

THEORIE DER SCHEINBAREN GRÖSSE BEI BINOCULAREM SEHEN

VON
DR. FRANZ HILLEBRAND,
PROFESSOR DER PHILOSOPHIE AN DER UNIVERSITÄT IN INNSBRUCK.

Mit 17 Textfiguren.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 20. JUNI 1901.

I. Capitel.

Einleitende Bemerkungen. Definitionen und Fragestellung.

§ 1. Nach dem in Physik und Astronomie herrschenden Sprachgebrauche versteht man unter scheinbarer GröÙe eines Gegenstandes die GröÙe seines Netzhautbildes oder, da diese letztere unmittelbar von dem Winkel bestimmt wird, den die, zweien Grenzpunkten des Gegenstandes zugehörigen, im mittleren Knotenpunkte des Auges sich schneidenden Richtungslinien mit einander bilden, auch den Winkel, den diese beiden Richtungslinien einschließen — den sogenannten Gesichtswinkel oder Sehwinkel. So gefasst, gehört dieser Begriff durchaus der geometrischen Optik an. Wenn man statt des viel klareren Ausdruckes »Gesichtswinkel« das Wort »scheinbare GröÙe« gebraucht, und damit einem dioptrischen Begriffe einen psychologischen Beigeschmack gegeben hat, so ist das unter der Voraussetzung geschehen, dass uns Objecte dann und nur dann als gleich groß erscheinen, wenn ihre Netzhautbilder (beziehungsweise Gesichtswinkel) gleich groß sind, und dass bei ungleichen Netzhautbildern (beziehungsweise Gesichtswinkeln) ein Object dann n -mal größer oder kleiner als ein anderes erscheint, wenn sein Gesichtswinkel n -mal größer oder kleiner ist. Diese Voraussetzung trifft nur dann zu, wenn die Entfernungsunterschiede der verglichenen Objecte keine Rolle spielen, entweder weil sie überhaupt nicht da sind (also bei gleich weit entfernten Objecten) oder weil sie physiologisch unwirksam sind (wie bei den Gestirnen) oder schließlich weil es sich überhaupt nicht um einen Reiz und eine physiologische Angriffsfläche, sondern etwa bloß um ein Linsensystem und einen Schirm handelt, der das Bild auffängt.

§ 2. Dass in allen anderen Fällen die Größe, in der uns ein Gegenstand erscheint, nicht bloß durch seine »scheinbare Größe« im Sinne des Gesichtswinkels bestimmt wird, ist längst bekannt: Hering hat das schon betont, desgleichen Götz Martius, v. Kries und Andere. Der Ausdruck »scheinbare Größe« ist daher schlecht gewählt und sollte umsomehr vermieden werden, als er neben jenem geometrisch-optischen heute von zahlreichen Autoren in rein psychologischem Sinne gebraucht wird, wie wenn man sagt: der Mond hat am Horizonte eine andere »scheinbare Größe« wie im Zenith, womit natürlich nicht der Gesichtswinkel gemeint ist.

Dazu kommt, dass unter »scheinbarer Größe« ab und zu noch etwas Drittes verstanden wird, nämlich die Größe, die wir dem wirklichen Objecte auf Grund des unmittelbaren Eindruckes, aber verschieden von ihm, zuschreiben — wie z. B. wenn wir von einer Straße sagen (also urtheilen), sie sei überall gleich breit, obwohl der unmittelbare Eindruck der ist, dass sie nach der Ferne schmaler wird, allerdings nicht in dem Maße, in welchem das Netzhautbild der ferner gelegenen Theile an Größe abnimmt.

Hering hat diese drei Begriffe klar gesondert, für die scheinbare Größe im physikalischen Sinne diesen Namen beibehalten und davon die »Sehgröße« und die »geschätzte Größe« unterschieden. Die Definitionen und ihre reale Bedeutung ersieht man aus der folgenden Äußerung: »Unter scheinbarer Größe hat man bald die geschätzte Größe, bald auch die Größe des Netzhautbildes oder den Gesichtswinkel (die Kleifung) verstanden. Die Sehgröße ist von beiden verschieden. Hält man z. B. ein quadratisches Papier horizontal vor sich hin, so dass seine Ränder parallel der Medianebene, beziehungsweise der Frontalebene liegen, und fixiert ungefähr seine Mitte unocular, so sieht man dasselbe nicht genau quadratisch und horizontal. Vielmehr zeigen der rechte und linke Rand des Sehdinges eine schwache Convergenz und der fernere Rand ist etwas kürzer als der nähere; zweitens liegt der fernere Rand etwas höher als der nähere. Im Netzhautbilde des Quadrates convergieren die seitlichen Ränder unvergleichlich stärker, und der fernere Rand ist viel kürzer als der nähere. Das Verhältniß der Größen des fernen und nahen Randes ist also am Sehdinge ein anderes als am Netzhautbilde und wieder ein anderes am wirklichen Dinge. Die unrichtige Form des Sehdinges hindert aber nicht, zu urtheilen, dass das entsprechende Außending ein quadratisches ist, und demnach den fernen Rand ebenso groß zu schätzen als den näheren. Dieses Beispiel zeigt uns also den Unterschied zwischen sogenannter scheinbarer Größe, Sehgröße und geschätzter oder gedachter Größe« (Hermann's Handb. d. Physiologie, III. Bd., 1. Theil, S. 542).

Von der Unterscheidung dieser drei Begriffe wird im Folgenden vielfach Gebrauch gemacht werden. Der eben erwähnten Terminologie aber werde ich mich nicht durchaus anschließen, vielmehr den geometrisch-optischen Begriff des Gesichtswinkels auch »Gesichtswinkel« nennen, die »Sehgröße« Hering's, d. h. die Ausdehnung des Empfindungsinhaltes im Sehraume als »scheinbare Größe«, die dem Außending auf Grund seines optischen Eindruckes zugeschriebene wirkliche Größe — im Einklange mit Hering — als »geschätzte Größe« bezeichnen.

§ 3. Würde die scheinbare Größe (in dem für den künftigen Gebrauch eben festgesetzten Sinne der Hering'schen »Sehgröße«) nur dem Gesichtswinkel proportional sein, so müssten zwei in Wirklichkeit gleich große, aber verschieden entfernte Lateralstrecken a ein scheinbares Größenverhältniß haben, welches, wenn die Entfernungen e_1 und e_2 heißen, durch den Quotienten

$$\frac{\text{arc } \frac{a}{e_1}}{\text{arc } \frac{a}{e_2}}$$

ausgedrückt wäre.

Dies trifft schon bei monocularer Betrachtung nicht zu, wie Hering¹ betont hat. Die Hand, welche ich in 8 Zoll Entfernung vor ein Auge halte, sieht eben so groß aus, wie die, welche ich aus

¹ Beitr. z. Physiol., Leipzig 1861, I. Heft, S. 14.

16 Zoll Entfernung betrachte. Die Verhältnisse sind bei Versuchen dieser Art freilich durch mannigfache Erfahrungsmotive compliciert; wir werden gelegentlich sehen, dass man bei möglichster Ausschaltung derselben dem Falle, dass die scheinbare Größe monocular bloß durch den Gesichtswinkel bestimmt wird, sehr nahe kommen kann (vgl. unten S. 52 [306]).

Bei binocularer Betrachtung aber — und um diese vor allem handelt sich's mir in der folgenden Untersuchung — ist von einer Proportionalität zwischen scheinbarer Größe und Größe des Netzhautbildes, so lange nicht die Entfernungen der Gegenstände vom Auge ein sehr beträchtliches Maß erreichen, keine Rede; erst bei sehr großen Entfernungen wird Proportionalität erreicht.

§ 4. Götz Martius hat 1889 eine Untersuchung über diese Frage veröffentlicht¹ und dem Hauptresultate derselben folgenden Ausdruck gegeben: »Die Vergleichsgröße, welche einer gegebenen Größe bei verschiedenen Entfernungen gleich erscheint, wächst mit der Entfernung stetig, aber sehr langsam«. Er hat ferner gefunden, dass auch die absolute Größe des Normalobjectes nicht gleichgiltig ist; vielmehr hat sich gezeigt, dass bei constantem Entfernungsunterschiede zwischen Normal- und Vergleichsobject der (wirkliche) Größenunterschied zwischen beiden mit der absoluten Größe des Normalobjectes wachsen muss, wenn beide Objecte gleich groß erscheinen sollen². Wie gering die thatsächliche Vergrößerung des fernerer Objectes sein musste, um scheinbare Größengleichheit zu ergeben, möge man aus einigen der genannten Abhandlung entnommenen Durchschnittswerten ersehen: ein Stab von 20 cm Länge aus 50 cm Entfernung betrachtet, schien eben so groß wie ein zweiter Stab von 21.92 cm Länge, der aber 575 cm vom Beobachter entfernt war. Bei denselben zwei Entfernungen wurde ein Stab von 1 m und ein anderer von 110 cm Länge gleich groß gesehen. Rechnet man die entsprechenden Gesichtswinkel aus, so ergibt sich, dass im ersten Falle die beiden gleich groß erscheinenden Stäbe unter den Winkeln von $22^{\circ} 37' 11''$ und $2^{\circ} 11' 2''$ gesehen wurden, im zweiten Falle unter den Winkeln von 90° und $10^{\circ} 55' 40''$, also enorme Unterschiede.

v. Kries³ ist zu ähnlichen Ergebnissen gelangt. Stellte er sich z. B. die Aufgabe, auf einer Ebene zwei Punkte zu markieren, welche den aus dem Gedächtnisse reproducirten Abstand von 50 mm haben sollten, so fiel das Resultat eben so gut aus, wenn die Ebene in constanter, als wenn sie in wechselnder Entfernung von ihm situiert war; der Fehler wurde letzterenfalls nicht größer, er war zu Anfang sogar kleiner. Die durch den Entfernungswechsel bedingte Änderung des Gesichtswinkels hatte also in diesem Versuche gar keinen Einfluss auf die scheinbare Größe.

v. Kries hat ferner versucht, auf Flächen von verschiedener Entfernung Strecken anzugeben, die unter demselben Gesichtswinkel erscheinen sollten wie eine Strecke von 5 cm in 30 cm Entfernung (eine Strecke, die er in dieser Entfernung schon vielfach zu Versuchen verwendet hatte, deren Gesichtswinkel ihm also hätte geläufig sein müssen). Er stand dieser Aufgabe aber »ganz rathlos« gegenüber und machte »Fehler von enormem Betrage«. Wer es versucht, auf einer nahe gelegenen Ebene eine Strecke aufzutragen, die unter gleichem Gesichtswinkel erscheinen soll wie der Vollmond, wird das bestätigen können. Diese und ähnliche Erfahrungen haben v. Kries zu dem, ohne Zweifel berechtigten, Schlusse veranlasst, dass der Sehwinkel bei Größenschätzungen nur »implicite« sich geltend mache, dass er »nicht unmittelbar für das Bewusstsein verwertet« werden könne.

Die Versuche der genannten Forscher haben nur das negative Resultat ergeben, dass bei verschiedener Entfernung die Gesichtswinkel verschieden sein müssen, wenn die scheinbare Größe dieselbe bleiben soll. Nach welchem Gesetze aber der Gesichtswinkel sich mit der Entfernung ändert, wenn die

¹ »Über die scheinbare Größe der Gegenstände und ihre Beziehung zur Größe der Netzhautbilder« in Wundt's Philos. Studien, Bd. V, S. 601—617.

² Ibid., p. 609.

³ »Beiträge zur Lehre vom Augenmaße« in den »Beitr. z. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorg.«, H. v. Helmholtz als Festgruß zu seinem siebenzigsten Geburtstage dargebracht, Hamburg und Leipzig 1891, S. 14 ff. des Sonderabdruckes.

scheinbare Größe constant bleibt, darüber ist nichts bekannt. Aufgabe der vorliegenden Untersuchung ist die Ermittlung dieses Gesetzes — immer unter Voraussetzung binocularer Beobachtung und bei unveränderlicher Blickebene¹.

II. Capitel.

Versuche über scheinbaren Parallelismus nach der Tiefe verlaufender Geraden.

§ 5. Ich bin nun zunächst daran gegangen, mir sozusagen in groben Umrissen ein Bild von den Änderungen des Gesichtswinkels bei constanter scheinbarer Größe zu verschaffen. Dass es bei derartigen Versuchen nicht so ganz leicht ist, sich den Sinn der Aufgabe stets klar zu halten, der darin besteht, dass man lediglich auf den unmittelbaren Größeneindruck achtet, darauf hat schon Götz Martius hingewiesen², und ich kann das bestätigen. Nur allzuleicht mischt sich eine Reflexion über die wirklichen Größenverhältnisse (d. h. über die »geschätzten Größen«) mit ein, über die wir ja auf Grund der scheinbaren Größenverhältnisse ein Urtheil haben, da die Beziehung zwischen beiden durch die vielfachen Erfahrungen des täglichen Leben sehr gut eingeübt ist und da uns zudem in der Praxis fast ausschließlich die wirklichen Größenverhältnisse interessieren, so dass wir die scheinbaren nur als Mittel zur Urtheilsbildung über die wirklichen verwenden, während wir in unseren Versuchen uns nur mit den ersteren beschäftigen, über die letzteren gar nicht reflectieren sollen³. Ich habe nun zur ersten Orientierung eine Versuchsanordnung gewählt, bei der es viel leichter ist, sein Augenmerk ganz der scheinbaren Größe zuzuwenden und sich jeder Reflexion über die geschätzten Größen-, d. h. also über die wirklichen Größenverhältnisse zu enthalten.

Steht man zwischen den Schienen eines auf größere Entfernung ohne Krümmung verlaufenden Eisenbahngleises und blickt auf irgend einen fernen Punkt des Bahndammes, so erscheinen bekanntlich die Schienen nach der Ferne convergent. Das ist bisher gemeiniglich als die Folge des immer kleiner werdenden Gesichtswinkels angesehen worden, unter welchem die zwischen den Schienen gedachten Lothe erscheinen, ähnlich wie man die scheinbare Convergenz der zwei Baumreihen einer Allee oder der Reihen von Laternenpfählen in einer geraden Straße entstanden dachte. Dem aufmerksamen Beobachter wird freilich auch bei diesem alltäglichen Phänomen der folgende Umstand nicht entgangen sein: die ihm sehr nahe liegenden Partien des Schienenstranges erscheinen nicht als gegen ihn divergente Gerade, sondern als Curven, die ihre Convexität der Medianebene zuwenden; im weiteren Verlaufe wird die Krümmung schwächer und verliert sich dann ganz, die Schienen erscheinen gerade oder nahezu gerade, scheinen gegen die Ferne allerdings noch immer zu convergieren, aber sehr schwach; diese schwache Convergenz behalten sie bei bis in die Gegend, in der das Bild undeutlich wird und man daher überhaupt kein Urtheil mehr hat.

Diese Thatsache wird übersehen, wenn man, wie das gewöhnlich geschieht, das Augenmerk nur auf die entfernteren, nicht auch auf die naheliegenden Partien des Schienenstranges richtet. Dann erhält sich auch die ohnehin so plausible Gesichtswinkeltheorie.

¹ Auf die Complicationen, welche sich ergeben, wenn man der Blickebene verschiedene Neigungen ertheilt, werde ich hier gar nicht eingehen. Ich verweise dies bezüglich auf die interessanten Versuche von Oskar Zoth (»Über den Einfluss der Blickrichtung auf die scheinbare Größe der Gestirne und die scheinbare Form des Himmelsgewölbes« in Pflüger's Archiv, Jahrg. 1899, Bd. 78, p. 363 ff.), der, auf den fruchtbringenden Gedanken verfallen ist, die verschiedene scheinbare Größe verschieden hoch gelegener Objecte hänge von der Neigung der Blickebene, nicht gegen die (unveränderliche) Horizontal-Coordinatenebene des wirklichen Raumes, sondern gegen die (mit der Kopfstellung veränderliche) Horizontal-Coordinatenebene des Kopfes ab. Nachträglich erfahre ich aus einer zweiten, soeben erschienenen Arbeit Zoth's (Pflüger's Archiv, Bd. 88, p. 214), dass schon Gauss eine dahinzielende Andeutung gemacht hat, die aber Zoth, als er die ersterwähnte Abhandlung schrieb, noch nicht gekannt hat.

² A. a. O., p. 605.

³ Götz Martius *ibid.*

Aber die Sache gestaltet sich anders, wenn man die Erscheinung im Laboratorium nachahmt und sich nicht mit der Auskunft begnügt, dass das Phänomen durch die Gesichtswinkelabnahme dem Sinne nach erklärt werden könne — wenn man sich vielmehr fragt, ob diese Erklärung auch dem Ausmaße nach, also quantitativ der Erscheinung gerecht wird.

Stellt man die Schienen durch schwarze Fäden dar, die über eine weiße, horizontale, genügend lange Tischplatte laufen, so scheinen sie natürlich auch zu convergieren, wenn man sie thatsächlich parallel stellt. Macht man aber die Gegenprobe, gibt man also den Fäden eine Stellung, in welcher sie parallel erscheinen, so divergieren sie zwar in Wirklichkeit nach der Ferne; aber diese Divergenz entspricht auch nicht annähernd einer Constanz der Gesichtswinkel, unter denen die verschiedenen queren Abstände der beiden Fäden gesehen werden. Wenn es auf die Gesichtswinkel ankäme, müsste die thatsächliche Divergenz der parallel erscheinenden Fäden eine sehr viel größere sein, wie aus den später mitzutheilenden Zahlenwerten ersichtlich sein wird.

§ 6. Bevor ich über die Versuchsanordnung in ihren Einzelheiten und über die Versuchsergebnisse berichte, will ich nur erwähnen, dass die Einstellung auf scheinbarem Parallelismus ungleich leichter ist, als die Aufgabe, eine einzelne, in einer frontal parallelen Ebene gelegene Linie einer gegebenen Linie gleichzumachen, die in einer anderen Entfernung liegt. Das kann möglicherweise daher kommen, dass wir es bei der Einstellung zweier in die Tiefe verlaufender Linien auf scheinbaren Parallelismus eigentlich mit einem Continuum von derartigen Einzelversuchen zu thun haben und dass die kontinuierliche Vermittlung gegenüber einem Vergleiche discontinuierlicher Entfernungen eine Erleichterung der Aufgabe bedeutet.

Dass der scheinbare Parallelismus nach der Tiefe verlaufender Linien identisch ist mit der scheinbaren Größengleichheit aller zwischen diesen beiden Linien senkrecht zur Symmetrielinie gezogenen Geraden, daran kann nicht gezweifelt werden. Überlegungen über die Art, wie man den geometrischen Begriff des Parallelismus definieren soll, haben in dieser rein physiologischen Angelegenheit keinen Platz. So zweifelhaft es ist, ob der geometrische Begriff des Parallelismus durch die Gleichheit der senkrechten Abstände definiert werden darf, so sicher ist es, dass der physiologische Parallelismus oder, wenn man will, der Parallelismus nach dem unmittelbaren optischen Eindrucke gerade aus diesem Merkmale, und zwar nur aus diesem constituiert wird. Wer zwei Gerade als parallel sieht, denkt gar nicht daran, ob sie sich in beliebiger Verlängerung schneiden oder nicht, er sieht den Parallelismus an den Stücken, die ihm optisch vorliegen — in seinem Bewusstsein zeigt sich nichts von einer in der Phantasie vollzogenen Verlängerung dieser optischen Gebilde; was er also sieht, kann nichts anderes sein als die Gleichheit der senkrechten Abstände. Ich mache diese Bemerkung, damit nicht ein mit der Geschichte des »Parallelentheorems« vertrauter Leser sich zu einem erkenntnistheoretischen Einwande angeregt fühle, der hier, wo wir es nicht mit der Theorie der »geometrischen Axiome«, sondern mit unseren unmittelbaren Anschauungen zu thun haben, an die unrichtige Stelle käme. Der Begriff der Symmetrie — um auf ein Analogon hinzuweisen — lässt sich geometrisch ganz scharf definieren; aber nur einige Specialfälle des Symmetrischen im geometrischen Sinne sind auch physiologische Symmetrien, d. h. werden auch als Symmetrien gesehen¹.

§ 7. Die Versuchsanordnung war folgende: der Beobachter sitzt an der Schmalseite eines 4 m langen, 1 m breiten, rechteckigen Tisches *PPPP* (vgl. Fig. 1), dessen Platte mit weißem Zeichenpapier bespannt ist; seine Augen liegen 18.5 cm lothrecht über der einen Schmalkante. Er blickt durch einen gegen die Tischplatte etwas geneigten leeren (d. h. von Prismen und Linsen befreiten) Stereoskopenkasten; ein Carton verschließt die dem Beobachter abgewandte Seite des Kastens; aus dem Carton ist ein Fenster ausgeschnitten derart, dass dem Beobachter gerade der Ausblick bis zum entfernten Ende der Tischplatte

¹ Vgl. dazu Mach, Beiträge zur Analyse der Empfindungen, Jena 1886, p. 44 ff.

ermöglicht ist; die etwa seitlich noch sichtbaren Gegenstände des Zimmers liegen bereits so peripher, dass sie die Beobachtung nicht stören. Über die Tischplatte sind drei schwarze Fäden AB , CD , EF

Fig. 1.



gespannt; der mittlere, unverschiebbare AB verbindet die Mittelpunkte der beiden Schmalkanten und liegt zugleich in der Medianebene des Beobachters; er dient hauptsächlich zur Festhaltung der symmetrischen Convergenz, indem bei Versuchen mit ruhendem Blicke sein ferner Endpunkt B als Fixationsmarke benützt wird, während bei Versuchen mit bewegtem Blicke der ganze Faden die Bahn angibt, längs welcher der Blickpunkt wandern muss, wenn die Convergenz symmetrisch bleiben soll. Die beiden Seitenfäden sind mit ihren Enden D und F an der fernen Schmalkante der Tischplatte so befestigt, dass diese Enden zu beiden Seiten des Mittelfadenendes B liegen und von diesem gleich weit entfernt sind. Die dem Beobachter zugewendeten Enden C und E der an der nahen Schmalkante mit Gewichten belasteten Seitenfäden hält der Beobachter mit je einer Hand fest und kann so die Seitenfäden in beliebige Convergenz oder Divergenz bringen. Der Versuch wird so gemacht, dass der Beobachter durch die Öffnung des Stereoskopenkastens entweder nach dem fernen Ende des Mittelfadens blickt und dieses fixiert oder den Blick längs des Mittelfadens hin und her schweifen lässt und nun mit den Händen die Seitenfäden in eine solche Stellung bringt, dass sie ihm miteinander und mit dem Mittelfaden parallel zu laufen scheinen.

Jede Reihe bestand aus zehn Einzelversuchen, die alternierend so gemacht wurden, dass der Beobachter das ein mal von einer sehr stark merklichen scheinbaren Convergenz-, das ander mal von einer sehr stark merklichen Divergenzstellung ausging. In Betreff der Messung ist Folgendes zu bemerken: der Abstand der fernen Fadenenden DF ist willkürlich gewählt und für jede Versuchsgruppe constant; der Abstand der nahen Enden CE an derjenigen Schmalkante des Tisches, an welcher der Beobachter sitzt, wurde nicht abgelesen, sondern statt dessen der Abstand zweier solcher homologen Fadenpunkte M und N , die dem Beobachter noch deutlich sichtbar waren; diese Stellen waren durch einen Querfaden (in Fig. 1 punktiert) ein für allemal fixiert. Dieser Querfaden war vom Beobachter 490 mm weit entfernt (natürlich mit Einrechnung des verticalen Abstandes der Augen von der Ebene des Tisches); die fernen Fadenenden standen 4004 mm vom Beobachter ab. In den folgenden Tabellen sind diese beiden Werte, weil sie für alle Versuche constant blieben, nicht eigens angeführt. Im übrigen bedeutet G den Abstand DF , also sozusagen die Größe des fernsten Objectes, wenn man den Versuch als ein Continuum von Vergleichen verschiedener Größen in verschiedenen Entfernungen auffasst; g bedeutet den Abstand MN , d. h. den Abstand, den die Fäden an einer 490 mm vom Beobachter entfernten Stelle hatten. Jede Zahl in dieser Columnne ist das Mittel aus mindestens zehn Einzelversuchen. Die daneben in der Columnne MF stehende Zahl gibt den mittleren variablen Fehler für diese zehn Einstellungen an. Die Werte in der nächsten Columnne α geben den Winkel an, den die beiden parallel erscheinenden Fäden in Wirklichkeit mit einander bildeten. Ferner gibt φ den Gesichtswinkel an, unter welchem der ferne Abstand G ($= DF$), ψ den Gesichtswinkel, unter welchem der nahe Abstand g ($= MN$) gesehen wird. In den Versuchen, deren Resultate in den folgenden Tabellen verzeichnet sind, ließen die Beobachter den Blick längs der Mittellinie (durch den mittleren fixen Faden ersichtlich gemacht) beliebig auf- und abschweifen. Versuche, die ich mit fixierendem Blicke gemacht habe, hier aber nicht eigens mittheile, haben ergeben, dass sich die Werte — wenigstens bei dieser Versuchsanordnung — nicht merklich ändern. Die linearen Maße sind in Millimetern angegeben.

Tabelle I.

(Beobachter: Hillebrand.)

<i>G</i>	<i>g</i>	<i>MF</i>	<i>α</i>	<i>φ</i>	<i>ψ</i>
390	214.5	3.7	2° 51' 40"	5° 34' 34"	24° 41' 32"
390	209.0	6.1	2 57 2	5 34 34	24 4 40
320	171.9	3.1	2 24 52	4 34 36	19 53 50
290	163.0	4.2	2 4 14	4 8 52	18 53 10
266	157.3	6.3	1 40 20	3 48 18	18 14 14
266	152.0	5.2	1 51 32	3 48 18	17 37 58
266	150.0	6.5	1 53 28	3 48 18	17 24 16
222	130.5	3.9	1 29 30	3 10 34	15 10 12
178	118.0	5.0	0 58 42	2 32 48	13 43 52
178	118.0	5.2	0 58 42	2 32 48	13 43 52
150	106.7	5.4	0 42 22	2 8 46	12 25 40
120	89.2	2.2	0 30 8	1 43 0	10 24 4
100	82.8	3.2	0 10 50	1 25 50	9 39 32

Tabelle II.

(Beobachter: Czermak.)

<i>G</i>	<i>g</i>	<i>MF</i>	<i>α</i>	<i>φ</i>	<i>ψ</i>
441	268.0	4.6	2° 58' 0"	6° 18' 16"	23° 57' 56"
390	200.4	9.2	2 59 34	5 34 34	23 47 12
390	200.0	13.0	2 59 58	5 34 34	23 44 30
320	182.2	4.6	2 14 48	4 34 36	21 3 52
290	168.5	5.5	1 58 50	4 8 52	19 30 42
275	160.5	13.2	1 46 8	3 50 1	19 19 4
266	159.9	4.3	1 43 48	3 48 18	18 32 2
266	154.2	5.7	1 49 22	3 48 18	17 53 2
222	137.4	2.5	1 22 46	3 10 34	15 59 42
186	110.8	3.0	1 13 32	2 39 40	12 54 3
178	113.2	4.6	1 3 24	2 32 48	13 10 40

Tabelle III.

(Beobachter: Radakovič.)

<i>G</i>	<i>g</i>	<i>MF</i>	<i>α</i>	<i>φ</i>	<i>ψ</i>
390	206·4	17·1	2° 59' 34"	5° 34' 34"	23° 47' 12"
390	199·2	9·1	3 6 36	5 34 34	22 58 44
320	185·9	5·3	2 11 10	4 34 36	21 28 56
290	180·8	5·0	1 46 50	4 8 52	20 54 20
266	107·1	12·5	1 56 44	3 48 18	19 21 12
226	163·2	2·4	1 40 34	3 48 18	18 54 34
222	149·6	1·9	1 10 40	3 10 34	17 21 30
178	130·5	8·9	0 46 28	2 32 48	15 10 12
178	125·3	5·8	0 51 34	2 32 48	14 34 20

Tabelle IV.

(Beobachterin: Silvja Hillebrand.)

<i>G</i>	<i>g</i>	<i>MF</i>	<i>α</i>	<i>φ</i>	<i>ψ</i>
390	176·0	8·0	3° 28' 42"	5° 34' 34"	20° 27' 10"
390	170·5	3·9	2 29 46	5 34 34	19 44 20
320	171·1	4·9	2 25 38	4 34 36	19 48 26
290	164·3	2·7	2 2 50	4 8 52	19 2 4
266	139·7	4·1	2 3 32	3 48 18	16 13 34
222	119·0	3·9	1 40 10	3 10 34	13 54 56
178	104·8	4·6	1 11 36	2 32 48	12 12 28
178	95·4	1·5	1 20 48	2 32 48	11 7 12
150	109·7	2·5	0 39 20	2 8 46	12 46 26

§ 8. Ich habe die Versuche, wie man sieht, gehäuft; die Tabellen sind auf Grund von etwa $4\frac{1}{2}$ Hundert Einstellungen entworfen, ungerechnet die vielen Versuche, welche jeder der vier Beobachter anfänglich zum Zwecke bloßer Einübung machen musste und die in den obigen Tabellen nicht mitgeteilt sind. Diese Häufung mag auf den ersten Blick überflüssig erscheinen. Sie ist es indessen durchaus nicht. Wer nach einem Gesetze sucht, dem sich bei Gleichheit der scheinbaren Größe die Änderung des Gesichtswinkels unterordnet, muss sich ohne Zweifel erst die Überzeugung verschaffen, dass solche Größenvergleiche überhaupt eine hinreichende Regelmäßigkeit erkennen lassen, und zwar nicht nur innerhalb der Versuchsreihen eines und desselben Beobachters — denn hier könnten individuelle

Gewohnheiten entscheidend sein — sondern zwischen den Versuchsergebnissen verschiedener Beobachter. Erst wenn derartige Regelmäßigkeiten in zahlreichen Versuchen zutage treten, erst dann hat es einen Sinn, nach Erklärungsgründen zu forschen. Ich sehe den Wert jener oben tabellarisch verzeichneten Versuche nicht so sehr in den Zahlen selbst als vielmehr in ihrer Übereinstimmung — und diese ist, wie man sieht, sehr befriedigend.¹

§ 9. Die Zahlenwerte (für g und das damit zusammenhängende α und ψ) sind für eine Theorie der scheinbaren Größe aus folgendem Grunde nicht entscheidend: es liegt im Wesen unserer Versuchsanordnung, dass die Linien, welche die Empfindung paralleler Geraden hervorrufen, auch in Wirklichkeit (zwar nicht parallel, aber doch) gerade Linien sind — es handelt sich ja um gespannte Fäden. Das ist aber eine willkürliche und (wie wir sehen werden) thatsächlich nicht zutreffende Annahme: Linien, welche den Eindruck von parallelen Geraden machen, müssen in Wirklichkeit gekrümmt sein. Die Krümmung ist (ich verweise auf Späteres) freilich nur in den dem Beobachter sehr nahe liegenden Partien von nennenswertem Betrage, sie wird nach der Ferne zu bald so schwach, dass man sie ohne Schaden vernachlässigen kann; nichtsdestoweniger sind die so ermittelten Werte im ganzen zur Gewinnung einer Theorie nicht geeignet. Die Methode hat nur den Wert, dass sie in verhältnismäßig kurzer Zeit zahlreiche Bestimmungen zu machen gestattet und daher auch bald entscheiden lässt, ob hier überhaupt eine erkennbare Gesetzmäßigkeit besteht oder nicht. Die später mitgetheilten Versuche mit allecartig angeordneten Verticalfäden sind von dem Einwande frei, der soeben gegen die bisherigen Versuche erhoben wurde: sie sind aber so umständlich, dass, wenn man sie ebenso zahlreich machen wollte wie diese, ein außerordentlicher Zeitaufwand erforderlich wäre.

Sieht man von den dem Beobachter nächstgelegenen Fadenpartien ab (jenen Partien, die stark gekrümmt sein müssten, um den Eindruck von Geraden hervorzurufen, und die daher bei gespannten Fäden umgekehrt gekrümmt erscheinen), dann können die mitgetheilten Versuche als ein angenäherter Ausdruck für das Verhalten der Gesichtswinkel bei gleicher scheinbarer Größe aber variabler Entfernung angesehen werden, weil, wie erwähnt, die Krümmung, welche die Fäden im weiteren Verlaufe haben müssten, sehr schwach sein würde.

§ 10. Die Tabellen zeigen nun vor allem, dass von einer Constanz des Gesichtswinkels gar keine Rede sein kann: man vergleiche nur die einzelnen Werte von φ mit den daneben stehenden Werten von ψ . Die Lage der parallel erscheinenden Fäden kommt vielmehr dem wirklichen Parallelismus beträchtlich näher, obwohl sie auch diesen nicht erreicht, wie die Werte von α zeigen. Dass diese letzteren Werte immer kleiner werden (die wirkliche Stellung der Fäden sich also dem Parallelismus immer mehr nähert) je kleiner G wird, ist selbstverständlich; denn im Grenzfalle $G = 0$ müsste ja auch $g = 0$ werden.²

§ 11. Zu den vorstehenden Versuchen habe ich noch eine Bemerkung hinzuzufügen: Die Beobachtungen wurden nicht mit fixierendem, sondern mit beliebig längs des Medianfadens auf- und abschweifendem Blicke gemacht. Man wird fragen, ob die Ergebnisse bei Fixation des Blickes andere gewesen wären. Ich habe hierüber vergleichende Versuche angestellt: bei Benützung gespannter Horizontalfäden hat sich kein Unterschied zwischen beiden Methoden constatieren lassen.

Ich bin nun nicht der Meinung, dass die beiden Methoden wirklich gleichwertig seien; spätere Versuche (mit anderer Anordnung) werden vielmehr zeigen, dass ganz beträchtliche Größendifferenzen zum Vorschein kommen, wenn man einmal fixiert, ein andermal den Blick wandern lässt; aber in auffallendem Grade zeigen sich diese Unterschiede doch nur in den dem Beobachter nächst gelegenen Partien, also

¹ Die für meine Frau (Tabelle IV) geltenden Werte g und ψ sind durchwegs etwas kleiner; die Ursache davon liegt in der beträchtlich kleineren Pupillardistanz der Beobachterin; der Zusammenhang dieser beiden Momente wird aus der später zu entwickelnden Theorie ersichtlich werden.

² Vgl. dazu auch Götz Martius a. a. O., p. 609.
Denkschriften der mathem.-naturw. Cl. Bd. LXXII.

dort, wo die Fäden gekrümmt sein müssten, um den Eindruck paralleler Geraden zu machen. Da dies nun bei der gegenwärtigen Versuchsanordnung nicht erreichbar war, so sind jene nächst gelegenen Partien ohnehin immer fehlerhaft eingestellt, ob der Blick wandert oder nicht; daher ist hier keine Gelegenheit, die Wirkung dieses Unterschiedes zu constatieren.

Anmerkung. Eine interessante Beobachtung ergab sich bei den Einstellungen, die Herr Dr. Radakovič zu machen die Güte hatte, eine Beobachtung, auf welche er spontan aufmerksam gemacht hat. Dieser Beobachter hat (bei wanderndem Blick und sonst durchaus gleichen Versuchsumständen) die ihm gestellte Aufgabe abwechselnd nach zwei verschiedenen Methoden behandelt: das eine Mal suchte er zuerst eine scheinbar convergente, hierauf eine scheinbar divergente Fadenstellung und wählte dann eine Zwischenstellung, die ihm weder convergent noch divergent erschien — die Versuche in der obigen Tabelle sind nach dieser Methode gemacht, ihre Ergebnisse stimmen mit denen der anderen Beobachter überein. Bei anderen Versuchsreihen hingegen war das Verfahren dieses: der Beobachter fixiert zunächst eine fern gelegene Stelle, merkt sich den scheinbaren Abstand der Seitenfäden an dieser Stelle und sucht nun an einer unmittelbar darauf fixierten nahen Stelle den Abstand der Seitenfäden ebenso groß zu machen wie jenen. Je nach dem einen oder anderen Verfahren fallen nun die Werte sehr verschieden aus. Hier mögen einige Beispiele folgen.

Tabelle V.

G	$g\text{ I}$	$g\text{ II}$
178	130·5	170·6
	125·3	165·9
266	167·1	212·2
	163·2	207·8
390	206·4	269·3
	199·2	268·4

Die Buchstaben G und g haben die gleiche Bedeutung wie in unseren früheren Tabellen. $g\text{ I}$ ist nach der ersten, $g\text{ II}$ nach der zweiten der beiden soeben erwähnten Methoden gewonnen. Jede Zahl in der 2. und 3. Columnne stellt einen Mittelwert aus zehn Beobachtungen dar. Wie man sieht, liefert die zweite Methode beträchtlich größere Werte für g ; d. h. die Fadenstellung kommt dem wirklichen Parallelismus näher als bei der ersten (auch von den übrigen Beobachtern angewandten) Methode.

Nun sollte man freilich glauben, es könne keinen Unterschied machen, ob jemand als Kriterium des unmittelbar empfundenen Parallelismus zweier Geraden den Umstand benützt, dass ihm dieselben weder zu convergieren noch zu divergieren scheinen, oder ob er die scheinbare Gleichheit zweier senkrechter Abstände, eines nahen und eines fernen, zum Kennzeichen macht, umsomehr, als ja (wie früher einmal bemerkt) der physiologische Parallelismus in nichts anderem besteht, als in der unmittelbar wahrgenommenen Gleichheit der senkrechten Abstände an verschiedenen Stellen des Verlaufes. Ich kann mir das abweichende Verhalten bei Anwendung der zweiten Methode (successiver Vergleich zweier Lateralabstände) nicht anders erklären als dadurch, dass sich der Beobachter hier entweder gar nicht die ihm zugemuthete Aufgabe stellt, sondern an ihrer Stelle eine andere, nämlich die, die Fäden in wirkliche Parallelstellung zu bringen, oder aber, dass er Einstellungen macht, die zwischen beiden Aufgaben, scheinbarer und wirklicher Parallelstellung, irgendwie die Mitte halten. Die Werte für $g\text{ II}$, welche dem $G = 178$ entsprechen, nämlich 170·6 und 165·9, ergeben nahezu wirkliche Parallelstellung; die Werte für $g\text{ II}$, welche einem $G = 266$, beziehungsweise $= 390$ entsprechen, machen den Eindruck eines Compromisses zwischen scheinbarem und wirklichem Parallelismus. Thatsache ist, dass dem Beobachter die nach der zweiten Methode eingestellten Fäden nicht parallel erschienen. In den Versuchsbedingungen war gar kein Unterschied; vor allem wurde bei beiden Methoden nicht fixiert, sondern mit dem Blick von der fernsten bis zu einer sehr nahen Stelle gewandert; worauf sonst soll man nun die Verschiedenheit der Ergebnisse zurückführen, als auf eine Veränderung in der Stellung der Aufgabe selbst? Ich würde diese Auslegung für mehr als eine bloße Vermuthung allerdings nur dann halten, wenn für alle drei Größen von G das $g\text{ II}$ dem G so nahe stünde, wie dies für $G = 178$ der Fall ist. Ich gestehe, dass mich die Auffassung, der zufolge wir es zum Theile mit einem Compromisse zwischen der Erfüllung zweier verschiedener Aufgaben und daher mit Mittelwerten zu thun haben, nicht sehr befriedigt — ich kann nur keine bessere ausfindig machen. Der Gang der Hauptuntersuchung wird übrigens dadurch nicht berührt.

Die Vermuthung, wie die zweite, von Herrn Dr. Radakovič angewendete Methode zu deuten sei, hat mich zu einer kleinen Versuchsreihe veranlasst, durch welche ich mir ein Urtheil darüber bilden wollte, ob und in welchem Maße es möglich sei, zwei nach

der Tiefe verlaufende Gerade in wirkliche Parallelstellung zu bringen, mit anderen Worten ihnen jene scheinbare Convergenzstellung zu geben, die erfahrungsgemäß dem wirklichen Parallelismus entspricht.¹

Für $G = 178$ hat sich mir als Wert von g ergeben:

Tabelle VI.

177	
172	
189	
166	
173	
164	
167	
179	
182	
173	
<hr/>	
174.2	

Der Mittelwert stimmt also ziemlich gut mit der Forderung überein. Subjectiv war übrigens ein Gefühl einer gewissen Unsicherheit unverkennbar.

§ 12. Schließlich mögen einige Werte folgen, welche aus Versuchen mit gelähmter Accommodationsmusculatur gewonnen sind, bei sonst gleichen Versuchsumständen; sie sind für die späteren theoretischen Betrachtungen nicht ganz ohne Wert. Ich habe in beide Augen Homatropin eingeträufelt und hierauf links mit $-1D$, rechts mit $-2D$ corrigiert, so dass ich bei Fixation der fernen Fadenenden diese und noch ein beträchtliches Stück des näheren Verlaufes hinreichend scharf sehen konnte.

Es ergaben sich folgende Werte:

Tabelle VII.

G	g	MF	α
390	204.1	7.9	3° 1' 50"
266	152.3	3.2	1 51 14
178	115.4	3.0	1 1 14

Ein Vergleich dieser Werte mit den entsprechenden der Tabelle I auf S. 7 [261] zeigt, dass die Lähmung des Accommodationsapparates ohne Einfluss auf die Versuchsergebnisse war.

III. Capitel.

Versuche über scheinbaren Parallelismus von Ebenen, welche durch alleearartig angeordnete Verticalfäden dargestellt sind.

§ 13. Die bisherigen Versuche haben an zwei Fehlern gelitten. Erstens (davon war schon die Rede) involviert die Anwendung gespannter Fäden die Voraussetzung, dass die Empfindung von parallel

¹ Da wir den Grad der scheinbaren Convergenz bei thatsächlichem Parallelismus aus den Erfahrungen an Schienensträngen, Baumalleen, Häuserreihen etc. kennen, so wird es möglich sein, annäherungsweise denjenigen Grad scheinbarer Convergenz herbeizuführen, der jenen Erfahrungen zufolge dem wirklichen Parallelismus entspricht. Ich wollte durch die kleine Versuchsreihe ermitteln, mit welcher Annäherung das gelingt.

nach der Tiefe verlaufenden Geraden durch wirkliche Gerade müsse erzeugt werden können. Diese Voraussetzung ist willkürlich und, wie sich zeigen wird, unberechtigt. Zweitens schließt die Erhebung der Augen über die Tischplatte (sie betrug etwa 18 cm) und die damit verbundene Neigung der Blick-ebene gegen den Horizont einen, wenn auch in seinem Betrag kleinen Versuchsfehler ein. Betrachtet man zwei in der Nähe des Beobachters gelegene senkrechte Fadenabstände (also zwei Querlinien, die den Schmalkanten des Tisches parallel laufen), so ist der Unterschied ihrer Entfernungen vom Beobachter infolge der Erhebung des Kopfes über die Tischplatte viel geringer als er sein würde, wenn die Augen in der Ebene der Tischplatte lägen. Die Einrechnung des verticalen Abstandes der Augen von der Platte beseitigt diesen Fehler nicht, wie sich das aus einer einfachen geometrischen Überlegung ergibt. Um beide Fehler zu vermeiden, habe ich eine Anordnung gewählt, welche eine Baumallee nachahmt, u. zw. so, dass die die Stelle der Bäume vertretenden Verticalfäden beliebig verstellbar sind.

Im einzelnen war die Versuchsanordnung die folgende: 70 cm über der schon in den vorigen Versuchen verwendeten Tischplatte (4 m lang, 1 m breit) laufen 2 starke Holzlatten von je 4 m Länge parallel mit den Längskanten der Tischplatte. Diese Latten tragen in regelmäßigen Abständen von je 40 cm Ösen; durch je zwei einander gegenüberliegende Ösen ist ein Glasstab gesteckt, der also parallel mit der Schmalseite des Tisches läuft. An jedem dieser Glasstäbe sind mittels loser Schlingen zwei schwarze Fäden aufgehängt und an ihren unteren Enden mit Gewichten belastet, welche behufs Dämpfung der pendelnden Bewegung in Glycerin eintauchen. Im ganzen sind 9 Stäbe und daher 9 Fadenpaare angebracht, welche folgende Entfernungen von den lothrecht über der einen Schmalkante des Tisches befindlichen Augen des Beobachters hatten: 600, 1000, 1400, 1800, 2200, 2600, 3000, 3400, 3800 mm. Unmittelbar vor dem Kopf des Beobachters steht ein verticaler schwarzer Schirm, aus welchem in Augenhöhe ein horizontaler Schlitz von 25 cm Breite und 1.5 cm Höhe ausgeschnitten ist; der Beobachter kann so weder die oberen, noch die unteren Enden der Verticalfäden sehen. Auf der entgegengesetzten Schmalseite des Tisches steht ein gut beleuchteter weißer Schirm (3 m breit, 1 m hoch). Ich habe, beiläufig bemerkt, diese und auch alle anderen Versuche stets bei künstlicher Beleuchtung gemacht; es lassen sich so alle lästigen Schatten vermeiden und überdies kann man auf diese Weise ohne Mühe die Versuchsbedingungen genau constant halten.

§ 14. Stellt man nun jene 9 Fadenpaare so ein, dass sie zwei in Wirklichkeit parallele, symmetrisch zur Medianebene gelegene Reihe bilden, und blickt man durch den Schlitz auf ein am fernen weißen Schirm median und in Augenhöhe befestigtes Fixationszeichen, so fällt neben dem allbekannten Eindruck des Convergiens nach der Ferne noch der Umstand sehr stark auf, dass die beiden Fadenreihen nicht in zwei (gegen den Beschauer divergenten) Ebenen erscheinen, sondern in Flächen, deren entferntere Partien zwar von Ebenen kaum recht zu unterscheiden sind, deren nähere aber eine beträchtliche scheinbare Krümmung zeigen mit der Convexität gegen die Medianebene, eine Krümmung, die gegen den Beobachter zu immer stärker wird — ein Beobachter hat die Schnittlinien dieser beiden scheinbaren Flächen mit der Blickebene ganz passend mit dem Längsschnitt eines Trompetenrohres verglichen. Außerdem fällt auf, dass, wenn man den Blick ad libitum wandern lässt, sei es in der Medianebene oder längs der beiden Fadenreihen, jene scheinbare Krümmung zwar auch noch besteht, aber in merklich geringerem Grade als bei Fixation einer fernen Marke.

Nunmehr handelt es sich darum, die Fäden so zu stellen, dass sie in zwei zur Mediane parallelen Ebenen zu liegen schienen, also in Wirklichkeit in krummen Flächen liegen, die ihre Concavität der Mediane zukehren.

Ich werde der Kürze wegen in Hinkunft das Wort »scheinbare Allee« oder kurzweg »Allee« für die Gesamtheit der gesehenen Verticallinien gebrauchen, wenn diese in scheinbaren medianparallelen Ebenen liegen, und ich werde weiter den Ausdruck »Allee-Curven« für diejenigen krummen Linien gebrauchen, in welchen die Fußpunkte der Verticalfäden in Wirklichkeit liegen, wenn die Fäden scheinbar eine »Allee« bilden.

Das fernste, nach meiner Zählung 9. Fadenpaar (3800 mm Distanz vom Beobachter) erhält einen willkürlich gewählten Lateralabstand G (ich habe abwechselnd die Größen 600, 390, 266 gewählt); die näheren Fadenpaare muss ein Gehilfe nach den Wünschen des Beobachters einstellen, welcher letzterer ruhig, den Kopf an den Stirnhalter gelehnt, vor dem Schirm sitzt. Die Einstellung, vom 8. Fadenpaar beginnend und mit dem 1. schließend, geschieht zunächst in roher Form und erst, wenn die Fäden beiläufig den Eindruck machen, in parallelen Ebenen zu liegen, werden die nöthigen kleinen Verbesserungen angebracht.

Damit sich der Leser ein Bild von den Ergebnissen dieser Versuche mache, soll hier die Aufstellung einer einzelnen (für mich geltenden) Allee durch eine verjüngte Zeichnung (Fig. 2) veranschaulicht werden. Die Zahlen auf der rechten Seite geben die Entfernung der einzelnen Fadenpaare vom Beobachter an, die Zahlen auf der linken Seite der Zeichnung bedeuten die Lateralabstände jedes einzelnen Fadenpaares¹.

In der folgenden Tabelle VIII sind im ganzen 7 solche (mit fixiertem Blicke — Fixationspunkt in der Mitte des fernsten Fadenpaares — aufgestellte) Alleen mitgetheilt. Die Buchstaben H., Cz., R. bedeuten die Namen der Versuchspersonen (Hillebrand, Prof. Dr. Czermak, Privatdocent Dr. Radakovič). Die Zahlen in der 3.—9. Columnne geben die Lateralabstände der einzelnen Fadenpaare an.

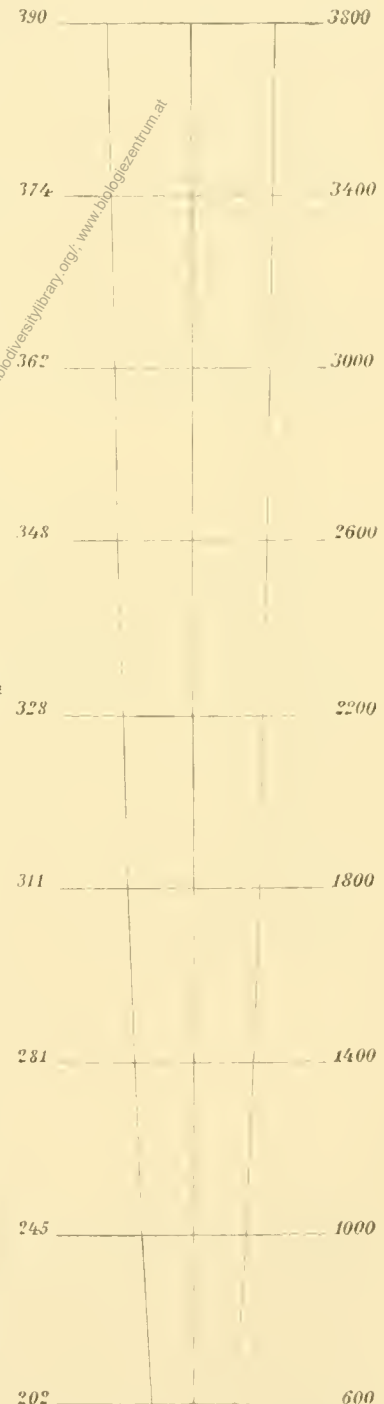
Tabelle VIII.

Nummer des Fadenpaares	Entfernung vom Beobachter	$G = 390$			$G = 266$			$G = 178$
		H.	Cz.	R.	H.	Cz.	R.	H.
IX.	3800	390	390	390	266	266	266	178
VIII.	3400	374	378	385	262	259	258	170
VII.	3000	302	363	380	258	248	248	166
VI.	2600	348	346	368	250	236	237	164
V.	2200	328	331	354	240	225	224	160
IV.	1800	311	308	345	232	205	209	156
III.	1400	281	288	318	214	180	197	144
II.	1000	245	254	276	191	150	171	129
I.	600	202	190	205	100	130	134	112

Masse in Millimetern.

Die Lateralabstände des fernsten (IX.) Fadenpaares G ist willkürlich gewählt; sie beträgt in einer Versuchsgruppe 390 mm, in einer zweiten 266 mm, in einer dritten 178 mm; mit anderen Worten, die Lateralabstände von 390—266—178 mm in 3800 mm Entfernung fungiert als Normalobject, dem die Lateralabstände der übrigen 8 Fadenpaare gleichgemacht werden. Für die Normaldistanz $G = 178$ theile ich nur die für mich geltenden Werte der übrigen (gleich groß erscheinenden) Fadenpaare mit: bei so schmalen Alleen ist die Einstellung nämlich sehr schwierig, weil die geringste

Fig. 2.



¹ Dass die Fußpunkte nicht auf geraden Linien liegen, wird man aus dem bloßen Anblicke der Zeichnung — ohne Benützung des Lineals — nur mit Mühe ersehen. Man darf die physiologische Wirksamkeit der Krümmung aber nicht unterschätzen: denn sobald man die Allee so stellt, dass die Fußpunkte in Geraden liegen, macht sich eine entgegengesetzte Krümmung in sehr auffallendem Maße geltend.

Blickschwankung zu falschen Verschmelzungen führt. Es kann dann z. B. ein Halbbild eines dem 5. Paare angehörigen Fadens mit einem solchen des 6. oder 7. Paares verschmolzen werden; und wenn dies einmal geschieht, dann bleiben die Gesichtslinien wie festgebannt in ihrer falschen Stellung und statt einer Allee sieht man ein buntes Durcheinander von Verticalfäden, das natürlich experimentell gar nichts bedeutet und sofort in ein anderes Durcheinander übergeht, wenn die Augen zufällig wieder in eine andere falsche Stellung gerathen. Wer sich je mit stereoskopischen Versuchen befasst hat, kennt diese Situationen zur Genüge. Außerdem will ich noch bemerken, dass auf die Werte für das I. (600 *mm* entfernte) Fadenpaar nicht viel Gewicht zu legen ist: die Fäden bilden sich hier bereits so stark peripher ab, dass die Einstellung ungenau wird. In späteren Versuchen habe ich darum dieses Fadenpaar ganz weggelassen und mit dem 1000 *mm* entfernten begonnen.

Um nun eine Vorstellung von der Rolle zu ermöglichen, die der Gesichtswinkel bei diesen Versuchen spielt (was uns ja vorläufig am meisten interessiert), habe ich aus den drei für mich geltenden Reihen der vorigen Tabelle (3, 6. und 9. Columnne) die Gesichtswinkel gerechnet und sie in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Bedeutung der einzelnen Columnnen ist ohne Weiteres klar.

Tabelle IX.

(Beobachter Hillebrand.)

Nummer des Fadenpaares	Entfernung vom Beobachter	$G = 390$ Gesichts- winkel	$G = 266$ Gesichts- winkel	$G = 178$ Gesichts- winkel
IX.	3800	5° 52' 30"	4° 0' 33"	2° 41' 0"
VIII.	3400	6 47 46	4 24 47	2 51 51
VII.	3000	6 54 20	4 55 28	3 10 10
VI.	2600	7 39 34	5 30 18	3 36 46
V.	2200	8 31 34	6 17 40	4 9 55
IV.	1800	9 52 30	7 22 28	4 57 45
III.	1400	11 27 42	8 44 28	5 53 17
II.	1000	13 58 5	10 54 38	7 22 52
I.	600	19 6 38	15 11 22	10 39 52

§ 15. Wie erwähnt, wurde bisher durchwegs mit fixierendem Blicke beobachtet; das Fixationszeichen befand sich median in der Entfernung des fernsten Fadenpaares in Augenhöhe. Wenn man aber dem Beobachter in Betreff der Blickrichtung keinerlei Beschränkung auferlegt, ihm also überhaupt keine Anweisung gibt, wie er seine Gesichtslinien dirigieren soll, dann pflegt jeder Beobachter den Blick bald längs der einen, bald längs der anderen Fadenreihe schweifen zu lassen und namentlich pflegt er die bereits vollendete Einstellung in dieser Weise zu überprüfen; während der Einstellung selbst aber fixiert er regelmäßig denjenigen Faden, der eben eingestellt werden soll und vergleicht den lateralen Abstand des einzustellenden Fadenpaares mit den bereits eingestellten entfernteren Paaren, namentlich mit dem nächstferneren. Macht man nun die Versuche in dieser Art, also mit zwangloser Lage des Blickpunktes, so sind die durch die beiden Fadenreihen gelegten Flächen zwar ebenfalls nach der Ferne divergent und zeigen ebenfalls (namentlich in den nahe gelegenen Partien) eine Concavität gegen die Medianebene, beides aber in merklich geringerem Grade als bei Fixation des Allee-Endes. Dies zeigt die folgende Tabelle, deren Werte mit den homologen der Tabelle VIII zu vergleichen sind.

Tabelle X.

Nummer des Fadenpaares	Entfernung vom Beobachter	G = 390			G = 266		
		H.	Cz.	R.	H.	Cz.	R.
IX.	3800	390	390	390	260	260	260
VIII.	3400	387	382	385	263	265	264
VII.	3000	383	372	375	260	256	259
VI.	2600	379	363	367	253	254	251
V.	2200	364	359	361	247	250	244
IV.	1800	349	352	353	245	248	240
III.	1400	333	337	333	236	240	230
II.	1000	312	323	290	230	232	224
I.	600	209	283	270	205	217	204

§ 16. Außerdem habe ich noch einige Versuchsreihen gemacht, bei welchen der Fixationspunkt ebenfalls wechselte, aber nicht beliebig, sondern in bestimmt vorgeschriebener Weise, und zwar so, dass er immer mitten zwischen das jeweils einzustellende Fadenpaar zu liegen kam. In einer Schlittenführung (das Genaue der Einrichtung ist hier gleichgültig) war eine verticale Stricknadel mit geschwärzter Spitze so verschiebbar, dass ihre Bahn in der Medianebeue und ihre Spitze in Augenhöhe lag. Nachdem, wie früher, die Fäden wieder in zwei wirklich parallelen Ebenen angeordnet waren (Abstand 390 mm), wurde die Marke zwischen die Fäden des VIII. Paares gerückt, worauf dessen Fäden eingestellt wurden; der Vorgang wiederholt sich nun beim VII., VI. etc. Paare. In der folgenden Tabelle XI sind zwei derartige Reihen mitgeteilt. Wie man sieht, liegen die Werte zwischen den bei Fixation des Allee-Endes (Tab. VIII) und den bei zwangloser Blickwanderung (Tab. X) gewonnenen: die Krümmung der durch die zwei Fadenreihen gelegten Flächen ist nicht so stark wie bei Fixation des Endpunktes und nicht so schwach wie bei zwanglosem Wandern; sie steht aber dem ersteren Falle etwas näher als dem letzteren.

Tabelle XI.

Nummer des Fadenpaares	Entfernung vom Beobachter	G = 390	
		H.	Cz.
IX.	3800	390	390
VIII.	3400	378	379
VII.	3000	366	362
VI.	2600	350	345
V.	2200	332	333
IV.	1800	309	317
III.	1400	285	298
II.	1000	252	272
I.	600	219	227

IV. Capitel.

Scheinbare Größe und wirkliche Entfernung.

§ 17. Ich will vorläufig absehen von denjenigen Verschiedenheiten in den Versuchsergebnissen, die mit der verschiedenen Bewegung des Fixationspunktes, beziehungsweise mit der ruhenden Lage desselben zusammenhängen; sie werden ihre Erklärung später finden. Zunächst soll nur der allen Versuchen gemeinsame Typus zur Grundlage weiterer Überlegungen gemacht werden. Wo es sich um Zahlenbeispiele handelt, werde ich die Versuche mit Fixation des Allee-Endes (Tab. VIII u. IX) zugrunde legen.

Was man aus den bisherigen Versuchen unmittelbar entnehmen kann, ist das Folgende: der objectiv constante Entfernungsunterschied zweier auf ihre scheinbare Größe zu vergleichenden Objecte hat auf diesen Vergleich einen verschieden großen Einfluss, je nachdem die beiden Objecte dem Beobachter näher oder ferner liegen. Liegen die Objecte dem Beobachter sehr nahe, dann müssen zur Erzielung gleicher scheinbarer Größe die Gesichtswinkel viel mehr von einander verschieden sein als wenn die Objecte bei gleichem Entfernungsunterschiede weit vom Beobachter ab liegen. Das lehrt ein Blick auf die Tabelle IX. Der Entfernungsunterschied je zweier benachbarter Fadenpaare ist constant (er beträgt 40 cm). Vergleicht man den Unterschied zwischen den Gesichtswinkeln des 1. und 2. Fadenpaares mit dem Unterschiede der Gesichtswinkel des 8. und 9., so ergibt sich, dass im ersten Falle ein Unterschied von etwa 5° ($19^\circ 6' 38''$ gegen $13^\circ 58' 5''$), im zweiten ein solcher von bloß $25'$ ($6^\circ 17' 46''$ gegen $5^\circ 52' 30''$) zur Erzielung gleicher scheinbarer Größe nöthig war. Würde man noch weiter in die Ferne gehen, als dies bei unserer Versuchsanordnung möglich war, so würden die Unterschiede der Gesichtswinkel immer kleiner und kleiner werden. Dass sie schließlich ganz verschwinden, ist bekannt: die scheinbaren Größen sehr ferner Objecte, wie der Gestirne, hängen nur mehr vom Gesichtswinkel ab, Entfernungsunterschiede wie die zwischen dem Monde und irgend einem Fixsterne spielen überhaupt keine Rolle mehr.

Für die Gesichtswinkeltheorie ist die Entfernung eines Gegenstandes überhaupt nur ein physikalisches Datum, das zusammen mit einem zweiten (nämlich der wirklichen Größe des Gegenstandes) den Gesichtswinkel bestimmt; wenn ein Gegenstand seine Entfernung ändern, zugleich aber seine Größe so ändern würde, dass der Gesichtswinkel constant bliebe, so würde nach dieser Theorie die Entfernungsänderung gar keinen Einfluss auf die scheinbare Größe haben: die lichtempfindliche Platte weiß nichts davon, ob die chemische Veränderung auf einer ihr angehörigen Strecke AB von einer ruhenden und constant großen Lichtquelle herrührt oder von einer sich entfernenden, die sich aber gleichzeitig entsprechend vergrößert. Für ein Auge kann man es unter Anwendung besonderer Cautelen dahin bringen, dass nur der Gesichtswinkel die scheinbare Größe beeinflusst, die Entfernung also nur die Bedeutung hat, dass sie zusammen mit der wirklichen Größe den Gesichtswinkel bestimmt. Beim binocularen Sehen ist dies aber erst in sehr großer Entfernung der Fall: da freilich spielen die Entfernungen bloß die Rolle, dass sie den Gesichtswinkel mitbestimmen, also ein Datum mitbestimmen, das allerdings physiologisch wirksam ist, dessen Componenten (Größe und Entfernung) aber nicht jede für sich eine physiologische Separatwirkung haben, sondern nur eine einheitliche Wirkung (Gesichtswinkel), aus denen die Componenten nicht mehr zu erkennen sind. Handelt es sich aber um Entfernungen, die eine bestimmte Größe nicht überschreiten, dann ist die Sachlage eine andere: Entfernungsunterschiede werden gesehen, sie haben eine gesonderte physiologische Wirkung, der ein selbständiges Bewusstseinsdatum (eben der gesehene Entfernungsunterschied) entspricht neben jener anderen Wirkung, nämlich der, den Gesichtswinkel mitzubestimmen. Es kann also eine etwaige Entfernungs Zunahme nicht mehr, wie in früherem Falle durch entsprechende Zunahme der wirklichen Größe compensiert werden: denn eine solche Compensation könnte nur in der Erhaltung des constanten Gesichtswinkels bestehen — da aber die Entfernungsänderung auch als solche gesehen wird, so bleibt die physiologische Wirkung eben nicht constant trotz Erhaltung des Gesichtswinkels.

Die Versuche haben aber weiter gezeigt, dass dieses Verhalten sich bei wachsender absoluter Entfernung immer mehr und mehr jenem Falle nähert, in welchem der Gesichtswinkel allein die scheinbare Größe bestimmt und Entfernungsänderungen überhaupt nicht mehr als solche gesehen werden: die Tabellen zeigen ja bei wachsender Entfernung eine immer schwächere Gesichtswinkelabnahme; jenseits einer gewissen Grenze würde sie überhaupt aufhören.

§ 18. Nun liegt der folgende Gedanke, der die Basis für die weiteren Untersuchungen abgibt, ohne Zweifel außerordentlich nahe: ein und derselbe objective Entfernungsunterschied erweist sich nicht nur für die scheinbare Größe, sondern bekanntlich auch für die scheinbare Entfernung als sehr verschieden wirksam, je nach der absoluten Entfernung der Objecte: 400 mm wirklicher Entfernungsunterschied sind physiologisch viel wirksamer, wenn das eine Object 600, das andere 1000 mm vom Beobachter entfernt ist, als wenn die Entfernung des einen 10 m, die des anderen 10·4 m beträgt. Nun ergibt sich folgende Frage: beruht vielleicht die verschiedene Wirkung, welche ein objectiv constanter Entfernungsunterschied bei wechselnder absoluter Entfernung auf die scheinbaren Größen ausübt, darauf, dass dieser objectiv constante Entfernungsunterschied einen sehr verschiedenen physiologischen Entfernungsunterschied bedingt, je nachdem die absolute Entfernung vom Beobachter größer oder kleiner ist? Ist also nicht vielleicht die verschiedene physiologische Tiefenwirkung das Primäre, die verschiedene physiologische Größenwirkung das Secundäre? Hat man W. ein objectiver Entfernungsunterschied von einer gewissen Größe bei Wechsel der absoluten Entfernungen darum und in dem Maße einen verschiedenen Einfluss auf die scheinbaren Größen der Vergleichsobjecte, weil und in welchem Maße er auf den scheinbaren Entfernungsunterschied derselben einen verschiedenen Einfluss hat? Sollten diese Fragen zu bejahen sein, dann wird sich ein Gesetz der scheinbaren Größe für binoculares Sehen leicht entwickeln lassen.

V. Capitel.

Scheinbare und wirkliche Entfernung.

§ 19. Wir haben also jetzt experimentell zu ermitteln, wie sich der scheinbare (physiologische) Entfernungsunterschied zum wirklichen verhält; und das wird sich am leichtesten erreichen lassen, wenn wir für wechselnde absolute Tiefenlage zu ermitteln suchen, welcher objective Entfernungsunterschied erforderlich ist, um einen ebenmerklichen scheinbaren Entfernungsunterschied zu erzeugen.

Es liegt kein principiell Bedenken vor, zur Erreichung des genannten Zieles die Methode der ebenmerklichen Unterschiede zu verwenden. Dass ebenmerkliche Unterschiede nicht als gleich zu betrachten sind — dieser Haupteinwand gegen Fechner's Ableitung des psychophysischen Gesetzes, der Maßformel etc. ist auf unseren Fall nicht anwendbar. Der Tiefenabstand zweier Punkte *A* und *B* wird unmittelbar wahrgenommen, nicht mittelbar als die Differenz zweier Entfernungen, nämlich der Entfernung, die *A* von mir hat, und der Entfernung, die *B* von mir hat. Nicht um die Wahrnehmung des Größenunterschiedes zweier Strecken handelt sich's hier, sondern um die Wahrnehmung des Ortsunterschiedes zweier Punkte, welcher Ortsunterschied sofort durch die Disparation, beziehungsweise die Doppelbilder gegeben ist, in die der eine Punkt zerfällt, wenn der andere fixiert wird, wie ich das an anderer Stelle¹ ausgeführt habe.

Wenn also die Tiefenstrecke *AB* (genauer der empfundene Ortsunterschied *AB*) gar nicht als Zuwachs zu einer anderen, etwa zu der Entfernung, die *A* von mir hat, wahrgenommen wird, dann kann man nicht sagen: zwei ebenmerkliche Unterschiede *AB* und *CD* von verschiedener absoluter Entfernung, könnten doch verschiedenen Empfindungswert besitzen mit Rücksicht auf die verschiedenen Werte der Größen, denen sie zuwachsen; denn es handelt sich gar nicht um Zuwüchse zu Strecken, sondern um locale Unterschiede von Punkten. Es ist gerade so, wie wenn ich auf einem Maßstabe zu einem gegebenen Punkte einen zweiten ebenmerklich von ihm verschiedenen aufsuchen sollte und wenn ich diese Aufgabe einmal mit Bezug auf den Theilstrich 13, ein andermal mit Bezug auf den Theilstrich 27 als Ausgangspunkt lösen wollte: das Ebenmerkliche wird hier nothwendig gleichmerklich sein. Man darf also die hier gestellte Aufgabe, bei verschiedenen absoluten Entfernungen ebenmerkliche Tiefenunterschiede zu finden, nicht jenen Aufgaben

¹ In Sachen d. opt. Tiefenlocalisation, Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorg., Bd. XVI, S. 96 f.
Denkschriften der mathem.-naturw. Cl. Bd. LXXII.

kanten A und B ist das Stück PQ des transparenten, von rückwärts beleuchteten Schirmes SS sichtbar und dieses Stück wird bei Verschiebung der Kanten nahezu unter gleichem Gesichtswinkel gesehen, so dass sich also, wenn A fixiert wird, C immer in nahezu gleichem Maße peripher abbildet.

Ich habe nun die linke Wand und damit auch die Kante B nach und nach in jene Entfernungen vom Beobachter gebracht, in welchen bei den Alléeversuchen die einzelnen Fadenpaare standen, also: 3800, 3400, 3000, 2600, 2200, 1800, 1400, 1000 *mm*. Für jede einzelne dieser Entfernungen habe ich die rechte Wand AB in eine solche Stellung gebracht, dass mir die Kante A ebenmerklich näher erschien als die Kante B . An dem die Wand AC tragenden Schlitten war eine Schnur angebracht, deren eines Ende ich bei der Beobachtung in der Hand hielt; ich konnte so die Wand AC allmählich so weit an mich heranziehen, dass die Kante A ebenmerklich näher erschien als B . In der folgenden „Tabelle der Disparationsminima“ enthält die erste Columnne die Entfernung der Normalkante B vom Beobachter, die zweite Columnne die dazu

Tabelle XII. Disparationsminima.

Beobachter: Hillebrand.

Entfernung der Normalkante	Entfernung der Vergleichskante	Winkel α	Winkel β	Differenz $\alpha - \beta$
3800	3730	89° 31' 3"	89° 30' 30"	33"
3400	3341	89 27 38	89 27 4	34
3000	2954	89 23 19	89 22 45	34
2600	2564	89 17 41	89 17 6	35
2200	2175	89 10 0	89 9 25	35
1800	1783	88 58 53	88 58 18	35
1400	1388	88 41 26	88 40 45	41
1000	994.4	88 16 2	88 9 24	38

Längenmaß in Millimetern.

Fig. 4 a.



Fig. 4 b.



Fig. 4 c.



gehörige Entfernung der Vergleichskante A , in welcher diese eben näher erschien als B . Der Winkel α (3. Columnne) ist der von der Richtungslinie von B und der Basallinie eingeschlossene Winkel für das linke

Augen; Winkel β ist der von der Richtungslinie der Vergleichskante A und der Basallinie eingeschlossene Winkel (siehe Fig. 4 c). In der letzten Columnne ist die Differenz dieser beiden Winkel angegeben. Sie kann, wie sich sogleich ergeben wird, als ein Maß für das Minimum der physiologisch wirksamen binocularen Parallaxe gelten. Es seien nämlich (vgl. Fig. 4 a) K_1 und K_2 die beiden mittleren Knotenpunkte, A die median gelegene, fixierte Kante, B die eben merklich entfernter erscheinende Vergleichskante, von der ich zunächst annehmen will, dass sie in der Gesichtslinie des rechten Auges liege. Dann ist die binoculare Parallaxe (die hier wegen der Ebenmerklichkeit des Entfernungsunterschiedes natürlich ein Minimum ist) durch den Winkel $A K_1 B$ gemessen, der eben die Differenz der beiden, von den Richtungslinien $A K_1$ beziehungsweise $B K_1$ mit der Basallinie gebildeten Winkel darstellt. Liegt die Vergleichskante, wie in Fig. 4 b median, wie die Normalkante, so stellt der Winkel $A K_1 B$ die halbe Parallaxe dar. In unserer Versuchsanordnung ist B um ein Weniges aus der Medianebene nach links gerückt, also etwa so, wie dies in Fig. 4 c dargestellt ist. Die Parallaxe ist diesfalls $\sphericalangle A K_1 B + \sphericalangle A K_2 B$. In der obigen Tabelle ist mit α der Winkel $B K_1 K_2$, mit β der Winkel $A K_1 K_2$ bezeichnet; daher bedeutet $\alpha - \beta$ den Winkel $A K_1 B$ — also (wegen der nicht genau medianen Lage von B) etwas mehr als die halbe Parallaxe. Nun ergibt sich aus der besprochenen Versuchsanordnung, dass die Kante B sich immer gleich stark peripher abbildet; es ist also mit dem Winkel $A K_1 B$ immer auch der andere, ihn zur ganzen Parallaxe ergänzende Winkel $A K_2 B$ gegeben. Hat also der Winkel $A K_1 B (= \alpha - \beta)$ für die verschiedenen in der Tabelle angegebenen Positionen der beiden Kanten einen constanten Wert, dann ist die Parallaxe constant. In unseren Versuchen ist aber die Parallaxe wegen der Ebenmerklichkeit des Entfernungsunterschiedes jedesmal ein Minimum und dieses Minimum hat in der That, wie ein Blick auf die 5. Columnne der Tabelle zeigt, einen constanten Wert.

Die Versuche, welche der Tab. XII zugrunde liegen, haben, wie hier ausdrücklich hervorgehoben werden soll, nur die Aufgabe zu entscheiden, ob das Disparationsminimum constant oder variabel ist, nicht aber, welchen absoluten Größenwert dieses Disparationsminimum hat. Zur Beantwortung der letzteren Frage ist die Versuchsmethode viel zu roh; hier müssten Versuche mit den feinsten haploskopischen Methoden gemacht werden. Selbstverständlich kommen auch die Werte für $(\alpha - \beta)$ in der 5. Columnne nur rücksichtlich ihrer Constanz in Betracht; ihr absoluter Betrag hat weiter keine Bedeutung, schon darum nicht, weil jenes $(\alpha - \beta)$ nicht die halbe Disparation darstellt, sondern »etwas größer« ist als diese. Für die Frage nach der Constanz des Disparationsminimums ist die Methode vollkommen brauchbar.

Das Gesetz also, in welchem das Wachsen der eben merklichen Entfernungsunterschiede mit den absoluten Entfernungen implicite enthalten ist, lässt sich so aussprechen: bei constant peripherer Lage des Vergleichsobjectes ist für beliebige absolute Entfernungen des fixierten Objectes der eben merkliche Entfernungsunterschied dadurch bestimmt, dass die Differenz der beiden, je durch die Gesichtslinie und Richtungslinie gebildeten Winkel (die ja das Maß für die Disparation oder Binocularparallaxe darstellt) einen constanten Wert behält.

§ 20. In Fig. 5 ist das Anwachsen der eben merklichen Entfernungsunterschiede dargestellt für den Fall, dass das fixierte und das Vergleichsobject beide in der Medianebene liegen. K_1 und K_2 sind die beiden mittleren Knotenpunkte. Von K_2 aus sind eine Reihe von Geraden bis zur Medianlinie gezogen in der Weise, dass je zwei benachbarte Geraden denselben Winkel einschließen. Denken wir uns den links von der Medianlinie gelegenen Theil der Figur symmetrisch zum rechts gelegenen ausgeführt, so können wir jedes Paar sich schneidender Geraden als Gesichtslinienpaar betrachten, d. h. wir können uns den Blickpunkt nach und nach in all' die einzelnen Schnittpunkte auf der Medianlinie verlegt denken. Ist nun der constante Winkel φ das halbe Disparationsminimum, dann bedeuten die einzelnen Abschnitte auf der Medianlinie die eben merklichen Tiefenunterschiede, die sich ergeben, wenn der Blickpunkt nach und nach in die einzelnen Schnittpunkte verlegt wird. Die Zeichnung veranschaulicht das allmähliche Wachsen der eben merklichen Entfernungsunterschiede beim Wachsen der absoluten Entfernungen unter der (thatsächlich zutreffenden) Voraussetzung eines constanten Disparationsminimums.

Ist a die halbe Basallinie, φ das halbe Disparationsminimum, bezeichnet man ferner mit α den die Lage des Blickpunktes charakterisierenden halben Convergenzwinkel, mit y ($= OB$) die Entfernung desjenigen Punktes B , der eben merklich ferner erscheint als der fixierte Punkt A , so ist

$$y' = \frac{a}{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}$$

Beiläufig bemerkt, geht aus dieser Gleichung ein schon von Wächter¹ aufgefundenes Gesetz als Specialfall hervor. Es ist nämlich für $\alpha = \varphi$ offenbar $y' = \infty$. Das heißt: wenn der Fixationspunkt in einer Entfernung liegt, in welcher eine Strecke von der Größe der eigenen Basallinie unter einem Gesichtswinkel erscheinen würde, der dieselbe Größe hat wie das Disparationsminimum selbst, dann gibt es keinen Punkt, der entfernter erscheinen kann als der fixierte; mit anderen Worten: in dieser Convergengstellung würde jeder, wie immer große Zuwachs an thatsächlicher Entfernung physiologisch unwirksam sein. Hiemit ist also eine principielle Grenze der binocularen Stereoskopie gegeben.

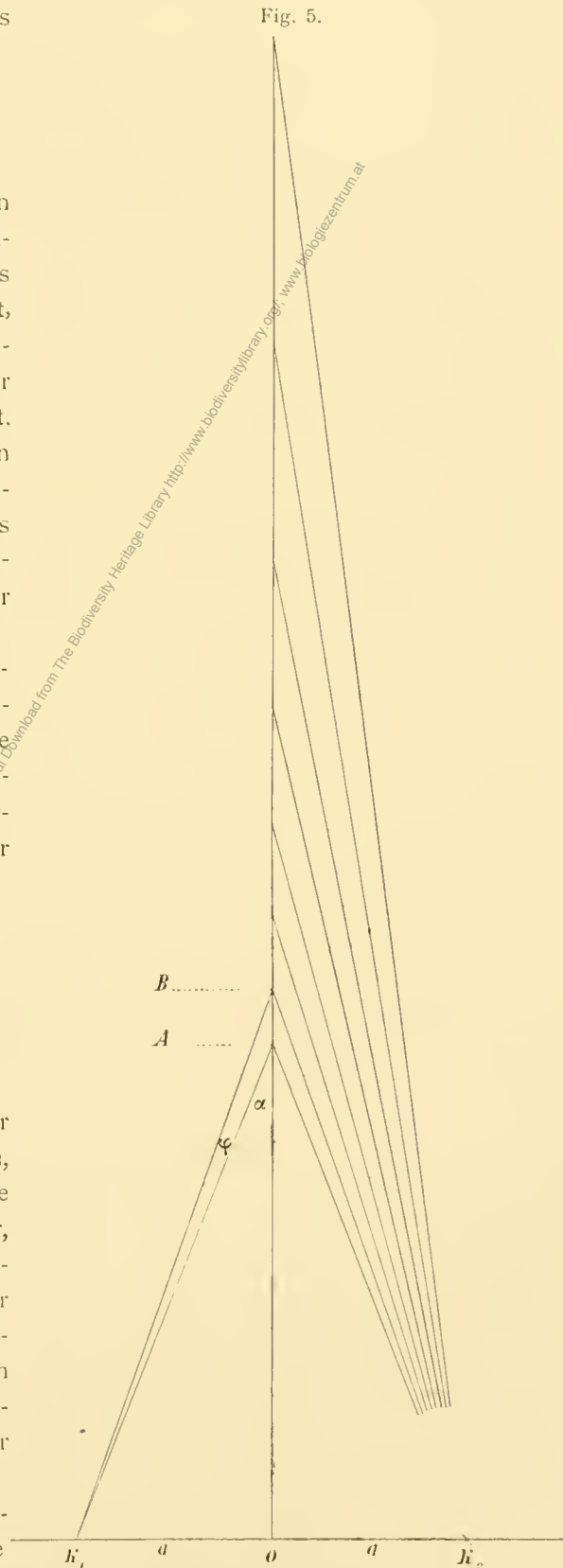
(Würde ich, den Werten der obigen Tabelle entsprechend, das halbe Disparationsminimum mit 35° annehmen, so würde für meine Pupillardistanz (64 mm) die Entfernung von 543 m als Grenze der binocularen Stereoskopie anzusehen sein. Thatsächlich wird diese Entfernung größer sein, weil das Disparationsminimum sicher kleiner ist als 35° .)

VI. Capitel.

Zusammenhang zwischen scheinbarer Größe und scheinbarer Entfernung.

§ 21. Wir sind darauf ausgegangen, nach einer Beziehung zwischen den beiden Thatsachen zu suchen, erstens, dass die scheinbaren Entfernungsunterschiede mit wachsenden absoluten Entfernungen abnehmen (oder, was dasselbe ist, dass die wirklichen Entfernungsunterschiede mit wachsenden absoluten Entfernungen immer größer werden müssen, wenn sie gleich groß erscheinen sollen) — und zweitens, dass mit wachsenden absoluten Entfernungen der Gesichtswinkel zweier Objecte von gleicher scheinbarer Größe einander immer näher kommen (wie dies die Alléeversuche zeigen).

Ich werde diese Beziehung an einem Schema darstellen, das den thatsächlichen Verhältnissen sehr nahe



¹ »Über die Grenzen des telestereoskopischen Sehens«, Wiener Sitzber. math.-naturw. Cl. 1896, Bd. CV, S. 856 ff; vgl. ferner meine Anzeige dieser Arbeit in der Zeitschr. f. Psych. u. Phys. d. Sinnesorg., Bd. XVI, S. 155.

kommt, ohne sie aber ganz zu erreichen. Gewisse später zu besprechende Complicationen bringen es mit sich, dass die experimentellen Resultate sich mit der sogleich folgenden idealisierten Darstellung nicht genau decken.

Bekanntlich ist auch die Horoptertheorie auf eine gewisse vereinfachende Schematisierung der thatsächlich bestehenden Verhältnisse angewiesen. So macht der mathematische Horopter vor Allem eine Voraussetzung, die, wie wir wissen, thatsächlich nicht zutrifft, nämlich die Voraussetzung der functionellen Homogenität der Netzhaut: Reize, die gleichen Gesichtswinkeln entsprechen, werden als extensiv gleichwertig angesehen, auf welche Netzhautregionen auch immer sie appliciert werden; so existiert z. B. ein Unterschied zwischen Nasen- und Schläfenseite der Netzhaut für den mathematischen Horopter nicht, während er beim empirischen eine bedeutende Rolle spielt. Eine Horoptertheorie würde aber kaum entstanden sein, wenn man diesen und noch manch' anderen Complicationen, wie sie thatsächlich in der Natur gegeben sind, schon vom Anfang an hätte Rechnung tragen wollen und sich nicht zu vorläufigen Vereinfachungen verstanden hätte. Die Verhältnisse des empirischen Horopters sind gar nicht unter einem Gesichtspunkte zu begreifen, wenn man sie nicht als Abweichungen vom idealisierten Horopter auffasst, und zwar nicht bloß wegen der hohen Complication, welche die Berücksichtigung aller empirischen Momente mit sich bringen würde, sondern auch darum, weil viele derselben in ihrer Variation gar keine mathematisch-gesetzmäßige Formulierung zulassen. Wer wollte z. B. behaupten, dass die Abnahme der räumlichen Unterschiedsempfindlichkeit vom Netzhautcentrum gegen die Peripherie sich als eine (wenn auch complicierte) »Function« der Winkelentfernung müsse darstellen lassen? Organische Gebilde lassen sich solche Gesetzmäßigkeiten nicht aufzwingen. Man muss also zum Schema greifen, selbst wenn man die sämtlichen complicierenden Umstände qualitativ kennt.

Von den complicierenden Momenten (das sei gleich hier bemerkt) habe ich Eines von vornherein, wenn auch nicht völlig ausgeschlossen, so doch in seiner Bedeutung möglichst herabgedrückt — nämlich die vom Centrum gegen die Peripherie hin beträchtlich abnehmende Feinheit des Tiefensinnes. Wenn man die Unterschiedsschwelle für periphere Tiefenwahrnehmung in der Weise untersucht, wie ich das oben für nahezu centrale Lage des Normal- und Vergleichsobjectes beschrieben habe, so überzeugt man sich leicht, dass das Disparationsminimum um so größere Werte erhält, je excentrischer die Objecte liegen (worüber ich eine umfangreiche Versuchsreihe gemacht habe). Um diese Abnahme der Tiefenempfindlichkeit, für welche ein Gesetz nicht bekannt ist, nach Möglichkeit auszuschließen, habe ich der Rechnung nur solche Versuchsreihen zugrunde gelegt, bei welchen immer der jeweils einzustellende Faden der Allée fixiert und mit dem nächst fernerem auf den scheinbaren Lateralabstand verglichen wurde. Es wurde also mit »lateral wanderndem Blicke« beobachtet¹. Stellt man eine Allée mit fixierendem Blicke ein (der Fixationspunkt liege z. B. in der Entfernung des fernsten Fadenpaares), so liegen die Bilder der nahen Fadenpaare so peripher, dass die bereits erhebliche Minderung der Tiefenempfindlichkeit das Versuchsergebnis schon merklich beeinflusst, ja (aus den oben angegebenen Gründen) für die theoretische Verwertung untauglich gemacht. Man muss also trachten, möglichst mit einer und derselben Netzhautarea zu beobachten und das geschieht annähernd (wenn auch nicht genau) dadurch, dass man immer denjenigen Faden fixiert, den der Gehilfe eben einstellen soll².

§ 22. Einige dieser Versuche mit »lateral wanderndem Blicke« sind bereits in Tab. X mitgeteilt worden. Dort handelte sich's aber bloß darum zu zeigen, erstens, dass die Gesichtswinkel gleich groß erscheinender Objecte sehr verschieden sein können, und zweitens, dass diese Verschiedenheit mit wachsender absoluter Entfernung abnimmt, sich also der Gleichheit nähert. Für die nunmehr zu entwickelnde Theorie sind diese Versuche vor allem zu wenig zahlreich. Außerdem aber bedarf die Theorie gewisser Winkelwerte, welche aus den empirischen Werten der Entfernung und der wirklichen Größe, sowie des Augenabstandes erst gerechnet werden müssen.

Ich werde daher neben den schon in Tab. X angeführten Allée-Einstellungen (die hier wiederholt werden) noch eine weitere Anzahl solcher Einstellungen mittheilen, und zwar jede einzelne Allée in einer eigenen Tabelle und werde den beobachteten Werten (Lateralabstand der einzelnen Fadenpaare und

¹ Von den oben mitgetheilten Versuchsergebnissen kommen also nunmehr nur die in Tab. X, p. 15 [269] mitgetheilten in Betracht, während die Beobachtungen mit fixierendem Blicke von nun an ausgeschlossen bleiben.

² Nicht genau, weil der zum Vergleiche herangezogene Nachbarfaden immerhin excentrischer liegt, wenn man die näheren als wenn man die fernereren Fäden einstellt.

Es seien K_1 und K_2 die beiden mittleren Knotenpunkte, O der Halbierungspunkt der Basallinie P, P_1, P_2 seien die Fußpunkte dreier Fäden einer (bei wanderndem Blicke aufgestellten) Allée; ihre Entfernungen von der Basallinie seien OA, OB, OC ; wobei $AB = BC$ (in unseren Versuchen $= 40\text{ cm}$). Von jedem der drei Punkte P, P_1, P_2 sind die Richtungslinien zu den beiden Knotenpunkten K_1 und K_2 gezogen. Die Winkel, die die Richtungslinien mit der Basallinie einschließen, heißen für das rechte Auge α , für das linke β . Der Unterschied zweier auf einander folgender α heiße $\mu_1, \mu_2 \dots$ der zweier auf einander folgender β heiße $\nu_1, \nu_2 \dots$. Die Winkel $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \dots$, welche die Richtungslinien je eines Alléepunktes mit einander bilden, sind gleich den Differenzen der entsprechenden α und β . Die Bedeutung der einzelnen Columnen in den folgenden Tabellen ist damit erklärt. In der vorletzten Columnne ist das Verhältnis je zweier zusammengehöriger ν und μ angegeben; welche theoretische Bedeutung dieser Quotient hat, wird sich bald zeigen. Von der Differenz $\alpha - \beta = \lambda$ (letzte Columnne) wird erst später Gebrauch gemacht werden.

Beobachter: Hillebrand (600).

Nummer des Faden- paares	Entfernung vom Beobachter	Lateralabstand	α	μ	ϑ	v	$\frac{v}{\mu}$	λ
I	1000	454	78° 57' 57"		75° 28' 40"			3° 29' 11"
II	1400	478	81 35 22	2° 37' 25"	79 2 41	3° 33' 55"	1' 359	2 32 41
III	1800	502	83 3 47	1 28 25	81 3 54	2 1 13	1' 371	1 59 53
IV	2200	520	84 5 0	1 1 13	82 20 22	1 22 28	1' 347	1 38 38
V	2600	541	84 45 32	0 40 32	83 21 49	0 55 27	1' 368	1 23 43
VI	3000	558	85 17 35	0 32 3	84 4 54	0 43 5	1' 344	1 12 41
VII	3400	579	85 40 8	0 22 33	84 35 53	0 30 59	1' 374	1 4 15
VIII	3800	600	85 57 57	0 17 49	85 0 25	0 24 32	1 377	0 57 32
							Mittleres $\frac{v}{\mu} = 1' 363$	

Tabelle XIV.

Beobachter: Hillebrand (600).

Nummer des Faden- paares	Entfernung vom Beobachter	Lateraldistanz	z	μ	θ	$\frac{\nu}{\mu}$	λ
I	1000	433	79° 4' 34"	2° 36' 48"	75° 35' 13"	3° 33' 23"	3° 29' 21"
II	1400	473	81 41 22	1 22 25	79 8 36	1 55 18	2 32 46
III	1800	502	83 3 47	0 55 1	81 3 54	1 16 19	1 59 53
IV	2200	528	83 58 48	0 40 10	82 20 13	0 55 5	1 38 35
V	2600	551	84 38 58	0 32 22	83 15 18	0 43 21	1 23 40
VI	3000	569	85 11 20	0 24 47	83 58 39	0 33 14	1 12 41
VII	3400	587	85 39 58	0 18 19	84 35 24	0 25 1	1 4 34
VIII	3800	600	85 57 57		85 0 25		0 57 32
						Mittleres $\frac{\nu}{\mu} = 1' 360$	

Tabelle XV.

Beobachter: Hillebrand (390).

I	1000	308	83° 2' 39"	1° 41' 29"	79° 27' 47"	2° 41' 16"	3° 34' 52"
II	1400	322	84 44 8	0 59 28	82 9 3	1 33 22	2 35 5
III	1800	333	85 43 36	0 36 24	83 42 25	0 58 10	2 1 11
IV	2200	346	86 20 0	0 25 50	84 40 35	0 41 2	1 39 25
V	2600	358	86 45 50	0 20 42	85 21 37	0 31 52	1 24 13
VI	3000	367	87 6 32	0 14 20	85 53 29	0 22 52	1 13 3
VII	3400	379	87 20 52	0 11 46	86 16 21	0 18 32	1 4 31
VIII	3800	390	87 33 38		86 34 53		0 57 45
						Mittleres $\frac{\nu}{\mu} = 1' 579$	

Tabelle XVI.

Beobachter: Hillebrand (390).

I	1000	312	82° 55' 54"	1° 34' 53"	79° 21' 10"	2° 34' 39"	3° 34' 44"
II	1400	333	84 30 47	0 57 37	81 55 49	1 31 31	2 34 58
III	1800	349	85 28 24	0 37 34	83 27 20	0 59 19	2 1 4
IV	2200	364	86 5 58	0 26 2	84 26 39	0 41 11	1 39 19
V	2600	379	86 32 0	0 25 24	85 7 50	0 36 32	1 24 10
VI	3000	383	86 57 24	0 19 26	85 44 22	0 27 57	1 13 2
VII	3400	387	87 16 50	0 14 53	86 12 19	0 21 40	1 4 31
VIII	3800	390	87 31 43		86 33 59		0 57 44
						Mittleres $\frac{\nu}{\mu} = 1' 530$	

Tabelle XVII.

Beobachter: Hillebrand (266).

Nummer des Faden- paares	Entfernung vom Beobachter	Lateralabstand	α	μ	β	γ	$\frac{\gamma}{\mu}$	λ
I	1000	207	85° 54' 37"		82° 17' 0"			3° 37' 37"
II	1400	218	86 51 7	0° 56' 30"	84 14 56	1° 57' 50"	2° 087	2 36 11
III	1800	229	87 22 33	0 31 20	85 20 49	1 5 53	2 096	2 1 44
IV	2200	239	87 43 21	0 20 18	86 3 38	0 42 40	2 059	1 39 43
V	2600	246	87 59 44	0 16 23	86 35 18	0 31 40	1 933	1 24 26
VI	3000	252	88 12 19	0 12 35	86 59 7	0 22 49	1 893	1 13 12
VII	3400	261	88 20 26	0 8 7	87 15 49	0 16 42	2 058	1 4 37
VIII	3800	266	88 28 39	0 8 13	87 30 50	0 15 1	1 828	0 57 49
						Mittleres $\frac{\gamma}{\mu} = 1.993$		

Tabelle XVIII.

Beobachter: Hillebrand (266).

I	1000	219	85° 34' 6"		81° 56' 47"			3° 37' 19"
II	1400	236	86 29 5	0° 54' 59"	83 53 4	1° 56' 17"	2° 097	2 36 1
III	1800	245	87 7 18	0 38 13	85 5 38	1 12 34	1 899	2 1 40
IV	2200	247	87 37 6	0 29 48	85 57 25	0 51 47	1 748	1 39 41
V	2600	253	87 55 6	0 18 0	86 30 41	0 33 16	1 848	1 24 25
VI	3000	260	88 7 45	0 12 39	86 54 33	0 23 52	1 887	1 13 12
VII	3400	263	88 19 26	0 11 41	87 14 48	0 20 15	1 733	1 4 38
VIII	3800	266	88 28 39	0 9 13	87 30 50	0 16 2	1 740	0 57 49
						Mittleres $\frac{\gamma}{\mu} = 1.850$		

Tabelle XIX.

Beobachter: Czermak (600).

I	1000	474	78° 28' 11"		74° 53' 20"			3° 34' 45"
II	1400	498	81 13 45	2° 45' 34"	73 36 41	3° 43' 15"	1 348	2 37 4
III	1800	513	82 55 19	1 41 34	80 51 49	2 15 8	1 330	2 3 30
IV	2200	531	83 58 2	1 2 43	82 16 23	1 24 34	1 349	1 41 39
V	2600	547	84 42 54	0 44 52	83 10 30	1 0 13	1 342	1 20 18
VI	3000	562	85 16 27	0 33 33	84 1 29	0 44 53	1 338	1 14 58
VII	3400	585	85 38 7	0 21 40	84 31 53	0 30 24	1 403	1 6 14
VIII	3800	600	85 58 51	0 20 44	84 59 31	0 27 38	1 333	0 59 20
						Mittleres $\frac{\gamma}{\mu} = 1.349$		

Tabelle XXIII.

Beobachter: Radaković (600).

Nummer des Faden- paares	Entfernung vom Beobachter	Lateraldistanz	z	μ	θ	ν	$\frac{\nu}{\mu}$	λ
I	1000	410	80° 4' 25"		70° 46' 31"			3° 17' 54"
II	1400	450	82 4 14	1° 59' 49"	79 40 37	2° 54' 6"	1.453	2 23 37
III	1800	474	83 26 23	1 22 9	81 33 45	1 53 8	1.377	1 52 38
IV	2200	514	84 6 32	0 40 9	82 34 3	1 0 18	1.502	1 32 29
V	2600	541	84 42 54	0 36 22	83 24 26	0 50 23	1.385	1 18 28
VI	3000	565	85 11 20	0 28 26	84 3 11	0 38 45	1.363	1 8 9
VII	3400	584	85 35 37	0 24 17	84 35 24	0 32 13	1.326	1 0 13
VIII	3800	600	85 56 9	0 20 32	85 2 12	0 26 48	1.305	0 53 57
Mittleres $\frac{\nu}{\mu} = 1.387$								

Tabelle XXIV.

Beobachter: Radaković (390).

I	1000	275	83° 51' 51"		80° 29' 28"			3° 22' 23"
II	1400	306	84 58 45	1° 6' 54"	82 33 10	2° 3' 42"	1.849	2 25 35
III	1800	327	85 45 30	0 46 45	83 51 51	1 18 41	1.683	1 53 49
IV	2200	337	86 23 52	0 38 22	84 50 38	0 58 47	1.532	1 33 14
V	2600	350	86 48 28	0 24 36	85 29 30	0 38 52	1.580	1 18 58
VI	3000	360	87 8 15	0 19 47	85 59 45	0 30 15	1.529	1 8 30
VII	3400	380	87 18 20	0 10 5	86 17 51	0 18 6	1.795	1 0 29
VIII	3800	390	87 30 50	0 12 30	86 36 41	0 18 50	1.507	0 54 9
Mittleres $\frac{\nu}{\mu} = 1.639$								

Tabelle XXV.

Beobachter: Radaković (266).

I	1000	224	85° 18' 45"		81° 55' 4"			3° 23' 41"
II	1400	230	86 31 30	1° 12' 45"	84 5 10	2° 10' 6"	1.788	2 26 20
III	1800	240	87 8 20	0 36 50	85 14 10	1 9 0	1.873	1 54 10
IV	2200	244	87 36 20	0 28 0	86 2 53	0 48 43	1.740	1 33 27
V	2600	251	87 53 50	0 17 30	86 34 40	0 31 47	1.816	1 19 10
VI	3000	259	88 6 1	0 12 11	86 57 22	0 22 42	1.803	1 8 39
VII	3400	264	88 16 54	0 10 53	87 16 20	0 18 58	1.743	1 0 34
VIII	3800	266	88 26 51	0 9 57	87 32 38	0 10 18	1.038	0 54 13
Mittleres $\frac{\nu}{\mu} = 1.780$								

Tabelle XXIX.

Beobachter: Wirtinger (390).

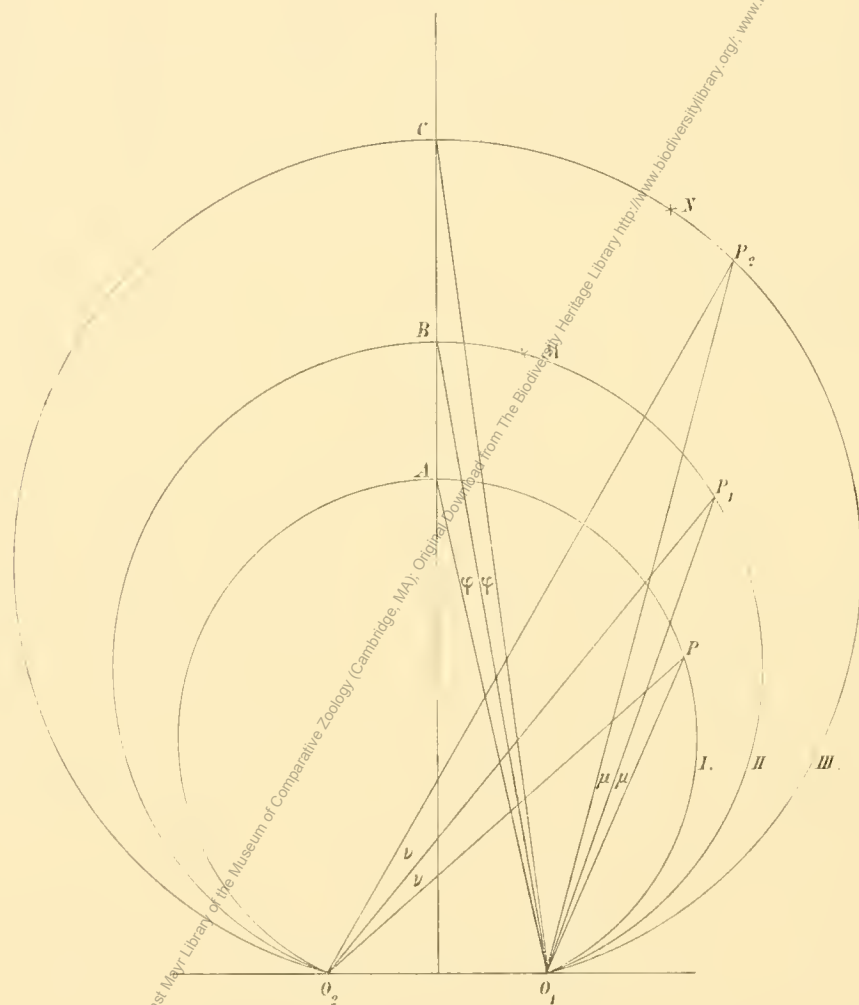
Nummer des Faden- paares	Entfernung vom Beobachter	Lateral- distanz	α	μ	θ	γ	$\frac{\gamma}{\mu}$	λ
I	1000	360	81° 34' 54"		75° 1' 51"			3° 33' 5"
II	1400	370	83 45 48	2° 10' 54"	81 11 21	3° 9' 30"	1' 448	2 34 27
III	1800	375	85 3 40	1 17 58	83 2 52	1 51 31	1' 430	2 0 54
IV	2200	378	85 55 5	0 51 19	84 15 49	1 12 57	1' 422	1 39 16
V	2600	381	86 30 41	0 35 36	85 6 31	0 50 42	1' 424	1 24 10
VI	3000	383	86 57 23	0 20 42	85 44 22	0 37 51	1' 417	1 13 1
VII	3400	390	87 14 18	0 16 55	86 9 33	0 25 11	1' 489	1 4 45
VIII	3800	390	87 31 16	0 16 58	86 33 32	0 23 59	1' 414	0 57 44
Mittleres $\frac{\gamma}{\mu} = 1' 435$								

§ 23. Für die sogleich zu entwickelnde Theorie ist nun folgende, aus den Versuchstabellen ersichtliche Thatsache von entscheidender Bedeutung: für einen und denselben Beobachter und für eine und dieselbe Allee schwankt der Quotient $\frac{\gamma}{\mu}$ um einen constanten Wert, er würde einen genau constanten Wert haben, wenn es keine Beobachtungsfehler gäbe. Alle von verschiedener Breite haben ein verschiedenes $\frac{\gamma}{\mu}$, und zwar wächst dieser Quotient, wenn die Breite abnimmt. Ich habe an die Spitze jeder Tabelle neben den Namen des Beobachters in Klammer die Lateral-*distanz* des fernsten (nach meiner Zählung VIII.) Fadenpaares gesetzt, also jenes Fadenpaares, das der Beobachter nicht einstellt, sondern nach dessen scheinbarer Breite als Normalobject er die Einstellungen der übrigen Fadenpaare macht, oder vielmehr vom Gehilfen machen lässt. Wie man sieht, ist für die durch die Zahl (600) charakterisierten Alleen jener Quotient $\frac{\gamma}{\mu}$ am kleinsten, er ist größer für die Alleen (390), am größten für die Alleen (266). Welche physiologische Bedeutung diesem Quotienten zukommt, wird durch die sogleich zu entwickelnde Theorie ersichtlich werden. Für jetzt bitte ich nur seine Constanz (innerhalb einer und derselben Versuchsreihe) festzuhalten.

§ 24. Der Theorie, welche ich jetzt entwickeln werde, will ich zur vorläufigen Vereinfachung die Annahme zugrunde legen, dass bei horizontaler Lage der Blickebene der Längshoropter der Müller'sche Kreiscylinder sei, dass also (da die Zeichnung Fig. 7 nur die Verhältnisse in der Blickebene darstellt) jeder durch die beiden Knotenpunkte O_1 und O_2 gelegte Kreis der geometrische Ort aller wirklichen Punkte sei, deren Vorstellungsbilder in frontalparallelen Ebenen liegen. Nur der Einfachheit wegen — denn wir werden diese (empirisch ohnehin unrichtige) Annahme später ausschalten, ohne dass dies die Theorie irgendwie berührt. Die Winkel φ (Fig. 7) seien einander gleich und sollen halbe Disparationsminima darstellen. Es ist also $AB < BC$ und auch die senkrechten Abstände der drei Alleepunkte P, P_1, P_2 von der Basallinie wachsen nicht um constante Größen, wie das früher (vgl. Fig. 6) entsprechend der Einrichtung unserer Versuche der Fall war. Auf den drei durch A, B und C gehenden Kreisen liegen daher lauter Punkte, die von der Basallinie denselben scheinbaren Abstand haben wie die Punkte A , beziehungsweise B , beziehungsweise C . Daher wachsen auch die scheinbaren Entfernungen der Alleepunkte P, P_1, P_2 vom Beobachter um gleiche Größen, und zwar ist der scheinbare Tiefenabstand zwischen P_1 und P ein ebenmerklicher und desgleichen der zwischen P_2 und P_1 , weil sie auf Kreisen liegen, die um Disparationsminima von einander entfernt sind.

Von drei beliebigen, je auf den Kreisen I, II und III liegenden Punkten würde dasselbe gelten, also z. B. von den Punkten P , M , N . Nur würde diese Trias von Punkten sich von der früheren (P , P_1 , P_2) durch die scheinbaren Lateralwerte unterscheiden, d. h. durch die scheinbaren Abstände von der Medianlinie. Nun sei P_1 ein Punkt, der durch empirische Ermittlung als ein solcher aufgefunden wurde, welcher im Kreise II denselben scheinbaren Lateralabstand von der Mediane hat wie P im Kreise I. Mit anderen Worten P und P_1 seien Punkte einer empirisch ermittelten Scheinallee. Der Gesichtswinkel, der den Lateralabstand des Punktes P von der Mediane bestimmt, ist $A O_1 P$. Denn unter Voraussetzung der Giltigkeit des Müller'schen Horopters sind die Ortsunterschiede aller auf dem Kreise I liegenden Punkte

Fig. 7.



rein laterale Unterschied. (Dem linken Auge erscheint der Bogen AP unter demselben Winkel.) Der Gesichtswinkel, welcher den Lateralabstand von P_1 bestimmt, ist $B O_1 P_1$. Dieser ist um den Betrag $(\mu + \varphi)$ kleiner als $A O_1 P$. Demselben scheinbaren Lateralwerte entspricht also ein in Wirklichkeit kleinerer Lateralwinkel, wenn diese Lateralwerte Punkten angehören, welche einen physiologisch wirkamen (oder, wenn man will, psychisch merklichen) Tiefenunterschied besitzen, wie das ja unsere Versuche gezeigt haben. Ich will für diese Thatsache einstweilen den gemeinverständlichen (psychologisch allerdings ungehörigen) Ausdruck gebrauchen: wir rechnen den empfundenen Entfernungsunterschied in die Größenvergleichung ein¹⁾, so dass wir zwei unter gleichen Gesichtswinkeln gesehene

¹ Psychologisch ist diese Ausdrucksweise darum ungehörig, weil sie den Schein erweckt, als handle es sich hier um einen zur Empfindung hinzukommenden Urtheilsact, was sicher nicht der Fall ist. Lateralwert und Entfernung sind durch Abstraction

Strecken nur dann für gleich halten würden, wenn sie gleich weit entfernt erschienen (sei es, dass sie wirklich gleich weit entfernt sind, sei es, dass ihr tatsächlicher Entfernungsunterschied physiologisch unwirksam ist).

Dass nun der Unterschied der beiden Lateralwinkel $A O_1 P$ und $B O_1 P_1$ gerade den Wert $(\mu + \varphi)$ hat, das ist eine reine Erfahrungsthat. Physiologisch lässt sich nicht deducieren, dass gerade dieser Betrag den Unterschied der beiden Entfernungen compensieren müsse. Die Theorie kann aber sofort einsetzen, wenn es sich darum handelt, einen dritten Punkt P_2 , ja überhaupt beliebig viele andere Punkte zu finden, welche derselben scheinbaren Allee angehören wie P und P_1 . Gesezt, ich suche einen dritten Punkt, der um ein Disparationsminimum ferner liegen soll als P_1 , demnach dem Kreise III angehört. Wenn dieser fragliche Punkt von P_1 denselben (hier ebenmerklichen) Tiefenabstand haben soll wie P_1 von P , dann muss sein Lateralwinkel gegenüber dem Lateralwinkel von P_1 um denselben Betrag kleiner sein, um welchen der Lateralwinkel von P_1 kleiner ist als der von P , d. h. also wieder um $(\mu + \varphi)$. Nun ist der Voraussetzung nach φ constant, weil die Kreise I, II und III durch das Fortschreiten um (constante) Disparationsminima entstanden sind. Also muss auch μ constant sein. Und da $\nu - \mu$ (die Disparation zwischen P und P_1 , beziehungsweise zwischen P_1 und P_2) constant ist, ist auch ν constant. Es muss also der Strahl $O_1 P_1$ um denselben Winkelbetrag μ nach links gedreht werden, um welchen der Strahl $O P$ gedreht werden musste, um in die (empirisch gefundene) Lage $O P_1$ zu gelangen oder, was dasselbe ist, der vom linken Auge ausgehende Strahl $O_2 P_1$ muss um den Winkel ν weiter gedreht werden, so dass er in die Lage $O_2 P_2$ kommt. Würden wir in derselben Weise weiter fahren durch die beiden Knotenpunkte O_1 und O_2 Kreise durchzulegen, so dass also der über die Sehne $O_1 O_2$ errichtete Peripheriewinkel jedes folgenden Kreises um denselben Betrag $\nu - \mu = 2\varphi$ kleiner wäre als der des vorhergegangenen, so würden wir den Strahl $O_1 P_2$ nur immer wieder um den Winkel μ (oder den Strahl $O_2 P_2$ um den Winkel ν) weiter drehen müssen, um immer neue Punkte derselben scheinbaren Allee zu erhalten. Wenn wir nun anstatt discrete Punkte dieser Allee anzuschauen, die Curve finden wollen, in welcher alle Punkte dieser scheinbaren Allee liegen müssen, so wird damit nichts anderes verlangt als die Bahn zu finden, welche der Punkt P durchläuft, wenn man die Strahlen $O_1 P$ und $O_2 P$ aus ihrer Anfangslage im gleichen Sinne so weiter dreht, dass die beiden Drehungswinkel immer in dem constanten Verhältnisse $\frac{\nu}{\mu}$ zu einander stehen, ein Verhältnis, welches durch die empirisch gefundene Stellung zweier Punkte einer scheinbaren Allee gegeben ist.

Will man umgekehrt diese ganze Deduction experimentell verificieren, so braucht man nur zwei Reihen von Verticalfäden so aufzustellen, dass sie eine scheinbar medianparallele Allee bilden, das zwischen je zwei benachbarten Fadenpaaren bestehende μ und ν auszurechnen und nachzusehen, ob das zwischen jedem ν und dem dazugehörigen μ bestehende Verhältnis ein constantes ist, beziehungsweise (da wir ja mit Beobachtungsfehlern zu rechnen haben) ob die verschiedenen $\frac{\nu}{\mu}$ sich um einen constanten Wert gruppieren.

Dass dies wirklich der Fall ist, zeigen die früher mitgetheilten Tabellen. Es ist jetzt auch klar, warum ich auf die empirisch gefundene Constanz dieses Quotienten so großes Gewicht gelegt habe.

§ 25. Wollen wir nun dem Hauptsatze dieser Theorie eine allgemeine Fassung geben, so kann das in folgender Weise geschehen: damit eine Reihe von verschieden weit entfernten Objecten bei binocularer Betrachtung gleich groß erscheinen, müssen ihre wirklichen (lateralen) Größen mit wachsender Entfernung so zunehmen, dass die Gesichtswinkel umgekehrt proportional mit der scheinbaren, durch die Disparation gemessenen Entfernung abnehmen. Oder kürzer: mehrere verschieden entfernte Objecte erscheinen dann gleich

und Hinzudenken von Beziehungspunkten künstlich geschaffene Relationen. Um ihrer Zweizahl willen hört eine Anschauung ebenso wenig auf einheitlich zu sein wie ein Punkt aufhört Einer zu sein, weil man seine Lage durch den Abstand von drei Coordinatenebenen definiert.

groß, wenn die Unterschiede ihrer Gesichtswinkel den Unterschieden ihrer scheinbaren Entfernungen proportional sind, wobei die scheinbaren Entfernungsunterschiede durch die Disparation gemessen werden.

Dieses Gesetz geht in das für monoculares Sehen gültige, aber mit Unrecht als allgemein gültig behauptete Gesichtswinkelgesetz über, sobald die scheinbare Entfernung gleich bleibt — denn diesfalls muss auch der Gesichtswinkel gleich bleiben, wenn die scheinbare Größe sich nicht ändern soll. Bei der monocularen Perspective ist dies, wenn alle Erfahrungsmotive für das Tiefensehen ausgeschlossen sind, auch wirklich der Fall. Denn indem die monoculare Perspective die Regeln der Centralprojection anerkennt, lässt sie damit implicite das Moment der verschiedenen Entfernung ganz aus dem Spiele und betrachtet die Größe der Gegenstände nur nach der Größe ihrer Projection (vgl. oben S. 16 [270]). Die Netzhaut ist dann wirklich das genaue Analogon einer photographischen Platte.

Für das binoculare Sehen, das innerhalb der stereoskopischen Grenze eine Empfindung von der verschiedenen Entfernung hat, gelten die Gesetze der Centralprojection nicht, wie wir eben gesehen haben — sie gelten aber jenseits der stereoskopischen Grenze, weil dort zwar eine thatsächliche, aber keine scheinbare Entfernungszunahme, also keine physiologischen Tiefenunterschiede mehr möglich sind. So kann man das Gesetz der scheinbaren Größe bei monocularem Sehen als einen besonderen Fall jenes eben formulierten Gesetzes der scheinbaren Größe für binoculares Sehen fassen, ein Specialfall, der sich beim binocularem Sehen nur dann verwirklicht, wenn das binoculare Sehen für die dritte Dimension nichts mehr leistet, also physiologisch mit dem monocularen gleichwertig wird. Das ist jenseits der stereoskopischen Grenze der Fall, so z. B. bei den Himmelskörpern. Für den Astronomen fallen daher, wie Eingangs erwähnt, die Begriffe »scheinbare Größe« und »Gesichtswinkel« zusammen; ebenso für den (monocular sehenden) Mikroskopiker und schon gar für denjenigen, der bloß an eine bildauffangende Ebene (einen Schirm) denkt und nicht an Netzhaut, Opticus und Hirn.

§ 26. Bei der Ableitung dieses Hauptsatzes der Lehre von der binocularen Sehgröße haben wir zunächst die Gültigkeit des Müller'schen Längshoropters angenommen. An dem Wesen der Theorie ändert sich jedoch nichts, wenn wir diese Annahme fallen lassen; desgleichen können wir die Annahme entbehren, dass die Größe des Disparationsminimums für die Medianlinie dieselbe sei wie für eine Reihe lateral gelegener Objecte (die Punkte der Allee).

In Fig. 8 ist von diesen Annahmen abgesehen. Die Punkte A und P sollen in einem empirischen Horopter liegen (durch die punktierte Curve angedeutet), desgleichen B und P_1 , ebenso C und P_2 . Wir haben dabei gerade die Gegend ausgewählt, in der der empirische Horopter den Sinn seiner Krümmung ändert. Auch hier soll P_2 von P_1 und P_1 von P um ein Disparationsminimum entfernt sein, womit zunächst nur die Constanz der Differenz ($\nu - \mu$) behauptet ist, noch nicht, wie im vorigen Falle, die Constanz der Winkel μ und ν selbst.

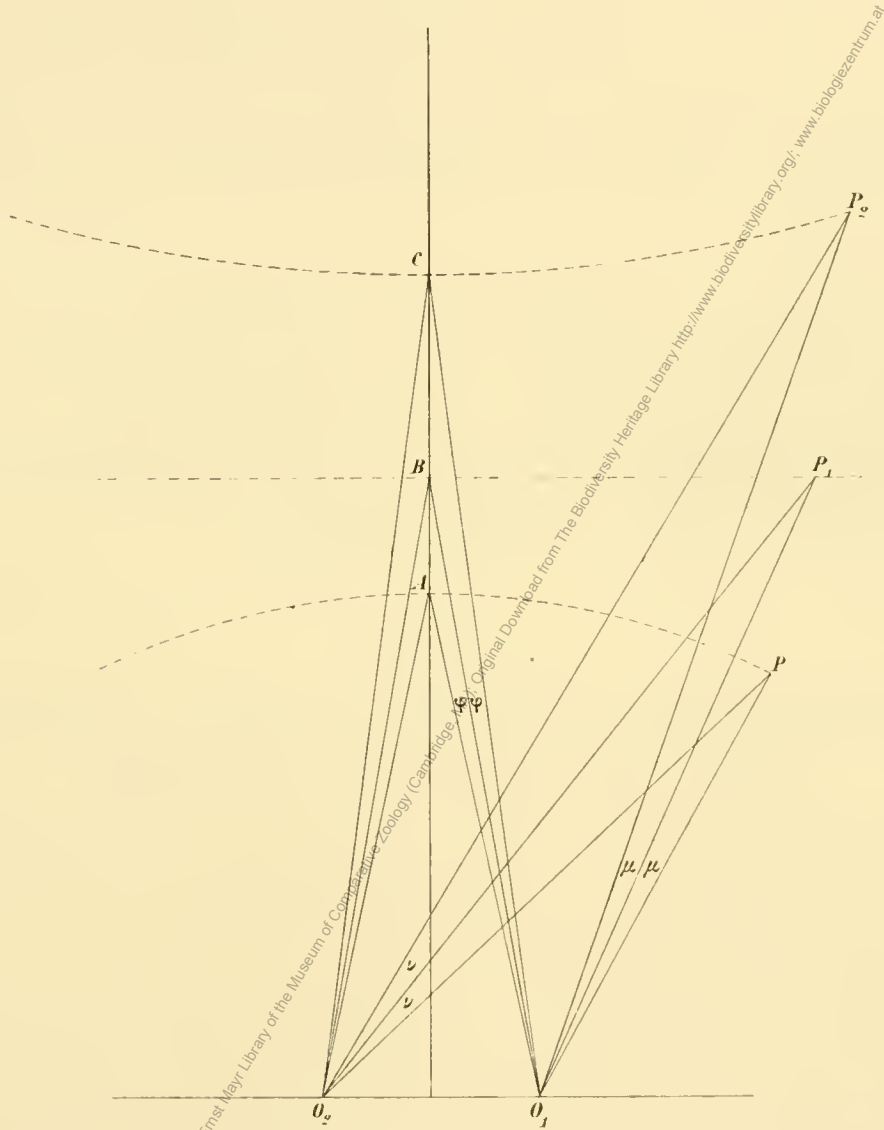
Auch hier nehmen wir (und zwar auf Grund derselben Überlegungen, wie sie bei Fig. 7 angestellt wurden) an, dass die Lateralwinkel AO_1P , BO_1P_1 , CO_1P_2 um eine constante Größe, nämlich $(\mu + \varphi)$ abnehmen. Diese Annahme für sich enthält natürlich noch nicht die Constanz von μ und φ selbst. Die Constanz von μ und φ selbst geht aber aus der Annahme hervor, dass $AP \dots BP_1 \dots CP_2$ Horopteren sind, die um Disparationsminima von einander abstehen; denn dann müssen $A \dots B \dots C$ auch um Disparationsminima von einander entfernt sein, und zwar sind, wie wir wissen, diese Minima constant. Da ferner A , B und C als Punkte der Medianlinie keine Lateralabweichung von einander haben, so bleibt nichts anderes übrig als φ constant zu setzen und dadurch ist auch die Constanz von μ gegeben und wegen der constanten Differenz $\nu - \mu$ auch die Constanz von ν .

Man sieht also, dass die Annahme der Gültigkeit des Müller'schen Horopters entbehrt werden kann und damit auch die Annahme, dass der Betrag des Disparationsminimums zwischen den Punkten P , P_1 und P_2 derselbe sein müsse wie der zwischen den Punkten A , B und C . In der That würde sich an

Fig. 8 leicht zeigen lassen, dass zwischen $(\nu - \mu)$ und 2φ nicht Gleichheit besteht, wie das in Fig. 7 der Fall war¹.

§ 27. Unser Hauptsatz, dass bei gleicher scheinbarer Größe die Gesichtswinkeldifferenz umgekehrt proportional sein muss der physiologischen (durch die Disparation gemessenen) Entfernungsdifferenz, lässt sich übrigens auch durch eine andere Überlegung plausibel machen. Wenn ich den Punkt P (Fig. 8) binocular

Fig. 8.



fixiere und empirisch einen zweiten Punkt P_1 finde, der seinem Tiefenwerte nach um ein Ebenmerkliches seinem Lateralwerte nach aber um gar nichts von P verschieden ist, so hängen diese beiden räumlichen Beziehungen doch nur von der Lage der vier getroffenen Netzhautpunkte des Doppelauges ab, da Augen-

¹ Nur beiläufig will ich hier erwähnen, dass im Falle des empirischen Horopters (Fig. 8) die Lateralabstände $AP \dots BP_1 \dots CP_2$ dem linken und rechten Auge nicht unter gleichen Gesichtswinkeln erscheinen (wie das beim schematischen Horopter in Fig. 7 der Fall war), dass ferner die Abnahme der Lateralwinkel zwar für jedes einzelne Auge constant, nicht aber für beide Augen untereinander gleich ist. Die Theorie wird dadurch gar nicht berührt, da sie weder von der Gleichheit der linken und rechten Gesichtswinkel noch von der Gleichheit der Abnahmen für das rechte und linke Auge Gebrauch macht, vielmehr nur die Constanz der Abnahme für jedes einzelne Auge zur Basis hat. Übrigens werden spätere Überlegungen zeigen, dass hier geometrisch ungleiche Winkel als functionell gleich zu betrachten sind, wie ja überhaupt die andere Gestalt des empirischen Horopters gegenüber dem mathematischen darauf beruht, dass geometrisch Gleiches physiologisch ungleich sein kann und umgekehrt.

bewegungen, Accommodationsänderungen oder welche Momente man etwa sonst noch als localisatorische heranzuziehen versucht sein könnte, hier, wo P dauernd fixiert wird, nicht in Betracht kommen können. Wenn ich nun, anstatt P zu fixieren, P_1 fixiere, und mir nun dieselben vier Netzhautpunkte gereizt denke wie im vorigen Falle, so ist gar kein Grund vorhanden, zu erwarten, dass ein anderer Eindruck entstehen würde als wieder der von zwei Punkten, die in Bezug auf den Tiefenwert um ein Ebenmerkliches, in Bezug auf den Breitenwert um gar nichts von einander verschieden sind. Nun sind es aber die beiden Außenpunkte P_1 und P_2 , welche bei Fixation von P_1 dieselben Netzhautpunkte reizen, welche bei Fixation von P durch die beiden Außenpunkte P und P_1 gereizt wurden: also werden wir erwarten, dass auch im zweiten Falle der Eindruck zweier nach der Tiefe ebenmerklich distanter Punkte von gleichem Lateralwerte entstehen wird, was auch thatsächlich der Fall ist.

Diese Überlegung kann freilich nur für denjenigen entscheidend sein, welcher den scheinbaren (empfundnen) Ort eines Sehdinges als ein mit den betreffenden Netzhautstellen unveränderlich verknüpftcs Datum hält.

Für die offenen und versteckten Anhänger der Projectionslehre, für diejenigen, welche die Reize nach Richtungslinien »hinaus zu projicieren« und daher die Dinge dort zu sehen vermeinen, wo sie »wirklich sind«, haben solche Überlegungen keinen Sinn. Da dieselben aber noch viele andere Erfahrungen (so z. B. die scheinbare Lage der Doppelbilder, die Discrepanz zwischen Kernfläche und Längshoropter etc.) ignorieren müssen, so wird es auf eine Erfahrung mehr oder weniger nicht mehr ankommen — und die wirkliche Gestalt scheinbarer Alleen ist eben auch eine solche Erfahrung. Aus diesem Grunde habe ich die letzte Überlegung nur anhangsweise erwähnt. Das Wesentliche sind die mitgetheilten Thatsachen und ihr allgemeiner Ausdruck in Gestalt des oben erwähnten Hauptsatzes.

VII. Capitel.

Mathematische Darstellung der Curven, in welchen die Fußpunkte scheinbarer Alleen liegen. Der ∞ ferne Punkt.

§. 28. Man kann also beliebig viele Punkte einer scheinbaren Allee finden, wenn die Lage eines Punktes P und der constante Quotient $\frac{\nu}{\mu} = c$ gegeben sind. Da für eine und dieselbe Pupillardistanz die Lage von P durch die beiden Winkel α und ϑ , welche die Richtungslinien von P mit der Basallinie einschließen, gegeben ist, so können wir sagen, dass für ein feststehendes Augenpaar eine bestimmte Allee-curve durch die drei Größen α , ϑ , c definiert ist.

Der gewöhnliche und nächstliegende Fall, wie wir zur Kenntnis des Quotienten c gelangen, ist der, dass uns außer P noch ein zweiter Punkt der Allee empirisch gegeben ist; diesfalls kennen wir ja die Lage der vier Richtungslinien, hiemit auch die beiden Winkel, welche je zwei Richtungslinien in dem entsprechenden Knotenpunkte mit einander einschließen, und daher auch das Verhältniss dieser Winkel. Da wir aber, wie spätere Überlegungen zeigen werden, unter Umständen auch auf ganz anderen Wegen zur Kenntnis dieses Quotienten $\frac{\nu}{\mu}$ gelangen können, so will ich vorläufig ganz davon absehen, auf welchem Wege wir in Besitz dieses $\frac{\nu}{\mu}$ kommen, ich will vielmehr einfach annehmen, es sei gegeben und habe den Wert c .

Die Lage des einzigen bekannten Alleepunktes P (vgl. Fig. 9) sei also ausgedrückt durch die beiden Winkel α und ϑ , welche die zu diesem Punkte gehörigen Richtungslinien mit der Basallinie ($= 2a$) bilden.

Die Curve, in welcher sämtliche Alleepunkte liegen müssen, werde ich nicht durch eine unmittelbare Beziehung zwischen x und y darstellen, sondern werde x und y als Functionen einer dritten Variablen betrachten.

Neue Punkte dieser Curve entstehen, wie schon erörtert, dadurch, dass die Strahlen $O_1 P$ und $O_2 P$ um O_1 , beziehungsweise O_2 im selben Sinne so gedreht werden, dass das Verhältniss der Drehungswinkel den constanten Wert c hat.

Ein beliebiger Punkt P_1 ist demnach durch die Constanten α , ϑ und c und durch die Variable μ bestimmt, da $\nu = c\mu$ ist. Es sollen die Coordinaten x_1 , y_1 dieses Punktes gefunden werden, und zwar für ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen x -Achse die Basallinie enthält und dessen Anfangspunkt der Halbierungspunkt der Basallinie ist. Die Abscissen der beiden Knotenpunkte heißen $+a$ und $-a$. Legt man durch P_1 und die beiden Knotenpunkte einen Kreis¹, so ist der halbe, über dem Bogen $O_1 O_2$ errichtete Centriwinkel

$$\lambda = \alpha + \mu - (\vartheta + c\mu).$$

Die Gleichung dieses Kreises heißt dann:

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{\operatorname{tg} \lambda}\right)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \lambda}$$

oder nach einigen Umformungen:

$$x^2 + y^2 - \frac{2ay}{\operatorname{tg} \lambda} = a^2.$$

Der Punkt P_1 muss als diesem Kreise angehörig der Bedingung genügen

$$x_1^2 + y_1^2 - \frac{2ay_1}{\operatorname{tg} \lambda} = a^2 \dots 1).$$

Setzen wir $\alpha + \mu = K$ und $\vartheta + c\mu = \theta$ und daher $\lambda = K - \theta$, so ist weiter

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_1}{x_1 + a}$$

oder

$$x_1 = \frac{y_1}{\operatorname{tg} \theta} - a \dots 2).$$

Wird x_1 aus 1) und 2) eliminiert, so ergibt sich

$$y_1^2 \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta} + 1 \right) = 2ay_1 \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \lambda} \right)$$

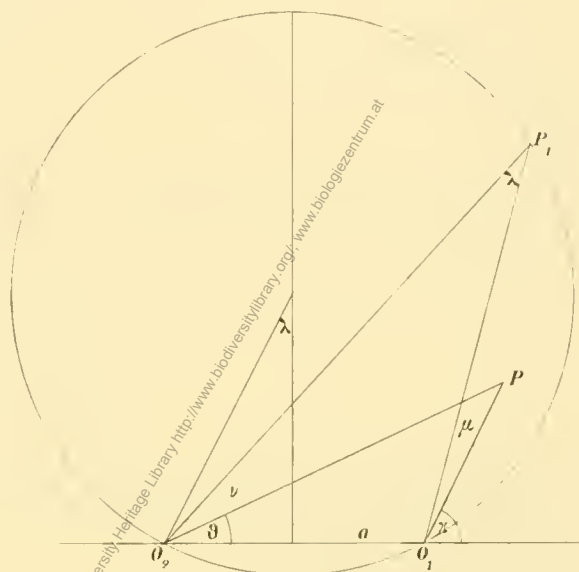
oder

$$y_1 = 2a \frac{\sin(\lambda + \theta) \sin \theta}{\sin \lambda}$$

und wenn man λ durch K und θ ausdrückt

$$y_1 = 2a \frac{\sin K \sin \theta}{\sin(K - \theta)} \dots 3),$$

Fig. 9.



¹ Ich bemerke ausdrücklich, dass dieser Kreis zwar mit dem Müller'schen Horopter für P_1 zusammenfällt, hier aber nur als Hilfsfigur verwendet wird, welcher gar keine physiologische Bedeutung zukommt. Ich betone das, damit der Leser nicht auf die Vermuthung komme, die folgende Überlegung enthalte irgend ein hypothetisches Element — die Annahme des Müller'schen Horopters wäre ja in der That ein solches.

wofür man nach Bedarf auch die Form setzen kann

$$y_1 = \frac{2a}{\cot \theta - \cot K}.$$

Es ist dann

$$x_1 = a \frac{\sin (K+\theta)}{\sin (K-\theta)} \dots\dots\dots 4),$$

wofür man auch setzen kann

$$x_1 = a \frac{\operatorname{tg} K + \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} K - \operatorname{tg} \theta}.$$

Setzt man in 3) und 4) wieder die ursprünglichen Größen $\alpha, \vartheta, c, \mu$ ein, so erhalten diese Gleichungen die Formen

$$y_1 = 2a \frac{\sin (\alpha + \mu) \sin (\vartheta + c\mu)}{\sin [\alpha - \vartheta + \mu(1-c)]} \dots\dots\dots 5),$$

$$x_1 = a \frac{\sin [\alpha + \vartheta + \mu(1+c)]}{\sin [\alpha - \vartheta + \mu(1-c)]} \dots\dots\dots 6).$$

Die Curve ist also definiert dadurch, dass die Coordinaten jedes Punktes durch die Gleichungen 5) und 6) charakterisierte Functionen einer dritten Variablen μ sind.

Aus 3) und 4) ist übrigens auch ersichtlich, dass für $\mu = 0$ auch $x = 0$. Die Curve geht also durch den mittleren Knotenpunkt.

Das Verhältnis $\frac{\nu}{\mu}$ haben wir als ein gegebenes betrachtet; wäre $\frac{\nu}{\mu} = \infty$, also $\mu = 0$, dann würde die Curve in eine durch den Knotenpunkt laufende Gerade übergehen, wie sich das auch aus der entsprechenden Zeichnung ergeben würde.

§ 29. Für spätere Überlegungen ist es nötig, den Verlauf der Curve über die stereoskopische Grenze hinaus zu verfolgen und zu untersuchen, welche specielle Form unser Hauptsatz jenseits dieser Grenze annimmt.



Folgende Erwägung will ich hier voranschicken. Gesetzt es seien wieder O_1 und O_2 die Knotenpunkte (vgl. Fig. 10), P ein Punkt der Curve und wir kennen den Quotienten $\frac{\nu}{\mu} = c$. Denken wir uns wieder die Strahlen O_1P und O_2P nach links so gedreht, dass sie jenem Quotienten genügen, so kommen sie einmal in die Parallelstellung, welche in der Figur durch die beiden Richtungen O_1P_∞ und O_2P_∞ angedeutet ist. Für diese Stellung liegt also der Curvenpunkt in ∞ Entfernung. Heißen die dieser Stellung entsprechenden Drehungswinkel μ_∞ und $c\mu_\infty$, so ist $\vartheta + c\mu_\infty = \alpha + \mu_\infty$, also

$$\mu_\infty = \frac{\alpha - \vartheta}{c - 1} = \frac{\lambda}{c - 1}.$$

Die Curve nähert sich also asymptotisch einer Geraden, die durch den Knotenpunkt geht und mit der Basallinie den Winkel

$$\alpha + \frac{\lambda}{c - 1}$$

bildet, ein Winkel, der uns später sehr wichtig werden wird. Ich werde diesen Winkel in Zukunft die »Richtung des unendlich fernen Punktes« nennen.

Anmerkung. Um die Richtung des ∞ fernen Punktes zu finden, ist, wie aus obiger Gleichung ersichtlich, nur erforderlich, die Lage eines Punktes, also sein α und ϑ , und das die Curve charakterisierende $\frac{\nu}{\mu} = c$ zu kennen. Kennt man empirisch mehrere Alleepunkte, so ist es principiell gleichgültig, welchen der beobachteten Alleepunkte, also welches α und ϑ man benützt, weil das Verhältnis der Drehungswinkel $\frac{\nu}{\mu}$ ein constantes ist. Handelt es sich aber um die concrete Auswertung, so wird es nicht gleichgültig sein, welcher von den beobachteten Alleepunkten der Rechnung zugrunde gelegt wird, weil jeder solche Punkt mit einem Beobachtungsfehler behaftet ist. Auch das $\frac{\nu}{\mu}$ ist ja nicht genau constant, sondern schwankt wegen der Beobachtungsfehler um einen constanten Wert; man kann also füglich nicht gerade das zwischen dem 1. und 2. oder dem 2. und 3. Fadenpaare bestehende $\frac{\nu}{\mu}$, also überhaupt kein einzelnes $\frac{\nu}{\mu}$, in die Rechnung einführen, weil man sonst das Resultat mit einem zufälligen Beobachtungsfehler belasten würde. Man wird vielmehr die α und ϑ aller beobachteten Punkte und ebenso sämtliche sich daraus ergebenden $\frac{\nu}{\mu}$ zugrunde legen und aus dem Mittel dieser Werte die Richtung des ∞ fernen Punktes rechnen. Bezeichnet c das Mittel aus sämtlichen $\frac{\nu}{\mu}$, so ist die Richtung des ∞ fernen Punktes, nämlich $\alpha + \mu \infty$ — wofür man auch $90 - \varphi$ schreiben kann —

$$90 - \varphi = \frac{1}{n} \left(\frac{\sum (\alpha - \vartheta)}{c - 1} + \sum \alpha \right).$$

Hiebei ist n die um 1 verminderte Anzahl der Fadenpaare, also 7, weil das c eine Relation zwischen 2 aufeinander folgenden Fadenpaaren darstellt, mithin bei 8 Fadenpaaren 7 mal auftritt.

Die untenstehende Tab. XXX zeigt in der 4. Columnne die Werte des Winkels, der von der Richtung des ∞ fernen Punktes und der Basallinie eingeschlossen wird. Die 3. Columnne verweist jedesmal auf die früher (S. 23 ff. [277]) mitgetheilte Versuchstabelle, welche der Berechnung dieses Winkels zugrunde liegt. Columnne 2 gibt die jedesmalige Breite des 3800 mm vom Beobachter entfernten Fadenpaares an, also desjenigen Fadenpaares, nach dessen scheinbarer Breite die übrigen Fadenpaare eingestellt wurden. Wie

Tabelle XXX.

Beobachter	Lateraldistanz des fernsten Fadenpaares	Vgl. die Tabelle	Richtung des ∞ fernen Punktes
Hillebrand	600	XIII	88° 36' 0"
»	600	XIV	88 36 52
Czermak	600	XIX	88 47 46
Radakovič	600	XXIII	88 14 1
Wirtinger	600	XXVI	89 6 13
»	600	XXVII	89 17 53
Hillebrand	390	XV	89° 12' 47"
»	390	XVI	89 19 51
Czermak	390	XX	89 1 19
»	390	XXI	89 20 38
Radakovič	390	XXIV	88 54 4
Wirtinger	390	XXVIII	89 44 8
»	390	XXIX	89 43 22
Hillebrand	266	XVII	89° 26' 47"
»	266	XVIII	89 35 53
Czermak	266	XXII	89 42 19
Radakovič	266	XXV	89 36 16

man sieht, nähert sich die Richtung des ∞ fernen Punktes umsomehr dem Parallelismus mit der Mediane, je schmaler die Allee ist.

§ 30. Der Winkel, den die Richtung des ∞ fernen Punktes mit der Mediane bildet (in der Fig. 10 mit φ bezeichnet) bestimmt die (halbe) scheinbare Breite der Allee in ihrem asymptotischen Verlaufe.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{z - \delta}{c - 1} + z \right)$$

Gemessen ist die scheinbare Breite der Allee damit nicht, da man mit einer dem wirklichen Raume angehörigen Größe etwas dem scheinbaren Raume angehöriges principiell nicht messen kann. Hingegen ist mit dem $\angle \varphi$ wenigstens eine relative Maßbestimmung gewonnen, insoferne das Verhältnis der scheinbaren Breiten zweier Alleen durch das Verhältnis der ihnen zugehörigen $\angle \varphi$ gemessen werden kann. Reine, d. h. nicht mit Tiefencomponenten behaftete, physiologische Lateralwerte können (von kleinen Abweichungen abgesehen) den geometrischen Lateralwinkeln proportional angesehen werden; ein Punkt liegt also n mal so lateral wie ein anderer, derselben Querschnittsebene angehöriger, wenn seine Richtungslinie mit der Richtungslinie eines in der Medianebene und in derselben Querschnittsebene gelegenen Punktes einen n mal so großen Winkel einschließt als dies beim anderen Punkt der Fall ist; aber das gilt natürlich nur unter der Voraussetzung, dass der mediane Punkt demselben empirischen Längshoropter angehört wie der Punkt, um dessen Lateralwert eben gefragt wird; denn, wenn die beiden Punkte, der laterale und der mediane, verschiedenen Längshoropteren angehören, so wird der Winkel zwischen den beiden Richtungslinien nicht den Breitenwert, sondern Etwas definieren, was aus Breiten- und Tiefenwert zusammengesetzt ist. Um also den Breitenwert eines Punktes zu definieren, muss man den empirischen Längshoropter dieses Punktes kennen. Soll man aber die Breitenwerte zweier lateral gelegener Punkte messend vergleichen, so kann das überhaupt nur geschehen, wenn sie demselben Längshoropter angehören. Wenn zwei Punkte M (ein medianer) und L (ein lateraler) demselben empirischen Längshoropter angehören und zwei andere Punkte M' und L' einem anderen Längshoropter, so definiert der Winkel, den die Richtungslinien nach M und L einschließen, zwar den Breitenwert von L innerhalb dieses ersten Horopters, und ebenso definiert der Winkel, den die Richtungslinien nach M' und L' einschließen, den Breitenwert von L' innerhalb dieses zweiten Horopters — aber man kann das Verhältnis der beiden Breitenwerte nicht durch das Verhältnis der beiden Winkel ausdrücken, weil sie völlig ungleichartige Größen sind. Habe ich also z. B. zwei Alleen aufgestellt und liegen je zwei Fadenpaare in einer frontalparallelen Ebene (wie das bei meinen Versuchen der Fall war), so kann ich daraus auf das scheinbare Breitenverhältnis gar keinen Schluss ziehen. Denn das, sagen wir 3800 mm vom Beobachter entfernte Fadenpaar der schmälere Allee gehört einem anderen empirischen Längshoropter an als das ebenfalls 3800 mm entfernte Fadenpaar der breiteren Allee. Ausgenommen sind hier nur zwei Fälle:

1. Der Fall, dass die beiden Fadenpaare eine Entfernung vom Beobachter haben, in welcher der empirische Längshoropter eine Ebene ist; denn diesfalls haben die in einer und derselben Ebene liegenden Fadenpaare keinen Tiefenunterschied: das Verhältnis ihrer Lateralwinkel ist also zugleich das Verhältnis ihrer Breitenwerte;

2. der Fall, dass die beiden Fadenpaare jenseits der stereoskopischen Grenze liegen, denn diesfalls begründen auch etwa vorhandene wirkliche Tiefenunterschiede keine Verschiedenheit in den physiologischen Tiefenwerten.

Für uns hat also jener Winkel φ , den die Curve in ihrem asymptotischen Verlaufe mit der Medianlinie bildet, die Bedeutung, dass er die Basis zu einem messenden Vergleiche der scheinbaren Breiten zweier Alleen abgibt.

Der sub 1 erwähnte Fall wird später zum gleichen Zwecke verwendet werden.

§ 31. Unser Hauptsatz von der Beziehung zwischen Gesichtswinkel und scheinbarer Entfernung wird eine besondere Form für die Gegend jenseits der stereoskopischen Grenze annehmen. Diese soll jetzt untersucht werden.

In Fig. 11 bedeuten die Geraden $O_1 A$, $O_1 A_1$, $O_1 P$, $O_1 P_1$ dasselbe wie in Fig. 8. Es sind also P und P_1 zwei Alleepunkte, A und A_1 die den empirischen Horopteren von P , bzw. P_1 angehörigen medianen Punkte. $\angle \varphi$ ist wieder das halbe Disparationsminimum in der Mediane. ($\nu - \mu$) ist die Disparation zwischen den Punkten P und P_1 ; sie soll ebenfalls ein Minimum sein¹.

Wenn die Strahlen $O_1 P$ und $O_2 P$ ihre Drehung fortsetzen bis zum Parallelismus, so kommen sie in die Lage $O_1 P_\infty$ und $O_2 P_\infty$. In der Figur sind von den auf der linken Seite der Mediane gelegenen Linien nur die Anfänge gezeichnet.

$O_1 P_\infty$ stellt also die Richtung des ∞ fernen Alleepunktes dar. Der dem wandernden Alleepunkte zugehörige Punkt der Mediane wandert von A nach A_1 und dann weiter, bis der Strahl $O_1 A_1$ schließlich mit der Mediane parallel wird, also die Richtung $O_1 A_\infty$ einnimmt. Der Winkel $A_\infty O_1 P_\infty$ ist also (ich verweise auf früher Gesagtes) der Breiten- oder Lateralwinkel des ∞ fernen Alleepunktes. Mit den Richtungen $O_1 A_\infty$ und $O_1 P_\infty$ ist für die wandernden Punkte A (den medianen) und P (den Punkt der Alleecurve) die geometrische Grenze gegeben. Die physiologische Grenze wird aber früher erreicht, d. h. längst ehe die Strahlen $O_1 P$ und $O_2 P$ bei ihrer Linksdrehung bis zum Parallelismus gelangt sind, hat ihr Schnittpunkt schon aufgehört neue Tiefenwerte zu erzeugen; und längst ehe der Strahl $O_1 A$ bei seiner Rechtsdrehung mit der Medianlinie parallel wurde, hat sein Schnittpunkt mit der Mediane aufgehört neue Tiefenwerte hervorzu-
bringen.

Die physiologische Grenze für den Punkt A (d. h. die Grenze seiner physiologischen Wirksamkeit nach der Tiefendimension) bei seiner Wanderung auf der Medianlinie ist erreicht, wenn der Strahl $O_1 A$ um das halbe Disparationsminimum φ vom Parallelismus mit der Mediane entfernt ist. Er nimmt alsdann die (punktirt gezeichnete) Lage $O_1 A_g$ ein — wobei der Index g so viel heißen soll wie »Grenze«, nämlich stereoskopische Grenze. Der Punkt P erreicht bei einer Wanderung auf der Alleecurve die physiologische Grenze, wenn er um den $\angle \mu$ von der Stellung $O_1 P_\infty$ entfernt ist, bzw. wenn der vom linken Auge ausgehende (in der Figur kurz ausgezogene) Strahl $O_2 P_g$ von der Lage $O_2 P_\infty$ um den $\angle \nu$ entfernt

Fig. 11.



¹ Für Alleen, die mit medianer Fixation eingestellt werden, würden die Punkte P und P_1 excentrisch liegen, und wir hätten daher kein Recht, ihre Disparation der Disparation zweier medianen Punkte, die einen ebenmerklichen Entfernungsunterschied zeigen, gleichzusetzen. Wird aber P bei der Einstellung fixiert, so liegt P_1 so wenig peripher, dass wir die ebenmerkliche Disparation ($\nu - \mu$) der ebenmerklichen Disparation zweier median gelegener Punkte A und A_1 gleichsetzen können. Es ist also $\nu - \mu = 2 \varphi$.

ist. Man kann, indem man die Formulierung Wächters wählt, sagen: sowohl auf der Medianlinie als auch auf der Alleecurve wird die stereoskopische Grenze in derjenigen Entfernung erreicht, in welcher die eigene Basallinie unter einem Winkel erscheinen würde, der gleich dem Disparationsminimum ist, also für die Medianlinie unter dem Winkel 2φ , für die Alleecurve unter dem Winkel $(\nu - \mu)$.

Die Allee (genauer die rechte Alleeseite) erscheint an der stereoskopischen Grenze dem rechten Auge unter dem Winkel AgO_1Pg (dem linken unter $\angle AgO_2Pg$), wobei ich unter dem »Winkel« immer den Lateralwinkel, also den Winkel mit der medianen Richtung meine. Da die Allee in ∞ Ferne unter dem Lateralwinkel $A_\infty O_1 P_\infty$ (für das linke Auge $A_\infty O_2 P_\infty$) erscheint, so folgt, dass auf dem Wege von der stereoskopischen Grenze in die ∞ Ferne der Gesichtswinkel die Abnahme $AgO_1Pg - A_\infty O_1 P_\infty = \mu + \varphi$ erfährt, bzw. für das linke Auge die Abnahme $AgO_2Pg - A_\infty O_2 P_\infty = \nu - \varphi$, welche Winkelabnahmen einander gleich sind, da ja $\nu - \mu = 2\varphi$.

$(\mu + \varphi)$ ist die constante Winkelabnahme, wenn man in der Allee um Disparationsminima fortschreitet, z. B. von P zu P_1 . Wenn ein Punkt auf der Alleecurve von P nach P_1 wandert und P von P_1 um ein Disparationsminimum entfernt ist, so heißt das: ehe der Punkt den Ort P_1 erreicht hat, also an einer beliebigen Stelle zwischen P und P_1 , ist sowohl die geometrisch vorhandene Disparation gegenüber P auf den physiologischen Tiefenwert unwirksam, wie auch anderseits die geometrisch vorhandene Verkleinerung des Lateralwinkels auf den physiologischen Breitenwert ohne Wirkung ist: das erstere ist ja nur ein anderer Ausdruck für die Thatsache, dass P und P_1 um ein Disparationsminimum von einander entfernt sind; das letztere ein anderer Ausdruck dafür, dass P und P_1 einer Alleecurve angehören. Erst wenn P_1 wirklich erreicht wird, ist der Tiefenunterschied merklich; und dieser durch $(\nu - \mu)$ gemessene Tiefenunterschied compensiert die Verkleinerung des Lateralwinkels, welche ihrerseits $= (\mu + \varphi)$, bzw. für das linke Auge $= (\nu - \varphi)$ ist. Denkt man sich jetzt, der Punkt der Allee habe die Stelle Pg erreicht, befinde sich also an der stereoskopischen Grenze und schreite nun auf der Alleecurve weiter fort, so wird er erstens keine physiologische Tiefenzunahme mehr erzeugen, und zweitens wird die Abnahme des Lateralwinkels den Betrag $(\mu + \varphi)$ nie erreichen, also keine physiologische Breitenabnahme mehr erzeugen. Von der stereoskopischen Grenze an bis in beliebig weite (»unendliche«) Entfernung wird also der Lateralwinkel gleichbleiben müssen oder sich um den physiologisch unwirksamen Betrag $\varepsilon < \mu + \varphi$ ändern dürfen.

Das heißt nun: Jenseits der stereoskopischen Grenze ist zur Erzielung gleicher scheinbarer Größe nur nöthig, dass der Gesichtswinkel gleich bleibe oder sich bloß in physiologisch unwirksamer Weise ändere; m. a. W. jenseits der stereoskopischen Grenze gilt für den binocular Sehenden dasjenige Gesetz der scheinbaren Größe, welches für den monocular Sehenden überall gilt; die scheinbare Größe ist dem Gesichtswinkel direct proportional. Sobald keine variable Tiefenempfindung mehr vorhanden ist, hat der binoculare Schact vor dem monocularen überhaupt nichts mehr voraus. Natürlich wird hier, wie auch sonst in unserer ganzen Untersuchung vorausgesetzt, dass alle empirischen Motive der Tiefenlocalisation strenge ausgeschlossen bleiben.

VIII. Capitel.

Deduction jeder beliebigen Alleecurve aus einer gegebenen, und zwar (a) unter Voraussetzung des Müller'schen Horopters.

§ 32. Mit der Feststellung des Verhältnisses zwischen scheinbarer Größe, Gesichtswinkel und scheinbarer (durch die Disparation gemessener) Entfernung ist zwar der wichtigste Theil der Theorie erledigt. Von der Vollständigkeit derselben kann aber noch nicht die Rede sein. Denn wir wissen bis jetzt nur, dass zur Erzielung gleicher scheinbarer Größe die Gesichtswinkel um einen constanten Betrag abnehmen müssen, wenn die Disparation um einen constanten Betrag wächst.

Was uns aber noch fehlt, ist der Proportionalitätsfactor, bezw., um wieder von den scheinbaren Alleen zu sprechen, der Quotient $\frac{\nu}{\mu}$, also das constante Verhältniß zwischen den Winkeln, die durch die Drehung der beiden Richtstrahlen aus ihren Anfangslagen gebildet werden, durch die Drehung jener beiden Strahlen, deren wandernder Schnittpunkt die Allee curve beschreibt. Wir wissen, dass dieser Quotient für dasselbe Individuum und für Alleen von gleicher Breite constant ist; wir wissen ferner, dass er für Alleen von verschiedener Breite ein verschiedener ist. Aber wir wissen bisher nicht, nach welchem Gesetze er sich von einer Allee curve zur anderen ändert. In dieser Hinsicht ist also die Theorie noch auszubauen, damit nicht für jede neue Breite immer wieder ein neues empirisches Datum erforderlich werde, für dessen Bewertung wir gar keinen theoretischen Anhaltspunkt haben. Lässt sich, wenn eine Allee gegeben ist, jede beliebige Allee von anderer Breite aus ihr ableiten? Genauer gesagt: wenn für zwei verschieden breite Alleen je ein Punkt gegeben ist und wenn wir das $\frac{\nu_1}{\mu_1}$ einer Allee curve kennen, lässt sich daraus das $\frac{\nu_2}{\mu_2}$ einer anderen berechnen, so dass damit auch die ganze zweite Allee curve bekannt ist?

Die Frage ist, wie bald gezeigt werden soll, zu bejahen. Nur Eines will ich sogleich vorausschicken: die Ableitung eines $\frac{\nu}{\mu}$ aus einem anderen lässt sich nur auf Grund einer bestimmten Annahme über die Gestalt des Längshoropters durchführen: ich muss (da wir hier nur von den Verhältnissen in der Blick-ebene handeln) wissen, wo diejenigen wirklichen Punkte liegen müssen, deren entsprechende Sehpunkte in einer frontalparallelen Geraden liegen, also keinen Tiefenunterschied zeigen.

Die Gestalt des Längshoropters kann nun entweder als eine gesetzmäßige und mathematisch formulierbare angenommen werden — und diesfalls lässt sich eine Gleichung aufstellen, welche das $\frac{\nu_2}{\mu_2}$ der unbekannten Allee curve als eine Function 1) des $\frac{\nu_1}{\mu_1}$ der bekannten Allee curve und 2) des Ortes von je einem Punkte der einen und anderen Allee curve darstellt. Oder aber der Längshoropter lässt keine mathematische Definition zu, sondern wird nur von Fall zu Fall empirisch bestimmt — dann ist eine allgemeine Darstellung des zu suchenden Quotienten $\frac{\nu_2}{\mu_2}$ als Function der obgenannten Größen allerdings nicht möglich; es lässt sich aber, wie wir sehen werden, mit Zuhilfenahme eines individuellen Datums über den empirischen Horopter jenes $\frac{\nu_2}{\mu_2}$ doch in singulärer Weise bestimmen.

Die allgemeine Lösung des Horopterproblems hat zur Voraussetzung die functionelle Homogenität der Netzhaut, wie ich das kurz nennen will, d. h. die Annahme, dass wo immer zwei Punkte denselben geodätischen Abstand auf der Netzhaut haben, auch der Unterschied ihrer physiologischen Raumwerte derselbe sei, oder (was dasselbe ist), dass gleichen Gesichtswinkeln überall auch als gleich empfundene Richtungsunterschiede entsprechen. Empirisch verhält sich das bekanntlich anders. Der öfter erwähnte functionelle Unterschied zwischen nasaler und temporaler Netzhaut, die andersartige Abnahme der Breitenwerte auf der oberen und unteren Netzhaut gegenüber dem mittleren Querschnitte, die Abnahme der Breitenwerte mit der excentrischen Lage (gegenüber der Stelle des deutlichsten Sehens) und noch manche andere Inhomogenitäten lassen den mathematischen Horopter als ein bloßes Schema erscheinen. Die genannten Abweichungen sind aber mathematisch nicht formulierbar; wir kennen z. B. kein Gesetz, welches uns den Breitenwert eines und desselben Gesichtswinkels als Function seiner mehr oder weniger peripheren Lage darstellte u. dgl. m. Daher werden alle Beziehungen, die die Gestalt des empirischen Horopters zur Voraussetzung haben, ebenso wenig mathematisch formulierbar sein wie der empirische Horopter selbst.

In Betreff unseres Problems, das $\frac{v}{p}$ einer Alleecurve aus dem $\frac{v}{p}$ einer anderen abzuleiten, werde ich nun ein Zweifaches thun. Ich werde die allgemeine Ableitung unter der Voraussetzung der functionellen Homogenität der Netzhaut, also unter Voraussetzung des mathematischen Horopters machen, und hierauf werde ich zeigen, wie man auf der Basis des empirischen Horopters — auf Umwegen allerdings — von dem $\frac{v}{p}$ einer individuell bestimmten Curve auf das $\frac{v}{p}$ einer individuellen anderen Curve übergehen kann — ohne Benützung einer allgemeinen Übergangsformel.

§ 33. In Fig. 12 a und b sind die Kreise I, bzw. II, einander gleich; sie sind Müller'sche Horopterkreise, von denen jetzt angenommen wird, dass sie die geometrischen Orte derjenigen Außenpunkte sind,

Fig. 12 a.

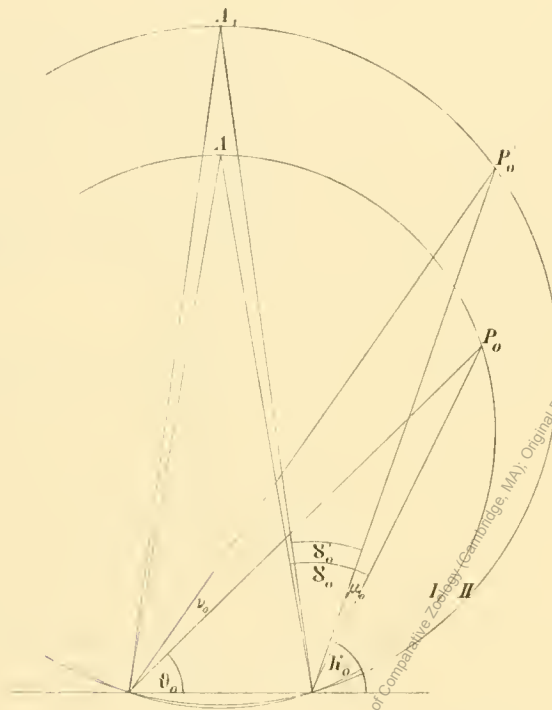
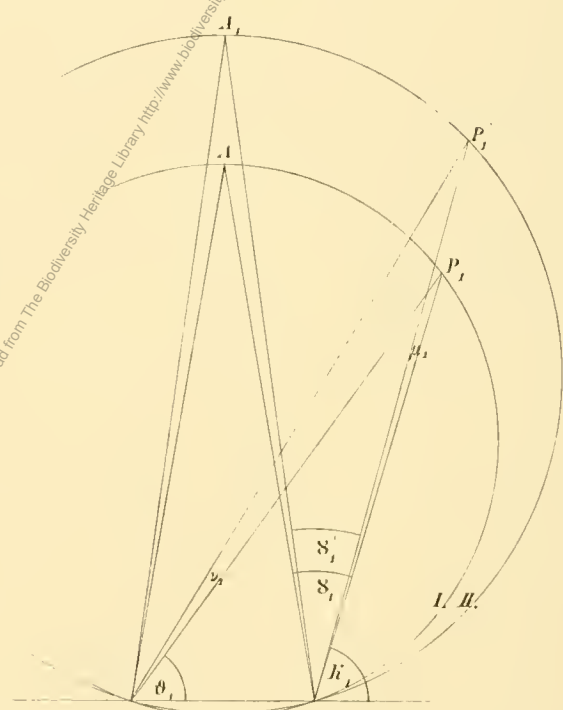


Fig. 12 b.



denen Sehpunkte ohne Tiefenunterschied entsprechen — m. a. W. denen im Sehraume Kernflächen oder kernflächenparallele Ebenen entsprechen. In Fig. 12 a sind P_0 und P'_0 die empirisch gefundenen Orte zweier Punkte einer Alleecurve. Es ist also gegeben $\alpha_0, \vartheta_0, p_0, v_0$ und daher auch $\frac{v_0}{p_0} = c_0$. In Fig. 12 b soll aber nur der Punkt P_1 gegeben sein, also nur α_1 und ϑ_1 , nicht aber der Punkt P'_1 , also auch nicht p_1 und v_1 , und daher auch nicht $\frac{v_1}{p_1} = c_1$. Wir kennen also von der breiteren Alleecurve (Fig. 12 a) alle Bestimmungsstücke, von der schmäleren aber nur einen Punkt, nämlich P_1 . Gefragt wird nach dem Quotienten $\frac{v_1}{p_1}$, der zusammen mit dem Orte von P_1 die schmalere Alleecurve vollständig bestimmen würde. Die Rechnung stützt sich auf folgende Überlegung: wir kennen das Verhältnis der scheinbaren Breiten der beiden Alleen, weil wir die Winkel kennen, welche die Richtung sowohl von P_0 wie von P_1 mit der Richtung des demselben Horopter I angehörigen medianen Punktes A bildet; kurz gesagt: wir kennen das Verhältnis der Lateralwerte P_0 und P_1 , da im gleichen Horopter die scheinbaren Breiten den wirklichen Lateralwinkeln proportional sind. Dieses selbe Verhältnis muss aber auch zwischen den Lateralwinkeln von P'_0 und P'_1 bestehen, weil auch sie einem und demselben Horopter angehören und das

Verhältnis der scheinbaren Breiten für zwei medianparallele Alleen überall dasselbe sein muss. Somit ist der Lateralwinkel von P'_1 als vierets Glied einer Proportion zu finden. Es ist das Verhältnis der Breitenwerte von P_0 und P_1

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{180 - z_1 - \vartheta_1}{180 - z_0 - \vartheta_0},$$

welches Verhältnis p heißen soll.

Dieses selbe Verhältnis p muss auch zwischen γ'_1 und γ'_0 bestehen. Es ist also

$$p = \frac{\gamma'_1}{\gamma'_0} = \frac{180 - (z_1 + \mu_1) - (\vartheta_1 + \nu_1)}{180 - (z_0 + \mu_0) - (\vartheta_0 + \nu_0)}.$$

Setzen wir $\frac{\nu_0}{\mu_0} = c_0$ und $\frac{\nu_1}{\mu_1} = c_1$, so lässt sich die Gleichung so schreiben

$$p = \frac{180 - z_1 - \vartheta_1 - \mu_1 (c_1 + 1)}{180 - z_0 - \vartheta_0 - \mu_0 (c_0 + 1)}$$

oder mit Hinblick darauf, dass

$$\gamma_1 = \frac{180 - z_1 - \vartheta_1}{2}$$

und

$$\gamma_0 = \frac{180 - z_0 - \vartheta_0}{2}$$

auch so:

$$p = \frac{2 \gamma_1 - \mu_1 (c_1 + 1)}{2 \gamma_0 - \mu_0 (c_0 + 1)} \dots\dots\dots 1).$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = p$, so ergibt sich

$$\mu_1 (c_1 + 1) = p \mu_0 (c_0 + 1) \dots\dots\dots 2).$$

Da aber die Punkte P_0 und P_1 demselben Kreise I angehören und ebenso die Punkte P'_0 und P'_1 demselben Kreise II so ist

$$\nu_1 - \mu_1 = \nu_0 - \mu_0$$

oder

$$\mu_1 (c_1 - 1) = \mu_0 (c_0 - 1) \dots\dots\dots 3).$$

Die Division der Gleichung 2) durch Gleichung 3) ergibt

$$\frac{c_1 + 1}{c_1 - 1} = p \frac{c_0 + 1}{c_0 - 1}$$

und daraus ergibt sich

$$c_1 = \frac{p (1 + c_0) - (1 - c_0)}{p (1 + c_0) + (1 - c_0)} \dots\dots\dots 4).$$

Dieses c_1 ist aber der gesuchte Quotient $\frac{\nu_1}{\mu_1}$, der die zweite (in der Figur schmalere) Alleecurve vollständig charakterisiert, sofern nur der Ort eines Punktes dieser Curve (nämlich P_1) gegeben ist. Denn das in Gleichung 4) erscheinende p enthält nur die Größen $z_0 \vartheta_0 \mu_0$; es ist ja

$$p = \frac{180 - z_1 - \vartheta_1}{180 - z_0 - \vartheta_0}.$$

Somit lässt sich unter Annahme des Müller'schen Horopters aus einer Alleecurve jede beliebige andere ausrechnen.

Anmerkung. Eines besonderen Falles will ich hier kurz Erwähnung thun. Wie wir wissen, wird der Quotient $\frac{\nu}{\mu}$ immer größer je näher die Curve der Mediane liegt, also je schmaler die scheinbare Allee ist. Man sieht schon aus den beiden in Fig. 12 dargestellten Fällen, wie das μ kleiner wird. Ein ausgezeichneter Fall ist nun der, dass $\mu = 0$ wird, denn diesfalls wird aus der Curve eine Gerade. Nehmen wir die in Fig. 12 a durch die beiden Punkte P_0 und P'_0 repräsentierte Alleecurve als gegeben an, d. h. nehmen wir x_0 ϑ_0 und $\frac{\nu_0}{\mu_0} = c_0$ als bekannt an, so besteht zwischen dieser und irgend einer zweiten Alleecurve der Zusammenhang

$$c_1 = \frac{p(1+c_0)-(1-c_0)}{p(1+c_0)+(1-c_0)}.$$

Soll nun diese zweite Allee in einer durch den Knotenpunkt gehenden Geraden liegen, so muss $\mu_1 = 0$ und daher $\frac{\nu_1}{\mu_1} = c_1 = \infty$ und daher

$$p(1+c_0)+(1-c_0) = 0 \text{ sein.}$$

Daraus folgt:

$$p = \frac{c_0 - 1}{c_0 + 1}$$

und da $p = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}$, so ist

$$\gamma_1 = \gamma_0 \frac{c_0 - 1}{c_0 + 1} \dots \dots \dots 5).$$

Nun ist

$$\gamma_1 = 90 - \frac{x_1 + \vartheta_1}{2}$$

oder

$$2 x_1 = 180 - 2 \gamma_1 + x_1 + \vartheta_1 \dots \dots \dots 6).$$

Liegen nun P_0 und P_1 im selben Müllerschen Horopter, so ist

$$x_0 - \vartheta_0 = x_1 - \vartheta_1$$

und daher geht Gleichung 6) über in

$$x_1 = 90 - \gamma_0 \frac{c_0 - 1}{c_0 + 1} + \frac{x_0 - \vartheta_0}{2} \dots \dots \dots 7).$$

Setzt man für γ_0 den Wert $90 - \frac{x_0 + \vartheta_0}{2}$ so geht Gleichung 7) nach einigen Umformungen über in

$$x_1 = x_0 + \frac{1}{c_0 + 1} (180 - x_0 - \vartheta_0)$$

oder

$$x_1 = \frac{180 + c_0 x_0 - \vartheta_0}{c_0 + 1} \dots \dots \dots 8).$$

Diese Gleichung gestattet also aus einer bestimmten, durch die Größen x_0 ϑ_0 c_0 charakterisierten Alleecurve den ausgezeichneten Fall zu berechnen, in welchem die Curve in eine durch den Knotenpunkt gehende Gerade übergeht, indem sie den Winkel x_1 finden lässt, den diese Gerade mit der Basallinie einschließt.

IX. Capitel.

Deduction jeder beliebigen Alleecurve aus einer gegebenen u. zw. b) unter der Voraussetzung, dass ein einziger empirischer Längshoropter bekannt ist.

§ 34. Wir haben gesehen, wie man aus einer gegebenen Alleecurve jede beliebige andere deductiv finden kann, wenn man einen Punkt von ihr kennt. Bei dieser Ableitung wurde aber die Gültigkeit des Müller'schen Horopters vorausgesetzt. Da nun der Müller'sche Horopter nicht identisch ist mit dem empi-

rischen, so kann auch jene Ableitung einer Alleecurve aus einer anderen nicht mit den empirischen Verhältnissen übereinstimmen. Man darf sich hier durch die numerischen Ergebnisse der Rechnung nicht täuschen lassen. Wenn man nach der oben entwickelten Formel

$$c_1 = \frac{p(1+c_0) - (1-c_0)}{p(1+c_0) + (1-c_0)}$$

aus dem $\frac{\nu}{\mu}$, welches für eine unserer experimentell ermittelten Alleecurven gilt, das $\frac{\nu}{\mu}$ einer anderen ausrechnet und es mit dem empirisch gefundenen $\frac{\nu}{\mu}$ vergleicht, so wird man eine scheinbar ganz befriedigende Übereinstimmung zwischen dem deducierten und dem empirisch ermittelten Werte finden und könnte daher geneigt sein, die Formel für eine empirisch verwendbare, nicht bloß für eine solche zu halten, die idealisierten Verhältnissen angepasst ist. Man würde mit einer solchen Meinung fehlgehen: die Breiten der von uns experimentell ermittelten Alleen halten sich nämlich in so engen Grenzen, dass die Abweichung des empirischen vom Müllerschen Horopter keine beträchtliche sein kann. In der Nähe der Mediane macht es nicht viel aus, ob der Horopter die Krümmung des Müller'schen hat oder ob er eine Ebene oder schließlich sogar eine gegen den Beschauer schwach convexe Curve ist; die Abweichungen des berechneten $\frac{\nu}{\mu}$ vom empirischen können daher unter Umständen sehr geringfügige, sogar ganz ins Fehlerintervall fallende sein: die gute Übereinstimmung ist dann nicht Folge der empirischen Brauchbarkeit der Formel (die ja wegen der empirischen Ungültigkeit des Müller'schen Horopters principiell ausgeschlossen ist), sondern nur Folge des Umstandes, dass innerhalb der verwendeten Werte die Unbrauchbarkeit derselben nicht, oder wenigstens nicht auffällig, zum Vorschein kommen konnte.

Nun fragt sich's aber, ob man die Ableitung einer Alleecurve aus einer anderen (oder, was dasselbe ist, eines $\frac{\nu}{\mu}$ aus einem anderen) nicht auch ohne die Annahme des Müller'schen Horopters durchführen kann. Ganz und gar ohne jede Horopterannahme durchzukommen ist natürlich unmöglich; denn sobald man das Verhältnis der scheinbaren Breiten zweier Alleen überhaupt in der Rechnung verwendet, ist damit schon gesagt, dass man mindestens zu einem Punkte der einen Allee jenen Punkt der anderen kennen muss, der mit ihm den gleichen Tiefenwert besitzt: man muss also irgendwo im Verlaufe der beiden Alleecurven einen Längshoropter durch dieselben legen können, und zwar einen empirisch gültigen. Wie sich ferner sofort ergeben wird, muss man, wenn das Unternehmen gelingen soll, mit einem einzigen empirischen Horopter ausreichen.

Denken wir uns in Fig. 12 *a* und *b* (S. 42 [7]) die Müller'schen Kreise durch empirische Horopteren ersetzt, so würde sich eine Deduction des $\frac{\nu_1}{\mu_1}$ aus $\frac{\nu_0}{\mu_0}$ durchführen lassen, die jener obigen, unter Annahme des Müller'schen Horopters vollzogenen analog wäre — und sie würde wegen der empirischen Gültigkeit der Horopteren auch zu einem empirisch gültigen $\frac{\nu_1}{\mu_1}$ führen. Aber eine solche Deduction hätte keinen Sinn: denn sie setzt nicht nur für die eine, sondern auch für die andere Alleecurve die Kenntnis zweier Punkte voraus; kennt man aber zwei Punkte derselben Curve, dann kennt man das $\frac{\nu}{\mu}$ dieser Curve ohnehin schon, braucht also überhaupt keine Deduction. Darum sagte ich früher man müsse mit einem empirischen Horopter auslangen.

§ 35. Es wird also jetzt Folgendes angenommen: wir kennen von einer Alleecurve einen Punkt P_0 (bezw. sein ν_0 und μ_0) und das diese Curve charakterisierende $\frac{\nu_0}{\mu_0} = c_0$, wir kennen ferner den durch P_0

gehenden empirischen Horopter und einen zweiten, diesem selben Horopter angehörigen Punkt P_1 einer Alleecurve von anderer Breite. Es soll der Quotient $\frac{\nu_1}{\mu_1}$ der durch P_1 gehenden Alleecurve gefunden werden.

Da P_0 und P_1 der Voraussetzung zufolge keinen verschiedenen Tiefenwert haben, gibt das Verhältnis ihrer Lateralwinkel (wenigstens für diesen empirischen Horopter) das Verhältnis der wirklichen und zugleich auch der scheinbaren Breiten der beiden Alleen an (vgl. darüber das S. 38 [292] Gesagte). Dieses Verhältnis heiße p . Dasselbe Breitenverhältnis muss sich für die beiden Curven auch »im Unendlichen«, d. h. in ihrem asymptotischen Verlaufe herstellen. Denn dass das scheinbare Breitenverhältnis im ganzen Verlaufe der beiden Alleen und daher auch im Unendlichen dasselbe sein muss, liegt ja im Begriffe einer scheinbaren Allee. Das Verhältnis der scheinbaren Breiten ist aber durch das Verhältnis der (wirklichen) Lateralwinkel gegeben, sobald kein Tiefenunterschied besteht; und jenseits der stereoskopischen Grenze besteht eben kein Tiefenunterschied mehr — das Doppelauge verhält sich wie ein Auge und für ein Auge können wir in der That das Verhältnis zweier Breitenwerte durch das Verhältnis der Gesichtswinkel ausdrücken, die die betreffenden Richtungslinien mit der Medianlinie einschließen. Kennt man also die Richtung des ∞ fernen Punktes für zwei Alleecurven, dann ist auch ihr Breitenverhältnis bekannt.

Nach den Erörterungen S. 36 ff. [290] (vgl. auch Fig. 10) ist, wenn z_0 und ϑ_0 den Ort eines Alleepunktes, ferner $\frac{\nu_0}{\mu_0} = c_0$ den charakteristischen Quotienten dieser Curve bedeutet, und φ_0 eben jener Lateralwinkel in ∞ Entfernung heißt,

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{z_0 - \vartheta_0}{c_0 - 1} - z_0.$$

Für eine andere Allee mit den Constanten z_1, ϑ_1 und $\frac{\nu_1}{\mu_1} = c_1$ ist

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{z_1 - \vartheta_1}{c_1 - 1} - z_1.$$

Der Winkel φ_0 ist bestimmt, weil z_0, ϑ_0 und c_0 bekannt sind. Hingegen ist φ_1 aus der obigen Gleichung nicht zu gewinnen, weil zwar z_1 und ϑ_1 , nicht aber c_1 gegeben ist. Wir kennen aber φ_1 aus einer anderen Quelle: da nämlich $\frac{\varphi_0}{\varphi_1}$ das Breitenverhältnis der beiden Alleen im Unendlichen ist und dieses Breitenverhältnis dasselbe sein muss wie an der Stelle des einen uns bekannten Horopters (wir haben dieses Verhältnis oben p genannt), so lässt sich aus

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = p$$

das φ_1 rechnen. Nunmehr kann man die Gleichung

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{z_1 - \vartheta_1}{c_1 - 1} - z_1$$

nach c_1 auflösen und erhält so

$$c_1 = \frac{z_1 - \vartheta_1}{\frac{\pi}{2} - \varphi_1 - z_1} + 1$$

oder

$$c_1 = \frac{\frac{\pi}{2} - (\varphi_1 + \vartheta_1)}{\frac{\pi}{2} - (\varphi_1 + z_1)}.$$

Diese Gleichungen gestatten also den Quotienten $\frac{\nu_1}{\mu_1}$ einer Alleecurve aus dem bekannten Quotienten $\frac{\nu_0}{\mu_0}$ einer anderen Alleecurve deductiv zu finden, d. h. also, wenn eine einzige Alleecurve oder auch nur zwei Punkte derselben empirisch gegeben sind, für jeden beliebigen sonstigen Punkt der Blickenebene die ganze Curve zu construieren, welcher dieser Punkt angehört, und zwar die wirkliche, empirisch gültige Curve und nicht, wie das früher (S. 42 ff. [296]) geschehen ist, eine Curve, die auf der Voraussetzung eines idealisierten, thatsächlich gar nicht geltenden Längshoropters gegründet ist. Vorausgesetzt wird dabei nur, dass man in irgend einer beliebigen Entfernung vom Beobachter einen empirischen Längshoropter kennt.

Anmerkung. Handelt es sich um die numerische Auswertung des c_1 , so genügt, wie erwähnt, die Kenntnis eines einzigen durch x_1 und ϑ_1 gegebenen Punktes der aufzufindenden Curve.

Es kann aber die Forderung gestellt werden, diese ganze — doch etwas weitläufige — Deduction einer Curve aus einer anderen empirisch zu verificieren, um etwaige Bedenken gegen die Stringenz der Deduction auszuschließen. Man kann da entweder so vorgehen, dass man eine Alleecurve empirisch ermittelt, dann einen beliebigen Punkt (x_1, ϑ_1) außerhalb dieser Curve festsetzt, hierauf das c_1 nach der obigen Formel ausrechnet und nun auf Grund dieses berechneten Wertes eine Anzahl von Punkten dieser Curve bestimmt; hängt man dann eine Anzahl von Loten so auf, dass sie diese Punkte zu Fußpunkten haben, so wird die Beobachtung ergeben, ob diese Fäden wirklich den Eindruck einer medianparallelen Allee machen. Das wäre der eine Weg der empirischen Controlle. Thatsächlich ist derselbe nicht ganz verlässlich wegen der nicht völlig auszuschließenden Voreingenommenheit des Beobachters, namentlich wenn dieser der Theorie persönlich nahesteht; sind die Abweichungen nicht allzugroß, so wird er leicht das als gleich groß sehen, was nach seiner Theorie gleich groß sein soll.

Man wird daher besser thun, gleich von vornherein zwei (verschieden breite) scheinbare Alleen aufzustellen, nach der obigen Gleichung das c_1 der einen Allee auszurechnen und mit dem empirischen c_1 derselben zu vergleichen. Hierbei ist aber Folgendes zu beachten: von welchem Punkte der zweiten Allee man ausgeht, d. h. welches x_1 und ϑ_1 man benützt, ist principiell gleichgültig, da $\frac{\nu_1}{\mu_1}$ eine Constante ist: die Richtung des ∞ fernen Punktes wird immer dieselbe sein und damit wird auch der durch φ_1 dargestellte Lateralwert des ∞ fernen Punktes der gleiche sein. Ich könnte also das x_1, ϑ_1 des ersten 1 m entfernten Fadenpaares ebensogut zugrunde legen wie das x_1, ϑ_1 des zweiten, dritten . . . Fadenpaares. Nun sind aber die Orte der einzelnen Fadenpaare einer solchen experimentell ermittelten Allee mit Beobachtungsfehlern behaftet, was sich ja auch darin zeigt, dass das $\frac{\nu_1}{\mu_1}$ einer solchen Allee thatsächlich nicht genau constant ist, sondern nur um einen constanten Wert schwankt. Man würde also, wenn man das x_1, ϑ_1 eines einzigen Fadenpaares der Rechnung zugrunde legte, ihr Resultat durch den diesem Fadenpaare zufällig anhaftenden Beobachtungsfehler trüben. Um das zu vermeiden, wird man das c_1 aus den x_1 und ϑ_1 jedes einzelnen Fadenpaares bestimmen und den Durchschnittswert rechnen, welcher dann mit dem Mittel aus allen beobachteten c_1 zu vergleichen ist. Dies ist umsomehr gefordert als ja das in der Gleichung vorkommende φ_1 (der Breitenwinkel dieser Alleecurve im Unendlichen) auch aus lauter Mittelwerten gewonnen ist; er ergab sich ja aus der Verhältnisszahl p und dem Breitenwinkel φ_0 der Ausgangscurve und dieser letztere wurde aus sämtlichen x_0, ϑ_0 und c_0 gerechnet (vgl. S. 37 [293]). Die obige Gleichung

$$c_1 = \frac{x_1 - \vartheta_1}{\frac{\pi}{2} - \varphi_1 - x_1} + 1$$

wird, wenn man sie für die Berechnung des Mittelwertes einrichtet, die Form annehmen

$$c_1 = \frac{\sum (x_1 - \vartheta_1)}{n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) - \sum x_1}$$

oder

$$c_1 = \frac{n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - \sum \vartheta_1}{n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - \sum x_1}.$$

Die unter dem Summenzeichen stehenden Werte sind vom ersten bis exclusive letzten (achten) Fadenpaare zu nehmen, weil das c_1 ($= \frac{\nu_1}{\mu_1}$) eine Größe ist, die sich auf die relative Lage zweier aufeinander folgender Alleepunkte bezieht, weshalb es in jeder Allee um ein c weniger geben wird als Fadenpaare vorhanden sind. Da bei unseren Beobachtungen immer 8 Fadenpaare zur Verwendung kamen, ist daher $n = 7$.

§ 36. Ehe ich nun an die Auswertung des c_1 für die einzelnen Beobachter gehe, muss ich einige Bemerkungen über die Auffindung der Größe p vorausschieken.

p bezeichnet das Verhältnis der Breiten zweier Alleen. Dieses Verhältnis kann empirisch bestimmt werden, wenn man durch beide Curven irgendwo einen empirischen Längshoropter durchlegt und die Lateralwinkel der beiden Schnittpunkte bestimmt. Wo dieser Längshoropter durchgelegt wird, ist gleichgiltig. Nun wissen wir, dass der empirische Längshoropter in großer Nähe des Beobachters gegen diesen concav, in der Ferne gegen ihn convex und in einer gewissen Entfernung, besser gesagt, in einem gewissen Intervalle von Entfernungen eine Ebene ist. In beiläufig $\frac{1}{2} m$ ist dies letztere der Fall. In $1 m$ Entfernung besteht zwar schon eine Andeutung von Convexität; sie ist aber so gering, dass der Fehler, den man macht, wenn man auf Grund eines als eben angenommenen Horopters die Lateralwinkel bestimmt, gar nicht in Betracht kommen kann.

Ich habe hierüber ein paar kleine Versuchsreihen gemacht. In einer $1 m$ vom Beobachter entfernten Ebene wurden zwei Verticalfäden aufgehängt, die von einander einmal $154 mm$, ein anderesmal $308 mm$, ein drittesmal $207 mm$ entfernt waren. Das sind nämlich die Lateralabstände wie sie sich für das erste, $1 m$ entfernte Fadenpaar der drei Alleen für mich ergeben hatten (vgl. oben die Tabellen XIII, XV und XVII). Versuchte ich einen dritten, in der Mediane ebene gelegenen Faden so zu stellen, dass er in der Ebene der Seitenfäden zu liegen schien, so lag er thatsächlich in der ersten Falle $5.2 mm$, im zweiten $4.2 mm$, im dritten $2.6 mm$ vor der wirklichen Ebene der Seitenfäden. Das sind Abweichungen, die das Verhältnis der Lateralwinkel erst in der dritten Decimale und hier nur um eine Einheit beeinflussen, also längst in den Fehlerbereich fallen. Man kann daher für unsere Zwecke den Längshoropter in $1 m$ Entfernung ohne Fehler als eben annehmen. Wir können somit das Verhältnis der Gesichtswinkel, unter welchen die ersten (vom Beobachter $1 m$ entfernten) Fadenpaare zweier scheinbarer Alleen gesehen werden, als das scheinbare Breitenverhältnis p dieser beiden Alleen betrachten.

Fig. 13.



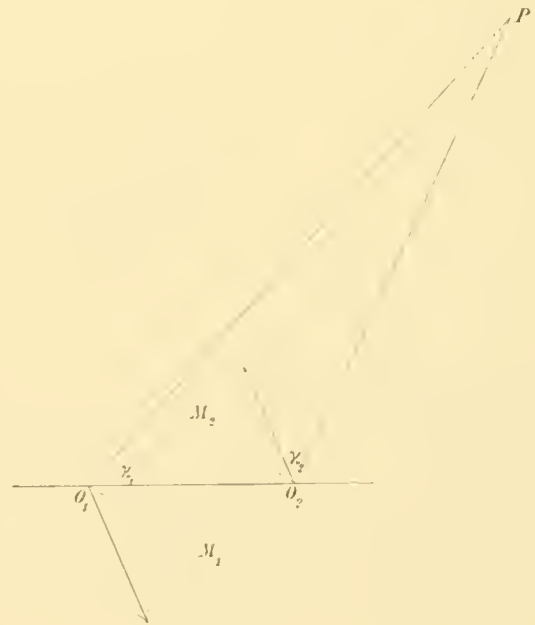
In Kürze will ich nur die Frage berühren, welcher Winkel eigentlich als Gesichtswinkel eines solchen Fadenpaares anzusehen ist. Wenn (wie in Fig. 13) der Horopter PAP' eine Ebene ist, so erscheint die Distanz AP dem rechten Auge unter anderem Gesichtswinkel als dem linken. Es ist $\gamma_2 > \gamma_1$. Diese geometrisch ungleichen Winkel sind aber physiologisch gleich; denn der Punkt erscheint einfach, kann also nur einen Breitenwert haben. Die Tatsache, dass der empirische Horopter überhaupt jemals eine Ebene sein kann, bezeugt ohnehin schon, dass geometrisch ungleiche Winkel unter Umständen physiologisch gleich sein müssen. Ich habe für die Berechnung der Breitenverhältnisse weder γ_1 noch γ_2 , sondern γ zugrunde gelegt, also einen Winkel, dessen Scheitelpunkt der Halbpunkt der Basallinie ist; man pflegt ja dahin das Sehrichtungscentrum zu verlegen. Für unsere Zwecke kommt nichts darauf an, ob der jedenfalls zwischen γ_1 und γ_2 anzunehmende Wert wirklich gerade durch γ repräsentiert wird, weil in unseren Versuchen γ_1 und γ_2 selbst schon sehr wenig von einander abweichen. So ist z. B. für das erste Fadenpaar in Tab. XIII der Unterschied der Gesichtswinkel, unter denen die halbe Lateralabstand AP dem linken und rechten Auge erscheint, ungefähr $14'$, liegt also, verglichen mit dem Unterschiede zweier Einstellungen (man vergleiche nur die homologen α und ϑ in den Tabellen XIII und XIV) noch ganz im Fehlerbereiche.

Anmerkung. Etwas anderes ist es freilich, wenn man sich nicht damit begnügt zu wissen, dass die Unterschiede des linken und rechten Gesichtswinkels selbst schon so gering sind, dass auf die Wahl des Mittelwertes nichts ankommt, sondern wenn man

die Frage nach dem Orte des Sehrichtungscentrums als selbständiges Problem aufwirft. Wo liegt eigentlich der Ort, der den Ausgangspunkt für die empfundene Richtung eines binocular gesehenen Punktes bildet? Wenn gesagt wird, das Sehrichtungscentrum liege zwischen beiden Augen (etwa in der Gegend der Nasenwurzel), so wird das richtig sein, aber die Angabe ist doch allzu ungenau. Schon das ist fraglich, ob es bei allen Menschen in der Symmetrieebene liegt. Wie wir wissen, sind nasale und temporale Netzhaut functionell verschieden; das würde zwar noch keine asymmetrische Lage des Sehrichtungscentrums begründen, aber es kommt auch vor, dass die beiden nasalen Netzhauthälften unter einander und ebenso die beiden temporalen untereinander verschieden sind. Ich habe auf solche Fälle in der Abhandlung über die Stabilität der Raumwerte (Zeitschr. f. Psych. u. Physiol. d. Sinnesorg., Bd. V, p. 56) hingewiesen. Bei solchen Individuen liegt, symmetrische Convergenz vorausgesetzt, der Längshoropter gar nicht symmetrisch zur Medianebene; in der Gegend z. B., in welcher er eine Ebene ist, steht diese Ebene auf der Medianebene nicht senkrecht. Da nun die scheinbare Mediane auf der Kernfläche senkrecht steht, so wird natürlich bei allen Individuen, die einen asymmetrischen Längshoropter haben, auch die scheinbare Medianebene von der wirklichen abweichen müssen¹.

Sehen wir indessen von solchen individuellen Asymmetrien ab, so bleibt noch immer die Frage offen, welcher Punkt der Symmetrieebene als Sehrichtungscentrum anzusehen ist, ja ob es überhaupt ein einheitliches Sehrichtungscentrum gibt. Ich will hier nur eine Schwierigkeit andeuten. Es wird, ich glaube mit Recht, angenommen, dass ein Punkt M dann dieselbe Sehrichtung habe wie ein anderer näher oder ferner gelegener Punkt N , wenn bei Fixation des einen der andere ein symmetrisches Doppelnetzhaubild gibt (für die Empfindung aber allerdings noch nicht in Doppelbilder zerfallen muss). Wenn das der Fall ist, dann liegen, wie aus geometrischen Gründen einleuchtet, die sämtlichen einer Sehrichtung angehörigen Punkte des Außenraumes gar nicht in einer Geraden sondern auf einem Kegelschnitt. Man denke sich nur in Fig. 13 die Strahlen O_1P und O_2P nach auswärts (also den ersten nach links, den zweiten nach rechts) mit gleicher Winkelgeschwindigkeit gedreht, dann ist sofort ersichtlich, dass der Schnittpunkt P sich nicht auf einer Geraden in die Ferne bewegt; nur ein medianer Punkt, etwa A würde dies thun. Mit dem Begriffe der Richtung verbindet man die Eigenschaft der Geradheit; daraus folgt natürlich gar nicht, dass die Sehrichtung, die ja dem physiologischen Raume angehört, sich im wirklichen Raume auf einer Geraden abbilden müsse. Zur Entstehung eines einheitlichen Sehrichtungscentrums scheint mir aber doch das nothwendig, dass diejenigen Linien des wirklichen Raumes, welchen im physiologischen Raume Sehrichtungen entsprechen, einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Dreht man in Fig. 14 die Strahlen O_1P und O_2P nach einwärts mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, so trifft die Bahn des Schnittpunktes P die Basallinie durchaus nicht im Halbierungspunkte. Dreht man O_1P um O_1 nach rechts und O_2P um O_2 nach links um stets gleiche Winkel, so wird für den Drehungswinkel $\alpha_1 = \alpha_2$ der Schnittpunkt in O_2 liegen. Bei weiterer Drehung fällt er auf die andere Seite der Basallinie, rückt für die Stellung O_1M_1 , bezw. O_2M_2 ins Unendliche und trifft bei weiterer Drehung die Basallinie in O_1 . Würde P in der Medianebene liegen, so würden die sämtlichen Punkte, die symmetrische Doppelbilder erzeugen, auch in der Mediane liegen, also die Basallinie in deren Halbierungspunkt treffen. Somit würde die (wirkliche) Linie, welche in diesem Falle einer Sehrichtung entspricht, mit denjenigen Curven, welche in allen anderen Fällen Sehrichtungen entsprechen, keinen Punkt gemeinsam haben. Daher erscheint es mir fraglich oder doch mindestens der Untersuchung wert, ob es überhaupt ein gemeinsames Sehrichtungscentrum gibt. Doch soll diese Frage hier nur in Anregung gebracht sein.

Fig. 14.



§ 37. Wenn wir nunmehr aus dem für die breitere Allee (600 mm) geltenden $\frac{v_0}{p_0} = c_0$ das c_1 für die schmalere Allee (390 mm) nach der S. 45 [300] u. 47 [301] entwickelten

$$\text{Formel} \quad c_1 = \frac{\sum (z_1 - \varphi_1)}{n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) - \sum z_1} + 1$$

berechnen wollen, so muss zuerst φ_1 gefunden werden,

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0 \gamma_1}{\gamma_0},$$

wo φ_0 der Winkel ist, den die Richtung des ∞ fernen Punktes der breiteren Allee mit der Mediane einschließt.

¹ Auch die Beobachtungen von M. Sachs und R. Wlassak (»Die optische Localisation der Mediane«, Zeitschr. f. Psych. u. Physiol. d. Sinnesorg., Bd. 22, S. 23 ff.) ergeben solche Asymmetrien, und zwar sowohl für binoculares als auch für monoculares Sehen.

φ_0 bedeutet die Winkel, welche von der Richtung des ∞ fernen Punktes und der Mediane gebildet werden, d. h. also die Complementary der in Tab. XXX, S. 37 [40.] angegebenen Winkel für (600); demnach ist für

Hillebrand	.	$\varphi_0 = 1^\circ 23' 34'' = 5014^{\circ 1}$
Czermak	.	$\varphi_0 = 1\ 12\ 14 = 4334$
Radakovič	.	$\varphi_0 = 1\ 45\ 59 = 6359$
Wirtinger	.	$\varphi_0 = 0\ 47\ 57 = 2877^{\circ 2}$

γ_0 sind die halben Gesichtswinkel, unter denen das erste (1 m entfernte) Fadenpaar der breiteren Alleen (600) erscheint. Entsprechend den in den früheren Tabellen angegebenen Lateraldistanzen des ersten Fadenpaares ergibt sich für

Hillebrand (Tab. XIII)		$12^\circ 47' 22'' = 46042''$
» (» XIV)		$12\ 12\ 58 = 43978$
		Mittel = 45010''
Czermak (» XIX)		$13^\circ 19' 59'' = 47999''$
Radakovič (» XXIII)		$11\ 35\ 0 = 41706$
Wirtinger (» XXVI)		$13\ 47\ 36 = 49656$
» (» XXVII)		$14\ 47\ 19 = 53239$
		Mittel = 51447''

γ_1 sind die halben Gesichtswinkel, unter denen das erste (1 m entfernte) Fadenpaar der schmäleren Alleen (390) erscheint. Entsprechend den in den citirten Tabellen angegebenen Lateraldistanzen des ersten Fadenpaares ergibt sich für

Hillebrand (Tab. XV)		$8^\circ 45' 17'' = 31517''$
» (» XVI)		$8\ 52\ 0'' = 31920$
		Mittel = 31718''
Czermak (» XX)		$8^\circ 55' 21'' = 32121''$
» (» XXI)		$9\ 8\ 46 = 32926$
		Mittel = 32523''
Radakovič (» XXIV)		$7\ 49\ 45 = 28185''$
Wirtinger (» XXVIII)		$10\ 5\ 34 = 36334$
(» XXIX)		$10\ 12\ 14 = 36734$
		Mittel = 36534''

Gemäß der Gleichung

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0 \gamma_1}{\gamma_0}$$

ist also für

Hillebrand	$\varphi_1 = \frac{5014 \cdot 31718}{45010} = 3533'' = 0^\circ 58' 53''$
Czermak	$\varphi_1 = \frac{4334 \cdot 32523}{47999} = 2937'' = 0^\circ 48' 57''$
Radakovič	$\varphi_1 = \frac{6359 \cdot 28185}{41706} = 4298'' = 1^\circ 11' 38''$
Wirtinger	$\varphi_1 = \frac{2877 \cdot 36534}{51447} = 2043'' = 0^\circ 34' 3''$

¹ Ich habe hier das Mittel aus den beiden Werten $1^\circ 24' 0''$ und $1^\circ 23' 8''$ genommen, welche die Complementary von $88^\circ 36' 0''$ und $88^\circ 36' 52''$ der Tab. XXX, S. 37 [291], sind.

² Auch hier ist das Mittel aus den beiden Werten $0^\circ 53' 47''$ und $0^\circ 42' 7''$, den Complementary von $89^\circ 6' 13''$, bzw. $89^\circ 17' 53''$ genommen.

Nun ist nach Gleichung

$$c_1 = \frac{\Sigma (z_1 - \vartheta_1)}{n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) - \Sigma z_1}$$

für jeden Beobachter der für die schmalere Allee giltige Quotient $c_1 = \frac{\nu_1}{\mu_1}$ zu berechnen. Für die Werte $\Sigma (z_1 - \vartheta_1)$ und Σz_1 habe ich überall dort, wo zwei beobachtete Alleen vorliegen, das Mittel genommen also für Hillebrand das Mittel aus Tab. XV und XVI, das ist

$$\begin{aligned}\Sigma (z_1 - \vartheta_1) &= 48774'' \\ \Sigma z_1 &= 2161527'' \\ \varphi_1 &= 3533''.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$c_1 = 1.5968$$

für Czermak das Mittel aus Tab. XX und XXI; das ist

$$\begin{aligned}\Sigma (z_1 - \vartheta_1) &= 49631'' \\ \Sigma z_1 &= 2161273'' \\ \varphi_1 &= 2937''.\end{aligned}$$

Das ergibt

$$c_1 = 1.5758.$$

Für Radakovič ist gemäß Tab. XXIV

$$\begin{aligned}\Sigma (z_1 - \vartheta_1) &= 46138'' \\ \Sigma z_1 &= 2168101'' \\ \varphi_1 &= 4298''.\end{aligned}$$

Das ergibt

$$c_1 = 1.6610.$$

Für Wirtinger ergibt das Mittel aus den Tab. XXVIII und XXIX die Werte

$$\begin{aligned}\Sigma (z_1 - \vartheta_1) &= 48571'' \\ \Sigma z_1 &= 2149375'' \\ \varphi_1 &= 2043''.\end{aligned}$$

Daher

$$c_1 = 1.4656.$$

Vergleicht man diese deductiv gefundenen Werte des Quotienten $\frac{\nu_1}{\mu_1}$ mit den empirisch ermittelten, so ergibt sich Folgendes: die empirisch gefundenen Werte sind für:

1. Hillebrand gemäß Tab. XV und XVI 1.579 und 1.530, also im Mittel 1.5545. Der berechnete Mittelwert beträgt 1.5968.
2. Czermak gemäß Tab. XX und XXI 1.581 und 1.548, also im Mittel 1.5645. Der berechnete Mittelwert beträgt 1.5758.
3. Radakovič gemäß Tab. XXIV 1.639. Der berechnete Mittelwert beträgt 1.6610.
4. Wirtinger gemäß Tab. XXVIII und XXIX 1.434 und 1.435, also im Mittel 1.4345. Der berechnete Mittelwert beträgt 1.4656.

Die Übereinstimmung zwischen den deductiv und den empirisch gefundenen Werten dürfte als hinreichende Verification der Methode befunden werden, mittels der wir unter Benützung eines einzigen empirischen Horopters aus einer gegebenen Alleecurve jede beliebige andere Alleecurve ableiten.

X. Capitel.

Die scheinbare Größe bei monocularem Sehen.

§ 38. Wie früher (vgl. S. 16 [270]) ausführlich erörtert wurde, ist die Constanz der scheinbaren Größe bei binocularer Beobachtung darum nicht von einem constanten, sondern von einem nach bestimmten Gesetzen sich ändernden Gesichtswinkel bestimmt, weil wir binocular Entfernungsunterschiede sehen, d. h. weil der Entfernungsunterschied selbst schon ein psychisches Datum liefert. Eben dadurch unterscheidet sich der Fall eines tiefenempfindlichen Doppelauges von irgend einer physikalischen Einrichtung, welche nach dem Principe der Centralprojection hergestellt ist und in welcher eine Änderung der Entfernung bloß die Bildgröße ändert und daher ersetzt werden kann durch eine entsprechende Änderung der Objectgröße bei gleichbleibender Entfernung.

Die Frage liegt nahe, ob eine solche centralprojectivische Einrichtung vielleicht bei monocularem Sehen verwirklicht ist, ob also bei monocularem Sehen verschieden entfernte Objecte dann gleich groß erscheinen, wenn sie sich unter constantem Gesichtswinkel abbilden.

Im allgemeinen wird man auch diese Frage verneinen müssen. Ich habe jene Versuche, in denen zwei horizontal über eine Tischplatte laufende Fäden (analog den Schienen eines Eisenbahngleises) auf scheinbaren Parallelismus eingestellt werden (vgl. S. 5 ff. [259]), auch monocular gemacht. Dabei fällt vor allem auf, dass die Ergebnisse durchaus nicht jene Regelmäßigkeit zeigen wie bei binocularer Beobachtung: der Winkel, den die beiden Fäden miteinander bilden, wenn sie parallel erscheinen, ist zwar immer erheblich größer als bei binocularer Betrachtung, schwankt aber in einem sehr breiten Intervalle und erreicht nur höchst selten und ganz vorübergehend diejenige Größe, bei welcher der Scheitel in den Knotenpunkt des Auges fällt, also diejenige Lage hat, die er dem Principe der Centralprojection entsprechend immer haben müsste. Dieser Fall wird ab und zu einmal wirklich erreicht; die horizontalen Fäden erscheinen dann (entsprechend dem etwa 20 cm betragenden Verticalabstande des Auges von der Tischplatte) wie kurze verticale Striche, die auf den verticalen Schirm am Ende der Tischplatte gezeichnet sind.

Dieser Fall ist aber ein seltener; gewöhnlich muss man die Fäden so stellen, dass der Scheitelpunkt ihres Winkels weit hinter den Beobachter fällt — und in diesen gewöhnlichen Fällen liegen die scheinbar parallelen Fäden in einer scheinbar horizontalen Ebene, nämlich auf der Tischplatte.

Achtet man auf die Bedingungen, unter denen der früher erwähnte seltenere Fall eintritt, in welchem die Fäden, um parallel zu erscheinen, wirklich im Knotenpunkte zusammentreffen müssen, jener Fall, in dem sie nun mit einem Male wie verticale Striche aussehen, so bemerkt man, dass diese Bedingungen vor allem in absolut fester Fixation und in absolut ruhiger Kopfhaltung bestehen. Das geringste Auf- und Abwandern des Blickes längs einem der Fäden und besonders die geringste Drehung des Kopfes um seine Verticalaxe zerstören den Effect sofort — die Fäden scheinen sogleich wieder auf der horizontalen Tischplatte zu liegen und nach der Ferne zu divergieren.

Bei monocularer Beobachtung zeigen die zur Erzielung constanter scheinbarer Größen erforderlichen Gesichtswinkel einen Gang, der irgendwie die Mitte hält zwischen dem Falle der binocularen Betrachtung und der dem Principe der Centralprojection entsprechenden Constanz — welche letztere Grenze aber unter Umständen wirklich erreicht wird.

§ 39. Die Erklärung dieser Thatsachen liegt, glaube ich, sehr nahe. Die monoculare Beobachtung entbehrt des empfindlichsten Reagens auf Entfernungsunterschiede, nämlich der Disparation (bezw. der Doppelbilder). Gelingt es überdies auch alle sogenannten empirischen Anhaltspunkte für die Empfindung von Entfernungsunterschieden auszuschließen, so ist der monoculare Sehact ein reiner Fall von Centralprojection: Constanz der scheinbaren Größe wird durch Constanz des Gesichtswinkels erzeugt. Dieser Fall kann unter Umständen erreicht werden; und damit er erreicht werde, müssen die Entfernungsunterschiede für

die Empfindung völlig zum Schwinden gebracht sein: die horizontalen Fäden richten sich dann auf und erscheinen als verticale Striche in der Ebene des Schirmes.

Der gewöhnliche Fall ist aber der, dass auch beim Wegfall der Parallaxe noch mancherlei empirische Mittel der Tiefenlocalisation wirksam sind; es ist sogar sehr schwer sie gänzlich auszuschließen. Nur stehen sie an Wirksamkeit der Binocularparallaxe entschieden nach. Ein Architekturgemälde mag mit der correctesten Perspective, mit der wirksamsten Licht- und Schattenvertheilung, mit den Mitteln der Staffage und der Lufttöne hergestellt sein — die Plastik, welche man durch eine stereoskopische Aufnahme erzielt, wird niemals erreicht. Und noch in einem anderen Punkte unterscheiden sich diese empirischen Motive von der Binocularparallaxe. Während die Wirkung der letzteren für ein bestimmtes Augenpaar eine unveränderliche ist, sind wenigstens einige von den empirischen Mitteln der Tiefenlocalisation (und daher auch ihre Wirkungen) beträchtlichen Schwankungen unterworfen. Das gilt u. A. von den Drehungen des Kopfes um seine Verticalaxe, wie solche unwillkürlich erfolgen, wenn man nicht für ganz exacte Fixierung des Kopfes sorgt. Sind zwei Punkte verschieden weit entfernt, so bewirkt eine Rechtsdrehung des Kopfes eine scheinbare Verschiebung des fernerer Punktes nach rechts und im Anschlusse daran wird der ferner liegende Punkt auch als ferner gesehen. Größere Drehungen des Kopfes werden dann noch kleinere Entfernungsunterschiede zum Bewusstsein bringen als Drehungen von geringerem Ausmaße. Es wird also von zufälligen Umständen abhängen, welchen Grad von Plastik man beim einäugigen Sehen erreicht. Ähnliches gilt auch von intendierten Accommodationsänderungen.

Wenn nun durch solche Umstände ein Sehen von Entfernungsunterschieden auch bei monocularer Beobachtung erreicht wird, so muss früheren Überlegungen zufolge der Gesichtswinkel mit wachsender Entfernung abnehmen, um Constanz der scheinbaren Größe zu erzeugen. Da aber ferner diese empirischen Motive für das Sehen von Entfernungsunterschieden weniger wirksam sind als die Binocularparallaxe, so werden auch die Gesichtswinkel in geringerem Maße abnehmen müssen als beim binocularen Versuche. Und da schließlich diese empirischen Motive veränderliche sind, d. h. da Entfernungsunterschiede einmal wirksamer sind, einmal weniger wirksam, so wird auch die Abnahme der Gesichtswinkel entsprechenden Schwankungen unterliegen. So kann man die Erscheinungen bei monocularem Sehen unter dieselben Gesichtspunkte bringen, unter denen die binocularen Beobachtungen unserem Verständnis zugänglich geworden sind.

An den zahlreichen Versuchen, auf die sich die theoretischen Erörterungen dieser Arbeit stützen, haben sich meine hochverehrten Herren Collegen Prof. Dr. Paul Czermak, Prof. Dr. Wilhelm Wirtinger und Privatdocent Dr. Michael Radakovič in lebenswürdiger und höchst ausgiebiger Weise betheiligt. Ich ergreife mit Vergnügen die Gelegenheit, den genannten Herren für die vielen Opfer an Zeit und Geduld meinen herzlichsten Dank abzustatten.

