d <i>M</i> ₀ + 9.6781	100	d <i>p</i> + 8.5911	$\hat{\epsilon}$ + 9.1038	d <i>m</i>
9.0899		9.9926	0.7142	0.0521	0.3241	0.4610	9.7470		8.5563	9.1492	
9.4983		0.0785	0.6805	9.7814	0.2533	0.3439	9.7338		8.5563	9.1523	
9.4639		0.1288	0.6401	9.4414	0.1183	0.1933	9.6633		8.5441	9.1038	
8.0792		0.1609	0.6078	8.9219	9.8783	9.9781	9.5141		8.3010	9.0414	
8.9191		0.1786	0.5890	7.4205	9.1366	9.5366	9.1314		7.7782	9.0291	
9.4232		0.4826	0.5906	8.6439	9.7483	9.5019	9.1536		8.6628	9.1001	
9.4683		0.1733	0.6104	9.2761	0.0543	9.9466	9.6412		8.9138	9.2405	
9.4014		0.1427	0.6489	9.6872	0.2356	0.1878	9.9266		9.0212	9.4166	
9.4728		0.0932	0.6886	9.9470	0.3274	0.3293	0.1037		8.9956	9.5502	
9.3075		0.0060	0.7201	0.1689	0.3687	0.4380	0.2477		8.8129	9.6263	
9.2122		9.8708	0.6997	0.3505	0.3252	0.4968	0.3393		—	9.5821	
8.6531		9.7582	0.5910	0.1430	0.1863	0.4757	0.3383		8.2553	9.3927	
8.8325		9.6834	0.3517	0.4793	0.0912	0.3822	0.2583		7.9542	8.9912	
9.2253		9.6409	9.4815	0.4712	8.8455	0.1789	0.0658		7.8451	8.4771	
8.9395		9.6231	0.2808	0.4012	9.8409	9.4360	9.3338		7.6990	9.1072	
8.6721		9.6308	0.5735	0.2166	0.0747	9.9370	9.8968		8.4914	9.2355	
9.2833		9.6582	0.6372	9.9178	0.0607	0.1549	0.0752		8.8062	9.2504	
9.0000		9.6853	0.6305	9.5803	9.9487	0.0962	0.0237		8.7634	9.2648	
7.9512		9.7092	0.6138	9.1697	9.7640	9.9195	9.8325		8.3979	9.2923	
8.8751		9.7309	0.5994	8.3406	9.3612	9.4080	9.3441		8.4624	9.3243	
8.5185		9.7472	0.5967	7.8417	9.1125	9.5737	9.5166		8.9731	9.3598	
8.6435		9.7563	0.6083	9.0583	9.7087	0.0087	9.9565		9.2905	9.3892	
8.9445		9.7445	0.6349	9.7332	9.9965	0.2151	0.1702		9.3483	9.4031	

Was die Einheiten anbelangt, in denen die Correctionen ausgedrückt sind, so gilt folgendes

System 1 da in Bogen Sekunden, $d\varphi$, di , $d\varpi$, $d\pi$, dM , dn in Graden; δ : unbenannte Zahl, $d\omega$ in absoluten Einheiten ($1 = 57^{\circ}296$).

System II. $d\alpha$ in Bogenseconds $d\vartheta$, di , $d\pi$, dM , $d\omega$ in absoluten Einheiten; $\hat{\gamma}$: unbenannte Zahl.

Da die beiden Systeme gleichzeitig behandelt werden sollen, so müssen sie auch die Unbekannten in denselben Einheiten liefern: Es müssen daher die Coefficienten aus $d\varphi$, di , $d\pi$, dM und $d\mu$ in II. noch durch $57 \cdot 296$ dividirt werden.

Da dadurch die Coefficienten im zweiten System erheblich kleiner werden als die im ersten, so tritt das zweite mit viel geringerem Gewichte in die Normalgleichungen ein, und es wurde daher angenommen, dass damit der geringeren Verlässlichkeit der Distanzen Rechnung getragen sei. Größeren Einfluss gewinnt nur der Coefficient von da , der für die Darstellung der Distanzen der wichtigsten ist.

Nachdem nun mit den Quadratwurzeln der Gewichte multipliciert war, wurde jede Colonne durch den größten in derselben vorkommenden Coefficienten, beide Systeme zusammengekommen, dividirt, und hierauf die Normalgleichungen gebildet.

Um diese Verhältnisse überblicken zu können, sind im folgenden die Normalgleichungen für die Positionswinkel und die Distanzen zuerst getrennt und dann in ein System zusammengezogen aufgeführt.

+3.8563 $\hat{\gamma}$	+0.8057 $d\omega$	+3.4287 da	+0.6908 $d\varphi$	-0.1870 di	+4.7781 $d\Omega$	+2.5118 dM	+3.9315 dM_0	+4.1914.100 $d\mu$	= +2.7568
+0.8057	+4.2710	+1.1824	-3.2400	-2.1206	-2.5042	-2.9334	-1.4372	-1.4408	-1.1377
+3.4287	+1.1824	+3.1604	-0.0071	-0.0205	+3.8318	+1.7610	+3.0202	+3.3500	+2.2041
+0.6908	-3.2400	-0.0071	+4.0935	+0.2580	+3.7040	+3.6632	+3.7052	+3.2826	+2.5444
0.1870	-2.1206	-0.0205	+0.2580	+6.0034	+0.4211	+0.3523	-0.8783	-0.2063	+1.1968
+4.7781	-2.5042	+3.8318	+3.7040	+0.4211	+15.9857	+9.1779	+8.1824	+6.9206	+4.0843
+2.5118	-2.9334	+1.7610	+3.6632	+9.1779	+9.1779	+6.2812	+5.7479	+4.9758	+3.2826
+3.9315	-1.4372	+3.0202	+3.7052	-0.8783	+8.1824	+5.7479	+7.0873	+6.3468	+4.8180
+4.1914	-1.4408	+3.3500	+3.2826	+0.2063	+6.9206	+4.9758	+6.3468	+6.4360	+4.3612
+0.0007 $\hat{\gamma}$	-0.0001 $d\omega$	+0.0098 da	-0.0001 $d\varphi$	-0.0012 di	+0.0010 $d\pi$	+0.0008 dM_0	+0.0006.100 $d\mu$	= -0.0086	
0.0001	+0.0089	-0.0505	-0.0071	+0.0045	-0.0028	-0.0020	-0.0019	+0.0186	
+0.0098	-0.0505	+1.0695	+0.0535	-0.0566	+0.0098	+0.0061	+0.0122	-0.1141	
-0.0001	-0.0071	+0.0535	+0.0066	-0.0028	+0.0042	+0.0007	+0.0011	-0.0084	
-0.0002	+0.0045	-0.0566	-0.0028	+0.0119	-0.0016	-0.0022	-0.0025	-0.0022	
+0.0010	-0.0028	+0.0098	+0.0012	-0.0016	+0.0036	+0.0031	+0.0020	-0.0269	
+0.0008	-0.0020	+0.0061	+0.0007	-0.0022	+0.0031	+0.0020	+0.0019	-0.0210	
+0.0006	-0.0019	+0.0122	+0.0011	-0.0025	+0.0020	+0.0019	+0.0015	-0.0117	
+3.8570 $\hat{\gamma}$	+0.8056 $d\omega$	+3.4385 da	+0.6907 $d\varphi$	-0.1872 di	+4.7781 $d\Omega$	+2.5128 $d\pi$	+3.9323 dM_0	+4.1920.100 $d\mu$	= +2.7482
+0.8056	+4.2799	+1.1319	-3.2471	-2.1161	-2.5042	-2.9362	-1.4392	-1.4427	-1.1191
+3.4385	+1.1319	+4.2299	+0.0464	-0.0771	+3.8318	+1.7708	+3.0263	+3.3622	+2.0900
+0.6907	-3.2471	+0.0464	+4.1001	+0.2552	+3.7040	+3.6644	+3.7059	+3.2837	+2.5360
-0.1872	-2.1161	-0.0771	+0.2552	+6.0153	+0.4211	+0.3507	-0.8805	-0.2088	+1.1946
+4.7781	-2.5042	+3.8318	+3.7040	+0.4211	+15.9857	+9.1779	+8.1824	+6.9206	+4.0843
+2.5128	-2.9362	+1.7708	+3.6644	+0.3507	+9.1779	+6.2848	+5.7510	+4.9778	+3.2557
+3.9323	-1.4392	+3.0263	+3.7059	-0.8805	+8.1824	+5.7510	+7.0902	+6.3487	+4.7970
+4.1920	-1.4427	+3.3622	+3.2837	-0.2088	+6.9206	+4.9778	+6.3487	+6.4375	+4.3495

Das Resultat des Ausgleiches ist folgendes:

$$\begin{aligned} \delta &= -0.2758 & \lg \frac{m_3}{D^3} &= 7.5042 = 10 \\ d\omega &= -36^\circ 567 & 2(\lambda - \pi) &= 143^\circ 552 \\ da &= -0'' 0301 & a &= 4'' 5000 \\ d\varphi &= -1^\circ 333 & \varphi &= 28^\circ 926 \\ di &= +0.137 & i &= 56.576 \\ dQ &= +2.689 & Q &= 121.786 \\ d\pi &= -6.963 & \pi &= 167.467 \\ dM_0 &= +3.922 & M_0 &= 0^\circ 236 \\ dp &= +0.00195 & p &= -4.12074 \end{aligned}$$

Während den Bedingungsgleichungen wieder in ausreichender Weise genügt ist, gestaltet sich der Vergleich der Normalorte mit der directen Rechnung nun folgendermaßen:

	dp	$d\varphi$		dp	$d\varphi$		dp	$d\varphi$		dp	$d\varphi$
1	— 9° 82	—	8	— 0° 18	+ 0° 089	15	+ 1° 20	— 0° 198	22	— 1° 93	+ 0° 074
2	+ 0° 56	—	9	+ 0° 15	+ 0° 039	16	+ 0° 62	— 0° 133	23	— 2° 47	+ 0° 005
3	+ 0° 54	—	10	+ 0° 29	— 0° 097	17	+ 0° 10	— 0° 035	24	— 2° 24	+ 0° 088
4	— 1° 24	+ 0° 020	11	+ 0° 45	— 0° 102	18	— 0° 01	+ 0° 086	25	3° 28	— 0° 004
5	+ 0° 82	+ 0° 159	12	+ 0° 45	— 0° 069	19	— 0° 89	— 0° 006	26	3° 06	— 0° 003
6	— 0° 60	+ 0° 340	13	+ 0° 91	— 0° 154	20	1° 75	— 0° 030	27	— 3° 58	— 0° 035
7	0° 49	+ 0° 334	14	+ 1° 03	— 0° 144	21	1° 72	+ 0° 140			

Die Darstellung der Distanzen ist erheblich besser geworden, die der Positionswinkel ist aber noch immer unbrauchbar. Die langsame Convergenz des Ausgleichsverfahrens haftet überhaupt dem Problem an. Sie ist begründet in dem großen Werte der Excentricität und dem der Neigung, infolge deren jede Änderung der Elemente in ungeheuer vergrößertem Maßstabe auf die Positionswinkel übergeht, daher die linearen Bedingungsgleichungen noch immer nicht volle Geltung haben. In dem Falle des letzten Ausgleiches ist überdies zu bemerken, dass sich der Winkel $2(\lambda - \pi)$ um mehr als 36° geändert hat. Die Größe des Wertes ist nicht auffallend, da die Richtung nach m_3 selbstverständlich sehr unsicher bleibt; dass aber dieser Wert in den Bedingungsgleichungen als Differential auftritt, begründet wohl hinlänglich die Abweichung von der directen Rechnung. Der Ausgleich muss daher noch einmal wiederholt werden.

Rücksichtlich der Berechnung der letzten Darstellung sei bemerkt, dass das Rechnungsverfahren bei der Berechnung der Störungen wieder etwas geändert war. Um nämlich die zeitraubende Auswertung der Reihen 28 bis 32 für die neue Excentricität zu vermeiden, wurde auf die Werte S. 33 [209] zurückgegangen, welche mit dem ersten Werte der Excentricität berechnet sind. Dieselben wurden wegen des neuen Wertes und der Störungen von φ nach der S. 42 [218] erwähnten Methode verbessert, und mit den so gewonnenen Werten die Störungen neu berechnet. Diese letzteren gelten dann für dieselben mittleren Anomalien, wie die Zahlen S. 33 [209], für die neuen Werte der mittleren Anomalie wurden die Störungen graphisch interpoliert, dann an die neuen Elemente angebracht und hierauf p und ρ nach den gewöhnlichen Formeln berechnet.

Dieses Verfahren wurde auch weiterhin festgehalten.

Es ergab sich noch eine zweimalige Wiederholung des Ausgleiches als notwendig, doch erschien es überflüssig, alle Coefficienten neu zu berechnen; nur die von δ und $d\omega$ mussten wegen der starken Änderungen erneuert werden.

Das Resultat dieser Rechnungen ist das folgende:

1. Ausgleich.

$$\begin{aligned}
\delta &= +0.3782 & \log \frac{m_3}{D^3} &= 7.6435-10 \\
d\omega &= +3.699 & 2(\lambda-\pi) &= 147.251 \\
da &= -0.0190 & a &= 4''4810 \\
d\varphi &= +0.621 & \varphi &= 29^\circ 547 \\
di &= -0.265 & i &= 56.311 \\
d\Omega &= -0.271 & \Omega &= 121.515 \\
d\pi &= +1.115 & \pi &= 168.582 \\
dM_0 &= -0.391 & M_0 &= -0.465 \\
dp &= -0.02919 & p &= -4.14993
\end{aligned}$$

Die Darstellung der Normalorte:

	dp	$d\varphi$		dp	$d\varphi$		dp	$d\varphi$		dp	$d\varphi$
1	—	—	8	— 0.24	+ 0.042	15	+ 0.21	— 0.218	22	— 0.20	+ 0.135
2	— 1.57	—	9	— 0.03	— 0.004	16	— 0.25	— 0.118	23	— 0.57	+ 0.071
3	— 0.77	—	10	+ 0.02	— 0.134	17	— 0.27	+ 0.004	24	— 0.04	+ 0.162
4	— 0.46	+ 0.545	11	+ 0.04	— 0.145	18	+ 0.19	+ 0.133	25	— 0.73	+ 0.079
5	+ 1.16	+ 0.084	12	— 0.11	— 0.122	19	— 0.79	+ 0.056	26	— 0.47	+ 0.090
6	— 0.43	+ 0.270	13	— 0.52	— 0.253	20	— 0.34	+ 0.023	27	+ 1.13	+ 0.075
7	— 0.43	+ 0.273	14	+ 0.78	— 0.191	21	— 0.22	+ 0.190			

Der große positive Wert des letzten Normalortes ließ darauf schließen, dass spätere Beobachtungen gegen diese Elemente starke positive Abweichungen zeigen werden. In der That hat der Vergleich zweier später publicierter Beobachtungen der Jahre 1899 und 1900 dies bestätigt. Deshalb wurde der Ausgleich noch einmal wiederholt; diesmal unter Beibehaltung aller Coefficienten:

Er lieferte folgendes Resultat:

2. Ausgleich.

$$\begin{aligned}
\delta &= -0.1698 & \log \frac{m_3}{D^3} &= 7.5727-10 \\
d\omega &= +2.133 & 2(\lambda-\pi) &= 149.384 \\
da &= +0.0169 & a &= 4''4979 \\
d\varphi &= -0.175 & \varphi &= 29.372 \\
di &= +0.477 & i &= 56.788 \\
d\Omega &= -0.648 & \Omega &= 120.867 \\
d\pi &= +1.189 & \pi &= 169.771 \\
dM_0 &= -0.607 & M_0 &= -0.762 \\
dp &= +0.01430 & p &= -4.13563
\end{aligned}$$

Da diese Elemente als die definitiven angesehen wurden, so sollen hier noch die bei Berechnung der Darstellung verwendeten Werte der Störungen, welche sich aus diesen Elementen ergeben, Platz finden. Dabei ist zu bemerken, dass das Glied von ΔM_0

$$-\left[\frac{7}{2} + \frac{5}{2} \cos 2(\lambda-\pi)\right] \cdot ka_2 \frac{m_3}{D^3} (t-t_0) = 0.03313 (t-t_0)$$

als vollständig der Zeit proportional mit p vereinigt wurde. Es ist dann

$$p' = -4.10250,$$

mit welchem Werte die mittleren Anomalien berechnet wurden.

	Δz	$\Delta \pi$	ΔM_0	φ	π	M_0
1	+ 0.076	0.685	- 0.497	29.448	169.086	1.259
2	0.018	+ 0.301	- 0.077	28.754	170.132	1.439
3	0.086	+ 0.382	- 0.756	28.686	170.153	1.518
4	- 0.337	+ 0.074	- 1.024	29.035	169.845	1.786
5	- 0.006	+ 0.137	- 0.855	29.300	169.908	1.617
6	+ 0.244	+ 0.282	- 0.557	29.616	170.053	1.319
7	+ 0.507	+ 0.417	0.040	29.939	170.188	0.802
8	+ 0.884	+ 0.512	+ 0.505	30.256	170.283	0.250
9	+ 1.170	+ 0.532	+ 1.090	30.542	170.303	+ 0.328
10	+ 1.404	+ 0.505	+ 1.702	30.770	170.276	+ 0.940
11	+ 1.533	+ 0.471	+ 1.923	30.905	170.242	+ 1.101
12	+ 1.503	+ 0.440	+ 1.917	30.935	170.211	+ 1.155
13	+ 1.507	+ 0.504	+ 1.515	30.879	170.275	+ 0.753
14	+ 1.372	+ 0.605	+ 0.538	30.744	170.436	- 0.224
15	+ 1.177	+ 0.945	- 0.646	30.549	170.716	- 1.408
16	+ 1.047	+ 1.179	- 1.342	30.410	170.950	- 2.104
17	+ 0.975	+ 1.333	- 1.710	30.347	171.104	- 2.478
18	+ 0.921	+ 1.424	- 1.811	30.293	171.195	- 2.573
19	+ 0.800	+ 1.485	- 1.570	30.232	171.256	- 2.332
20	+ 0.780	+ 1.531	- 0.898	30.152	171.302	- 1.600
21	+ 0.731	+ 1.551	- 0.149	30.103	171.322	- 0.911
22	+ 0.686	+ 1.501	+ 0.420	30.058	171.332	- 0.330
23	+ 0.603	+ 1.568	+ 0.766	30.035	171.339	+ 0.007
24	+ 0.641	+ 1.573	+ 1.002	30.013	171.344	+ 0.320
25	+ 0.629	+ 1.577	+ 1.327	30.001	171.348	+ 0.505
26	+ 0.619	+ 1.576	+ 1.380	29.991	171.347	+ 0.624
27	+ 0.627	+ 1.564	1.258	29.999	171.335	+ 0.490

Mit diesen Werten ergab sich folgende Darstellung:

	dp	$d\varphi$		dp	$d\varphi$		dp	$d\varphi$		dp	$d\varphi$
1	10.83	—	8	0.19	+ 0.053	15	+ 0.22	— 0.198	22	+ 0.44	+ 0.114
2	0.39	—	9	+ 0.03	0.009	16	0.17	0.097	23	+ 0.10	+ 0.040
3	0.33	—	10	+ 0.06	— 0.159	17	0.30	+ 0.022	24	+ 0.52	+ 0.123
4	0.05	+ 0.590	11	+ 0.08	— 0.174	18	+ 0.30	+ 0.144	25	— 0.45	— 0.035
5	+ 1.17	+ 0.114	12	— 0.09	— 0.148	19	0.07	+ 0.061	26	— 0.38	+ 0.042
6	— 0.40	+ 0.221	13	+ 0.21	— 0.228	20	+ 0.14	+ 0.020	27	+ 0.50	— 0.022
7	— 0.38	+ 0.308	14	+ 0.77	0.189	21	+ 0.55	+ 0.184			

Die Darstellung der Positionswinkel kann als genügend bezeichnet werden. Abgesehen von dem ersten Normalorte, übersteigen die Differenzen nicht das zulässige Maß, und auch die Anzahl der Zeichen wechsel ist hinlänglich.

Es wurden nun mit den oben gegebenen Werten der Störungen, die Werte derselben für jeden Jahresanfang graphisch interpoliert und hierauf die nachfolgende Ephemeride berechnet, welche auch die Werte des Positionswinkels und der Distanzen bis zum Jahre 1910 enthält. Für die letzten zehn Jahre wurden die Störungen direct berechnet.

Der Vergleich sämtlicher beobachteter Positionswinkel mit der Rechnung findet sich in der folgenden Zusammenstellung:

Ephemeride für 70 Ophiuchi.

Epoche	p	q	Epoche	p	q	Epoche	p	q
1819°0	172°02	2°510	1850°0	117°21	0°737	1881°0	02°75	2°670
20°0	105°97	2°708	51°0	110°37	0°727	82°0	50°57	2°472
21°6	161°20	3°027	52°0	115°52	0°710	83°0	49°33	2°290
22°0	157°11	3°282	53°0	114°07	6°685	84°0	41°04	2°120
23°0	153°59	3°535	54°0	113°81	6°652	85°0	31°75	1°994
24°0	150°53	3°781	55°0	112°94	6°610	86°0	21°03	1°915
25°0	147°84	4°018	56°0	112°06	6°500	87°0	11°02	1°880
26°0	145°44	4°248	57°0	111°15	6°503	88°0	0°46	1°884
27°0	143°29	4°404	58°0	110°23	6°438	89°0	350°38	1°922
28°0	141°35	4°673	59°0	109°29	6°303	90°0	340°91	1°988
29°0	139°58	4°872	60°0	108°32	6°280	91°0	332°15	2°006
30°0	137°94	5°058	61°0	107°32	6°188	92°0	324°17	2°144
31°0	136°42	5°234	62°0	106°29	6°987	93°0	310°61	2°210
32°0	135°00	5°401	63°0	105°22	5°979	94°0	309°33	2°249
33°0	133°67	5°557	64°0	104°10	5°802	95°0	302°21	2°251
34°0	132°43	5°702	65°0	102°93	5°736	96°0	294°71	2°210
35°0	131°24	5°836	66°0	101°72	5°600	97°0	280°51	2°121
36°0	130°11	5°959	67°0	100°42	5°457	98°0	277°00	1°993
37°0	129°02	6°075	68°0	99°06	5°308	99°0	265°58	1°847
38°0	127°97	6°181	69°0	97°00	5°149	1900°0	251°74	1°717
39°0	126°96	6°277	70°0	95°02	4°979	01°0	235°53	1°644
40°0	125°99	6°363	71°0	94°32	4°799	02°0	218°23	1°667
41°0	125°04	6°441	72°0	92°48	4°611	03°0	202°28	1°794
42°0	124°12	6°509	73°0	90°47	4°415	04°0	188°88	2°005
43°0	123°22	6°567	74°0	88°27	4°211	05°0	178°55	2°265
44°0	122°34	6°616	75°0	85°85	4°000	06°0	170°58	2°548
45°0	121°46	6°657	76°0	83°12	3°785	07°0	164°37	2°834
46°0	120°59	6°690	77°0	80°05	3°564	08°0	159°42	3°119
47°0	119°74	6°715	78°0	76°58	3°339	09°0	155°35	3°395
48°0	118°89	6°730	79°0	72°01	3°115	10°0	151°03	3°662
49°0	118°05	6°738	80°0	68°05	2°892			

Nr.	Epoche	Positionswinkel		Zahl	$B - R$	Beobachter
		Beobachtung	Rechnung			
1	1779°76	89°01	97°35	1	— 7°74	W. Herschel.
2	80°50	—	—	—	—	„
3	81°73	80°39 98°85	94°23	—	— 13°84 + 4°62	„
4	1802°20	335°86	330°48	—	— 0°32	„
5	04°41	317°70	318°28	—	0°52	„
6	04°42	319°32	318°20	—	+ 1°06	„

Nr.	Epoche	Positionswinkel		Zahl	B - R	Beobachter
		Beobachtung	Rechnung			
7	1819.04	108.31	107.97	5	+ 0.34	W. Struve.
8	20.77	160.08	162.19	2	— 2.11	»
9	21.30	155.91	159.90	2	— 3.99	Herschel und South.
10	74	157.49	158.10	5	— 0.61	W. Struve.
11	22.42	—	155.50	—	—	Herschel und South.
12	49	154.96	155.32	—	— 0.30	» » »
13	04	153.72	154.79	3	— 1.07	W. Struve.
14	23.32	153.27	152.57	—	+ 0.70	Herschel und South.
15	25.50	148.00	140.40	10	+ 1.00	South.
16	57	148.08	140.43	14	+ 1.05	W. Struve.
17	20.76	140.27	143.79	1	+ 2.48	»
18	27.02	145.02	143.25	2	+ 1.77	»
19	28.58	140.51	140.30	3	+ 0.21	J. Herschel.
20	71	140.10	140.07	4	+ 0.03	W. Struve.
21	29.59	137.97	138.59	6	— 0.62	»
22	00	140.40	138.58	1	+ 1.88	J. Herschel.
23	30.40	138.17	137.32	9	+ 0.85	»
24	50	135.71	137.17	10	— 1.46	Bessel.
25	57	137.22	137.06	6	+ 0.16	Dawes.
26	84	135.64	136.65	2	— 1.01	W. Struve.
27	31.53	130.40	135.66	3	+ 0.74	J. Herschel.
28	53	133.85	135.66	7	1.81	Bessel.
29	68	134.00	135.44	5	— 0.84	W. Struve.
30	32.55	133.88	134.26	5	— 0.38	Dawes.
31	57	135.27	134.23	4	+ 1.04	J. Herschel.
32	09	132.88	134.07	5	— 1.19	Bessel.
33	75	133.87	133.96	3	— 0.12	W. Struve.
34	33.43	132.71	133.51	3	— 0.42	Dawes.
35	04	133.94	132.87	10	+ 1.07	Selander.
36	77	132.71	132.72	1	— 0.01	W. Struve.
37	34.47	131.00	131.80	4	— 0.80	»
38	57	130.05	131.74	7	— 1.09	Dawes.
39	01	132.39	131.69	1	+ 0.70	J. Herschel.
40	01	130.06	131.69	7	1.00	Bessel.
41	35.50	126.52	130.61	—	— 0.09	Smyth.
42	00	130.08	130.56	5	+ 0.12	W. Struve.
43	30.51	129.02	129.55	1	0.53	Galle.
44	52	127.00	129.54	4	— 1.88	Eneke.
45	52	129.47	129.54	5	— 0.07	Bessel.
46	05	129.17	129.40	2	— 0.23	J. Herschel.
47	06	129.45	129.39	8	+ 0.06	W. Struve.
48	37.05	127.66	128.97	3	— 1.31	Dawes.
49	47	128.10	128.51	5	— 0.35	Eneke.

Nr.	Epoche	Positionswinkel		Zahl	B—R	Beobachter
		Beobachtung	Rechnung			
50	1837.48	129°01	128°50	1	+ 1°11	J. Herschel.
51	09	128°28	128°27	16	+ 0°01	Bessel.
52	72	127°98	128°24	4	— 0°26	W. Struve.
53	38.51	120°43	127°45	—	— 1°02	Smyth.
54	57	120°55	127°39	7	— 0°84	Galle.
55	39.53	125°19	120°45	2	— 1°26	»
56	00	—	120°38	—	—	Mädler.
57	05	125°82	126°33	2	— 0°51	Dawes.
58	40.35	127°91	125°06	1	+ 2°25	Kaiser.
59	43	125°92	125°58	10	+ 0°34	O. Struve.
60	59	124°82	125°43	4	— 0°04	Dawes.
61	41.44	125°38	124°04	8	+ 0°24	Mädler.
62	06	123°35	124°43	6	— 1°08	Kaiser.
63	68	123°37	124°41	4	— 1°04	Dawes.
64	70	124°22	124°40	5	— 0°18	Bessel.
65	70	123°50	124°34	11	— 0°84	Schlüter.
66	42.18	124°60	123°96	8	+ 0°70	O. Struve.
67	53	123°31	123°04	2	— 0°33	Dawes.
68	55	122°35	123°02	—	— 1°27	Smyth.
69	56	124°53	123°02	7	+ 0°91	Mädler.
70	59	122°55	123°50	22	— 1°04	Kaiser.
71	00	123°43	123°58	20	— 0°15	Schlüter.
72	43.47	121°98	122°81	1	— 0°83	Dawes.
73	53	121°00	122°75	3	— 1°69	Eneke.
74	57	122°00	122°77	17	+ 0°24	Mädler.
75	41.30	120°09	122°02	5	— 1°33	Eneke.
76	57	122°00	122°84	5	+ 0°10	Mädler.
77	45.43	120°80	121°09	0	— 0°29	Hind.
78	48	121°15	121°04	5	+ 0°11	O. Struve.
79	54	120°80	120°99	17	— 0°19	Mädler.
80	81	120°22	120°76	—	— 0°49	Jacob.
81	40.21	120°18	120°41	—	— 0°23	»
82	40	120°13	120°20	7	— 0°07	Hind.
83	58	119°83	120°10	10	— 0°27	Mädler.
84	47.25	120°08	119°53	4	+ 1°15	O. Struve.
85	48	119°09	119°33	—	+ 0°36	Smyth.
86	59	120°29	119°24	5	+ 1°05	Micheell.
87	60	118°38	119°21	8	— 0°83	Mädler.
88	48.12	118°82	118°79	3	+ 0°03	Dawes.
89	50	118°20	118°47	4	— 0°27	Mädler.
90	52	118°09	118°45	5	— 0°36	Bond sen.
91	52	117°79	118°45	5	— 0°60	Bond jun.
92	49.39	118°40	117°72	5	+ 0°74	O. Struve.

Nr.	Epoche	Positionswinkel		Zahl	B—R	Beobachter
		Beobachtung	Rechnung			
93	1850.42	116.85	116.86	8	— 0.01	Main.
94	57	116.10	116.73	—	— 0.63	Jacob.
95	64	116.00	116.07	4	— 0.01	Mädler.
96	66	117.02	116.66	4	+ 0.30	Fletcher.
97	51.47	115.40	115.97	11	— 0.57	Mädler.
98	58	116.11	115.88	8	+ 0.23	Fletcher.
99	64	116.18	115.83	1	+ 0.35	Miller.
100	67	115.51	115.80	5	— 0.29	O. Struve.
101	52.44	114.91	115.15	—	— 0.24	Smyth.
102	63	116.02	114.98	6	+ 1.04	Fletcher.
103	67	115.14	114.95	5	+ 0.19	O. Struve.
104	71	114.35	114.92	11	— 0.57	Mädler.
105	71	115.22	114.92	1	+ 0.30	Miller.
106	75	114.07	114.88	—	— 0.81	Jacob.
107	53.55	113.60	114.20	9	— 0.20	B. Powell.
108	55	116.49	114.20	6	+ 0.29	Dembowski.
109	60	114.68	114.15	7	+ 0.53	Dawes.
110	68	—	114.09	—	—	»
111	77	113.29	114.01	5	— 0.72	Mädler.
112	54.24	113.05	113.00	—	— 0.55	Jacob.
113	24	113.78	113.00	6	+ 0.18	O. Struve.
114	62	—	113.28	—	—	Fletcher.
115	64	113.42	113.25	2	+ 0.17	Dembowski.
116	68	113.31	113.22	10	+ 0.09	Mädler.
117	73	113.74	113.17	4	+ 0.57	Dawes.
118	78	112.91	113.13	3	— 0.22	B. Powell.
119	55.03	115.30	112.91	3	+ 2.45	Luther.
120	45	111.60	112.54	3	— 0.94	Secchi.
121	65	112.73	112.37	5	+ 0.30	Mädler.
122	69	113.30	112.33	2	+ 0.97	Dawes.
123	75	112.41	112.28	7	+ 0.13	B. Powell.
124	50.08	111.94	111.99	5	— 0.05	O. Struve.
125	37	111.49	111.72	7	— 0.23	Jacob.
126	50	112.67	111.60	8	+ 1.07	Winnecke.
127	51	111.25	111.60	3	— 0.03	Mädler.
128	55	111.29	111.56	3	— 0.27	Secchi.
129	63	111.84	111.49	6	+ 0.35	Dembowski.
130	88	113.59	111.20	3	+ 2.33	Förster und Tietjen.
131	57.13	110.60	111.04	3	— 0.38	Jacob.
132	41	112.59	110.77	1	+ 1.82	Winnecke.
133	51	110.49	110.68	4	— 0.19	Secchi.
134	58	110.31	110.62	4	— 0.31	»
135	64	109.54	110.50	4	— 1.02	Dembowski.
136	67	110.29	110.53	2	— 0.24	Morton.
137	69	110.22	110.52	4	— 0.30	O. Struve.

Nr.	Epoche	Positionswinkel		Zahl	B—R	Beobachter
		Beobachtung	Rechnung			
138	1858.12	109.77	110.12	3	0.35	Jacob.
139	40	108.68	109.85	2	1.17	Morton.
140	44	109.35	109.82	4	0.47	Dembowski.
141	64	109.04	106.63	9	0.59	Mädler.
142	59.30	109.12	109.00	5	+ 0.12	O. Struve.
143	72	109.39	108.59	4	+ 0.80	Dawes.
144	75	109.06	108.56	5	+ 0.50	Auwers.
145	77	107.91	108.54	5	— 0.03	B. Powell.
146	81	107.02	108.50	1	— 1.48	Mädler.
147	00.01	106.33	107.71	3	— 1.38	Secchi.
148	74	109.04	107.58		+ 1.46	Luther.
149	70	106.74	107.56	5	— 0.52	Auwers.
150	01.46	107.12	106.85	1	+ 0.27	Main.
151	67	106.66	106.63	8	+ 0.03	Mädler.
152	74	106.05	106.56	7	0.51	Auwers.
153	81	105.47	106.49	3	— 1.02	B. Powell.
154	02.40	105.60	105.87	3	— 0.27	O. Struve.
155	62	105.58	105.64	9	— 0.06	Dembowski.
156	72	105.24	105.53		— 0.29	Mädler.
157	03.47	104.09	104.70	11	— 0.61	Adolph.
158	51	104.29	104.66	9	— 0.37	Dembowski.
159	51	104.15	104.66	2	0.41	Secchi.
160	55	104.61	104.61	5	0.00	Romberg.
161	03.55	106.18	104.61	1	+ 1.57	Winnecke.
162	64	105.86	104.51	5	+ 1.35	Hall.
163	04.60	103.04	103.41	4	+ 0.23	Dembowski.
164	05.30	102.66	102.57	8	+ 0.09	Engelmann.
165	51	102.38	102.32	9	+ 0.06	Dembowski.
166	52	102.78	102.31	4	+ 0.47	Secchi.
167	55	104.03	102.27	2	+ 1.70	Talmage.
168	56	100.95	102.26	11	— 1.31	Kaiser.
169	68	100.45	102.11	9	— 1.66	»
170	00.36	100.71	101.26	5	— 0.55	O. Struve.
171	49	101.88	101.09	6	+ 0.79	Talmage.
172	50	102.09	101.07	1	+ 1.02	Searle.
173	50	103.29	101.07	2	+ 2.22	Winlock.
174	52	101.29	101.05	2	+ 0.24	»
175	52	101.68	101.04	8	+ 0.64	Dembowski.
176	61	101.22	100.92	3	+ 0.30	Secchi.
177	65	97.09	100.88	3	3.79	Winlock.
178	07.41	98.23	99.87	1	— 1.04	Main.
179	44	99.91	99.83	2	+ 0.08	Knott.
180	53	98.70	99.71	10	— 1.01	Searle.
181	57	100.47	99.65	7	+ 0.82	Dembowski.

Nr.	Epoche	Positionswinkel		Zahl	B R	Beobachter
		Beobachtung	Rechnung			
182	1807.05	100.40	99.55	5	+ 0.85	Winlock.
183	08.47	98.50	98.38	7	+ 0.12	Dembowski.
184	50	98.50	98.25	2	+ 0.34	Knott.
185	58	100.01	98.22	7	+ 1.79	Main.
186	59	100.81	98.21	2	+ 2.00	Talmage.
187	72	98.70	98.02	2	+ 0.08	O. Struve.
188	72	97.07	98.02	4	— 0.35	Dunér.
189	90	98.11	97.75	5	+ 0.30	Brünnow.
190	09.01	96.01	96.05	8	0.04	Dembowski.
191	09	97.01	96.52	3	+ 0.49	Dunér.
192	73	98.21	96.40	5	+ 1.75	Peirce.
193	70.51	94.23	95.10	8	0.53	Dembowski.
194	51	94.00	95.10	2	— 1.10	Gledhill.
195	58	95.71	95.04	4	+ 0.67	Main.
196	86	95.31	94.50	3	+ 0.75	Talmage.
197	71.49	95.00	93.44	2	+ 1.50	Main.
198	49	92.77	93.44	2	0.07	Wilson u. Seabroke.
199	51	90.92	93.40	10	2.48	Peirce.
200	53	92.72	93.30	8	— 0.04	Dembowski.
201	59	95.03	93.25	3	+ 1.78	Knott.
202	64	92.82	93.10	2	— 0.34	Gledhill.
203	72	92.72	93.01	2	— 0.29	Dunér.
204	72.47	91.97	91.50	2	+ 0.41	Brünnow.
205	49	90.86	91.52	9	— 0.00	Dembowski.
206	49	91.63	91.52	3	+ 0.11	Ferrari.
207	49	90.94	91.52	2	— 0.58	Main.
208	51	91.60	91.47	3	+ 0.13	Wilson u. Seabroke.
209	00	93.13	91.30	4	+ 1.84	O. Struve.
210	73.51	89.03	89.37	1	+ 0.20	Gledhill.
211	51	88.93	89.37	8	— 0.44	Dembowski.
212	57	88.78	89.20	2	— 0.48	Wilson u. Seabroke.
213	03	88.98	89.10	3	0.12	Main.
214	74.07	86.80	88.11	2	— 1.31	Talmage.
215	47	88.96	87.16	4	+ 1.80	Main.
216	57	86.22	86.92	8	— 0.09	Dembowski.
217	09	87.20	86.02	3	+ 0.58	O. Struve.
218	73	86.03	86.52	1	+ 1.11	Gledhill.
219	75.52	83.86	84.47	9	0.01	Dembowski.
220	62	84.30	84.20	8	+ 0.10	Schiaparelli.
221	68	4.92	84.02	4	+ 0.90	Main.
222	70.28	82.15	82.20	3	— 0.14	Wilson u. Seabroke.
223	48	82.22	81.69	5	+ 0.53	Schur.
224	52	79.00	81.56	3	2.50	Doberck.
225	54	81.04	81.50	7	0.40	Dembowski.

Nr.	Epoche	Positionswinkel		Zahl	B-R	Beobachter
		Beobachtung	Rechnung			
226	1870.57	83.73	81.41	2	+ 2.32	Winnecke.
227	59	81.43	81.35	6	+ 0.08	Schiaparelli.
228	64	81.08	81.20	3	0.12	Hall.
229	64	81.71	81.20	4	+ 0.51	Jedrzejewicz.
230	66	79.95	81.13	5	- 1.18	Waldo.
231	74	81.18	80.88	4	+ 0.30	O. Struve.
232	77.51	77.75	78.33	8	- 0.58	Dembowski.
233	51	78.20	78.33	—	- 0.07	Flammström.
234	52	77.73	78.30	3	- 0.57	Dobereck.
235	55	75.98	78.19	4	- 2.21	Hall.
236	58	79.58	78.09	10	+ 1.49	Jedrzejewicz.
237	61	77.50	77.98	10	- 0.48	Schiaparelli.
238	67	79.96	77.77	4	+ 2.19	Winnecke.
239	68	78.60	77.73	4	+ 0.87	Stone.
240	68	79.71	77.73	5	+ 1.98	Schur.
241	93	76.49	76.83	3	0.34	O. Struve.
242	78.51	74.69	74.62	7	- 0.07	Dembowski.
243	54	75.43	74.50	3	+ 0.93	Wilson u. Seabroke.
244	54	75.63	74.50	4	+ 1.13	Dobereck.
245	69	76.51	73.89	2	+ 2.62	Winnecke.
246	72	72.03	73.77	4	- 1.74	Goldney.
247	79.41	69.37	70.80	—	- 1.43	Mitchell.
248	50	70.00	70.40	10	- 0.40	Schiaparelli.
249	53	69.37	70.26	—	- 0.89	O. Stone.
250	53	68.77	70.26	—	- 1.49	"
251	59	71.49	69.99	5	+ 1.50	Hall.
252	64	68.07	69.72	—	- 1.70	Mitchell.
253	65	70.50	69.72	4	+ 0.78	Wilson u. Seabroke.
254	66	68.75	69.07	5	- 0.32	Jedrzejewicz.
255	71	70.67	69.43	1	+ 1.24	Burnham.
256	80.47	65.96	65.64	3	+ 0.32	Dobereck.
257	49	62.27	65.53	5	- 3.26	Franz.
258	53	68.86	65.32	5	+ 3.54	Main.
259	58	66.64	65.00	6	+ 0.58	Hall.
260	62	63.19	64.84	5	- 1.65	Frisby.
261	66	65.05	64.62	10	+ 0.43	Schiaparelli.
262	66	62.97	64.62	6	- 1.65	Jedrzejewicz.
263	74	62.87	64.18	2	- 1.31	Wilson u. Seabroke
264	81.24	61.93	61.27	2	+ 0.66	Dobereck
265	74	60.84	59.51	5	+ 1.33	Hall.
266	54	59.28	59.51	1	3.23	Frisby.
267	77	59.51	58.06	3	+ 1.45	Wilson u. Seabroke.

Nr.	Epoche	Positionswinkel		Zahl	B—R	Beobachter
		Beobachtung	Rechnung			
268	1882·49	52·48	53·15	2	— 0·67	Cincinnati.
269	53	55·92	52·86	2	+ 3·00	Doberck.
270	57	50·34	52·57	7	+ 3·77	Hall.
271	01	52·01	52·28	9	— 0·27	Schiaparelli.
272	01	48·93	52·28	2	— 3·35	O. Struve.
273	02	48·96	52·21	4	— 3·35	Jedrzejewicz.
274	02	47·00	52·21	6	— 4·55	Frishy.
275	09	51·41	51·68	4	— 0·27	Wilson u. Seabroke.
276	72	51·80	51·47	4	+ 0·33	Engelmann.
277	83·49	45·77	45·40	4	+ 0·37	Perrotin.
278	57	43·79	44·73	2	— 0·94	Frishy.
279	00	47·90	44·49	8	+ 3·47	Hall.
280	02	43·90	44·31	15	— 0·41	Schiaparelli.
281	04	40·39	44·14	2	— 3·75	Hall jun.
282	05	42·39	44·00	0	— 1·67	Jedrzejewicz.
283	05	42·64	44·06	2	— 3·42	O. Struve.
284	08	45·40	43·80	4	+ 1·00	Küstner.
285	08	44·05	43·80	5	— 0·25	Wilson u. Seabroke.
286	72	43·81	43·47	6	+ 0·34	Engelmann.
287	84·41	40·98	37·30	1	+ 3·02	Glasenapp.
288	41	37·79	37·30	1	+ 0·43	Cincinnati.
289	56	34·71	35·97	6	— 1·20	Perrotin.
290	59	37·79	35·69	7	+ 2·10	Hall.
291	02	35·46	35·41	8	+ 0·05	Schiaparelli.
292	09	30·39	34·75	2	— 4·30	O. Struve.
293	09	35·45	34·75	5	+ 0·70	Engelmann.
294	70	35·06	34·00	3	+ 0·40	Wilson u. Seabroke.
295	85·50	26·22	20·82	4	— 0·60	Perrotin.
296	56	25·33	26·21	4	— 0·88	Wilson u. Seabroke.
297	57	29·74	26·11	7	+ 3·03	Hall.
298	59	24·60	25·91	2	— 1·31	Hepperger u. Holletschek.
299	04	24·49	25·40	9	— 0·91	Engelmann.
300	05	26·60	25·29	2	+ 1·40	Schiaparelli.
301	72	23·58	24·57	3	— 0·99	Jedrzejewicz.
302	86·53	10·97	10·10	7	— 2·13	Hall.
303	50	15·49	15·88	7	— 0·30	Perrotin.
304	67	16·05	14·01	4	+ 1·44	Wilson u. Seabroke.
305	67	13·89	14·61	7	0·72	Jedrzejewicz.
306	07	15·00	14·61	7	+ 0·45	Engelmann.
307	87·55	359·81	5·23	1	— 5·42	Wilson u. Seabroke.
308	02	3·79	4·49	0	— 0·70	Hall.
309	81	3·70	2·49	4	+ 1·21	Tarrant.

Nr.	Epoche	Positionswinkel		Zahl	B—R	Beobachter
		Beobachtung	Rechnung			
310	1888°41	352°91	356°28	2	— 3°37	Comstock.
311	55	353°30	354°87	6	— 1°57	Tarrant.
312	55	354°74	354°87	6	— 0°13	Maw.
313	57	353°60	354°66	6	— 1°00	Hall.
314	65	353°21	353°83	1	— 0°62	Leavenworth.
315	89°30	348°92	347°49	2	+ 1°43	Burnham.
316	48	345°17	345°70	2	— 0°59	Wilson & Seabroke.
317	50	348°85	345°57	2	+ 3°28	Glasenapp.
318	51	345°92	345°48	5	+ 0°44	Comstock.
319	51	345°20	345°48	6	— 0°28	Tarrant.
320	58	344°77	344°83	6	— 0°06	Hall.
321	64	346°60	344°26	5	+ 2°40	Maw.
322	71	345°32	343°61	1	+ 1°71	O. Struve.
323	77	343°57	343°05	4	+ 0°52	Schur.
324	90°42	338°76	337°14	2	+ 1°62	Glasenapp.
325	56	336°03	335°91	7	+ 0°12	Hall.
326	61	336°75	335°49	3	+ 1°26	Maw.
327	61	336°87	335°49	1	+ 1°38	Wellmann.
328	66	334°36	335°05	4	— 0°69	Tarrant.
329	70	334°80	334°71	6	+ 0°09	Schur.
330	71	335°81	334°62	16	+ 1°19	Bigourdan.
331	91°50	328°75	328°04	10	+ 0°71	See.
332	53	328°05	327°80	3	+ 0°25	Tarrant.
333	54	328°58	327°72	4	+ 0°86	Maw.
334	56	329°33	327°56	2	+ 1°77	Collins.
335	56	327°78	327°56	6	+ 0°22	Hall.
336	58	329°10	327°40	6	+ 1°70	Schur.
337	59	320°21	327°33	7	— 1°12	Knorre.
338	64	327°47	326°93	2	+ 0°54	See.
339	67	320°92	320°69	9	+ 0°23	Bigourdan.
340	92°37	322°10	321°31	4	+ 0°85	Burnham.
341	41	321°73	321°01	3	+ 0°72	Searle
342	41	320°73	321°01	2	— 0°28	Collins.
343	42	320°87	320°93	6	— 1°06	Knorre.
344	49	321°93	320°41	1	+ 1°52	Maw.
345	57	321°52	319°80	4	+ 1°72	Comstock.
346	62	319°25	319°42	5	— 0°17	Bigourdan.
347	63	321°41	319°35	4	+ 2°06	Tarrant.
348	64	320°99	319°27	6	+ 1°72	Schur.
349	68	317°77	318°97	2	— 1°20	Glasenapp.

Nr.	Epoche	Positionswinkel		Zahl	B—R	Beobachter
		Beobachtung	Rechnung			
350	1893·45	312·04	313·28	7	— 1·24	Gledhill.
351	47	314·02	313·14	3	+ 0·88	Maw.
352	56	313·74	312·49	2	+ 1·25	Collins.
353	58	313·64	312·35	3	+ 1·29	Tucker.
354	62	312·90	312·00	5	+ 0·84	Comstock.
355	62	313·62	312·06	4	+ 1·50	Schur.
356	62	311·52	312·00	1	— 0·54	Knorre.
357	69	309·14	311·55	1	— 2·41	Lewis.
358	69	309·44	311·55	1	— 2·11	Wilson.
359	70	312·54	311·47	11	+ 1·07	Schiaparelli.
360	94·49	309·51	305·79	5	+ 3·72	Ebell.
361	51	306·40	305·65	6	+ 0·75	Glasenapp.
362	51	311·52	305·65	3	+ 5·87	Ebell.
363	54	307·65	305·44	3	+ 2·21	Maw.
364	60	304·90	305·01	12	— 0·11	Knorre.
365	60	306·60	305·01	4	+ 1·59	Schur.
366	75	302·73	303·94	4	— 1·21	Comstock.
367	77	303·45	303·81	6	— 0·30	Schiaparelli.
368	78	301·53	303·74	5	— 2·21	Callandreau.
369	79	302·30	303·67	5	— 1·31	Bigourdan.
370	95·32	298·88	299·83	3	— 0·95	See.
371	50	298·46	298·49	2	— 0·03	Glasenapp.
372	51	301·88	298·40	5	+ 3·48	Schur.
373	58	297·16	297·88	4	— 0·72	Maw.
374	58	296·00	297·88	2	— 1·82	Collins.
375	61	296·76	297·63	3	— 0·89	Comstock.
376	62	295·28	297·57	5	— 2·29	Hough.
377	69	290·10	297·05	1	— 0·89	Lewis.
378	70	296·26	296·98	5	— 0·72	See
379	72	296·11	296·83	4	— 0·72	»
380	72	296·46	296·83	3	— 0·37	Moulton.
381	90·39	292·55	291·55	6	+ 0·98	Hussey.
382	51	291·53	290·58	3	+ 0·95	Aitken.
383	58	289·50	290·00	5	— 0·50	Pritchett.
384	59	288·34	289·91	6	— 1·57	Bowyer.
385	59	290·13	289·91	3	+ 0·22	Wagner.
386	59	288·33	289·91	3	— 1·58	Soulé.
387	61	288·20	289·75	8	— 1·55	See.
388	61	289·70	289·75	1	+ 0·01	Dyson.
389	62	288·43	289·67	3	— 1·24	Cogshall.
390	62	291·10	289·07	1	+ 1·49	Niblett.
391	63	287·98	289·58	4	— 1·60	Comstock.
392	65	290·34	289·42	5	+ 0·92	Lewis.

Nr.	Epoche	Positionswinkel		Zahl	B—R	Beobachter
		Beobachtung	Rechnung			
393	1890·00	287·40	289·34	9	— 1·94	Schur.
394	68	287·00	289·17	3	— 1·51	Morgan.
395	74	288·82	288·68	6	+ 0·14	Leavenworth.
396	80	289·69	288·18	4	+ 1·51	Aitken.
397	97·40	283·48	282·83	4	+ 0·65	Cogshall.
398	41	283·41	282·73	6	+ 0·68	See.
399	46	283·76	282·20	3	+ 1·50	Aitken.
400	54	277·68	281·49	13	— 3·81	Doodittle.
401	55	281·30	281·40	1	— 0·10	Glascenapp.
402	58	283·99	281·11	13	+ 2·88	Schur.
403	59	270·85	281·02	4	— 4·17	Pritchett.
404	67	280·63	280·15	8	+ 0·48	Hussey.
405	83	270·94	278·68	3	— 1·74	Aitken.
406	98·44	273·49	272·18	6	+ 1·31	»
407	47	270·59	271·84	2	— 1·25	Soló.
408	51	271·01	271·39	1	— 0·38	Glascenapp.
409	56	272·41	270·80	9	+ 1·61	Schur.
410	99·57	263·45	258·00	6	+ 5·45	»

Unerklärt bleiben die großen Differenzen bei den Beobachtungen der Jahre 1779 bis 1781. Wenn man sich an den Wortlaut der Herschel'schen Originalbeobachtung hält, welche für 1781·73 den Wert $99^{\circ}23$ gibt, so ist allerdings kein Gang vorhanden, aber die Beobachtungen an sich erscheinen nicht sehr zuverlässig. Die andere Lesart $80^{\circ}77$ stimmt zwar dem Sinne der Bewegung nach mit der Position von 1779, aber untereinander herrscht auch keine erhebliche bessere Übereinstimmung. Es ist daher wahrscheinlich, dass die Beobachtungen misslingen sind, da irgend ein äußerer Einfluss, der im Laufe von zwei Jahren auf 6 bis 12° anwächst, doch kaum denkbar ist, zumal zu dieser Zeit die Distanzen ziemlich groß ($4''$) und die Positionswinkel daher minder empfindlich waren.

Der Vergleich mit neuen Beobachtungen, die noch nicht verwendet wurden, stellt sich folgendermaßen:

	Epoche	Beobachteter		Positionswinkel			
		Positionswinkel	Precession	für 1850	Rechnung	B—R	
See	1899·52	261·7	0·28	261·98	258·68	+3·30	
Aitken	1899·37	262·2	0·28	262·48	260·74	+1·74	
	1899·42	262·33	0·28	262·61	260·07	+2·54	
Doberck	1900·59	244·10	0·28	244·38	242·35	+2·03	
Soló	1900·68	243·93	0·28	244·21	240·80	+3·41	

Die Größe der Differenzen ist nicht auffallend, da die Distanzen jetzt wieder sehr klein sind; dass aber alle positiv sind, kann möglicherweise doch principiell sein, obwohl sich bis jetzt noch kein Gang zeigt. Bei der hohen Empfindlichkeit der Positionswinkel wäre übrigens eine geringe Änderung der Elemente hinreichend, um auch diese Unterschiede verschwinden zu machen. Doch soll mit dem Einbeziehen der neuen Beobachtungen lieber gewartet werden, bis sich die Verhältnisse geklärt haben, was in etwa 10 Jahren mit dem Eintreten langsamerer Bewegung im Positionswinkel der Fall sein dürfte.

Jedenfalls ist es gelungen, die beobachteten Positionswinkel hinreichend darzustellen, und selbst die enorme Abnahme derselben von 1899 auf 1900 von nahe 20° spiegelt sich in der Rechnung wieder.

Was nun die Distanzen betrifft, so bleibt in der Darstellung ein unzweifelhafter Gang zurück. Auf die ersten großen positiven Reste ist allerdings wenig Gewicht zu legen; hier scheinen in der That die persönlichen Fehler ausschlaggebend zu sein; während nämlich Herschel, Bessel, Encke und andere starke positive Reste lassen, ergeben die Beobachtungen von W. Struve sehr kleine Reste, die zum Theil negativ sind und sogar eher den umgekehrten Gang zeigen, wie die anderen.

Seit 1850 aber zeigt sich ein Gang, der unter keinen Umständen auf rein persönliche Fehler zurückgeführt werden kann. Um dies zu constatieren, müssen alle längeren Beobachtungsreihen, welche immer den Einfluss persönlicher Fehler verstärken, ausgeschieden werden, so dass man eine Reihe von möglichst verschiedenen Beobachtern erhält. Diese, im folgenden wiedergegeben, zeigt ebenfalls deutlich den obenerwähnten Gang, obwohl die Regelmäßigkeit immerhin noch ab und zu durch einen Zeichenwechsel unterbrochen wird.

Worin dieser Gang begründet ist, lässt sich nicht feststellen. Möglicherweise entsteht er aus der Verschiedenheit der Beobachtungsmethode bei großen und kleinen Distanzen, worauf schon Bessel hingewiesen. Dafür mag auch der Umstand sprechen, dass trotz der stark geänderten Voraussetzungen doch die Differenzen Beobachtung – Rechnung nahezu dieselben sind wie bei Schur.

Datum	Beobachter	B – R	Datum	Beobachter	B – R
1779.76	W. Herschel	— 1.00	1874.49	Ferrari	— 0.215
80.50	"	— 0.78	82.51	Wilson u. Seabroke	— 0.219
1845.43	Hind	+ 0.041	73.57	"	— 0.285
46.46	"	0.565	76.28	"	0.294
48.52	Bond sen.	+ 0.105	76.00	Waldo	+ 0.080
48.52	" jun.	+ 0.005	77.51	Flammarion	— 0.230
51.04	Miller	— 0.269	77.08	O. Stone	— 0.391
52.71	"	— 0.227	78.54	Wilson u. Seabroke	0.178
57.07	Morton	— 0.309	78.72	Goldney	+ 0.020
58.40	"	0.324	79.53	O. Stone	— 0.107
63.55	Romberg	0.155	79.05	Wilson u. Seabroke	+ 0.073
66.50	Searle	— 0.139	79.71	Burnham	0.797
66.50	Winlock	+ 0.401	80.74	Wilson u. Seabroke	0.170
66.52	"	+ 0.893	81.77	"	0.003
66.65	"	— 1.228	82.49	Wilson (Cine.)	+ 0.549
67.44	Knott	0.172	82.09	Wilson u. Seabroke	+ 0.010
67.53	Searle	0.019	83.49	Perrotin	+ 0.070
67.65	Winlock	0.771	83.04	Hall jun.	+ 0.414
68.50	Knott	— 0.242	83.08	Küstner	+ 0.333
68.72	Dunér	— 0.358	83.08	Wilson u. Seabroke	+ 0.120
68.90	Brünnow	— 0.245	84.41	Wilson (Cine.)	+ 0.231
69.69	Dunér	0.446	84.50	Perrotin	+ 0.039
69.73	Peirce	+ 0.094	84.70	Wilson u. Seabroke	+ 0.523
71.49	Wilson u. Seabroke	0.108	85.50	Perrotin	+ 0.131
71.51	Peirce	— 0.089	85.59	Hopp u. Holl	+ 0.500
71.55	Knott	— 0.391	86.50	Perrotin	+ 0.084
71.72	Dunér	— 0.405	86.07	Wilson u. Seabroke	+ 0.129
72.47	Brünnow	0.330	88.05	Leavenworth	+ 0.245

Datum	Beobachter	B-R	Datum	Beobachter	B-R
1889.30	Burnham	+ 0.222	1896.58	Pritchett	+ 0.022
89.48	Wilson u. Seabroke	— 0.348	96.59	Bowyer	+ 0.170
90.61	Wellmann	+ 0.126	96.59	Wagner	+ 0.164
92.37	Burnham	+ 0.113	96.59	Soulé	+ 0.200
92.41	Searle	+ 0.339	96.61	Dyson	+ 0.068
93.58	Tucker	+ 0.175	96.62	Cogshall	— 0.031
93.69	Lewis	+ 0.101	96.62	Niblett	+ 0.019
93.69	Wilson	— 0.019	96.65	Lewis	— 0.078
94.49	Ebell	+ 0.301	96.68	Morgan	+ 0.110
94.51	"	+ 0.065	96.74	Leavenworth	+ 0.040
94.78	Callandreau	+ 0.196	97.40	Cogshall	+ 0.019
95.62	Hough	+ 0.000	97.54	Doolittle	— 0.003
95.69	Lewis	+ 0.421	97.59	Pritchett	— 0.026
95.72	Moulton	— 0.017	97.67	Hussey	+ 0.011
96.39	Hussey	+ 0.010	98.47	Solá	+ 0.302

In der That wird sich kaum ein zweites Object finden, welches so crasse Verhältnisse bietet, wie 70 Ophiuchi. Vielleicht ist auch die große Helligkeit von einigem Einfluss.

Jedenfalls entzieht sich aber unter diesen Verhältnissen die Darstellung der Distanzen der Beurtheilung. Sollten jedoch die Abweichungen thatsächlich reell sein, so könnte man daraus zweierlei folgern: entweder ist die hier vertretene Hypothese falsch und die Räthsel des Systems bleiben noch immer ungelöst, oder es sind die von uns eingeführten Vernachlässigungen und Vereinfachungen, welche sich in dieser Weise geltend machen. In dieser Hinsicht käme in Betracht die Convergenz der Anziehungen nach der Masse m_3 , die Bewegung derselben und eine Störung der Neigung, welche in dem Falle eintritt, als m_3 nicht in der Bahnebene von m_1 und m_2 liegt.

Zum Schlusse sei noch die Bedeutung unserer Resultate über die dritte Masse discutirt.

Wir fanden

$$\log \frac{m_3}{D^3} = 7.5727 - 10$$

$$2(\lambda - \pi) = 149.384$$

Da $\frac{m_3}{D^3}$, wie erwähnt, im Gradmaß ausgedrückt ist, so haben wir noch durch 57.296 zu dividieren und erhalten

$$\log \frac{m_3}{D^3} = 5.8146 - 10$$

$$\frac{m_3}{D^3} = 0.00006526$$

Für m_3 können wir verschiedene Werte annehmen und dazu die entsprechenden D berechnen; es sollen dabei auch sehr große Werte für m_3 substituiert werden, da gerade für diese die Bedingungen unserer Hypothese am besten erfüllt sein werden.

Es ist für

$$m_3 = \frac{1}{2} \quad D = 19''7 \quad \Delta = 12''9$$

1	24·8	16·3
2	31·3	20·5
3	35·8	23·5
5	42·5	27·8
10	53·5	35·1
30	77·2	50·6

Die Größen Δ sind die Projectionen von D auf die Sphäre, also die scheinbaren Distanzen von m_3 .

Es muss nun untersucht werden, welche Ortsveränderung m_3 unter Einfluss der wechselseitigen Anziehung zeigen muss, da die Unveränderlichkeit der Richtung D nur eine Näherung sein sollte. Es findet sich nach der Formel:

$$\frac{p_1}{p} = \sqrt{1 + m_3} \sqrt{\frac{a^3}{a_1^3}}$$

für die mittlere Bewegung in einem Jahre

$$m_3 = \frac{1}{2} \quad p_1 = 0^s 55$$

1	0·45
2	0·39
3	0·37
5	0·35
10	0·33
30	0·32

Diese Werte von rund 40° im Jahrhundert scheinen auf den ersten Blick sehr groß; wenn wir uns aber erinnern, dass bei einem der Ausgleiche für den doppelten Richtungswinkel eine Correction von 36° resultierte, so sehen wir, dass diese Richtung selbst nicht viel sicherer bestimmt ist, und dass wir daher nicht von einer wesentlichen Richtungsänderung von D sprechen können. Uebrigens sind die p_1 mittlere Bewegungen, von denen die wahren erheblich abweichen können.

Speziell auf den Positionswinkel hat die Änderung von λ wenig Einfluss; stärker dagegen wirkt sie auf die Distanzen. Führen wir in unsere Störungsfunction R (Gleichung 10) für λ ein:

$$\lambda = \lambda_0 + p_1 (t - t_0)$$

so liefert die Gleichung:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t_0}$$

$$= \frac{k^2 m_1 m_2}{2 a^2} \cdot \frac{da}{dt} = \frac{k^2 m_3}{D^3} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot 5 e^2 \sin 2(\lambda - \pi) \cdot p_1$$

oder

$$\frac{da}{dt} = - \frac{m_3}{D^3} a^4 \cdot 5 e^2 \sin (\lambda - \pi) \cdot p_1$$

$$= - 0.01636 p_1$$

Für einen Wert $p_1 = -0.4$ folgt für a während der letzten 50 Jahre eine Zunahme von 0.327 welche ungefähr den Resten in der Darstellung der Distanzen entspricht.

Für die Richtung, in der m_3 zu suchen ist, ergibt sich aus

$$2(\lambda - \pi) = 149.384$$

$$\lambda - \pi = 74.692$$

oder

$$= 74.692 + 180 = 254.692,$$

so dass zwei entgegengesetzte Richtungen möglich sind.

Unter Einführung von

$$\pi = 169.771$$

$$\delta_6 = 120.867$$

$$i = 56.788$$

finden wir für den Positionswinkel von D

$$\lambda = 349.767 \text{ oder } 169.767$$

Es wurde wiederholt gleichzeitig mit dem System 70 Ophiuchi noch ein Anhaltstern beobachtet, um eventuelle Änderungen in der Bewegung des Hauptsternes zu constatieren. Die Positionswinkel und Distanzen, welche diese Beobachtungen ergaben, sind die folgenden:

1878.84	197.8	71.38	Hall
82.79	197.8	65.60	Hall
86.52	200.4	62.50	Hall
89.30	203.3	59.45	Burnham
97.44	208.3	53.86	See
99.43	209.7	51.95	See
1856.63	215.1	87.57	Secchi
97.51	218.1	98.68	Doolittle

Es wurden aber offenbar von den verschiedenen Beobachtern verschiedene Sterne verwendet und mit C bezeichnet, weshalb obige Beobachtungen in zwei Gruppen getheilt wurden.

Bringt man die Eigenbewegung von 70 Ophiuchi mit

$$d\alpha = +0.0131 = +0.1965$$

$$d\delta = -1.109$$

in Rechnung, so erhält man aus der ersten Gruppe folgende Positionen von C bezogen auf den Ort des Hauptsternes von 1856.63:

1878.84	190.69	94.1
82.79	189.26	92.7
86.52	189.84	93.1
89.30	190.66	92.5
97.44	190.79	94.4
99.43	190.81	95.1

Lässt sich in diesen Zahlen ein Gang erkennen, so rührt er jedenfalls nur von der Bewegung des Hauptsternes um den Schwerpunkt der beiden sichtbaren Componenten her. Auf diesen Stern bezieht sich also mit vollem Recht die See'sche Bemerkung: ohne physischen Zusammenhang mit 70 Ophiuchi.

Betrachten wir aber die andere Gruppe und beziehen die letzte Beobachtung wieder auf den Ort von 1856·63, so erhalten wir folgendes Resultat:

$$\begin{array}{rcl} 1856\cdot63 & 215^{\circ}1 & 87^{\circ}57 \\ 97\cdot51 & 203\cdot1 & 122\cdot9 \end{array}$$

woraus für diesen Stern eine Eigenbewegung folgt von

$$d\alpha = -0^{\circ}0043$$

$$d\delta = 1^{\circ}253$$

Diese Eigenbewegung ist nicht nur sehr groß, sondern auch nahezu gleich der des Systems 70 Ophiuchi.

Die Abweichungen der Positionswinkel von unserer berechneten Richtung (170°) liegen wohl noch innerhalb der Unsicherheitsgrenze; denn dass schließlich diese Richtung scheinbar auf wenige Grade genau erhalten wurde, ist doch nur Rechnungsergebnis.

Es ist also nicht unwahrscheinlich, dass der von Secchi und Deolittle beobachtete und mit C bezeichnete Stern die dritte Componente des Systems ist, und dass die Differenz der Eigenbewegung, soweit sie reell ist, von der Bewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt herrührt.

Die nächste Aufgabe bestünde somit darin, durch Eigenbewegungs- und Parallaxenbestimmungen festzustellen, ob der Stern C in der That zum System gehört oder ob noch weitere Sternverwechslungen vorliegen. Sollte sich das letztere herausstellen, so wären die Rechnungen unter Einführung von neuen Variablen, welche die unbekannte Bewegung der unsichtbaren Masse genauer definieren, als bisher geschehen, zu wiederholen. Sollte aber die dritte Masse in der That gefunden sein, so wäre das Problem nun in ähnlicher Weise zu behandeln, wie im Falle von ϵ Cancri. Vielleicht gelingt es dann endlich, jene Übereinstimmung von Beobachtung und Rechnung herbeizuführen, welche in allen astronomischen Problemen verlangt wird.

Herr Prof. Schiaparelli hatte die besondere Freundlichkeit, mir seine Beobachtungsreihe aus den letzten Jahren zu übersenden. Ich vergleiche dieselbe hier noch mit meiner Bahn gleichzeitig mit einigen anderen Beobachtungen, die mir erst später bekannt geworden sind.

Die Positionswinkel sind bereits auf $1850\cdot0$ reducirt.

Datum	Beobachter	Rechn.	B - R	Beob.	Rechn.	B - R	Zahl der Abende	Beobachter
1893·00	311°34	311°78	-0·44	2°23	2°238	-0·008	3	Coleman
04·00	304·85	305·01	-0·16	2°30	2°254	+0·046	5	Coleman
95·55	299·02	298·10	+0·92	2°139	2°235	-0·096	9	Schiaparelli
02	297·36	297·57	-0·21	2°55	2°232	+0·318	7	Coleman
96·47	292·19	290·91	+1·28	2°080	2°175	-0·095	2	Schiaparelli
01	289·26	289·75	-0·49	2°31	2°102	+0·148	3	Maw
77	289·07	288·43	+1·24	1°084	2°140	-0·102	4	Schiaparelli
97·50	282·42	281·87	+0·55	1°096	2°003	-0·007	2	Schiaparelli
55	279·97	281·40	-1·43	1°80	2°057	-0·257	4	Maw
98·50	272·00	271·50	+1·48	1°797	1°024	-0·127	2	Schiaparelli
55	270·47	270·02	+0·05	1°01	1°017	-0·007	1	Maw

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.](#)

Jahr/Year: 1902

Band/Volume: [72](#)

Autor(en)/Author(s): Prey Adalbert

Artikel/Article: [Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse des Systems 70 Ophiuchi. 177-241](#)