UNTERSUCHUNG

DER

BEWEGUNG VOM TYPUS 2/3 IM PROBLEM DER DREI KÖRPER UND DER „HILDA-LÜCKE" IM SYSTEM DER KLEINEN PLANETEN AUF GRUND DER GYLDÉN'SCHEN STÖRUNGSTHEORIE

VON

DR. HUGO BUCHHOLZ,
PRIVATDOCENT AN DER UNIVERSITÄT HALLE A. S.

ERSTER THEIL.

VORGELEGT IN DER SITZUNG VOM 13. JUNI 1901.

Inhaltsverzeichnis.

VORWORT.

Die erste Anregung zu den folgenden Untersuchungen erhielt ich durch Gyldén, der mich im Jahre 1896 in Stockholm veranlasste, die numerische Entwickelung der Störungsfunction für den Planeten Hilda in ihren Grundlagen durchzuführen, da er die Resultate zur Anwendung seines »horistischen« Integrationsverfahrens auf diesen Planeten benutzen wollte. Meine damaligen Rechnungen sind nach Gyldén's Tode unter seinem Nachlass verblieben, so dass ich jetzt zu ihrer Ausführung von neuem genöthigt war.

Bekanntlich versagen die bis zu Gyldén in der analytischen Störungstheorie gebräuchlichen Methoden, wenn es sich darum handelt, die Bahn eines kleinen Planeten zu berechnen, dessen mittlere Bewegung n zu derjenigen n' des Jupiter in einem commensurabeln Verhältnis steht, wo also dies Verhältnis $\frac{n'}{n} = \mu$ durch einen ganzzahligen rationalen Bruch ausgedrückt ist, z. B. durch $\mu = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{3}$ etc. Gyldén nennt diese Planeten solche vom »Typus« $\frac{1}{2}$, vom »Typus« $\frac{1}{3}$ etc. Der Wert der neuen, durch Gyldén geschaffenen Störungstheorie zeigt sich unter anderem gerade darin, dass sie die Behandlung solcher Commensurabilitätstypen ermöglicht.

Von diesen Typen sind auf Grund der Gyldén'schen Principien in näherem oder entfernterem Anschluss an die verschiedenen, durch Gyldén aufgestellten Integrationsverfahren bis jetzt nur die Typen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ durch die Arbeiten der Herren Backlund,[1] Brendel,[2] Harzer[3] und Ludendorff[4] behandelt worden. Der Hildatypus $\left(\frac{2}{3}\right)$, dessen Bearbeitung den Gegenstand der folgenden Untersuchungen bildet, bietet nicht nur theoretische Schwierigkeiten, sondern verursacht auch in rechnerischer Beziehung mehr Arbeitsaufwand als die meisten übrigen kleinen Planeten, da dieser Typus nicht mehr im Gyldén-schen Tafelwerk[5] tabuliert ist, während der Typus $\frac{1}{2}$, wie fast alle kleinen Planeten, in demselben enthalten ist.

Als Integrationsverfahren habe ich das Gyldén'sche Verfahren der partiellen Integration in der Modification von Herrn Brendel, sowie auch sonst dessen »Theorie der kleinen Planeten«[6] benutzt, ein Werk, in welchem der Verfasser sich durch seine systematische Ausarbeitung der Gyldén'schen Principien für die Behandlung der kleinen Planeten große Verdienste um die neue Störungstheorie

[1] O. Backlund, »Über die Bewegung einer gewissen Gruppe der kleinen Planeten«. Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de St. Petersbourg, VII Série, Tome XXXVIII, No. 11.

O. Backlund, »Über die Bewegung der kleinen Planeten vom Hecubatypus«. Cf. ibidem VIII Série, Volume VI, No. 10.

[2] M. Brendel. »Om användningen af den absoluta Störingstheorien på en grupp af små planeterna med numerisk tillämpning på planeten (46) Hestia«. Astronomiska Iaktagelser och undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium IV, 3.

M. Brendel, »Über die Anwendung der Gyldén'schen absoluten Störungstheorie auf die Breitenstörungen einer gewissen Classe kleiner Planeten nebst numerischem Beispiel für den Planeten (46) Hestia«. Göttingen, Druck der Dietrich'schen Universitätsbuchhandlung.

[3] P. Harzer, »Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper«. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Petersbourg, VII Série. Tome XXXIV, No. 12.

[4] H. Ludendorff, »Die Jupiterstörungen der kleinen Planeten vom Hecubatypus. Berlin, Mayer und Müller.

[5] H. Gyldén, »Hilfstafeln zur Berechnung der Hauptungleichheiten in den absoluten Bewegungstheorien der kleinen Planeten« Publicationen der Astr. Gesellschaft, XXI. In Commission bei W. Engelmann, Leipzig.

Einige Druckfehler des Gyldén'schen Tafelwerkes sind im Folgenden auf Seite 49 [357] angegeben.

[6] M. Brendel, »Theorie der kleinen Planeten«. I. Theil. Abhandlungen der königl. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen. Math. physik. Classe. Neue Folge, Bd. I, Nr. 2.

erworben hat; ebenso wie Herr Backlund, in dessen Hände auf Wunsch von Gyldén auch der Nachlass des letzteren gelegt worden ist.

Die von Gyldén kurz vor seinem Tode auf Grund seiner Nouvelles recherches[1] ausgebildete »horistische Integrationsmethode« (cf. übrigens Capitel V, S. 157 [465] des Folgenden) konnte im folgenden leider noch nicht zur Anwendung kommen. Denn diese Methode ist bezüglich der eigentlichen Integration in einigen kurz vor Gyldén's Tode erschienenen kleinen Aufsätzen,[2] sowie in der Vorrede zu Gyldén's erwähntem Tafelwerke, hinsichtlich ihrer wirklichen Anwendung, nur angedeutet. Erst nachdem Herr Backlund die schwierige Ausarbeitung und Herausgabe des Gyldén'schen Nachlasses vollendet und, wie zu hoffen, detailliertere Vorschriften bezüglich der wirklichen Anwendung der horistischen Methode gegeben haben wird — die Gyldén als einen entscheidenden Fortschritt gegenüber allen seinen zuvor gebrauchten Verfahren bezeichnet — kann dieselbe zugleich in ihrer ganzen Tragweite übersehen werden.

Seine Kritik der zuvor in der analytischen Störungstheorie angewandten Integrationsmethoden fasst Gyldén dahin zusammen, »dass sowohl das von Hansen angewandte Integrationsverfahren, als auch das Leverrier'sche, welche beide ebenso wie die Mehrzahl der übrigen angewandten Methoden im Grunde identisch sind, streng genommen der wissenschaftlichen Berechtigung entbehren«. Und die großen Arbeiten der letzten Jahrzehnte seines Lebens zielten eben auf nichts Geringeres hinaus, als die gesammte bisherige Anschauung der Kepler'schen Ellipse als Ausgangspunkt für die planetarische Bewegung durch eine neue zu ersetzen, welcher nicht die principiellen Mängel der alten anhaften. »Die neuen Integrationsmethoden«, sagt Herr Backlund, »die Gyldén zu dem Zwecke schuf, und zwar in erster Linie die sogenannte horistische, gehören zu seinen genialsten Leistungen«. Und er weist darauf hin, dass die Untersuchungen, welche den Kernpunkt der zweiten Periode von Gyldén's wissenschaftlicher Lebensarbeit bilden, nach dessen eigener Meinung das Hauptresultat seiner Forschung repräsentieren. »Gyldén«, fährt Herr Backlund fort, »hat mit diesen Arbeiten eine neue Richtung eingeleitet und neue Methoden geschaffen.... Dass sie epochemachender Natur sind, sei es direct oder indirect, scheint mir keinem Zweifel zu unterliegen. Bei seiner eminenten mathematischen Begabung erfüllte Gyldén die Vorbedingungen, Epochemachendes zu leisten.... Ihm fiel es nicht schwer, auf die Anerkennung der Zeitgenossen zu verzichten, strebte er doch vor allen Dingen, die Wahrheit zu ergründen«.

Ist auch Gyldén in seiner schöpferischen Neubehandlung des Störungsproblems dem allgemeinen Verständnis zunächst vorausgeeilt, und »verlangen seine Methoden«, wie Herr Backlund sagt, »der Natur der Sache gemäß einen gewissen Zeitraum, um die astronomischen Anschauungen zu beeinflussen, resp. in ihnen das Bürgerrecht zu erwerben«, so übersteigen doch jene wegwerfenden Urtheile, die über die großen Arbeiten Gyldén's laut werden, noch die Grenzen bloßen Nichtverständnisses. Und in der That frägt man vergebens nach einer sachlichen Begründung dieser absprechenden Urtheile, die über die Theorie Gyldén's von Diesem und Jenem — gerade in Schweden — so leichthin gefällt werden.

Besonders warmen Dank möchte ich noch an dieser Stelle Herrn Brendel aussprechen für die vielseitige Belehrung und reiche wissenschaftliche Förderung, die er mir in Bezug auf Gyldén's Theorie fortgesetzt hat zutheil werden lassen, wie er ja auch der Einzige ist, der unermüdet bisher bestrebt gewesen, den Ideen seines großen Lehrers in Deutschland allmählich Eingang zu schaffen und der Gyldén's Richtung bei uns gefördert hat. Und das im folgenden auf Hilda angewandte Integrationsverfahren beruht ja auch auf der von Herrn Brendel in seiner Theorie der kleinen Planeten gegebenen

[1] H. Gyldén, »Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planetes«. Acta Mathematica, Tome 15 et 17

[2] Om bestämningen af ojemnheter med mycket lång period i theorien för planeters och satelliters rörelser. Översigt af Kongl. Vetenskaps-Academiens Förhandlingar 1895, Nr. 7, Stockholm.

Olika methoder att bestämma de horistiska termerna i den differentialeqvation, som förmedlar härledningen af ojemnheterna en planets longitud. I. Cf. ibidem 1896. Nr. 6.

Modification der Gyldén'schen Methode der partiellen Integration, die dieser selbst benützte, ehe er seine letzte, die horistische Methode, noch in ihren allgemeinen Zügen schuf.

Als Einleitung schicke ich eine kurze Analyse der Gyldén'schen Grundprincipien voraus und nehme bei Entwickelung der Störungsfunction Gelegenheit, einige noch nicht veröffentlichte Formeln Gyldén's anzuführen, die ich bereits in Stockholm bei meinen Rechnungen für Gyldén verwandte. Zugleich habe ich den Versuch gemacht, die folgende Darstellung für Hilda so zu geben, dass sie ein leicht verständliches Beispiel der wirklichen Anwendung von Gyldén's Principien bildet. Auch sind in derselben Glieder dritter Ordnung berücksichtigt worden, die Gyldén nicht näher in den Bereich seiner Untersuchungen gezogen hat, und es ist bei Berechnung der Lücke gezeigt, dass diese Glieder in einem extremen Falle, wie Hilda, einen bedeutenden Einfluss auf das Resultat ausüben. Entsprechend der neuen Gyldén'schen Anschauungsweise treten dabei in den folgenden Untersuchungen im ganzen sechs verschiedene Gliedertypen auf: Die von Gyldén sobenannten »elementären«, die »charakteristischen« und die »coordinierten« Glieder, von denen die beiden ersteren Gliederarten in den Entwickelungen für die partiellen Derivierten der Störungsfunction für jeden Planetentypus, wenn man ihn nach den Gyldén'schen Principien behandeln will, gesondert zu bestimmen sind, während die coordinierten Glieder nach Integration der Differentialgleichungen für S und ρ auf der rechten Seite der Differentialgleichung für die Zeitreduction auftreten; ferner die bei der numerischen Rechnung mitzuberücksichtigenden, noch in Betracht kommenden gewöhnlichen Störungsglieder. Aus allen diesen Gliedern setzen sich die rechten Seiten der zu integrierenden Gyldén'schen Differentialgleichungen in S, ρ, T zusammen. Bei der Integration dieser Differentialgleichungen ergibt dann die Variabilität des langperiodischen Theiles T_l in den Winkelargumenten der auftretenden trigonometrischen Functionen die sogenannten »exargumentalen« Glieder, während die Berücksichtigung der Variabilität der langperiodischen Functionen η, η', π, π_1 (insofern es sich nicht um die elementären Glieder der Form B, sondern um die charakteristischen handelt), die sogenannten »Zusatzglieder« liefert. Auch ist im Folgenden den Gliedern zweiter Ordnung ersten Grades in den Derivierten der Störungsfunction von vorneherein Rechnung getragen und beim dritten Grade sind, wie der zweite Theil zeigen wird, auch die exargumentalen Glieder noch berücksichtigt worden, da dies für Hilda nothwendig war, während beim nullten Grad die Glieder dritter Ordnung in P und Q mitgenommen sind. —

Die Weiterführung der numerischen Rechnung und die analytische Darstellung der Störungen höheren Grades für den Radius vector sammt der von der Neigung herrührenden Glieder, sowie der Breitenstörungen, Entwickelungen, die ich zum Theil bereits durchgeführt habe, werden in bald erscheinender Fortsetzung dieser Studien folgen.

Halle, im Februar 1902.

Der Verfasser.

Erstes Capitel.

Ableitung der Gyldén'schen Form der allgemeinen Differentialgleichungen der Planetenbewegung.

„Denn die sinnliche Erfahrung in Übereinstimmung mit dem Denken zu bringen, bleibt doch das höchste Ziel der Wissenschaft.

Gyldén.

Um die Grundprincipien darzulegen, nach denen Gyldén das Problem der gestörten Bewegung behandelt, gehen wir aus von der bekannten allgemeinen Form der Differentialgleichungen des Problems der drei Körper,[1] durch welche die Bewegung eines gestörten Planeten um die Sonne charakterisiert wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} &= k^2(1+m)\frac{\partial\Omega}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y}{r^3} &= k^2(1+m)\frac{\partial\Omega}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z}{r^3} &= k^2(1+m)\frac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wo die Störungsfunction Ω bestimmt ist durch die beiden Formen:

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\Delta} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right\} \\ &= \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}\cos H\right\}, \\ \text{indem:}\qquad \Delta^2 &= (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 \\ &= r^2+r'^2-2rr'\cos H \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

ist, und wo H den heliocentrischen Winkel bedeutet zwischen den Radienvectoren r und r' des gestörten, m, und des störenden Planeten m'; die Coordinaten x, y, z und x', y', z' des gestörten Planeten m und des störenden Planeten m', beziehen sich auf ein Coordinatensystem von festen Richtungen, das seinen Anfangspunkt im Mittelpunkt der Sonne hat. Die Zeit ist dabei in mittleren Sonnentagen zu zählen und k ist die Gauß'sche Constante.

A. Ableitung der Hansen'schen Form der Bewegungsgleichungen des Planeten in seiner instantanen Bahnebene.

Bei der Transformation der angeführten allgemeinen Differentialgleichungen behält Gyldén die von Hansen eingeführte gesonderte Betrachtung der Bewegung des gestörten Planeten in seiner augenblicklichen Bahnebene von derjenigen der Bahnebene selbst, im Raum, bei. Bekanntlich treten in den, durch

[1] Die Ableitung dieser Gleichungen cf. z. B. Klinkerfues, theoretische Astronomie, zweite Auflage, I. Capitel.

die Integration der Gleichungen der ungestörten Bewegung sich ergebenden Ausdrücken die Constanten Ω und i, welche die Lage der Bahnebene bestimmen, getrennt auf von den Constanten a, e, π, ε, welche die Bewegung des Planeten in seiner elliptischen Bahn charakterisieren. Dieses ist in der gestörten Bewegung, also bei der Integration der Gleichungen (1) nicht mehr der Fall, vielmehr vermischen sich hier beide Gattungen von Constanten und ihr Einfluss auf die Störungen. Hansen hat jedoch gezeigt, dass eine Trennung der Gleichungen und somit der Constanten, welche die Bewegung in der gestörten Ellipse bestimmen, von den Gleichungen und Constanten, welche die Bahnlage bestimmen, möglich ist. Diese Trennung der Bewegung erreicht er, indem er die allgemeinen Bewegungsgleichungen (1) auf ein bewegliches Coordinatensystem x_1, y_1, z_1 transformiert, das seinen Ursprung, wie das erste, im Schwerpunkte der Sonne hat. Indem $\alpha, \beta \ldots \gamma_2$ die neun Richtungscosinus darstellen, hat man in bekannter Weise:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha x + \beta y + \gamma z \\ y_1 &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ z_1 &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

und umgekehrt:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha x_1 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 z_1 \\ y &= \beta x_1 + \beta_1 y_1 + \beta_2 z_1 \\ z &= \gamma x_1 + \gamma_1 y_1 + \gamma_2 z_1 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ferner, unter anderen, die folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 &= 0 \qquad & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \\ \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2 &= 0 & \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die Eigenschaft nun, welche für x, y, z und ihre ersten Derivierten nach der Zeit in der Variation der Constanten zur Bedingung gemacht wird, dass sie die gleiche analytische Form in der gestörten wie ungestörten Bewegung haben sollen, behält Hansen für die »idealen« Coordinaten x_1, y_1, z_1 bei. Die ersten Differentialquotienten dieser Coordinaten nach der Zeit:

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha\frac{dx}{dt} + \beta\frac{dy}{dt} + \gamma\frac{dz}{dt} + x\frac{d\alpha}{dt} + y\frac{d\beta}{dt} + z\frac{d\gamma}{dt}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \alpha_1\frac{dx}{dt} + \beta_1\frac{dy}{dt} + \gamma_1\frac{dz}{dt} + x\frac{d\alpha_1}{dt} + y\frac{d\beta_1}{dt} + z\frac{d\gamma_1}{dt}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \alpha_2\frac{dx}{dt} + \beta_2\frac{dy}{dt} + \gamma_2\frac{dz}{dt} + x\frac{d\alpha_2}{dt} + y\frac{d\beta_2}{dt} + z\frac{d\gamma_2}{dt}$$

aber erfüllen diese Bedingung, wenn:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{d\alpha}{dt} + y\frac{d\beta}{dt} + z\frac{d\gamma}{dt} &= 0 \\ x\frac{d\alpha_1}{dt} + y\frac{d\beta_1}{dt} + z\frac{d\gamma_1}{dt} &= 0 \\ x\frac{d\alpha_2}{dt} + y\frac{d\beta_2}{dt} + z\frac{d\gamma_2}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

gesetzt wird.

Diese drei Bedingungen (5) bestimmen aber mit den sechs Bedingungen (4) die neun Größen $\alpha, \beta \ldots \gamma_2$ und damit das neue Coordinatensystem x_1, y_1, z_1 nicht vollständig, weil sie nicht unabhängig voneinander sind. Denn die drei Gleichungen (5) stellen nur zwei von einander unabhängige Bedingungen dar. Der Übergang von x, y, z auf das System x_1, y_1, z_1 ist also auf unendlich viele Arten möglich. Es bleibt somit zur Bestimmung des Coordinatensystems x_1, y_1, z_1 eine Bedingung zur freien Verfügung. Als solche wählt Hansen die, dass $z_1 = 0$ sei, so dass der Radius vector stets in die $x_1 y_1$-Ebene fällt. Damit ist aber offenbar die Betrachtung der Bewegung in der Ebene der Bahn von derjenigen der Bewegung dieser Ebene im Raum getrennt und das x_1, y_1, z_1-System ist vollständig charakterisiert, nämlich als beweglich im Raum, und zwar so, dass seine $x_1 y_1$-Ebene stetig durch den Radius vector des gestörten Körpers geht.

Diese Trennung der Bewegung legt Gyldén seinen Betrachtungen nun gleichfalls zugrunde. Hingegen definiert er die Bewegung der Bahnebene im Raum in durchaus anderer Weise als Hansen, wie wir später bei Betrachtung der Breitenstörungen sehen werden. Deshalb gehen wir auf die Hansensche Behandlung der Bewegung der Bahnebene im Raum zunächst nicht ein, führen aber die Transformation der allgemeinen Störungsgleichungen (1) auf das ideale Coordinatensystem x_1, y_1, z_1 für die beiden ersten Gleichungen, d. h. für die Bewegung des gestörten Körpers in seiner »momentanen« oder »instantanen« Bahnebene in Kürze durch, da wir so die Form der allgemeinen Bewegungsgleichungen erhalten, die Gyldén zum Ausgangspunkte wählt.

Da nach Voraussetzung $z_1 = 0$ ist, werden die Gleichungen (3):

$$x = \alpha x_1 + \alpha_1 y_1$$

$$y = \beta x_1 + \beta_1 y_1$$

$$z = \gamma x_1 + \gamma_1 y_1$$

oder differentiert:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{dx_1}{dt} + \alpha_1 \frac{dy_1}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta \frac{dx_1}{dt} + \beta_1 \frac{dy_1}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma \frac{dx_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dy_1}{dt},$$

ferner analog (5):

$$x_1 \frac{d\alpha}{dt} + y_1 \frac{d\alpha_1}{dt} = 0$$

$$x_1 \frac{d\beta}{dt} + y_1 \frac{d\beta_1}{dt} = 0$$

$$x_1 \frac{d\gamma}{dt} + y_1 \frac{d\gamma_1}{dt} = 0,$$

also, da z_1 beständig 0 sein soll:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha \frac{d^2x_1}{dt^2} + \alpha_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{d\alpha}{dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{d\alpha_1}{dt}\frac{dy_1}{dt}; \quad \alpha \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \beta \frac{d^2x_1}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{d\beta}{dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{d\beta_1}{dt}\frac{dy_1}{dt}; \quad \alpha_1 \frac{d^2x}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \gamma \frac{d^2x_1}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{d\gamma}{dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{d\gamma_1}{dt}\frac{dy_1}{dt}; \quad \alpha_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z_1}{dt^2} = 0.$$

Schließlich werden die Derivierten der Störungsfunction:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = \alpha \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = \alpha_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

Mit Hinblick auf die vorstehenden Gleichungssysteme gehen nun die Gleichungen von System (1) nach Multiplication entsprechend mit $\alpha \beta \gamma \ldots$ und Addition über in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d t^2} + k^2(1+m)\frac{x_1}{r^3} &= k^2(1+m)\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \\ \frac{d^2 y_1}{d t^2} + k^2(1+m)\frac{y_1}{r^3} &= k^2(1+m)\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

die der analytischen Form nach offenbar den ursprünglichen Gleichungen (1) äquivalent sind (was bei Transformation der dritten Gleichung in (1) jedoch bei Hansen nicht der Fall ist) und welche also die Bewegung des Planeten in seiner instantanen Bahnebene definieren.

In die Gleichungen (6) sind schließlich noch Polarcoordinaten einzuführen:

$$x_1 = r \cos v$$

$$y_1 = r \sin v.$$

Dabei hat man jetzt aber v nicht wie in der Ellipse von 0 bis 360°, sondern von $-\infty$ bis $+\infty$ zu zählen, da jetzt die Bahnform keine geschlossene mehr ist, weil der Radius vector in der im Raum beweglichen Ebene $x_1 y_1$ liegt. Zunächst folgt durch Differentiation:

$$dx_1 = dr \cos v - r dv \sin v$$

$$dy_1 = dr \sin v + r dv \cos v,$$

also:

$$d^2 x_1 = d^2 r \cos v - 2 dr dv \sin v - r d^2 v \sin v - r dv^2 \cos v$$

$$d^2 y_1 = d^2 r \sin v + 2 dr dv \cos v + r d^2 v \cos v - r dv^2 \sin v.$$

ferner, da $r^2 = x_1^2 + y_1^2$ ist:

$$r \frac{dr}{dx_1} = x_1 = r \cos v,$$

also:

$$\frac{dr}{dx_1} = \cos v \qquad \frac{dr}{dy_1} = \sin v,$$

woraus:

$$-r \frac{dv}{dx_1} \sin v = 1 - \frac{dv}{dx_1} \cos v = 1 - \cos^2 v = \sin^2 v$$

$$+r \frac{dv}{dy_1} \cos v = 1 - \frac{dv}{dy_1} \sin v = \cos^2 v$$

$$\frac{dv}{dx_1} = -\frac{1}{r} \sin v \qquad \frac{dv}{dy_1} = +\frac{1}{r} \cos v.$$

Die Relationen:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} = \frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{dx_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{dr}{dx_1}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y_1} = \frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{dy_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{dr}{dy_1}$$

gehen daher über in:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial v}\sin v + \frac{\partial\Omega}{\partial r}\cos v$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y_1} = +\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial v}\cos v + \frac{\partial\Omega}{\partial r}\sin v.$$

Setzt man die so erhaltenen Formen in die rechten Seiten von (6), multipliciert passend mit $\sin v$ und $\cos v$, respective noch mit r und addiert, so folgen die Hansen'schen Formen in Polarcoordinaten, wo r der wahre Radius vector und v die wahre Länge ist:

$$r^2\frac{d^2v}{dt^2} + 2r\frac{dr}{dt}\frac{dv}{dt} = k^2(1+m)\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$

$$r\frac{d^2r}{dt^2} - r^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{r} = k^2(1+m)\,r\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{r^2\frac{dv}{dt}\right\} &= k^2(1+m)\frac{\partial\Omega}{\partial v}\\ \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{r^2} &= k^2(1+m)\frac{\partial\Omega}{\partial r}\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

und in diese Gleichungen substituiert Gyldén seine neuen Variabeln S, η und ρ.

B. Ableitung der Gyldén'schen Form der Bewegungsgleichungen aus der Hansen'schen.

Anstatt die Gleichungen (7) als solche in r und v aufzufassen, können wir die zweite als Gleichung in r, die erste aber als Gleichung in $r^2\frac{dv}{dt}$, der Flächengeschwindigkeit, auffassen. Integriert man diese Gleichungen für das Zweikörperproblem, indem man die rechten Seiten Null setzt, so ergibt die Integration der zweiten bekanntlich die elliptische Bahncurve:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\Pi)};$$

die Integration der ersten ergibt die Flächengeschwindigkeit als eine Constante:

$$r^2\frac{dv}{dt} = k\sqrt{a(1-e^2)},$$

indem wir die Masse des kleinen Planeten, m, hinfort gegenüber der Sonnenmasse 1 vernachlässigt denken. In der elliptischen Bewegung bleibt also der Radius vector immer zwischen den endlichen Grenzen:

$$a(1-e) < r < a(1+e)$$

eingeschlossen.

Betrachtet man hingegen die gestörte Bewegung, so sieht man zunächst, dass die Planeten Bahnen beschreiben, die zwar stark von Ellipsen abweichen, sich aber innerhalb endlicher und selbst sehr großer Zeiträume nicht über gewisse Grenzen von ihnen entfernen, indem die Beobachtungen zeigen, dass der Radius vector des gestörten Körpers für endliche Zeiträume in endliche Grenzen eingeschlossen bleibt. Gyldén's Bemühungen waren darauf gerichtet, mathematisch nachzuweisen, dass die Halbaxen der Planetenbahnen nicht bloß für endliche, sondern für unbeschränkte Zeiten innerhalb endlicher Grenzen verbleiben, so dass die Bahnen »periplegmatische« Curven darstellen, die stets zwischen zwei endlich entfernten concentrischen Kugelschalen verbleiben. Eine solche Lösung des Problems der planetarischen Bewegung, welche als solche die unbedingte Convergenz aller gebrauchten Entwickelungen und des Integrationsverfahrens bedingt, nennt Gyldén eine »absolute« und diese würde also auch über die Stabilität des Planetensystems entscheiden. Durch seine ersten eingehenden Convergenzuntersuchungen[1] hinsichtlich dieser Frage, sowie vor allem durch seine letzten großen Convergenzuntersuchungen[2] ist Gyldén seinem Ziele stufenweise näher gerückt, indem er Convergenzverfahren von wachsender Vollkommenheit ausbildete. Ein abschließendes Urtheil darüber, wie nahe Gyldén diesem Ziele gekommen ist, wird erst nach Veröffentlichung seines Nachlasses möglich sein. Das eine indes steht fest, dass Gyldén durch das principielle Vermeiden der Entwickelungen nach Potenzen der störenden Masse der alten Theorie, die sicher zu keinen unbeschränkt convergenten, im Gegentheile häufig zu divergenten Resultaten führen, und durch sein ganzes neues Verfahren den ersten großen principiellen Fortschritt in der Ausbildung der Störungstheorie seit Laplace's Zeit gethan hat. Zugleich aber hat er vollkommenere Rechenmethoden geschaffen, als es die vorherigen waren. Denn es ist ausdrücklich hervorzuheben, dass die Gyldén'sche Bahn keineswegs bloß von Wichtigkeit für theoretische Untersuchungen über die Stabilität des Planetensystems ist, sondern sie ist auch von Bedeutung für die praktische Störungsrechnung. Hat auch Gyldén zunächst seine »absolute Bahn« definiert mit Hinblick auf die elementären Glieder, so will er bei Berechnung einer Bahn doch nicht diese allein, sondern auch die charakteristischen und wichtigen gewöhnlichen, d. h. eben alle wesentlichen Glieder berücksichtigt sehen, und gerade zur Erreichung dieses Zieles, die praktische Störungsrechnung durch seine Theorie zu fördern, hat er sein Tafelwerk für die kleinen Planeten geschaffen, auf welches bereits im Vorwort hingewiesen wurde. — Auch wenn man also der Gyldén'schen Theorie die Eigenschaft absprechen würde, eine absolute, d. h. unbegrenzt giltige Lösung für das Problem der planetarischen Bewegung zu geben, was man sich mit Recht indes noch gar nicht erlauben darf, so bleibt sie darum trotzdem ein Fortschritt über die vorherigen Methoden.

Indem wir im folgenden also die Frage offen lassen, inwieweit es berechtigt sei, anzunehmen, dass der von Gyldén eingeschlagene Weg auf eine absolute Lösung führe und aus diesem Grunde auch die Gyldén'sche Terminologie der absoluten Bahn zunächst noch vermeiden (z. B. halbe große Axe $a =$ »Protometer«, ein ewiges endliches Grundmaß, Planetenbahncurve periplegmatisch u. s. f.), beschränken wir uns vielmehr darauf, die von Gyldén zur Behandlung der gestörten Bewegung gegebenen Grundprincipien in kurzer und möglichst einfacher Weise darzulegen, während das Verfahren der partiellen Integration durch seine Anwendung auf unser Beispiel erläutert werden wird. Dass dies Verfahren — während die horistische Methode auf die absolute Lösung abzielt — indes von vorneherein nur eine für beschränkte Zeit giltige, convergente Lösung ergibt, sei gleich hier erwähnt. Denn man ist bei der partiellen Integration nicht streng imstande, das Verschwinden hyperelementärer Glieder in der Zeitreduction zu beweisen, wie wir in der zweiten Abtheilung sehen werden.

Aus dem Gesagten kann man schließen, dass die Gleichung der Bahn, da sie sich wenigstens innerhalb endlicher sehr großer Zeiträume nicht über alle Grenzen von der Ellipse entfernt, durch eine der

---

[1] Gyldén, Untersuchungen über die Convergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden. Acta mathematica, t. 9 (1887).

[2] Gyldén, Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes. Acta mathematica, t. 15 et 17 (1892).

Ellipsengleichung analoge Form wird dargestellt werden können, und in diesem Sinne setzt Gyldén für den Radius vector:

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\rho}, \tag{8}$$

wo, wie sich später ergeben wird, a eine Constante, η eine langperiodische Function und ρ der Inbegriff der elementären, der charakteristischen und der noch in Betracht kommenden gewöhnlichen Glieder ist. Indem sich η und ρ als Functionen von v ergeben werden, erhält man auch den Radius vector als:

$$r = f(v).$$

Der Größe a kommt eine bestimmte geometrische Bedeutung wie in der Ellipse nicht mehr zu; a ist die halbe große Axe der nichtgeschlossenen im Raume doppelt gekrümmten Bahn.

Wie Gyldén die Gleichung für den Bahnvector in einer der Kepler'schen Form analogen ansetzt, thut er dies auch bei der Beziehung zwischen t und v, welche den Ort des Planeten in seiner Bahn zu einer bestimmten Zeit festlegt. An Stelle der Kepler'schen Beziehung:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k\sqrt{a(1-e^2)}$$

setzt er:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{a(1-\eta^2)}}{1+S}, \tag{9}$$

wo S eine kleine Größe ist, so dass die letztere Relation noch genähert die Flächengeschwindigkeit in der gestörten Bewegung darstellt. Selbst für große Zeiträume sind jedenfalls ρ und S kleine Größen. Wäre erwiesen, dass sie es für unbeschränkte Zeit bleiben, so repräsentierte der Ausdruck (8) den Radius vector der absoluten Bahn im Gyldén'schen Sinne. Die Function S enthält gemäß der später sich ergebenden Definition für η keine elementären Glieder, d. s. die den secularen Gliedern der alten Theorie entsprechenden Glieder. Als willkürliche Function hätte Gyldén η beliebig, also z. B. auch $\eta =$ const. definieren können. Da Gyldén sich indes die rein periodische Form aller Entwickelungen gerade principiell als Ziel gesetzt hat, so definiert er, um das Auftreten säcularer Glieder zu vermeiden, wie sich später zeigen wird (cf. Kapitel IV, Integration der Gleichung für ρ), η eben als langperiodische Function von v, weil dadurch S gleichfalls in Form einer periodischen Reihe erhalten wird. Erwähnt sei noch, dass die Analogie in der Form mit den Kepler'schen Formen natürlich nicht willkürlich, sondern von Gyldén gewählt ist, um nicht unnöthig die allmählich zur Behandlung dieser Formen gebildeten Rechenregeln der Kepler'schen Astronomie aufzugeben.

Um die Gyldén'schen Functionen η, S, ρ als $f(v)$ zu gewinnen, müssen dieselben in die Hansen-schen Bewegungsgleichungen (7) des Planeten in seiner instantanen Bahnebene an Stelle von r und v eingeführt werden. Dabei hat Gyldén in ganz neuer Weise an Stelle der Zeit t die wahre Länge v als unabhängige Variable eingeführt, was für die praktische Störungsrechnung große Vortheile bietet, während es rein mathematisch gleichgiltig ist, ob v oder t als independente Variable figuriert, was an dieser Stelle nicht nachgewiesen werden soll. Gyldén hat seine Hauptgleichungen, wie er sie schließlich zugrunde legt (von den Darstellungen hinsichtlich der »intermediären« Bahn ist überhaupt im folgenden nicht die Rede), in zwei Darstellungen gegeben, die nur unbedeutend voneinander abweichen. Die ursprüngliche, auch von seinen meisten Schülern in ihren Arbeiten zugrunde gelegte, die sich nur unwesentlich von der in den Orbites absolues und in der Vorrede zum Gyldén'schen Tafelwerke gegebenen Form unterscheidet, soll auch für das Folgende den Ausgangspunkt bilden.

Führen wir jetzt die Gyldén'schen Coordinaten in das System (7) ein, so wird die erstere Gleichung, mit Hinblick auf die Gleichung (9), durch welche S eingeführt worden, indem ja $m = 0$ bereits angenommen worden, was ebensogut nach der folgenden Transformation geschehen könnte:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{k\sqrt{a(1-\eta^2)}}{1+S}\right\} = k^2\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$

oder:

$$\frac{d}{dv}\left\{\frac{k\sqrt{a(1-\eta^2)}}{1+S}\right\}\frac{dv}{dt} = k^2\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$

differentiiert:

$$\frac{1}{r^2}\frac{k\sqrt{a(1-\eta^2)}}{1+S}\left\{-\frac{k\sqrt{a(1-\eta^2)}}{(1+S)^2}\frac{dS}{dv}-\frac{1}{2}\frac{k\sqrt{a}}{1+S}\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\frac{d\eta^2}{dv}\right\} = k^2\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$

oder:

$$-\frac{ka(1-\eta^2)}{r^2(1+S)^3}\frac{dS}{dv}-\frac{1}{2}\frac{ka(1-\eta^2)}{r^2(1+S)^2(1-\eta^2)}\frac{d\eta^2}{dv} = k\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$

oder:

$$-\frac{1}{1+S}\cdot\frac{dS}{dv} = (1+S)^2\,\underset{\sim}{Q}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}, \tag{10}$$

wo:

$$\underset{\sim}{Q} = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$

gesetzt ist. Dies ist die Differentialgleichung in S.

Um die Differentialgleichung in ρ zu erhalten, transformiert Gyldén die zweite Gleichung von System (7) mit Hinblick auf (8) und (9). Es wird zunächst:

$$\frac{dr}{dt} = -r^2\frac{d\frac{1}{r}}{dt} = -r^2\frac{d\frac{1}{r}}{dv}\frac{dv}{dt} = -\frac{k\sqrt{a(1-\eta^2)}}{1+S}\frac{d\frac{1}{r}}{dv},$$

also:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k^2a(1-\eta^2)}{r^2(1+S)^2}\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\frac{d\frac{1}{r}}{dv}-\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv}\frac{d\frac{1}{r}}{dv}\right\}$$

$$= -\frac{k^2a(1-\eta^2)}{r^2(1+S)^2}\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2}+(1+S)^2\underset{\sim}{Q}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dv}\right\},$$

da nach (10):

$$-\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv} = (1+S)^2\underset{\sim}{Q}$$

ist.

Durch Einsetzen des erhaltenen Wertes von $\frac{d^2r}{dt^2}$ und von:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{ka(1-\eta^2)}{r^4(1+S)^2}$$

in System (7) wird dessen zweite Gleichung:

$$a(1-\eta^2)\left\{\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2}+(1+S)^2 Q\frac{d\frac{1}{r}}{dv}+\frac{1}{r}\right\}-(1+S)^2=-r^2(1+S)^2\frac{\partial\Omega}{\partial r}, \tag{11}$$

womit an Stelle von t jetzt v und $\frac{1}{r}$ an Stelle von r in der ursprünglichen Gleichung getreten ist. Um ρ an Stelle von $\frac{1}{r}$ einzuführen, hat man nach (8):

$$\frac{1}{r}=\frac{1+\rho}{a(1-\eta^2)},$$

also:

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dv}=\frac{1}{a(1-\eta^2)}\left\{\frac{d\rho}{dv}+\frac{1+\rho}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\right\},$$

mithin:

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2}=\frac{1}{a(1-\eta^2)}\left\{\frac{d^2\rho}{dv^2}+\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\frac{d\rho}{dv}+2\frac{1+\rho}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2+\frac{1+\rho}{1-\eta^2}\frac{d^2\eta^2}{dv^2}\right\}$$

Durch Einsetzen in Gleichung (11) folgt, entsprechend geordnet:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{dv^2}+\rho=&-\left\{\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}+(1+S)^2 Q\right\}\frac{d\rho}{dv}+2S+S^2-(1+S)^2P\\&-\left\{\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d^2\eta^2}{dv^2}+\frac{2}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2+\frac{(1+S)^2}{1-\eta^2}Q\frac{d\eta^2}{dv}\right\}(1+\rho),\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned}P&=r^2\frac{\partial\Omega}{\partial r}\\Q&=\frac{r^2}{a(1-\eta^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial v}\end{aligned}\right\} \tag{12a}$$

gesetzt ist.

Die Gleichung (12) in ρ ist diejenige, deren Integration den Radius vector:

$$r=\frac{a(1-\eta^2)}{1+\rho}$$

als Function von v ergibt. Die Gleichung (10) in S spielt nur die Rolle einer Hilfsgleichung, da S in der rechten Seite der Gleichung (12) enthalten ist.

Die beiden Gleichungen (10) und (12) ersetzen nun aber das System (7) offenbar noch nicht vollständig, da jede der Gleichungen des Systems (7) eine Differentialgleichung II. Ordnung, und zwar auch die Gleichung in ρ eine solche, die Gleichung in S hingegen I. Ordnung ist. Die Gleichung I. Ordnung, die zusammen mit den Gleichungen (10) und (12) das System (7) ersetzt, wird gegeben durch die Beziehung zwischen t und v in den Gyldén'schen Coordinaten. Diese aber folgt, indem wir in (9):

$$r^2\frac{dv}{dt}=\frac{k\sqrt{a(1-\eta^2)}}{1+S}$$

r durch ρ mittelst (8):

$$r=\frac{a(1-\eta^2)}{1+\rho}$$

ersetzen. So folgt:

$$\frac{dt}{dv} = \frac{r^2(1+S)}{k\sqrt{a(1-\eta^2)}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}(1-\eta)^{\frac{3}{2}}}{k(1+\rho)^2}\,(1+S). \tag{13}$$

Nun nimmt Gyldén an, dass die mittlere Entfernung a der neuen, von ihm definierten Planetenbahn mit der Größe n, welche in der Ellipse der mittleren täglichen Bewegung entspricht, durch dieselbe Relation verbunden sei, wie in der Kepler'schen Theorie und setzt daher auch:

$$n = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}, \tag{14}$$

oder, wenn man die Masse m des kleinen Planeten nicht vernachlässigt:

$$n = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Dieses n entspricht aber nicht mehr in allen Fällen der mittleren täglichen Bewegung, sondern stellt eine Integrationsconstante dar, die wir mit Herrn Brendel als »Bewegungsconstante« bezeichnen wollen. Die wahre, in der Natur auftretende, mittlere tägliche Bewegung, die später mit n_1 bezeichnet werden wird, lernt man erst nach der Integration der Grundgleichungen kennen (cf. Cap. V). Später wird für den Typus $\frac{2}{3}$ im V. Capitel eine numerische Tabelle aufgestellt werden, die zeigt, wie sich die mittlere tägliche Bewegung n_1 mit n und gewissen anderen Größen ändert.

Im Hinblick auf die fundamentale Definitionsgleichung (14) wird jetzt Gleichung (13):

$$n\,\frac{dt}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\rho)^2}\,(1+S). \tag{15}$$

Die Größe ρ zerlegt Gyldén nun (wie wir hier aus dem III. und IV. Capitel vorwegnehmen müssen, was dort aber natürlich begründet werden wird) in der Art, dass er setzt:

$$\rho = (\rho)+R,$$

wo (ρ) alle »elementären Glieder des Typus B« enthält und auf Grund der Bedingungsgleichungen für η und π, wie sich gleichfalls später zeigen wird, die Form:

$$(\rho) = \eta\cos\{(1-\varsigma)v-\pi\} = \eta\cos\mathrm{v}$$

hat, indem ς die Apsidenbewegung charakterisiert und π eine andere Bedeutung hat als die Perihellänge Π der Ellipse, in der ja:

$$(\rho) = e\cos(v-\Pi)$$

ist. Die Größe R hingegen umfasst nach Gyldén die übrigen, d. h. die »charakteristischen« und die noch mitzunehmenden großen gewöhnlichen Glieder. Der durch Gleichung (8) eingeführte Radius vector der »Gyldén'schen Bahn«, wie wir von nun an einfach sagen werden, nimmt also die Form an:

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+(\rho)+R} \tag{16}$$

oder:

$$r = \frac{(r)}{1 + \frac{R}{1 + \eta \cos \mathrm{v}}},$$

wo:

$$(r) = \frac{a(1-\eta^2)}{1+(\rho)} = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta \cos \mathrm{v}} \tag{17}$$

und:

$$\mathrm{v} = (1-\varsigma)v - \pi$$

ist. Bei der wirklichen Berechnung einer Gyldén'schen Bahn hat man r aus (16) zu berechnen und (ρ) und R ergeben sich später, wie wir sehen werden, durch Integration von zwei getrennten Differentialgleichungen.

Die Gleichung (15), welche die Beziehung zwischen der Zeit und dem Orte des Planeten in seiner Bahn gibt, transformiert Gyldén nun noch, indem er den Begriff der »reducierten Zeit« ζ und der »Zeitreduction« T' einführt, und zwar durch folgende Entwickelungen.

Analog der Form:

$$(r) = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta \cos \mathrm{v}} \tag{18}$$

setzt Gyldén, gleichfalls in Analogie mit der elliptischen Bewegung:

$$(r) = a(1-\eta \cos E), \tag{19}$$

wo E der excentrischen Anomalie in der Ellipse entspricht, aber eine andere Bedeutung hat, die wieder nicht geometrisch, wohl aber später analytisch zu definieren ist. Aus (18) und (19) folgt leicht:

$$\left.\begin{array}{ll} & 1-\eta \cos E = \frac{1-\eta^2}{1+\eta \cos \mathrm{v}} \\ \cos E = \frac{\eta + \cos \mathrm{v}}{1+\eta \cos \mathrm{v}} & \sin E = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{1+\eta \cos \mathrm{v}} \sin \mathrm{v}. \end{array}\right\} \tag{20}$$

Differentiiert man die letzte dieser drei Gleichungen, indem man η als constant betrachtet, so folgt:

$$\cos E dE = \left\{\frac{\sqrt{1-\eta^2} \sin \mathrm{v}}{(1+\eta \cos \mathrm{v})^2} \eta \sin \mathrm{v} + \frac{\sqrt{1-\eta^2} \cos \mathrm{v}}{1+\eta \cos \mathrm{v}}\right\} d\mathrm{v}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{(1+\eta \cos \mathrm{v})^2} \{\eta \sin^2 \mathrm{v} + \cos \mathrm{v}(1+\eta \cos \mathrm{v})\} d\mathrm{v}$$

oder:

$$\cos E dE = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{(1+\eta \cos \mathrm{v})^2} (\eta + \cos \mathrm{v}) d\mathrm{v},$$

also:

$$dE = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{(1+\eta \cos \mathrm{v})^2} \frac{(\eta + \cos \mathrm{v})}{\cos \mathrm{v}} d\mathrm{v}$$

oder, mit Hinblick auf die zweite der drei obigen Relationen (20):

$$\frac{dE}{d\mathrm{v}} = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{1+\eta \cos \mathrm{v}}. \tag{21}$$

Multipliciert man diese Gleichung mit der ersten der Gleichungen (20), so folgt:

$$(1-\eta\cos E)\frac{dE}{d\mathrm{v}}=\frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos\mathrm{v})^2}.$$

Nun ist aber aus der elliptischen Bewegung die Entwickelung der wahren Anomalie M bekannt, nämlich:

$$M=E-e\sin E=(v-\Pi)+\Sigma B_n\sin n\,(v-\Pi),$$

wo:

$$\left.\begin{aligned}
B_1&=-2e\\
B_2&=\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{8}e^4+\ldots\\
B_3&=-\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{8}e^5-\ldots\\
B_4&=\frac{5}{32}e^4+\ldots
\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

ist. Diese Relation acceptiert Gyldén der Form nach gleichfalls und setzt:

$$G=E-\eta\sin E=\mathrm{v}+\Sigma B_n\sin n\mathrm{v},\qquad(24)$$

wo:

$$\mathrm{v}=(1-\varsigma)v-\pi$$

und die B genau durch die Reihen (23) definiert sind, wenn man in denselben e durch η ersetzt, indes die der mittleren Anomalie der elliptischen Bewegung entsprechende Größe G, wie sich gleich zeigen wird, anders definiert ist, als M in der Ellipse.

Durch Differentiation von (24) folgt bei constant gehaltenem η:

$$dE-\eta\cos E\,dE=d\mathrm{v}+\Sigma nB_n\cos n\mathrm{v}\,d\mathrm{v},$$

also:

$$(1-\eta\cos E)\frac{dE}{d\mathrm{v}}=1+\Sigma nB_n\cos n\mathrm{v}\qquad(25)$$

Der Vergleich von (22) und (23) ergibt die wichtige Entwickelung:

$$\frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos\mathrm{v})^2}=1+\Sigma nB_n\cos n\mathrm{v},\qquad(26)$$

wo also:

$$\mathrm{v}=(1-\varsigma)v-\pi$$

und als besonders wesentlich hervorzuheben ist, dass Gyldén durch seine Definition von η erreicht, dass die rechte Seite der Gleichung (26) keine langperiodischen Glieder enthält, obwohl auf der linken Seite das langperiodische η^2 steht, indem η und π, wie wir später zeigen werden, ja langperiodische Functionen sind.

Ehe wir nun Gleichung (15) mit Gyldén weiter transformieren, erinnern wir uns, dass in der elliptischen Bewegung die mittlere Anomalie M definiert ist durch:

$$M=n(t-\tau)$$

und die mittlere Länge L durch:

$$L = M + \Pi,$$

wo Π die Länge des Perihels. Bezeichnet man also in bekannter Weise durch:

$$\Pi - n\tau = \varepsilon,$$

die »mittlere Länge der Epoche«, d. h. die mittlere Länge zur Anfangszeit, so wird:

$$L = nt + \varepsilon,$$

also:

$$M = nt + \varepsilon - \Pi$$

und somit in der Ellipse:

$$nt + \varepsilon = M + \Pi.$$

Andererseits aber hat man in der elliptischen Bewegung, wie bereits erwähnt:

$$M = \mathrm{v} + \Sigma B_n \sin n\mathrm{v},$$

wo:

$$\mathrm{v} = v - \Pi$$

ist. Für die Kepler'sche Bewegung hat man daher:

$$nt + \varepsilon - \Pi = \mathrm{v} + \Sigma B_n \sin n\mathrm{v}$$

oder:

$$nt + \varepsilon = v + \Sigma B_n \sin n\mathrm{v} = v - 2\, e \sin(v - \Pi) + \frac{3}{4}\, e^2 \sin 2(v - \Pi) - \frac{1}{3}\, e^3 \sin 3\,(v - \Pi) + \ldots, \qquad (27)$$

wo:

$$\mathrm{v} - M = -\Sigma B_n \sin n\mathrm{v}$$

die »Mittelpunktsgleichung« ist.

Die formelle Analogie der folgenden Gyldén'schen Beziehungen zu diesen in der elliptischen Bewegung auftretenden Formen wird sogleich in die Augen springen.

Zunächst transformiert Gyldén Gleichung (15) in die folgende:

$$n\frac{dt}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{[1+(\rho)]^2}\, \frac{1+S}{\left[1+\dfrac{R}{1+(\rho)}\right]^2},$$

wo offenbar der erste Factor der elliptischen Bewegung entspricht, der zweite für $S = R = 0$ aber gleich 1 wird. In weiterer Transformation setzt Gyldén, da ja, wie sich später zeigen wird, $(\rho) = \eta \cos \mathrm{v}$ ist:

$$n\frac{dt}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos \mathrm{v})^2} + \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos \mathrm{v})^2} \left\{ \frac{1+S}{\left[1+\dfrac{R}{1+\eta\cos \mathrm{v}}\right]^2} - 1 \right\}, \qquad (28)$$

wo also:

$$\mathrm{v} = (1-\varsigma)v - \pi$$

ist.

Man sieht sofort nach dem Vorhergesagten, dass das erste Glied der elliptischen Bewegung streng entsprechen würde, wenn η und π Constanten wären, während sie wirklich langperiodische Functionen sind, was, wie gesagt, später evident werden wird. Indes betrachtet man sie in (28) doch zunächst als Constante, berücksichtigt aber den dadurch entstehenden Fehler in einer gleich zu besprechenden besonderen Weise. Das zweite Glied in (27) hingegen verschwindet für $R = S = 0$. Nun entsprechen ja der Zeit t in der elliptischen Bewegung die Werte r_0 und v_0 des Radius vector und der wahren Länge, in der gestörten Bewegung hingegen die Werte $r_0+\delta r$ und $v_0+\delta v$, wo δr und δv die Störungen sind. Bei Gyldén, wo v als independente Variable an Stelle von t tritt, hingegen entsprechen in der ungestörten Bewegung einem bestimmten Werte von v die Werte r_0 und t_0, in der gestörten Bewegung hingegen die Werte $r_0+\delta r$ und $t_0+\delta t$. Demnach stellt also das erste Glied der rechten Seite von Gleichung (28) eine Beziehung dar zwischen der wahren Länge v und der gestörten Zeit, wenn man so sagen will, oder, wie Gyldén sagt, der »reducierten« Zeit, die er zum Unterschiede von der ungestörten, wirklichen Zeit t mit ζ bezeichnet, so dass also:

$$n\frac{d\zeta}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos \mathrm{v})^2} \tag{29}$$

ist. Das zweite Glied von Gleichung (28):

$$\frac{dT}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos \mathrm{v})^2}\left\{\frac{1+S}{\left[1+\dfrac{R}{1+\eta\cos \mathrm{v}}\right]^2}-1\right\} \tag{30}$$

aber repräsentiert, wenn man so sagen will, gewissermaßen die Störungen der Zeit. So dass nach diesen ganz eigenartigen Definitionen Gyldén's der Zusammenhang zwischen t und v, d. h. zwischen Zeit und Ort des Planeten in der gestörten Bewegung definiert ist durch:

$$n\frac{dt}{dv} = n\frac{d\zeta}{dv} + \frac{dT}{dv}$$

so dass:

$$\frac{dT}{dv} = n\frac{d(t-\zeta)}{dv},$$

also:

$$\frac{1}{n}T = (t-\zeta) = T' \tag{31}$$

ist.

Diese Differenz der wahren und reducierten Zeit, T', bezeichnet Gyldén als die »Zeitreduction«.

Analog nun, wie in der Ellipse, wo:

$$\mathrm{v} = v - \Pi$$

ist, die Zeit t definiert war durch:

$$nt+\varepsilon = M+\Pi$$

definiert Gyldén in der gestörten Bewegung die reducierte Zeit ζ durch:

$$n\zeta+\Lambda = G+\varsigma v+\pi \tag{32}$$

und, in Analogie mit Gleichung (27), welche die mittlere Länge L in der ungestörten Bewegung charakterisiert, setzt Gyldén in der gestörten:

$$nt+\Lambda = v+\Sigma B_n \sin n\mathrm{v}+T. \tag{33}$$

Da aber $\mathrm{v} = (1-\varsigma)v-\pi$ und:

$$B_n \sin n\mathrm{v} = B_n \cos n(\varsigma v+\pi) \sin nv - B_n \sin n(\varsigma v+\pi) \cos nv$$

st, so wird, wenn wir differentiieren und setzen:

$$\sum \frac{dB_n \cos n(\varsigma v+\pi)}{dv} \sin nv - \sum \frac{dB_n \sin(\varsigma v+\pi)}{dv} \cos nv = \frac{dX}{dt}, \tag{33 a}$$

offenbar:

$$n\frac{d\zeta}{dt} = 1+\Sigma n B_n \cos n\mathrm{v}+\frac{dX}{dt}.$$

Wir leiteten aber ab Gleichung (26):

$$\frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos\mathrm{v})^2} = 1+\Sigma n B_n \cos n\mathrm{v}.$$

Es wird demnach auch:

$$n\frac{d\zeta}{dt} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos\mathrm{v})^2}+\frac{dX}{dt} \tag{34}$$

oder:

$$\frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos\mathrm{v})^2} = n\frac{d\zeta}{dt}-\frac{dX}{dt}. \tag{35}$$

In Gleichung (34) wird nun aber durch Addition der Größe $\frac{dX}{dt}$ der Fehler ausgeglichen, der dadurch begangen worden war, dass wir die Größen η und π im ersten Gliede von Gleichung (28) als Constante betrachtet haben. Denn es ist ja:

$$n\zeta+\Lambda = v+\Sigma B_n \sin n\mathrm{v},$$

also differentiiert eben:

$$n\frac{d\zeta}{dt} = 1+\Sigma n B_n \cos n\mathrm{v}+\frac{dX}{dt},$$

wo $\Sigma n B_n \cos n\mathrm{v}$ dadurch entsteht, dass η und π nicht variabel, sondern als constant betrachtet werden, während das Glied $\frac{dX}{dt}$, gegeben durch Gleichung ($33a$), dieser Variabilität Rechnung trägt.

Daher wird die ursprünglich für die reducierte Zeit ζ gegebene Definition (29) und ebenso die Relation, welche an Stelle der Gleichung (28) sive ursprünglich (15) trat:

$$n\frac{dt}{dv} = n\frac{d\zeta}{dv}+\frac{dT}{dv},$$

also:

$$nt = n\zeta+T$$

bestehen bleiben, wenn wir die Größe X von T in Abzug bringen, wie es in Gleichung (36) geschehen. Danach erhält man also, wenn man die Differentialgleichung (30) für T entwickelt, indem man den ersten Factor durch die Entwickelung:

$$\frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos \mathrm{v})^2} = 1+\Sigma n B_n \cos n\mathrm{v}$$

ersetzt und im zweiten nach Potenzen von S und R entwickelt, das folgende Resultat, wobei wir also beim nullten Grad bis zu Gliedern dritter Ordnung inclusive gehen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dT}{dv} = {} & S-2R-2RS+3R^2+3SR^2-4R^3+\ldots\\ & +\{6R-2S-12R^2+6RS-\ldots\}\eta\cos\{(1-\varsigma)v-\pi\}\\ & -3\eta^2 R+\left\{\frac{3}{2}S-6R+\ldots\right\}\eta^2\cos 2\{(1-\varsigma)v-\pi\}\\ & +6R\eta^3\cos\mathrm{v}+\left\{\frac{19}{4}R-S\right\}\eta^3\cos 3\{(1-\varsigma)v-\pi\}\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & -\frac{dX}{dv}\end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Die der Kepler'schen Gleichung für die Ellipse analoge Gleichung in der Gyldén'schen Bahn aber lautet nach den ausführlichen letzten Entwickelungen:

$$G = E-\eta\sin E = nt+\Lambda-(\varsigma v+\pi)-T. \qquad (37)$$

Um sie zu lösen, muss man offenbar obige Differentialgleichung für T integriert haben und zu deren Integration muss bereits diejenige der Gleichung in R (indem $\rho = (\rho)+R$ ist) und ebenso auch diejenige der Differentialgleichung für S geleistet sein, indem S und R gefunden sein müssen, ehe man behufs Integration von (36) die rechte Seite aus S und R bilden kann.

Ist T gefunden, so ist aus (37) auch das Gyldén'sche E, welches der excentrischen Anomalie der Ellipse entspricht, zu finden.

Zum Schlusse ist noch die Relation zwischen dem Gyldén'schen E und v zu finden. Man hat dazu:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

Aus den Gleichungen (20) folgt aber:

$$1+\cos E = 1+\frac{\eta+\cos\mathrm{v}}{1+\eta\cos\mathrm{v}} = \frac{1+\eta\cos\mathrm{v}+\eta+\cos\mathrm{v}}{1+\eta\cos\mathrm{v}} = \frac{(1+\eta)(1+\cos\mathrm{v})}{1+\eta\cos\mathrm{v}},$$

ferner:

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{1+\eta\cos\mathrm{v}}\sin\mathrm{v},$$

also:

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \frac{\sin E}{1+\cos E} = \frac{\sqrt{1-\eta^2}\sin\mathrm{v}}{(1+\eta)(1+\cos\mathrm{v})} = \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}\operatorname{tg}\frac{\mathrm{v}}{2}$$

Also entspricht die Gyldén'sche Relation, welche den Zusammenhang zwischen v und E ergibt:

$$\operatorname{tg}\frac{\mathrm{v}}{2}=\sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \tag{38}$$

wo:

$$\mathrm{v}=(1-\varsigma)v-\pi$$

ist, gleichfalls der Form nach völlig der Kepler'schen:

$$\operatorname{tg}\frac{\mathrm{v}}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2},$$

wo:

$$\mathrm{v}=v-\Pi$$

und e constant ist, während bei Gyldén $\mathrm{v}=(1-\varsigma)v-\pi$ ist und η eine langperiodische Function bedeutet, die wir bei Integration der Bewegung für den Typus $\frac{2}{3}$ näher kennen lernen werden, E aber eine andere Bedeutung zukommt, wie der excentrischen Anomalie in der Ellipse.

Zum Schlusse dieses Capitels stellen wir die eigenartigen Gyldén'schen Differentialgleichungen der planetarischen Bewegung, deren Integration uns in unserem Beispiele beschäftigen wird, in extenso zusammen:

Die Gyldén'schen Grundgleichungen für die planetarische Bewegung:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv}=(1+S)^2\underset{\sim}{Q}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\\
&\frac{d^2\rho}{dv^2}+\rho=-\left\{\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}+(1+S)^2\underset{\sim}{Q}\right\}\frac{d\rho}{dv}+2S+S^2-(1+S)^2P\\
&\qquad-\left\{\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d^2\eta^2}{dv^2}+\frac{2}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2+\frac{(1+S)^2}{1-\eta^2}\underset{\sim}{Q}\frac{d\eta^2}{dv}\right\}(1+\rho)\\
&\frac{dT}{dv}=S-2R-2RS+3R^2+3SR^2-4R^3+\ldots\\
&\quad+\{6R-2S-12R^2+6RS-\ldots\}\eta\cos\{(1-\varsigma)v-\pi\}\\
&\quad-3\eta^2R+\left\{\frac{3}{2}S-6R+\ldots\right\}\eta^2\cos 2\{(1-\varsigma)v-\pi\}\\
&\quad+6R\eta^3\cos\mathrm{v}+\left\{\frac{19}{4}R-S\right\}\eta^3\cos 3\{(1-\varsigma)v-\pi\}\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad-\frac{dX}{dv},
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

wobei:

$$\left.P=r^2\frac{\partial\Omega}{\partial r}\qquad\text{und}\qquad\underset{\sim}{Q}=\frac{r^2}{a(1-\eta^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right\} \tag{40}$$

ist.

Durch dieses System ersetzt Gyldén die Hansen'schen Gleichungen (7), indem er die alte Anschauung einer Kepler'schen Ellipse als erster Näherung für die planetarische Bewegung, die der Variation der Constanten bei Laplace und bei Hansen zugrunde liegt, aufgibt.

Zweites Capitel.

Die Gyldén'sche Darstellung der Störungsfunction und ihrer Derivierten in der Brendel'schen Form und die numerische Entwickelung für Hilda.

A. Der allgemeine Gang der analytischen Entwickelung.

a) Erster Weg. Successive Berechnung der β, γ, Ω, P und Q, A und B.

Die Entwickelung der Störungsfunction, welche, vollständig durchgeführt, bei Gyldén einen beträchtlichen Theil seiner Schriften beansprucht, wollen wir hier wenigstens in ihren Hauptzügen insoweit andeuten, dass die folgenden für Hilda durchzuführenden Rechnungen nicht bloß den Charakter eines zu befolgenden Rechenschematismus, sondern das Gepräge eines verständlichen Zusammenhanges erhalten.

Die eigentliche Schwierigkeit der Integration der für S und ρ gewonnenen Differentialgleichungen liegt offenbar in den Größen P und Q, insofern als diese die partiellen Derivierten der Störungsfunction Ω sind, diese letztere aber den irrationalen Theil:

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos H}}$$

enthält, der einer directen Integration hinderlich ist. Da man durch Rationalmachen nichts gewönne, weil sich dadurch Gleichungen vom achten Grade ergeben würden, so besteht der einzig mögliche Weg in einer Reihenentwickelung, in welcher jedes einzelne Glied integrabel ist. Der Charakter der für Ω und damit zugleich der für P und Q anzusetzenden Reihenentwickelung ist natürlich durch die Differentialgleichungen in keiner Weise bedingt, vielmehr an sich willkürlich. Jedoch ist klar, dass die gewählte Form der Reihe auch a priori die Form bedingt, in der man die Integrale S und ρ erhält. Laplace entwickelt Ω nach Potenzen von r und r', dann aber entwickelt er r und r' nach Potenzen von e und e' durch Kugelfunctionen, und zwar entwickelt Laplace nach Vielfachen der mittleren Anomalie (also der Zeit). Gyldén hingegen entwickelt Ω in eine nach H und nach Potenzen von r und r' fortschreitende trigonometrische Reihe, die er in eine Entwickelung nach Potenzen von ρ, ρ', η und η' überführt, wobei er im Gegensatz zu Laplace nach Vielfachen der wahren Länge entwickelt.

Da Δ wieder denselben Wert annimmt, wenn H sich um 2π ändert und dabei r und r' ungeändert bleiben, so ist Δ — wenn man von r und r' absieht — eine periodische Function von H und lässt sich darum in eine Fourier'sche Reihe nach H entwickeln, die unbedingt convergiert, eine gerade Function ist und nur Cosinusglieder enthält, vorausgesetzt, dass a nicht unendlich und Δ nicht Null wird. Jedenfalls ist also:

$$\frac{a}{\Delta}=R_0+2R_1\cos H+2R_2\cos 2H+\ldots, \tag{1}$$

wo ein beliebiger Coefficient repräsentiert ist durch den bekannten Ausdruck:

$$R_n=\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos n\psi\, d\psi}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\psi}} \tag{2}$$

oder:

$$R_n = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{r'} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\psi\, d\psi}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{r'}\right)\cos\psi}}.$$

Diesen Ausdruck bringt Gyldén auf die einfachen Formen vollständiger elliptischer Integrale, indem er unter Beibehaltung der schon von Laplace eingeführten Bezeichnung für das Verhältnis der mittleren Entfernungen des gestörten und des störenden Körpers:

$$\frac{a}{a'} = \alpha, \tag{3}$$

die Variable χ einführt durch:

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 - \chi, \tag{4}$$

so dass also:

$$\left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \alpha^2 (1-\chi) = k^2 \tag{5}$$

ist. So folgt zunächst:

$$R_n = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{r'} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\psi\, d\psi}{\sqrt{1+k^2-2k\cos\psi}}.$$

Mit Hinblick auf die von Jacobi in den fundamentis novis gegebene Form:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\psi\, d\psi}{(1+k^2-2k\cos\psi)^{\frac{1}{2}}} = k^n \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n}\psi\, d\psi}{(1+k^2-2k\cos\psi)^{n+\frac{1}{2}}},$$

die man durch Einführung der Variabeln φ an Stelle von ψ, indem man:

$$\cos\psi = k\sin^2\varphi + \cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

setzt, unschwer überführt in die folgende:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\psi\, d\psi}{(1+k^2-2k\cos\psi)^{\frac{1}{2}}} = k^n \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 2k^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

nimmt der Coefficient unserer Fourier'schen Entwickelung die Form an:

$$R_n = \frac{2}{\pi} \frac{a}{r'} k^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

oder, da k durch:

$$k = \alpha\sqrt{1-\chi}$$

eingeführt ist, auch:

$$R_n = \frac{2}{\pi} \frac{a'}{r'} \alpha k^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\chi)\sin^2\varphi}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{a'}{r'} \alpha^{n+1} (1-\chi)^{\frac{n}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi+\alpha^2\chi\sin^2\varphi}}. \tag{6}$$

Jetzt kann man im Nenner:

$$\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi+\alpha^2\chi\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}\sqrt{1+\frac{\alpha^2\chi\sin^2\varphi}{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}$$

den zweiten Wurzelfactor nach Potenzen von $\frac{\alpha^2\chi\sin^2\varphi}{1-\alpha^2\sin^2\varphi}$ entwickeln.

Nachdem wir also ursprünglich die Störungsfunction Ω, oder vielmehr ihren ersten Theil $\frac{a}{\Delta}$ in eine unendliche Reihe:

$$\frac{a}{\Delta} = R_0 + 2R_1 \cos H + 2R_2 \cos 2H + \ldots$$

entwickelt haben, entwickelt man nun nach Gyldén jeden einzelnen Coefficienten dieser Reihe wiederum in eine unendliche Reihe, nämlich:

$$R_n = \frac{2}{\pi} \frac{a'}{r'} \alpha^{n+1} (1-\chi)^{\frac{n}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2\varphi}} \left\{ 1 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1.3}{2.4}\lambda^2 - \ldots \right\} d\varphi, \tag{7}$$

indem zur Abkürzung:

$$\frac{\alpha^2 \chi \sin^2\varphi}{1-\alpha^2 \sin^2\varphi} = \lambda$$

gesetzt ist. Diese Entwickelung convergiert allgemein, wenn:

$$\frac{\alpha^2 \chi \sin^2\varphi}{1-\alpha^2 \sin^2\varphi} < 1$$

ist.

Damit auch im ungünstigsten Falle: $\sin\varphi = 1$ Convergenz stattfindet, ist nothwendig, dass:

$$\left| \frac{\alpha^2 \chi}{1-\alpha^2} \right| < 1,$$

ist. Es ist aber:

$$\chi = 1 - \alpha^2 \left(\frac{r}{r'} \right)^2$$

und:

$$\frac{r}{r'} < 1, \text{ ferner } \alpha^2 < 1$$

also:

$$\chi < 1 \text{ und } \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} < 1.$$

Wenn nun $\lambda < 1$ ist, was wir nach den Beobachtungen für endliche Zeiten annehmen, so convergiert die Reihe $1 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1.3}{2.4}\lambda^2 - \ldots$

Die Entwickelung $(1-\chi)^{\frac{n}{2}} = 1 - \frac{n}{2}\chi + \ldots$ aber convergiert, wenn χ positiv ist für jedes n, so groß wir es auch wählen, also bis zur Grenze $n = \infty$; die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass Convergenz stattfindet, ist also, dass:

$$\left| \alpha^2 - \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \right| < 1$$

ist. Für den Fall nun, dass erstens $\frac{r}{r'} > \alpha$, ist diese Bedingung sicher erfüllt, da die eine Bahn ganz innerhalb der anderen liegt. Ist aber zweitens $\frac{r}{r'} < \alpha$, dann ist die obige Bedingung sicher erfüllt, wenn sie für den kleinsten Wert von $\frac{r}{r'}$ erfüllt ist und dieser ist:

$$\frac{\alpha(1-e)}{a'(1+e')} = \frac{\alpha(1-e)}{1+e'}.$$

Für diesen Fall also geht obige Bedingung über in:

$$\alpha^2 \left\{1-\left(\frac{1-e}{1+e'}\right)^2\right\} < 1-\alpha^2$$

oder:

$$\left(\frac{1-e}{1+e'}\right)^2 > \frac{2\alpha^2-1}{\alpha^2}$$

Ist $\alpha^2 < \frac{1}{2}$, so ist diese Bedingung sicher erfüllt. Für gewisse Werte von α ist erforderlich, dass:

$$1-e > \sqrt{\frac{2\alpha^2-1}{\alpha^2}}\,(1+e')$$

ist. Betrachten wir als extremsten Fall den äußersten kleinen Planeten Thule, für den $\alpha = 0.82$ ist und setzen für die Jupiterexcentricität nach Leverrier $e' = \sin\varphi$, wo $\varphi = 2°\ 45'\ 56''.5$, so findet man, da $\log e' = 8.683513$ und $\log \alpha = 9.913814$ ist:

$$\log\left(\frac{2\alpha^2-1}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(1+e') = 9.87544,$$

also:

$$1-e > 0.7506, \text{ d. h. } e < 1-0.7506, \text{ mithin } e < 0.2494.$$

Factisch ist aber für Thule $e = 0.0823$, also die Convergenzbedingung wirklich erfüllt. Für Hilda, wo $\alpha = 0.760$ ist, erst recht. Die Bedingung:

$$\left|\frac{\alpha^2 - \left(\frac{r}{r'}\right)^2}{1-\alpha^2}\right| < 1$$

ist also auch für den kleinsten Wert von $\frac{r}{r'}$ und mithin für alle kleinen Planeten erfüllt, vorausgesetzt, dass $\frac{r}{r'} < 1$ bleibt. Unsere Reihen convergieren also wenigstens so lange, als diese Voraussetzung erfüllt bleibt.

Führt man in der unendlichen Reihe (7) nun nach Gyldén noch die Bezeichung:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{s}{2}}} = \beta_n^{(s)} \tag{8}$$

ein, welches elliptische Integral für Hilda später in 65 Werten behufs vollständiger Entwickelung der allgemeinen Grundlagen der Störungsfunction zu berechnen ist, so geht die Entwickelung (7) zunächst über in:

$$R_n = \frac{a'}{r'}\,\alpha^{n+1}(1-\chi)^{\frac{n}{2}}\left\{\beta_n^{(1)} - \frac{1}{2}\alpha^2\chi\cdot\beta_{n+1}^{(3)} + \frac{1.3}{2.4}\alpha^4\chi^2\beta_{n+2}^{(5)} - \cdots\right\} \tag{9}$$

eine Entwickelung, die Gyldén definitiv überführt in die folgende:

$$R_n = \frac{a'}{r'}(1-\chi)^{\frac{n}{2}}\left\{\gamma_0^{1,n} - \gamma_1^{1,n}\chi + \gamma_2^{1,n}\chi^2 - \gamma_3^{1,n}\chi^3 + \gamma_4^{1,n}\chi^4 - \cdots\right\}, \tag{10}$$

indem er:

$$\alpha^{n+1}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}=\gamma_0^{1.n}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\alpha^{n+3}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=\gamma_1^{1.n}$$

. . . .

$$\frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{2.4.6\ldots 2s}\alpha^{n+2s+1}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n+s}\varphi\, d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{2s+1}{2}}}=\gamma_s^{1.n}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_0^{1.n}&=\alpha^{n+1}\beta_n^{(1)}\\ \gamma_1^{1.n}&=\frac{1}{2}\alpha^{n+3}\beta_{n+1}^{(3)}\\ \gamma_2^{1.n}&=\frac{1.3}{2.4}\alpha^{n+5}\beta_{n+2}^{(5)}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

setzt. Dabei hängen die γ lediglich von dem Verhältnisse der mittleren Entfernungen $\alpha=\frac{a}{a'}$ ab, da dies bei den β der Fall ist und sie sind für Hilda später gleichfalls numerisch zu berechnen.

Bisher ist nun aber nicht die ganze Störungsfunction:

$$a\Omega=m'\left(\frac{a}{\Delta}-\frac{a\,r}{r'^2}\cos H\right),\qquad(12)$$

sondern bloß deren erster Theil $\frac{a}{\Delta}$ entwickelt worden. Um das ganze Ω nach Potenzen von χ zu entwickeln, multiplicieren wir das zweite Glied in (12) mit $\frac{a'}{a'}$ und bedenken, dass nach dem Früheren:

$$\frac{r}{r'}=\alpha\sqrt{1-\chi},$$

also:

$$\frac{a'}{r'}\,\frac{r}{r'}\,\frac{a}{a'}=\frac{a'}{r'}\,\alpha^2\sqrt{1-\chi}$$

ist. Dann folgt:

$$a\Omega=m'\left\{R_0+2\left[R_1-\frac{a'}{r'}(1-\chi)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha^2}{2}\right]\cos H+2R_2\cos 2H+\ldots\right\}.$$

Und die Entwickelung der Störungsfunction wird ganz allgemein:

$$a\Omega=\Omega_0+2\Omega_1\cos H+2\Omega_2\cos 2H+\ldots+2\Omega_n\cos nH=2\Sigma\Omega_n\cos nH,\qquad(13)$$

wo der Factor 2 nur für $n=0$ fortzulassen und:

$$\Omega_n=m'\frac{a'}{r'}(1-\chi)^{\frac{n}{2}}\{\gamma_0^{1.n}-\gamma_1^{1.n}\chi+\gamma_2^{1.n}\chi^2-\ldots\}\qquad(14)$$

ist, und wobei offenbar:

$$\bar{\gamma}_0^{1.n} = \gamma_0^{1.n} \tag{15}$$

ist für alle Werte von n mit einziger Ausnahme von $n = 1$, wo

$$\bar{\gamma}_0^{1.1} = \gamma_0^{1.1} - \frac{1}{2}\alpha^2 \tag{16}$$

zu setzen ist. In dieser Weise berücksichtigt man unter Beibehaltung der allgemeinen Entwickelungsform (10) das zweite Glied des Ausdruckes (12) für Ω, indem man zu den Bedingungen (11) noch die Bedingung (16) hinzufügt.

An Stelle dieser Entwickelung nach χ führt Gyldén schließlich eine solche nach ρ, ρ', η^2, η'^2 ein. Da nach dem früheren:

$$r = \frac{a\,(1-\eta^2)}{1+\rho}$$

und analog für den störenden Körper:

$$r' = \frac{a'(1-\eta'^2)}{1+\rho'}$$

ist, so folgt:

$$\chi = 1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 = 1-\left(\frac{1-\eta^2}{1+\rho}\right)^2\left(\frac{1+\rho'}{1-\eta'^2}\right)^2.$$

Indem:

$$\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 = 1-2\rho+3\rho^2-\ldots,$$

ergibt sich, wenn wir bis zum dritten Grade incl. gehen:

$$\begin{aligned}
\chi &= 2\rho-2\rho' \\
&\quad -3\rho^2+4\rho\rho'-\rho'^2+2\eta^2-2\eta'^2 \\
&\quad +4\rho^3-6\rho^2\rho'+2\rho\rho'^2-4\rho\eta^2+4\rho'\eta^2+4\rho\eta'^2-4\rho'\eta'^2 \\
\chi^2 &= 4\rho^2-8\rho\rho'+4\rho'^2 \\
&\quad -12\rho^3+28\rho^2\rho'-20\rho\rho'^2+4\rho'^3+8\rho\eta^2+8\rho\eta'^2-8\rho'\eta^2-8\rho'\eta'^2 \\
\chi^3 &= 8\rho^3-24\rho^2\rho'+24\rho\rho'^2-8\rho'^3
\end{aligned}$$

Entwickelungen, die allgemein convergieren, solange ρ und ρ' kleine Größen sind, was für endliche Zeiträume nach den Beobachtungen angenommen werden kann. Ist eine Integrationsmethode imstande, S, (ρ), R und T durch unbeschränkt convergente Entwickelungen darzustellen, welche also für unbegrenzte Zeiträume giltige Näherungen ergeben würden, so wäre die Lösung eine »absolute« im Gyldén'schen Sinne.

Schließlich wird:

$$\begin{aligned}
\frac{a'}{r'}(1-\chi)^{\frac{n}{2}} &= \frac{(1+\rho')^{n+1}}{(1+\rho)^n}\,\frac{(1-\eta^2)^n}{(1-\eta'^2)^{n+1}} \\
&= 1-n\rho+(n+1)\rho' \\
&\quad +\frac{n(n+1)}{2}\rho^2-n(n+1)\rho\rho'+\frac{n(n+1)}{2}\rho'^2-n\eta^2+(n+1)\eta'^2 \\
&\quad -\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\rho^3+\frac{n(n+1)^2}{2}\rho^2\rho'-\frac{n^2(n+1)}{2}\rho\rho'^2+\frac{(n-1)n(n+1)}{6}\rho'^3 \\
&\quad +n^2\rho\eta^2-n(n+1)\rho'\eta^2-n(n+1)\rho\eta'^2+n(n+1)^2\rho'\eta'^2 \\
&\quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (14) folgt die ursprünglich von Gyldén für die Entwickelung der Störungsfunction gegebene Form, fortschreitend nach Potenzen von $\rho, \rho', \eta^2, \eta'^2$, nämlich allgemein:

$$a\Omega = 2m'\Sigma^5 \Omega(n.s.s')_{\nu.\nu'} \rho^s \rho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos nH, \tag{17}$$

wo der Factor 2 wieder für $n = 0$ fortzulassen und:

$$\Omega_n = m'\Sigma^4 \Omega(n.s.s')_{\nu.\nu'} \rho^s \rho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \tag{18}$$

ist. Die vierfache, bezüglich fünffache Summe ist durch den Index angedeutet. Diese Coëfficienten Ω_n, die nur Functionen des numerisch zunächst genähert bekannten Verhältnisses α sind, hat nun Gyldén vollständig als Functionen der γ entwickelt, für die großen Planeten bis zu den siebenten Potenzen. Diese Relationen $\Omega = f(\gamma)$, die wir für die numerische Rechnung bei Hilda brauchen, sind:

I. Für den 0. Grad inclusive bis zur 3. Ordnung:

$$\Omega_{n.0.0} = \bar{\gamma}_0^{1.n}$$

$$\Omega_{n.1.0} = -n\bar{\gamma}_0^{1.n} - 2\gamma_1^{1.n}$$

$$\Omega_{n.2.0} = \frac{n(n+1)}{2}\bar{\gamma}_0^{1.n} + (2n+3)\gamma_1^{1.n} + 4\gamma_2^{1.n}$$

$$\Omega_{n.3.0} = -\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\bar{\gamma}_0^{1.n} - (n+2)^2\gamma_1^{1.n} - 4(n+3)\gamma_2^{1.n} - 8\gamma_3^{1.n}.$$

II. Für den 1. Grad inclusive bis zur 2. Ordnung:

$$\Omega_{n+1.1.1} = -(n+1)(n+2)\bar{\gamma}_0^{1.n+1} - 2(2n+5)\gamma_1^{1.n+1} - 8\gamma_2^{1.n+1}$$

$$\Omega_{n-1.1.1} = -n(n-1)\bar{\gamma}_0^{1.n-1} - 2(2n+1)\gamma_1^{1.n-1} - 8\gamma_2^{1.n-1}$$

$$\Omega_{n+1.1.0} = -(n+1)\bar{\gamma}_0^{1.n+1} - 2\gamma_1^{1.n+1}$$

$$\Omega_{n-1.1.0} = -(n-1)\bar{\gamma}_0^{1.n-1} - 2\gamma_1^{1.n-1}$$

$$\Omega_{0.2.0} = 3\gamma_1^{1.0} + 4\gamma_2^{1.0}$$

$$\Omega_{1.1.1} = -2\bar{\gamma}_0^{1.1} - 10\gamma_1^{1.1} - 8\gamma_2^{1.1}$$

$$\Omega_{1.1.0} = -\bar{\gamma}_0^{1.1} - 2\gamma_1^{1.1}.$$

$$\Omega_{n+1.2.1} = \frac{(n+1)(n+2)^2}{2}\bar{\gamma}_0^{1.n+1} + (3n^2+16n+22)\gamma_1^{1.n+1} + \\ + 4(3n+11)\gamma_2^{1.n+1} + 24\gamma_3^{1.n+1}$$

$$\Omega_{n-1.2.1} = \frac{n^2(n-1)}{2}\bar{\gamma}_0^{1.n-1} + (3n^2+4n+2)\gamma_1^{1.n-1} + 4(3n+5)\gamma_2^{1.n-1} + 24\gamma_3^{1.n-1}$$

$$\Omega_{n+1.2.0} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\bar{\gamma}_0^{1.n+1} + (2n+5)\gamma_1^{1.n+1} + 4\gamma_2^{1.n+1} \tag{19}$$

$$\Omega_{n-1.2.0} = \frac{n(n-1)}{2}\bar{\gamma}_0^{1.n-1} + (2n+1)\gamma_1^{1.n-1} + 4\gamma_2^{1.n-1}$$

$$\Omega_{0.3.0} = -4\gamma_1^{1.0} - 12\gamma_2^{1.0} - 8\gamma_3^{1.0}$$

$$\Omega_{1.2.1} = 2\bar{\gamma}_0^{1.1} + 22\gamma_1^{1.1} + 44\gamma_2^{1.1} + 24\gamma_3^{1.1}$$

$$\Omega_{1.2.0} = \bar{\gamma}_0^{1.1} + 5\gamma_1^{1.1} + 4\gamma_2^{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Omega_{n+1.0.1} &= (n+2)\,\bar{\gamma}_0^{1.n+1} + 2\gamma_1^{1.n+1} \\
\Omega_{n-1.0.1} &= n\,\bar{\gamma}_0^{1.n-1} + 2\gamma_1^{1.n-1} \\
\Omega_{n+1.0.0} &= \bar{\gamma}_0^{1.n+1} \\
\Omega_{n-1.0.0} &= \bar{\gamma}_0^{1.n-1} \\
\Omega_{1.0.1} &= 2\bar{\gamma}_0^{1.1} + 2\gamma_1^{1.1} \\
\Omega_{1.0.0} &= \bar{\gamma}_0^{1.1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Die zur Berechnung der Störungen der folgenden Grade erforderlichen Ω_n werden später da, wo wir dieselben bei der numerischen Rechnung brauchen, angegeben werden.

Bei der Integration unserer Differentialgleichungen für S und ρ brauchen wir nun aber nicht die Entwickelung der Störungsfunction selbst, sondern vielmehr diejenige ihrer Derivierten:

$$P = r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \qquad\qquad Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)} \frac{\partial \Omega}{\partial v}.$$

Diese entwickelt Gyldén gleichfalls als Functionen der Ω und damit als solche der γ, so dass auch die P und Q nur wieder von dem numerisch zunächst genähert bekannten Verhältnis der mittleren Entfernungen α abhängig erscheinen.

Da es hier, wie gesagt, bloß darauf ankommen kann, den Gang der ganzen Entwickelung insoweit anzudeuten, dass die späteren Rechnungen in ihrem Zusammenhange verständlich sind, begnügen wir uns hinsichtlich dieser Darstellung mit folgenden kurzen Bemerkungen.

Weil:

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\rho}$$

ist, so wird:

$$Q = \frac{1-\eta^2}{(1+\rho)^2} \frac{\partial(a\Omega)}{\partial v}$$

oder, wenn man den ersten Factor entwickelt und Ω nach v differentiiert:

$$Q = -(1-2\rho+3\rho^2-\eta^2+\ldots)\, 2\Sigma n\, \Omega(n.s.s')_{\nu.\nu'} \rho^s \rho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \sin nH \frac{\partial H}{\partial \gamma'}.$$

Denkt man ρ und η aus der Klammer in ρ und η unter dem Summenzeichen multipliciert, so folgt allgemein:

$$Q = -2\Sigma n\, Q(n.s.s')_{\nu.\nu'} \rho^s \rho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \sin H \frac{\partial H}{\partial v}, \qquad (20)$$

wo die Q unter dem Summenzeichen gegebene Functionen der Ω und damit also der γ sind, somit auch nur von α allein abhängen, nämlich:

$$\frac{1}{m'} Q(n.s.s')_{\nu.\nu'} = \Omega(n.s.s')_{\nu.\nu'} - 2\Omega(n.s-1.s')_{\nu.\nu'} + 3\Omega(n.s-2.s')_{\nu.\nu'} - \ldots \Big\}. \qquad (21)$$

Ganz analog wird, da:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{a(1-\eta^2)}{r^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \rho}$$

ist,

$$P = -(1-\eta^2)\frac{\partial a\Omega}{\partial\rho}$$

oder, in gleichem Sinne entwickelt wie bei Q:

$$a\Omega = \Sigma\Omega(n.s.s')_{\nu.\nu'}\rho^s\rho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos nH,$$

also, da $\frac{\partial\rho^s}{\partial\rho} = s\rho^{s-1}$ ist:

$$\frac{\partial a\Omega}{\partial\rho} = \Sigma s\Omega(n.s.s')_{\nu.\nu'}\rho^{s-1}\rho'^{s'}\eta^{2n}\eta'^{2\nu'}\cos nH$$

und somit:

$$P = -(1-\eta^2)2\Sigma s\Omega(n.s.s')_{\nu.\nu'}\rho^{s-1}\rho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos nH,$$

oder, wenn man $s+1$ für s schreibt:

$$\frac{\partial a\Omega}{\partial\rho} = \Sigma(s+1)\Omega(n.s+1.s')_{\nu.\nu'}\rho^s\rho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos nH$$

und:

$$P = 2\Sigma P(n.s.s')_{\nu.\nu'}\rho^s\rho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos nH, \tag{22}$$

wo für $n = 0$ wieder die 2 fortzulassen ist und die P lediglich Functionen der Ω und damit der γ also von α allein sind, nämlich allgemein:

$$\frac{1}{m'}P(n.s.s')_{\nu\nu'} = -(s+1)\Omega(n.s+1.s')_{\nu.\nu'} + (s+1)\Omega(n.s+1.s')_{\nu-1.\nu'} - \ldots \tag{23}$$

Führt man die hiermit allgemein angedeutete Transformation wirklich durch, so erhält man nach Gyldén als Resultat die folgenden Relationen für die Coefficienten der Entwickelungen (20) und (22)

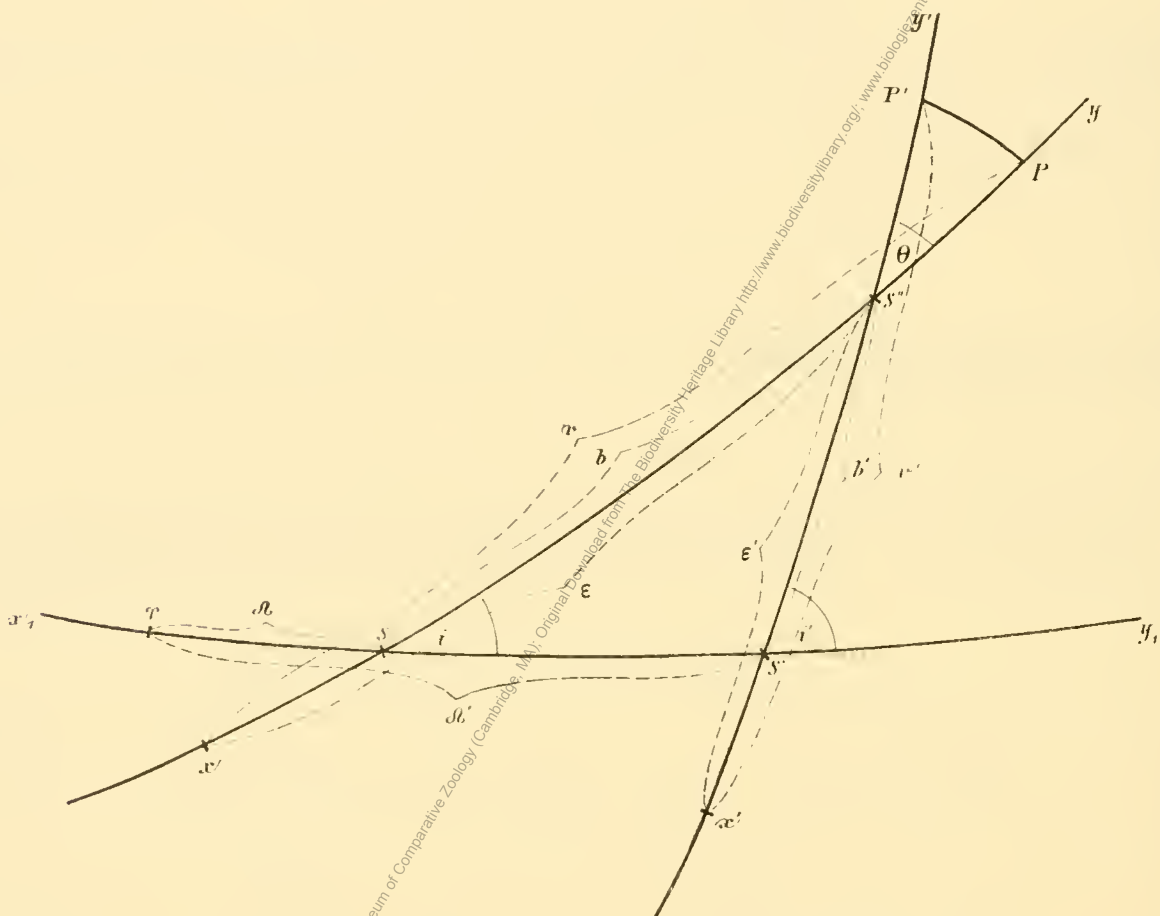
I. Des 0. Grades inclusive bis zur 3. Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} P_{n.0.0} &= -\Omega_{n.1.0} \\ P_{n.1.0} &= -2\Omega_{n.2.0} \\ P_{n.2.0} &= -3\Omega_{n.3.0} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} Q_{n.0.0} &= \Omega_{n.0.0} \\ Q_{n.1.0} &= \Omega_{n.1.0} - 2\Omega_{n.0.0} \\ Q_{n.2.0} &= \Omega_{n.2.0} - 2\Omega_{n.1.0} + 3\Omega_{n.0.0}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

II. Des I. Grades inclusive bis zur 2. Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} P_{n+1.0.1} &= -\Omega_{n+1.1.1} & P_{n+1.1.1} &= -2\Omega_{n+1.2.1} \\ P_{n-1.0.1} &= -\Omega_{n-1.1.1} & P_{n-1.1.1} &= -2\Omega_{n-1.2.1} \\ P_{n+1.0.0} &= -\Omega_{n+1.1.0} & P_{n+1.1.0} &= -2\Omega_{n+1.2.0} \\ P_{n-1.0.0} &= -\Omega_{n-1.1.0} & P_{n-1.1.0} &= -2\Omega_{n-1.2.0} \\ P_{0.1.0} &= -2\Omega_{0.2.0} & P_{0.2.0} &= -3\Omega_{0.3.0} \\ P_{1.0.1} &= -\Omega_{1.1.1} & P_{1.1.1} &= -2\Omega_{1.2.1} \\ P_{1.0.0} &= -\Omega_{1.1.0} & P_{1.1.0} &= -2\Omega_{1.2.0} \\ Q_{n+1.0.1} &= \Omega_{n+1.0.1} & Q_{n+1.1.1} &= \Omega_{n+1.1.1} - 2\Omega_{n+1.0.1} \\ Q_{n-1.0.1} &= \Omega_{n-1.0.1} & Q_{n-1.1.1} &= \Omega_{n-1.1.1} - 2\Omega_{n-1.0.1} \\ Q_{n+1.0.0} &= \Omega_{n+1.0.0} & Q_{n+1.1.0} &= \Omega_{n+1.1.0} - 2\Omega_{n+1.0.0} \\ Q_{n-1.0.0} &= \Omega_{n-1.0.0} & Q_{n-1.1.0} &= \Omega_{n-1.1.0} - 2\Omega_{n-1.0.0} \\ Q_{1.0.1} &= \Omega_{1.0.1} & Q_{1.1.1} &= \Omega_{1.1.1} - 2\Omega_{1.0.1} \\ Q_{1.0.0} &= \Omega_{1.0.0} & Q_{1.1.0} &= \Omega_{1.1.0} - 2\Omega_{1.0.0}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

In den Entwickelungen für Q und P (20) und (22) ist nur noch der heliocentrische Winkel H durch die wahren Längen v und v' des gestörten und des störenden Planeten auszudrücken. Dazu denken wir uns die feste $x_1 y_1$-Ebene, die Ekliptik, und die instantane Bahnebene xy des gestörten Planeten, der sich zu einer beliebigen Zeit in P befinde, so dass die Neigung i und der Knoten ☊ des Planeten zugleich die Neigung und den Knoten der in die momentane Bahnebene fallenden osculierenden Ellipse repräsentieren. Ferner denken wir uns die momentane Bahnebene $x'y'$ des störenden Planeten, welche gegen die erstere um den Winkel Θ geneigt sei und die Neigung i' gegen die $x_1 y_1$-Ebene habe.



Die Schnittpunkte beider Bahnebenen mit der $x_1 y_1$-Ebene seien S und S', ihr gemeinsamer Schnittpunkt S''; P und P' die momentanen Orte des kleinen Planeten und Jupiters in ihren Bahnen. Dann folgt aus $\Delta PS''P'$ nach dem Cosinussatze der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos H = \cos S''P \cos S''P' + \sin S''P \sin S''P' \cos \theta$$
$$= \cos (S''P - S''P') - 2 \sin S''P \sin S''P' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

oder, wenn man die Längen ε und ε' des Schnittpunktes S'' in der augenblicklichen Bahnebene einführt, also

$$PS'' = v - \varepsilon$$
$$P'S'' = v' - \varepsilon'$$

setzt, auch:

$$\cos H = \cos (v - v' - \varepsilon + \varepsilon') - 2 \sin (v - \varepsilon) \sin (v' - \varepsilon') \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Führt man jetzt noch die auf die Bahnebene des gestörten Planeten reducierte Länge v_1' des störenden Planeten:

$$v_1' = v' + \varepsilon - \varepsilon'$$

ein, so wird:

$$\cos H = \cos(v - v_1') - 2\sin(v - \varepsilon)\sin(v' - \varepsilon')\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{25}$$

Da für die kleinen Planeten höchstens $\Theta = 90$, so ist im allgemeinen $\sin\frac{\Theta}{2} < \sqrt{\frac{1}{2}}$, also $\sin^2\frac{\Theta}{2} < \frac{1}{2}$. Deshalb kann man, da Θ in der Regel eine kleiner Winkel ist, der weit unter 90° liegt, z. B. 10° beträgt, zunächst $\sin^2\frac{\Theta}{2}$ vernachlässigen, was also besagt, dass man Glieder vom Quadrat der Neigung fortlässt, denen später in der zweiten Abtheilung indes nachträglich noch Rechnung getragen werden wird. Vorläufig indes machen wir diese Vernachlässigung, die z. B. auch in Herrn Masals großer Arbeit[1] zugrunde gelegt wird, wo Herr Masal von $H = v - v'$ direct ausgeht. Aus:

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = 0$$

folgt nun aber:

$$H = v - v_1'$$

oder:

$$H = v - v',$$

also:

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 1.$$

Wenn man nämlich das zweite Glied rechts in Gleichung (25) und somit zweite Potenzen der Neigung nicht in Betracht zieht, so ist ja nach der Figur:

$$\varepsilon = \Omega + b$$
$$\varepsilon' = \Omega' + b',$$

also:

$$\varepsilon' - \varepsilon = b' - b - (\Omega - \Omega').$$

Nun ist aber:

$$\cos(\Omega - \Omega') = \cos b \cos b' + \sin b \sin b' \cos\theta$$
$$\cos(b' - b) = \cos b \cos b' + \sin b \sin b'$$

also:

$$\cos(b' - b) - \cos(\Omega - \Omega') = \sin b \sin b' (1 - \cos\theta),$$

oder auch:

$$-2\sin\frac{b' - b + \Omega - \Omega'}{2}\sin\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2} = 2\sin b \sin b' \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Mit $\sin^2\frac{\Theta}{2}$ verschwindet offenbar die linke Seite letzterer Gleichung. Indes bleibt rein numerisch $\Omega - \Omega'$ für Jupiter und einen kleinen Planeten stets endlich, oder in anderer Motivierung, da:

$$\frac{\sin i'}{\sin b} = \frac{\sin\theta}{\sin(\Omega - \Omega')},$$

[1] Hans Masal, Formeln und Tafeln zur Berechnung der absoluten Störungen der Planeten. Kongl. svenska Vetenskaps-Academiens Handlingar. Bandet 23, No. 7.

also:

$$\sin(\Omega-\Omega') = \frac{\sin b}{\sin i} \sin \theta$$

ist, so wird, weil i und Θ von derselben Größenordnung klein werden, doch $\Omega-\Omega'$ auch bei abnehmendem Θ nicht klein. Daher wird also $\sin\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{2}$ mit $\sin^2\frac{\Theta}{2}$ zugleich verschwinden und folglich bei Vernachlässigung der Glieder vom Quadrat der Neigung:

$$\varepsilon' = \varepsilon,$$

also:

$$H = v - v'$$

gesetzt werden können.

Unter dieser Annahme werden die Entwickelungen für P und Q:

$$P = 2\Sigma P(n.s.s')_{\nu.\nu'}\rho^s\rho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'} \cos nH\ldots \tag{26}$$

$$Q = -2\Sigma n\, Q(n.s.s')_{\nu.\nu'}\rho^s\rho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'} \sin nH\ldots, \tag{27}$$

wo für $n=0$ die 2 fortzulassen und die P und Q-Coefficienten unter dem Summenzeichen durch die Relationen (21), (23) und (24) zur numerischen Rechnung vollständig gegeben sind.

Als einzige Aufgabe, um die Entwickelung der Derivierten P und Q zum definitiven Abschlusse zu bringen, bleibt nur noch die Transformation des Argumentes v' auf das Argument v, da wir für die weiteren Entwickelungen und die Integration natürlich nur die einzige Variable v, die auch in den Differentialgleichungen für S, ρ, T als unabhängige Veränderliche auftritt, haben müssen. Hinsichtlich dieser Darstellung, die Gyldén bereits in seinem ersten größeren Werke[1] und in größter Ausführlichkeit in den Orbites absolues[2] gibt, schließe ich mich Herrn Brendel's Behandlung an, die auf eine etwas modificierte Form der Entwickelung, die Gyldén für P und Q gibt, führt, da wir diese Brendel'sche Form der numerischen Rechnung zugrunde legen wollen. An und für sich verdient keine der beiden Formen vor der anderen den Vorzug. Von dieser sehr umfangreichen Transformation, hinsichtlich deren ich im Detail auf die beiden genannten Werke Gyldén's, sowie Herrn Brendel's »Theorie der kleinen Planeten« verweise, sei indes hier das Grundprincip angegeben.

Nach den Entwickelungen des ersten Capitels ist die Beziehung zwischen der Zeit und dem Ort des gestörten Körpers in seiner Bahn gegeben durch die Relation:

$$nt+\Lambda = v - 2\eta \sin[(1-\varsigma)v-\pi] + \frac{3}{4}\eta^2 \sin 2[(1-\varsigma)v-\pi] - \ldots + T. \tag{28}$$

Analog ist für den störenden Körper:

$$n't+\Lambda' = v' - 2\eta' \sin[(1-\varsigma')v'-\pi'] + \frac{3}{4}\eta'^2 \sin 2[(1-\varsigma')v'-\pi'] - \ldots + T'. \tag{29}$$

Multipliciert man jetzt Gleichung (28) mit $\mu = \frac{n'}{n}$, so folgt:

$$n't = \mu v - \mu\Lambda - 2\mu\eta \sin[(1-\varsigma)v-\pi] + \frac{3}{4}\mu\eta^2 \sin 2[(1-\varsigma)v-\pi] - \ldots + \mu T. \tag{30}$$

---

[1] Hugo Gyldén, Undersökningar af theorien för himlakropparnes rörelser. (Untersuchungen zur Theorie der Bewegung der Himmelskörper.) I, II, III Bihang till svenska Vet. Acad. Handlingar Band 6, No. 8, Band 6, No. 16, Band 7, No. 2.

[2] Hugo Gyldén, Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales (Berlin Mayer und Müller; Paris A. Herrmann; Stockholm F. & G. Beijer).

Wie früher setzen wir nun:

$$(1-\varsigma)v-\pi = \mathrm{v}$$

$$(1-\varsigma_1)v-\pi_1 = \mathrm{v}_1,$$

wo:

$$\varsigma_1 = \mu\varsigma'$$

ist, sowie weiter:

$$(1-\varsigma')v'-\pi' = \mathrm{v}'_1.$$

Dann folgt aus Gleichung (29) und (30):

$$v' = \mu v+B+G+\mu T \tag{31}$$

wobei:

$$B = \Lambda'-\mu\Lambda$$

und:

$$G = -2\mu\eta \sin \mathrm{v}+2\eta' \sin \mathrm{v}'_1+\frac{3}{4}\mu\eta^2 \sin 2\mathrm{v}+2\eta'^2 \sin 2\mathrm{v}'_1+\ldots \tag{32}$$

ist.

Dabei ist die Größe T' fortgelassen, da sie ziemlich klein ist, vorzüglich aber deshalb, weil sie nur solche Glieder enthält, die von der mittleren Bewegung Saturns abhängen und T' deshalb keine großen Glieder bei Hilda erzeugen kann; T' repräsentiert ja Störungen, die Jupiter durch Saturn erleidet; indem wir T' fortlassen, vernachlässigen wir also bloß die »indirecten« Saturnstörungen für Hilda, d. h. die Störungen, welche dadurch entstehen, dass Saturn den Jupiter stört und diese Modification der Jupiterbewegung ihrerseits wieder die Hildabewegung beeinflusst. Diese Vernachlässigung ist aber deshalb erlaubt, weil wir schon die »directen« Saturnstörungen (von Saturn auf Hilda) wenigstens bis auf die elementären bei der Rechnung zunächst vernachlässigen werden.

Damit nun durch die Gleichung:

$$v' = \mu v+B+G+\mu T$$

v' rein durch v ausgedrückt werde, ist v' aus den Argumenten:

$$\mathrm{v}'_1 = (1-\varsigma')v'-\pi'$$

in Gleichung (32) herauszubringen, derart, dass an Stelle des Argumentes v'_1 vielmehr:

$$\mathrm{v}_1 = (1-\varsigma_1)v-\pi_1$$

tritt.

Aus Gleichung (31) folgt:

$$v-v' = (1-\mu)v-B-G-\mu T = w_1-G \tag{33}$$

wenn man setzt:

$$(1-\mu)v-B-\mu T = w_1.$$

Unsere Aufgabe ist nun also, cos $(v-v')$ als Function von v zu entwickeln, d. h. v' auf v zu transformieren. Aus Gleichung (33) folgt:

$$v'-(\varsigma'v'+\pi') = -w_1+G+v-(\varsigma'v'+\pi')$$

oder, wenn man:

$$\varsigma_1 v = \mu\varsigma' v$$

an Stelle von $\varsigma'v'$ setzt, auch:

$$\mathrm{v}'_1 = -w_1+G+\mathrm{v}_1. \tag{34}$$

Die Berechtigung davon, dass man in dieser Weise $\varsigma' v'$ durch v ausdrückt, erhellt wie folgt. Nach Gleichung (31) ist:

$$\varsigma' v' = \mu\varsigma' v + \varsigma' B + \varsigma' G + \mu\varsigma' T.$$

Da nun ς' eine äußerst kleine Größe ist, so kann man $\varsigma' G$ und $\mu\varsigma' T$ fortlassen, erhält also:

$$\varsigma' v' = \mu\varsigma' v + \varsigma' B$$

oder:

$$\varsigma' v' + \pi' = \mu\varsigma' v + \pi' + \varsigma' B$$

Jetzt bezeichnet man:

$$\mu\varsigma' = \varsigma_1$$

$$\pi' + \varsigma' B = \pi_1.$$

Dann wird:

$$\varsigma' v' + \pi' = \varsigma_1 v + \pi_1,$$

wo ς_1 und π_1 bekannt sind, da $\varsigma' \pi'$ und Λ' durch die Jupitertheorie gegeben sind.

Um jetzt $\cos n(v-v')$ als Function von v zu entwickeln, entwickeln wir zunächst $\eta' \sin \nu_1'$ nach dem Taylor'schen Satze:

$$-\eta' \sin(w_1 - \nu_1 - G) = -\eta' \sin(w_1 - \nu_1) + \eta' G \cos(w_1 - \nu_1) - \ldots \tag{35}$$

Sowohl bei der nun folgenden, wie bei sehr vielen späteren Entwickelungen, so bei Bestimmung der elementären und charakteristischen Glieder für Hilda, bei Bildung und bei Integration der Differentialgleichung des Hildatypus u. s. f. hat man immer da, wo Producte von trigonometrischen Functionen auftreten, dieselben durchweg in die algebraische Summe der Summe und Differenz dieser Functionen zu zerlegen, was bekanntlich mittelst folgender Formeln geschieht:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\alpha . \sin\beta &= -\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) \\
\sin\alpha . \cos\beta &= \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) \\
\cos\alpha . \cos\beta &= \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta).
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Setzt man nun Gleichung (35) in (32) ein, so folgt, wenn man bloß bis zum I. Grade inclusive geht:

$$G = -2\mu\eta \sin\nu - 2\eta' \sin(w_1 - \nu_1)$$

also, wenn man diesen letzteren Wert in (35) einsetzt:

$$\eta' \sin\nu_1' = -\eta' \sin(w_1 - \nu_1) - 2\mu\eta\eta' \sin\nu \cos(w_1 - \nu_1) - 2\mu\eta'^2 \sin(w_1 - \nu_1)\cos(w_1 - \nu_1)$$

oder mit Hinblick auf die Grundformeln (36):

$$\begin{aligned}
\eta' \sin\nu_1' = &-\eta' \sin(w_1 - \nu_1) - \mu\eta\eta' \sin(w_1 + \nu - \nu_1) + \mu\eta\eta' \sin(w_1 - \nu - \nu_1) \\
&-\eta'^2 \sin(2w_1 - 2\nu_1) + \text{Glieder 3. Grades etc.}
\end{aligned}$$

Ebenso findet man:

$$-\frac{3}{4}\,\eta'^2 \sin 2\mathrm{v}_1' = \frac{3}{4}\,\eta'^2 \sin 2(w_1-\mathrm{v}_1+G)+\frac{3}{4}\,\eta'^2 \sin 2(w_1-\mathrm{v}_1)+\dots$$

Durch Einsetzen der beiden letzteren Ausdrücke in (32) folgt G rein als Function von v bis inclusive zu Gliedern II. Grades:

$$\left.\begin{aligned} G = &-2\mu\eta \sin \mathrm{v}-2\eta' \sin (w_1-\mathrm{v}_1)\\ &+\frac{3}{4}\,\mu\eta^2 \sin 2\mathrm{v}-2\mu\eta\eta' \sin (w_1+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &+2\mu\eta\eta' \sin (w_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)-\frac{5}{4}\,\eta'^2 \sin (2w_1-2\mathrm{v}_1)\\ &+\text{Glieder 3. Grades.}\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Jetzt kann man mit Hinblick darauf, dass:

$$v-v' = (1-\mu)v-B-G-\mu T = w_1-G$$

ist, $\cos n(v-v')$ nach Potenzen von G nach dem Taylor'schen Lehrsatze entwickeln:

$$\cos n(v-v') = \cos n w_1+nG \sin n w_1-\frac{(-nG)^2}{2}\cos n w_1+\dots \tag{38}$$

und hat nun für G in dieser letzteren Gleichung den Ausdruck (37) einzusetzen. Das zweite Glied rechts in (38) wird dann, indem wir beispielsweise die Rechnung mit den drei ersten Gliedern von G (37) andeuten, auf Grund der Fundamentalformeln (36):

$$\begin{aligned} nG \sin n w_1 = &-2n\mu\eta \sin \mathrm{v} \sin n w_1-2\eta' n \sin n w_1 \sin (w_1-\mathrm{v}_1)\\ &+\frac{3}{4}\,n\mu\eta^2 \sin n w_1 \sin 2\mathrm{v}\\ = &\;n\mu\eta \cos (\mathrm{v}+n w_1)-n\mu\eta \cos (n w_1-\mathrm{v})+\eta' n \cos [(n+1)w_1-\mathrm{v}_1]\\ &-\eta' n \sin [(n-1)w_1+\mathrm{v}_1]-\frac{3}{8}\,n\mu\eta^2 \sin (n w_1+2\mathrm{v})+\frac{3}{8}\,n\mu\eta^2 \sin (n w_1-2\mathrm{v}).\end{aligned}$$

Beim Bilden des dritten Gliedes rechts in (38) hat man, da der III. Grad zunächst ausgeschlossen wurde, auszugehen von:

$$G = -2\mu\eta \sin \mathrm{v}+2\eta' \sin (w_1-\mathrm{v}_1),$$

also für G^2 zu setzen, nachdem man wieder die Formeln (38) angewendet hat:

$$\begin{aligned} G^2 = &\;2\mu^2\eta^2-2\mu^2\eta^2 \cos 2\mathrm{v}-4\mu\eta\eta' \cos [w_1+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1]+4\mu\eta\eta' \cos (w_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &+2\eta'^2-2\eta'^2 \cos (2w_1-2\mathrm{v}_1).\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nach (38) mit $\frac{1}{2}\,n^2 \cos n w_1$ zu multiplicieren und dann wieder mit Hinblick auf die Formeln (36) weiterzubehandeln. Führt man in diesem Sinne die Transformation vollständig durch, so erhält man als Resultat $\cos n(v-v')$ entwickelt als reine Function von v allein, nämlich:

$$
\left.\begin{aligned}
\cos n(v-v') = \cos nw_1 & + g_1\eta\cos(nw_1+\nu) \\
& + g_2\eta\cos(nw_1-\nu) \\
& + g_3\eta'\cos[(n-1)w_1+\nu_1] \\
& + g_4\eta'\cos[(n+1)w_1-\nu_1] \\
& + g_5\eta^2\cos nw_1 \\
& + g_6\eta^2\cos(nw_1+2\nu) \\
& + g_7\eta^2\cos(nw_1-2\nu) \\
& + g_8\eta\eta'\cos[(n-1)w_1+\nu+\nu_1] \\
& + g_9\eta\eta'\cos[(n+1)w_1+\nu-\nu_1] \\
& + g_{10}\eta\eta'\cos[(n-1)w_1-\nu+\nu_1] \\
& + g_{11}\eta\eta'\cos[(n+1)w_1-\nu-\nu_1] \\
& + g_{12}\eta'^2\cos nw_1 \\
& + g_{13}\eta'^2\cos[(n-2)w_1+2\nu_1] \\
& + g_{14}\eta'^2\cos[(n+2)w_1-2\nu_1],
\end{aligned}\right\} \qquad (39)
$$

wobei:

$$g_1 = n\mu;\quad g_2 = -n\mu;\quad g_3 = -n;\quad g_4 = +n;\quad g_5 = -n^2\mu^2;\quad g_6 = \left\{\frac{n^2\mu^2}{2} - \frac{3}{8}n\mu\right\};$$

$$g_7 = \left\{\frac{n^2\mu^2}{2} + \frac{3}{8}n\mu\right\};\quad g_8 = -n(n-1)\mu;\quad g_9 = +n(n+1)\mu;\quad g_{10} = +n(n-1)\mu;\quad g_{11} = -n(n+1)\mu;$$

$$g_{12} = -n^2;\quad g_{13} = \left\{\frac{n^2}{2} - \frac{5}{8}n\right\};\quad g_{14} = \left\{\frac{n^2}{2} + \frac{5}{8}n\right\}$$

gesetzt ist. Bei dem Ausdrucke $\sin n(v-v')$ tritt in (39) nur an Stelle des cosinus überall der sinus.

Auf die ganzen weitläufigen weiteren Detailentwickelungen gehen wir nicht mehr ein. Im Princip bestand unsere Aufgabe darin, P als Function von v zu entwickeln:

$$P = 2\Sigma P(n.s.s')_{\nu\nu'}\rho^s\rho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos n(v-v').$$

Da nun aber:

$$\rho = \eta\cos\{(1-\varsigma)v-\pi\} + R = \eta\cos\nu + R,$$

was, wie schon erwähnt, später klar werden wird, so ist:

$$\rho^s = \{(\rho)+R\}^s = (\rho)^s + s(\rho)^{s-1}.R + \frac{s(s-1)}{1.2}(\rho)^{s-2}R^2 + \ldots,$$

wo (ρ) »den elementären Theil der Form B« repräsentiert, R den »charakteristischen und den gewöhnlichen«. Entwickelt man daher P nach Potenzen dieses letzteren Theiles, so folgt:

$$
\left.\begin{aligned}
& P = P_0 + P_1R + P_2R^2 + \ldots + P_\sigma R^\sigma + \ldots, \\
& \text{wobei:} \\
& P_\sigma = 2\Sigma P_\sigma(n.s.s')_{\nu\nu'}(\rho)^s.(\rho')^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos(v-v')
\end{aligned}\right\} \qquad (40)
$$

und speciell jeder einzelne Coefficient gegeben ist durch eine unendliche Reihe, nämlich, indem s, s', ν, ν' bezüglich $= 0, 1, 2, 3 \ldots$, zu setzen:

$$\left.\begin{aligned}
P_0 = & \; 2\Sigma P(n.0.0)_{0.0} \cos n(v-v') \\
& + 2\Sigma P(n.1.0)_{0.0}(\rho)^1 \cos n(v-v') \\
& + 2\Sigma P(n.0.1)_{0.0}\rho' \cos n(v-v') \\
& + 2\Sigma P(n.2.0)_{0.0}(\rho)^2 \cos n(v-v') \\
& + 2\Sigma P(n.1.1)_{0.0}(\rho)\rho' \cos n(v-v') \\
& + 2\Sigma P(n.0.2)_{0.0}\rho'^2 \cos n(v-v') \\
& + 2\Sigma P(n.0.0)_{1.0}\eta^2 \cos n(v-v') \\
& + 2\Sigma P(n.0.0)_{0.1}\eta'^2 \cos n(v-v') \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_1 = & \; 2\Sigma P(n.1.0)_{0.0}R \cos n(v-v') \\
& + 2\Sigma P(n.2.0)_{0.0}R(\rho) \cos n(v-v') \\
& + 2\Sigma P(n.1.1)_{0.0}R\rho' \cos n(v-v') \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (40\,a)$$

etc., wo für $n = 0$ der Factor 2 vor der Summe wegfällt.

Analoge Entwickelungen folgen für P_2, P_3 etc. Wirklich zu bilden sind dann die Ausdrücke $(\rho)^2, (\rho), (\rho)^1, \rho \cos n(v-v'), \rho' \cos n(v-v'), \rho^2 \cos n(v-v')$ etc., immer in Hinblick auf die Fundamentalformeln (36), was im einzelnen durchzuführen uns hier natürlich viel zu weit führen würde. Vereinigt man, wenn man in Besitz aller dieser Entwickelungen ist, die Glieder gleicher Argumente und ordnet dieselben gradweise, so ergibt sich als Entwickelung der partiellen Derivierten P der Störungsfunction Ω eine unendliche Reihe, die nur die Argumente v, v_1 und w_1 enthält und fortschreitet nach Potenzen von η, η' und R, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
P = & \; \Sigma B_{n.0.0} \cos nw_1 + \Sigma B^{(+1)}_{n.1.0}\eta \cos n(w_1+\mathrm{v}) + \Sigma B^{(-1)}_{n.1.0}\eta \cos n(w_1-\mathrm{v}) + \ldots \\
& + R\,\{\Sigma B^{1.0}_{n.0.0} \cos nw_1 + \Sigma B^{+1.1.0}_{n.1.0}\eta \cos (nw_1+\mathrm{v}) + \Sigma B^{-1.1.0}_{n.1.0}\eta \cos n(w_1-\mathrm{v})\} \\
& + R^2\,\{\Sigma B^{2.0}_{n.0.0} \cos nw_1 + \ldots\} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

wobei das **Wesentliche** ist, dass die B nur Functionen der P, also völlig bekannt sind, da ja die P bereits als Functionen der Ω durch (24) und diese als Functionen der γ durch (19) ermittelt waren, die γ aber Functionen der β nach (11) und damit von α allein sind. Somit hängen die B gleichfalls **nur** von dem zunächst numerisch genähert bekannten Verhältnisse der mittleren Entfernungen $\frac{a}{a'} = \alpha$ ab, sind also **für jeden Planeten berechenbare Größen.**

Diese allgemeine **Gyldén**'sche Entwickelung nun transformiert Herr **Brendel** noch in eine etwas andere Form, die wir als Grundlage für die numerische Berechnung wählen werden. Zum Übergang auf dieselbe müssen wir aus dem dritten Capitel vorausgreifend entnehmen, dass die Functionen S, R, T jede einen langperiodischen, einen kurzperiodischen und einen gewöhnlichen Theil besitzt, indem eine jede derselben langperiodische und kurzperiodische elementäre, langperiodische und kurzperiodische charakteristische, sowie schließlich gewöhnliche Glieder enthält. In diesem Sinne ist also:

$$T = \gamma v + T_l + T_k + T_g,$$

wo T_l der langperiodische, T_k der kurzperiodische und T_g der gewöhnliche Theil ist, während das Auftreten des säcularen Gliedes γv später bei den Entwickelungen für Hilda klar werden wird. Nach Herrn Brendel trennen wir nun in der Art, dass:

$$T_k + T_g = K,$$

also:

$$T = \gamma v + T_l + K$$

wird.

Da aber nach dem Früheren:

$$n w_1 = n(1-\mu)v - nB - n\mu T$$

ist, so wird:

$$n w_1 = n(1-\mu_2)v - nB - n\mu T_l - n\mu K,$$

indem zur Abkürzung:

$$\mu(1+\gamma) = \mu_2$$

gesetzt ist; oder, wenn man:

$$(1-\mu_2)v - B - \mu T_l = w$$

bezeichnet, auch:

$$w_1 = w - \mu K. \tag{42}$$

Nach Potenzen dieses kleinen Theiles K von T (indem T_l der größte Theil von T ist) entwickelt Herr Brendel w_1. Nach dem Taylor'schen Lehrsatze wird dann:

$$\sin n w_1 = \sin n w - n\mu K \cos n w - \frac{n^2\mu^2 K^2}{1\,.\,2} \sin n w - .$$

Durch Substitution folgt jetzt die Entwickelung der Gyldén'schen Derivierten P in der Brendel'schen Form, die wir zur Grundlage und zum Ausgangspunkte der numerischen und analytischen Behandlung des Hildatypus wählen wollen, indem noch w an Stelle von w_1 gesetzt werde:

$$\begin{aligned}
P = {} & \underbrace{\Sigma B_{n.0.0} \cos n w}_{\text{0. Grad}} + \Sigma B^{(+1)}_{n.1.0}\,\eta \cos(n w + \mathrm{v}) + \Sigma B^{(-1)}_{n.1.0}\,\eta \cos(n w - \mathrm{v}) \\
& \quad + \Sigma B^{(+1)}_{n.0.1}\,\eta' \cos(n w + \mathrm{v}_1) + \Sigma B^{(-1)}_{n.0.1}\,\eta' \cos(n w - \mathrm{v}_1) \qquad \text{1. Grad} \\
& \quad + \Sigma B_{n.2.0}\,\eta^2 \cos n w \\
& \quad + \Sigma B^{(+2)}_{n.2.0}\,\eta^2 \cos(n w + 2\mathrm{v}) + \Sigma B^{(-2)}_{n.2.0}\,\eta^2 \cos(n w - 2\mathrm{v}) \\
& \quad + \Sigma B^{(+2)}_{n.1.1}\,\eta\eta' \cos(n w + \mathrm{v} + \mathrm{v}_1) + \Sigma B^{(+1)}_{n.1.1}\,\eta\eta' \cos(n w + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \qquad \text{I. Ordg.} \\
& \quad + \Sigma B^{(-1)}_{n.1.1}\,\eta\eta' \cos(n w - \mathrm{v} + \mathrm{v}_1) + \Sigma B^{(-2)}_{n.1.1}\,\eta\eta' \cos(n w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \qquad \text{2. Grad} \\
& \quad + \Sigma B_{n.0.2}\,\eta'^2 \cos n w \\
& \quad + \Sigma B^{(+2)}_{n.0.2}\,\eta'^2 \cos(n w + 2\mathrm{v}_1) + \Sigma B^{(-2)}_{n.0.2}\,\eta'^2 \cos(n w - 2\mathrm{v}_1) \\
& \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + R\,\{\Sigma B^{1.0}_{n.0.0} \cos n w + \Sigma B^{+1.1.0}_{n.1.0}\,\eta \cos(n w + \mathrm{v}) + \Sigma B^{-1.1.0}_{n.1.0}\,\eta \cos(n w - \mathrm{v}) \\
& \quad + \Sigma B^{+1.1.0}_{n.0.1}\,\eta' \cos(n w + \mathrm{v}_1) + \Sigma B^{-1.1.0}_{n.0.1}\,\eta' \cos(n w - \mathrm{v}_1) \\
& \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{II. Ordnung} \\
& + \mu K\,\{\Sigma n B_{n.0.0} \sin n w + \Sigma n B^{(+1)}_{n.1.0}\,\eta \sin(n w + \mathrm{v}) + \Sigma n B^{(-1)}_{n.1.0}\,\eta \sin(n w - \mathrm{v}) \\
& \quad + \Sigma n B^{(+1)}_{n.0.1}\,\eta' \sin(n w + \mathrm{v}_1) + \Sigma n B^{(-1)}_{n.0.1}\,\eta' \sin(n w - \mathrm{v}_1) \\
& \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{43}$$

$$
\left.\begin{array}{l}
+R^2\{\Sigma B^{2.0}_{n.0.0}\cos nw+\ldots\} \\
+\mu RK\{\Sigma n B^{1.0}_{n.0.0}\sin nw+\ldots\} \\
\mu^2K^2\left\{\sum\frac{n^2}{2}B_{n.0.0}\cos nw+\ldots\right\} \\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}\text{III. Ordnung} \qquad (43)
$$

Einen völlig analogen Ausdruck erhält man für Q, nur dass stets an Stelle des cosinus der sinus tritt und umgekehrt, und dass außerdem die Klammerglieder von μK das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, also auch das Glied dritter Ordnung in μRK; an Stelle der B aber treten A Coefficienten, die ebenfalls sofort angegeben werden sollen.

Man bezeichnet nun in der Gyldén'schen Störungstheorie ein Glied, welches die n^{te} Potenz von η oder η' enthält, als ein Glied n^{ten} Grades; ein Glied, das die n^{te} Potenz der störenden Masse m' enthält, als ein Glied n^{ter} Ordnung. Und zwar wollen wir eine von Herrn Brendel in seiner im Vorwort citierten schwedischen Abhandlung über den Hestiatypus (Om användningen . .) bereits angewandte Bezeichnungsweise gleichfalls gebrauchen und ein Glied, das die n^{te} Potenz der störenden Masse enthält und mit derselben auch seinem absoluten Betrage nach vergleichbar ist, als ein Glied rein n^{ter} Ordnung bezeichnen; hingegen ein Glied, das die n^{te} Potenz der störenden Masse enthält, aber seinem absoluten Betrage nach mit ihr nicht verglichen werden kann, indem es einen kleinen Divisor von der Ordnung δ enthält, schlechthin ein Glied n^{ter} Ordnung nennen. Dabei sollen die Glieder rein n^{ter} Ordnung durch lateinische, diejenigen der n^{ten} Ordnung (die also einen kleinen Integrationsdivisor δ enthalten) durch griechische Buchstaben bezeichnet werden, so dass infolge dieser Bezeichnungsweise der Charakter eines Gliedes sofort direct kenntlich gemacht ist. Um zu bezeichnen, dass ein Glied überhaupt »von der Ordnung« eine Größe sei, wird im folgenden nach Gyldén das Zeichen: $\asymp$ angewandt werden und wenn es »der Ordnung nach größer«, bezüglich kleiner ist, die Zeichen $\succ$, respective $\prec$. Um also zu bezeichnen, dass ein Coefficient a_n rein von der Ordnung der störenden Masse und ein anderer α_n schlechthin von der Ordnung der störenden Masse sei, schreiben wir kurz:

$$
a_n \asymp m'; \qquad \alpha_n \asymp \frac{m'}{\delta}.
$$

In den Untersuchungen über den Hildatypus wird dies Zeichen, ohne dass wir nochmals auf seine Bedeutung zurückkommen, stets angewandt werden.

Es wird sich später zeigen, dass die:

$$
A \asymp m'; \qquad B \asymp m'; \qquad R \asymp \frac{m'}{\delta}; \qquad K \asymp \frac{m'}{\delta}
$$

sind. Demnach repräsentiert also in unserem Ausdrucke (43), in dem offenbar die Glieder nach dem 0., 1., 2.... Grade geordnet sind, der erste Theil, der weder R noch K enthält, die Glieder erster Ordnung; der zweite und dritte Theil in R, bezüglich in K, da $R\cdot B$, respective $K\cdot B \asymp \frac{m'^2}{\delta}$ ist, die Glieder zweiter Ordnung; der Theil in $R^2, R\cdot K, K^2$ (d. h. natürlich das Product eines Gliedes aus der trigonometrischen Reihe R^2 in ein Klammerglied!) die Glieder dritter Ordnung u. s. f. Somit ist in dem allgemeinen Ausdruck für P sowohl der Grad, wie die Ordnung eines jeden Gliedes völlig übersichtlich gegeben und die Form (43) ist dabei völlig streng, wenn man die Glieder vom Quadrate der gegenseitigen Neigung vernachlässigt, die indes später leicht hinzuzufügen sind; während praktisch der Ausdruck (43) vollständig ausreichend ist, wenn die Neigungen klein sind.

In der Gyldén'schen Theorie entwickelt man also direct nach Grad und Ordnung und so lange R, K, η und η' kleine Größen sind, was für lange Zeiten sicher stattfindet, convergiert der Ausdruck (43) unbedingt. Nach der alten Theorie würde es endloser Rechnungen bedürfen, um zu den Gliedern dritter Ordnung zu gelangen, während wir dieselben später, beim Hildatypus, gleich in der ersten Näherung, wie mit einem Federstrich, mitnehmen werden. Bisher ist man im allgemeinen nur bis zu Gliedern II. Ordnung bei Anwendung der Gyldén'schen Methoden gegangen und nur Herr Brendel hat bei Hestia, wo die Glieder der 3. Ordnung vom 0. Grade als verschwindend klein gar nicht in Betracht kommen, einige Glieder 3. Ordnung höheren Grades, die groß werden, bereits dort mitgenommen. Bei Behandlung der Lücke des Hildatypus zeigte sich indes die Nothwendigkeit, den Gliedern III. Ordnung hinsichtlich des 0. Grades vollständig Rechnung zu tragen.

Als Resultat der ganzen zuvor im Princip angedeuteten Entwickelung ergeben sich, wenn man dieselbe im Detail ausführt, zur numerischen Berechnung der Brendel'schen B, respective A Coefficienten in den Entwickelungen für P und Q, folgende Relationen zur Ermittelung der Störungen:

I. Des 0. Grades inclusive bis zur 3. Ordnung:

$$\left.\begin{array}{llll}
B_{n.0.0} = 2P_{n.0.0} & B_{0.0.0} = P_{0.0.0} & A_{n.0.0} = -2nQ_{n.0.0} & A_{0.0.0} = 0 \\
B^{1.0}_{n.0.0} = 2P_{n.1.0} & B^{1.0}_{0.0.0} = P_{0.1.0} & A^{1.0}_{n.0.0} = -2nQ_{n.1.0} & A^{1.0}_{0.0.0} = 0 \\
B^{2.0}_{n.0.0} = 2P_{n.2.0} & B^{2.0}_{0.0.0} = P_{0.2.0} & A^{2.0}_{n.0.0} = -2nQ_{n.2.0} & A^{2.0}_{0.0.0} = 0,
\end{array}\right\} \quad (44)$$

wobei die P und Q durch die Gleichungen (24) als Functionen der Ω gegeben, also bekannt sind; ferner:

II. Des I. Grades inclusive bis zur 2. Ordnung:

$$\left.\begin{array}{ll}
B^{(+1)}_{n.1.0} = P_{n.1.0} + 2n\mu P_{n.0.0} & B^{(+1)}_{0.1.0} = P_{0.1.0} \\
B^{(-1)}_{n.1.0} = P_{n.1.0} - 2n\mu P_{n.0.0} & B^{(-1)}_{0.1.0} = 0 \\
B^{(+1)}_{n.0.1} = P_{n+1.0.1} - 2(n+1)P_{n+1.0.0} & B^{(+1)}_{0.0.1} = P_{1.0.1} - 2P_{1.0.0} \\
B^{(-1)}_{n.0.1} = P_{n-1.0.1} + 2(n-1)P_{n-1.0.0} & B^{(-1)}_{0.0.1} = 0. \\
B^{+1.1.0}_{n.1.0} = 2P_{n.2.0} + 2n\mu P_{n.1.0} & B^{+1.1.0}_{0.1.0} = 2P_{0.2.0} \\
B^{-1.1.0}_{n.1.0} = 2P_{n.2.0} - 2n\mu P_{n.1.0} & B^{-1.1.0}_{0.1.0} = 0 \\
B^{+1.1.0}_{n.0.1} = P_{n+1.1.1} - 2(n+1)P_{n+1.1.0} & B^{+1.1.0}_{0.0.1} = P_{1.1.1} - 2P_{1.1.0} \\
B^{-1.1.0}_{n.0.1} = P_{n-1.1.1} + 2(n-1)P_{n-1.1.0} & B^{-1.1.0}_{0.0.1} = 0.
\end{array}\right\} \quad (45)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
A^{(+1)}_{n.1.0} = -n\{Q_{n.1.0} + 2n\mu Q_{n.0.0}\} & A^{(+1)}_{0.1.0} = 0 \\
A^{(-1)}_{n.1.0} = -n\{Q_{n.1.0} - 2n\mu Q_{n.0.0}\} & A^{(-1)}_{0.1.0} = 0 \\
A^{(+1)}_{n.0.1} = -(n+1)\{Q_{n+1.0.1} - 2(n+1)Q_{n+1.0.0}\} & A^{(+1)}_{0.0.1} = -Q_{1.0.1} + 2Q_{1.0.0} \\
A^{(-1)}_{n.0.1} = -(n-1)\{Q_{n-1.0.1} + 2(n-1)Q_{n-1.0.0}\} & A^{(-1)}_{0.0.1} = 0 \\
A^{+1.1.0}_{n.1.0} = -n\{2Q_{n.2.0} + 2n\mu Q_{n.1.0}\} & A^{+1.1.0}_{0.1.0} = 0 \\
A^{-1.1.0}_{n.1.0} = -n\{2Q_{n.2.0} - 2n\mu Q_{n.1.0}\} & A^{-1.1.0}_{0.1.0} = 0 \\
A^{+1.1.0}_{n.0.1} = -(n+1)\{Q_{n+1.1.1} - 2(n+1)Q_{n+1.1.0}\} & A^{+1.1.0}_{0.0.1} = -Q_{1.1.1} + 2Q_{1.1.0} \\
A^{-1.1.0}_{n.0.1} = -(n-1)\{Q_{n-1.1.1} + 2(n-1)Q_{n-1.1.0}\} & A^{-1.1.0}_{0.0.1} = 0.
\end{array}\right\} \quad (46)$$

Der einfache Zusammenhang dieser Brendel'schen und der Gyldén'schen, in Gyldén's Tafelwerk tabulierten »A« und »B« Coefficienten wird noch angegeben werden.

b) Zweiter Weg: Successive Berechnung der β, γ, ϑ, A, B.

Außer dem im vorhergehenden angegebenen Verfahren Gyldén's, successive aus den β die γ, aus diesen die Ω, mittelst derselben die P und Q und aus letzteren schließlich die Entwickelungscoefficienten A und B der partiellen Derivierten P und Q der Störungsfunction Ω zu berechnen, hat Gyldén in seinen späteren Jahren noch eine andere Berechnungsform für die A und B aufgestellt. Dieselbe ist nicht nur von Interesse deshalb, weil sie zwei Operationen — die Ermittlung der Ω aus den γ und der P und Q aus den Ω durch eine einzige — die Berechnung der »ϑ« aus den γ und danach der A und B direct aus diesen ϑ-Transcendenten — ersetzt; sie bildet zugleich eine wertvolle Rechencontrole. Denn die β sind controlierbar, wie wir sehen werden. Sind also nur die γ richtig gerechnet, die durch eine einfache Operation folgen, so müssen die aus diesen γ Werten auf die genannten zwei verschiedenen Arten gerechneten A und B-Coefficienten übereinstimmen.

Was mich indes speciell veranlasst, diesen zweiten Weg Gyldén's hier noch anzugeben — der im Anschluss an das bereits Mitgetheilte ganz in Kürze dargelegt werden kann — ist der Umstand, dass ich in der Lage bin, die noch unveröffentlichten Endresultate dieses Verfahrens, nämlich die A und B als $f(\vartheta)$, hier anzuführen, die ich von Gyldén in Stockholm während meiner für ihn ausgeführten Rechnungen erhielt und die zudem im folgenden bei der Rechnung für Hilda als Controlformeln wirklich zur Verwendung kommen.

Nach dem Vorhergehenden ist ja allgemein:

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m = \left(\frac{a'}{r'}\right)^m C_0^{(m)} + 2\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^{m+1} C_1^{(m)}\cos H + 2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^{m+2} C_2^{(m)}\cos 2H + \dots \tag{47}$$

wo $C_n^{(1)}$ gegeben ist durch das Integral:

$$C_n^{(1)} = \frac{2}{\pi}\,\alpha^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi+\alpha^2\chi\sin^2\varphi}}$$

und:

$$\beta_n^{(s)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{s}{2}}},$$

ferner:

$$\gamma_s^{1\cdot n} = \frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{2.4.6\ldots 2s}\,\alpha^{n+2s+1}\cdot\beta_{n+s}^{(2s+1)}$$

ist.

Durch Differentiation erhält man:

$$r\,\frac{\partial\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m}{\partial r} = \left(\frac{a'}{r'}\right)^m E_0^{(m)} + 2\,\frac{r}{a}\left(\frac{a'}{r'}\right)^{m+1} E_1^{(m)}\cos H + 2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^{m+2} E_2^{(m)}\cos 2H + \dots \tag{48}$$

wobei:

$$E_n^{(m)} = r\,\frac{\partial C_n^{(m)}}{\partial r} + n\,C_n^{(m)}$$

ist. Mit Hinblick auf den früheren Ausdruck:

$$\chi = 1 - \left(\frac{a'}{r'}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2$$

aber folgt:

$$r\,\frac{\partial\chi}{\partial r} = -2(1-\chi),$$

also:

$$r\frac{\partial C_n^{(m)}}{\partial r} = -2(1-\chi)\frac{\partial C_n^{(m)}}{\partial \chi},$$

mithin:

$$E_n^{(m)} = -2(1-\chi)\frac{\partial C_n^{(m)}}{\partial \chi} + nC_n^{(m)}.$$

Genau wie im vorhergehenden $C_n^{(1)}$ nach Potenzen von χ entwickelt wurde, kann man nun auch $C_n^{(m)}$ und $E_n^{(m)}$ entwickeln. Als Coefficienten dieser Entwickelungen:

$$C_n^{(m)} = \gamma_0^{m.n} - \gamma_1^{m.n}\chi + \gamma_2^{m.n}\chi^2 - \ldots \tag{49}$$

$$E_n^{(m)} = \eta_0^{m.n} - \eta_1^{m.n}\chi + \eta_2^{m.n}\chi^2 - \ldots \tag{50}$$

ergeben sich die Werte:

$$\gamma_s^{1.n} = \frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{2.4.6\ldots 2s}\,\alpha^{n+2s+1}\,\beta_{n+s}^{(2s+1)} \tag{51}$$

$$\eta_i^{m.n} = [2i+n]\gamma_i^{m.n} + 2(i+1)\gamma_{i+1}^{m.n}$$

deren erster früher schon abgeleitet wurde.

Bei dieser zweiten Art der Gyldén'schen Entwickelung von P und Q braucht man aber außer den »niederen« $\gamma_i^{1.n}$ auch die »höheren« $\gamma_i^{3.n}$, $\gamma_i^{5.n}$, zu deren Ermittelung eben die η dienen. Um sie zu erhalten, differentiiert man zunächst:

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m = \frac{a^m}{(r^2+r'^2-2rr'\cos H)^{\frac{m}{2}}}$$

und erhält:

$$r\frac{\partial\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m}{\partial r} = -m\,a^m\,\frac{r^2-rr'\cos H}{\Delta^{m+2}},$$

oder, mit Hinblick auf:

$$r^2-rr'\cos H = \frac{1}{2}\{\Delta^2+r^2-r'^2\}$$

auch:

$$r\frac{\partial\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m}{\partial r} = -\frac{1}{2}m\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m + \frac{m}{2\alpha^2}\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\left(1-\frac{r^2}{r'^2}\right)\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{m+2} \tag{52}$$

Danach erhält man:

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{m+2} = \alpha^2\left(\frac{a'}{r}\right)\{1-\alpha^2(1-\chi)\}^{-1}\cdot\left\{\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m + \frac{2}{m}\,r\,\frac{\partial\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m}{\partial r}\right\}. \tag{53}$$

Ersetzt man hierin $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m$ und $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{m+2}$ nach Gleichung (47) und (48), so erhält man mit Hinblick auf die Entwickelungen (49) und (50):

$$\gamma_i^{m+2.n} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left\{\gamma_i^{m.n} + \frac{2}{m}\eta_i^{m.n}\right\} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\gamma_{i-1}^{m+2.n} \tag{54}$$

eine Gleichung, aus der sich für $m = 1.3.5\ldots$, bezüglich die $\gamma_i^{1.n}$, $\gamma_i^{3.n}$, $\gamma_i^{5.n}\ldots$ ergeben, und die sich auch bereits im 3. Bande der »Undersökningar«, S. 51 und 52 abgeleitet findet.

Durch Multiplication von (48) mit:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a'}{r'}\right)^n = (1-\chi)^{\frac{n}{2}}$$

folgt die neue Fundamentalentwickelung;

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a'}{r'}\right)^n C_n^{(m)} = \vartheta_0^{m.n} - \vartheta_1^{m.n}\chi + \vartheta_2^{m.n}\chi^2 - \vartheta_3^{m.n}\chi^3 + \vartheta_4^{m.n}\chi^4 - \dots, \tag{55}$$

wobei die ϑ zwar als Functionen von α dargestellt werden könnten, indes nach Gyldén für die numerische Rechnung besser durch folgende Relationen zu ermitteln sind:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_0^{m.n} &= \gamma_0^{m.n} \\
\vartheta_1^{m.n} &= \gamma_1^{m.n} + \frac{n}{2}\gamma_0^{m.n} \\
\vartheta_2^{m.n} &= \gamma_2^{m.n} + \frac{n}{2}\gamma_1^{m.n} + \frac{n(n-2)}{2.4}\gamma_0^{m.n} \\
\vartheta_3^{m.n} &= \gamma_3^{m.n} + \frac{n}{2}\gamma_2^{m.n} + \frac{n(n-2)}{2.4}\gamma_1^{m.n} + \frac{n(n-2)(n-4)}{2.4.6}\gamma_0^{m.n} \\
\vartheta_4^{m.n} &= \gamma_4^{m.n} + \frac{n}{2}\gamma_3^{m.n} + \frac{n(n-2)}{2.4}\gamma_2^{m.n} + \frac{n(n-2)(n-4)}{2.4.6}\gamma_1^{m.n} + \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)}{2.4.6.8}\gamma_0^{m.n}.
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Bis zu $\vartheta_4^{m.n}$ inclusive hat man nämlich die ϑ numerisch zu berechnen. Die Formeln (55) und (56) finden sich erst in den Orbites absolues, Band I, S. 392.

Aus diesem ϑ nun lassen sich die Entwickelungscoefficienten A und B der Derivierten der Störungsfunction direct darstellen, durch Formeln, die sogleich angeführt werden sollen, da wir sie bei der numerischen Rechnung für Hilda verwenden werden und die, wie gesagt, bis jetzt noch nicht veröffentlicht sind.

Will man diesen Rechenschematismus wirklich anwenden, so hat man, wie folgt, zu verfahren. Zuerst rechnet man, wie beim ersten Weg (über die Ω und die P und Q), ein für allemal die $\beta_s^{(n)}$ und $\gamma_i^{1.n}$. Wie dies numerisch geschieht, was hinsichtlich der $\beta_s^{(n)}$ keineswegs einfach ist, werden wir sogleich bei Hilda sehen. Sodann rechnet man aus den $\gamma_i^{1.n}$ die:

$$\left.\begin{aligned}
\eta_0^{1.n} &= n\gamma_0^{1.n} + 2\gamma_1^{1.n} \\
\eta_1^{1.n} &= (2+n)\gamma_1^{1.n} + 4\gamma_2^{1.n} \\
\eta_2^{1.n} &= (4+n)\gamma_2^{1.n} + 6\gamma_3^{1.n},
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

wo $n = 1, 2, 3\dots$ zu setzen und der höchste Index n durch das bei der numerischen Rechnung der $\gamma_s^{1.n}$ erhaltene höchste γ bedingt ist.

Danach rechnet man mittelst dieser η-Werte:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_0^{3.n} &= \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left\{\gamma_0^{1.n} + 2\eta_0^{1.n}\right\} \\
\gamma_1^{3.n} &= \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\Big\{\gamma_1^{1.n} + 2\eta_1^{1.n} + \underbrace{\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}(\gamma_0^{1.n} + 2\eta_0^{1.n})}_{=\gamma_0^{3.n}}\Big\} \\
\gamma_2^{3.n} &= \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\Big\{\gamma_2^{1.n} + 2\eta_2^{1.n} + \underbrace{\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}(\gamma_1^{1.n} + 2\eta_1^{1.n}) + \left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)^2(\gamma_0^{1.n} + 2\eta_0^{1.n})}_{=\gamma_1^{3.n}}\Big\}.
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

wobei die Formel:

$$\gamma_0^{3.n} - \gamma_1^{3.n} + \gamma_2^{3.n} - \ldots = \alpha^2[\gamma_0^{1.n} - \gamma_1^{1.n} + \gamma_2^{1.n} - \ldots] + 2\alpha^2[\eta_0^{1.n} - \eta_1^{1.n} + \eta_2^{1.n} - \ldots]$$

eine Controle für die Richtigkeit der numerischen Rechnung bietet.

Auf Grund dieser Relationen rechnet man:

$$\left.\begin{aligned} \eta_0^{3.n} &= n\gamma_0^{3.n} + 2\gamma_1^{3.n} \\ \eta_1^{3.n} &= (2+n)\gamma_1^{3.n} + 4\gamma_2^{3.n} \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

und hieraus schließlich:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_0^{5.n} &= \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left\{\gamma_0^{3.n} + \frac{2}{3}\eta_0^{3.n}\right\} \\ \gamma_1^{5.n} &= \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left\{\gamma_1^{3.n} + \frac{2}{3}\eta_1^{3.n} + \underbrace{\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left(\gamma_0^{3.n} + \frac{2}{3}\eta_0^{3.n}\right)}_{=\gamma_0^{5.n}}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Danach erhält man direct die niederen und höheren ϑ durch Einsetzen der diesbezüglichen γ-Werte in die Formeln (56).

Die definitiven, bis jetzt noch nirgends mitgetheilten Formeln für die Gyldén'schen A und B als Functionen der ϑ sind für die Glieder erster Ordnung die folgenden:

I. Für den 0. Grad:

$$A_{0.0}(n, -n)_{0.0} = -2n\,\vartheta_0^{1.n}$$
$$B_{0.0}(n, -n)_{0.0} = +4n\,\vartheta_1^{1.n}$$

II. Für den 1. Grad:

$$\left.\begin{aligned} A_{1.0}(n+1, -n)_{0.0} &= 2n(1-n\varphi)\vartheta_0^{1.n} + 2n\vartheta_1^{1.n} \\ A_{1.0}(n-1, -n)_{0.0} &= 2n(1+n\varphi)\vartheta_0^{1.n} + 2n\vartheta_1^{1.n} \end{aligned}\right\} \text{ in } \eta$$

$$\left.\begin{aligned} A_{0.1}(n, -n+1)_{0.0} &= n(2n-1)\vartheta_0^{1.n} - 2n\vartheta_1^{1.n} \\ A_{0.1}(n, -n-1)_{0.0} &= -n(2n+1)\vartheta_0^{1.n} - 2n\vartheta_1^{1.n} \end{aligned}\right\} \text{ in } \eta' \tag{61}$$

$$\left.\begin{aligned} B_{1.0}(n+1, -n)_{0.0} &= -2(3-2n\varphi)\vartheta_1^{1.n} - 8\vartheta_2^{1.n} \\ B_{1.0}(n-1, -n)_{0.0} &= -2(3+2n\varphi)\vartheta_1^{1.n} - 8\vartheta_2^{1.n} \end{aligned}\right\} \text{ in } \eta$$

$$\left.\begin{aligned} B_{0.1}(n, -n+1)_{0.0} &= -2(2n-3)\vartheta_1^{1.n} + 8\vartheta_2^{1.n} \\ B_{0.1}(n, -n-1)_{0.0} &= +2(2n+3)\vartheta_1^{1.n} + 8\vartheta_2^{1.n} \end{aligned}\right\} \text{ in } \eta'$$

In der Brendel'schen Bezeichnungsweise hätte man in (61) und ebenso in (62) bloß rechts φ durch μ zu ersetzen und an Stelle der linken Seite die in der folgenden Zusammenstellung (63) gegebenen A- und B-Coefficienten zu setzen.

Die Angabe der weiteren A und B für den 2. und 3. Grad würde hier zu viel Raum in Anspruch nehmen.

Wir brauchen indes zur Controle der Berechnung der »Hilda-Lücke« im fünften Capitel für den 0. Grad auch die A- und B-Coefficienten der zweiten und dritten Ordnung als Functionen der ϑ. Da ich diese Formeln seinerzeit nicht von Gyldén erhalten habe, sollen sie hier abgeleitet werden. Dazu haben wir offenbar bloß in den Formeln (19) des zweiten Capitels, welche die Ω als Functionen der γ geben, die γ mit Hinblick auf die Formeln (56) desselben Capitels durch die ϑ auszudrücken und finden so:

$$\left.\begin{aligned}
\Omega_{n\,0.0} &= \vartheta_0^{1.n}\\
\Omega_{n.1.0} &= -2\,\vartheta_1^{1.n}\\
\Omega_{n.2.0} &= 3\,\vartheta_1^{1.n}+4\,\vartheta_2^{1.n}\\
\Omega_{n.3.0} &= -4\,\vartheta_1^{1.n}-12\,\vartheta_2^{1.n}-8\,\vartheta_3^{1.n}.
\end{aligned}\right\} \qquad (61\,a)$$

Aus diesen Relationen erhält man aber mit Hinblick auf die Formeln (21), welche die P und Q als Functionen der Ω, sowie der Gleichungen (44), welche die A und B als Functionen der P und Q geben, die folgenden Werte für die A- und B-Coefficienten 0. Grades:

Erster Ordnung:

$$A_{n.0.0} = -2n\,\vartheta_0^{1.n}; \qquad B_{n.0.0} = +4\,\vartheta_1^{1.n}.$$

Zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}
A^{1.0}_{n.0.0} &= 4n\,\vartheta_0^{1.n}+4n\,\vartheta_1^{1.n}\\
B^{1.0}_{n.0.0} &= -12\,\vartheta_1^{1.n}-16\,\vartheta_2^{1.n}.
\end{aligned}$$

Dritter Ordnung:

$$\begin{aligned}
A^{2.0}_{n.0.0} &= -6n\,\vartheta_0^{1.n}-14n\,\vartheta_1^{1.n}-8n\,\vartheta_2^{1.n}\\
B^{2.0}_{n.0.0} &= 24\,\vartheta_1^{1.n}+72\,\vartheta_2^{1.n}+48\,\vartheta_3^{1.n}.
\end{aligned} \qquad (61\,b)$$

Zu erwähnen bleibt noch, dass auch eine directe Darstellung der A und B als Functionen der niederen γ möglich ist, die Herr Masal in seiner bereits citierten großen Arbeit »Formeln und Tafeln...« vollständig ausgeführt hat. Einen besonderen Vorzug vor den beiden anderen Gyldén'schen hier mitgetheilten Methoden verdient dieser von Herrn Masal ausgeführte dritte Gyldén'sche Weg zur Entwickelung der Störungsfunction indes insofern nicht, als die Rechenformeln, welche die:

$$A, B = f(\gamma)$$

geben, für die höheren Grade äußerst complicierte sind. Für den 0. und 1. Grad hingegen sind sie noch ziemlich einfach und haben, indem wir sie hier beispielsweise anführen, folgende Werte, bloß mit Rücksicht auf die Glieder erster Ordnung. Nämlich für den:

0. Grad:

$$\left.\begin{aligned}
A_{0.0}(n,-n) &= -2n\,\bar{\gamma}_0^{1.n}\,{}^{1}\\
B_{0.0}(n,-n) &= +2n\,\bar{\gamma}_0^{1.n}+4\,\gamma_1^{1.n}.
\end{aligned}\right| \qquad (62)$$

---

[1] Der Strich über dem γ besagt also, dass für alle Werte von n bezüglich $\bar{\gamma}_0^{1.n} = \gamma_0^{1.n}$ ist, mit Ausnahme von $n = 1$, wo $\bar{\gamma}_0^{1.1} = \gamma_0^{1.1} - \frac{1}{2}\,\alpha^2$ ist.

1. Grad:

$$
\left.
\begin{aligned}
A_{1.0}(n+1, -n) &= \bar{\gamma}_0^{1\cdot n}\{(n^2+2n)-2n^2\varphi\}+2n\gamma_1^{1\cdot n}\\
A_{1.0}(n-1, -n) &= \bar{\gamma}_0^{1\cdot n}\{(n^2+2n)+2n^2\varphi\}+2n\gamma_1^{1\cdot n}\\
B_{1.0}(n+1, -n) &= \bar{\gamma}_0^{1\cdot n}\{-(n^2+n)+2n^2\varphi\}+\gamma_1^{1\cdot n}\{-(4n+6)+4n\varphi\}-8\gamma_2^{1\cdot n}\\
B_{1.0}(n-1, -n) &= \bar{\gamma}_0^{1\cdot n}\{-(n^2+n)-2n^2\varphi\}+\gamma_1^{1\cdot n}\{-(4n+6)-4n\varphi\}-8\gamma_2^{1\cdot n}\\
A_{0.1}(n, -n+1) &= \bar{\gamma}_0^{1\cdot n}(n^2-n)-2n\gamma_1^{1\cdot n}\\
A_{0.1}(n, -n-1) &= -\bar{\gamma}_0^{1\cdot n}(3n^2+n)-2n\gamma_1^{1\cdot n}\\
B_{0.1}(n, -n+1) &= -\bar{\gamma}_0^{1\cdot n}(n^2-n)+6\gamma_1^{1\cdot n}+8\gamma_2^{1\cdot n}\\
B_{0.1}(n, -n-1) &= +\bar{\gamma}_0^{1\cdot n}(3n^2+n)+\gamma_1^{1\cdot n}(8n+6)+8\gamma_2^{1\cdot n},
\end{aligned}
\right\} \quad (62)
$$

wo:

$$\varphi = \frac{n'}{n}\,\frac{1-\varsigma'}{1-\varsigma} = \mu\,\frac{1-\varsigma'}{1-\varsigma}$$

ist, und es in erster Annäherung schon genügt, $\varphi = \mu$ zu setzen.

Zum Schluss dieser allgemeinen Übersicht über die Entwickelung der Störungsfunction soll noch der Zusammenhang der Gyldén'schen und Brendel'schen A und B mitgetheilt werden. Auf Grund desselben kann man bei Berechnung der absoluten Störungen eines kleinen Planeten, welcher sich im Gyldén'schen Tafelwerk tabuliert findet, die in demselben gegebenen A- und B-Coefficienten bei Anwendung der Brendel'schen Entwickelungsform direct benützen.

»Zusammenhang der Gyldén'schen und Brendel'schen Entwickelungs-Coefficienten der Störungsfunction.«

1. $\mathcal{B}_{n.0.0} = \mathcal{B}(n, -n)_{0.0}$; $\quad A_{0.0.0} = 0$, aber: $B_{0.0.0} = B(0, -0)_{0.0}$ [1]
2. $\mathcal{B}^{(-1)}_{n.1.0} = \mathcal{B}(n-1, -n)_{0.0}$; $\quad \mathcal{B}^{(-1)}_{0.1.0} = 0$
3. $\mathcal{B}^{(+1)}_{n.1.0} = \mathcal{B}(n+1, -n)_{0.0}$; $\quad A^{(+1)}_{0.1.0} = 0$, aber $B^{(+1)}_{0.1.0} = 2B(1, \quad 0)_{0.0}$
4. $\mathcal{B}^{(-1)}_{n+1.0.1} = \mathcal{B}(n, -n-1)_{0.0}$; $\quad \mathcal{B}^{(-1)}_{0.0.1} = 0$; $\quad A^{(-1)}_{1.0.1} = 0$.
5. $\mathcal{B}^{(+1)}_{n-1.0.1} = \mathcal{B}(n, -n+1)_{0.0}$; $\quad B^{(-1)}_{1.0.1} = B(0, +1)+B(0, -1)$
6. $\mathcal{B}^{(-2)}_{n.2.0} = \mathcal{B}(n-2, -n)_{0.0}$; $\quad \mathcal{B}^{(-2)}_{0.2.0} = 0$;

   $\mathcal{B}^{(-2)}_{1.2.0}$ ist bei Gyldén nicht tabuliert.
7. $\mathcal{B}^{(-1)}_{n-1.1.1} = \mathcal{B}(n-1, -n+1)$ für die Werte von $n = 2$ an; $\quad \mathcal{B}^{(-1)}_{0.1.0} = 0$,

   für $n = 1$: $A^{(+1)}_{0.1.1} = -A(\overbrace{n-1, -n+1}^{n=1})_{0.0}$; $\quad B^{(+1)}_{0.1.1} = B(n-1, -n+1)_{0.0}$.
8. $\mathcal{B}^{(-2)}_{n+1.1.1} = \mathcal{B}(n-1, -n-1)_{0.0}$ für alle Werte von $n = 1$ an; $\quad \mathcal{B}^{(-2)}_{0.1.1} = 0$;

   für $n = 0$: $A^{(-2)}_{1.1.1} = -A(n+1, -n+1)+A(n-1, n-1) = 0$.

   $B^{(-2)}_{1.1.1} = B(n+1, -n+1)+B(n-1, -n-1)$.

   $B^{(-2)}_{1.1.1}$ ist bei Gyldén nicht tabuliert. (63)

[1] In den Hilfstafeln (cf. Seite XIX, Zeile 16—17 von unten) aber hat Gyldén den doppelten Betrag von seinem $B(0, -0)_{0.0}$ gegeben.

9. $A\!\!\!B^{(-2)}_{n+2.0.2} = A\!\!\!B(n, -n-2)_{0.0}$ für die Werte von $n = 1$ an; $A\!\!\!B^{(-2)}_{0.0.2} = 0$;

$$A^{(-2)}_{1.0.2} = -A\overbrace{(n, -n+2)}^{n=1}$$ ist bei Gyldén nicht tabuliert.

$$B^{(-2)}_{1.0.2} = B\overbrace{(n, -n+2)}^{n=1}$$ » » » » »

$$B^{(-2)}_{2.0.2} = B\overbrace{(n, -n+2)}^{n=0} + B\overbrace{(n, -n-2)}^{n=0}$$ ist bei Gyldén nicht tabuliert,

dagegen:

$$A^{(-2)}_{2.0.2} = -A\overbrace{(n, -n+2)}^{n=0} + A\overbrace{(n, -n-2)}^{n=0} = 0.$$

10. $A\!\!\!B_{n.2.0} = \{A\!\!\!B_{2.0}(n, -n)_{0.0} + A\!\!\!B(n, -n)_{1.0}\}$ für alle Werte von n,

aber:

$$A_{0.2.0} = 0; \qquad B_{0.2.0} = \{B_{2.0}\overbrace{(n, -n)}^{n=0}_{0.0} + B\overbrace{(n, -n)}^{n=0}_{1.0}\}.$$

11. $A\!\!\!B_{n.0.2} = \{A\!\!\!B_{0.2}(n, -n)_{0.0} + A\!\!\!B(n, -n)_{0.1}\}$ für alle Werte von n,

aber: $A_{0.0.2} = 0; \qquad B_{0.0.2} = \{B_{2.0}\overbrace{(n, -n)}^{n=0}_{0.0} + B\overbrace{(n, -n)}^{n=0}_{1.0}\}.$ (63)

Ferner ist bei Gyldén gleichfalls noch nicht tabuliert:

$A\!\!\!B^{(+2)}_{n-1.1.1} = A\!\!\!B(n+1, -n+1)$ für alle Werte von $n = 1$ an; $A\!\!\!B^{(+2)}_{0.1.1} = 0$,

$A\!\!\!B^{(+1)}_{n+1.1.1} = A\!\!\!B(n+1, -n-1)$ » » » $n = 1$ an,

aber: $A^{(+1)}_{0.1.1} = -A\overbrace{(n-1, -n+1)}^{n=1}; \qquad B^{(+1)}_{0.1.1} = B\overbrace{(n-1, -n+1)}^{n=1},$

$$A^{(+1)}_{1.1.1} = -A\overbrace{(n-1, -n+1)}^{n=0} + A\overbrace{(n+1, -n-1)}^{n=0} = 0,$$

$$B^{(+1)}_{1.1.1} = B\overbrace{(n-1, -n+1)}^{n=0} + B\overbrace{(n+1, -n-1)}^{n=0}.$$

Ebenso sind bei Gyldén andere Glieder noch nicht erschöpfend tabuliert. In der Vorrede seiner Hilfstafeln spricht Gyldén aus, dass die Aussichten zur Vervollständigung seines Tafelwerkes [1] für die kleinen Planeten wohl nicht ganz fehlen würden.—

B. Die numerische Entwickelung der Störungsfunction für den Planeten (153) Hilda.

Wie bereits erwähnt, ist die numerische Entwickelung der Störungsfunction für die Mehrzahl der kleinen Planeten durch das Gyldén'sche Tafelwerk bereits zum größten Theile durchgeführt, insofern, als in demselben wenigstens die wichtigsten A- und B-Coefficienten größtentheils tabuliert sind. Zunächst hat

---

[1] Im Gyldén'schen Tafelwerk sind mir die folgenden Druckfehler aufgefallen:

I. Auf Seite 84 muss in Colonne $n = 5$, Zeile 1 bis 30, 8 statt 9 stehen.

II. Auf Seite 87 muss in Colonne $n = 7$, Zeile 13, in der 6. Decimale 7 statt 1 stehen.

Herr Masal[1] in seiner »β-Tafel« für alle Werte von $\log\alpha = 9.300$ bis $\log\alpha = 9.850$ die Transcendenten $\beta_n^{(s)}$ tabuliert und damit die Grundlagen für die Gyldén'schen Hilfstafeln geschaffen, welche für die Argumente $\log\alpha = 9.620$ bis $\log\alpha = 9.800$ die aus den β folgenden $\gamma_i^{1\cdot n}, \gamma_i^{3\cdot n}, \gamma_i^{5\cdot n}$, sowie die A und B geben.

Für Hilda müssen indes diese Rechnungen von Grund aus durchgeführt werden, da das Hilda entsprechende $\log\alpha = 9.881$ nicht mehr in den Gyldén'schen Tafeln enthalten ist. Zunächst ist das elliptische Integral:

$$\beta_n^{(s)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{s}{2}}}$$

und zwar die folgenden Werteserien desselben:

$$\left.\begin{array}{l} \beta_0^{(1)},\quad \beta_1^{(1)},\quad \beta_2^{(1)}\ldots\beta_{12}^{(1)} \\ \beta_0^{(3)},\quad \beta_1^{(3)},\quad \beta_2^{(3)}\ldots\beta_{12}^{(3)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_0^{(9)},\quad \beta_1^{(9)},\quad \beta_2^{(9)}\ldots\beta_{12}^{(9)} \end{array}\right\} \tag{64}$$

numerisch für Hilda zu bestimmen. Durch unter Gyldén's Leitung seinerzeit ausgeführte Rechnungen und die dabei von ihm erhaltenen Aufschlüsse bin ich in der Lage, die folgende Darstellung in seinem Sinne zu geben, wie sie sich sonst nicht findet. Auf alle in den Gyldén'schen Tafeln nicht tabulierten kleinen Planeten, also auf die verschiedenen Planeten des Hildatypus, auf Thule u. a. m. finden die folgenden Vorschriften daher Anwendung.

Da die Einzelberechnung dieser 65 β-Werte, die nach (64) zu bestimmen sind, mit erheblicher Arbeit verbunden wäre, hat Gyldén zu ihrer Ermittelung im Anschluss an Hansen ein abkürzendes Verfahren gegeben, das wir benützen wollen.

Zunächst rechnet man den Grundwert $\beta_0^{(1)}$ direct, entweder mit Hilfe einer hypergeometrischen Reihe oder, was häufig günstiger, durch mechanische Quadratur, oder auch durch das Gauss'sche Verfahren des arithmetisch-geometrischen Mittels. Die folgenden $\beta_n^{(1)}$ aber bestimmt man nicht direct, sondern mittelst der Relation zwischen drei aufeinanderfolgenden β, bezüglich deren Ableitung auf Gyldén's »Untersuchungen zur Theorie der Bewegung der Himmelskörper« verwiesen sei: [2]

$$(2n+1)\beta_n^{(s)} - [2n+2+\alpha^2(2n-s+3)]\beta_{n+1}^{(s)} + \alpha^2[2n-s+4]\beta_{n+2}^{(s)} = 0, \tag{65}$$

die, wenn man:

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{2n+2+\alpha^2(2n-s+3)},\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots$$

$$f_n = \alpha^2\frac{2n-s+4}{2n+1}\lambda_n\lambda_{n+1}, \tag{66}$$

$$\vartheta_n = \frac{\beta_{n+1}^{(s)}}{\lambda_n\beta_n^{(s)}}$$

setzt, übergeht in:

$$\vartheta_n = \frac{1}{1-f_n\vartheta_{n+1}}, \tag{67}$$

---

[1] Hans Masal: Table de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{s}{2}}}$ servant à la détermination des perturbations des petites planètes dar Jupiter et Saturne.

[2] Cf. Undersökningar af theorien för kimlakropparnas rörelser, Band II, Seite 23. [Die deutsche Übersetzung dieses übrigens zum Theil veralteten Werkes (das zu Gyldén's ersten größeren Arbeiten über die Mechanik des Himmels gehört), welche vom Verfasser vorliegender Abhandlung ausgeführt worden ist, befindet sich im Besitze Herrn Professor Seeligers.]

oder, als Kettenbruch geschrieben:

$$\vartheta_n = \cfrac{1}{1-\cfrac{f_n}{1-\cfrac{f_{n+1}}{1-\dots}}}$$

$$\cfrac{f_{n+\nu-1}}{1-f_{n+\nu}\vartheta_{n+\nu+1}}.$$

Für große Werte von n nähert sich ϑ_n der Grenze:

$$\lim(\vartheta_n) = 1+\alpha^2.$$

Darnach hat man also, nachdem λ_n und f_n berechnet worden, einen Ausgangswert ϑ_n für genügend hohes n anzusetzen und aus diesem successive $\vartheta_{n-1}, \vartheta_{n-2} \dots \vartheta_0$ zu berechnen. Im Besitze dieser $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2 \dots$ erhält man dann aus:

$$p_n = \vartheta_n \lambda_n \tag{68}$$

successive $p_0, p_1, p_2 \dots$ und mittelst dieser Werte und dem direct berechneten $\beta_0^{(1)}$ nach der Beziehung:

$$\beta_{n+1}^{(s)} \doteq \beta_n^{(s)} p_n \tag{69}$$

successive $\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)} \dots \beta_{12}^{(1)}$. Den Endwert $\beta_{12}^{(1)}$ bestimmt man dann zur Controle gleichfalls wieder direct mittelst mechanischer Quadratur oder hypergeometrischer Reihe. Das Übereinstimmen des direct gerechneten Wertes $\beta_{12}^{(1)}$ mit dem durch die Formel (69) erhaltenen verbürgt die Richtigkeit der $\beta_n^{(1)}$-Serie.

Aus dieser $\beta_n^{(1)}$-Serie ergeben sich jetzt die übrigen β, nämlich:

$$\beta_n^{(3)}, \quad \beta_n^{(5)}, \quad \beta_n^{(7)}, \quad \beta_n^{(9)}$$

mittelst der Recursivformel:

$$\beta_n^{(s+2)} = \beta_n^{(s)} + \alpha^2 \beta_{n+1}^{(s+2)}, \tag{70}$$

indem man $\beta_{12}^{(3)}, \beta_{12}^{(5)}, \beta_{12}^{(7)}, \beta_{12}^{(9)}$ wieder direct berechnet mittelst Reihe oder Quadratur und dann zunächst aus $\beta_{12}^{(3)}$ successive $\beta_{11}^{(3)}, \beta_{10}^{(3)} \dots \beta_0^{(3)}$ rückwärts rechnet nach der Gleichung (70). Ebenso bei $\beta_n^{(5)}, \beta_n^{(7)}, \beta_n^{(9)}$. Zur Controle dieser ganzen Rechnung ermittelt man dann wieder $\beta_0^{(3)}, \beta_0^{(5)}$ etc. direct und wenn diese letzteren Werte mit den durch das Recursivverfahren erhaltenen Endwerten $\beta_0^{(3)}$ etc. übereinstimmen, so ist die Richtigkeit aller β überhaupt gesichert. Direct rechnet man also sowohl die fünf Anfangswerte:

$$\beta_0^{(1)}, \quad \beta_0^{(3)}, \quad \beta_0^{(5)}, \quad \beta_0^{(7)}, \quad \beta_0^{(9)}$$

wie die fünf Endwerte:

$$\beta_{12}^{(1)}, \quad \beta_{12}^{(3)}, \quad \beta_{12}^{(5)}, \quad \beta_{12}^{(7)}, \quad \beta_{12}^{(9)},$$

und zwar $\beta_0^{(1)}, \beta_{12}^{(3)}, \beta_{12}^{(5)}, \beta_{12}^{(7)}, \beta_{12}^{(9)}$ eo ipso, um überhaupt das Recursivverfahren anwenden zu können, die Werte $\beta_{12}^{(1)}, \beta_0^{(3)}, \beta_0^{(5)}, \beta_0^{(7)}, \beta_0^{(9)}$ aber zur Controle.

Was dabei die numerische Wahl des Index n in:

$$\vartheta_n = 1+\alpha^2$$

betrifft, so ist Folgendes festzuhalten. Bei einem einfacheren Planeten genügt es schon, $n = 12$ oder 14 zu setzen; bei Planeten des Hildatypus aber muss man von vorneherein mindestens etwa $n = 20$ oder höher ansetzen. Wählt man nämlich den Index n zu niedrig, so convergieren die ϑ nicht in der Art, dass man mittelst derselben solche $\beta_i^{(1)}$ erhält, welche auf Grund von (69) zu einem $\beta_0^{(1)}$ Wert führen, der mit dem direct gerechneten übereinstimmt.

Für Hilda setzte ich zunächst:

$$\vartheta_{21} = 1+\alpha^2,$$

fand aber so einen Wert von $\beta_0^{(1)}$, der von dem direct gerechneten noch um 12 Einheiten der 6. Decimale abwich. In der Vermuthung, noch zu niedrig gegriffen zu haben, setzte ich:

$$\vartheta_{30} = 1+\alpha^2$$

erhielt dadurch aber in der Reihe der ϑ von ϑ_{12} an bis zu ϑ_0 wieder genau die gleichen Werte, ein Zeichen, dass die Wahl von $n = 24$ doch hoch genug war und die genannte Abweichung blieb so bestehen. Um sie zu beseitigen, führte ich die ganze Rechnung zum drittenmale siebenstellig durch und erhielt so ein genügendes Resultat.

Ehe wir die gefundenen Rechenresultate für Hilda mittheilen, erübrigt noch eine Bemerkung über das bei der directen Berechnung der $\beta_n^{(s)}$ einzuschlagende Verfahren. Man kann die β einerseits berechnen mittelst einer hypergeometrischen Reihe, und zwar: die Werte $\beta_0^{(1)}, \beta_0^{(3)}, \beta_0^{(5)}, \beta_0^{(7)}, \beta_0^{(9)}$ aus:

$$\beta_n^{(s)} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\left\{1 + \frac{s}{2}\,\frac{2n+1}{2n+2}\,\alpha^2 + \frac{s(s+2)(2n+1)(2n+3)}{2.4\;(2n+2)(2n+4)}\,\alpha^4 + \ldots\right\} \tag{71}$$

hingegen $\beta_{12}^{(1)}, \beta_{12}^{(3)}, \beta_{12}^{(5)}, \beta_{12}^{(7)}, \beta_{12}^{(9)}$ aus:

$$\beta_n^{(s)} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{1}{(1-\alpha^2)^{\frac{s}{2}}}\left\{1 - \frac{s}{2}\,\frac{1}{2n+2}\,\beta^2 + \frac{s(s+2)}{2.4}\,\frac{1.3}{(2n+2)(2n+4)}\,\beta^4 - \ldots\right\}, \tag{72}$$

wobei in (72) rechts in der Klammer:

$$\beta^2 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

ist. Im allgemeinen convergieren diese Reihen so schnell, dass schon nach Mitnahme einer kleinen Zahl von Gliedern der Rest der Reihe numerisch zu vernachlässigen ist, indem z. B. die folgenden Glieder nicht mehr in Betracht kommen, wenn man bei sechsstelliger Rechnung an ein Glied der Reihe gekommen, das z. B. 0.000001 beträgt.

Bei Planeten hingegen, für die α so beschaffen, dass die Reihen (71) und (72) langsam oder eventuell gar nicht mehr convergieren, ist die Berechnung der β mittelst mechanischer Quadraturen anzuwenden, die auch andere Vorzüge, z. B. den der Selbstcontrole der Rechnung bietet. Das allgemeine Verfahren der Bestimmung elliptischer Integrale auf diesem Wege besteht kurz in folgendem.

Es ist:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi)\,d\varphi = \Phi = \frac{1}{18}\left\{\frac{1}{2}f(0°) + f(5°) + f(10°) + \ldots + f(85°) + \frac{1}{2}f(90°)\right\} \tag{73}$$

Setzt man indes einerseits:

$$\Phi = \frac{1}{9}\left\{\frac{1}{2}f(0°) + f(10°) + f(20°) + \ldots + f(80°) + \frac{1}{2}(90°)\right\}, \tag{74}$$

andererseits:

$$\Phi = \frac{1}{9}\{f(5°) + f(15°) + \ldots + f(75°) + f(85°)\}, \tag{75}$$

so liegt der wahre Φ-Wert zwischen den beiden durch (74) und (75) gegebenen, deren arithmetisches Mittel also für Φ zu adoptieren ist, und wobei eine Rechencontrole darin besteht, dass (74) und (75) nahezu den gleichen Φ-Wert ergeben müssen.

Der Wert unseres elliptischen Integrales $\beta_n^{(s)}$ ergibt sich demnach als Mittel aus den zwei Werten:

$$\beta_n^{(s)} = \frac{1}{9}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\sin^{2n}(0°)}{[1-\alpha^2\sin^2(0°)]^{\frac{s}{2}}} + \frac{\sin^{2n}(10°)}{[1-\alpha^2\sin^2(10°)]^{\frac{s}{2}}} + \ldots + \frac{\sin^{2n}(80°)}{[1-\alpha^2\sin^2(80°)]^{\frac{s}{2}}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{[1-\alpha^2]^{\frac{s}{2}}}\right\} \tag{76}$$

und:

$$\beta_n^{(s)} = \frac{1}{9}\left\{\frac{\sin^{2n}(5°)}{[1-\alpha^2\sin^2(5°)]^{\frac{s}{2}}} + \frac{\sin^{2n}(15°)}{[1-\alpha^2\sin^2(15°)]^{\frac{s}{2}}} + \ldots + \frac{\sin^{2n}(85°)}{[1-\alpha^2\sin^2(85°)]^{\frac{s}{2}}}\right\}, \tag{77}$$

die für das bestimmte α des betreffenden kleinen Planeten numerisch auszurechnen sind.

Dabei ist noch zu bemerken, dass für $n = 0$ die Formel (76) nicht brauchbar ist, weil das erste Glied derselben in diesem Fall unbestimmt wird. Das zu berechnende Integral wird in diesem Falle:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-\alpha^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{s}{2}}}.$$

Wendet man auf dasselbe die Formel der mechanischen Quadratur an, so ergibt sich, da die zu integrierende Function für $\varphi = 0$ den Wert 1 annimmt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-\alpha^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{s}{2}}} = \frac{1}{9}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{[1-\alpha^2 \sin^2 (5^\circ)]^{\frac{s}{2}}} + \frac{1}{[1-\alpha^2 \sin^2 (15^\circ)]^{\frac{s}{2}}} + \ldots\right\}.$$

Man kann also auch sagen, dass in der Formel (76), wenn $n = 0$ ist, das erste Glied gleich $\frac{1}{2}$ zu setzen ist.

Indem ich nun nach Gyldén für Hilda der Rechnung den folgenden α-Wert zugrunde legte:

$$\log \alpha = 9.8810475,$$

erhielt ich zunächst (indem $\log \vartheta_{n+1} = 0.1981684$ angenommen wurde) die folgenden Werte:

n	$\log \lambda_n$	$\log f_n$	$\log \vartheta_n$
0	9.5008016	9.4169108	0.2422677
1	9.6768929	9.3834869	0.2140832
2	9.7220503	9.3747129	0.2060580
3	9.7438396	9.3711532	0.2035157
4	9.7560741	9.3693624	0.2018089
5	9.7640431	9.3683358	0.2008910
6	9.7696470	9.3676928	0.2002599
7	9.7738029	9.3672635	0.1998278
8	9.7770080	9.3669629	0.1995185
9	9.7795552	9.3667441	0.1992893
10	9.7816282	9.3665799	0.1991134
11	9.7833482	9.3664537	0.1989767
12	9.7847983	9.3663545	0.1988676
13	9.7860374	9.3662749	0.1987791
14	9.7871083	9.3662103	0.1987063
15	9.7880433	9.3661571	0.1986455
16	9.7888606	9.3661128	0.1985938
17	9.7895971	9.3660755	0.1985490
18	9.7902497	9.3660438	0.1985090
19	9.7908362	9.3660167	0.1984716
20	9.7913602	9.3659932	0.1984341
21	9.7918474	9.3659727	0.1983929
22	9.7922863	9.3659550	0.1983424
23	9.7926883	9.3659392	0.1982728
24	9.7930577	—	—

(78)

Dabei sind diese, wie überhaupt alle folgenden Rechnungen zweimal unabhängig durchgeführt.

Um die Grenze der Verwertbarkeit der hypergeometrischen Reihen in einem so extremen Falle, wie Hilda, zu prüfen (nur für Thule ist ja α noch größer als für die Planeten des Hildatypus), wo die Reihe (72), da $\beta^2 > 1$ ist, divergiert, wurden die folgenden Werte gerechnet. Zunächst nach (71) die $\beta_0^{(s)}$, wobei die Reihe für $\beta_0^{(1)}$ und $\beta_0^{(3)}$ bei α^{50}, die Reihe für $\beta_0^{(5)}$ und $\beta_0^{(7)}$ bei α^{62}, die Reihe für $\beta_0^{(9)}$ erst bei α^{70} abgebrochen werden konnte; die Reihe (72) konnte für $\beta_{12}^{(1)}$ bei β^{26}, für $\beta_{12}^{(3)}$ aber bei β^{56} abgebrochen werden. Die numerische Divergenz hingegen trat ein bei $\beta_{12}^{(5)}$, wo die Reihe bis zum Gliede in α^{56} immer abnahm, um, wie man sich überzeugt, an dieser Stelle umzukehren und wieder zu wachsen, so dass die Ermittelung von $\beta_{12}^{(5)}$, $\beta_{12}^{(7)}$, $\beta_{12}^{(9)}$ überhaupt nur mittelst mechanischer Quadratur möglich war. Ich fand:

I. Aus den hypergeometrischen Reihen:

$$\left.\begin{aligned}
\log \beta_0^{(1)} &= 0.0886963 \\
\log \beta_0^{(3)} &= 0.2961145 \\
\log \beta_0^{(5)} &= 0.5409142 \\
\log \beta_0^{(7)} &= 0.8167040 \\
\log \beta_0^{(9)} &= 1.1159814 \\
\log \beta_{12}^{(1)} &= 9.3842637 \\
\log \beta_{12}^{(3)} &= 9.7393370.
\end{aligned}\right\} \tag{79}$$

II. Durch mechanische Quadratur:

$$\left.\begin{aligned}
\log \beta_0^{(1)} &= 0.0886963 \\
\log \beta_0^{(3)} &= 0.2961147 \\
\log \beta_0^{(5)} &= 0.5409150 \\
\log \beta_0^{(7)} &= 0.8167048 \\
\log \beta_0^{(9)} &= 1.1159842 \\
\log \beta_{12}^{(1)} &= 9.3842636 \\
\log \beta_{12}^{(3)} &= 9.7393375 \\
\log \beta_{12}^{(5)} &= 0.0958159 \\
\log \beta_{12}^{(7)} &= 0.453538 \\
\log \beta_{12}^{(9)} &= 0.812366.
\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Was die etwas stärkere Abweichung des durch die Reihe und des durch mechanische Quadratur erhaltenen Wertes von $\beta_0^{(9)}$ betrifft, so ist festzuhalten, dass die aus der Reihe (71) gerechneten β-Werte insofern weniger zuverlässig sind, wie die durch mechanische Quadratur erhaltenen, als man nicht weiß, wie groß der vernachlässigte Rest der Reihe ist. Denn die letzten vernachlässigten Glieder können zwar für sich klein, ihre Summe aber kann groß sein, während bei der Reihe (72), die einen regelmäßigen Zeichenwechsel hat, der Fehler stets kleiner ist, als das erste vernachlässigte Glied.

Weiter fand ich für Hilda:

$$\left.\begin{array}{lll}
\log \beta_0^{(1)} = 0.0886963 & \log \beta_5^{(1)} = 9.557348 & \log \beta_9^{(1)} = 9.442347 \\
\log \beta_1^{(1)} = 9.831766 & \log \beta_6^{(1)} = 9.522282 & \log \beta_{10}^{(1)} = 9.421191 \\
\log \beta_2^{(1)} = 9.722742 & \log \beta_7^{(1)} = 9.492189 & \log \beta_{11}^{(1)} = 9.401933 \\
\log \beta_3^{(1)} = 9.652050 & \log \beta_8^{(1)} = 9.465820 & \log \beta_{12}^{(1)} = 9.384258 \\
\log \beta_4^{(1)} = 9.599405 & &
\end{array}\right\} \tag{81}$$

$\log \beta_0^{(3)} = 0.296114$	$\log \beta_5^{(3)} = 9.893754$	$\log \beta_9^{(3)} = 9.792290$
$\log \beta_1^{(3)} = 0.113492$	$\log \beta_6^{(3)} = 9.863338$	$\log \beta_{10}^{(3)} = 9.773124$
$\log \beta_2^{(3)} = 0.030165$	$\log \beta_7^{(3)} = 9.836859$	$\log \beta_{11}^{(3)} = 9.755556$
$\log \beta_3^{(3)} = 9.973341$	$\log \beta_8^{(3)} = 9.813386$	$\log \beta_{12}^{(3)} = 9.739338$
$\log \beta_4^{(3)} = 9.929573$		
$\log \beta_0^{(5)} = 0.540904$	$\log \beta_5^{(5)} = 0.234618$	$\log \beta_9^{(5)} = 0.144349$
$\log \beta_1^{(5)} = 0.413157$	$\log \beta_6^{(5)} = 0.207979$	$\log \beta_{10}^{(5)} = 0.126882$
$\log \beta_2^{(5)} = 0.348662$	$\log \beta_7^{(5)} = 0.184482$	$\log \beta_{11}^{(5)} = 0.110772$
$\log \beta_3^{(5)} = 0.302328$	$\log \beta_8^{(5)} = 0.163433$	$\log \beta_{12}^{(5)} = 0.095816$
$\log \beta_4^{(5)} = 0.265469$		
$\log \beta_0^{(7)} = 0.816703$	$\log \beta_5^{(7)} = 0.579191$	$\log \beta_9^{(7)} = 0.498233$
$\log \beta_1^{(7)} = 0.726790$	$\log \beta_6^{(7)} = 0.555638$	$\log \beta_{10}^{(7)} = 0.482222$
$\log \beta_2^{(7)} = 0.675914$	$\log \beta_7^{(7)} = 0.534618$	$\log \beta_{11}^{(7)} = 0.467389$
$\log \beta_3^{(7)} = 0.637518$	$\log \beta_8^{(7)} = 0.515607$	$\log \beta_{12}^{(7)} = 0.453538$
$\log \beta_4^{(7)} = 0.606060$		
$\log \beta_0^{(9)} = 1.115981$	$\log \beta_5^{(9)} = 0.926865$	$\log \beta_9^{(9)} = 0.853727$
$\log \beta_1^{(9)} = 1.051098$	$\log \beta_6^{(9)} = 0.905856$	$\log \beta_{10}^{(9)} = 0.838991$
$\log \beta_2^{(9)} = 1.010066$	$\log \beta_7^{(9)} = 0.886910$	$\log \beta_{11}^{(9)} = 0.825246$
$\log \beta_3^{(9)} = 0.977715$	$\log \beta_8^{(9)} = 0.869629$	$\log \beta_{12}^{(9)} = 0.812366.$
$\log \beta_4^{(9)} = 0.950516$		

(81)

Der Vergleich der so durch die Formeln (69) und (70) erhaltenen Endwerte der β mit den direct gerechneten, durch die Formeln (80) gegebenen Werten zeigt die Richtigkeit der sämmtlichen in (81) enthaltenen β-Werte. Die Abweichung des direct berechneten Wertes von $\beta_{12}^{(5)}$ mit dem recursiv erhaltenen Werte von $\beta_{12}^{(5)}$, die nur die sechste Stelle entstellt und für das Folgende belanglos ist, konnte nicht beseitigt werden, da die directe Berechnung der Quadratur für $\beta_{12}^{(5)}$ sowohl, wie das Recursivverfahren für die 12 Werte $\beta_n^{(5)}$, dreimal unabhängig durchgeführt, stets zu denselben Resultaten führte und belanglose Abweichungen in den höheren Decimalen, als durch das Recursivverfahren bedingt, nicht ausgeschlossen erscheinen. Dabei wurden $\beta_n^{(1)}$, $\beta_n^{(3)}$ und $\beta_n^{(5)}$ 7-stellig gerechnet und dann 6-stellig gekürzt.

Mittelst der so erhaltenen Werte der β fand ich für Hilda folgende γ-Werte:

$\log \gamma_0^{1.0} = 9.9697438$	$\log \gamma_0^{1.5} = 8.843633$	$\log \gamma_0^{1.9} = 8.252822$
$\log \bar{\gamma}_0^{1.1} = 9.014555$ [1]	$\log \gamma_0^{1.6} = 8.689615$	$\log \gamma_0^{1.10} = 8.112714$
$\log \gamma_0^{1.2} = 9.365884$	$\log \gamma_0^{1.7} = 8.540569$	$\log \gamma_0^{1.11} = 7.974503$
$\log \gamma_0^{1.3} = 9.176240$	$\log \gamma_0^{1.8} = 8.395248$	$\log \gamma_0^{1.12} = 7.837875$
$\log \gamma_0^{1.4} = 9.004643$		

(82)

[1] Dabei ist entsprechend den früheren allgemeinen Entwickelungen bei Berechnung dieses Wertes die Subtraction von $\frac{1}{2}\alpha^2$ bereits ausgeführt. Und ebenso ist dieselbe bei allen denjenigen der folgenden niederen und höheren η, γ und ϑ berücksichtigt, in deren analytischem Ausdruck $\bar{\gamma}_0^{1.1} = \gamma_0^{1.1} - \frac{\alpha^2}{2}$ auftritt, die dementsprechend in den Formeln (83) bis (89) durch $\bar{\eta}_0^{1.1}$, $\bar{\gamma}_0^{3.1}$ etc. bezeichnet sind.

$$\left.\begin{array}{lll}
\log \gamma_1^{1.0} = 9.455604 & \log \gamma_1^{1.4} = 8.760056 & \log \gamma_1^{1.8} = 8.182783 \\
\log \gamma_1^{1.1} = 9.253325 & \log \gamma_1^{1.5} = 8.610688 & \log \gamma_1^{1.9} = 8.044664 \\
\log \gamma_1^{1.2} = 9.077548 & \log \gamma_1^{1.6} = 8.465256 & \log \gamma_1^{1.10} = 7.908143 \\
\log \gamma_1^{1.3} = 8.914828 & \log \gamma_1^{1.7} = 8.322831 & \log \gamma_1^{1.11} = 7.772973 \\
\log \gamma_2^{1.0} = 9.327931 & \log \gamma_2^{1.4} = 8.711438 & \log \gamma_2^{1.8} = 8.154531 \\
\log \gamma_2^{1.1} = 9.162644 & \log \gamma_2^{1.5} = 8.568989 & \log \gamma_2^{1.9} = 8.019467 \\
\log \gamma_2^{1.2} = 9.006833 & \log \gamma_2^{1.6} = 8.428987 & \log \gamma_2^{1.10} = 7.885560 \\
\log \gamma_2^{1.3} = 8.857029 & \log \gamma_2^{1.7} = 8.290950 & \\
\log \gamma_3^{1.0} = 9.299701 & \log \gamma_3^{1.4} = 8.720991 & \log \gamma_3^{1.7} = 8.311737 \\
\log \gamma_3^{1.1} = 9.149290 & \log \gamma_3^{1.5} = 8.583027 & \log \gamma_3^{1.8} = 8.177952 \\
\log \gamma_3^{1.2} = 9.003469 & \log \gamma_3^{1.6} = 8.446701 & \log \gamma_3^{1.9} = 8.045148 \\
\log \gamma_3^{1.3} = 8.860965 & & \\
\log \gamma_4^{1.0} = 9.136802 & \log \gamma_4^{1.3} = 8.896338 & \log \gamma_4^{1.6} = 8.491562 \\
\log \gamma_4^{1.1} = 9.174198 & \log \gamma_4^{1.4} = 8.760105 & \log \gamma_4^{1.7} = 8.358864 \\
\log \gamma_4^{1.2} = 9.034237 & \log \gamma_4^{1.5} = 8.625250 & \log \gamma_4^{1.8} = 8.227032.
\end{array}\right\} \quad (82)$$

Hieraus ergeben sich folgende Werte für die niederen η:

$$\left.\begin{array}{lll}
\log \eta_0^{1.0} = 9.756634 & \log \eta_1^{1.0} = 0.152935 & \log \eta_2^{1.0} = 0.311214 \\
\log \bar{\eta}_0^{1.1} = 9.664451 & \log \eta_1^{1.1} = 0.048943 & \log \eta_2^{1.1} = 0.196804 \\
\log \eta_0^{1.2} = 9.847277 & \log \eta_1^{1.2} = 9.946718 & \log \eta_2^{1.2} = 0.084335 \\
\log \eta_0^{1.3} = 9.788548 & \log \eta_1^{1.3} = 9.844326 & \log \eta_2^{1.3} = 9.972793 \\
\log \eta_0^{1.4} = 9.715504 & \log \eta_1^{1.4} = 9.741256 & \log \eta_2^{1.4} = 9.861686 \\
\log \eta_0^{1.5} = 9.633900 & \log \eta_1^{1.5} = 9.637377 & \log \eta_2^{1.5} = 9.750750 \\
\log \eta_0^{1.6} = 9.546530 & \log \eta_1^{1.6} = 9.532682 & \log \eta_2^{1.6} = 9.639834.
\end{array}\right\} \quad (83)$$

Und damit die folgende erste Serie von höheren γ-Werten:

$$\left.\begin{array}{lll}
\log \gamma_0^{3.0} = 0.453967 & \log \gamma_1^{3.0} = 0.913276 & \log \gamma_2^{3.0} = 1.233837 \\
\log \bar{\gamma}_0^{3.1} = 0.148583 & \log \bar{\gamma}_1^{3.1} = 0.719725 & \log \bar{\gamma}_2^{3.1} = 1.068303 \\
\log \gamma_0^{3.2} = 0.351659 & \log \gamma_1^{3.2} = 0.753584 & \log \gamma_2^{3.2} = 1.050839 \\
\log \gamma_0^{3.3} = 0.276616 & \log \gamma_1^{3.3} = 0.664690 & \log \gamma_2^{3.3} = 0.954644 \\
\log \gamma_0^{3.4} = 0.193871 & \log \gamma_1^{3.4} = 0.571980 & \log \gamma_2^{3.4} = 0.856201 \\
\log \gamma_0^{3.5} = 0.105784 & \log \gamma_1^{3.5} = 0.476340 & \log \gamma_2^{3.5} = 0.755928 \\
\log \gamma_0^{3.6} = 0.013757 & \log \gamma_1^{3.6} = 0.378374 & \log \gamma_2^{3.6} = 0.654131.
\end{array}\right\} \quad (84)$$

Aus diesen erhält man als höhere η:

$$\left.\begin{array}{ll}
\log \eta_0^{3.0} = 1.214306 & \log \eta_1^{3.0} = 1.928970 \\
\log \bar{\eta}_0^{3.1} = 1.075454 & \log \bar{\eta}_1^{3.1} = 1.796206 \\
\log \eta_0^{3.2} = 1.199607 & \log \eta_1^{3.2} = 1.830252 \\
\log \eta_0^{3.3} = 1.173566 & \log \eta_1^{3.3} = 1.771851
\end{array}\right\} \quad (85)$$

und daraus die folgende zweite Serie von höheren γ:

$$
\left.\begin{array}{ll}
\log \gamma_0^{5.0} = 1.275759 & \log \gamma_1^{5.0} = 2.059568 \\
\log \bar{\gamma}_0^{5.1} = 1.107339 & \log \bar{\gamma}_1^{5.1} = 1.913325 \\
\log \gamma_0^{5.2} = 1.244347 & \log \gamma_1^{5.2} = 1.971568 \\
\log \gamma_0^{5.3} = 1.210096 & \log \gamma_1^{5.3} = 1.917085.
\end{array}\right\} \qquad (86)
$$

Aus den Systemen der niederen γ aber erhielt ich für Hilda die folgenden Werte der niederen ϑ-Transcendenten:

$$
\left.\begin{array}{lll}
\log \vartheta_0^{1.0} = 9.969744 & \log \vartheta_1^{1.0} = 9.455604 & \log \vartheta_2^{1.0} = 9.327931 \\
\log \bar{\vartheta}_0^{1.1} = 9.014555 & \log \bar{\vartheta}_1^{1.1} = 9.363422 & \log \bar{\vartheta}_2^{1.1} = 9.346545 \\
\log \vartheta_0^{1.2} = 9.365884 & \log \vartheta_1^{1.2} = 9.546247 & \log \vartheta_2^{1.2} = 9.344658 \\
\log \vartheta_0^{1.3} = 9176240 & \log \vartheta_1^{1.3} = 9.487519 & \log \vartheta_2^{1.3} = 9.400548 \\
\log \vartheta_0^{1.4} = 9004643 & \log \vartheta_1^{1.4} = 9.414474 & \log \vartheta_2^{1.4} = 9.427541 \\
\log \vartheta_0^{1.5} = 8843633 & \log \vartheta_1^{1.5} = 9.332870 & \log \vartheta_2^{1.5} = 9.431174 \\
\log \vartheta_0^{1.6} = 8.689615 & \log \vartheta_1^{1.6} = 9.245506 & \log \vartheta_2^{1.6} = 9.417023 \\
\log \vartheta_0^{1.7} = 8.540569 & \log \vartheta_1^{1.7} = 9.153958 & \log \vartheta_2^{1.7} = 9.389239 \\
\log \vartheta_0^{1.8} = 8.395248 & \log \vartheta^{1.8} = 9.059241 & \log \vartheta_2^{1.8} = 9.350789 \\
\log \vartheta_0^{1.9} = 8.252822 & \log \vartheta_1^{1.9} = 8.962026 & \log \vartheta_2^{1.9} = 9.303812 \\
\log \vartheta_0^{1.10} = 8.112714 & \log \vartheta_1^{1.10} = 8.862786 & \log \vartheta^{1.10} = 9.249893 \\
\log \vartheta_0^{1.11} = 7.974503 & \log \vartheta_1^{1.11} = 8.761874 & \\
\log \vartheta_0^{1.12} = 7.837875 & & \\
 & & \\
\log \vartheta_3^{1.0} = 9.299701 & \log \vartheta_4^{1.0} = 9.316802 & \\
\log \bar{\vartheta}_3^{1.1} = 9.296226 & \log \bar{\vartheta}_4^{1.1} = 9.319816 & \\
\log \vartheta_3^{1.2} = 9.306185 & \log \vartheta_4^{1.2} = 9.320157 & \\
\log \vartheta_3^{1.3} = 9.308295 & \log \vartheta_4^{1.3} = 9.328449 & \\
\log \vartheta_3^{1.4} = 9.328510 & \log \vartheta_4^{1.4} = 9.330850 & \\
\log \vartheta_3^{1.5} = 9.360326 & \log \vartheta_4^{1.5} = 9.337325 & \\
\log \vartheta_3^{1.6} = 9.389232 & \log \vartheta_4^{1.6} = 9.351555 & \\
\log \vartheta_3^{1.7} = 9.409673 & \log \vartheta_4^{1.7} = 9.372146 & \\
\log \vartheta_3^{1.8} = 9.419854 & \log \vartheta_4^{1.8} = 9.395401. & \\
\log \vartheta_3^{1.9} = 9.419789 & &
\end{array}\right\} \qquad (87)
$$

Und aus den höheren γ ergeben sich als Werteserien für die höheren ϑ:

$$
\left.\begin{array}{lll}
\log \vartheta_0^{3.0} = 0.453967 & \log \vartheta_1^{3.0} = 0.913276 & \log \vartheta_2^{3.0} = 1.233837 \\
\log \bar{\vartheta}_0^{3.1} = 0.148583 & \log \bar{\vartheta}_1^{3.1} = 0.774423 & \log \vartheta_2^{3.1} = 0.558312 \\
\log \vartheta_0^{3.2} = 0.351659 & \log \vartheta_1^{3.2} = 0.898577 & \log \vartheta_2^{3.2} = 1.228192 \\
\log \vartheta_0^{3.3} = 0.276616 & \log \vartheta_1^{3.3} = 0.872536 & \log \vartheta_2^{3.3} = 1.221364 \\
\log \vartheta_0^{3.4} = 0.193871 & \log \vartheta_1^{3.4} = 0.836178 & \log \vartheta_2^{3.4} = 1.209745 \\
\log \vartheta_0^{3.5} = 0.105784 & \log \vartheta_1^{3.5} = 0.791278 & \log \vartheta_2^{3.5} = 1.192551 \\
\log \vartheta_0^{3.6} = 0.013757 & \log \vartheta_1^{3.6} = 0.739288 & \log \vartheta_2^{3.6} = 1.169547
\end{array}\right\} \qquad (88)
$$

$$\left.\begin{array}{ll}\log \vartheta_0^{5.0} = 1.275759 & \log \vartheta_1^{5.0} = 2.059568 \\ \log \bar{\vartheta}_0^{5.1} = 1.107339 & \log \bar{\vartheta}_1^{5.1} = 1.946009 \\ \log \vartheta_0^{5.2} = 1.244347 & \log \vartheta_1^{5.2} = 2.046167 \\ \log \vartheta_0^{5.3} = 1.210096 & \log \vartheta_1^{5.3} = 2.029191.\end{array}\right\} \quad (89)$$

Damit ist die Störungsfunction für Hilda in den Grundlagen entwickelt. Die Berechnung der A und B beginnt im V. Capitel, wo die Grenzen der Lücke im System der kleinen Planeten, die bei Hilda auftritt, in erster Näherung bestimmt werden.

Drittes Capitel.

Die Bestimmung der elementären und der charakteristischen Glieder für den Hildatypus.

Unsere eigentliche Aufgabe ist es nun, die allgemeinen Gyldén'schen Bewegungsgleichungen, die am Schluss des ersten Capitels angegeben sind, für den Hildatypus wirklich aufzustellen und dann durch Integration derselben die Größen S, ρ, T zu bestimmen. Diese Integration wird im folgenden zunächst für den 0. und 1. Grad durchgeführt. Im später erscheinenden zweiten Theile dieser Untersuchungen, wo die Integration für den 2. und, soweit das erforderlich, für den 3. Grad durchgeführt werden wird, ist dann schließlich mittelst der so erhaltenen definitiven Werte von S, ρ, T der Radius vector als Function von v zu berechnen; ebenso ist die Beziehung zwischen der Zeit und dem Orte des Planeten in seiner Bahn, d. h. die Relation zwischen t und v für die Planeten vom Hildatypus wirklich herzustellen und die Bestimmung der Breitenstörungen auszuführen.

Um die erste dieser Aufgaben zu lösen, die allgemeine Form der Gyldén'schen Differentialgleichungen der planetarischen Bewegung für den Hildatypus wirklich herzustellen, müssen wir zunächst nach Gyldén's Princip in den unendlichen Reihen, die wir für P und Q gewonnen haben, die langperiodischen und die kurzperiodischen »elementären« und ebenso die langperiodischen und die kurzperiodischen »charakteristischen« Glieder für die Planeten des Hildatypus ermitteln, da diese Glieder den wesentlichsten Theil der Functionen P und Q repräsentieren. Ihre Bestimmung wird den Inhalt dieses Capitels bilden. Erst nachdem P und Q präcisiert sind, können wir die rechten Seiten der Differentialgleichungen aus ihnen bilden und dieselben hierauf integrieren.

Nach dem Principe Gyldén's berücksichtigt man also die Glieder von vorneherein nach ihrer Wichtigkeit und nicht successive einfach nach der Potenz der Masse, in die sie multipliciert sind, wie in der alten Theorie. Gyldén's eigentlicher Grundgedanke ist, in P und Q einen solchen Theil mitzunehmen, dass der vernachlässigte Rest der Reihe unter einer gewissen Grenze bleibt, derart, dass die durch die Lösung der Differentialgleichungen charakterisierte Bewegung niemals von der wirklichen, in der Natur stattfindenden Bewegung sich über gewisse Grenzen entfernt, sondern sich von derselben höchstens um Werte unterscheidet, die hinsichtlich ihrer Größenordnung mit der störenden Masse vergleichbar, also kleine Größen sind.

Wir wollen nun die langperiodischen und die kurzperiodischen Glieder für den Typus $\frac{2}{3}$ aufsuchen. Denn diese Glieder sind für die verschiedenen Planetentypen durchaus verschieden. Für den Typus $\frac{1}{3}$ z. B. umfasst inclusive bis zu Gliedern zweiten Grades P bezüglich 29, Q nur 17 solcher wesentlichen Glieder. Gerade für die Typen niedrigzahliger Commensurabilitäten, zu denen z. B. auch der Hecubatypus $\left(\frac{1}{2}\right)$ gehört, hingegen ist ihre Zahl sehr groß und ihre Bestimmung mühsam. Wenn wir bis zum zweiten Grade inclusive gehen, was zunächst in dieser ersten Abtheilung geschieht, so zeigt sich, dass Q für den Typus $\frac{2}{3}$ bezüglich 171 und P bezüglich 216 kurzperiodische und langperiodische Glieder umfasst. Dabei sind aber außerdem in Q gleich von vorneherein noch gewisse gewöhnliche Glieder, 35 an Zahl, von den auf Seite 67 [375] angegebenen Argumenten zu berücksichtigen, da dieselben theils in der Differentialgleichung für R bei Bildung des Productes $Q\frac{d\rho}{dv}$ zu charakteristischen Gliedern führen, theils zu Gliedern, die in T groß werden. So dass also Q bezüglich 206 von vorneherein mitzunehmende Glieder enthält, und im ganzen beim Hilda-Typus, wenn man nur inclusive bis zu Gliedern zweiten Grades geht, 422 Gieder der Störungsfunctionsentwickelung als wesentlich von vorneherein berücksichtigt werden müssen. Außerdem müssen dann bei der numerischen Rechnung später noch eine Anzahl gewöhnlicher Störungsglieder mitberücksichtigt werden. Dass die Gyldén'sche Theorie in den besonders schwierigen Fällen des Systems der kleinen Planeten so verwickelte Resultate ergibt, wird man ihr nicht zum Vorwurfe machen, da die alten Methoden in diesen Fällen überhaupt ganz versagen.

Allgemein können wir zunächst die Differentialgleichungen in S und ρ wie folgt schreiben, da die Functionen P und Q in trigonometrischen Reihen angesetzt sind und damit die periodische Form der Lösung bedingt ist:[1]

$$\frac{dS}{dv} = \sum_{0}^{\infty}{}^{n}\, a_n \sin(\lambda_n v - B_n) \tag{1}$$

also:

$$S = a_0 - \sum_{0}^{\infty}{}^{n}\, \frac{a_n}{\lambda_n} \cos(\lambda_n v - B_n) \tag{1a}$$

Ferner:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho = \sum_{0}^{\infty}{}^{n}\, b_n \cos(\lambda_n v - B_n) \tag{2}$$

also:

$$\rho = \varkappa \cos(v - \Gamma) + \sum_{0}^{\infty}{}^{n}\, \frac{b_n}{1-\lambda_n^2} \cos(\lambda_n v - B_n), \tag{2a}$$

wie man sofort durch zweimalige Differentiation und Einsetzen ersieht:

$$\frac{d\rho}{dv} = -\varkappa \sin(v - \Gamma) - \sum_{0}^{\infty}{}^{n}\, \frac{\lambda_n b_n}{1-\lambda_n^2} \sin(\lambda_n v - B_n)$$

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} = -\varkappa \cos(v - \Gamma) - \sum_{0}^{\infty}{}^{n}\, \frac{\lambda_n^2 b_n}{1-\lambda_n^2} \cos(\lambda_n v - B_n).$$

---

[1] Dass die strengen Differentialgleichungen des ersten Capitels durch die obigen Formen ersetzbar sind, wird im vierten Capitel begründet werden.

In der That folgt die ursprüngliche Differentialgleichung (2), wenn man letzteren Wert zu dem durch ($2a$) gegebenen ρ-Wert addiert, der also die Differentialgleichung erfüllt. Im vierten Capitel werden wir jedoch auf diese Integration der Gleichung für ρ, von einem anderen Gesichtspunkt ausgehend, ausführlicher zurückkommen.

Auf Grund der Gleichungen (1) und (2) wird aber auch die Gleichung in T, deren rechte Seite sich aus S und R [indem ja $\rho = (\rho)+R$ ist] zusammensetzt, periodische Form annehmen:

$$\frac{dT}{dv} = \sum_{0}^{\infty}{}_{n}\, c_n \cos(\lambda_n v - B), \tag{3}$$

so dass:

$$T = c_0 + \sum_{0}^{\infty}{}_{n}\, \frac{c_n}{\lambda_n} \sin(\lambda_n v - B_n) \tag{3a}$$

ist. Diese Gleichung ist also derjenigen für S analog.

Zu betrachten haben wir demnach nur die beiden Gleichungen (1) und (2). Auch wenn nun die Coefficienten a_n und b_n in der Differentialgleichung klein sind, so werden sie offenbar im Integral doch große Werte annehmen, wenn in den Integrationsdivisoren λ_n und $1-\lambda_n^2$ bezüglich λ_n nahe gleich 0 oder gleich 1 wird, da dann $\frac{a_n}{\lambda_n}$ und $\frac{b_n}{1-\lambda_n^2}$ im Integrale groß sind, auch wenn a_n und b_n in der Differentialgleichung klein waren.

Wird aber der Integrationsdivisor λ_n in ($1a$) nahe gleich Null, so wird auch λ_n unter dem Cosinus sehr klein. Der Cosinus nimmt nun denselben Wert an, wenn sich $\lambda_n v$ um 2π ändert. Dies geschieht, wenn v sich ändert um $\frac{360}{\lambda_n}$, und dies ist somit die Periode des Gliedes. Wird λ_n nahe gleich 0, so wird diese also sehr lang. Im gleichen Maße wie λ_n abnimmt, wächst die Periode des Gliedes, und deshalb nennt man diese Glieder »langperiodische«. Beispielsweise wird, wenn $\lambda = \frac{1}{500}$ wäre, da $a \asymp m'$, also circa $\frac{1}{1000}$ ist, das entsprechende Störungsglied im Integral gleich $\frac{1}{2}$, also sehr groß, obwohl es ursprünglich in der Differentialgleichung sehr klein war.

Wird ferner der Integrationsdivisor λ_n in ($2a$) nahe gleich 1, also auch λ_n unter dem Cosinus nahe 1, so wird die Periode:

$$\frac{360}{\lambda_n}$$

des betreffenden Gliedes also nahe 360°. Diese Glieder, deren Periode also nahe gleich der Umlaufszeit ist, nennt man »kurzperiodische« Glieder.

Es werden also in der Differentialgleichung für S die langperiodischen Glieder durch den Integrationsprocess vergrößert, die kurzperiodischen hingegen nicht; während bei der Differentialgleichung für ρ umgekehrt die kurzperiodischen Glieder im Integral groß werden, die langperiodischen aber nicht.

Ganz allgemein wird nun im folgenden der langperiodische Theil einer periodischen Function durch Beifügung des Index l, der kurzperiodische Theil durch Beifügung von k, und der Inbegriff der gewöhnlichen Glieder, welche die Function enthält, durch Beifügung des Index g an die Function bezeichnet werden, so dass:

$$\left.\begin{aligned} S &= S_l+S_k+S_g \\ \rho &= (\rho)+R \\ R &= R_l+R_k+R_g \\ T &= \gamma v+T_l+K, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wo

$$K = T_k+T_g$$

ist. Dabei wird sich zeigen, dass die durch (ρ) repräsentierten »elementären Glieder der Form B kurzperiodisch sind, und ebenso wird das Auftreten des secularen Gliedes γv in T später evident werden.

Die mittlere Bewegung von Jupiter steht nun also zu derjenigen von Hilda sehr nahe im Verhältnis 2:3, oder es verhält sich die Umlaufszeit von Jupiter zu derjenigen von Hilda wie 3:2; denn da,

$$n = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

und nach dem 3. Kepler'schen Gesetz:

$$a^3 : a'^3 = T^2 : T'^2,$$

so verhalten sich die Umlaufszeiten umgekehrt wie die mittleren Bewegungen. In der That beträgt die Umlaufszeit von Jupiter circa zwölf, diejenige von Hilda circa acht Jahre. Demnach setzen wir für das Folgende:

$$\frac{n'}{n_2} = \mu_2 = \frac{2-\delta_2}{3},$$

wo δ_2 sehr klein, also:

$$1-\mu_2 = \frac{1+\delta_2}{3}$$

ist, und erinnern uns, dass die allgemeine Form des Argumentes w, das in der Entwickelung der Derivierten der Störungsfunction P und Q auftrat:

$$nw = n(1-\mu_2)v - nB - n\mu T_l\,^{1}$$

war.

Um zunächst die langperiodischen und kurzperiodischen Glieder in der unendlichen Reihe P [cf. Gleichung (43), Cap. II] zu bestimmen, wollen wir diejenigen Werte von n aufsuchen, für welche der Factor von v in den Argumenten w der einzelnen Glieder bezüglich 0 oder 1 wird. Es wird offenbar $n(1-\mu_2) = 0$ im 1. Gliede für $n = 0$; das gibt des langperiodische Glied $B_{0.0.0}$, indem wir eine Constante als ein Glied von ∞ langer Periode betrachten. Für $n = 3$ wird $n(1-\mu_2)$ nahe $= 1$, und es folgt das kurzperiodische Glied $B_{3.0.0} \cos 3w$. Im 2. und 4. Gliede wird der Factor von v gleich $n(1-\mu_2)+1$, also gleich 1 für $n = 0$; daher ergeben sich zwei kurzperiodische Glieder $B_{0.1.0}^{(+1)}\eta \cos \mathrm{v}$ und $B_{0.0.1}^{(+1)}\eta' \cos \mathrm{v}_1$. Im 3. und 5. Gliede wird der Factor von v gleich $n(1-\mu_2)-1$; also gleich -1 für $n = 0$, mithin folgen zwei kurzperiodische Glieder $B_{0.1.0}^{(-1)}\eta \cos \mathrm{v}$ und $B_{0.0.1}^{(-1)}\eta' \cos \mathrm{v}_1$; ferner nahe gleich 0 für $n = 3$, daher hat man zwei langperiodische Glieder $B_{3.1.0}^{(-1)}\eta \cos (3w-\mathrm{v})$ und $B_{3.0.1}^{(-1)}\eta' \cos (3w-\mathrm{v}_1)$; schließlich nahe gleich $+1$ für $n = 6$, also folgen zwei kurzperiodische Glieder $B_{6.1.0}^{(-1)}\eta \cos (6w-\mathrm{v})$ und $B_{6.0.1}^{(-1)}\eta' \cos (6w-\mathrm{v}_1)$.

Damit sind die Glieder der I. Ordnung hinsichtlich des 0. und 1. Grades erschöpft. Um auch noch die langperiodischen und kurzperiodischen Glieder 2. Grades der I. Ordnung zu bestimmen, so ergibt offenbar das sechste und dreizehnte Glied für $n = 0$ die langperiodischen Glieder $B_{0.2.0}\eta^2$ und $B_{0.0.2}\eta'^2$; für $n = 3$ hingegen die kurzperiodischen Glieder $B_{3.2.0}\eta^2 \cos 3w$ und $B_{3.0.2}\eta'^2 \cos 3w$. Im zehnten und elften Gliede wird der Factor von v bezüglich gleich 0 und nahe gleich 1 für $n = 0$ und $n = 3$; im ersten Falle folgen die beiden langperiodischen Glieder $B_{0.1.1}^{(+1)}\eta\eta' \cos (\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$ und $B_{0.1.1}^{(-1)}\eta\eta' \cos (\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$; im zweiten die kurzperiodischen Glieder $B_{3.1.1}^{(+1)}\eta\eta' \cos (3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$ und $B_{3.1.1}^{(-1)}\eta\eta' \cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)$. Das siebente und vierzehnte Glied hingegen ergeben offenbar weder langperiodische noch kurzperiodische Glieder. Hingegen wird der Factor von v im achten und fünfzehnten Gliede $n(1-\mu_2)-2$ nahe $= -1$ für $n = 3$, ferner nahe gleich 0 für $n = 6$ und schließlich nahe gleich $+1$ für $n = 9$; man erhält also im

---

[1] Hingegen ist: $nw = n(1-\mu_1)v - nB - n\mu V$, wo aber $V = \gamma_0 v + Tl$ ist, wie in Capitel IV, Abtheilung II, A, 4 gezeigt.

ersten Falle die kurzperiodischen Glieder $B^{(-2)}_{3.2.0}\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v})$ und $B^{(-2)}_{3.0.2}\eta'^2\cos(3w-2\mathrm{v}_1)$; im zweiten die langperiodischen Glieder $B^{(-2)}_{6.2.0}\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})$ und $B^{(-2)}_{6.0.2}\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1)$; schließlich im dritten die kurzperiodischen Glieder $B^{(-2)}_{9.2.0}\eta^2\cos(9w-2\mathrm{v})$ und $B^{(-2)}_{9.0.2}\eta'^2\cos(9w-2\mathrm{v}_1)$. Das neunte Glied, in dem der Factor von v gleich $n(1-\mu_2)+2$ ist, indes liefert wieder keine langperiodischen oder kurzperiodischen Glieder. Hingegen ergibt schließlich das zwölfte Glied, in dem der Factor von v gleich $n(1-\mu_2)-2$ ist, offenbar für $n = 3, 6, 9$ bezüglich das kurzperiodische Glied $B^{(-2)}_{3.1.1}\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$, das langperiodische $B^{(-2)}_{6.1.1}\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$ und das kurzperiodische Glied $B^{(-2)}_{9.1.1}\eta\eta'\cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$.

Von diesen 27 Gliedern werden indes die drei folgenden Null:

$$B^{(-1)}_{0.1.0}\eta\cos\mathrm{v}, \qquad B^{(-1)}_{0.0.1}\eta'\cos\mathrm{v}_1, \qquad B^{(-1)}_{0.1.1}\eta\eta'\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1),$$

da für jedes α, d. h. für alle kleinen Planeten deren Coefficienten verschwinden. Im Sinne der eingeführten Bezeichnung umfassen also P_l und P_k folgende:

Glieder I. Ordnung in P 0., 1., 2. Grades:

$$\underbrace{\begin{array}{l}
B_{0.0.0}\\
B^{(-1)}_{3.1.0}\eta\cos(3w-\mathrm{v})\\
B^{(-1)}_{3.0.1}\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)\\
B_{0.2.0}\eta^2\\
B_{0.0.2}\eta'^2\\
B^{(+1)}_{0.1.1}\eta\eta'\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
B^{(-2)}_{6.2.0}\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})\\
B^{(-2)}_{6.0.2}\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1)\\
B^{(-2)}_{6.1.1}\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)
\end{array}}_{P_l}
\qquad
\underbrace{\begin{array}{l}
B_{3.0.0}\cos 3w\\
B^{(+1)}_{0.1.0}\eta\cos\mathrm{v}\\
B^{(+1)}_{0.0.1}\eta'\cos\mathrm{v}_1\\
B^{(-1)}_{6.1.0}\eta\cos(6w-\mathrm{v})\\
B^{(-1)}_{6.0.1}\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1)\\
B_{3.2.0}\eta^2\cos 3w\\
B_{3.0.2}\eta'^2\cos 3w\\
B^{(+1)}_{3.1.1}\eta\eta'\cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
B^{(-1)}_{3.1.1}\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)\\
B^{(-2)}_{3.2.0}\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v})\\
B^{(-2)}_{3.0.2}\eta'^2\cos(3w-2\mathrm{v}_1)\\
B^{(-2)}_{9.2.0}\eta^2\cos(9w-2\mathrm{v})\\
B^{(-2)}_{9.0.2}\eta'^2\cos(9w-2\mathrm{v}_1)\\
B^{(-2)}_{3.1.1}\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
B^{(-2)}_{9.1.1}\eta\eta'\cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)
\end{array}}_{P_k}
\qquad (5)$$

Die Glieder II. Ordnung vernachlässigt man in der Gyldén'schen Störungstheorie nicht in erster Näherung, wie in der alten Theorie, sondern nimmt sie gleich von vorneherein mit. Von diesen Gliedern wollen wir beim Hildatypus zunächst aber nur die Glieder 0. und 1. Grades aufsuchen, da die Glieder II. Ordnung 2. Grades meist sehr klein sind; die spätere numerische Rechnung entscheidet dann darüber, ob noch einige Glieder II. Ordnung 2. Grades mitzunehmen sind.

Um die langperiodischen und kurzperiodischen Glieder zweiter Ordnung in P zu bestimmen, fassen wir erstens den langperiodischen Theil von $R = R_l + R_k$ ins Auge, suchen also die langperiodischen und kurzperiodischen Glieder in:

$$\left.\begin{aligned}
P_{R_l} = R_l\{\Sigma B^{1.0}_{n.0.0}\cos nw &+ \Sigma B^{+1.1.0}_{n.1.0}\eta\cos(nw+\mathrm{v})\\
&+\Sigma B^{-1.1.0}_{n.1.0}\eta\cos(nw-\mathrm{v})\\
&+\Sigma B^{+1.1.0}_{n.0.1}\eta'\cos(nw+\mathrm{v}_1)\\
&+\Sigma B^{-1.1.0}_{n.0.1}\eta'\cos(nw-\mathrm{v}_1)\}
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

auf.

Da R selbst, wie sich zeigen wird, durch eine trigonometrische Reihe gegeben ist, so treten bei der Multiplication dieser zwei trigonometrischen Reihen in P_{R_l} neue Argumente auf, wenn man mit Hinblick auf die Fundamentalformeln (36) des zweiten Capitels die Producte der trigonometrischen Functionen zerlegt. Dabei setzt sich allgemein die Periode des Productes der langperiodischen oder kurzperiodischen Functionen χ und ξ additiv und subtractiv zusammen aus den Perioden der Functionen selbst. Denn sei:

$$\chi = m \cos(xv + l_1)$$
$$\xi = n \cos(yv + l_2)$$

wo m, n, l_1, l_2 Constante und durch x die Periode von χ, durch y diejenige von ξ gegeben ist, so sind, wenn x und y nahe gleich 0 sind, χ und ξ langperiodische, wenn x und y nahe gleich 1 sind, kurzperiodische Functionen. Und da:

$$\chi \cdot \xi = \frac{1}{2} mn \cos[(x+y)v + l_1 + l_2] + \frac{1}{2} mn \cos[(x-y)v + l_1 - l_2], \tag{7}$$

so bestimmen $x+y$ und $x-y$ in der That die Perioden des Productes. Speciell ergibt das Product zweier langperiodischen Functionen eine langperiodische Function:

$$\chi_l \cdot \xi_l = \psi_l.$$

Ferner gibt:

$$\chi_l \cdot \xi_k = \psi_k; \qquad \chi_k \xi_k = \psi_l + \psi_g; \qquad \chi_l \xi_g = \psi_g; \tag{8}$$

und es kann geben:

$$\chi_k \xi_g = \psi_k + \psi_g; \qquad \chi_g \xi_g = \psi_l + \psi_k + \psi_g.$$

Fassen wir also durch Gleichung (6) zuerst den langperiodischen Theil von R ins Auge, so ist x in (7) gleich 0 zu setzen. Suchen wir dann den Theil des Productes von R_l mit Klammergliedern, für welchen $x+y$, respective $x-y$ entweder 0 oder 1 wird, so tritt dies, bei $x = 0$, ein für $y = 0$ und $y = 1$.

Der Factor von v aber wird im ersten Gliede von (6) gleich 0 für $n = 0$ und nahe gleich 1 für $n = 3$, wodurch das langperiodische Glied $B^{1.0}_{0.0.0}$ und das kurzperiodische $B^{1.0}_{3.0.0} \cos 3w$ entsteht. Für das zweite und vierte Glied wird $n(1-\mu_2)+1$ gleich 1 für $n = 0$, man erhält also die kurzperiodischen Glieder $B^{+1.1.0}_{0.1.0}\eta \cos \mathrm{v}$ und $B^{+1.1.0}_{0.0.1}\eta' \cos \mathrm{v}_1$. Während im dritten und fünften Gliede $n(1-\mu_2)-1$ gleich -1 für $n = 0$, nahe gleich 0 für $n = 3$, und schließlich nahe gleich $+1$ für $n = 6$ wird. So folgen die kurzperiodischen Glieder $B^{-1.1.0}_{0.1.0}\eta \cos \mathrm{v}$ und $B^{-1.1.0}_{0.0.1}\eta' \cos \mathrm{v}_1$; ferner die langperiodischen $B^{-1.1.0}_{3.1.0}\eta \cos(3w - \mathrm{v})$ und $B^{-1.1.0}_{3.0.1}\eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1)$; schließlich die kurzperiodischen Glieder $B^{-1.1.0}_{6.1.0}\eta \cos(6w - \mathrm{v})$ und $B^{-1.1.0}_{6.0.1}\eta' \cos(6w - \mathrm{v}_1)$. Von diesen Gliedern fallen indes zwei fort, da allgemein:

$$B^{-1.1.0}_{0.1.0} = 0, \qquad B^{-1.1.0}_{0.0.1} = 0$$

ist. Einen Theil der zu berücksichtigenden Glieder zweiter Ordnung erhält man also, indem man R multipliciert mit folgenden Klammergliedern:

$$\left.\begin{array}{ll}
\overbrace{\begin{array}{l} B^{1.0}_{0.0.0} \\ B^{-1.1.0}_{3.1.0}\eta \cos(3w - \mathrm{v}) \\ B^{-1.1.0}_{3.0.1}\eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1) \\ \\ \\ \end{array}}^{(P_{R_l})_l} &
\overbrace{\begin{array}{l} B^{1.0}_{3.0.0} \cos 3w \\ B^{+1.1.0}_{0.1.0}\eta \cos \mathrm{v} \\ B^{+1.1.0}_{0.0.1}\eta' \cos \mathrm{v}_1 \\ B^{-1.1.0}_{6.1.0}\eta \cos(6w - \mathrm{v}) \\ B^{-1.1.0}_{6.0.1}\eta' \cos(6w - \mathrm{v}_1). \end{array}}^{(P_{R_l})_k}
\end{array}\right\} \tag{9}$$

Zweitens haben wir nun noch den kurzperiodischen Theil von R ins Auge zu fassen und dabei die langperiodischen und kurzperiodischen Glieder, die aus:

$$P_{R_k} = R_k\{\Sigma B^{1.0}_{n.0.0}\cos nw + \Sigma B^{+1.1.0}_{n\,1.0}\eta\cos(nw+v)+\dots\} \tag{10}$$

hervorgehen, zu bestimmen. Dazu ist in unserem Schema (7) $x = 1$ zu setzen. Für $x = 1$ aber wird $x+y$, respective $x-y$ gleich 0 oder 1, für die Werte $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$. Man erhält demnach in diesem Falle zunächst wieder genau die gleichen langperiodischen und kurzperiodischen Glieder wie zuvor, also die in (9) gegebenen Glieder. Außerdem aber erhält man noch folgende gewöhnliche Glieder, für die der Factor von v gleich 2 wird, die später bei Multiplication mit der trigonometrischen Reihe R_k nach den Fundamentalgleichungen (36) Cap. II auch wieder zu langperiodischen und kurzperiodischen Gliedern Anlass geben. Es wird aber in (10) im ersten Gliede der Factor von v nahe gleich 2 für $x = 6$, also entsteht das gewöhnliche Glied $B^{1.0}_{6.0.0}\cos 6w$. Im zweiten und vierten Gliede wird der Factor von v: $n(1-\mu_2)+1$ nahe $= 2$ für $n = 3$, woraus die gewöhnlichen Glieder $B^{+1.1.0}_{3.1.0}\eta\cos(3w+v)$ und $B^{+1.1.0}_{3.0.1}\eta'\cos(3w+v_1)$ folgen. Während im dritten und fünften Gliede $n(1-\mu_2)-1$ nahe $= 2$ wird, für $n = 9$, mithin die gewöhnlichen Glieder $B^{-1.1.0}_{9.1.0}\eta\cos(9w-v)$ und $B^{-1.1.0}_{9.0.1}\eta'\cos(9w-v_1)$ folgen.

Einen weiteren Theil der Glieder zweiter Ordnung erhält man also durch Multiplication von R_k mit folgenden Klammergliedern:

$$\begin{array}{l|l}
\overbrace{\qquad (P_{R_k})_l \qquad} & \overbrace{\qquad (P_{R_k})_k \qquad} \\
B^{1.0}_{0.0.0} & B^{1.0}_{3.0.0}\cos 3w \\
B^{-1.1.0}_{3.1.0}\eta\cos(3w-v) & B^{+1.1.0}_{0\,1.0}\eta\cos v \\
B^{-1.1.0}_{3.0.1}\eta'\cos(3w-v_1) & B^{+1.1.0}_{0.0.1}\eta'\cos v_1 \\
 & B^{-1.1.0}_{6.1.0}\eta\cos(6w-v) \\
 & B^{-1.1.0}_{6.0.1}\eta'\cos(6w-v_1) \\
\hline
 & B^{1.0}_{6.0.0}\cos 6w \\
 & B^{+1.1.0}_{3.1.0}\eta\cos(3w+v) \\
 & B^{+1.1.0}_{3.0.1}\eta'\cos(3w+v_1) \\
 & B^{-1.1.0}_{9.1.0}\eta\cos(9w-v) \\
 & B^{-1.1.0}_{9.0.1}\eta'\cos(9w-v_1).
\end{array} \tag{11}$$

Damit sind die zu berücksichtigenden Glieder zweiter Ordnung indes noch nicht erschöpft. Vielmehr ergeben sich in P noch langperiodische und kurzperiodische Glieder II. Ordnung aus dem Ausdruck:

$$\left.\begin{array}{r}P_K = \mu K_k\{\Sigma n B_{n.0.0}\sin nw + \Sigma n\, B^{(+1)}_{n.1.0}\eta\sin(nw+v) + \Sigma n\, B^{(-1)}_{n.1.0}\eta\sin(nw-v) \\ \Sigma n\, B^{(+1)}_{n.0.1}\eta'\sin(nw+v_1) + \Sigma n\, B^{(-1)}_{n.0.1}\eta'\sin(nw-v_1)\},\end{array}\right\} \tag{12}$$

der allein ins Auge zu fassen, da nach dem Früheren $K_l = 0$ ist. Offenbar folgen für dieselben n Werte, wie zuvor, in der Klammer langperiodische und kurzperiodische Glieder, mit Ausnahme von $n = 0$, da n in 12 als Factor auftritt. Mitzunehmende Glieder zweiter Ordnung erhält man also schließlich noch durch Multiplication der trigonometrischen Reihe K_k mit den folgenden Gliedern:

$$\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{3\mu B_{3.0.0}\sin 3w} \\
6\mu B^{(-1)}_{6.1.0}\eta\sin(6w-v); & 6\mu B^{(-1)}_{6.0.1}\eta'\sin(6w-v_1) \\
\multicolumn{2}{c}{6\mu B_{6.0.0}\sin 6w} \\
3\mu B^{(-1)}_{3.1.0}\eta\sin(3w-v) & 3\mu B^{(-1)}_{3.0.1}\eta'\sin(3w-v_1) \\
3\mu B^{(+1)}_{3.1.0}\eta\sin(3w+v); & 3\mu B^{(+1)}_{3.0.1}\eta'\sin(3w+v_1) \\
9\mu B^{(-1)}_{9.1.0}\eta\sin(9w-v); & 9\mu B^{(-1)}_{9.0.1}\eta'\sin(9w-v_1).
\end{array} \tag{13}$$

Die Glieder dritter Ordnung in den Ausdrücken für P und Q kommen wohl bei den meisten kleinen Planeten nicht mehr in Betracht. Der Versuch für den Hildatypus zeigt jedoch die Nothwendigkeit, zur Bestimmung der Grenzen der Lücke denselben in diesem Ausnahmefalle Rechnung zu tragen. Ich berücksichtige dieselben in P und Q nur hinsichtlich des 0. Grades und erhalte aus den Gliedern:

$$\Sigma B^{2.0}_{n.0.0} R_0^2 \cos nw; \qquad \Sigma n \mu B^{1.0}_{n.0.0} R_0 K_0 \sin nw; \qquad -\frac{1}{2}\Sigma n^2 \mu^2 B_{n.0.0} K_0^2 \cos nw$$

für $n = 3$ und $n = 9$ die folgenden Glieder dritter Ordnung in P für die Planeten des Hildatypus:

$$\left.\begin{aligned}
&B^{2.0}_{3.0.0} R_0^2 \cos 3w + B^{2.0}_{9.0.0} R_0^2 \cos 9w \\
&+3\mu B^{1.0}_{3.0.0} R_0 K_0 \sin 3w + 9\mu B^{1.0}_{9.0.0} R_0 K_0 \sin 9w \\
&-\frac{9}{2}\mu^2 B_{3.0.0} K_0^2 \cos 3w - \frac{81}{2}\mu^2 B_{9.0.0} K_0^2 \cos 9w,
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

welche bei Einsetzen der Werte von R_0 und K_0 zu langperiodischen und kurzperiodischen Gliedern Veranlassung geben. Dabei ergibt das Glied $\Sigma B^{2.0}_{n.0.0} R_0^2 \cos nw$ für $n = 0$ ein constantes Glied: $\frac{1}{2} B^{2.0}_{0.0.0} \beta_1^2$, das zwar schon sehr klein, aber doch noch in p_0 auf S. 79 [387] Berücksichtigung gefunden hat.

Stellen wir die gewonnenen Resultate zusammen, so sind im partiellen Differentialquotienten P der Störungsfunction für den Typus $\frac{2}{3}$ folgende Glieder zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
P = {} & B_{0.0.0} + B_{3.0.0}\cos 3w + B^{(+1)}_{0.1.0}\eta\cos v + B^{(-1)}_{3.1.0}\eta\cos(3w-v) + B^{(-1)}_{6.1.0}\eta\cos(6w-v) \\
& + B^{(+1)}_{0.0.1}\eta'\cos v_1 + B^{(-1)}_{3.0.1}\eta'\cos(3w-v_1) + B^{(-1)}_{6.0.1}\eta'\cos(6w-v_1) \\
& + B_{0.2.0}\eta^2 + B_{0.0.2}\eta'^2 + B^{(+1)}_{0.1.1}\eta\eta'\cos(v-v_1) \\
& + B_{3.2.0}\eta^2\cos 3w + B^{(-2)}_{3.2.0}\eta^2\cos(3w-2v) + B^{(-2)}_{6.2.0}\eta^2\cos(6w-2v) + B^{(-2)}_{9.2.0}\eta^2\cos(9w-2v) \\
& + B^{(+1)}_{3.1.1}\eta\eta'\cos(3w+v-v_1) + B^{(-2)}_{3.1.1}\eta\eta'\cos(3w-v-v_1) + B^{(-2)}_{6.1.1}\eta\eta'\cos(6w-v-v_1) + B^{(-2)}_{9.1.1}\eta\eta'\cos(9w-v-v_1) \\
& + B^{(-1)}_{3.1.1}\eta\eta'\cos(3w-v+v_1) + B^{(-2)}_{3.0.2}\eta'^2\cos(3w-2v_1) + B^{(-2)}_{6.0.2}\eta'^2\cos(6w-2v_1) + B^{(-2)}_{9.0.2}\eta'^2\cos(9w-2v_1) \\
& + B_{3.0.2}\eta'^2\cos 3w.
\end{aligned}$$

Glieder I. Ordnung.

$$\begin{aligned}
& + \{B^{1.0}_{6.0.0}\cos 6w + B^{+1.1.0}_{3.1.0}\eta\cos(3w+v) + B^{-1.1.0}_{9.1.0}\eta\cos(9w-v) \\
& \qquad + B^{+1.1.0}_{3.0.1}\eta'\cos(3w+v_1) + B^{-1.1.0}_{9.0.1}\eta'\cos(9w-v_1)\}.R_k \\
& + \{B^{1.0}_{0.0.0} + B^{1.0}_{3.0.0}\cos 3w + B^{+1.1.0}_{0.1.0}\eta\cos v + B^{-1.1.0}_{3.1.0}\eta\cos(3w-v) + B^{-1.1.0}_{6.1.0}\eta\cos(6w-v) \\
& \qquad + B^{+1.1.0}_{0.0.1}\eta'\cos v_1 + B^{-1.1.0}_{3.0.1}\eta'\cos(3w-v_1) + B^{-1.1.0}_{6.0.1}\eta'\cos(6w-v_1)\}(R_l+R_k) \\
& + \{3B_{3.0.0}\sin 3w + 6B_{6.0.0}\sin 6w + 3B^{(+1)}_{3.1.0}\eta\sin(3w+v) + 3B^{(+1)}_{3.0.1}\eta'\sin(3w+v_1) \\
& \qquad + 3B^{(-1)}_{3.1.0}\eta\sin(3w-v) + 6B^{(-1)}_{6.1.0}\eta\sin(6w-v) + 9B^{(-1)}_{9.1.0}\eta\sin(9w-v) \\
& \qquad + 3B^{(-1)}_{3.0.1}\eta'\sin(3w-v_1) + 6B^{(-1)}_{6.0.1}\eta'\sin(6w-v_1) + 9B^{(-1)}_{9.0.1}\eta'\sin(9w-v_1)\}.\mu(K_k+K_g)^1
\end{aligned} \qquad (15)$$

Glieder II. Ordnung.

$$\begin{aligned}
& + \{B^{2.0}_{3.0.0}\cos 3w + B^{2.0}_{9.0.0}\cos 9w\}.R_0^2 \\
& + \{3B^{1.0}_{3.0.0}\sin 3w + 9B^{1.0}_{9.0.0}\sin 9w\}.\mu R_0 K_0 \\
& - \left\{\frac{9}{2}B_{3.0.0}\cos 3w + \frac{81}{2}B_{9.0.0}\cos 9w\right\}.\mu^2 K_0^2.
\end{aligned}$$

Glieder III. Ordnung.

[1] Cf. Bemerkung auf Seite 76 [384].

Für die partielle Derivierte $\underset{\sim}{Q}$ folgt ein ähnlicher Ausdruck, nur fallen hier noch einige Glieder fort, nämlich:

$$A_{0.0.0} = A^{(+1)}_{0.1.0} = A^{(-1)}_{0.1.0} = A^{(-1)}_{0.0.1} = A^{(-1)}_{0.1.1} = A_{0.2.0} = 0$$

$$A_{0.0.2} = A^{1.0}_{0.0.0} = A^{+1.1.0}_{0.1.0} = A^{-1.1.0}_{0.1.0} = A^{-1.1.0}_{0.0.1} = 0.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{Q} = {} & \underbrace{\begin{aligned}
& A_{3.0.0} \sin 3w + A^{(-1)}_{3.1.0}\eta \sin(3w-\mathrm{v}) + A^{(-1)}_{6.1.0}\eta \sin(6w-\mathrm{v}) \\
& + A^{(+1)}_{0.0.1}\eta' \sin \mathrm{v}_1 + A^{(-1)}_{3.0.1}\eta' \sin(3w-\mathrm{v}_1) + A^{(-1)}_{6.0.1}\eta' \sin(6w-\mathrm{v}_1) \\
& + A^{(+1)}_{0.1.1}\eta\eta' \sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& + A_{3.2.0}\eta^2 \sin 3w + A^{(-2)}_{3.2.0}\eta^2 \sin(3w-2\mathrm{v}) + A^{(-2)}_{6.2.0}\eta^2 \sin(6w-2\mathrm{v}) + A^{(-2)}_{9.2.0}\eta^2 \sin(9w-2\mathrm{v}) \\
& + A^{(+1)}_{3.1.1}\eta\eta' \sin(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + A^{(-2)}_{3.1.1}\eta\eta' \sin(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + A^{(-2)}_{6.1.1}\eta\eta' \sin(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + A^{(-2)}_{9.1.1}\eta\eta' \sin(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& + A^{(-1)}_{3.1.1}\eta\eta' \sin(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) + A^{(-2)}_{3.0.2}\eta'^2 \sin(3w-2\mathrm{v}_1) + A^{(-2)}_{6.0.2}\eta'^2 \sin(6w-2\mathrm{v}_1) + A^{(-2)}_{9.0.2}\eta'^2 \sin(9w-2\mathrm{v}_1) \\
& + A_{3.0.2}\eta'^2 \sin 3w
\end{aligned}}_{\text{Glieder I. Ordnung.}} \\
& + \underbrace{\begin{aligned}
& + \{A^{1.0}_{6.0.0} \sin 6w + A^{+1.1.0}_{3.1.0}\eta \sin(3w+\mathrm{v}) + A^{-1.1.0}_{9.1.0}\eta \sin(9w-\mathrm{v}) \\
& \qquad + A^{+1.1.0}_{3.0.1}\eta' \sin(3w+\mathrm{v}_1) + A^{-1.1.0}_{9.0.1}\eta' \sin(9w-\mathrm{v}_1)\} \,.\, R_k \\
& + \{A^{1.0}_{3.0.0} \sin 3w + {} + A^{-1.1.0}_{3.1.0}\eta \sin(3w-\mathrm{v}) + A^{-1.1.0}_{6.1.0}\eta \sin(6w-\mathrm{v}) \\
& \qquad + A^{+1.1.0}_{0.0.1}\eta' \sin \mathrm{v}_1 + A^{-1.1.0}_{3.0.1}\eta' \sin(3w-\mathrm{v}_1) + A^{-1.1.0}_{6.0.1}\eta' \sin(6w-\mathrm{v}_1)\} \,.\, (R_l+R_k) \\
& - \{3A_{3.0.0} \cos 3w + 6A_{6.0.0} \cos 6w + 3A^{(+1)}_{3.1.0}\eta \cos(3w+\mathrm{v}) + 3A^{(+1)}_{3.0.1}\eta' \cos(3w+\mathrm{v}_1) \\
& \qquad + 3A^{(-1)}_{3.1.0}\eta \cos(3w-\mathrm{v}) + 6A^{(-1)}_{6.1.0}\eta \cos(6w-\mathrm{v}) + 9A^{(-1)}_{9.1.0}\eta \cos(9w-\mathrm{v}) \\
& \qquad + 3A^{(-1)}_{3.0.1}\eta' \cos(3w-\mathrm{v}_1) + 6A^{(-1)}_{6.0.1}\eta' \cos(6w-\mathrm{v}_1) + 9A^{(-1)}_{9.0.1}\eta' \cos(9w-\mathrm{v}_1)\} \,.\, \mu(K_k+K_g)^1
\end{aligned}}_{\text{Glieder II. Ordnung.}} \\
& + \underbrace{\begin{aligned}
& + \{A^{2.0}_{3.0.0} \sin 3w + A^{2.0}_{9.0.0} \sin 9w\} \,.\, R_0^2 \\
& - \{3A^{1.0}_{3.0.0} \cos 3w + 9A^{1.0}_{9.0.0} \cos 9w\} \,.\, \mu R_0 K_0 \\
& - \left\{\frac{9}{2} A_{3.0.0} \sin 3w + \frac{81}{2} A_{9.0.0} \sin 9w\right\} \,.\, \mu^2 K_0^2.
\end{aligned}}_{\text{Glieder III. Ordnung.}} \\
& + \underbrace{\begin{aligned}
& + \{A_{6.0.0} \cos 6w + A^{(+1)}_{3.1.0}\eta \cos(3w+\mathrm{v}) + A^{(-1)}_{9.1.0}\eta \cos(9w-\mathrm{v}) \\
& \qquad + A^{(+1)}_{3.0.1}\eta' \cos(3w+\mathrm{v}_1) + A^{(-1)}_{9.0.1}\eta' \cos(9w-\mathrm{v}_1)\}
\end{aligned}}_{\text{gewöhnliche Glieder I. Ordnung.}}
\end{aligned} \tag{16}$$

Ehe man nun aber diese Werte von P und $\underset{\sim}{Q}$ in die Differentialgleichungen einsetzen kann, müssen die Functionen R_l, R_k und K_k bestimmt werden. Bei der dann auszuführenden Multiplication von Producten trigonometrischer Reihen hat man mit Hinblick auf das Gyldén'sche Princip bei Zerlegung der Producte in Summen und Differenzen mittelst der Gleichungen (36), Cap. II, immer nur die Glieder, welche lang-

---

[1] Cf Bemerkung auf Seite 76 [384].

periodische und kurzperiodische Argumente aufweisen, beizubehalten, alle anderen aber zu verwerfen. Eine Ausnahme machen nur die gewöhnlichen Glieder der Argumente:

$$6w, \quad 3w+\mathrm{v}, \quad 3w+\mathrm{v}_1, \quad 9w-\mathrm{v}, \quad 9w-\mathrm{v}_1$$

für den Hildatypus, die in T groß werden, die auch bezüglich der zweiten Ordnung gleich mit zu berücksichtigen sind, so wie sie im Ausdruck (16) bezüglich der ersten Ordnung bereits explicite (5 an Zahl) angegeben sind; während eben die Glieder zweiter Ordnung dieser Argumente noch implicite in den Producten von R und K mit den Klammergliedern enthalten sind; und zwar sind es 11 Glieder der obigen Argumente, welche sich aus (16) durch Ausführung der Multiplication ergeben. Schließlich ergeben sich gewöhnliche Glieder der obigen Argumente, und zwar 19 an Zahl, wie man unschwer findet, noch aus den folgenden, und zwar bloß den folgenden Producten:

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_2\eta\cos(3w-\mathrm{v}) \\ +\beta_3\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1) \end{array}\right\} . A^{1.0}_{6.0.0}\sin 6w;$$

$$\left\{A^{+1.1.0}_{6.1.0}\eta\sin(6w+\mathrm{v})+A^{+1.1.0}_{6.0.1}\eta'\sin(6w+\mathrm{v}_1)\right\} . \beta_1\cos 3w;$$

$$-6\mu\left\{\begin{array}{l} A^{(+1)}_{6.1.0}\eta\cos(6w+\mathrm{v}) \\ +A^{(+1)}_{6.0.1}\eta'\cos(6w+\mathrm{v}_1) \end{array}\right\} . \gamma_1\sin 3w;$$

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_4\eta\cos(6w-\mathrm{v}) \\ +\beta_5\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1) \end{array}\right\} . A^{1.0}_{9.0.0}\sin 9w; \qquad -9\mu\left\{\begin{array}{l} \gamma_4\eta\sin(6w-\mathrm{v}) \\ +\gamma_5\eta'\sin(6w-\mathrm{v}_1) \end{array}\right\} . A_{9.0.0}\cos 9w;$$

$$\left\{\begin{array}{l} -9\mu A_{9.0.0}\cos 9w . \gamma_1\sin 3w \\ +A^{1.0}_{9.0.0}\sin 9w . \beta_1\cos 3w \\ -12\mu A_{12.0.0}\cos 12w . \gamma_6\eta\sin(3w+\mathrm{v}) \end{array}\right\};$$

$$\left\{\begin{array}{l} A^{-1.1.0}_{12.1.0}\eta\sin(12w-\mathrm{v}) \\ +A^{-1.1.0}_{12.0.1}\eta'\sin(12w-\mathrm{v}_1) \end{array}\right\} . \beta_1\cos 3w;$$

$$-12\mu . \left\{\begin{array}{l} A^{(-1)}_{12.1.0}\eta\cos(12w-\mathrm{v}) \\ +A^{(-1)}_{12.0.1}\eta'\cos(12w-\mathrm{v}_1) \end{array}\right\} . \gamma_1\sin 3w.$$

Und es ist noch zu bemerken, dass die Glieder der genannten Argumente $6w$, $3w+\mathrm{v}$, $3w+\mathrm{v}_1$, $9w-\mathrm{v}$, $9w-\mathrm{v}_1$ nur in Q und nicht in P mitgenommen sind, weil auf der rechten Seite der Differentialgleichung für ρ das Glied $Q\dfrac{d\rho}{d\mathrm{v}}$ auftritt, während ein ähnliches Glied in P, also $P\dfrac{d\rho}{d\mathrm{v}}$ oder $P\rho$ nicht auftritt.

Als definitives Resultat erhält man dann schließlich, wenn man zunächst bis zu Gliedern 2. Grades inclusive geht, Ausdrücke der Form:

$$P = P_0+P_1+P_2$$
$$Q = Q_0+Q_1+Q_2$$

und dementsprechend auch:

$$S = S_0+S_1+S_2$$
$$R = R_0+R_1+R_2$$
$$T = T_0+T_1+T_2,$$

wobei z. B. P_0 die Glieder 0. Grades (I., II. und III. Ordnung), P_1 die Glieder 1. Grades (I. und II. Ordnung) in η_1 und η_1' und schließlich P_2 die Glieder 2. Grades (I. Ordnung) in $\eta_1^2, \eta_1\eta_1', \eta_1'^2$ enthält. Infolgedessen erscheinen dann also auch die rechten Seiten der Differentialgleichungen geordnet nach Gliedern 0., 1., 2. Grades, so dass die Integration successive gradweise auszuführen ist.

Um die Werte der Functionen S_l, S_k, R_l, R_k und K_k für den Typus $\frac{2}{3}$ zu bestimmen, wollen wir übersichtlich, wie folgt, verfahren. Im Hinblick darauf, dass:

$$\mu_2 = \frac{2-\delta_2}{3}, \text{ also: } 1-\mu_2 = \frac{1-\delta_2}{3}$$

und:

$$nw = n(1-\mu_2)v - nB - n\mu T_l$$

ist, lassen wir n die natürliche Zahlenreihe durchlaufen und erhalten leicht für Hilda das folgende, offenbar für die verschiedenen Commensurabilitätstypen sich verschieden gestaltende

Schema:

n	nw	$nw+\nu$ $nw+\nu_1$	$nw-\nu$ $nw-\nu_1$	nw $nw+\nu-\nu_1$ $nw-\nu+\nu_1$	$nw+2\nu$ $nw+\nu+\nu_1$ $nw+2\nu_1$	$nw-2\nu$ $nw-\nu-\nu_1$ $nw-2\nu_1$
0	0	v	$-v$	0	$2v$	$-2v$
1	$\frac{1}{3}v$	$\frac{4}{3}v$	$-\frac{2}{3}v$	$\frac{1}{3}v$	$\frac{7}{3}v$	$-\frac{5}{3}v$
2	$\frac{2}{3}v$	$\frac{5}{3}v$	$\frac{1}{3}v$	$\frac{2}{3}v$	$\frac{8}{3}v$	$-\frac{4}{3}v$
3	v	$2v$	0	v	$3v$	$-v$
4	$\frac{4}{3}v$	$\frac{7}{3}v$	$+\frac{1}{3}v$	$\frac{4}{3}v$	$\frac{10}{3}v$	$-\frac{2}{3}v$
5	$\frac{5}{3}v$	$\frac{8}{3}v$	$+\frac{2}{3}v$	$\frac{5}{3}v$	$\frac{11}{3}v$	$-\frac{1}{3}v$
6	$2v$	$3v$	$+v$	$2v$	$4v$	0
7	$\frac{7}{3}v$	$\frac{10}{3}v$	$\frac{4}{3}v$	$\frac{7}{3}v$	$\frac{13}{3}v$	$+\frac{1}{3}v$
8	$\frac{8}{3}v$	$\frac{11}{3}v$	$\frac{5}{3}v$	$\frac{8}{3}v$	$\frac{14}{3}v$	$+\frac{2}{3}v$
9	$3v$	$4v$	$2v$	$3v$	$5v$	$+v$
10	$\frac{10}{3}v$	$\frac{13}{3}v$	$\frac{7}{3}v$	$\frac{10}{3}v$	$\frac{16}{3}v$	$\frac{4}{3}v$
11	$\frac{11}{3}v$	$\frac{14}{3}v$	$\frac{8}{3}v$	$\frac{11}{3}v$	$\frac{17}{3}v$	$\frac{5}{3}v$
12	$4v$	$5v$	$3v$	$4v$	$6v$	$4v$

(17)

welches für den Hildatypus über $n = 12$ hinaus keine typischen Argumentformen mehr aufweist. Dasselbe ergibt direct die folgenden langperiodischen und kurzperiodischen Argumente:

n	nw	$nw+\mathrm{v}$ $nw+\mathrm{v}_1$	$nw-\mathrm{v}$ $nw-\mathrm{v}_1$	nw $nw+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1$ $nw-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1$	$nw-2\mathrm{v}$ $nw-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1$ $nw-2\mathrm{v}_1$
0	const. $l.$	v v_1 $k.$	v v_1 $k.$	const. $\mathrm{v}-\mathrm{v}_1$ $l.$	
1					
2					
3	$3w$ $k.$		$3w-\mathrm{v}$ $3w-\mathrm{v}_1$ $l.$	$3w$ $3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1$ $k.$ $3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1$	$3w-2\mathrm{v}$ $3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1$ $k.$ $3w-2\mathrm{v}_1$
4					
5					
6			$6w-\mathrm{v}$ $6w-\mathrm{v}_1$ $k.$		$6w-2\mathrm{v}$ $6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1$ $l.$ $6w-2\mathrm{v}_1$
7					
8					
9					$9w-2\mathrm{v}$ $9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1$ $k.$ $9w-2\mathrm{v}_1$

(18)

und demnach in S, R, K die folgenden in Betracht kommenden Glieder:

Langperiodische:

$$\left.\begin{array}{l} \text{const.} \\ \eta_1^2 \\ \eta_1\eta_1' \cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ \eta_1'^2 \end{array}\right\} \text{»elementär, Form } A.\text{«}$$

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1 \cos(3w-\mathrm{v}) \\ \eta_1' \cos(3w-\mathrm{v}_1) \\ \eta_1^2 \cos(6w-2\mathrm{v}) \\ \eta_1\eta_1' \cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ \eta_1'^2 \cos(6w-2\mathrm{v}_1) \end{array}\right\} \text{»charakteristisch, Form } C.\text{«}$$

Kurzperiodische:

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1 \cos \mathrm{v} \\ \eta_1' \cos \mathrm{v}_1 \end{array}\right\} \text{»elementär, Form } B\text{«}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos 3w \\ \eta_1 \cos(6w-\mathrm{v}) \\ \eta_1' \cos(6w-\mathrm{v}_1) \\ \eta_1^2 \cos 3w \\ \eta_1\eta_1' \cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ \eta_1\eta_1' \cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) \\ \eta_1'^2 \cos 3w \\ \eta_1^2 \cos(3w-2\mathrm{v}) \\ \eta_1\eta_1' \cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ \eta_1'^2 \cos(3w-2\mathrm{v}_1) \\ \eta_1^2 \cos(9w-2\mathrm{v}) \\ \eta_1\eta_1' \cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ \eta_1'^2 \cos(9w-2\mathrm{v}_1) \end{array}\right\} \text{»charakteristisch, Form } D\text{«.} \qquad (19)$$

Um den Charakter dieser Glieder näher kennen zu lernen, schreiben wir sie in etwas anderer Form. Da:

$$\mu_2 = \frac{2-\delta_2}{3},$$

also:

$$3(1-\mu_2) = 1+\delta_2$$

ist, so wird:

$$3w = (1+\delta_2)v - 3B - 3\mu T_l.$$

Setzen wir noch im Augenblick zur Abkürzung:

$$\varsigma v + \pi = \Pi; \qquad \varsigma_1 v + \pi_1 = \Pi_1$$

und bedenken die Werte von v und v_1, so erhält man leicht:

Langperiodische Glieder:

$$\text{»Form } A\text{«} \begin{cases} \text{const.} \\ \eta^2 \\ \eta\eta' \cos\left[\varsigma v + (\pi - \Pi_1)\right] \\ \eta'^2 \end{cases}$$

Kurzperiodische Glieder:

$$\text{»Form } B\text{«} \begin{cases} \eta \cos\left[(1-\varsigma)v - \pi\right] \\ \eta' \cos\left[(1-\varsigma_1)v - \pi_1\right] \end{cases} \qquad (20)$$

Langperiodische Glieder:

$$\text{»Form } C\text{«} \begin{cases} \eta \cos\left[\delta_2 v - 3B - 3\mu T_l + \Pi\right] \\ \eta' \cos\left[\delta_2 v - 3B - 3\mu T_l + \Pi_1\right] \\ \eta^2 \cos\left[2\delta_2 v - 6B - 6\mu T_l + 2\Pi\right] \\ \eta\eta' \cos\left[2\delta_2 v - 6B - 6\mu T_l + \Pi + \Pi_1\right] \\ \eta'^2 \cos\left[2\delta_2 v - 6B - 6\mu T_l + 2\Pi_1\right] \end{cases}$$

Kurzperiodische Glieder:

$$\text{»Form } D\text{«} \begin{cases} \cos\left[(1+\delta_2)v - 3B - 3\mu T_l\right] \\ \eta \cos\left[(1+2\delta_2)v - 6B - 6\mu T_l + \Pi\right] \\ \eta' \cos\left[(1+2\delta_2)v - 6B - 6\mu T_l + \Pi_1\right] \\ \eta^2 \cos\left[(1+\delta_2)v - 3B - 3\mu T_l\right] \\ \eta\eta' \cos\left[(1+\delta_2)v - 3B - 3\mu T_l - \Pi + \Pi_1\right] \\ \eta\eta' \cos\left[(1+\delta_2)v - 3B - 3\mu T_l + \Pi - \Pi_1\right] \\ \eta'^2 \cos\left[(1+\delta_2)v - 3B - 3\mu T_l\right] \\ \eta^2 \cos\left[(1-\delta_2)v + 3B + 3\mu T_l - 2\Pi\right] \\ \eta\eta' \cos\left[(1-\delta_2)v + 3B + 3\mu T - \Pi - \Pi_1\right] \\ \eta'^2 \cos\left[(1-\delta_2)v + 3B + 3\mu T_l - 2\Pi_1\right] \\ \eta^2 \cos\left[(1+3\delta_2)v - 9B - 9\mu T_l + 2\Pi\right] \\ \eta\eta' \cos\left[(1+3\delta_2)v - 9B - 9\mu T_l + \Pi + \Pi_1\right] \\ \eta'^2 \cos\left[(1+3\delta_2)v - 9B - 9\mu T_l + 2\Pi_1\right]. \end{cases} \qquad (20)$$

Unter diesen Gliedern enthalten offenbar die beiden ersten kurzperiodischen δ_2 nicht; dieselben treten demnach für jeden Wert der mittleren Bewegung, d. h. bei allen Planeten auf. Der Factor von v ist in ihnen nahezu gleich 1 (da, wie sich später, cf. S. 120 [428], zeigen wird, allgemein: $\varsigma \cong m'$), und wenn die störende Masse verschwindet, so verschwinden diese Glieder offenbar nicht, sondern eine Combination von $\varsigma v + \pi$ und $\varsigma_1 v + \pi_1$ bildet die Perihellänge und eine Combination von η und η' die Excentricität der Ellipse, in welche die gestörte Bewegung bei Verschwinden der Störungen übergeht. Aus diesem Grunde nennt Gyldén, im Hinblick auf die Elemente der Ellipse, diese Glieder »elementäre Glieder«.

Die übrigen kurzperiodischen Glieder hingegen, welche δ_2 enthalten, treten in der angegebenen Form offenbar nur für die Planeten des Hildatypus auf, indem ihre Form durch die Annahme über das

Verhältnis der mittleren Bewegungen bedingt ist. Je nachdem μ einen anderen Wert hat, sind diese Glieder für die verschiedenen Planetentypen verschieden, und aus diesem Grunde bezeichnet Gyldén sie als »charakteristische Glieder«.

Unter den langperiodischen Gliedern enthalten wieder die vier ersten δ_2 nicht, sind also für jeden Planeten vorhanden und verschwinden nicht mit der störenden Masse; mithin sind sie »elementär«, während die übrigen Glieder, die δ_2 enthalten, in der angezeigten Form nur beim Hildatypus auftreten und somit »charakteristisch« sind.

In diesem Sinne unterscheidet also Gyldén vier Classen von Gliedern, und zwar nennt er:

I. »Glieder der Form A« alle Glieder vom Argument:

$$\varsigma v - A,$$

also die langperiodisch-elementären Glieder.

II. »Glieder der Form B« alle Glieder vom Argument:

$$(1-\varsigma)v - B,$$

also die kurzperiodisch-elementären Glieder.

III. »Glieder der Form C« alle Glieder vom Argument:

$$\delta v - C,$$

also die langperiodisch-charakteristischen Glieder.

IV. »Glieder der Form D« alle Glieder vom Argument:

$$(1-\delta)v - D,$$

also die kurzperiodisch-charakteristischen Glieder.

Dabei tritt in den Argumenten der Glieder vom Typus C und Typus D die mit der Zeit langsam veränderliche Größe T_l auf, d. h. der langperiodische Theil von T, welches durch die dritte Gyldén'sche Fundamentalgleichung der planetarischen Bewegung definiert war. Dieser Umstand, dass im Argument der trigonometrischen Functionen, aus denen sich die rechten Seiten der Gyldén'schen Differentialgleichungen der Bewegung zusammensetzen, selbst wieder eine variable Größe auftritt, während außerdem η und π variabel sind, compliciert später die Integration. Gyldén begegnet dieser Schwierigkeit durch partielle Integration, und die Variabilität von T_l im Argument der trigonometrischen Functionen führt, wie wir später sehen werden, zu seinen sogenannten »exargumentalen« Gliedern. Bemerken wollen wir noch, dass in den Gliedern (20) bei Hilda zwar auch $2\delta_2$, $3\delta_2$, $\delta+\varsigma$ u. s. f. als Factor von v auftritt. Die Argumente wie $(1+2\delta_2)v+\ldots$, $(1+\delta_2\pm\varsigma)v+\ldots$ etc. sind aber doch alle »von der Form D«, indem der Factor von v von der Einheit nur um eine kleine Größe von der Ordnung δ_2 abweicht und dies der eigentliche Sinn dieser Gyldén'schen Definition ist.

Man sieht auch direct — um dieses Fundamentalprincip der Gyldén'schen Störungstheorie am Falle des Hildatypus völlig zur Evidenz zu bringen —, dass ein Glied der Form A, da bei der Integration der Divisor ς in den Nenner tritt und $\varsigma \asymp m'$, $a \asymp m'$ ist:

$$\frac{a_n}{\varsigma} \asymp m'^0$$

wird, also die störende Masse nicht mehr enthält und mithin, wenn diese verschwindet, in eine Combination der Elemente der Ellipse übergeht. Ganz analog bei den Gliedern der Form B, wo:

$$\frac{b_n}{\varsigma} \asymp m'^0$$

ist; so dass diese Glieder »elementar« sind. Während hingegen bei den Gliedern der Form C und der Form D, wo δ bei der Integration in den Nenner tritt, da δ nicht von der Ordnung der störenden Masse ist, offenbar:

$$\frac{a_n}{\delta} \asymp \frac{m'}{\delta}; \qquad \frac{b_n}{\delta} \asymp \frac{m'}{\delta}$$

ist; so dass diese Glieder, »welche die kleinsten, mit der störenden Masse nicht verschwindenden Integrationsdivisoren enthalten«, mit der störenden Masse immer verschwinden.

Es werden also, mit Hinblick auf das Frühere, durch die Integration der Differentialgleichung für S die Glieder der Form A und C vergrößert, bei Integration der Differentialgleichung für ρ hingegen die Glieder vom Typus B und D. Und deshalb ist:

$$\frac{dS}{dv} \asymp m'; \qquad S_k \asymp m'; \qquad S_l \asymp \frac{m'}{\delta};$$

$$R_k \asymp \frac{m'}{\delta}; \qquad R_l \asymp \frac{m'}{\delta}.$$

Was die Differentialgleichung für T betrifft, so ist ihre rechte Seite offenbar zum Theil von der Ordnung m', zum Theile aber auch von der Ordnung $\frac{m'}{\delta}$. Daher wird offenbar durch die Integration:

$$T_k \asymp \frac{m'}{\delta}; \qquad \text{aber } T_l \asymp \frac{m'}{\delta} \text{ oder } \frac{m'}{\delta^2}.$$

Hingegen wird stets:

$$\frac{dT_l}{dv} \asymp \frac{m'}{\delta} \text{ und nie } \asymp \frac{m'}{\delta^2}.$$

Die partielle Integration später aber wirkt so, dass die exargumentalen Glieder mit $\frac{dT_l}{dv}$ (nicht mit T_l) multipliciert sind, wobei aus diesen exargumentalen Gliedern dann weiterhin wieder exargumentale Glieder mit $\left(\frac{dT_l}{dv}\right)^2$ als Factor entstehen u. s. f., wo die letzteren aber schon klein sind.

Schließlich ist:

$$K_k = T_k \asymp \frac{m'}{\delta}, \text{ da } K_l = 0.$$

Hingegen ist:

$$S_g \asymp m'; \quad R_g \asymp m'; \quad T_g = K_g \asymp m'.$$

Die Größe ρ zerlegt nun Gyldén in einen Theil (ρ), der alle elementären Glieder der Form B umfasst, und in einen zweiten Theil R, der die übrigen Glieder, also die elementären Glieder der Form A und die charakteristischen Glieder der Formen C und D, sowie die noch zu berücksichtigenden gewöhnlichen Glieder umfasst und er setzt also in diesem Sinne:

$$\rho = (\rho) + R.$$

Die zu integrierende Differentialgleichung für ρ zerfällt somit in zwei verschiedene Differentialgleichungen, die eine in (ρ), die andere in R, welche also durch die verschiedenen Glieder, die sie enthalten, charakterisiert und in einer ganz verschiedenen Weise zu integrieren sind. Dabei sind die elementären Glieder der Form A in der Differentialgleichung für S stets mindestens vom 2. Grad, wie wir ja auch beim Typus $\frac{2}{3}$ sehen, und sie tilgen sich später bei der Integration für den 2. Grad gegen $\frac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv}$, wie hier schon beiläufig erwähnt sei, da es für die Convergenz von fundamentaler Wichtigkeit ist.

Auf Grund der Entwickelungen dieses Capitels können wir jetzt für die Planeten des Hildatypus für die Functionen S, R, K die folgenden Integralansätze mit unbestimmten Coefficienten machen:

$$\left.\begin{aligned}
S = a_0 + a_1 \cos 3w \quad & + a_2\eta \cos \mathrm{v} + \alpha_2\eta \cos(3w-\mathrm{v}) + a_4\eta \cos(6w-\mathrm{v}) \\
& + a_3\eta' \cos \mathrm{v}_1 + \alpha_3\eta' \cos(3w-\mathrm{v}_1) + a_5\eta' \cos(6w-\mathrm{v}_1) \\
+ a_7\eta^2 \cos 3w & + a_{11}\eta^2 \cos(3w-2\mathrm{v}) + \alpha_{14}\eta^2 \cos(6w-2\mathrm{v}) + a_{17}\eta^2 \cos(9w-2\mathrm{v}) \\
+ a_8\eta\eta' \cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) & + a_{12}\eta\eta' \cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \alpha_{15}\eta\eta' \cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + a_{18}\eta\eta' \cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
+ a_9\eta\eta' \cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) & + a_{13}\eta'^2 \cos(3w-2\mathrm{v}_1) + \alpha_{16}\eta'^2 \cos(6w-2\mathrm{v}_1) + a_{19}\eta'^2 \cos(9w-2\mathrm{v}_1) \\
+ a_{10}\eta'^2 \cos 3w & + S_a
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Dabei ist also:

$$\left.\begin{aligned}
S_l = a_0 + \alpha_2\eta \cos(3w-\mathrm{v}) & + \alpha_{14}\eta^2 \cos(6w-2\mathrm{v}) \\
+ \alpha_3\eta' \cos(3w-\mathrm{v}_1) & + \alpha_{15}\eta\eta' \cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& + \alpha_{16}\eta'^2 \cos(6w-2\mathrm{v}_1),
\end{aligned}\right\} \quad (21a)$$

während der Wert von S_k die übrigen Glieder von (21) umfasst, die in (21 a) nicht enthalten sind und S_a den elementären Theil der Form A in S bezeichnet. Und dabei sind also alle:

$$a \equiv m', \quad \alpha \equiv \frac{m'}{\delta}.$$

Ferner erhalten wir für R, da die Glieder der Form B nach (ρ) kommen:

$$\left.\begin{aligned}
R = b_0 + \beta_1 \cos 3w \quad & + \beta_2\eta \cos(3w-\mathrm{v}) + \beta_4\eta \cos(6w-\mathrm{v}) \\
& + \beta_3\eta' \cos(3w-\mathrm{v}_1) + \beta_5\eta' \cos(6w-\mathrm{v}_1) \\
+ \beta_7\eta^2 \cos 3w & + \beta_{11}\eta^2 \cos(3w-2\mathrm{v}) + \beta_{14}\eta^2 \cos(6w-2\mathrm{v}) + \beta_{17}\eta^2 \cos(9w-2\mathrm{v}) \\
+ \beta_8\eta\eta' \cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) & + \beta_{12}\eta\eta' \cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \beta_{15}\eta\eta' \cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \beta_{18}\eta\eta' \cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
+ \beta_9\eta\eta' \cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) & + \beta_{13}\eta'^2 \cos(3w-2\mathrm{v}_1) + \beta_{16}\eta'^2 \cos(6w-2\mathrm{v}_1) + \beta_{19}\eta'^2 \cos(9w-2\mathrm{v}_1) + R_a \\
+ \beta_{10}\eta'^2 \cos 3w, &
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

wo wieder:

$$\left.\begin{aligned}
R_l = b_0 + \beta_2\eta \cos(3w-\mathrm{v}) & + \beta_{14}\eta^2 \cos(6w-2\mathrm{v}) \\
+ \beta_3\eta' \cos(3w-\mathrm{v}_1) & + \beta_{15}\eta\eta' \cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& + \beta_{16}\eta'^2 \cos(6w-2\mathrm{v}_1)
\end{aligned}\right\} \quad (22a)$$

und sämmtliche:

$$\beta \equiv \frac{m'}{\delta}$$

sind, also auch $\beta_2, \beta_3, \beta_{14}, \beta_{15}, \beta_{16}$, obwohl sie ja bei der Integration der Gleichung in ρ keinen kleinen Divisor erhalten, den sie aber bereits bei der Integration der Differentialgleichung für S erhalten haben.

Auf den ersten Blick könnte es befremden, dass Gyldén, analog wie ρ, nicht auch S zerlegt. Indes enthält eben ρ wirklich elementäre Glieder vom Typus B, während S keine wirklich elementären

Glieder enthält. Denn die Glieder in den Coefficienten a_2 und a_3 in unserem allgemeinen Ansatz für S sind von der Ordnung m' und sogar rein von der Ordnung m', verschwinden also mit der störenden Masse und sind zwar Glieder elementärer Form, aber keine wirklich elementären Glieder, was wohl zu unterscheiden ist.

Schließlich ist, da $K_l = 0$ ist:

$$\left.\begin{aligned}
K_k+K_g = {} & \gamma_1 \sin 3w && +\gamma_4\eta \sin(6w-\mathrm{v}) && +\gamma_6\eta \sin(3w+\mathrm{v}) \\
& && +\gamma_5\eta' \sin(6w-\mathrm{v}_1) && \\
& +\gamma_7\eta^2 \sin 3w && +\gamma_{11}\eta^2 \sin(3w-2\mathrm{v}) && +\gamma_{17}\eta^2 \sin(9w-2\mathrm{v}) \\
& +\gamma_8\eta\eta' \sin(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +\gamma_{12}\eta\eta' \sin(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +\gamma_{18}\eta\eta' \sin(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +\gamma_9\eta\eta' \sin(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && +\gamma_{13}\eta'^2 \sin(3w-2\mathrm{v}_1) && +\gamma_{19}\eta'^2 \sin(9w-2\mathrm{v}_1) \\
& +\gamma_{10}\eta'^2 \sin 3w && && +\gamma_{20}\eta^2 \sin(3w+2\mathrm{v}) \\
& && && +\gamma_{21}\eta^2 \sin 6w \\
& && && +\gamma_{22}\eta\eta' \sin(6w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1),
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

wobei:

$$K_g = \gamma_6\eta \sin(3w+\mathrm{v}) + \gamma_{20}\eta^2 \sin(3w+2\mathrm{v})+\gamma_{21}\eta^2 \sin 6w+\gamma_{22}\eta\eta' \sin(6w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$$

der besonders große gewöhnliche (das sind die Argumente der »coordinierten« Glieder, cf. Capitel IV, Gleichung 117) Theil von K ist, der gleich mitberücksichtigt werden muss und:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dT}{dv}\right)_l = {} & \gamma_2\eta \cos(3w-\mathrm{v}) && +\gamma_{14}\eta^2 \cos(6w-2\mathrm{v}) \\
& +\gamma_3\eta' \cos(3w-\mathrm{v}_1) && +\gamma_{15}\eta\eta' \cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& && +\gamma_{16}\eta'^2 \cos(6w-2\mathrm{v}_1) \\
& && +\left(\frac{dT}{dv}\right)_a
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dT_l}{dv} = {} & -\gamma_0+\gamma_2\eta \cos(3w-\mathrm{v}) && +\gamma_{14}\eta^2 \cos(6w-2\mathrm{v}) \\
& +\gamma_3\eta' \cos(3w-\mathrm{v}_1) && +\gamma_{15}\eta\eta' \cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& && +\gamma_{16}\eta'^2 \cos(6w-2\mathrm{v}_1) \\
& && +\left(\frac{dT}{dv}\right)_a[1]
\end{aligned}\right\} \quad (24a)$$

ist.

Es führen nämlich die gewöhnlichen Glieder der Argumente $3w+\mathrm{v}$, $3w+2\mathrm{v}$, $6w$ und $6w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1$ in K bei der Multiplication der Klammerausdrücke in (15) und (16) mit K wieder zu kurzperiodischen und langperiodischen Gliedern und sind deshalb in K mitzunehmen, während dies bei R nicht der Fall ist

In den Ansätzen für S und R ist dabei der Coefficient vom Index 6 deshalb fortgelassen, weil das große gewöhnliche Glied vom Argument $3w+\mathrm{v}$, das für Hilda in T auftritt (cf. Cap. IV), in S und R nicht enthalten ist. Indem α_6 und β_6 in S und R fortgelassen sind, stimmen offenbar die Indices von $\alpha, \beta, \gamma, S, R, T$ im übrigen überein, was für die weiteren Entwickelungen aus formalen Gründen wünschenswert war. Die a, α, β, γ sind die bei der Integration zu bestimmenden Unbekannten des Problems.

---

[1] Es ist nämlich, wie im Capitel IV, Abtheilung II. A, 4, gezeigt: $\left(\frac{dT}{dv}\right)_l = \gamma_0 + \frac{dT_l}{dv}$, also $\frac{dT_l}{dv} = -\gamma_0 + \left(\frac{dT}{dv}\right)_l$, wo $\left(\frac{dT}{dv}\right)_l$ keinen constanten Theil enthält und γ_0 vom 2. Grade ist.

Die für R_k und R_l erhaltenen Ausdrücke sind nun in die Werte (15) und (16) von P und Q wirklich einzusetzen, um zum Inbegriff aller für die Planeten der Hildagruppe existierenden elementären und charakteristischen Glieder inclusive bis zum 2. Grad zu gelangen. Bei der Ausmultiplication der trigonometrischen Reihen hat man nach unserem Princip nach den Gleichungen (36), Cap. II bloß die langperiodischen und kurzperiodischen Glieder zu berücksichtigen, alle anderen Glieder aber, die bei der Zerlegung der Producte in Summen und Differenzen entstehen und die verschiedenartigsten neuen Argumente aufweisen, zu verwerfen; mit Ausnahme jedoch der gewöhnlichen Glieder in Q vom Argument:

$$6w,\quad 3w+\mathrm{v},\quad 3w+\mathrm{v}_1\quad 9w-\mathrm{v},\quad 9w-\mathrm{v}_1,$$

da diese, wie sich zeigt, für den Typus $^2/_3$ in T groß werden.

Ehe wir das Resultat dieser ganzen Operation, die zur Controle zweimal unabhängig und während des Druckes noch ein drittesmal durchgeführt wurde, angeben, soll bei den Gliedern der dritten Ordnung 0. Grades in P gezeigt werden, wie dieselben gefunden werden. Da offenbar, weil es sich um den 0. Grad bei diesen Gliedern der dritten Ordnung handelt:

$$R_0^2 = \frac{1}{2}\beta_1^2 + \frac{1}{2}\beta_1^2 \cos 6w$$

$$R_0 K_0 = \beta_1\gamma_1 \cos 3w \sin 3w = \frac{1}{2}\beta_1\gamma_1 \sin 6w$$

$$K_0^2 = \gamma_1^2 \sin^2 3w = \frac{1}{2}\gamma_1^2 - \frac{1}{2}\gamma_1^2 \cos 6w$$

ist, so geht der in Gleichung (15) für die Glieder dritter Ordnung in P gefundene Ausdruck über in:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} B^{2.0}_{3.0.0}\beta_1^2 \cos 3w + \frac{1}{2} B^{2.0}_{3.0.0}\beta_1^2 \cos 6w \cos 3w + \frac{1}{2} B^{2.0}_{9.0.0}\beta_1^2 \cos 6w \cos 9w \\
&+ \frac{3}{2}\mu B^{1.0}_{3.0.0}\beta_1\gamma_1 \sin 6w \sin 3w + \frac{9}{2}\mu B^{1.0}_{9.0.0}\beta_1\gamma_1 \sin 6w \sin 9w \\
&- \frac{9}{4}\mu^2 B_{3.0.0}\gamma_1^2 \cos 3w + \frac{9}{4}\mu^2 B_{3.0.0}\gamma_1^2 \cos 6w \cos 3w + \frac{81}{4}\mu^2 B_{9.0.0}\gamma_1^2 \cos 6w \cos 9w = \\
&= \left\{\frac{1}{2} B^{2.0}_{3.0.0} + \frac{1}{4} B^{2.0}_{3.0.0} + \frac{1}{4} B^{2.0}_{9.0.0}\right\}\beta_1^2 \cos 3w \\
&+ \left\{\frac{3}{4}\mu B^{1.0}_{3.0.0} + \frac{9}{4}\mu B^{1.0}_{9.0.0}\right\}\beta_1\gamma_1 \cos 3w \\
&+ \left\{-\frac{9}{4}\mu^2 B_{3.0.0} + \frac{9}{8}\mu^2 B_{3.0.0} + \frac{81}{8}\mu^2 B_{9.0.0}\right\}\gamma_1^2 \cos 3w
\end{aligned} \tag{25}$$

Die Glieder dritter Ordnung in Q findet man analog.

Combiniert man schließlich die Glieder gleicher Argumente und ordnet, so findet man als Werte von P und Q bis inclusive Gliedern 2. Grades für den Typus $^2/_3$ die folgenden definitiven Ausdrücke, welche in die allgemeinen Gyldén'schen Bewegungsgleichungen einzusetzen sind:[1]

[1] Dabei sind aber in dem Wert (26) für Q, wie in der zweiten Abtheilung dieser Untersuchungen dargethan werden wird, noch eine Anzahl gewöhnlicher Glieder zweiten Grades mitzunehmen, die bei Berechnung der Störungen 2. Grades in Multiplication mit $\frac{dR}{dv}$ neue elementäre und charakteristische Glieder ergeben. Denn in der Differentialgleichung (6) des IV. Capitels für ρ tritt ja die Größe $Q_2\left(\frac{dR}{dv}\right)_0$ auf.

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{Q} = {} & q_1 \sin 3w + q_2\eta \sin \mathrm{v} && + q_4\eta \sin(3w-\mathrm{v}) && + q_6\eta \sin(6w-\mathrm{v}) \\
& + q_3\eta' \sin \mathrm{v}_1 && + q_5\eta' \sin(3w-\mathrm{v}_1) && + q_7\eta' \sin(6w-\mathrm{v}_1) \\
& + q_8\eta^2 \sin 3w \quad + q_{12}\eta^2 \sin(3w-2\mathrm{v}) && + q_{15}\eta^2 \sin(6w-2\mathrm{v}) && + q_{18}\eta^2 \sin(9w-2\mathrm{v}) \\
& + q_9\eta\eta' \sin(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + q_{13}\eta\eta' \sin(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && + q_{16}\eta\eta' \sin(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && + q_{19}\eta\eta' \sin(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& + q_{10}\eta\eta' \sin(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) + q_{14}\eta'^2 \sin(3w-2\mathrm{v}_1) && + q_{17}\eta'^2 \sin(6w-2\mathrm{v}_1) && + q_{20}\eta'^2 \sin(9w-2\mathrm{v}_1) \\
& + q_{11}\eta'^2 \sin 3w && && + q_{21}\eta\eta' \sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& + g_1 \sin 6w \quad + g_2\eta \sin(3w+\mathrm{v}) && + g_4\eta \sin(9w-\mathrm{v}) && \\
& \quad + g_3\eta' \sin(3w+\mathrm{v}_1) && + g_5\eta' \sin(9w-\mathrm{v}_1) + G, &&
\end{aligned} \tag{26}$$

wobei die Glieder in den q die elementären und charakteristischen, diejenigen in den g aber die gewöhnlichen Glieder sind, welche in T groß werden; G umfasst die übrigen gewöhnlichen Glieder, die keine kleinen Divisoren beim Integrationsprocesse erhalten, und die also im Integral nicht groß sind. Die wenigen zu berücksichtigenden unter diesen gewöhnlichen Gliedern »G« bestimmt man direct bei der numerischen Rechnung.

Somit repräsentiert jetzt in der That der Ausdruck (26) den wesentlichen Theil der Function $\underset{\sim}{Q}$ derart, dass die Summe der vernachlässigten Glieder gegenüber den mitgenommenen klein ist. Wenn wir also diese Glieder aus (26) in die Differentialgleichungen einsetzen, so wird deren Integration jedenfalls eine bessere Darstellung der in der Natur herrschenden Bewegung ergeben, als es bei der alten Störungstheorie der Fall ist, welche nicht die wichtigsten Glieder in diesem Umfange von vorneherein in Rechnung zieht. Mit welchem Grade von Genauigkeit und für wie lange Zeiträume dabei die Gyldén'sche Bahn die in der Natur stattfindende Bewegung wiedergibt, soll in dieser Abhandlung nicht zum Gegenstande der Untersuchung gemacht werden, da diese Frage wesentlich mit der Integrationsmethode zusammenhängt und allem Anscheine nach in endgiltiger und befriedigender Weise nur bei Anwendung von Gyldén's horistischer Integrationsmethode oder einer Modification derselben ihre Lösung findet, eine Methode, die auch die Nothwendigkeit zeigt, Gliedern dritten Grades von vorneherein Rechnung zu tragen, von denen wir bloß zunächst in diesem ersten Theile abgesehen haben. Doch denke ich bald auf diese Frage und die horistische Methode zurückzukommen.

Als Werte für die Coefficienten fand ich folgende Ausdrücke,[1] indem $\underset{\sim}{Q}$ gradweise geordnet, ist:

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}_0 + \underset{\sim}{Q}_1 + \underset{\sim}{Q}_2.$$

0. Grad. Coefficienten in $\underset{\sim}{Q}_0$:

$$\begin{aligned}
q_1 = {} & \underbrace{A_{3.0.0}}_{\text{I. Ordg.}} + \underbrace{\frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_1 + 3\mu A_{6.0.0}\gamma_1}_{\text{II. Ordnung}} + \Big\{\frac{1}{2} A^{2.0}_{3.0.0} - \frac{1}{4} A^{2.0}_{3.0.0} + \frac{1}{4} A^{2.0}_{9.0.0}\Big\}\beta_1^2 \\
& \underbrace{\qquad - \mu\Big\{\frac{3}{4} A^{1.0}_{3.0.0} - \frac{9}{4} A^{1.0}_{9.0.0}\Big\}\beta_1\gamma_1 + \mu^2\Big\{-\frac{9}{4} A_{3.0.0} - \frac{9}{8} A_{3.0.0} + \frac{81}{8} A_{9.0.0}\Big\}\gamma_1^2}_{\text{III. Ordnung}} \\
g_1 = {} & A_{6.0.0} + \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_1 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{9.0.0}\beta_1 - \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_1 + \frac{9}{2}\mu A_{9.0.0}\gamma_1.
\end{aligned} \tag{27}$$

[1] Bei Bildung der definitiven Werte von P und $\underset{\sim}{Q}$ ist nicht zu vergessen, dass in $\underset{\sim}{Q}$ alle durch Multiplication mit K entstehenden Glieder das entgegensetzte Vorzeichen, wie im Ausdruck von P [cf. Gleichung (43), Cap. II] haben, indem diese Glieder in P positiv, in $\underset{\sim}{Q}$ aber negativ sind.

1. Grad. Coefficienten in Q_1:

$$q_2 = \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{3.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_4 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_2 - \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_1$$

$$- \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_6 + 3\mu A_{6.0.0}\gamma_1 + \frac{3}{2}\mu A^{(+1)}_{3.1.0}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu A^{(-1)}_{3.1.0}\gamma_1$$

$$q_3 = A^{(+1)}_{0.0.1} + \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{3.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_5 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_3 - \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_1$$

$$+ 3\mu A_{6.0.0}\gamma_5 + \frac{3}{2}\mu A^{(+1)}_{3.0.1}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu A^{(-1)}_{3.0.1}\gamma_1$$

$$q_4 = A^{(-1)}_{3.1.0} - \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_4 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.1.0}\beta_1 - \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_1 + 3\mu A_{6.0.0}\gamma_6 + 3\mu A^{(-1)}_{6.1.0}\gamma_1$$

$$q_5 = A^{(-1)}_{3.0.1} - \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_5 - \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.0.1}\beta_1 - \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_5 + 3\mu A^{(-1)}_{6.0.1}\gamma_1$$

$$q_6 = A^{(-1)}_{6.1.0} + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{9.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_2 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_1 + \frac{9}{2}\mu A^{(-1)}_{9.1.0}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu A^{(-1)}_{3.1.0}\gamma_1$$

$$q_7 = A^{(-1)}_{6.0.1} + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{9.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_3 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_1 + \frac{9}{2}\mu A^{(-1)}_{9.0.1}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu A^{(-1)}_{3.0.1}\gamma_1 \qquad (28)$$

$$g_2 = A^{(+1)}_{3.1.0} + \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_2 + \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{6.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{9.0.0}\beta_4$$

$$+ 3\mu A^{(+1)}_{6.1.0}\gamma_1 + \frac{9}{2}\mu A_{9.0.0}\gamma_4$$

$$g_3 = A^{(+1)}_{3.0.1} + \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_3 + \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{6.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{9.0.0}\beta_5$$

$$+ 3\mu A^{(+1)}_{6.0.1}\gamma_1 + \frac{9}{2}\mu A_{9.0.0}\gamma_5$$

$$g_4 = A^{(-1)}_{9.1.0} + \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_4 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_2 - \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_4$$

$$3\mu A^{(-1)}_{6.1.0}\gamma_1 + 6\mu A_{12.0.0}\gamma_6 + 6\mu A^{(-1)}_{12.1.0}\gamma_1 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{12.1.0}\beta_1$$

$$g_5 = A^{(-1)}_{9.0.1} + \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_5 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_3 - \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_5$$

$$- 3\mu A^{(-1)}_{6.0.1}\gamma_1 + 6\mu A^{(-1)}_{12.0.1}\gamma_1 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{12.0.1}\beta_1.$$

2. Grad. Coefficienten in Q_2:

$$q_8 = A_{3.2.0} + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{9.1.0}\beta_4 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_7 - \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.1.0}\beta_2$$

$$- \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_{21} + 3\mu A_{6.0.0}\gamma_7 + \frac{9}{2}\mu A^{(-1)}_{9.1.0}\gamma_4 - \frac{3}{2}\mu A^{(-1)}_{3.1.0}\gamma_4 \qquad (29)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
q_9 &= A^{(+1)}_{3.1.1} + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{9.0.1}\beta_4 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_9 - \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_5 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.0.1}\beta_2 \\
&\quad - \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_{22} + 3\mu A_{6.0.0}\gamma_9 + \frac{9}{2}\mu A^{(-1)}_{9.0.1}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu A^{(-1)}_{3.1.0}\gamma_5 \\
q_{10} &= A^{(-1)}_{3.1.1} + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{9.1.0}\beta_5 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_8 + \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_2 - \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_4 \\
&\quad + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.1.0}\beta_3 + 3\mu A_{6.0.0}\gamma_8 + \frac{9}{2}\mu A^{(-1)}_{9.1.0}\gamma_5 - \frac{3}{2}\mu A^{(-1)}_{3.0.1}\gamma_4 \\
q_{11} &= A_{3.0.2} + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{9.0.1}\beta_5 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_{10} + \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_3 - \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_5 \\
&\quad + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.0.1}\beta_3 + 3\mu A_{6.0.0}\gamma_{10} + \frac{9}{2}\mu A^{(-1)}_{9.0.1}\gamma_5 - \frac{3}{2}\mu A^{(-1)}_{3.0.1}\gamma_5 \\
q_{12} &= A^{(-2)}_{3.2.0} - \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{3.1.0}\beta_4 - \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_{17} - \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_{14} - 3\mu A_{6.0.0}\gamma_{17} \\
&\quad + 3\mu A_{6.0.0}\gamma_{20} - \frac{3}{2}\mu A^{(+1)}_{3.1.0}\gamma_4 + 3\mu A^{(-1)}_{6.1.0}\gamma_6 \\
q_{13} &= A^{(-1)}_{3.1.1} - \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{3.0.1}\beta_4 - \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{3.1.0}\beta_5 - \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_{18} - \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_{15} \\
&\quad - \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_2 - 3\mu A_{6.0.0}\gamma_{18} - \frac{3}{2}\mu A^{(+1)}_{3.1.0}\gamma_5 - \frac{3}{2}\mu A^{(+1)}_{3.0.1}\gamma_4 + 3\mu A^{(-1)}_{6.0.1}\gamma_6 \\
q_{14} &= A^{(-2)}_{3.0.2} - \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{3.0.1}\beta_5 - \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_{19} - \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_{16} - \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_3 \\
&\quad - 3\mu A_{6.0.0}\gamma_{19} - \frac{3}{2}\mu A^{(+1)}_{3.0.1}\gamma_5 \\
q_{15} &= A^{(-2)}_{6.2.0} + \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_{11} - \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_{17} + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_2 - \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_{11} \\
&\quad - \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_{17} + \frac{9}{2}\mu A^{(-1)}_{9.1.0}\gamma_6 \\
q_{16} &= A^{(-2)}_{6.1.1} + \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_{12} - \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_{18} - \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_4 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_3 \\
&\quad + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_2 - \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_{12} - \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_{18} + \frac{9}{2}\mu A^{(-1)}_{9.0.1}\gamma_6 \\
q_{17} &= A^{(-2)}_{6.0.2} + \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_{13} - \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_{19} - \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_5 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_3 \\
&\quad - \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_{13} - \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_{19} \\
q_{18} &= A^{(-2)}_{9.2.0} + \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_{11} + \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_{14} + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_4 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.1.0}\beta_2 - \\
&\quad - 3\mu A_{6.0.0}\gamma_{11} - \frac{3}{2}\mu A^{(-1)}_{3.1.0}\gamma_4
\end{aligned}
\right\} \tag{29}
$$

$$\left.\begin{aligned}
q_{19} = {} & A^{(-2)}_{9.1.1} + \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_{12} + \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_{15} + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_5 + \\
& + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_4 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.1.0}\beta_3 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.0.1}\beta_2 - 3\mu A_{6.0.0}\gamma_{12} - \frac{3}{2}\mu A^{(-1)}_{3.0.1}\gamma_4 - \\
& - \frac{3}{2}\mu A^{(-1)}_{3.1.0}\gamma_5 \\
q_{20} = {} & A^{(-2)}_{9.0.2} + \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0}\beta_{13} + \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_{16} + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_5 + \\
& + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.0.1}\beta_3 - 3\mu A_{6.0.0}\gamma_{13} - \frac{3}{2}\mu A^{(-1)}_{3.0.1}\gamma_5 \\
q_{21} = {} & A^{(+1)}_{0.1.1} - \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_8 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\beta_9 - \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_3 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_2 \\
& - \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.1.0}\beta_5 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.0.1}\beta_4 - \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_8 + \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}\gamma_9 \\
& - 3\mu A_{6.0.0}\gamma_{22} - \frac{3}{2}\mu A^{(+1)}_{3.0.1}\gamma_6 - 3\mu A^{(-1)}_{6.1.0}\gamma_5 + 3\mu A^{(-1)}_{6.0.1}\gamma_4.
\end{aligned}\right| \tag{29}$$

Analog erhält man für P:

$$\left.\begin{aligned}
P = {} & p_0 + p_1\cos 3w + p_2\eta\cos v + p_4\eta\cos(3w-v) + p_6\eta\cos(6w-v) \\
& \qquad + p_3\eta'\cos v_1 + p_5\eta'\cos(3w-v_1) + p_7\eta'\cos(6w-v_1) \\
& + p_8\eta^2 \\
& + p_9\eta^2\cos 3w + p_{14}\eta^2\cos(3w-2v) + p_{17}\eta^2\cos(6w-2v) + p_{20}\eta^2\cos(9w-2v) \\
& + p_{10}\eta\eta'\cos(3w+v-v_1) + p_{15}\eta\eta'\cos(3w-v-v_1) + p_{18}\eta\eta'\cos(6w-v-v_1) + p_{21}\eta\eta'\cos(9w-v-v_1) \\
& + p_{11}\eta\eta'\cos(3w-v+v_1) + p_{16}\eta'^2\cos(3w-2v_1) + p_{19}\eta'^2\cos(6w-2v_1) + p_{22}\eta'^2\cos(9w-2v_1) \\
& + p_{12}\eta'^2\cos 3w \qquad + p_{23}\eta\eta'\cos(v-v_1) \\
& + p_{13}\eta'^2 \qquad + G',
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

wobei:

Constanter Theil:

$$p_0 = \underbrace{B_{0.0.0}}_{\text{I. Ordng.}} + \underbrace{\frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}\beta_1 + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_1}_{\text{II. Ordnung}} + \underbrace{\frac{1}{2} B^{2.0}_{0.0.0}\beta_1^2}_{\text{III. Ordng.}} \tag{31}$$

0. Grad. Coefficienten in P_0:

$$\left.\begin{aligned}
p_1 = {} & \underbrace{B_{3.0.0}}_{\text{I. Ordng.}} + \underbrace{\left(B^{1.0}_{0.0.0} + \frac{1}{2} B^{1.0}_{6.0.0}\right)\beta_1 + 3\mu B_{6.0.0}\gamma_1}_{\text{II. Ordnung}} \\
& \underbrace{\begin{aligned}
& + \left\{\frac{1}{2} B^{2.0}_{3.0.0} + \frac{1}{4} B^{2.0}_{3.0.0} + \frac{1}{4} B^{2.0}_{9.0.0}\right\}\beta_1^2 \\
& + \mu\left\{\frac{3}{4} B^{1.0}_{3.0.0} + \frac{9}{4} B^{1.0}_{9.0.0}\right\}\beta_1\gamma_1 \\
& + \mu^2\left\{-\frac{9}{4} B_{3.0.0} + \frac{9}{8} B_{3.0.0} + \frac{81}{8} B_{9.0.0}\right\}\gamma_1^2.
\end{aligned}}_{\text{III. Ordnung}}
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

1. Grad. Coefficienten in P_1:

$$
\left.\begin{aligned}
p_2 &= B_{0.1.0}^{(+1)} + \frac{1}{2} B_{6.0.0}^{1.0}\beta_4 + \frac{1}{2} B_{3.1.0}^{+1.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} B_{3.0.0}^{1.0}\beta_2 + \frac{1}{2} B_{3.1.0}^{-1.1.0}\beta_1 \\
&\quad + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_6 + 3\mu B_{6.0.0}\gamma_4 + \frac{3}{2}\mu B_{3.1.0}^{(+1)}\gamma_1 + \frac{3}{2}\mu B_{3.1.0}^{(-1)}\gamma_1 \\
p_3 &= B_{0.0.1}^{+1} + \frac{1}{2} B_{6.0.0}^{1.0}\beta_5 + \frac{1}{2} B_{3.0.1}^{+1.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} B_{3.0.0}^{1.0}\beta_3 + \\
&\quad + \frac{1}{2} B_{3.0.1}^{-1.1.0}\beta_1 + 3\mu B_{6.0.0}\gamma_5 + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.1}^{(+1)}\gamma_1 + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.1}^{(-1)}\gamma_1 \\
p_4 &= B_{3.1.0}^{(-1)} + B_{0.0.0}^{1.0}\beta_2 + \frac{1}{2} B_{3.0.0}^{1.0}\beta_4 + \frac{1}{2} B_{0.1.0}^{+1.1.0}\beta_1 \\
&\quad + \frac{1}{2} B_{6.1.0}^{-1.1.0}\beta_1 + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_4 + 3\mu B_{6.0.0}\gamma_6 + 3\mu B_{6.1.0}^{(-1)}\gamma_1 \\
p_5 &= B_{3.0.1}^{(-1)} + B_{0.0.0}^{1.0}\beta_3 + \frac{1}{2} B_{3.0.0}^{1.0}\beta_5 + \frac{1}{2} B_{0.0.1}^{+1.1.0}\beta_1 + \\
&\quad + \frac{1}{2} B_{6.0.1}^{-1.1.0}\beta_1 + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_5 + 3\mu B_{6.0.1}^{(-1)}\gamma_1 \\
p_6 &= B_{6.1.0}^{(-1)} + B_{9.1.0}^{-1.1.0}\beta_1 + B_{0.0.0}^{1.0}\beta_4 + \frac{1}{2} B_{3.0.0}^{1.0}\beta_2 + \frac{1}{2} B_{3.1.0}^{-1.1.0}\beta_1 + \frac{9}{2}\mu B_{9.1.0}^{(-1)}\gamma_1 \\
&\quad - \frac{3}{2}\mu B_{3.1.0}^{(-1)}\gamma_1 \\
p_7 &= B_{6.0.1}^{(-1)} + \frac{1}{2} B_{9.0.1}^{-1.1.0}\beta_1 + B_{0.0.0}^{1.0}\beta_5 + \frac{1}{2} B_{3.0.0}^{1.0}\beta_3 + \frac{1}{2} B_{3.0.1}^{-1.1.0}\beta_1 + \frac{9}{2}\mu B_{9.0.1}^{(-1)}\gamma_1 \\
&\quad - \frac{3}{2}\mu B_{3.0.1}^{(-1)}\gamma_1 .
\end{aligned}\right\} \tag{33}
$$

2. Grad. Coefficienten in P_2:

$$
\left.\begin{aligned}
p_8 &= B_{0.2.0} + \frac{1}{2} B_{3.0.0}^{1.0}\beta_7 + \frac{1}{2} B_{3.1.0}^{-1.1.0}\beta_2 + \frac{1}{2} B_{6.1.0}^{-1.1.0}\beta_4 + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_7 \\
&\quad + 3\mu B_{6.0.0}\gamma_{21} + \frac{3}{2}\mu B_{3.1.0}^{(+1)}\gamma_6 + 3\mu B_{6.1.0}^{(-1)}\gamma_4 \\
p_9 &= B_{3.2.0} + \frac{1}{2} B_{6.0.0}^{1.0}\beta_7 + \frac{1}{2} B_{9.1.0}^{-1.1.0}\beta_4 + B_{0.0.0}^{1.0}\beta_7 + \frac{1}{2} B_{0.1.0}^{+1.1.0}\beta_2 \\
&\quad + \frac{1}{2} B_{3.1.0}^{-1.1.0}\beta_4 + \frac{1}{2} B_{6.1.0}^{-1.1.0}\beta_2 + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_{21} \\
&\quad + 3\mu B_{6.0.0}\gamma_7 + \frac{9}{2}\mu B_{9.1.0}^{(-1)}\gamma_4 + \frac{3}{2}\mu B_{3.1.0}^{(-1)}\gamma_4 \\
p_{10} &= B_{3.1.1}^{(+1)} + \frac{1}{2} B_{6.0.0}^{1.0}\beta_9 + \frac{1}{2} B_{9.0.1}^{-1.1.0}\beta_4 + B_{0.0.0}^{1.0}\beta_8 + \frac{1}{2} B_{0.1.0}^{+1.1.0}\beta_3 \\
&\quad + \frac{1}{2} B_{3.1.0}^{-1.1.0}\beta_5 + \frac{1}{2} B_{6.0.1}^{-1.1.0}\beta_2 + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_{22} \\
&\quad + 3\mu B_{6.0.0}\gamma_9 + \frac{9}{2}\mu B_{9.0.1}^{(-1)}\gamma_4 + \frac{3}{2}\mu B_{3.1.0}^{(-1)}\gamma_5
\end{aligned}\right| \tag{34}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
p_{11} = {} & B^{(-1)}_{3.1.1} + \frac{1}{2} B^{1.0}_{6.0.0}\beta_{8} + \frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{9.1.0}\beta_{5} + B^{1.0}_{0.0.0}\beta_{9} + \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_{2} \\
& + \frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_{4} + \frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{6.1.0}\beta_{3} + 3\mu B_{6.0.0}\gamma_{8} \\
& + \frac{9}{2}\mu B^{(-1)}_{9.1.0}\gamma_{5} + \frac{3}{2}\mu B^{(-1)}_{3.0.1}\gamma_{4} \\[2ex]
p_{12} = {} & B_{3.0.2} + \frac{1}{2} B^{1.0}_{6.0.0}\beta_{10} + \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_{3} + \frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_{5} \\
& + \frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{6.0.1}\beta_{3} + \frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{9.0.1}\beta_{5} + B^{1.0}_{0.0.0}\beta_{10} + 3\mu B_{6.0.0}\gamma_{10} \\
& + \frac{9}{2}\mu B^{(-1)}_{9.0.1}\gamma_{5} + \frac{3}{2}\mu B^{(-1)}_{3.0.1}\gamma_{5} \\[2ex]
p_{13} = {} & B_{0.0.2} + \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}\beta_{10} + \frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_{3} + \frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{6.0.1}\beta_{5} + \\
& + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_{10} + 3\mu B^{(-1)}_{6.0.1}\gamma_{5} \\[2ex]
p_{14} = {} & B^{(-2)}_{3.2.0} + \frac{1}{2} B^{1.0}_{6.0.0}\beta_{17} + \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{3.1.0}\beta_{4} + B^{1.0}_{0.0.0}\beta_{11} + \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}\beta_{14} \\
& + \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{0.1.0}\beta_{2} + 3\mu B_{6.0.0}\gamma_{17} + 3\mu B_{6.0.0}\gamma_{20} + \frac{3}{2}\mu B^{(+1)}_{3.1.0}\gamma_{4} \\
& + 3\mu B^{(-1)}_{6.1.0}\gamma_{6} \\[2ex]
p_{15} = {} & B^{(-2)}_{3.1.1} + \frac{1}{2} B^{1.0}_{6.0.0}\beta_{18} + \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{3.1.0}\beta_{5} + \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{3.0.1}\beta_{4} + B^{1.0}_{0.0.0}\beta_{12} \\
& + \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}\beta_{15} + \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{0.1.0}\beta_{3} + \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_{2} \\
& + 3\mu B_{6.0.0}\gamma_{18} + \frac{3}{2}\mu B^{(+1)}_{3.1.0}\gamma_{5} + \frac{3}{2}\mu B^{(+1)}_{3.0.1}\gamma_{4} + \mu B^{(-1)}_{6.0.1}\gamma_{6} \\[2ex]
p_{16} = {} & B^{(-2)}_{3.0.2} + \frac{1}{2} B^{1.0}_{6.0.0}\beta_{19} + \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{3.0.1}\beta_{5} + B^{1.0}_{0.0.0}\beta_{13} + \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}\beta_{16} \\
& + \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_{3} + 3\mu B_{6.0.0}\gamma_{19} + \frac{3}{2}\mu B^{(+1)}_{3.0.1}\gamma_{5} \\[2ex]
p_{17} = {} & B^{(-2)}_{6.2.0} + B^{1.0}_{0.0.0}\beta_{14} + \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}\beta_{11} + \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}\beta_{17} + \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{0.1.0}\beta_{4} \\
& + \frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_{2} - \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_{11} + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_{17} \\
& + \frac{9}{2}\mu B^{(-1)}_{9.1.0}\gamma_{6} \\[2ex]
p_{18} = {} & B^{(-2)}_{6.1.1} + B^{1.0}_{0.0.0}\beta_{15} + \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}\beta_{12} + \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}\beta_{18} + \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{0.1.0}\beta_{5} \\
& + \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_{4} + \frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_{3} \\
& + \frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta \;\; \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_{12} + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_{18} + \frac{9}{2}\mu B^{(-1)}_{9.0.1}\gamma_{6}
\end{aligned}
\right\}
\qquad (34)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
p_{19} = {} & B_{6.0.2}^{(-2)} + B_{0.0.0}^{1.0}\beta_{16} + \frac{1}{2} B_{3.0.0}^{1.0}\beta_{13} + \frac{1}{2} B_{3.0.0}^{1.0}\beta_{19} + \frac{1}{2} B_{0.0.1}^{+1.1.0}\beta_5 \\
& - \frac{1}{2} B_{3.0.1}^{-1.1.0}\beta_3 - \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_{13} + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_{19} \\[2ex]
p_{20} = {} & B_{9.2.0}^{(-2)} + \frac{1}{2} B_{6.0.0}^{1.0}\beta_{11} + B_{0.0.0}^{1.0}\beta_{17} + \frac{1}{2} B_{3.0.0}^{1.0}\beta_{14} + \frac{1}{2} B_{3.1.0}^{-1.1.0}\beta_4 \\
& + \frac{1}{2} B_{6.1.0}^{-1.1.0}\beta_2 - 3\mu B_{6.0.0}\gamma_{11} - \frac{3}{2}\mu B_{3.1.0}^{(-1)}\gamma_4 \\[2ex]
p_{21} = {} & B_{9.1.1}^{(-2)} + \frac{1}{2} B_{6.0.0}^{1.0}\beta_{12} + B_{0.0.0}^{1.0}\beta_{18} + \frac{1}{2} B_{3.0.0}^{1.0}\beta_{15} + \frac{1}{2} B_{3.1.0}^{-1.1.0}\beta_5 \\
& + \frac{1}{2} B_{3.0.1}^{-1.1.0}\beta_4 + \frac{1}{2} B_{6.1.0}^{-1.1.0}\beta_3 + \frac{1}{2} B_{6.0.1}^{-1.1.0}\beta_2 - 3\mu B_{6.0.0}\gamma_{12} - \\
& - \frac{3}{2}\mu B_{3.0.1}^{(-1)}\gamma_4 - \frac{3}{2}\mu B_{3.1.0}^{(-1)}\gamma_5 \\[2ex]
p_{22} = {} & B_{9.0.2}^{(-2)} + \frac{1}{2} B_{6.0.0}^{1.0}\beta_{13} + B_{0.0.0}^{1.0}\beta_{19} + \frac{1}{2} B_{3.0.0}^{1.0}\beta_{16} + \frac{1}{2} B_{3.0.1}^{-1.1.0}\beta_5 \\
& + \frac{1}{2} B_{6.0.1}^{-1.1.0}\beta_3 - 3\mu B_{6.0.0}\gamma_{13} - \frac{3}{2}\mu B_{3.0.1}^{(-1)}\gamma_5 \\[2ex]
p_{23} = {} & B_{0.1.1}^{(+1)} + \frac{1}{2} B_{3.0.0}^{1.0}\beta_8 + \frac{1}{2} B_{3.0.0}^{1.0}\beta_9 + \frac{1}{2} B_{3.1.0}^{-1.1.0}\beta_3 + \frac{1}{2} B_{3.0.1}^{-1.1.0}\beta_2 \\
& + \frac{1}{2} B_{6.1.0}^{-1.1.0}\beta_5 + \frac{1}{2} B_{6.0.1}^{-1.1.0}\beta_4 + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_8 + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_9 \\
& + 3\mu B_{6.0.0}\gamma_{22} + \frac{3}{2}\mu B_{3.0.1}^{(+1)}\gamma_6 + 3\mu B_{6.1.0}^{(-1)}\gamma_5 + 3\mu B_{6.0.1}^{(-1)}\gamma_4 .
\end{aligned}
\right\} \tag{34}
$$

Capitel IV.

Die Integration der Differentialgleichungen des Hildatypus mittelst des Gyldén'schen Verfahrens der partiellen Integration in der Brendel'schen Modification.

I. Vorbereitung der Integration.

A. Übergang auf die zu integrierenden Differentialgleichungen des Hildatypus.

Im Besitze von P und $\underset{\sim}{Q}$ können wir aus der allgemeinen Form der Gyldén'schen Differentialgleichungen für die planetarische Bewegung:

$$\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv} = -(1+S)^2\underset{\sim}{Q} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\eta^2}\,\frac{d\eta^2}{dv} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{dv^2}+\rho = &-\left\{\frac{2}{1-\eta^2}\,\frac{d\eta^2}{dv}+(1+S)^2\underset{\sim}{Q}\right\}\frac{d\rho}{dv}+2S+S^2-(1+S)^2P\\ &-\left\{\frac{1}{1-\eta^2}\,\frac{d^2\eta^2}{dv^2}+\frac{2}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2+\frac{(1+S)^2}{1-\eta^2}\,\frac{d\eta^2}{dv}\,\underset{\sim}{Q}\right\}(1+\rho)\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dT}{dv} = {} & S-2R-2RS+3R^2+3SR^2-4R^3\\ & +\{6R-2S-12R^2+6RS-\ldots\}\eta\cos v\\ & -3\eta^2R+\left\{\frac{3}{2}S-6R+\ldots\right\}\eta^2\cos 2v\\ & +6R\eta^3\cos v+\left\{\frac{19}{4}R-S\right\}\eta^3\cos 3v\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & -\frac{dX}{dv}\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$(\mathrm{I})$$

jetzt leicht die specielle gewinnen, welche für die Planeten der Hildagruppe der Integration zugrunde zu legen ist.

Zur Bestimmung derjenigen Genauigkeitsgrenze, die zu erreichen wir dabei vorläufig anstreben, diene folgende allgemeine Erwägung. Es ist in Bogenmaß $\pi = 3.141\ldots = 180°$, mithin circa:

1 gleich	$57°$	$\frac{1}{1000}$ gleich	$3'4$
$\frac{1}{10}$ »	$5°7$	$\frac{1}{10000}$ »	$20''$
$\frac{1}{100}$ »	$34'$	$\frac{1}{100000}$ »	$2''0$

Man kann also, wenigstens in allgemeinem Überschlage, schließen, dass ein Störungsglied von der Größe $m' = \frac{1}{1000}$ etwa in Bogenmaß den Betrag von 3'.4 hat (indem die Jupitermasse $m' = \frac{1}{1048}$ ist). Will man den Ort eines Himmelskörpers, was wir uns vorläufig als Ziel setzen, auf eine Bogenminute genau angeben, da dies zu seiner Auffindung am Himmel ausreicht, so muss man also die Glieder, welche so groß wie m' sind, deren Logarithmus mithin etwa $7.0-10$ ist, noch mitnehmen. Die Glieder, welche von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$ sind, sind natürlich um so größer, je kleiner δ_1 ist. Ist δ_1 etwa gleich $\frac{1}{100}$, so ist $\frac{m'}{\delta_1}$ etwa gleich $\frac{1}{10}$. Die charakteristischen Störungen können also den Ort des kleinen Planeten um ein paar Grade ändern. Die Excentricität η (indem $\eta \mathrel{\underline{\underline{\smile}}} e$, d. h. der elliptischen Excentricität der Größenordnung nach vergleichbar) ist bei den kleinen Planeten auch im Durchschnitte gleich $\frac{1}{10}$, ebenso groß wie die charakteristischen Glieder. Im Falle der charakteristischen Planeten $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \text{ etc.}\right)$ kann also der Unterschied zwischen der gestörten und ungestörten Bahn ebenso groß sein, wie zwischen der Kepler'schen Ellipse und der Kreisbahn, Glieder von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1^2}$ können sogar sehr groß werden.

Bei Beurtheilung der Größe eines Gliedes darf man aber nicht vergessen, dass es noch mit irgend einer Potenz von η oder η' multipliciert ist, und dadurch verkleinert wird. So hat beispielsweise ein Glied:

nullten Grades der Ordnung	$\frac{m'}{\delta_1}$	die Größe	$\frac{m'}{\delta_1}$	circa gleich	$\frac{1}{10}$
ersten » » »	$\frac{m'}{\delta_1}$	» »	$\frac{m'}{\delta_1}\eta$	» »	$\frac{1}{100}$
zweiten » » »	$\frac{m'}{\delta_1}$	» »	$\frac{m'}{\delta_1}\eta'^2$	» »	$\frac{1}{1000}$

Ein Glied von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ gleich $\frac{1}{10000}$ ist schon ziemlich klein, während ein solches von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ nicht klein zu sein braucht. Außerdem aber hängt es natürlich nicht bloß von dem absoluten Betrage einer Größe ab, ob man dieselbe vernachlässigt, sondern davon, ob sie klein ist im Verhältnis zu einer größeren Größe.

In diesem Sinne also haben wir die Größe der Störungsglieder zu beurtheilen und wollen demnach in unseren Differentialgleichungen die Glieder, welche rein zweiter Ordnung sind, also die Glieder $\mathrel{\underline{\underline{\smile}}} m'^2$, und erst recht die Glieder $\mathrel{\underline{\underline{\smile}}} m'^3$ etc. ganz fortlassen, sie hingegen, wenn sie mit kleinen Divisoren behaftet sind, mitnehmen, und zwar die Glieder von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ noch beim ersten und zweiten, die Glieder $\mathrel{\underline{\underline{\smile}}} \frac{m'^3}{\delta_1}$ aber nur noch beim nullten Grade. Indem wir in die rechten Seiten der Differentialgleichungen (1), (2), (3), die für den Typus 2/3 im Capitel III ermittelten speciellen Werte der Functionen P, Q, S und R einsetzen, haben wir nun also zu bestimmen, welche Glieder von der Ordnung m'^2 etc. werden und mithin fortzulassen, und welche dagegen mitzunehmen sind.

Betrachten wir die Differentialgleichung für S, so ist in derselben:

$$(1+S)^3 \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q} + 3S\underset{\sim}{Q} + 3S^2\underset{\sim}{Q} + S^3\underset{\sim}{Q}.$$

Das Glied $S^3\underset{\sim}{Q}$ kommt für uns, weil von der 4. Ordnung, überhaupt nicht in Betracht. Das Glied $S^2\underset{\sim}{Q}$ ist von der 3. Ordnung. Es ist aber $S_0^2 \mathrel{\underline{\underline{\smile}}} m'^2$ und $\underset{\sim}{Q} \mathrel{\underline{\underline{\smile}}} m'$, also $S_0^2\underset{\sim}{Q} \mathrel{\underline{\underline{\smile}}} m'^3$, fällt mithin fort. Ferner ist zwar $(S_1)_l^2\, Q_0 \asymp \frac{m'^3}{\delta_1^2}$, aber nicht vom 0. Grad, fällt also gleichfalls fort. Die folgenden Glieder $S_1^2(Q_1+Q_2)$ und $S_2^2(Q_0+Q_1+Q_2)$ aber fallen erst recht fort.

Allgemein war nun $Q \asymp m'$ und daher:

$$\frac{dS}{dv} \asymp m', \text{ d. h. } \left.\frac{dS_l}{dv}, \frac{dS_k}{dv}, \frac{dS_g}{dv}\right\} \asymp m'$$

und ebenso $S_k, S_g\} \asymp m'$, dagegen $S_l > m'$.

In Bezug auf das Product SQ fällt somit, da $S_0 \asymp m'$ ist, das Glied $S_0(Q_0+Q_1+Q_2) \asymp m'^2$ fort. Hingegen liefert $(S_1)_l Q_0$ offenbar Glieder der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$, indem $(S_1)_l$ die Glieder der Form C in den Coefficienten α_2 und α_3 repräsentiert, während offenbar die übrigen Glieder in S_1 der Form B und D, weil von der Ordnung m', im Product mit Q_0 Glieder $\asymp m'^2$ ergeben. Ebenso gibt $(S_2)_l Q_0$ mitzunehmende Glieder zweiten Grades $\asymp \frac{m'^2}{\delta_1}$. Schließlich liefert auch das Product $(S_1)_l Q_1 \asymp \frac{m'^2}{\delta_1}$ mitzunehmende Glieder zweiten Grades, während $S_2 Q_1$ und $S_1 Q_2$ Glieder dritten Grades ergeben und daher für uns jetzt fortfallen.

Das zweite Glied der Differentialgleichung für S zerfällt in die beiden Glieder:

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\eta^2}\,\frac{d\eta^2}{dv}+\frac{1}{2}\,\frac{S}{1-\eta^2}\,\frac{d\eta^2}{dv}.$$

Denken wir das erste dieser Glieder $\frac{1}{2}(1-\eta^2)^{-1}\frac{d\eta^2}{dv}$ entwickelt, so fällt von dieser Entwickelung bereits das zweite Glied $\eta^2\frac{d\eta^2}{dv}$, weil 4. Grades, fort, denn es ist η^2 und ebenso $\frac{d\eta^2}{dv}$ vom 2. Grad, da:

$$\eta^2 = \varkappa^2+\Sigma\varkappa_n^2+\Sigma\Sigma\varkappa_n\varkappa_m \cos[(\varsigma_n-\varsigma_m)+\Gamma_n-\Gamma_m],$$

also:

$$\frac{d\eta^2}{dv} = -2\Sigma\Sigma(\varsigma_n-\varsigma_m)\varkappa_n\varkappa_m \sin[(\varsigma_n-\varsigma_m)v+\Gamma_n-\Gamma_m]$$

ist.

Bei der Integration der Gleichung für ρ werden wir nämlich sehen, dass

$$\eta\cos(\varsigma v+\pi) = \varkappa\cos(\varsigma v+\Gamma)+\Sigma\varkappa_n\cos(\varsigma_n v+\Gamma_n)$$
$$\eta\sin(\varsigma v+\pi) = \varkappa\sin(\varsigma v+\Gamma)+\Sigma\varkappa_n\sin(\varsigma_n v+\Gamma_n)$$

ist, woraus durch Quadrieren und Addieren folgt:

$$\begin{aligned}\eta^2\cos^2(\varsigma v+\pi)+\eta^2\sin^2(\varsigma v+\pi) = \eta^2 = \varkappa^2\{&\cos^2(\varsigma v+\Gamma)+\sin^2(\varsigma v+\Gamma)\}\\ &+\Sigma\varkappa_n^2\{\cos^2(\varsigma_n v+\Gamma_n)+\sin^2(\varsigma_n v+\Gamma_n)\}\\ +\varkappa\Sigma\varkappa_n\{&\cos(\varsigma v+\Gamma)\cos(\varsigma_n v+\Gamma_n)+\sin(\varsigma v+\Gamma)\sin(\varsigma_n v+\Gamma_n)\}\\ +\Sigma\Sigma\varkappa_n\varkappa_m\{&\cos(\varsigma_m v+\Gamma_m)\cos(\varsigma_n v+\Gamma_n)+\sin(\varsigma_m v+\Gamma_m)\sin(\varsigma_n v+\Gamma_n)\},\end{aligned}$$

oder, wenn man das dritte Glied der rechten Seite mit in der Doppelsumme enthalten denkt, kann man auch kürzer:

$$\eta^2 \asymp \varkappa^2+\Sigma\varkappa_n^2+\Sigma\Sigma\varkappa_n\varkappa_m\cos\{(\varsigma_n-\varsigma_m)v+\Gamma_n-\Gamma_m\}$$

schreiben.

Mitzunehmen ist hingegen das erste Glied der Entwickelung $\frac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv}$. Weiter ist:

$$\frac{d\eta^2}{dv} \asymp m', \text{ weil } \varsigma \asymp m' \text{ ist, also } S_0\frac{d\eta^2}{dv} \asymp m'^2$$

und $S_1\frac{d\eta^2}{dv}$ vom 3. Grad, beide Glieder fallen also fort. Als zu integrierende Differentialgleichung für S erhalten wir somit innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenze, die natürlich sowohl im Princip, wie in der praktischen Ausführung auch weiter gesteckt werden kann, wovon wir aber, um überhaupt nur erst einmal einen Anfang in der Behandlung der ganzen verwickelten Aufgabe zu machen, zunächst in dieser ersten Abtheilung absehen:

$$\frac{dS}{dv} = -\underset{\sim}{Q}_0 - \underset{\sim}{Q}_1 - \underset{\sim}{Q}_2 - 3(S_1)_l\underset{\sim}{Q}_0 - 3(S_2)_l\underset{\sim}{Q}_0 - 3(S_1)_l\underset{\sim}{Q}_1 - \frac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv}. \tag{4}$$

Führen wir die Integration zunächst für den 0. und 1. Grad in diesem Theile durch, so haben wir vorläufig erst folgende Differentialgleichung zu integrieren:

$$\frac{dS}{dv} = -\underset{\sim}{Q}_0 - \underset{\sim}{Q}_1 - 3(S_1)_l\underset{\sim}{Q}_0,$$

wobei wir also in $\underset{\sim}{Q}_0$ bis zur 3., in $\underset{\sim}{Q}_1$ bis zur 2. (nicht aber rein 2.) Ordnung gehen.

Um die zu integrierende Form der Differentialgleichung für ρ bis inclusive der Glieder 2. Grades festzustellen, ist zunächst im 1. Glied der 2. Zeile der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\eta^2}{dv^2} \asymp m'^2;$$

im 2. Glied ist:

$$\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2 \text{ vom 4. Grad und von der Ordnung } m'^2;$$

im 3. Glied ist:

$$\underset{\sim}{Q}\frac{d\eta^2}{dv} \asymp m'^2;$$

so dass die zu behandelnde Differentialgleichung zunächst die Form hat:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho = -\left\{\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv} + (1+S)^2\underset{\sim}{Q}\right\}\frac{d\rho}{dv} + 2S + S^2 - (1+S)^2P. \tag{5}$$

Nach den Entwickelungen von Capitel III ist aber:

$$\left(\frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho\right)_k \asymp m'$$

und $\rho_k \gg m'$. Ebenso aber auch $\rho_l \gg m'$, obwohl ρ_l durch den Integrationsprocess nicht vergrößert wird, denn es ist offenbar schon:

$$\left(\frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho\right)_l \gg m'.$$

Fassen wir zunächst das 4. Glied der rechten Seite ins Auge:

$$-P - 2SP - S^2P,$$

so ist offenbar $S_0^2P_0 \asymp m'^3$, fällt also fort, $S_1^2P_0 \asymp \frac{m'^3}{\delta_1}$ aber ist vom 1. Grad und darum auch zu vernachlässigen. Hingegen ist:

$$(S_1)_l \asymp \frac{m'}{\delta_1} \quad \text{und} \quad (S_2)_l \asymp \frac{m'}{\delta_1}, \quad \text{während} \quad S_0, (S_1)_k, (S_2)_k \} \asymp m'$$

sind. Daher ist:

$$(S_1)_l(P_0+P_1) \quad \text{und} \quad (S_2)_l P_0$$

mitzunehmen, hingegen $(S_1)_l P_2$ und $(S_2)_l(P_1+P_2)$, weil vom 3., bezüglich 4. Grad, fortzulassen.

Betrachten wir weiter das 3. Glied:

$$S^2 = S_0^2+S_1^2+S_2^2+2S_0S_1+2S_0S_2+2S_1S_2,$$

so ist:

$$S_0^2 \asymp m'^2 \quad \text{und} \quad S_2^2 \text{ vom 4. Grad.}$$

Diese Glieder fallen also fort, während $(S_1)_l^2 \asymp \frac{m'^2}{\delta_1^2}$ mitzunehmen ist. Aus demselben Grunde sind $2S_0(S_1)_l$ und $2S_0(S_2)_l$, obwohl schon ziemlich klein, weil von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$, doch mitzunehmen, hingegen ist zwar $S_1S_2 \gg m'^2$ aber vom 3. Grade und deshalb fortzulassen, so dass also:

$$S^2 = (S_1)_l^2+2S_0(S_1)_l+2S_0(S_2)_l$$

zu setzen ist.

Vom 1. Glied der rechten Seite in Gleichung (5):

$$-\left\{\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}+(1+S)^2\underset{\sim}{Q}\right\}\frac{d\rho}{dv} = -\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\frac{d\rho}{dv}-\underset{\sim}{Q}\frac{d\rho}{dv}-2S\underset{\sim}{Q}\frac{d\rho}{dv}-S^2\underset{\sim}{Q}\frac{d\rho}{dv},$$

untersuchen wir zunächst das Glied $\underset{\sim}{Q}\frac{d\rho}{dv}$. Es ist:

$$\frac{d\rho}{dv} = \frac{d(\rho)}{dv}+\left(\frac{dR}{dv}\right)_0+\left(\frac{dR}{dv}\right)_1+\left(\frac{dR}{dv}\right)_2,$$

wobei:

$$\frac{d(\rho)}{dv} = -\eta \sin v + \text{Gliedern rein 1. Ordnung,}$$

da $\varsigma \asymp m'$ ist. Von diesen Gliedern der Ordnung m' in (ρ) aber sehen wir natürlich ab, da dieselben in Multiplication mit $\underset{\sim}{Q}$ Glieder der Ordnung m'^2 ergeben. Mitzunehmen ist also nur:

$$-\underset{\sim}{Q}\frac{d(\rho)}{dv} = +(\underset{\sim}{Q}_0+\underset{\sim}{Q}_1)\,\eta \sin v,$$

da $-\underset{\sim}{Q}_2\frac{d(\rho)}{dv}$ Glieder 3. Grades ergibt. Ferner sind die Glieder, welche aus:

$$-(\underset{\sim}{Q}_0+\underset{\sim}{Q}_1+\underset{\sim}{Q}_2)\left(\frac{dR}{dv}\right)_0$$

folgen, mitzunehmen, da alle $\beta \asymp \frac{m'}{\delta_1}$ sind.

Und ferner sind die aus:

$$-(\underset{\sim}{Q}_0+\underset{\sim}{Q}_1)\left(\frac{dR}{dv}\right)_1 \quad \text{und} \quad -\underset{\sim}{Q}_0\left(\frac{dR}{dv}\right)_2$$

resultierenden Glieder mitzunehmen, während:

$$\underset{\sim}{Q}_2\left(\frac{dR}{dv}\right)_1 \text{ und } \underset{\sim}{Q}_1\left(\frac{dR}{dv}\right)_2 \text{ als vom 3. Grade und } \underset{\sim}{Q}_2\left(\frac{dR}{dv}\right)_2 \text{ als vom 4. Grade}$$

fortfallen. Dabei werden jedoch bie langperiodischen charakteristischen Glieder in R_1 und R_2, d. h. die von den Coefficienten β_2, β_3 und β_{14}, β_{15}, β_{16} durch die Differentation mit δ_1 multipliciert, da nach Capitel III:

$$\eta \cos(3w - \mathrm{v}) = \eta \cos(\delta_2 v - 3B - 3\mu T_l + \Pi) \text{ etc.}$$
$$\eta^2 \cos(6w - 2\mathrm{v}) = \eta^2 \cos(2\delta_2 v - 6B - 6\mu T_l + 2\Pi) \text{ etc.}$$

ist, so dass diese Glieder der Form C in $\left(\frac{dR}{dv}\right)_1$ und $\left(\frac{dR}{dv}\right)_2$ rein von der Ordnung m' werden, weil:

$$\left.\delta_1\beta_2,\quad \delta_1\beta_3,\quad \delta_1\beta_{14},\quad \delta_1\beta_{15},\quad \delta_1\beta_{16}\right\} \asymp m',$$

da ja alle $\beta \asymp \frac{m'}{\delta_1}$ sind. In Multiplication mit $\underset{\sim}{Q}$ ergeben diese Glieder von $\left(\frac{dR}{dv}\right)_1$ und $\left(\frac{dR}{dv}\right)_2$ also Glieder der Ordnung m'^2. Und es tritt also bei der Differentiation δ_1 und nicht δ_2 als Factor auf, da ebenso partiell differentiert werden muss, wie integriert wird, und δ_1, nicht aber δ_2 der Integrationsdivisor wird, wie in Capitel IV, Abtheilung II, A 4 eingehend auseinandergesetzt ist.

Übrigens wäre auch wirklich $\delta_2 \cdot \frac{m'}{\delta_1} \asymp m'$, denn δ, δ_1, δ_2 sind alle von derselben Ordnung oder, wenn sie nicht alle sehr nahe gleich sind, so ist immer δ_1 das größte; es können also δ und δ_2 klein sein gegen δ_1, aber niemals erheblich größer als δ_1.

Mithin ist:

$$-\underset{\sim}{Q}\frac{d\rho}{dv} = (\underset{\sim}{Q}_0 + \underset{\sim}{Q}_1)\,\eta \sin \mathrm{v} - (\underset{\sim}{Q}_0 + \underset{\sim}{Q}_1 + \underset{\sim}{Q}_2)\left(\frac{dR}{dv}\right)_0$$
$$-(\underset{\sim}{Q}_0 + \underset{\sim}{Q}_1) \text{ pars}\left(\frac{dR}{dv}\right)_1 - \underset{\sim}{Q}_0 \text{ pars}\left(\frac{dR}{dv}\right)_2.$$

Im Product $-2S\underset{\sim}{Q}\frac{d\rho}{dv}$ wird:

$$\left.2S_0\underset{\sim}{Q}_0\frac{d(\rho)}{dv} \text{ und } 2S_0\underset{\sim}{Q}_1\frac{d(\rho)}{dv}\right\} \asymp m'^2,$$

da $S_0\underset{\sim}{Q} \asymp m'$ aber $(\rho) \asymp m'^0$ ist, weil elementär. Dagegen sind die Glieder 2. Grades, die aus:

$$2(S_1)_l\underset{\sim}{Q}_0\,\eta \sin \mathrm{v}$$

entspringen, mitzunehmen, während:

$$2S_0\underset{\sim}{Q}_2\frac{d(\rho)}{dv},\quad 2S_1(\underset{\sim}{Q}_1 + \underset{\sim}{Q}_2)\,\eta \sin \mathrm{v} \text{ und } 2S_2(\underset{\sim}{Q}_0 + \underset{\sim}{Q}_1 + \underset{\sim}{Q}_2)\,\eta \sin \mathrm{v}$$

offenbar Glieder von einem höheren als dem 2. Grad ergeben, die darum jetzt fortfallen.

Das Product $2S\underset{\sim}{Q}\frac{dR}{dv}$ ferner ist von der 3. Ordnung, also in demselben bloß:

$$-2S_0\underset{\sim}{Q}_0\left(\frac{dR}{dv}\right)_0$$

mitzunehmen, da sämmtliche übrigen aus dem Product entstehenden Glieder zwar 3. Ordnung, aber höher als vom 0. Grade sind. Es ist also:

$$-2S\underset{\sim}{Q}\frac{d\rho}{dv} = +2(S_1)_l\underset{\sim}{Q}_0\,\eta \sin \mathrm{v} - 2S_0\underset{\sim}{Q}_0\left(\frac{dR}{dv}\right)_0.$$

Im Glied $-S^2\underset{\sim}{Q}\frac{d\rho}{dv}$ ist $-S^2\underset{\sim}{Q}\frac{d(\rho)}{dv} \asymp m'^3$, aber schon vom 1. Grad, wenn man S_0 und $\underset{\sim}{Q}_0$ einsetzt, während $-S^2\underset{\sim}{Q}\frac{dR}{dv}$ von der 4. Ordnung ist.

Schließlich ist noch das Glied $-\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\frac{d\rho}{dv}$ zu untersuchen. Es ist entwickelt:

$$2(1-\eta^2)^{-1}\frac{d\eta^2}{dv} = 2\frac{d\eta^2}{dv}+\ldots$$

Da aber $\frac{d\eta^2}{dv} \asymp m'$ und 2. Grades, so ist bereits das 1. Glied $\frac{d\eta^2}{dv}\frac{d(\rho)}{dv}$ vom 3. Grade, und folglich fällt in der Differentialgleichung (5) das Glied $\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\frac{d(\rho)}{dv}$ fort, während das Glied $-2\frac{d\eta^2}{dv}\left(\frac{dR}{dv}\right)_0$ mitzunehmen ist, wo hingegen $-2\frac{d\eta^2}{dv}\left(\frac{dR}{dv}\right)_1$ und $-2\frac{d\eta^2}{dv}\left(\frac{dR}{dv}\right)_2$ vom 3., bezüglich 4. Grade sind.

Als Differentialgleichung für ρ in derjenigen Form, die der Integration zugrunde zu legen ist, erhalten wir somit:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\rho}{dv^2}+\rho = {} & 2S_0-P_0-\underset{\sim}{Q}_0\left(\frac{dR}{dv}\right)_0-2S_0\underset{\sim}{Q}_0\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 \\
& +2S_1-P_1-2(S_1)_l P_0+2S_0(S_1)_l+\underset{\sim}{Q}_0\eta\sin \mathrm{v}-\underset{\sim}{Q}_0 \text{ pars}\left(\frac{dR}{dv}\right)_1-\underset{\sim}{Q}_1 \text{ pars}\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 \\
& +2S_2-P_2-2(S_1)_l P_1-2(S_2)_l P_0+2S_0(S_2)_l+(S_1)_l^2 \\
& +\underset{\sim}{Q}_1\eta\sin \mathrm{v}-\underset{\sim}{Q}_2\left(\frac{dR}{dv}\right)_0-\underset{\sim}{Q}_1 \text{ pars}\left(\frac{dR}{dv}\right)_1-\underset{\sim}{Q}_0 \text{ pars}\left(\frac{dR}{dv}\right)_2 \\
& +2(S_1)_l\underset{\sim}{Q}_0\eta\sin \mathrm{v}-2\frac{d\eta^2}{dv}\left(\frac{dR}{dv}\right)_0
\end{aligned} \tag{6}$$

Diese zu integrierenden Formen der Differentialgleichungen sind immer zuerst zu präcisieren, wenn man die analytischen Störungen eines kleinen Planeten nach den Gyldén'schen Principien berechnen will. Denn sie werden verschieden, je nachdem $P, \underset{\sim}{Q}$ und R, S eine verschiedene Form haben. Beim Typus $\frac{1}{3}$ z. B., wo keine langperiodischen Glieder für den 1. Grad auftreten, also $(S_1)_l = 0$ und ferner $\underset{\sim}{Q}\frac{dR_0}{dv} \asymp m'^2$ ist etc., sind die rechten Seiten der zu integrierenden Differentialgleichungen in ganz anderer Weise zusammengesetzt, als in unserem Falle der Bewegung vom Typus $\frac{2}{3}$. Jedoch haben S und R für die verschiedenen »Classen« kleiner Planeten die gleiche analytische Form (hingegen verschiedene Argumente), so dass die zu integrierenden Differentialgleichungen für die verschiedenen Typen derselben Classe mit Ausnahme der Argumente der Form nach gleich werden. Hinsichtlich des Begriffes der Planetenclasse sei dabei auf Herrn Brendel's Theorie der kleinen Planeten verwiesen, da auf diese Betrachtung weiter einzugehen außerhalb des Rahmens der hier zu behandelnden Aufgabe liegt.

Indem wir, wie schon gesagt, in diesem ersten Theile zunächst die Integration für den 0. und 1. Grad durchführen, haben wir jetzt also die folgenden Gleichungen zu behandeln:

$$\frac{dS}{dv} = -Q_0 - Q_1 - 3(S_1)_l Q_0 \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho = 2S_0 - P_0 - Q_0\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 - 2S_0Q_0\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 \\ +2S_1 - P_1 - 2(S_1)_l P_0 - 2S_0(S_1)_l + Q_0\eta \sin \mathrm{v} - Q_0 \text{ pars}\left(\frac{dR}{dv}\right)_1 - Q_1 \text{ pars}\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

B. Genäherte Darstellung der α und γ durch die β für den 0. und 1. Grad.

Wir wollen nun die α- und γ-Coefficienten mit Vernachlässigung von Gliedern 2. und rein 1. Ordnung durch die unbekannten Coefficienten der Function R ausdrücken, wodurch wir die wichtigsten Theile von S und T, ausgedrückt durch die β erhalten. Offenbar ist dann:

$$S = \alpha_2\eta \cos(3w - \mathrm{v}) + \alpha_3\eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1)$$

$$\left.\begin{aligned} R = \beta_1 \cos 3w + \beta_2\eta \cos(3w - \mathrm{v}) + \beta_4\eta \cos(6w - \mathrm{v}) \\ + \beta_3\eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1) + \beta_5\eta' \cos(6w - \mathrm{v}_1) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\frac{d^2R}{dv^2} + R = 2S \text{ oder, da } \frac{d^2R}{dv^2} \lessapprox m'$$

$$R = 2\alpha_2\eta \cos(3w - \mathrm{v}) + 2\alpha_3\eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1),$$

also, mit Hinblick auf den formell bekannten Integralsatz:

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\beta_2; \qquad \alpha_3 = \frac{1}{2}\beta_3.$$

Die Gleichung für T aber wird innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenze:[1]

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT}{dv} &= -2R_0 + S_1 - 2R_1 + 6R_0\eta \cos \mathrm{v} \\ &= \gamma - 2\beta_1 \cos 3w + (\alpha_2 - 2\beta_2 + 3\beta_1)\eta \cos(3w - \mathrm{v}) - 2\beta_4\eta \cos(6w - \mathrm{v}) \\ &\quad + (\alpha_3 - 2\beta_3)\eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1) - 2\beta_5\eta' \cos(6w - \mathrm{v}_1) \\ &\quad + 3\beta_1\eta \cos(3w + \mathrm{v}). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

[1] Es ist $\frac{dT}{dv} = \gamma +$ periodische Glieder. Bildet man T aus $\frac{dT}{dv}$ durch Integration, so erhält man in T erstens den secularen Theil γv, und zweitens aus den exargumentalen Gliedern den secularen Theil $\gamma_0 v$, also im ganzen $T = \bar{\gamma} v +$ periodische Glieder, wo $\bar{\gamma} v = (\gamma + \gamma_0) v$. Bildet man demnach aus T, das den secularen Theil γ enthält, durch Differentiation $\frac{dT}{dv}$, so erhält man in $\frac{dT}{dv}$ erstens den constanten Theil $\bar{\gamma}$ und zweitens aus den exargumentalen Gliedern den constanten Theil $-\gamma_0$, als im ganzen $\bar{\gamma} - \gamma_0 = \gamma$ cf. des Näheren, Abtheilung II, A, Nr. 4 dieses Capitels.

Nach dem früheren ist aber:

$$\frac{dT}{dv} = \bar{\gamma} + \frac{dT_l}{dv} + \frac{dK}{dv}, \text{ wo } \bar{\gamma} = \gamma + \gamma_0$$

$$K = \gamma_1 \sin 3w + \gamma_4 \eta \sin(6w - \mathrm{v}) + \gamma_6 \eta \sin(3w + \mathrm{v}) + \gamma_5 \eta' \sin(6w - \mathrm{v}_1)$$

$$\frac{dT_l}{dv} = -\gamma_0 + \gamma_2 \eta \cos(3w - \mathrm{v}) + \gamma_3 \eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1),$$

also durch Differentiation:

$$\frac{dT}{dv} = \bar{\gamma} - \gamma_0 + (1+\delta_1)\gamma_1 \cos 3w + \gamma_2 \eta \cos(3w - \mathrm{v}) + (1+2\delta_1)\gamma_4 \eta \cos(6w - \mathrm{v}) + \gamma_3 \eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1) + (1+2\delta_1)\gamma_5 \eta' \cos(6w - \mathrm{v}) + (2+\delta_1)\gamma_6 \eta \cos(3w + \mathrm{v}),$$

mithin:

$$\gamma_1 = -\frac{2\beta_1}{1+\delta_1}; \qquad \gamma_2 = \alpha_2 - 2\beta_2 + 3\beta_1; \qquad \gamma_3 = \alpha_3 - 2\beta_3;$$

$$\gamma_4 = -\frac{2\beta_4}{1+2\delta_1}; \qquad \gamma_5 = -\frac{2\beta_5}{1+2\delta_1}; \qquad \gamma_6 = \frac{3\beta_1}{2+\delta_1},$$

oder, da δ_1 sehr klein gegen 1:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_1 = -2\beta_1; \qquad \gamma_2 = 3\beta_1 - \frac{3}{2}\beta_2; \qquad \gamma_3 = -\frac{3}{2}\beta_3 \\ &\gamma_4 = -2\beta_4; \qquad \gamma_5 = -2\beta_5; \qquad \gamma_6 = \frac{3}{2}\beta_1. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Nimmt man in der rechten Seite der Differentialgleichung (9) noch das Glied 2. Ordnung $+3R^2$ mit, so enthält R^2 nach (9) offenbar nur zwei Glieder der Form C, nämlich:

$$3R = 3\beta_1\beta_4\eta \cos(3w - \mathrm{v}) + 3\beta_1\beta_5\eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1)$$

mit Rücksicht auf welche genauer:

$$\gamma_2 = 3\beta_1 - \frac{3}{2}\beta_2 + 3\beta_1\beta_4; \qquad \gamma_3 = -\frac{3}{2}\beta_3 + 3\beta_1\beta_5 \tag{12}$$

ist.

Der Wert von Q war nun für den Hildatypus bis inclusive Glieder 1. Grades:

$$\left.\begin{aligned} Q = {} & q_1 \sin 3w + q_2\eta \sin \mathrm{v} + q_4\eta \sin(3w - \mathrm{v}) + q_6\eta \sin(6w - \mathrm{v}) \\ & + q_3\eta' \sin \mathrm{v}_1 + q_5\eta' \sin(3w - \mathrm{v}_1) + q_7\eta' \sin(6w - \mathrm{v}). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Ersetzt man in den q-Coefficienten die γ durch die β nach den Relationen (11) und ordnet successive nach den β, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= q_1^{(0)} + q_1^{(1)}\beta_1 + q_1^{(11)}\beta_1^2 \\ q_2 &= q_2^{(0)} + q_2^{(1)}\beta_1 + q_2^{(2)}\beta_2 + q_2^{(4)}\beta_4 \\ q_3 &= q_3^{(0)} + q_3^{(1)}\beta_1 + q_3^{(3)}\beta_3 + q_3^{(5)}\beta_5 \\ q_4 &= q_4^{(0)} + q_4^{(1)}\beta_1 + q_4^{(4)}\beta_4 \\ q_5 &= q_5^{(0)} + q_5^{(1)}\beta_1 + q_5^{(5)}\beta_5 \\ q_6 &= q_6^{(0)} + q_6^{(1)}\beta_1 + q_6^{(2)}\beta_2 \\ q_7 &= q_7^{(0)} + q_7^{(1)}\beta_1 + q_7^{(3)}\beta_3. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Dabei bedeutet:

$$\left.\begin{aligned}
&q_1^{(0)} = A_{3.0.0}; \qquad q_1^{(1)} = \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0} - 6\mu A_{6.0.0};\\
&q_1^{(2)} = \frac{1}{2} A^{2.0}_{3.0.0} - \frac{1}{4} A^{2.0}_{3.0.0} + \frac{1}{4} A^{2.0}_{9.0.0} + \frac{3}{2}\mu A^{1.0}_{3.0.0} - \frac{9}{2}\mu A^{1.0}_{9.0.0} - 9\mu^2 A_{3.0.0};\\
&\qquad - \frac{9}{2}\mu^2 A_{3.0.0} + \frac{81}{2}\mu^2 A_{9.0.0}.\\
&\rule{3em}{0.4pt}\\
&q_2^{(0)} = 0; \qquad q_2^{(1)} = \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{3.1.0} - \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.1.0} - \frac{9}{4}\mu A_{3.0.0} - 3\mu A^{(+1)}_{3.1.0} + 3\mu A^{(-1)}_{3.1.0};\\
&q_2^{(2)} = \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}; \qquad q_2^{(4)} = \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0} - 6\mu A_{6.0.0}.\\
&\rule{3em}{0.4pt}\\
&q_3^{(0)} = A^{(+1)}_{0.0.1}; \qquad q_3^{(1)} = \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{3.0.1} - \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.0.1} - 3\mu A^{(+1)}_{3.0.1} + 3\mu A^{(-1)}_{3.0.1};\\
&q_3^{(3)} = \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}; \qquad q_3^{(5)} = \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0} - 6\mu A_{6.0.0}.\\
&\rule{3em}{0.4pt}\\
&q_1^{(0)} = A^{(-1)}_{3.1.0}; \qquad q_4^{(1)} = \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.1.0} - 6\mu A^{(-1)}_{6.1.0} + \frac{9}{2}\mu A_{6.0.0};\\
&q_1^{(4)} = -\frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0} + 3\mu A_{3.0.0}.\\
&\rule{3em}{0.4pt}\\
&q_5^{(0)} = A^{(-1)}_{3.0.1}; \qquad q_5^{(1)} = -\frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{0.0.1} + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.0.1} - 6\mu A^{(-1)}_{6.0.1};\\
&q_5^{(5)} = -\frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0} + 3\mu A_{3.0.0}.\\
&\rule{3em}{0.4pt}\\
&q_6^{(0)} = A^{(-1)}_{6.1.0}; \qquad q_6^{(1)} = \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{9.1.0} + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.1.0} - 9\mu A^{(-1)}_{9.1.0} + 3\mu A^{(-1)}_{3.1.0}; \qquad q_6^{(2)} = \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}.\\
&\rule{3em}{0.4pt}\\
&q_7^{(0)} = A^{(-1)}_{6.0.1}; \qquad q_7^{(1)} = \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{9.0.1} + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.0.1} - 9\mu A^{(-1)}_{9.0.1} + 3\mu A^{(-1)}_{3.0.1}; \qquad q_7^{(3)} = \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0}\\
&\rule{3em}{0.4pt}
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Aus diesen Relationen ersieht man, dass für den Typus $\frac{2}{3}$ zwischen den q die folgenden, für das Spätere wichtigen Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned}
&q_1^{(1)} = q_2^{(4)} = q_3^{(5)};\\
&q_2^{(2)} = q_3^{(3)} = q_6^{(2)} = q_7^{(3)};\\
&q_1^{(4)} = q_5^{(5)}; \qquad q_2^{(0)} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

die außerdem die numerische Rechnung vereinfachen.

In analoger Weise findet man für die p-Coefficienten in P:

$$\left.\begin{aligned} P = p_0+p_1 \cos 3w+p_2\eta \cos \nu+p_4\eta \cos (3w-\nu)+p_6\eta \cos (6w-\nu) \\ +p_3\eta' \cos \nu_1+p_5\eta' \cos (3w-\nu_1)+p_7\eta' \cos (6w-\nu_1). \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Die Werte:

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= p_0^{(0)}+p_0^{(1)}\beta_1+p_0^{[1]}\beta_1^2 \\ p_1 &= p_1^{(0)}+p_1^{(1)}\beta_1+p_1^{[1]}\beta_1^2 \\ p_2 &= p_2^{(0)}+p_2^{(1)}\beta_1+p_2^{(2)}\beta_2+p_2^{(4)}\beta_4 \\ p_3 &= p_3^{(0)}+p_3^{(1)}\beta_1+p_3^{(3)}\beta_3+p_3^{(5)}\beta_5 \\ p_4 &= p_4^{(0)}+p_4^{(1)}\beta_1+p_4^{(2)}\beta_2+p_4^{(4)}\beta_4 \\ p_5 &= p_5^{(0)}+p_5^{(1)}\beta_1+p_5^{(3)}\beta_3+p_5^{(5)}\beta_5 \\ p_6 &= p_6^{(0)}+p_6^{(1)}\beta_1+p_6^{(2)}\beta_2+p_6^{(4)}\beta_4 \\ p_7 &= p_7^{(0)}+p_7^{(1)}\beta_1+p_7^{(3)}\beta_3+p_7^{(5)}\beta_5. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Dabei sind die $p_\nu^{(\nu)}$ wieder sämmtlich Functionen der bekannten Entwickelungscoefficienten B der Derivierten P, und zwar:

$$p_0^{(0)} = B_{0.0.0}\,; \qquad p_0^{(1)} = \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}-3\mu B_{3.0.0}\,; \qquad p_0^{[1]} = \frac{1}{2} B^{2.0}_{0.0.0}.$$

$$p_1^{(0)} = B_{3.0.0}\,; \qquad p_1^{(1)} = B^{1.0}_{0.0.0}+\frac{1}{2} B^{1.0}_{6.0.0}-6\mu B_{6.0.0}\,;$$

$$p_1^{[1]} = \frac{1}{2} B^{2.0}_{3.0.0}+\frac{1}{4} B^{2.0}_{3.0.0}+\frac{1}{4} B^{2.0}_{9.0.0}-\frac{3}{2}\mu B^{1.0}_{3.0.0}-\frac{9}{2}\mu B^{1.0}_{9.0.0}$$

$$-9\mu^2 B_{3.0.0}+\frac{9}{2}\mu^2 B_{3.0.0}+\frac{81}{2}\mu^2 B_{9.0.0}$$

$$p_2^{(0)} = B^{(+1)}_{0.1.0}\,; \qquad p_2^{(1)} = \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{3.1.0}+\frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{3.1.0}+\frac{9}{4}\mu B_{3.0.0}-3\mu B^{(+1)}_{3.1.0}-3\mu B^{(-1)}_{3.1.0}\,;$$

$$p_2^{(2)} = \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}\,; \qquad p_2^{(4)} = \frac{1}{2} B^{1.0}_{6.0.0}-6\mu B_{6.0.0}.$$

$$p_3^{(0)} = B^{(+1)}_{0.0.1}\,; \qquad p_3^{(1)} = \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{3.0.1}+\frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{3.0.1}-3\mu B^{(+1)}_{3.0.1}-3\mu B^{(-1)}_{3.0.1}\,;$$

$$p_3^{(3)} = \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}\,; \qquad p_3^{(5)} = \frac{1}{2} B^{1.0}_{6.0.0}-6\mu B_{6.0.0}.$$

$$p_4^{(0)} = B^{(-1)}_{3.1.0}\,; \qquad p_4^{(1)} = \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{0.1.0}+\frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{6.1.0}+\frac{9}{2}\mu B_{6.0.0}-6\mu B^{(-1)}_{6.1.0}\,;$$

$$p_1^{(2)} = B^{1.0}_{0.0.0}\,; \qquad p_4^{(4)} = \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}-3\mu B_{3.0.0}. \qquad (19)$$

$$p_5^{(0)} = B^{(-1)}_{3.0.1}; \qquad p_5^{(1)} = \frac{1}{2} B^{+1.1.0}_{0.0.1} + \frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{6.0.1} - 6\mu B^{(-1)}_{6.0.1}; \tag{19}$$

$$p_5^{(3)} = B^{1.0}_{0.0.0}; \qquad p_5^{(5)} = \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0} - 3\mu B_{3.0.0}.$$

$$p_6^{(0)} = B^{(-1)}_{6.1.0}; \qquad p_6^{(1)} = \frac{1}{2} B_{9.1.0}^{\ 1.1.0} + \frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{3.1.0} - 9\mu B^{(-1)}_{9.1.0} + 3\mu B^{(-1)}_{3.1.0};$$

$$p_6^{(2)} = \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}; \qquad p_6^{(4)} = B^{1.0}_{0.0.0}.$$

$$p_7^{(0)} = B^{(-1)}_{6.0.1}; \qquad p_7^{(1)} = \frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{9.0.1} + \frac{1}{2} B^{-1.1.0}_{3.0.1} - 9\mu B^{(-1)}_{9.0.1} + 3\mu B^{(-1)}_{3.0.1};$$

$$p_7^{(3)} = \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}; \qquad q_7^{(5)} = B^{1.0}_{0.0.0}.$$

Und man erkennt, dass:

$$\left.\begin{aligned} p_2^{(2)} &= p_3^{(3)} = p_6^{(2)} = p_7^{(3)}; \\ p_4^{(2)} &= p_5^{(3)} = p_6^{(4)} = p_7^{(5)}; \\ p_1^{(4)} &= p_5^{(5)};\ p_2^{(4)} = p_3^{(5)}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Schließlich findet man für den gewöhnlichen Theil von Q, der in die Differentialgleichung für die Zeitreduction große Glieder liefert:

$$\left.\begin{aligned} Q_g = g_1 \sin 6w + g_2\eta \sin(3w+\mathrm{v}) + g_4\eta \sin(9w-\mathrm{v}) \\ + g_3\eta' \sin(3w+\mathrm{v}_1) + g_5\eta' \sin(9w-\mathrm{v}_1), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= g_1^{(0)} + g_1^{(1)}\beta_1 \\ g_2 &= g_2^{(0)} + g_2^{(1)}\beta_1 + g_2^{(2)}\beta_2 + g_2^{(4)}\beta_4 \\ g_3 &= g_3^{(0)} + g_3^{(1)}\beta_1 + g_3^{(3)}\beta_3 + g_3^{(5)}\beta_5 \\ g_4 &= g_4^{(0)} + g_4^{(1)}\beta_1 + g_4^{(2)}\beta_2 + g_1^{(4)}\beta_4 \\ g_5 &= g_5^{(0)} + g_5^{(1)}\beta_1 + g_5^{(3)}\beta_3 + g_5^{(5)}\beta_5 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

und:

$$g_1^{(0)} = A_{6.0.0}; \qquad g_1^{(1)} = \frac{1}{2} A^{1.0}_{3.0.0} + \frac{1}{2} A^{1.0}_{9.0.0} + 3\mu A_{3.0.0} - 9\mu A_{9.0.0}.$$

$$g_2^{(0)} = A^{(+1)}_{3.1.0}; \qquad g_2^{(1)} = \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{6.1.0} - 6\mu A^{(+1)}_{6.1.0}; \qquad g_2^{(2)} = \frac{1}{2} A^{1.0}_{6.0.0};$$

$$g_2^{(4)} = \frac{1}{2} A^{1.0}_{9.0.0} - 9\mu A_{9.0.0}.$$

---

(23)

$$\left.\begin{aligned}
&g_3^{(0)} = A_{3.0.1}^{(+1)}; \qquad g_3^{(1)} = \frac{1}{2} A_{0.0.1}^{+1.1.0} + \frac{1}{2} A_{6.0.1}^{+1.1.0} - 6\mu A_{6.0.1}^{(+1)};\\
&g_3^{(3)} = \frac{1}{2} A_{6.0.0}^{1.0}; \qquad g_3^{(5)} = \frac{1}{2} A_{9.0.0}^{1.0} - 9\mu A_{9.0.0}.\\
&g_1^{(0)} = A_{9.1.0}^{(-1)}; \qquad g_4^{(1)} = \frac{1}{2} A_{6.1.0}^{-1.1.0} + 6\mu A_{6.1.0}^{(-1)} + 9\mu A_{12.0.0} - 12\mu A_{12.1.0}^{(-1)} + \frac{1}{2} A_{12.1.0}^{-1.1.0};\\
&g_4^{(2)} = \frac{1}{2} A_{6.0.0}^{1.0}; \qquad g_1^{(4)} = \frac{1}{2} A_{3.0.0}^{1.0} + 3\mu A_{3.0.0}.\\
&g_5^{(0)} = A_{9.0.1}^{(-1)}; \qquad g_5^{(1)} = \frac{1}{2} A_{6.0.1}^{-1.1.0} + 6\mu A_{6.0.1}^{(-1)} - 12\mu A_{12.0.1}^{(-1)} + \frac{1}{2} A_{12.0.1}^{-1.1.0};\\
&g_5^{(3)} = \frac{1}{2} A_{6.0.0}^{1.0}; \qquad g_5^{(5)} = \frac{1}{2} A_{3.0.0}^{1.0} + 3\mu A_{3.0.0}.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Schließlich:

$$\left.\begin{aligned}
&g_2^{(2)} = g_3^{(3)} = g_4^{(2)} = g_5^{(3)};\\
&g_2^{(4)} = g_3^{(5)}; \qquad g_4^{(4)} = g_5^{(5)}.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

II. Ausführung der Integration.

Bei der nun folgenden Integration der Gleichungen für S, ρ, T wenden wir das Gyldén'sche Verfahren der partiellen Integration an, und zwar in der Modification, welche Herr Brendel demselben gegeben hat, also dessen in seiner Theorie der kleinen Planeten dargelegte Methode, welche auch die Behandlung strenger Commensurabilitätstypen ermöglicht. Von besonderem Vortheil erweist sich dabei die Brendel'sche Berechnungsweise der charakteristischen Störungen, welche in der »Theorie der kleinen Planeten« beim Typus $\frac{1}{2}$ angewendet, sich auch beim Typus $\frac{2}{3}$ benutzen lässt.

A. Die Integration für den o. Grad bis inclusive Glieder III. Ordnung.

1. Integration der Differentialgleichung für S.

Für den 0. Grad gestaltet sich die Integration noch äußerst einfach. Um in der Bezeichnung mit dem folgenden in Symmetrie zu bleiben, schreiben wir die Differentialgleichung in S für den 0. Grad:

$$\frac{dS}{dv} = -Q_0^{(1)} \sin 3w, \tag{25}$$

wo $Q_0^{(1)} = q_1$ direct durch die Formeln (14) und (15) gegeben ist; während für die folgenden Grade die Coefficienten der rechten Seite der Differentialgleichungen in S und ρ nicht mehr direct durch die q bezüglich p gegeben sind, was uns zu dieser neuen Bezeichnungsweise veranlasst.

Da die Variabilität von T_l im Winkelargument:

$$w = (1-\mu_2)v - B - \mu T_l$$

keine Glieder 0. Grades, sondern, wie wir sehen werden, stets Glieder eines höheren, als des bezüglich zu integrierenden Grades erzeugt, so findet man beim 0. Grad ganz einfach incl. bis zur 3. Ordnung:

$$S_0 = a_0 + a_1 \cos 3w,$$

wobei:

$$a_1 = \frac{A_{3.0.0}}{3(1-\mu_1)} + \frac{A^{1.0}_{6.0.0}}{6(1-\mu_1)}\beta_1 + \frac{\mu A_{6.0.0}}{(1-\mu_1)}\gamma_1 + \left\{\frac{A^{2.0}_{3.0.0}}{6(1-\mu_1)} - \frac{A^{2.0}_{3.0.0}}{12(1-\mu_1)} + \frac{A^{2.0}_{9.0.0}}{12(1-\mu_1)}\right\}\beta_1^2$$
$$-\mu\left\{\frac{A^{1.0}_{3.0.0}}{4(1-\mu_1)} - \frac{3A^{1.0}_{9.0.0}}{4(1-\mu_1)}\right\}\beta_1\gamma_1$$
$$+\mu^2\left\{-\frac{3A_{3.0.0}}{4(1-\mu_1)} - \frac{3A_{3.0.0}}{8(1-\mu_1)} + \frac{27A_{9.0.0}}{8(1-\mu_1)}\right\}\gamma_1^2.$$

Führt man den Integrationsdivisor δ_1 ein mit Hinblick darauf, dass beim Typus $\left(\frac{2}{3}\right)$ ja $\mu_1 = \frac{2-\delta_1}{3}$ ist und ersetzt γ_1 durch β_1 mittelst $\gamma_1 = -\frac{2}{1+\delta_1}\beta_1$, so erhält man [1]:

$$S_0 = a_0 + (q' + q''\beta_1 + q'''\beta_1^2)\cos 3w, \tag{26}$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned}
q' &= \frac{A_{3.0.0}}{1+\delta_1}\\
q'' &= \frac{A^{1.0}_{6.0.0}}{2(1+\delta_1)} - \frac{6\mu A_{6.0.0}}{(1+\delta_1)^2}\\
q''' &= \frac{A^{2.0}_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)} - \frac{A^{2.0}_{3.0.0}}{4(1+\delta_1)} + \frac{A^{2.0}_{9.0.0}}{4(1+\delta_1)}\\
&\quad + \frac{3\mu A^{1.0}_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)^2} - \frac{9\mu A^{1.0}_{9.0.0}}{2(1+\delta_1)^2}\\
&\quad - \frac{9\mu^2 A_{3.0.0}}{(1+\delta_1)^3} - \frac{9\mu^2 A_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)^3} + \frac{81\mu^2 A_{9.0.0}}{2(1+\delta_1)^3}
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Dabei ist a_0 Integrationsconstante, über die später verfügt werden wird (cf. Abtheilung C, die Integrationsconstanten); die A sind berechenbar, δ_1 ist aus den Beobachtungen zu bestimmen und es repräsentiert q' die Glieder der 1., $q''\beta_1$ diejenigen der 2., $q'''\beta_1^2$ die Glieder der 3. Ordnung. Die einzige noch unbekannte Größe im Integral (26), β_1, ergibt sich durch Lösung einer cubischen Gleichung, deren Discussion den Inhalt des nächsten Capitels bildet. Das Integral S_0 ist mithin nach Bestimmung von β_1 vollständig bekannt.

Die gewöhnlichen Glieder in S_0 folgen aus:

$$\frac{dS}{dv} = -\Sigma A_{n.0.0} \sin n w$$

für alle Werte von n, mit Ausnahme von $n = 3$, also aus:

$$S_{n.0.0} = \frac{A_{n.0.0}}{\frac{n}{3}(1+\delta_1)} \cos n w, \tag{28}$$

wobei die wenigen, überhaupt in Betracht kommenden Werte von n sich bei der numerischen Rechnung ergeben.

---

[1] Dass μ_1 also δ_1 und nicht δ_2 Integrationsdivisor wird, ist in Nr. 4 dieser Abtheilung gezeigt.

2. Die Integration der Differentialgleichung für ρ.

Die Differentialgleichung für ρ wird, da nach den Entwickelungen vom Capitel III elementäre Glieder der Form B für den 0. Grad überhaupt nicht auftraten, also $(\rho) = 0$ ist, einfach:

$$\frac{d^2R}{dv^2} + R = 2S_0 - P_0 - Q_0 \frac{dR_0}{dv}. \tag{29}$$

Auf der rechten Seite ist $P_0 = p_0 + p_1 \cos 3w$ durch die Formeln (18) und (19) bekannt; S_0 haben wir eben gefunden. Um $Q_0 \frac{dR_0}{dv}$ zu finden, bedenken wir, dass:

$$Q_0 = \Sigma A_{n.0.0} \sin nw + \Sigma A^{1.0}_{n.0.0} R_0 \sin nw - \Sigma n\mu A_{n.0.0} K_0 \cos nw$$

$$\frac{dR_0}{dv} = -(1+\delta_1)\beta_1 \sin 3w$$

ist. Also wird man aus:

$$Q_0 \frac{dR_0}{dv} = \Sigma A_{n.0.0} \frac{dR_0}{dv} \sin nw + \Sigma A^{1.0}_{n.0.0} R_0 \frac{dR_0}{dv} \sin nw$$
$$- \Sigma n\mu A_{n.0.0} K_0 \frac{dR_0}{dv} \cos nw,$$

da offenbar:

$$R_0 \frac{dR_0}{dv} = -\frac{1}{2}(1+\delta_1)\beta_1^2 \sin 6w$$

$$K_0 \frac{dR_0}{dv} = -\frac{1}{2}(1+\delta_1)\beta_1\gamma_1 + \frac{1}{2}(1+\delta_1)\beta_1\gamma_1 \cos 6w$$

ist und das 1. Glied für $n = 3$ und $n = 6$, das 2. und 3. je für $n = 3$ und $n = 9$ kurzperiodische Glieder ergeben, das folgende Resultat erhalten:

$$\left.\begin{aligned} Q_0 \frac{dR_0}{dv} = &-\frac{1+\delta_1}{2} A_{3.0.0}\beta_1 - \frac{1+\delta_1}{2} A_{6.0.0}\beta_1 \cos 3w \\ &- \left\{\frac{1+\delta_1}{4} A^{1.0}_{3.0.0} + \frac{1+\delta_1}{4} A^{1.0}_{9.0.0}\right\} \beta_1^2 \cos 3w \\ &+ \left\{\frac{3}{4}\mu(1+\delta_1)A_{3.0.0} - \frac{9}{4}\mu(1+\delta_1)A_{9.0.0}\right\} \beta_1\gamma_1 \cos 3w. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Zunächst wird daher die Differentialgleichung in R:

$$\frac{d^2R}{dv^2} + R = 2S_0 + p_0 + \{(p)_1 + (p)_2\beta_1 + (p_3)\gamma_1 + (p)_4\beta_1^2 + (p)_5\beta_1\gamma_1 + (p)_6\gamma_1^2\} \cos 3w,$$

wobei:

$$p_0 = -B_{0.0.0} - \frac{1}{2} B^{1.0}_{3.0.0}\beta_1 + \frac{1+\delta_1}{2} A_{3.0.0}\beta_1 - \frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_1 - \frac{1}{2} B^{2.0}_{0.0.0}\beta_1^2$$

$$(p)_1 = -B_{3.0.0} + \frac{2A_{3.0.0}}{1+\delta_1}$$

$$(p)_2 = -B^{1.0}_{0.0.0} - \frac{1}{2} B^{1.0}_{6.0.0} + \frac{A^{1.0}_{6.0.0}}{1+\delta_1} + \frac{1+\delta_1}{2} A_{6.0.0}$$

$$(p)_3 = -3\mu B_{6.0.0} + \frac{6\mu A_{6.0.0}}{1+\delta_1}$$

$$(p)_4 = -\frac{1}{2}B^{2.0}_{3.0.0}-\frac{1}{4}B^{2.0}_{3.0.0}-\frac{1}{4}B^{2.0}_{9.0.0}+\frac{A^{2.0}_{3.0.0}}{1+\delta_1}-\frac{A^{2.0}_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)}$$
$$+\frac{A^{2.0}_{9.0.0}}{2(1+\delta_1)}+\frac{1+\delta_1}{4}A^{1.0}_{3.0.0}+\frac{1+\delta_1}{4}A^{1.0}_{9.0.0}$$

$$(p)_5 = -\frac{3}{4}\mu B^{1.0}_{3.0.0}-\frac{9}{4}\mu B^{1.0}_{9.0.0}-\frac{3\mu A^{1.0}_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)}+\frac{9\mu A^{1.0}_{9.0.0}}{2(1+\delta_1)}$$
$$-\frac{3}{4}\mu(1+\delta_1)A_{3.0.0}+\frac{9}{4}\mu(1+\delta_1)A_{9.0.0}$$

$$(p)_6 = \frac{9}{4}\mu^2 B_{3.0.0}-\frac{9}{8}\mu^2 B_{3.0.0}-\frac{81}{8}\mu^2 B_{9.0.0}-\frac{9\mu^2 A_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)}$$
$$-\frac{9\mu^2 A_{3.0.0}}{4(1+\delta_1)}+\frac{81\mu^2 A_{9.0.0}}{4(1+\delta_1)}$$

ist.

Aus dem formell bekannten Integralansatz aber erhält man:

$$\frac{d^2R_0}{dv^2}+R_0 = b_0-(2\delta_1+\delta_1^2)\beta_1\cos 3w,$$

mithin:

$$b_0 = 2a_0+p_0$$
$$(2\delta_1+\delta_1^2)\beta_1 = -(p)_1-(p)_2\beta_1-(p)_3\gamma_1-(p)_4\beta_1^2-(p)_5\beta_1\gamma_1-(p)_6\gamma_1^2.$$

Ersetzt man jetzt γ_1 durch β_1, so ergibt sich als Bestimmungsgleichung der Unbekannten β_1:

$$(2\delta_1+\delta_1^2)\beta_1 = p'+p''\beta_1+p'''\beta_1^2, \tag{31}$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned}
p' &= B_{3.0.0}-\frac{2A_{3.0.0}}{1+\delta_1}\\
p'' &= B^{1.0}_{0.0.0}+\frac{1}{2}B^{1.0}_{6.0.0}-\frac{A^{1.0}_{6.0.0}}{1+\delta_1}-\frac{1+\delta_1}{2}A_{6.0.0}-\frac{6\mu B_{6.0.0}}{1+\delta_1}+\frac{12\mu A_{6.0.0}}{(1+\delta_1)^2}\\
p''' &= \frac{1}{2}B^{2.0}_{3.0.0}+\frac{1}{4}B^{2.0}_{3.0.0}+\frac{1}{4}B^{2.0}_{9.0.0}-\frac{A^{2.0}_{3.0.0}}{1+\delta_1}+\frac{A^{2.0}_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)}-\frac{A^{2.0}_{9.0.0}}{2(1+\delta_1)}\\
&-\frac{1+\delta_1}{4}A^{1.0}_{3.0.0}-\frac{1+\delta_1}{4}A^{1.0}_{9.0.0}+\frac{3\mu B^{1.0}_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)}-\frac{9\mu B^{1.0}_{9.0.0}}{2(1+\delta_1)}-\frac{3\mu A^{1.0}_{3.0.0}}{(1+\delta_1)^2}\\
&+\frac{9\mu A^{1.0}_{9.0.0}}{(1+\delta_1)^2}-\frac{3}{2}\mu A_{3.0.0}+\frac{9}{2}\mu A_{9.0.0}-\frac{9\mu^2 B_{3.0.0}}{(1+\delta_1)^2}+\frac{9\mu^2 B_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)^2}\\
&+\frac{81\mu^2 B_{9.0.0}}{2(1+\delta_1)^2}+\frac{18\mu^2 A_{3.0.0}}{(1+\delta_1)^3}+\frac{9\mu^2 A_{3.0.0}}{(1+\delta_1)^3}-\frac{81\mu^2 A_{9.0.0}}{(1+\delta_1)^3}
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

ist. Diese Relationen, in denen wir der Übersicht halber gleiche Glieder absichtlich nicht zusammengezogen haben, sind nun für Hilda wirklich numerisch zu berechnen, was im V. Capitel geschehen wird. Ist somit β_1 ermittelt, so ist auch das Integral:

$$R_0 = 2a_0+p_0-\frac{p'+p''\beta_1+p'''\beta_1^2}{2\delta_1+\delta_1^2}\cos 3w \tag{33}$$

bekannt, da p_0 gegeben ist durch:

$$p_0 = -B_{0.0.0}-\frac{1}{2}B^{1.0}_{3.0.0}\beta_1+\frac{1+\delta_1}{2}A_{3.0.0}\beta_1-\frac{3}{2}\mu B_{3.0.0}\gamma_1-\frac{1}{2}B^{2.0}_{0.0.0}\beta_1^2.$$

Die gewöhnlichen Glieder in R_0 bestimmt man aus:

$$\frac{d^2R}{dv^2}+R = 2S_0-P_0 = \Sigma(2S_{n.0.0}-B_{n.0.0})\cos nw,$$

also, indem man nach der Variation der Constanten integriert, was in der Abtheilung *B*, *b*, 2, bei der Integration der allgemeinen Gleichung für ρ durchgeführt ist, gemäß dem dort gegebenen Verfahren aus:

$$R_{n.0.0} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(1-\mu_1)+1}-\frac{1}{n(1-\mu_1)-1}\right\}(2S_{n.0.0}-B_{n.0.0}),$$

also aus:

$$R_{n.0.0} = \frac{2S_{n.0.0}-B_{n.0.0}}{1-\frac{n^2}{9}(1+\delta_1)^2} \tag{34}$$

wo $n \lesseqgtr 3$, $S_{n.0.0}$ durch Gleichung (28) gegeben und:

$$R_{0.0.0} = 2S_{0.0.0}-B_{0.0.0}$$

ist.

3. Integration der Differentialgleichung für *T*.

Im 1. Capitel haben wir gesehen, dass die Zeitreduction definiert war als Differenz der wahren und der reducierten Zeit:

$$T' = t-\zeta$$

und dass die Differentialgleichung zur Bestimmung der Zeitreduction, wenn wir jetzt die Glieder 0. Grades bis zur III. Ordnung incl. mitnehmen, ist:

$$\frac{dT}{dv} = S-2R-2RS+3R^2+3SR^2-4R^3, \tag{35}$$

so dass also die Zeitreduction durch diese Differentialgleichung nicht direct gegeben, sondern gleich:

$$\frac{1}{n}T = T' = t-\zeta$$

ist, wenn *T* aus obiger Differentialgleichung bestimmt wird.

Um nun die Differentialgleichung (35) für den Hildatypus für den 0. Grad wirklich aufzustellen, ist:

$$S_0 = a_0+a_1\cos 3w; \qquad R_0 = b_0+\beta_1\cos 3w.$$

Da infolge der Bestimmung der Integrationsconstanten (cf. Capitel IV, Abtheilung *C* und Capitel V) a_0 und b_0 rein 1. Ordnung werden, so wird:

$$a_0b_0 \asymp m'^2; \qquad a_1b_0 \asymp m'^2; \qquad b_0^2 \asymp m'^2,$$

also offenbar:

$$SR = a_0\beta_1\cos 3w+\frac{1}{2}a_1\beta_1+\frac{1}{2}a_1\beta_1\cos 6w$$

$$R^2 = 2b_0\beta_1\cos 3w+\frac{1}{2}\beta_1^2+\frac{1}{2}\beta_1^2\cos 6w,$$

wo das letzte Glied in R^2 zwar ein gewöhnliches ist, jedoch bei Hilda groß werden kann und darum in T gleich mitzunehmen ist. Während wir das Glied dieses Argumentes im Product SR, wo es mit dem kleinen Factor a_1 multipliciert auftrat, vernachlässigt haben. Ferner wird:

$$R^3 = \frac{3}{2}\, b_0\beta_1^2 \cos 6w + \frac{3}{2}\, b_0\beta_1^2 + \frac{1}{4}\, \beta_1^3 \cos 9w + \frac{3}{4}\, \beta_1^3 \cos 3w.$$

Schließlich gibt:

$$3SR^2 = \frac{3}{2}\, a_0\beta_1^2 + \frac{3}{2}\, a_0\beta_1^2 \cos 6w + \frac{3}{2}\, a_1\beta_1^2 \cos 3w + \frac{3}{4}\, a_1\beta_1^2 \cos 9w$$

wo zwar das Glied vom Argument $9w$ wieder ein gewöhnliches ist, jedoch groß werden kann beim Typus $\frac{2}{3}$ und deshalb gleich mitgenommen wurde.

Die Differentialgleichung für T wird daher für den 0. Grad bis inclusive zur 3. Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT}{dv} &= c_0+\gamma+\left(a_1-2\beta_1-2a_0\beta_1+6b_0\beta_1+\frac{3}{2}\, a_1\beta_1^2-3\beta_1^3\right)\cos 3w \\ &+\left(\frac{3}{2}\,\beta_1^2-a_1\beta_1-6b_0\beta_1^2+\frac{3}{2}\, a_0\beta_1^2\right)\cos 6w+\left(\beta_1^3+\frac{3}{4}\, a_1\beta_1^2\right)\cos 9w, \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

wo gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= a_0-2b_0-a_1\beta_1-6b_0\beta_1^2+\frac{3}{2}\, a_0\beta_1^2 \\ \gamma &= \frac{3}{2}\,\beta_1^2. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Es enthält somit c_0 alle die Glieder, welche einmal mit der reinen Masse (nicht dividiert durch δ_1) multipliciert sind, denn es ist z. B.:

$$6b_0\beta_1^2 = \frac{m'^3}{\delta_1^2} = m'\,\frac{m'}{\delta_1}\,\frac{m'}{\delta_1},$$

enthält also einmal die reine Masse, da $\frac{m'}{\delta_1}$ sehr viel kleiner als 1 ist; letzteres deshalb, weil, wie in Capitel V bewiesen, δ_1 stets größer oder höchstens gleich $m'^{\frac{2}{3}}$ ist, weshalb also $\frac{m'}{\delta_1}$ stets kleiner als (oder gleich) $\sqrt[3]{m'}$ oder $m'^{\frac{1}{3}}$ ist. Mithin ist also, infolge unserer Anordnung, c_0 stets rein 1. Ordnung, in γ aber sind nur diejenigen Glieder aufgenommen, welche nicht die reine Masse enthalten, also bloß Potenzen von β_1. In diesem Sinne müsste man also auch, wenn man z. B. bis zur 5. Ordnung gienge, das Glied $\frac{15}{8}\,\beta_1^4$, welches dann auftritt (cf. Capitel V), zu γ, die übrigen Glieder rein 1. Ordnung aber zu c_0 nehmen. Indem nun infolge dieser Anordnung c_0 stets rein 1. Ordnung bleibt, kann es durch Wahl der Constanten a_0 zum Verschwinden gebracht werden, weil dann a_0 von derselben Ordnung wie c_0, d. h. von der Ordnung m' wird; denn offenbar wird a_0 von derselben Größenordnung, wie die Größe, die durch Wahl von a_0 verschwinden soll. Würde man hingegen $c_0+\gamma$ zum Verschwinden bringen durch Wahl von a_0, so würde $a_0 = c_0+\gamma$, also, wenn γ groß ist, so würde auch a_0 groß. Es darf aber (cf. Capitel V), wenn wir zu einem convergenten Resultat gelangen wollen, a_0 nicht größer als von der Größenordnung m' werden, und deshalb eben wird im folgenden a_0 so bestimmt werden, dass bloß c_0 allein verschwindet, da γ bei Hilda groß werden kann, worauf wir in Capitel V ausführlich zurückkommen werden.

Nach dieser Bemerkung, die indes bereits hier zu machen von größter Wichtigkeit ist, kehren wir zur Integration von Gleichung (36) zurück. Allgemein hatten wir gesetzt:

$$T = \bar{\gamma} v + T_l + K,$$

wo, wie sogleich nachgewiesen werden soll:

$$\bar{\gamma} = c_0 + \gamma + \gamma_0$$

ist, und die kleine Constante γ_0 aus den langperiodischen Gliedern T_l entspringt. Ist T_l, wie jetzt beim 0. Grad, gar nicht vorhanden, so hat man einfach $\bar{\gamma} = c_0 + \gamma$, also:

$$T = (c_0 + \gamma) v + K,$$

mithin:

$$\frac{dT}{dv} = c_0 + \gamma + \frac{dK}{dv}.$$

Der formell bekannte Integralansatz für K aber lautet:

$$K = \gamma_1 \sin 3w + g_2' \sin 6w + g_3' \sin 9w.$$

Die aus dem unbestimmten Integralansatz resultierende Form der Differentialgleichung ist somit:

$$\frac{dT}{dv} = c_0 + \gamma + (1+\delta_1)\gamma_1 \cos 3w + 2(1+\delta_1) g_2' \cos 6w + 3(1+\delta_1) g_3' \cos 9w. \tag{38}$$

Der Vergleich mit der ursprünglichen Form (36) der Differentialgleichung ergibt demnach:

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= 0 = a_0 - 2b_0 - a_1\beta_1 + \frac{3}{2} a_0 \beta_1^2 - 6 b_0 \beta_1^2 \\ \gamma &= \frac{3}{2} \beta_1^2 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

$$\gamma_1 = \frac{a_1 - 2\beta_1 - 2a_0\beta_1 + 6b_0\beta_1 - 3\beta_1^3 + \frac{3}{2} a_1 \beta_1^2}{1+\delta_1} \tag{40}$$

$$g_2' = \frac{3\beta_1^2 - 2a_1\beta_1 - 12 b_0 \beta_1^2 + 3 a_0 \beta_1^2}{4(1+\delta_1)} \tag{41}$$

$$g_3' = -\frac{3a_1\beta_1^2 + 4\beta_1^3}{12(1+\delta_1)}. \tag{42}$$

Hat man also über die Constante a_0 verfügt (dass man dies willkürlich thun kann, ist in Abtheilung C dieses Capitels bewiesen) und ist β_1 bestimmt, was wie gesagt, im V. Capitel geschehen wird, so ist auch b_0 bekannt. Denn es ist ja:

$$b_0 = 2a_0 + p_0,$$

oder, wenn man in dem zuvor angeführten Wert von p_0 noch γ_1 durch β_1 auf Grund der Formel $\gamma_1 = -\frac{2}{1+\delta_1}\beta_1$ ersetzt:

$$b_0 = 2a_0 + h_0 + h_1\beta_1 + h_2\beta_1^2,$$

wo:

$$h_0 = -B_{0.0.0}$$

$$h_1 = -\frac{1}{2}B^{1.0}_{3.0.0} + \frac{3\mu}{1+\delta_1}B_{3.0.0} + \frac{1+\delta_1}{2}A_{3.0.0}$$

$$h_2 = -\frac{1}{2}B^{2.0}_{0.0.0}$$

ist.

Mithin ist das Integral der Differentialgleichung (36):

$$T_0 = \gamma v + K \tag{43}$$

jetzt vollständig bestimmt, wenn man für γ und in K für γ_1, g'_1, g'_2 ihre nunmehr bekannten Werte einsetzt.

Zu bemerken ist noch, dass wir im vorhergehenden für γ_1 nicht den Wert (40), sondern nur den Wert:

$$\gamma_1 = -\frac{2}{1+\delta_1}\beta_1$$

gesetzt haben. Dieser Wert ist indes schon so genähert, dass man, nachdem a_0, b_0, β_1 bestimmt sind, die Rechnung höchstens noch einmal mit dem strengen Wert (40) zu wiederholen braucht.

Die gewöhnlichen Glieder folgen aus der Gleichung:

$$\frac{dT}{dv} = \{S_{n.0.0} - 2R_{n.0.0}\}\cos nw,$$

also aus:

$$T_{n.0.0} = \frac{S_{n.0.0} - 2R_{n.0.0}}{\frac{n}{3}(1+\delta_1)}, \tag{44}$$

wobei:

$$T_{0.0.0} = 2B_{0.0.0} - 3S_{0.0.0}$$

ist und $S_{n.0.0}$ und $R_{n.0.0}$ durch (28) und (34) gegeben sind.

4. Über die in der Zeitreduction auftretende Constante.

Wir wollen nun die in T (das also nicht direct selbst die Zeitreduction ist, indem vielmehr $t-\zeta = \frac{1}{n}T$ die Zeitreduction ist) und die in $\frac{dT}{dv}$ auftretende Constante noch etwas näher betrachten.

Bei der Entwickelung der Störungsfunction trat zunächst das Argument:

$$w_1 = (1-\mu)v - B - \mu T \tag{45}$$

auf, wobei die Zeitreduction für Jupiter und andere sehr kleine Größen bereits vernachlässigt sind.

Dabei ist also in (45) T definiert durch die Differentialgleichung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dT}{dv} &= S-2R-2RS+3R^2+3SR^2-4R^3\ldots\\ &+\{6R-2S-12R^2+6RS-\ldots\}\,\eta\cos v\\ &-3\eta^2R+\left\{\frac{3}{2}S-6R+\ldots\right\}\eta^2\cos 2v\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &-\frac{dX}{dv}.\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Nach unseren bisherigen Entwickelungen enthält nun die rechte Seite dieser Gleichung Glieder aller Formen, also langperiodische (der Form A und C), kurzperiodische (der Form B und D) und gewöhnliche Glieder, sowie Constanten. Daraus schließt man, dass auch $\frac{dT}{dv}$ Glieder aller dieser Formen enthält. Und damit muss auch T selbst Glieder aller dieser Formen enthalten, mit der Ausnahme, dass statt der constanten Glieder in $\frac{dT}{dv}$, jetzt in T seculare (von der Form constans mal v) auftreten, die $\frac{dT}{dv}$ nicht enthält. Bezeichnen wir den secularen Theil mit $\bar{\gamma}v$, und den Inbegriff aller Glieder der Form A kurz mit (A) etc., so wird also:

$$T = \bar{\gamma}v+(A)+(B)+(C)+(D)+(G), \tag{47}$$

aber:

$$\frac{dT}{dv} = c_0+\gamma+(A)+(B)+(C)+(D)+(G). \tag{48}$$

Wenn nun, und das ist das Wesentliche, unsere trigonometrischen Reihen die gewöhnlichen Reihen der alten Störungstheorie wären, so dass alle Glieder die einfache Form:

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{\text{const.}\times v+\text{const.}\right\}$$

hätten, dann wäre $c_0+\gamma = \bar{\gamma}$. Wir haben aber in der Gyldén'schen Störungstheorie T noch in den Argumenten, wodurch die »exargumentalen« Glieder entstehen, und darum ist $c_0+\gamma$ mit $\bar{\gamma}$ nicht identisch, wie sich gleich zeigen wird.

Offenbar könnte man nun auf die Idee kommen, aus w_1 das T ganz herauszubringen, indem man nach Potenzen von T entwickelte, also z. B. das Glied:

$$\begin{aligned}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{\lambda v-nB-n\mu T\right\} &= \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\lambda v-nB)\pm n\mu T\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\lambda v-nB)\\ &-\frac{n^2\mu^2T^2}{2}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\lambda v-nB)\ldots\end{aligned}$$

setzte. Dann würde man ordinäre trigonometrische Reihen erhalten, wie in der alten Störungstheorie; man darf aber eben nicht nach Potenzen von T entwickeln, da nach Gleichung (47) die Potenzen von T auch Potenzen von $\bar{\gamma}v$ enthalten würden, und weil andererseits die langperiodischen Glieder in T groß sein können.

Aus diesem Grunde theilt man eben auch bei der Entwickelung der Störungsfunction T so, dass:

$$T = \bar{\gamma} v + (A) + (C) + K \tag{49}$$

wird, wo also K sämmtliche kurzperiodischen und gewöhnlichen Glieder enthält; so folgt:

$$w = (1-\mu)v - B - \mu(T-K) = (1-\mu)v - B - \mu\{\bar{\gamma} v + (A) + (C)\},$$

also:

$$w_1 = w - \mu K.$$

Wenn man nun nach Potenzen von μK entwickelt, so tritt in der Entwickelung der Störungsfunction nicht mehr das Argument w_1, sondern vielmehr das Argument w auf:

$$w = (1-\mu)v - \mu \bar{\gamma} v + \text{periodische Glieder},$$

oder, wenn:

$$\mu(1+\bar{\gamma}) = \mu_2$$

gesetzt wird, auch:

$$w = (1-\mu_2)v + \text{periodische Glieder}.$$

Trotzdem aber tritt als Integrationsdivisor nicht δ_2, sondern vielmehr δ_1 auf:

$$\mu_1 = \frac{2-\delta_1}{3}, \qquad \mu_2 = \frac{2-\delta_2}{3},$$

wie wir gleich sehen werden, obwohl δ_2 im Argument der Glieder steht.

Definiert man nämlich im Sinne der Brendel'schen modificierten Form der Störungsfunction die Function V so, dass $\frac{dV}{dv}$ kein constantes Glied enthält, so kommen aus Gleichung (48) die Glieder der Form (A) und (C) zu $\frac{dV}{dv}$, hingegen die der Form (B) und (D), sowie die gewöhnlichen Glieder zu $\frac{dK}{dv}$, so dass:

$$\frac{dT}{dv} = c_0 + \gamma + \frac{dV}{dv} + \frac{dK}{dv} \tag{50}$$

wird, wo also $\frac{dV}{dv}$ nur langperiodische Glieder (der Form A und C) enthält. Integriert man aber jetzt Gleichung (50), so folgt:

$$T = (c_0 + \gamma)v + V + K,$$

aber hier enthält V außer den langperiodischen noch ein seculares Glied $\gamma_0 v$, so dass:

$$\text{pars const.} \frac{dT}{dv} = c_0 + \gamma$$

hingegen:

$$\text{pars secul. } T = c_0 + \gamma + \gamma_0 = \bar{\gamma}$$

ist, wie wir gleich näher sehen werden.

Nach dieser Darstellung enthält somit weder K noch T_l ein constantes oder seculares Glied und dasselbe gilt von $\frac{dK}{dv}$; hingegen enthält $\frac{dT_l}{dv}$ außer den periodischen Gliedern noch die Constante $-\gamma_0$. Beispielsweise ist bei Hilda eines der langperiodischen Glieder 1. Grades:

$$\text{pars } T_l = \gamma_2' \eta \sin(3w - \mathrm{v}) = \gamma_2' \eta \sin(\delta_2 v - 3B - 3\mu T_l + \Pi), \tag{51}$$

also:

$$\text{pars } \frac{dT_l}{dv} = \gamma_2 \eta \cos(3w - \mathrm{v}) \left\{ \delta_2 - 3\mu \frac{dT_l}{dv} \right\}.$$

Da aber nach dem aus Capitel III bekannten Integralansatz:

$$\text{pars}\,\frac{d\,T_l}{d\,v}=\gamma_2\eta\cos(3w-\nu) \tag{51a}$$

ist, so wird (51).

$$\text{pars}\,\frac{dT_l}{d\,v}=\delta_2\gamma_2\eta\cos(3w-\nu)-\frac{3}{2}\,\mu\gamma_2\eta^2-\frac{3}{2}\,\mu\gamma_2\eta^2\cos(6w-2\nu),$$

wo:

$$\frac{3}{2}\,\mu\gamma_2\eta^2=\text{const.},$$

so dass allgemein:

$$\frac{d\,T_l}{d\,v}=\left(\frac{d\,T}{d\,v}\right)_l-\gamma_0 \tag{52}$$

ist, wo also γ_0 eine kleine Constante bezeichnet; und zwar ist dieselbe vom zweiten Grade.

Die Gleichung für w:

$$w=(1-\mu)\,v-\mu(c_0+\gamma)\,v-\mu V$$

wird, da V den secularen Theil $\gamma_0 v$ enthält:

$$\begin{aligned} w &= (1-\mu)\,v-\mu(c_0+\gamma)\,v-\mu\gamma_0 v+\text{periodische Glieder}\\ &= (1-\mu)\,v-\mu\bar{\gamma}\,v+\text{periodische Glieder}\\ &= (1-\mu_2)\,v+\text{periodische Glieder,} \end{aligned}$$

wie bereits angegeben. Mit Hinblick auf (51) wird somit:

$$w=(1-\mu_1)\,v-\mu V,$$

wo V noch den secularen Theil $\gamma_0 v$ enthält. Durch Differentation von (52) folgt:

$$\frac{dw}{dv}=1-\mu_1-\mu\,\frac{dV}{dv}$$

und da $\dfrac{dV}{dv}$ kein constantes Glied enthält, so ist:

$$\frac{dw}{dv}=1-\mu_1+\text{periodische Glieder}$$

und dabei ist das das Wesentliche, dass der seculare Theil von w zwar gleich $(1-\mu_2)\,v$, der constante Theil von $\dfrac{dw}{dv}$ hingegen gleich $1-\mu_1$ ist, und aus diesem letzteren bestimmt sich der Integrationsdivisor. Sei nämlich zu integrieren $\sin nw$, so wird, wenn man setzt:

$$\int\sin nw\,dv=\int\sin\{n(1-\mu_1)\,v-\mu V\}\,dv=-\frac{1}{n(1-\mu_1)}\cos nw+P$$

offenbar:

$$\frac{dP}{dv}=\sin nw-\frac{n}{n(1-\mu_1)}\sin nw\,\frac{dw}{dv}$$

und da:

$$\frac{dw}{dv}=(1-\mu_1)-\mu\,\frac{dV}{dv},$$

so:

$$\frac{dP}{dv} = \frac{\mu}{1-\mu_1} \sin nw \frac{dV}{dv},$$

also:

$$\int \sin nw\, dv = -\frac{1}{n(1-\mu_1)} \cos nw + \frac{\mu}{1-\mu_1} \int \sin nw \frac{dV}{dv}\, dv \tag{53}$$

und das Wichtige ist, dass rechts nicht V, sondern $\frac{dV}{dv}$ auftritt, welches letztere keinen constanten Theil enthält. Somit ist der bei den Integrationen auftretende kleine Divisor eben δ_1 und nicht δ_2, wiewohl δ_2 zunächst im Winkelargument enthalten ist. Und es ist festzuhalten, dass zwar:

$$V = \gamma_0 v + T_l,$$

also auch:

$$\frac{dV}{dv} = \gamma_0 + \frac{dT_l}{dv} \tag{54}$$

aber:

$$\frac{dV}{dv} = \left(\frac{dT}{dv}\right)_l \tag{55}$$

ist, wo also $\frac{dT_l}{dv}$ so zu verstehen ist, dass man aus T den langperiodischen Theil T_l nimmt und nach v differentiiert, $\left(\frac{dT}{dv}\right)_l$ hingegen so, dass man das ganze T nach v differentiiert und dann den langperiodischen Theil herausnimmt; mit anderen Worten, $\frac{dT_l}{dv}$ ist das Differential des langperiodischen Theiles von T, und $\left(\frac{dT}{dv}\right)_l$ der Theil von $\frac{dT}{dv}$ in Gleichung (48), der langperiodisch ist, und beide unterscheiden sich eben außer um exargumentale periodische Glieder höheren Grades, höherer Ordnung um die kleine Constante γ_0; denn, wie wir sehen, enthält zwar $\left(\frac{dT}{dv}\right)_l$ nur langperiodische Glieder. Bei der Integration aber tritt zu den langperiodischen Gliedern noch $\gamma_0 v$:

$$\int \left(\frac{dT}{dv}\right)_l dv = T_l + \gamma_0 v = \int \frac{dV}{dv}\, dv = V \tag{56}$$

und wenn man (56) differentiiert, folgt:

$$\left(\frac{dT}{dv}\right)_l = \frac{dT_l}{dv} + \gamma_0 = \frac{dV}{dv} \tag{57}$$

oder auch:

$$\frac{dT_l}{dv} = \left(\frac{dT}{dv}\right)_l - \gamma_0, \tag{58}$$

wie wir durch (52) bereits an dem Gliede für Hilda beispielsweise sehen.

Die beiden Größen

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu(1+c_0+\gamma) \\ \mu_2 &= \mu(1+c_0+\gamma+\gamma_0) = \mu(1+\bar{\gamma}) \end{aligned} \tag{59}$$

unterscheiden sich bloß durch diese kleine Constante γ_0.

Sämmtliche Störungsglieder, abgesehen von den elementären, haben nun im Argument die Größe $n(1-\mu_2)v$, also die Periode $\frac{2\pi}{1-\mu_2}$, indem der sinus, bezüglich cosinus denselben Wert annimmt, wenn

$(1-\mu_2)v$ um 2π wächst. Ist dabei μ_2 rational, so wird die Bewegung periodisch, da dann die Störungen bei einer ganzen Anzahl von Umläufen denselben Wert annehmen. Dies ist der Fall der strengen Libration: $\delta_2 = 0$. Der Umlauf oder die Periode des ungestörten Planeten ist 2π, diejenige der Störungen $\frac{2\pi}{1-\mu_2}$. Ist also z. B. im Falle eines Planeten vom Hildatypus $\mu_2 = \frac{2}{3}$, so ist die Periode der Störungen 6π, d. h. drei Umläufe; d. h. nach drei Umläufen haben die Störungen wieder genau denselben Wert angenommen, während der Planet nach ein, bezüglich zwei Umläufen nicht an dieselbe Stelle kam. Die Bewegung hat dann also die Periode dreier Umläufe.

Wird speciell in den charakteristischen Gliedern:

$$\sin(3w-v) = \sin(\delta_2 v - 3B - 3\mu T_l + \Pi)$$

$\delta_2 = 0$, also $\mu_2 = \frac{n'}{n_2}$ rational, d. h. streng gleich $\frac{2}{3}$, so verschwindet v ganz aus dem Argument, es bleibt nur: $-\sin(3B+3\mu T_l+\Pi)$ und da in T_l auch v aus den Argumenten verschwindet (abgesehen von den Gliedern der Form A), so wird in diesem besonderen Falle:

$$\sin(3w-v) = \sin\{\text{const.} - \sin\{\text{const.} - \sin\{\text{const.} \ldots\}\}\} = \text{const.}$$

Die Glieder der Form C hören also überhaupt auf zu existieren, d. h. sie werden constant und es tritt strenge Libration ein. Diese Unterscheidung von μ_1 und μ_2 muss bei allen, auch den gewöhnlichen Planeten gemacht werden, ist bei diesen jedoch unwichtig, da hier dieser Unterschied sehr klein ist. Ist dieser Unterschied jedoch groß, so sind solche Fälle, falls nur äußerst genäherte Libration eintritt, nur nach der Gyldén'schen und nicht nach der alten Störungstheorie lösbar, welche letztere diesen Unterschied von μ_1 und μ_2 nicht kennt. Der Fall der genäherten Libration tritt ein, wenn δ_2 nicht $= 0$, aber sehr klein ist. Setzt man $\mu_2 = \frac{n'}{n_2}$, wo $n_2 = \frac{n}{1+\gamma}$, so repräsentiert n_2 diejenige mittlere Bewegung, bei deren Commensurabilität zur Jupiterbewegung Libration eintritt. Von der Größe n_2, »der mittleren Bewegung in Länge«, hängen aber gerade die wahren Umlaufszeiten ab und die Berechnung von n_2 ist später bei Berechnung der Bahn von Hilda erforderlich zur Berechnung der Argumente der auftretenden trigonometrischen Functionen. Indes liegt ein weiteres Eingehen auf die interessante und schwierige Frage der Libration nicht innerhalb des Rahmens der hier zu lösenden Aufgabe.

B. Die Integration für den I. Grad bis inclusive Glieder II. Ordnung.

a. Die genäherte Integration bei constantem η, η', π, π_1.

Die Integration unserer Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der Glieder I. Grades wird schon complicierter als die Integration für den 0. Grad. Wir haben bereits im I. Capitel, bei Einführung der Gyldén'schen Definitionsgleichungen für den Radius vector (8) und die Flächengeschwindigkeit (9) darauf hingewiesen, dass η eine langperiodische Function sei, und ebenso ist π eine solche. Die Bestimmungsgleichungen für diese beiden Functionen werden wir jetzt bei Integration der Differentialgleichung für ρ gewinnen.

Entsprechend den in der Natur wirklich herrschenden Verhältnissen sind aber η und π sehr langsam veränderliche Größen, und daher erhält man schon eine gute Näherung, wenn man sie als constant betrachtet. Diese Annahme ist aber in rechnerischer Beziehung von großem Vortheil, indem die numerisch auszurechnenden Integralformeln für diesen Fall bedeutend einfacher werden, als bei der strengen Integration, wo man η und π als variabel betrachtet. Ja, es wird für einen längeren Zeitraum der Fehler, den man begeht, wenn man η, π, η', π_1 als constant ansieht, nicht wesentlich in die Wagschale fallen. Aus diesem Grunde dürfte es angebracht sein, zunächst diese genäherte Integration der Differentialgleichungen für die Planeten der Hildagruppe durchzuführen, nachträglich aber natürlich dann die strenge Integration. Das Gyldén'sche Princip der partiellen Integration kommt erst, wenn man η, π, η', π_1 als variabel betrachtet, zur Anwendung. Jetzt kommt es nur zur Berücksichtigung der Variabilität von T_l im Winkelargument, d. h. zur Berechnung der exargumentalen Glieder in Betracht.

Ehe wir indes unsere Differentialgleichungen unter dieser Voraussetzung, dass η, η', π und π_1 constante Größen seien, integrieren, wollen wir uns Rechenschaft von der Größe des Fehlers geben, der durch diese Annahme entsteht. Dazu müssen wir einiges aus dem Folgenden vorausgreifend entnehmen.

Es ist, wenn wir für den Augenblick $\varsigma v+\pi$ mit Π bezeichnen (cf. Abtheilung *b*):

$$\int a\eta \cos(\lambda v \mp \Pi) = \frac{a}{\lambda}\eta \sin(\lambda v \mp \Pi)$$
$$+\frac{a}{\lambda^2}\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\cos\lambda v \pm \frac{a}{\lambda^2}\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\sin\lambda v$$
$$+\text{äußerst kleine Glieder.}$$

Indem man η und π als constant betrachtet, erhält man:

$$\int a\eta\cos(\lambda v \mp \Pi) = \frac{a}{\lambda}\eta\sin(\lambda v \mp \Pi),$$

begeht dabei also den Fehler:

$$F = \frac{a}{\lambda^2}\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\cos\lambda v \pm \frac{a}{\lambda^2}\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\sin\lambda v.$$

Nun ist aber, wie in Abtheilung *b* bewiesen werden wird:

$$\frac{d\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Pi}{dv} = \mp\varsigma\varkappa \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\varsigma v+\Gamma) \mp \Sigma\varsigma_n\varkappa_n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\varsigma_n v+\Gamma_n),$$

also der begangene Fehler immer:

$$F \asymp \frac{a}{\lambda^2}\varsigma\varkappa$$

und da $a \asymp m'$ und, wie wir gleichfalls sehen werden, $\varsigma \asymp m'$ und $\varsigma_n \asymp m'$ ist, so ist jedenfalls:

$$F \asymp \frac{m'^2}{\lambda^2}.$$

Es ist nun:

1. Bei den gewöhnlichen Gliedern λ nicht klein, also:

$$F \asymp m'^2.$$

2. Bei den charakteristischen Gliedern $\lambda \asymp \delta_1$, also bei diesen der durch Annahme der Constanz von η, η', π, π_1 begangene Fehler:

$$F \asymp \frac{m'^2}{\delta_1^2}.$$

3. Bei den elementären Gliedern $\lambda = 0$, mithin hier der begangene Fehler:

F beliebig groß.

Daraus folgt also:

1 *a*. Dass bei den gewöhnlichen Gliedern η und π direct als constant angenommen werden dürfen.

2 *a*. Dass bei den charakteristischen Gliedern η und π zunächst zwar auch als constant angesehen werden können und man so schon eine gute Näherung erhält; dass man aber bei Planeten, für welche δ_1 sehr klein wird — und Hilda gehört zu diesen —, die »Zusatzglieder«:

$$\frac{a}{\lambda^2}\,\frac{d\eta\cos\Pi}{dv}\cos\lambda v \pm \frac{a}{\lambda^2}\,\frac{d\eta\sin\Pi}{dv}\sin\lambda v,$$

doch berücksichtigen muss, wenn man die Abweichung vermeiden will, die bei Vernachlässigung dieser Glieder sich nach einiger Zeit bemerkbar macht.

3 *a*. Dass bei den elementären Gliedern hingegen η und π niemals als constant betrachtet werden dürfen, weil hier der begangene Fehler beliebig groß würde.

In diesem Sinne begehen wir also in der Differentialgleichung für S bei Integration über die Glieder der Form B und D, wenn wir η, η', π, π_1 als constant ansehen, nur einen Fehler von der Ordnung m'^2; denn es ist:

$$a = m', \qquad \frac{d\eta \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Pi}{dv} = m',$$

die vernachlässigten Glieder also:

$$\frac{a}{\lambda^2}\,\frac{d\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Pi}{dv} = m'^2.$$

In den Gliedern der Form C wird der begangene Fehler:

$$F = \frac{m'}{\delta_1^2}\,\frac{d}{dv}\,\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Pi = \frac{m'}{\delta_1^2}(\zeta_n - \zeta) = \frac{m'^2}{\delta_1^2},$$

also infolge der Multiplication mit der kleinen Größe $\zeta_n - \zeta$ immerhin für einige Zeit noch nicht beträchtlich; während bei der Integration über die Glieder der Form B in (ρ), die wirklich elementär sind, η, π, η', π_1 als variabel angesehen werden müssen.

I. Die Integration der Differentialgleichung für S.

Als Differentialgleichung für S hatten wir bis inclusive zu Gliedern 1. Grades gefunden:

$$\frac{dS}{dv} = -Q_0 - Q_1 - 3(S_1)_t Q_0 \tag{60}$$

und als unbestimmten Integralansatz für S_1:

$$\left.\begin{aligned} S_1 = {} & a_2\eta\cos\nu + \alpha_2\eta\cos(3w-\nu) + a_4\eta\cos(6w-\nu) \\ & + a_3\eta'\cos\nu_1 + \alpha_3\eta'\cos(3w-\nu_1) + a_5\eta'\cos(6w-\nu_1). \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Es wird daher:

$$
\left.\begin{aligned}
(S_1)_l\, Q_0 = \frac{1}{2}\, q_1 \alpha_2 \eta \sin \mathrm{v} + \frac{1}{2}\, q_1 \alpha_2 \eta \sin (6w - \mathrm{v}) \\
+ \frac{1}{2}\, q_1 \alpha_3 \eta' \sin \mathrm{v}_1 + \frac{1}{2}\, q_1 \alpha_3 \eta' \sin (6w - \mathrm{v}_1).
\end{aligned}\right\} \qquad (62)
$$

Im Integral der Differentialgleichung (60) sind aber noch gewisse Glieder 1. Grades in Betracht zu ziehen, welche infolge der Variabilität von T_l im Winkelargument der trigonometrischen Functionen bei Integration über die Glieder nullten Grades entstehen. Es sind dies die von Gyldén sobenannten »exargumentalen« Glieder, und zwar diejenigen vom 1. Grad, indem aus den Gliedern 0. Grades auch exargumentale Glieder höheren Grades entstehen, da V oder T_l Glieder dieser Grade enthält. Dieselben müssen wir berücksichtigen, wenn wir die Integration der Gleichung (60) bis inclusive zu Gliedern 2. Grades, also der Gleichung (4) dieses Capitels durchführen.

Da nach dem Früheren T_l keine Glieder 0. Grades enthält, so ist die Berechnung der exargumentalen Glieder 1. Grades noch sehr einfach. Während bei Integration der Differentialgleichung (4) inclusive bis zu Gliedern 2. Grades, nicht bloß die aus der Integration über die Glieder 0[ten] und 1. Grades entstehenden exargumentalen Glieder 2. Grades allein zu berücksichtigen sind, sondern auch exargumentale Glieder 2. Grades dadurch noch entstehen, dass T_l selbst Glieder 1. Grades enthält, da ja nach Capitel III:

$$
\frac{dT_l}{dv} = -\gamma_0 + \gamma_2 \eta \cos (3w - \mathrm{v}) + \gamma_3 \eta' \cos (3w - \mathrm{v}_1) + \text{Glieder höheren Grades}
$$

oder:

$$
\frac{dV}{dv} = \gamma_2 \eta \cos (3w - \mathrm{v}) + \gamma_3 \eta' \cos (3w - \mathrm{v}_1) + \ldots
$$

ist.

Die exargumentalen Glieder, welche aus dem Integral $\int \sin 3w\, dv$ infolge der Variabilität von T_l in w entstehen, findet man nach Gyldén's Vorgang durch das Princip der partiellen Integration. Allgemein ist, indem man zunächst so integriert, als ob V constant wäre:

$$
\int \sin (\lambda_n v - B_n - n\mu V) = -\frac{1}{\lambda_n} \cos (\lambda_n v - B_n - n\mu V) + \Phi,
$$

wo Φ zu bestimmen ist. Dazu differentieren wir und erhalten:

$$
\sin (\lambda_n v - B_n - n\mu V) = +\frac{1}{\lambda_n} \sin (\lambda_n v - B_n - n\mu V) \left(\lambda_n - n\mu \frac{dV}{dv}\right) + \frac{d\Phi}{dv},
$$

also als Bedingung für Φ:

$$
\frac{d\Phi}{dv} = + \frac{n\mu}{\lambda_n} \frac{dV}{dv} \sin (\lambda_n v - B_n - n\mu V),
$$

mithin als Integral infolge der Variabilität von V:

$$
\left.\begin{aligned}
\int \sin (\lambda_n v - B_n - n\mu V)\, dv = -\frac{1}{\lambda_n} \cos (\lambda_n v - B_n - n\mu V) \\
+ \frac{n\mu}{\lambda_n} \int \frac{dV}{dv} \sin (\lambda_n v - B_n - n\mu V)\, dv.
\end{aligned}\right\} \qquad (63)
$$

Hier ist $\frac{dV}{dv}$ wieder eine trigonometrische Reihe, das 2. Glied rechts in letzter Gleichung repräsentiert also auch wieder eine trigonometrische Reihe mit V im Argument, auf die man also von neuem die partielle Integration anwenden kann, wenn wir für $\frac{dV}{dv}$ seinen Wert setzen:

$$\int \frac{dV}{dv} \sin(\lambda_n v - B_n - n\mu V)\,dv = \int \{\gamma_2 \eta \cos(3w - \nu) + \gamma_3 \eta' \cos(3w - \nu_1)\} \sin(\lambda_n v - B_n - n\mu V)\,dv,$$

also:

$$\begin{aligned}\int \frac{dV}{dv} \sin(\lambda_n v - B_n - n\mu V)\,dv = {} & \frac{1}{2}\gamma_2 \int \eta \sin(3w - \nu + \lambda_n v - B_n - n\mu V)\,dv \\ & - \frac{1}{2}\gamma_2 \int \eta \sin(3w - \nu - \lambda_n v + B_n + n\mu V)\,dv \\ & + \frac{1}{2}\gamma_3 \int \eta' \sin(3w - \nu_1 + \lambda_n v - B_n - n\mu V)\,dv \\ & - \frac{1}{2}\gamma_3 \int \eta' \sin(3w - \nu_1 - \lambda_n v + B_n + n\mu V)\,dv.\end{aligned}$$

Die beiden Argumente enthalten also $(3-n)\mu V$ und $(3+n)\mu V$ und die Integration wird jetzt wieder ebenso partiell ausgeführt, was aber zu exargumentalen Gliedern zweiten Grades dritter Ordnung führte, von denen wir hier absehen.

Mittelst Formel (63) erhält man nun aus der Differentialgleichung:

$$\frac{dS}{dv} = \left(\frac{dS}{dv}\right)_0 + \left(\frac{dS}{dv}\right)_1 + \left(\frac{dS}{dv}\right)_2 + \ldots = -Q_0 - Q_1 - Q_2 - \ldots \tag{64}$$

direct die exargumentalen Glieder ersten Grades, nämlich:

$$\int \left(\frac{dS}{dv}\right)_0 dv = S_0 + \text{pars exarg. } S_1 = a_1 \cos 3w - 3a_1\mu \int \frac{dV}{dv} \sin 3w\,dv,$$

also, da:

$$\text{pars } \frac{dV}{dv} = \gamma_2 \eta \cos(3w - \nu) + \gamma_3 \eta' \cos(3w - \nu_1)$$

ist, auch:

$$\left.\begin{aligned}\text{pars exarg. } S_1 = {} & \frac{3}{2}\,\frac{\mu a_1 \gamma_2}{1-\zeta}\,\eta \cos\nu + \frac{3}{2}\,\frac{\mu a_1 \gamma_2}{1+2\delta_1+\zeta}\,\eta \cos(6w - \nu) \\ & + \frac{3}{2}\,\frac{\mu a_1 \gamma_3}{1-\zeta_1}\,\eta' \cos\nu_1 + \frac{3}{2}\,\frac{\mu a_1 \gamma_3}{1+2\delta_1+\zeta_1}\,\eta' \cos(6w - \nu_1).\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Da das Princip der Berechnung der exargumentalen Glieder von fundamentaler Wichtigkeit ist und die Ermittlung der exargumentalen Glieder höherer Grade, zumal des dritten, wesentlich complicierter wird, so wollen wir es gleich hier noch etwas ausführlicher betrachten. Es ist exclusive Glieder 1. Grades:

$$\frac{dS}{dv} = -q_1 \sin 3w, \tag{66}$$

wo:

$$3w = 3(1-\mu_1)v - 3B - 3\mu V.$$

Betrachtet man V im Argument als constant, so würde:

$$S = a_1 \cos 3w, \tag{67}$$

wo:

$$a_1 = \frac{q_1}{3(1-\mu_1)} = \frac{q_1}{1+\delta_1}.$$

Das Integral (67) ist aber nicht vollständig, weil V im Argument constant angesehen wurde. Sei der vollständige Wert von S:

$$S = a_1 \cos 3w + \psi \tag{68}$$

und bestimmen wir ψ so, dass (68) das vollständige Integral wird, so erhält man zunächst durch Differentiation:

$$\frac{dS}{dv} = a_1 \frac{d \cos 3w}{dv} + \frac{d\psi}{dv} = -3a_1 \sin 3w \frac{dw}{dv} + \frac{d\psi}{dv}.$$

Dies muss gleich (66) sein, also:

$$-q_1 \sin 3w = -3a_1 \sin 3w \frac{dw}{dv} + \frac{d\psi}{dv}.$$

Die Differentialgleichung für die exargumentalen Glieder in S, und zwar bloß für die aus dem nullten Grad entstehenden, wird somit streng:

$$\frac{d\psi}{dv} = 3a_1 \sin 3w \frac{dw}{dv} - q_1 \sin 3w. \tag{69}$$

Nun ist aber:

$$\frac{dw}{dv} = 1 - \mu_1 - \mu \frac{dV}{dv},$$

daher wird:

$$\frac{d\psi}{dv} = -3\mu a_1 \sin 3w \frac{dV}{dv}$$

oder, wenn wir für $\frac{dV}{dv}$ seinen Wert einsetzen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi}{dv} = & -\frac{3}{2}\mu a_1 \gamma_2 \eta \sin \mathrm{v} - \frac{3}{2}\mu a_1 \gamma_2 \eta \sin(6w - \mathrm{v}) \\ & -\frac{3}{2}\mu a_1 \gamma_3 \eta' \sin \mathrm{v}_1 - \frac{3}{2}\mu a_1 \gamma_3 \eta' \sin(6w - \mathrm{v}_1). \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist schon 1. Grades, 2. Ordnung; man kann sie also integrieren, indem man η, η', π, π_1 und V als constant ansieht, da die aus (70) durch Variabilität von V wieder entstehenden exargumentalen Glieder 2. Grades von der 3. Ordnung würden, und wir solche Glieder ja nicht mehr mitnehmen. Daher folgt einfach:

$$\left.\begin{aligned} \psi = & +\frac{3}{2}\frac{\mu a_1 \gamma_2}{1-\varsigma}\eta \cos \mathrm{v} + \frac{3}{2}\frac{\mu a_1 \gamma_2}{6(1-\mu_1)-(1-\varsigma)}\eta \cos(6w - \mathrm{v}) \\ & +\frac{3}{2}\frac{\mu a_1 \gamma_3}{1-\varsigma_1}\eta' \cos \mathrm{v}_1 + \frac{3}{2}\frac{\mu a_1 \gamma_3}{6(1-\mu_1)-(1-\varsigma_1)}\eta' \cos(6w - \mathrm{v}_1), \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

was mit (65) identisch ist. Somit ist also S, wie es aus den Gliedern nullten Grades vollständig entspringt,

$$S = a_1 \cos 3w + \psi,$$

wo $S_0 = a_1 \cos 3w$ ist, die exargumentalen Glieder ψ jedoch zu S_1 kommen, da sie ersten Grades sind. In dieser Weise werden wir später auch bei Bestimmung der exargumentalen Glieder höheren Grades, die verwickelter wird, verfahren.

Die Differentialgleichung (60) für S wird nun durch Vereinigung der Glieder gleicher Argumente:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dS}{dv} = \underset{\sim}{Q}{}_0^{(1)} \sin 3w + \underset{\sim}{Q}{}_1^{(1)} \eta \sin v + \underset{\sim}{Q}{}_1^{(3)} \eta \sin (3w - v) + \underset{\sim}{Q}{}_1^{(5)} \eta \sin (6w - v)\\ + \underset{\sim}{Q}{}_1^{(2)} \eta' \sin v_1 + \underset{\sim}{Q}{}_1^{(4)} \eta' \sin (3w - v_1) + \underset{\sim}{Q}{}_1^{(6)} \eta' \sin (6w - v_1),\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

wo:

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\sim}{Q}{}_0^{(1)} = -q_1; \qquad \underset{\sim}{Q}{}_1^{(3)} = -q_4; \qquad \underset{\sim}{Q}{}_1^{(4)} = -q_5\\ &\underset{\sim}{Q}{}_1^{(1)} = -\left(q_2 + \frac{3}{2} q_1 \alpha_2\right); \qquad \underset{\sim}{Q}{}_1^{(5)} = -\left(q_6 + \frac{3}{2} q_1 \alpha_2\right)\\ &\underset{\sim}{Q}{}_1^{(2)} = -\left(q_3 + \frac{3}{2} q_1 \alpha_3\right); \qquad \underset{\sim}{Q}{}_1^{(6)} = -\left(q_7 + \frac{3}{2} q_1 \alpha_3\right)\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

ist, wobei die q durch die Formeln (14) vollständig gegeben sind, nachdem in (14) β_2 bis β_5 bestimmt sind, (was sogleich durch Integration der Gleichung für ρ geleistet werden wird). Denn die Coefficienten der β in (14) sind bekannte Functionen von $\alpha = \frac{a}{a'}$ und gegeben durch (15), somit sind also die Coefficienten $\underset{\sim}{Q}$ in (73) (nach Ausführung der Integration der Differentialgleichung für ρ) gegebene Größen.

Durch Differentation von (61) erhält man aber:

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dv} = &-(1-\varsigma)a_2\eta \sin v - (\delta_1 + \varsigma)\alpha_2\eta \sin (3w - v) - (1 + 2\delta_1 + \varsigma) a_4 \eta \sin (6w - v)\\ &-(1-\varsigma_1)a_3\eta' \sin v_1 - (\delta_1 + \varsigma_1)\alpha_3\eta' \sin (3w - v_1) - (1 + 2\delta_1 + \varsigma_1) a_5 \eta' \sin (6w - v_1).\end{aligned} \tag{74}$$

Damit ergeben sich für die gesuchten unbekannten Coefficienten in (61) die Werte:

$$\left.\begin{aligned}a_2 &= q_2 + \frac{3}{2}(q_1\alpha_2 + \mu a_1 \gamma_2)\\ a_3 &= q_3 + \frac{3}{2}(q_1\alpha_3 + \mu a_1 \gamma_3)\\ a_4 &= \frac{q_6 + \frac{3}{2}(q_1\alpha_2 + \mu a_1 \gamma_2)}{1 + 2\delta_1}\\ a_5 &= \frac{q_7 + \frac{3}{2}(q_1\alpha_3 + \mu a_1 \gamma_3)}{1 + 2\delta_1}\\ \alpha_2 &= \frac{q_4}{\delta_1 + \varsigma}; \qquad \alpha_3 = \frac{q_5}{\delta_1 + \varsigma_1}.\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Hier haben wir in den Nennern ς und ς_1 gegen 1, nicht aber gegen δ_1 vernachlässigt, da δ_1 selbst klein ist. Denn es ist:

$$\frac{1}{1-\varsigma} = 1 + \frac{\varsigma}{1-\varsigma}$$

$$\frac{1}{1+2\delta_1+\varsigma} = \frac{1}{1+2\delta_1} - \frac{\varsigma}{(1+2\delta_1+\varsigma)(1+2\delta_1)}$$

und hier kann das 2. Glied rechts gegen das 1. vernachlässigt werden, was jedoch nicht der Fall ist bei:

$$\frac{1}{\delta_1+\varsigma} = \frac{1}{\delta_1} - \frac{\varsigma}{\delta_1(\delta_1+\varsigma)}. \tag{76}$$

Sind die β bestimmt (die folgende Integration der Gleichung für ρ ergibt dieselben also), so sind auch γ_2 und γ_3 bestimmt, da sich diese, wie wir gleich sehen werden, aus den β und den q zusammensetzen. Das Integral der Differentialgleichung (60) sive (72) ist mithin:

$$\begin{aligned} S_1 = a_1 \cos 3w + a_2\eta \cos \mathrm{v} + \alpha_2\eta \cos(3w-\mathrm{v}) + a_4\eta \cos(6w-\mathrm{v}) \\ + a_3\eta' \cos \mathrm{v}_1 + \alpha_3\eta' \cos(3w-\mathrm{v}_1) + a_5\eta' \cos(6w-\mathrm{v}_1), \end{aligned} \tag{77}$$

wobei die Coefficienten durch die Relationen (76) gegeben und $a_1 = q_1$ durch die Integration für den 0. Grad bereits gefunden ist; η und η' sind nämlich, wie wir jetzt gleichfalls sehen werden, auch berechenbare Größen; das Integral (77) ist also vollständig bekannt und für Hilda numerisch auswertbar.

Die gewöhnlichen Glieder in S_1 bestimmen sich aus der Differentialgleichung:

$$\frac{dS}{dv} = -Q_1 \tag{78}$$

mit Hinblick auf die Entwickelung von Q im zweiten Capitel also einfach aus:

$$\begin{aligned} S_1 = \Sigma S^{(+1)}_{n.1.0}\eta \cos(nw+\mathrm{v}) + \Sigma S^{(-1)}_{n.1.0}\eta \cos(nw-\mathrm{v}) \\ + \Sigma S^{(+1)}_{n.0.1}\eta' \cos(nw+\mathrm{v}_1) + \Sigma S^{(-1)}_{n.0.1}\eta' \cos(nw-\mathrm{v}_1), \end{aligned} \tag{79}$$

wo:

$$\left.\begin{aligned} S^{(+1)}_{n.1.0} = \frac{A^{(+1)}_{n.1.0}}{\frac{n}{3}(1+\delta_1)+1}; \qquad S^{(-1)}_{n.1.0} = \frac{A^{(-1)}_{n.1.0}}{\frac{n}{3}(1+\delta_1)-1} \\ S^{(+1)}_{n.0.1} = \frac{A^{(+1)}_{n.0.1}}{\frac{n}{3}(1+\delta_1)+1}; \qquad S^{(-1)}_{n.0.1} = \frac{A^{(-1)}_{n.0.1}}{\frac{n}{3}(1+\delta_1)-1} \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

und $n \neq 3, 6$ ist.

---

2. Die Integration der Differentialgleichung für $\rho = (\rho) + R$.

Als Bestimmungsgleichung für ρ hatten wir bis exclusive von Gliedern 2. Grades gefunden:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho = 2S_0 - P_0 - Q_0\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 - 2S_0Q_0\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 \\ + 2S_1 - P_1 - 2(S_1)_l P_0 + 2S_0(S_1)_l + Q_0\eta \sin \mathrm{v} - Q_0 \text{ pars}\left(\frac{dR}{dv}\right)_1 - Q_1 \text{ pars}\left(\frac{dR}{dv}\right)_0. \end{aligned} \tag{81}$$

Die einzelnen Glieder der rechten Seite sind nun wirklich auf Grund der früher für den Typus $\frac{2}{3}$ entwickelten Werte von P, $\underset{\sim}{Q}$, S und R zu bilden. Dabei ist offenbar:

$$\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 = -(1+\delta_1)\beta_1 \sin 3w$$

$$\left(\frac{dR}{dv}\right)_1 = -(1+2\delta_1+\varsigma)\beta_4\eta \sin(6w-\mathrm{v}) - (1+2\delta_1+\varsigma_1)\beta_5\eta' \sin(6w-\mathrm{v}_1).$$

Indem man durchweg das Princip der Zerlegung der Producte trigonometrischer Functionen in Summen und Differenzen befolgt, wie es bereits im zweiten Capitel zur Anwendung kam (cf. Gleichungen 36 ibd.) und dabei nach Gyldén's Princip bloß Glieder langperiodischer und kurzperiodischer Form, wie sie für den Hildatypus in Betracht kommen, mitnimmt, alle übrigen aber verwirft, so findet man nach einiger Rechnung unschwer die folgenden Resultate, indem:

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}_{(k+l)} + \underset{\sim}{Q}_g$$

zu setzen, wobei $\underset{\sim}{Q}_{(k+l)}$ durch Gleichung (13), $\underset{\sim}{Q}_g$ durch Gleichung (21) gegeben, und:

$$-\underset{\sim}{Q}\frac{dR}{dv} = -(\underset{\sim}{Q}_0+\underset{\sim}{Q}_1)\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 - \underset{\sim}{Q}_0\left(\frac{dR}{dv}\right)_1$$

ist:

$$\underset{\sim}{Q}_0\eta \sin\mathrm{v} = \frac{1}{2}q_1\eta\cos(3w-\mathrm{v}) + \frac{1}{2}g_1\eta\sin(6w-\mathrm{v})$$

$$\left.\begin{aligned}
-\underset{\sim}{Q}\frac{dR}{dv} &= \frac{1}{2}q_1\beta_1 + \frac{1}{2}g_1\beta_1\cos 3w \\
&+\frac{1}{2}\{g_1\beta_4+(g_2+q_4)\beta_1\}\eta\cos\mathrm{v} + \frac{1}{2}\{g_1\beta_5+(g_3+q_5)\beta_1\}\eta'\cos\mathrm{v}_1 \\
&+\frac{1}{2}\{q_1\beta_4+(q_2+q_6)\beta_1\}\eta\cos(3w-\mathrm{v}) + \frac{1}{2}\{q_1\beta_5+(q_3+q_7)\beta_1\}\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1) \\
&+\frac{1}{2}\{(g_4-q_4)\beta_1\}\eta\cos(6w-\mathrm{v}) + \frac{1}{2}\{(g_5-q_5)\beta_1\}\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1) \\
2S_0(S_1)_l &= a_1\alpha_2\eta\cos\mathrm{v} + a_1\alpha_2\eta\cos(6w-\mathrm{v}) \\
&\quad + a_1\alpha_3\eta'\cos\mathrm{v}_1 + a_1\alpha_3\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1) \\
2P_0(S_1)_l &= p_1\alpha_2\eta\cos\mathrm{v} + p_1\alpha_2\eta\cos(6w-\mathrm{v}) \\
&\quad + p_1\alpha_3\eta'\cos\mathrm{v}_1 + p_1\alpha_3\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1)
\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

$$2S_0\underset{\sim}{Q}_0\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 = \frac{1}{2}a_1q_1\beta_1\cos 3w.$$

Da dies letzte Glied aber von der Ordnung $\frac{m'^3}{\delta_1}$, also dritter Ordnung und dabei rein zweiter Ordnung ist, so lassen wir es seiner außerordentlichen Kleinheit wegen fort.

Durch Combination der Glieder gleicher Argumente erhält man also die folgende zu integrierende Differentialgleichung in ρ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\rho}{dv^2}+\rho = P_0 + P_0^{(1)}\cos 3w + P_1^{(1)}\eta\cos\mathrm{v} + P_1^{(3)}\eta\cos(3w-\mathrm{v}) + P_1^{(5)}\eta\cos(6w-\mathrm{v}) \\
+P_1^{(2)}\eta'\cos\mathrm{v}_1 + P_1^{(4)}\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1) + P_1^{(6)}\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1)
\end{aligned}\right\} \tag{83}$$

wo bedeutet:

$$
\left.\begin{aligned}
P_0 &= -p_0 + \frac{1}{2} q_1 \beta_1 \\
P_0^{(1)} &= 2a_1 - p_1 + \frac{1}{2} g_1 \beta_1 \\
P_{\mathrm{I}}^{(1)} &= 2a_2 - p_2 + \frac{1}{2} \{ g_1 \beta_4 + (g_2 + q_4) \beta_1 \} + (a_1 - p_1) \alpha_2 \\
P_{\mathrm{I}}^{(2)} &= 2a_3 - p_3 + \frac{1}{2} \{ g_1 \beta_5 + (g_3 + q_5) \beta_1 \} + (a_1 - p_1) \alpha_3 \\
P_{\mathrm{I}}^{(3)} &= 2\alpha_2 - p_4 + \frac{1}{2} q_1 + \frac{1}{2} \{ q_1 \beta_4 + (q_2 + q_6) \beta_1 \} \\
P_{\mathrm{I}}^{(4)} &= 2\alpha_3 - p_5 + \frac{1}{2} \{ q_1 \beta_5 + (q_3 + q_7) \beta_1 \} \\
P_{\mathrm{I}}^{(5)} &= 2a_4 - p_6 + \frac{1}{2} g_1 + \frac{1}{2} \{ (g_4 - q_4) \beta_1 \} + (a_1 - p_1) \alpha_2 \\
P_{\mathrm{I}}^{(6)} &= 2a_5 - p_7 + \frac{1}{2} \{ (g_5 - q_5) \beta_1 \} + (a_1 - p_1) \alpha_3
\end{aligned}\right\} \tag{84}
$$

und wo die q, p, g durch (14), (18) und (22) gegeben, indes jedoch selbst wieder Functionen der β sind.

Diese Differentialgleichung für ρ ist nun also zu integrieren. In ganz ähnlicher Weise wie bei der Differentialgleichung für S exargumentale Glieder auftraten, werden aber auch jetzt in R_1 solche erscheinen. Diese aus der Integration der Differentialgleichung der Glieder 0ten Grades in R entstehenden exargumentalen Glieder (indem ja $\rho = (\rho) + R$ ist, (ρ) aber für den 0ten Grad nicht existiert), wollen wir durch zweimalige Differentation bestimmen. Bezeichne P den Pars exarg., der aus R_0 entsteht:

$$R_0 = \beta_1 \cos 3w + P,$$

so folgt bei Variabilität von T_l im Winkelargument w:

$$\frac{dR_0}{dv} = -\beta_1 \left\{ (1+\delta_1) - 3\mu \frac{dT_l}{dv} \right\} \sin 3w + \frac{dP}{dv}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 R_0}{dv^2} + R_0 = {} & \{ 1 - (1+\delta_1)^2 \} \beta_1 \cos 3w \\
& + \left\{ 6\mu (1+\delta_1) \frac{dT_l}{dv} - 9\mu^2 \left(\frac{dT_l}{dv} \right)^2 \right\} \beta_1 \cos 3w \\
& + 3\mu\beta_1 \frac{d^2 T_l}{dv^2} \sin 3w + \frac{d^2 P}{dv^2} + P.
\end{aligned}
$$

Nun ist aber: [1]

$$\text{pars} \frac{dT_l}{dv} = \gamma_2 \eta \cos (3w - \nu) + \gamma_3 \eta' \cos (3w - \nu_1), \tag{85}$$

also: $\dfrac{d^2 T_l}{dv^2} = -(\delta_1 + \varsigma) \gamma_2 \eta \sin (3w - \nu) - (\delta_1 + \varsigma_1) \gamma_3 \eta' \sin (3w - \nu_1).$

[1] Hier kommt der Unterschied von $\left(\frac{dT}{dv}\right)_l$ und $\frac{dT_l}{dv}$ offenbar nicht in Betracht, denn ob man den betreffenden pars aus dem einen oder andern nimmt, ist ja dasselbe.

Da aber $\frac{d^2 T_l}{dv^2}$ nur mit β_1 multipliciert vorkommt, also in Gliedern zweiter Ordnung, so kann man ς und ς_1 hier fortlassen, denn es ist:

$$(\delta_1+\varsigma)\gamma_2\beta_1 = \delta_1\gamma_2\beta_1 + \text{III. Ordnung.}$$

Daher wird:

$$\frac{d^2 T_l}{dv^2} = -\delta_1\gamma_2\eta\sin(3w-\mathrm{v}) - \delta_1\gamma_3\eta'\sin(3w-\mathrm{v}_1).$$

Und somit:

$$\frac{dT_l}{dv}\beta_1\cos 3w = \frac{1}{2}\gamma_2\beta_1\{\eta\cos(6w-\mathrm{v})+\eta\cos\mathrm{v}\}$$
$$+\frac{1}{2}\gamma_3\beta_1\{\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1)+\eta'\cos\mathrm{v}_1\}$$
$$\frac{d^2 T_l}{dv^2}\beta_1\sin 3w = \frac{1}{2}\delta_1\gamma_2\beta_1\{\eta\cos(6w-\mathrm{v})-\eta\cos\mathrm{v}\}$$
$$+\frac{1}{2}\delta_1\gamma_3\beta_1\{\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1)-\eta'\cos\mathrm{v}_1\},$$

das Glied:

$$9\mu^2\left(\frac{dT_l}{dv}\right)^2\beta_1\cos 3w$$

hingegen liefert exargumentale Glieder zweiten Grades, kommt aber für uns auch nicht später nachträglich in Betracht, wenn wir die Differentialgleichung für ρ bis inclusive der Glieder zweiten Grades, also Gleichung (6) dieses Capitels integrieren, weil es dritter Ordnung wird.

Man erhält demnach R_1 mit Einschluss der exargumentalen Glieder durch Integration des vollen Ausdruckes:

$$\frac{d^2 R_1}{dv^2}+R_1 = \left(\frac{d^2 R}{dv^2}+R\right)_1 + \frac{d^2 P}{dv^2}+P.$$

wo P = pars exarg. R_1 gegeben ist durch:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2 P}{dv^2}+P &= -\left\{6\mu(1+\delta_1)\frac{dT_l}{dv}\right\}\beta_1\cos 3w - 3\mu\beta_1\frac{d^2 T_l}{dv^2}\sin 3w\\ &= \zeta\gamma_2\eta\cos\mathrm{v} + \zeta'\gamma_2\eta\cos(6w-\mathrm{v})\\ &\quad+\zeta\gamma_3\eta'\cos\mathrm{v}_1+\zeta'\gamma_3\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1),\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

wo:

$$\zeta = -3\mu\beta_1\left(1+\frac{1}{2}\delta_1\right);\quad \zeta' = -3\mu\beta_1\left(1+\frac{3}{2}\delta_1\right)$$

und nach dem in Capitel III Dargelegten die Glieder in ζ elementär vom Typus B, diejenigen in ζ' aber charakteristisch von der Form D sind.

Zur Integration zerlegen wir die Differentialgleichung für ρ nach Gyldén's Princip in zwei Gleichungen, indem wir mit Gyldén setzen:

$$\rho = (\rho)+R,$$

wo (ρ) die elementären Glieder der Form B, R hingegen alle übrigen Glieder umfasst. Unter Einschluss der exargumentalen Glieder erhalten wir somit die beiden folgenden definitiv zu integrierenden Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2(\rho)}{dv^2}+(\rho) = P_1^{(1)}\eta\cos\mathrm{v}+P_1^{(2)}\eta'\cos\mathrm{v}_1, \tag{87}$$

wo:

$$\left.\begin{aligned} P_1^{(1)} &= 2a_2-p_2+\frac{1}{2}\{g_1\beta_4+(g_2+q_4)\beta_1\}+(a_1-p_1)\alpha_2-\zeta\gamma_2 \\ P_1^{(2)} &= 2a_3-p_3+\frac{1}{2}\{g_1\beta_5+(g_3+q_5)\beta_1\}+(a_1-p_1)\alpha_3-\zeta\gamma_3 \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

gesetzt ist. Ferner:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2R}{dv^2}+R = P_0+P_0^{(1)}\cos 3w+P_1^{(3)}\eta\cos(3w-\mathrm{v})+P_1^{(5)}\eta\cos(6w-\mathrm{v}) \\ +P_1^{(4)}\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)+P_1^{(6)}\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1), \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

wobei bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= -p_0+\frac{1}{2}q_1\beta_1 \\ P_0^{(1)} &= 2a_1-p_1+\frac{1}{2}g_1\beta_1 \\ P_1^{(3)} &= 2\alpha_2-p_4+\frac{1}{2}q_1 \\ P_1^{(4)} &= 2\alpha_3-p_5 \\ P_1^{(5)} &= 2a_4-p_6+\frac{1}{2}g_1+\frac{1}{2}\{(g_4-q_4)\beta_1\}+(a_1-p_1)\alpha_2-\zeta'\gamma_2 \\ P_1^{(6)} &= 2a_5-p_7+\frac{1}{2}\{(g_5-q_5)\beta_1\}+(a_1-p_1)\alpha_3-\zeta'\gamma_3, \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

wo wir die Glieder $\frac{1}{2}\{q_1\beta_4+(q_2+q_6)\beta_1\}$ und $\frac{1}{2}\{q_1\beta_5+(q_3+q_7)\beta_1\}$ in $P_1^{(3)}$ und $P_1^{(4)}$, die von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ sind, gegenüber den großen Gliedern $2\alpha_2$ und $2\alpha_3$, die von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$ sind, vernachlässigt haben, weil sie als langperiodische ja in R durch die Integration nicht mehr vergrößert werden.

---

2 a.) Integration der Differentialgleichung für (ρ).

Nach dem im Capitel III Dargelegten können wir für die Differentialgleichung (87) zunächst den folgenden allgemeinen Integralansatz machen:

$$(\rho) = \varkappa\cos\{(1-\varsigma)v-\Gamma\}+\Sigma\,\varkappa_n\cos\{(1-\varsigma_n)v-\Gamma_n\}, \tag{91}$$

wo $\varkappa$ und Γ die Integrationsconstanten und $\varkappa_n$ zu bestimmen ist. Aus (91) folgen auch die Bestimmungsgleichungen von η und π.

Man hat ja für den Radiusvector in der Ellipse:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\pi')}$$

und in der »Gyldén'schen Bahn«:

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+(\rho)+R}$$

Nun definierten wir aber (ρ) mit Gyldén so, dass es nur die Glieder der Form B enthält, so dass also:

$$(\rho) = \eta \cos\{(1-\varsigma)v-\pi\} \tag{92}$$

ist, analog wie bei der Ellipse, für welche η und π in e und π' übergehen, wenn die störende Masse verschwindet, so dass $e\cos(v-\pi')$ dem kurzperiodisch elementären Theile (ρ) entspricht. Dieser Gyldén'schen Definition entsprechend, muss also sein:

$$\eta\cos\{(1-\varsigma)v-\pi\} = \varkappa\cos\{v-(\varsigma v+\Gamma)\} + \Sigma\varkappa_n\cos\{v-(\varsigma_n v+\Gamma_n)\}; \tag{93}$$

das ist aber der Fall, wenn:

$$\eta\cos(\varsigma v+\pi)\cos v+\eta\sin(\varsigma v+\pi)\sin v = \varkappa\cos(\varsigma v+\Gamma)\cos v+\varkappa\sin(\varsigma v+\Gamma)\sin v$$
$$+\Sigma\varkappa_n\cos(\varsigma_n v+\Gamma_n)\cos v+\Sigma\varkappa_n\sin(\varsigma_n v+\Gamma_n)\sin v$$

ist. Diese Gleichung aber ist für jedes v erfüllt, wenn:

$$\left.\begin{aligned}\eta\cos(\varsigma v+\pi) &= \varkappa\cos(\varsigma v+\Gamma)+\Sigma\varkappa_n\cos(\varsigma_n v+\Gamma_n)\\ \eta\sin(\varsigma v+\pi) &= \varkappa\sin(\varsigma v+\Gamma)+\Sigma\varkappa_n\sin(\varsigma_n v+\Gamma_n)\end{aligned}\right\} \tag{93a}$$

ist. Diese Bedingungsgleichungen von η und π kann man aber offenbar auch in anderer Form schreiben, wie sie Gyldén gleichfalls bei seinen Arbeiten voraussetzt:

$$\left.\begin{aligned}\eta\cos\pi &= \varkappa\cos\Gamma+\Sigma\varkappa_n\cos\{(\varsigma_n-\varsigma)v+\Gamma_n\}\\ \eta\sin\pi &= \varkappa\sin\Gamma+\Sigma\varkappa_n\sin\{(\varsigma_n-\varsigma)v+\Gamma_n\}\end{aligned}\right\} \tag{93b}$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned}\eta\cos(\pi-\Gamma) &= \varkappa+\Sigma\varkappa_n\cos\{(\varsigma_n-\varsigma)v-(\Gamma-\Gamma_n)\}\\ \eta\sin(\pi-\Gamma) &= \Sigma\varkappa_n\sin\{(\varsigma_n-\varsigma)v-(\Gamma-\Gamma_n)\}.\end{aligned}\right\} \tag{93c}$$

Durch diese Relationen, die also der Voraussetzung nach für η und π bestehen müssen, ist nun auch die Function η bestimmt. Man findet direct:

$$\eta^2 = \varkappa^2+\Sigma\varkappa_n^2+2\varkappa\Sigma\varkappa_n\cos\{(\varsigma-\varsigma_n)v+\Gamma-\Gamma_n\}. \tag{94}$$

Während aber in der elliptischen Bahn $e\cos\pi'$ und $e\sin\pi'$ Constante repräsentieren, stellen in der Gyldén'schen Bahn $\eta\cos\pi$ und $\eta\sin\pi$ infolge der Glieder $\varkappa_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{(\varsigma_n-\varsigma)v+\Gamma_n\}$ veränderliche Größen dar, die sich indes infolge der Kleinheit von ς nur äußerst langsam mit der Zeit verändern. Durch Einführung der langperiodischen Function η fasst also Gyldén die elementären Glieder $\varkappa\cos\{(1-\varsigma)v-\Gamma\}$ und $\Sigma\varkappa_n\cos\{(1-\varsigma_n)v-\Gamma_n\}$ in das einzige $\eta\cos\{(1-\varsigma)v-\pi\}$ zusammen. Umgekehrt ergibt sich natürlich die Gleichung (91) auch wieder aus den Definitionsgleichungen (93) von η und π indem man dieselben mit $\cos v$, bezüglich $\sin v$ multipliciert und subtrahiert.

Bei der Integration von (87) machen wir zunächst auch noch die vereinfachende Annahme, dass wir von der Saturn- und Uranus-Anziehung absehen und die Jupiterbewegung als elliptisch annehmen, weil hierdurch große Vereinfachungen in der Rechnung erzielt werden, während später, in Abtheilung *b)* auch hinsichtlich dieses Punktes die Integration strenge durchgeführt werden wird. Es wird jetzt also einfach, indem wir gleich $\Gamma_1 = \Gamma'$ schreiben, an Stelle von $\Sigma\varkappa_n\cos\{(1-\varsigma_n)v-\Gamma_n\}$ nur das einzige Glied $\varkappa_1\cos(v-\Gamma')$ treten.

Durch Differentiation des formell bekannten Integralansatzes für (ρ) aber erhält man:

$$\frac{d^2(\rho)}{dv^2} = -(1-\varsigma)^2\varkappa\cos\{(1-\varsigma)v-\Gamma\}-\varkappa_1\cos(v-\Gamma_n),$$

also:

$$\frac{d^2(\rho)}{dv^2}+(\rho)=(2\varsigma-\varsigma^2)\varkappa\cos\{(1-\varsigma)v-\Gamma\}.$$

Die Differentialgleichung (87) aber wird, da jetzt:

$$\eta'\cos v_1=\varkappa'\cos(v-\Gamma')$$

ist:

$$\frac{d^2(\rho)}{dv^2}+(\rho)=P_{\mathrm{I}}^{(1)}\varkappa\cos\{(1-\varsigma)v-\Gamma\}+P_{\mathrm{I}}^{(1)}\varkappa_1\cos(v-\Gamma')+P_{\mathrm{I}}^{(2)}\varkappa'\cos(v-\Gamma'). \tag{95}$$

Daher hat man:

$$(2\varsigma-\varsigma^2).\varkappa=P_{\mathrm{I}}^{(1)}.\varkappa \tag{96}$$

$$P_{\mathrm{I}}^{(1)}\varkappa_1=-P_{\mathrm{I}}^{(2)}\varkappa'. \tag{97}$$

Die erste dieser beiden Bedingungen muss, da $\varkappa$ Integrationsconstante ist, für jeden $\varkappa$-Wert erfüllt sein, und somit ergibt sich als Bestimmungsgleichung für ς:

$$\varsigma^2-2\varsigma+P_{\mathrm{I}}^{(1)}=0 \tag{98}$$

oder schon sehr genähert:

$$\varsigma=\frac{1}{2}P_{\mathrm{I}}^{(1)}. \tag{99}$$

Die Bedingungsgleichung für $\varkappa_1$ hingegen wird:

$$\varkappa_1=-\frac{P_{\mathrm{I}}^{(2)}}{P_{\mathrm{I}}^{(1)}}\varkappa'=-\frac{\varkappa'P_{\mathrm{I}}^{(2)}}{2\varsigma-\varsigma^2}. \tag{100}$$

Zugleich erkennt man, da $P_{\mathrm{I}}^{(1)}$ und $P_{\mathrm{I}}^{(2)}$ beide von der Ordnung der störenden Masse sind, dass thatsächlich, wie früher behauptet:

$$\varsigma \asymp m'$$

ist. Hingegen wird:

$$\varkappa \asymp \frac{m'}{m'},$$

d. h. elementär, da es die störende Masse nicht mehr enthält; und da auch $\varkappa$ und Γ als Integrationsconstanten m' nicht enthalten, so enthält in (ρ) allein ς die störende Masse.

Das Integral der Differentialgleichung (87) ist also, wenn man die Jupiterbewegung als elliptisch ansieht, gegeben durch:

$$(\rho)=\eta\cos v=\varkappa\cos\{(1-\varsigma)v-\Gamma\}+\varkappa_1\cos(v-\Gamma_{\eta}),$$

wobei:

$$\varsigma=\frac{1}{2}P_{\mathrm{I}}^{(1)};\qquad \varkappa_1=-\frac{\varkappa'P_{\mathrm{I}}^{(2)}}{2\varsigma-\varsigma^2}$$

und:

$$\left.\begin{aligned}P_{\mathrm{I}}^{(1)}&=2a_2-p_2+\frac{1}{2}\{g_1\beta_4+(g_2+q_4)\beta_1\}+(a_1-p_1)\alpha_2-\zeta\gamma_2\\ P_{\mathrm{I}}^{(2)}&=2a_3-p_3+\frac{1}{2}\{g_1\beta_5+(g_3+q_5)\beta_1\}+(a_1-p_1)\alpha_3-\zeta\gamma_3\\ \zeta&=-3\mu\beta_1\left(1+\frac{1}{2}\delta_1\right)\end{aligned}\right\} \tag{101}$$

ist, wo ferner die Excentricität und Perihellänge Jupiters, $\varkappa'$ und Γ' aus der Jupitertheorie bekannt und die Integrationsconstanten $\varkappa$ und Γ, wie wir später zeigen werden, aus den Beobachtungen zu bestimmen sind. Damit das Integral (101) vollständig bekannt und für Hilda numerisch berechenbar sei, müssen noch die Unbekannten β_2 bis β_5, die ihrerseits die a, α und γ ergeben, bekannt sein, zu deren Bestimmung wir nun übergehen.

2*b*. Integration der Differentialgleichung für *R*.

Die Differentialgleichung für R lautet ja:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2R}{dv^2}+R = P_0+P_0^{(1)}\cos 3w+P_1^{(3)}\eta\cos(3w-\mathrm{v})+P_1^{(5)}\eta\cos(6w-\mathrm{v})\\ +P_1^{(4)}\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)+P_1^{(6)}\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1),\end{aligned}\right\}\quad(102)$$

wobei die Coefficienten der rechten Seite durch die Relationen (90) gegeben sind, und wir die Glieder 0ten Grades nochmals mitgeschrieben haben, wiewohl sie schon aus Abtheilung A. bekannt sind.

Durch Differentiation des für die Glieder ersten Grades formell bekannten Integralansatzes ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{dR_1}{dv} = &-(\delta_1+\varsigma)\beta_2\eta\sin(3w-\mathrm{v})-(1+2\delta_1+\varsigma)\beta_4\eta\sin(6w-\mathrm{v})\\ &-(\delta_1+\varsigma_1)\beta_3\eta'\sin(3w-\mathrm{v}_1)-(1+2\delta_1+\varsigma_1)\beta_5\eta'\sin(6w-\mathrm{v}_1),\end{aligned}$$

also:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2R_1}{dv^2}+R_1 = &\{1-(\delta_1+\varsigma)^2\}\beta_2\eta\cos(3w-\mathrm{v})+\{1-(1+2\delta_1+\varsigma)^2\}\beta_4\eta\cos(6w-\mathrm{v})\\ &+\{1-(\delta_1+\varsigma_1)^2\}\beta_3\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)+\{1-(1+2\delta_1+\varsigma_1)^2\}\beta_5\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1).\end{aligned}\right\}\quad(103)$$

Mithin erhält man folgende Bestimmungsgleichungen für die vier Unbekannten β:

$$\left.\begin{aligned}\{1-(\delta_1+\varsigma)^2\}\beta_2 &= 2\alpha_2-p_4+\frac{1}{2}q_1\\ \{1-(\delta_1+\varsigma_1)^2\}\beta_3 &= 2\alpha_3-p_5\\ \{1-(1+2\delta_1+\varsigma)^2\}\beta_4 &= 2a_4-p_6+\frac{1}{2}g_1+\frac{1}{2}\beta_1(g_4-q_4)+\alpha_2(a_1-p_1)-\zeta'\gamma_2\\ \{1-(1+2\delta_1+\varsigma_1)^2\}\beta_5 &= 2a_5-p_7+\frac{1}{2}\beta_1(g_5-q_5)+\alpha_3(a_1-p_1)-\zeta'\gamma_3.\end{aligned}\right\}\quad(104)$$

Um in diesen vier Gleichungen $\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ als die einzigen Unbekannten zu haben und dieselben somit wirklich bestimmen zu können, haben wir in (104) für die a und α ihre Werte aus (75) und für die q, p, g ihre Werte nach (14), (18) und (22) factisch einzusetzen. Zuvor aber wollen wir noch γ_2 und γ_3 als Functionen der β ausdrücken.

Aus:

$$\frac{dT}{dv} = S-2R-2RS+3R^2+(6R-2S)\eta\cos\mathrm{v}$$

erhält man, wenn man bloß die langperiodischen Glieder in S und R berücksichtigt:

$$\begin{aligned}\frac{dT_l}{dv} = &(\alpha_2-2\beta_2+3\beta_1\beta_1+3\beta_1-a_1)\eta\cos(3w-\mathrm{v})\\ &+(\alpha_3-2\beta_3+3\beta_1\beta_5)\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)\end{aligned}$$

So findet man mit Hinblick auf (14), (76) und (85):

$$\gamma_2 = \frac{q_4^{(0)} + q_4^{(1)}\beta_1 + q_4^{(4)}\beta_4}{\delta_1 + \varsigma} - 2\beta_2 + 3\beta_1\beta_4 + 3\beta_1 - a_1$$

$$\gamma_3 = \frac{q_5^{(0)} + q_5^{(1)}\beta_1 + q_5^{(5)}\beta_5}{\delta_1 + \varsigma_1} - 2\beta_3 + 3\beta_1\beta_5$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2 &= \gamma_2^{(0)} - 2\beta_2 + \gamma_2^{(4)}\beta_4 \\ \gamma_3 &= \gamma_3^{(0)} - 2\beta_3 + \gamma_3^{(5)}\beta_5, \end{aligned}\right\} \qquad (105)$$

wobei bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2^{(0)} &= 3\beta_1 - a_1 + \frac{q_4^{(0)} + q_4^{(1)}\beta_1}{\delta_1 + \varsigma}; \quad & \gamma_2^{(4)} &= 3\beta_1 + \frac{q_4^{(4)}}{\delta_1 + \varsigma} \\ \gamma_3^{(0)} &= \frac{q_5^{(0)} + q_5^{(1)}\beta_1}{\delta_1 + \varsigma_1}; & \gamma_3^{(5)} &= 3\beta_1 + \frac{q_5^{(5)}}{\delta_1 + \varsigma_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

Wir deuten nun die Transformation der Gleichungen (104) beispielsweise bei der dritten Gleichung an. Zunächst wird offenbar:

$$\{1 - (1 + 2\delta_1)^2\}\beta_4 = \frac{2q_6}{1 + 2\delta_1} - p_6 + \frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}\beta_1(g_4 - q_4)$$
$$+ \alpha_2\left(a_1 - p_1 + \frac{3q_1}{1 + 2\delta_1}\right) + \gamma_2\left(\frac{3\mu a_1}{1 + 2\delta_1} - \zeta'\right)$$

oder, mit Hinblick auf die für q_6, p_6, α_2 und γ_2 gefundenen Werte:

$$\{1 - (1 + 2\delta_1)^2\}\beta_4 = \frac{2(q_6^{(0)} + q_6^{(1)}\beta_1)}{1 + 2\delta_1} + \frac{2q_6^{(2)}\beta_2}{1 + 2\delta_1} - p_6^{(0)} - p_6^{(1)}\beta_1$$
$$- p_6^{(2)}\beta_2 - p_6^{(4)}\beta_4 + \frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}\beta_1(g_4 - q_4) +$$
$$+ \left(a_1 - p_1 + \frac{3q_1}{1 + 2\delta_1}\right)\frac{q_4^{(0)} + q_4^{(1)}\beta_1}{\delta_1 + \varsigma} + \left(a_1 - p_1 + \frac{3q_1}{1 + 2\delta_1}\right)\frac{q_4^{(4)}\beta_4}{\delta_1 + \varsigma}$$
$$+ \xi\gamma_2^{(0)} - 2\xi\beta_2 + \xi\gamma_2^{(4)}\beta_4,$$

wo:

$$\frac{3\mu a_1}{1 + 2\delta_1} - \zeta' = \xi$$

gesetzt ist. Vernachlässigt man jetzt rechts, außer im ersten Gliede, bezüglich $2\delta_1$ gegen 1 und ς gegen δ_1 und bedenkt, dass nach dem früheren:

$$q_4 = q_4^{(0)} + \text{II}^{\text{ter}} \text{ Ordnung}$$
$$g_4 = g_4^{(0)} + \text{II}^{\text{ter}} \text{ Ordnung}$$

ist, so folgt, wenn man alle Glieder, die β_2 und β_4 enthalten, auf die linke Seite bringt und zur Abkürzung setzt:

$$a_1 - p_1 + 3q_1 = F$$

folgende Gleichung:

$$\left\{1 - (1 + 2\delta_1)^2 + p_6^{(4)} - \frac{F}{\delta_1}q_4^{(4)} - \xi\gamma_2^{(4)}\right\}\beta_4 + \{p_6^{(2)} - 2q_6^{(2)} + 2\xi\}\beta_2 =$$
$$= \frac{2(q_6^{(0)} + q_6^{(1)}\beta_1)}{1 + 2\delta_1} - p_6^{(0)} - p_6^{(1)}\beta_1 + \frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}\beta_1(g_4^{(0)} - q_4^{(0)}) + \frac{F(q_4^{(0)} + q_4^{(1)}\beta_1)}{\delta_1} + \xi\gamma_2^{(0)}.$$

In dieser Gleichung sind jetzt aber alle auftretenden Größen, außer den β, bekannte Functionen der Entwickelungscoefficienten A und B der partiellen Derivierten der Störungsfunction, gegeben durch die Gleichungen (15), (19) und (23). Die β sind allein die Unbekannten.

In analoger Weise findet man in toto:

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{I.}\quad (1-\delta_1^2)\beta_2-\frac{2\,q_4^{(4)}}{\delta_1}\beta_4=\frac{2(q_4^{(0)}+q_4^{(1)}\beta_1)}{\delta_1+\varsigma}-p_4^{(0)}+\frac{1}{2}\,q_1\\
&\text{II.}\quad (1-\delta_1^2)\beta_3-\frac{2\,q_5^{(5)}}{\delta_1}\beta_5=\frac{2(q_5^{(0)}+q_5^{(1)}\beta_1)}{\delta_1+\varsigma_1}-p_5^{(0)}\\
&\text{III.}\quad \{p_6^{(2)}-2\,q_6^{(2)}+2\xi\}\,\beta_2+\left\{1-(1+2\delta_1)^2+p_6^{(4)}-\frac{F}{\delta_1}\,q_4^{(4)}-\xi\gamma_2^{(4)}\right\}\beta_4=\\
&\qquad=\frac{2(q_6^{(0)}+q_6^{(1)}\beta_1)}{1+2\delta_1}-p_6^{(0)}-p_6^{(1)}\beta_1+\frac{1}{2}\,g_1+\frac{1}{2}\,\beta_1(g_4^{(0)}-q_4^{(0)})+\frac{F(q_4^{(0)}+q_4^{(1)}\beta_1)}{\delta_1}+\xi\gamma_2^{(0)}\\
&\text{IV.}\quad \{p_7^{(3)}-2\,q_7^{(3)}+2\xi\}\,\beta_3+\left\{1-(1+2\delta_1)^2+p_7^{(5)}-\frac{F}{\delta_1}\,q_5^{(5)}-\xi\gamma_3^{(5)}\right\}\beta_5=\\
&\qquad=\frac{2(q_7^{(0)}+q_7^{(1)}\beta_1)}{1+2\delta_1}-p_7^{(0)}-p_7^{(1)}\beta_1+\frac{1}{2}\,\beta_1(g_5^{(0)}-q_5^{(0)})+\frac{F(q_5^{(0)}+q_5^{(1)}\beta_1)}{\delta_1}+\xi\gamma_3^{(0)}.
\end{aligned}\right\}\quad(107)
$$

Diese Gleichungen, aus denen für einen bestimmten Wert des Verhältnisses der mittleren Entfernungen, α, die gesuchten Unbekannten β numerisch berechenbar sind, aber kann man jetzt bei einer genäherten Integration noch bedeutend vereinfachen. Da nach den Relationen (16) $q_4^{(4)}=q_5^{(5)}$ ist, so folgt, bei Vernachlässigung der kleinen Größen ς und ς_1 aus den Gleichungen (106) offenbar:

$$\gamma_2^{(4)}=\gamma_3^{(5)},$$

wodurch für die numerische Rechnung eine wesentliche Vereinfachung erzielt wird. Die fundamentalen Bestimmungsgleichungen I bis IV für die β werden dann nämlich:

$$
\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} c_1\beta_2+c_2\beta_4&=C_1\\ c_1\beta_3+c_2\beta_5&=C_2\end{aligned}\right\}\qquad
\left.\begin{aligned} c_1'\beta_2+c_2'\beta_4&=C_1'\\ c_1'\beta_3+c_2'\beta_5&=C_2'\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(108)
$$

und es ist einfach, da nach (16) und (20): $q_6^{(2)}=q_7^{(3)},\ p_6^{(2)}=p_7^{(3)},\ p_6^{(4)}=p_7^{(5)}$ ist:

$$
\left.\begin{aligned}
&c_1=(1-\delta_1^2);\qquad c_1'=-2\,q_6^{(2)}+p_6^{(2)}+2\xi\\
&c_2=-\frac{2\,q_4^{(4)}}{\delta_1};\qquad c_2'=1-(1+2\delta_1)^2+p_6^{(4)}-\frac{F}{\delta_1}\,q_4^{(4)}-\xi\gamma_2^{(4)}\\
&C_1=\frac{2(q_4^{(0)}+q_4^{(1)}\beta_1)}{\delta_1+\varsigma}-p_4^{(0)}+\frac{1}{2}\,q_1;\qquad C_2=\frac{2(q_5^{(0)}+q_5^{(2)}\beta_1)}{\delta_1+\varsigma_1}-p_5^{(0)}\\
&C_1'=\frac{2(q_6^{(0)}+q_6^{(1)}\beta_1)}{1+2\delta_1}-p_6^{(0)}-p_6^{(1)}\beta_1+\frac{1}{2}\,g_1+\frac{1}{2}\,\beta_1(g_4^{(0)}-q_4^{(1)})+\frac{F(q_4^{(0)}+q_4^{(1)}\beta_1)}{\delta_1}+\xi\gamma_2^{(0)}\\
&C_2'=\frac{2(q_7^{(0)}+q_7^{(1)}\beta_1)}{1+2\delta_1}-p_7^{(0)}-p_7^{(1)}\beta_1+\frac{1}{2}\,\beta_1(g_5^{(0)}-q_5^{(0)})+\frac{F(q_5^{(0)}+q_5^{(1)}\beta_1)}{\delta_1}+\xi\gamma_3^{(0)},
\end{aligned}\right\}\quad(109)
$$

wobei bedeutet:

$$
\left.\begin{aligned}
\xi&=\frac{3\mu.a_1}{1+2\delta_1}-3\mu\beta_1\left(1+\frac{1}{2}\,\delta_1\right)\\
F&=a_1-p_1+3q_1\\
\gamma_2^{(0)}&=3\beta_1-a_1+\frac{q_4^{(0)}+q_4^{(1)}\beta_1}{\delta_1+\varsigma}\\
\gamma_3^{(0)}&=\frac{q_5^{(0)}+q_5^{(1)}\beta_1}{\delta_1+\varsigma_1}
\end{aligned}\right\}\quad(110)
$$

Zu bemerken ist noch, dass der durch die Vernachlässigung von ς und ς_1 in den β entstandene Fehler $\frac{m'\varsigma}{\delta_1^2}$ also von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ ist.

In den vier Gleichungen (107), respective (108) sind nun also $\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ die einzigen Unbekannten, während alle übrigen Größen gegebene Functionen der numerisch berechenbaren Entwickelungscoefficienten A und B der Derivierten der Störungsfunction sind. Die Zahlenwerte der β sind offenbar aus unseren Gleichungen (107) durch Einsetzen der für die A und B gefundenen Werte auf Grund der Gleichungen (14) bis (23) unschwer zu gewinnen. Sie werden später für den Planeten Hilda von uns abgeleitet werden. Das Integral der charakteristischen Differentialgleichung (102):

$$
\begin{aligned}
R_1 = b_0 + \beta_1 \cos 3w + \beta_2 \eta \cos(3w - \mathrm{v}) + \beta_4 \eta \cos(6w - \mathrm{v}) \\
+ \beta_3 \eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1) + \beta_5 \eta' \cos(6w - \mathrm{v}_1)
\end{aligned}
$$

ist mithin nach Einsetzen der für die β gefundenen Zahlenwerte vollständig bekannt, da auch b_0 und β_1 bestimmbar sind, wie noch näher im Capitel V gezeigt wird.

Nachdem die β gefunden, sind aber auch die Coefficienten $P_1^{(1)}$ und $P_1^{(2)}$ in (101), also das Integral (ρ), und ebenso die Coefficienten in (76), also auch das Integral S vollständig bekannt. Denn η und π sind durch die Gleichungen (93) bestimmt und η' und π_1 durch analoge Gleichungen, die in Abtheilung *b)* abgeleitet werden. Die Argumente v und w aber ergeben sich gleichfalls für bestimmte Epochen als gegebene Größen, wie die spätere numerische Rechnung zeigen wird.

Die gewöhnlichen Glieder in R schließlich ergeben sich einfach aus folgender Gleichung (cf. »Kleine Planeten«, S. 100), die für den Typus $\frac{2}{3}$ modificiert ist:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{d^2R}{dv^2} + R &= 2S_1 \{P_1 + Q_0 \eta \sin \mathrm{v}\} \\
&= \sum_1^{\infty} {}_n \{ b_{n.1.0}^{(+1)} \eta \cos(nw + \mathrm{v}) + b_{n.1.0}^{(-1)} \eta \cos(nw - \mathrm{v}) \\
&\quad + b_{n.0.1}^{(+1)} \eta' \cos(nw + \mathrm{v}_1) + b_{n.0.1}^{(-1)} \eta' \cos(nw - \mathrm{v}_1) \},
\end{aligned}
\right\} \qquad (111)
$$

wo:

$$
\left.
\begin{aligned}
b_{n.1.0}^{(+1)} &= 2S_{n.1.0}^{(+1)} - B_{n.1.0}^{(+1)} - \frac{1}{2} A_{n.0.0}; & b_{n.0.1}^{(+1)} &= 2S_{n.0.1}^{(+1)} - B_{n.0.1}^{(+1)} \\
b_{n.1.0}^{(-1)} &= 2S_{n.1.0}^{(-1)} - B_{n.1.0}^{(-1)} + \frac{1}{2} A_{n.0.0}; & b_{n.0.1}^{(-1)} &= 2S_{n.0.1}^{(-1)} - B_{n.0.1}^{(-1)},
\end{aligned}
\right\} \qquad (112)
$$

also, indem man nach der Variation der Constanten integriert (cf. die allgemeine Methode in Abtheilung *b*.2, Integration der Differentialgleichung für ρ), aus:

$$
\left.
\begin{aligned}
R_3 = \sum_1^{\infty} {}_n \{ & R_{n.1.0}^{(+1)} \eta \cos(nw + \mathrm{v}) + R_{n.1.0}^{(-1)} \eta \cos(nw - \mathrm{v}) \\
& + R_{n.0.1}^{(+1)} \eta' \cos(nw + \mathrm{v}_1) + R_{n.0.1}^{(-1)} \eta' \cos(nw - \mathrm{v}_1),
\end{aligned}
\right\} \qquad (113)
$$

wo:

$$
\left.
\begin{aligned}
R_{n.1.0}^{(+1)} &= \frac{b_{n.1.0}^{(+1)}}{1 - \left\{\frac{n}{3}(1+\delta_1) + 1\right\}^2}; & R_{n.0.1}^{(+1)} &= \frac{b_{n.0.1}^{(+1)}}{1 - \left\{\frac{n}{3}(1+\delta_1) + 1\right\}^2} \\
R_{n.1.0}^{(-1)} &= \frac{b_{n.1.0}^{(-1)}}{1 - \left\{\frac{n}{3}(1+\delta_1) - 1\right\}^2}; & R_{n.0.1}^{(-1)} &= \frac{b_{n.0.1}^{(-1)}}{1 - \left\{\frac{n}{3}(1+\delta_1) - 1\right\}^2}
\end{aligned}
\right\} \qquad (114)
$$

Auf Grund von (112) berechnet man (114) und damit das Integral (113). Die S in (112) sind aus dem früheren bekannt und durch die Relationen (80) gegeben. Die Summe in (113) enthält nicht $n = 0$, weil dieses n ja die elementären Glieder liefert und außerdem ist $n \neq 3, 6$.

---

3. Integration der Differentialgleichung für T.

Die Differentialgleichung für T lautete bis inclusive zum ersten Grade:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dv} &= S-2R-2RS+3R^2+3SR^2-4R^3 \\ &\quad + \{6R-2S-12R^2+6RS\}\eta\cos \mathrm{v}, \end{aligned} \tag{115}$$

wobei wir also beim 0^{ten} Grad bis zu Gliedern dritter Ordnung gegangen sind, beim ersten Grade aber nur solche der ersten und zweiten Ordnung mitnehmen. Setzt man für S und R ihre Werte ein, so erhält man analog wie bei S als zu integrierende Differentialgleichung wieder die typische Form:

$$\frac{dT}{dv} = \Sigma\, T_n \cos(\lambda_n v + B_n)$$

mit dem Integral:

$$T = \sum \frac{T_n}{\lambda_n} \sin(\lambda_n v + B_n).$$

Und zwar werden bei der Integration nach dem im Capitel III Gesagten die für $\lambda = 0$ auftretenden langperiodischen Glieder der Form C vergrößert. Außerdem aber gibt offenbar der charakteristische Theil von R, der ja groß ist, in Multiplication mit $\eta\cos\mathrm{v}$ auch große Glieder, die zwar gewöhnlich sind, aber eben weil sie groß sind, gleich von vorneherein mitgenommen werden müssen. Denn es ist z. B. in:

$$6R_0\eta\cos\mathrm{v} = 6\beta_1\eta\cos 3w\cos\mathrm{v} = 3\beta_1\eta\cos(3w-\mathrm{v})+3\beta_1\eta\cos(3w+\mathrm{v})$$

das erste Glied rechts charakteristisch, das zweite zwar gewöhnlich dem Argument nach, indes speciell bei Hilda auch groß, nämlich von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$, also ebenso groß wie das charakteristische Glied.

Bei Vernachlässigung aller überflüssigen Glieder findet man für den Typus $\left(\frac{2}{3}\right)$ innerhalb der vorgesetzten Genauigkeitsgrenze, indem man also beim ersten Grad Glieder von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$, nur wenn sie von der Form C sind, mitnimmt, sonst aber vernachlässigt; Glieder von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ indes mitnimmt, und zwar auch die gewöhnlichen, für Hilda großen Glieder der Argumente $6w$, $9w-\mathrm{v}$, $9w-\mathrm{v}_1$, insofern sie von dieser Ordnung sind, sowie das besonders große gewöhnliche Glied vom Argument $3w+\mathrm{v}$, das von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$ ist:

$$\begin{aligned} S &= a_0+a_1\cos 3w+a_2\eta\cos\mathrm{v}+\alpha_2\eta\cos(3w-\mathrm{v})+a_1\eta\cos(6w-\mathrm{v}) \\ &\quad +a_3\eta'\cos\mathrm{v}_1+\alpha_3\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)+a_5\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1) \\ -2R &= -2b_0-2\beta_1\cos 3w-2\beta_2\eta\cos(3w-\mathrm{v})-2\beta_1\eta\cos(6w-\mathrm{v}) \\ &\quad -2\beta_3\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)-2\beta_5\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1) \end{aligned} \tag{115a}$$

$$
\left.\begin{aligned}
-2RS = {} & a_1\beta_1 - 2a_0\beta_1 \cos 3w - \alpha_2\beta_1\eta \cos \mathrm{v} - \alpha_2\beta_1\eta \cos(6w-\mathrm{v}) \\
& - \alpha_3\beta_1\eta' \cos \mathrm{v}_1 - \alpha_3\beta_1\eta' \cos(6w-\mathrm{v}_1) \\
& - (2a_0\beta_2 + 2b_0\alpha_2 + a_2\beta_1 + a_1\beta_4 + a_4\beta_1)\eta \cos(3w-\mathrm{v}) \\
& - (2a_0\beta_3 + 2b_0\alpha_3 + a_3\beta_1 + a_1\beta_5 + a_5\beta_1)\eta' \cos(3w-\mathrm{v}_1) \\
3R^2 = {} & 6b_0\beta_1 \cos 3w + \frac{3}{2}\beta_1^2 + \frac{3}{2}\beta_1^2 \cos 6w + 3\beta_1\beta_2\eta \cos \mathrm{v} + 3\beta_1\beta_2\eta \cos(6w-\mathrm{v}) \\
& + 3\beta_1\beta_3\eta' \cos \mathrm{v}_1 + 3\beta_1\beta_3\eta' \cos(6w-\mathrm{v}_1) \\
& + (6b_0\beta_2 + 3\beta_1\beta_4)\eta \cos(3w-\mathrm{v}) \\
& + (6b_0\beta_3 + 3\beta_1\beta_5)\eta' \cos(3w-\mathrm{v}_1) \\
& + 3\beta_1\beta_4\eta \cos(9w-\mathrm{v}) \\
& + 3\beta_1\beta_5\eta' \cos(9w-\mathrm{v}_1) \\
-4R^3 = {} & -6b_0\beta_1^2 - 3\beta_1^3 \cos 3w - 6b_0\beta_1^2 \cos 6w - \beta_1^3 \cos 9w \\
3SR^2 = {} & \frac{3}{2} a_0\beta_1^2 + \frac{3}{2} a_1\beta_1^2 \cos 3w + \frac{3}{2} a_0\beta_1^2 \cos 6w + \frac{3}{4} a_1\beta_1^2 \cos 9w \\
6R\eta \cos \mathrm{v} = {} & 3\beta_1\eta \cos(3w-\mathrm{v}) + 6b_0\eta \cos \mathrm{v} + 3R_{6.0.0}\,\eta \cos(6w-\mathrm{v}) \\
& + 3\beta_1\eta \cos(3w+\mathrm{v}),
\end{aligned}\right\} \qquad (115a)
$$

wo das dritte charakteristische Glied rechts aus dem Product des gewöhnlichen Gliedes $R_{6.0.0} \cos 6w$ mit $\eta \cos \mathrm{v}$ entsteht. Ebenso entsteht aus dem gewöhnlichen Glied $S_{6.0.0} \cos 6w$ in Multiplication mit $\eta \cos \mathrm{v}$ das charakteristische Glied $S_{6.0.0}\,\eta \cos(6w-\mathrm{v})$;

$$
\begin{aligned}
-2S\eta \cos \mathrm{v} = {} & -2a_0\eta \cos \mathrm{v} - S_{6.0.0}\,\eta \cos(6w-\mathrm{v}) \\
& - a_1\eta \cos(3w-\mathrm{v}) - a_1\eta \cos(3w+\mathrm{v}) \\
-12R^2\eta \cos \mathrm{v} = {} & -6\beta_1^2\eta \cos \mathrm{v} - 3\beta_1^2\eta \cos(6w-\mathrm{v}) - 3\beta_1^2\eta \cos(6w+\mathrm{v}) \\
6RS\eta \cos \mathrm{v} = {} & 3a_0\beta_1\eta \cos(3w-\mathrm{v}),
\end{aligned}
$$

indem hierin z. B. das Glied $3a_1\beta_1\eta \cos \mathrm{v} = \frac{m'^2}{\delta_1}$, weil nicht von der Form C, nicht mitgenommen ist, etc. Das Glied vom Argument $(6w+\mathrm{v})$ aber ist auch noch ziemlich groß und mitzunehmen.

Außer allen diesen Gliedern sind auch hier wieder noch die exargumentalen mitzunehmen. Nun war ja:

$$T = T_l + T_k,$$

wo aber T_l keine Glieder 0^{ten} Grades enthielt. Bezeichne P' den Pars exarg. T_k, so setzen wir:

$$T_k = \gamma_1 \sin 3w + P'$$

und erhalten:

$$\frac{dT_k}{dv} = (1+\delta_1)\gamma_1 \cos 3w - 3\mu\gamma_1 \frac{dT_l}{dv} \cos 3w + \frac{dP'}{dv},$$

also:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dP'}{dv} = {} & \frac{3}{2}\mu\gamma_1\gamma_2\eta \cos \mathrm{v} + \frac{3}{2}\mu\gamma_1\gamma_2\eta \cos(6w-\mathrm{v}) \\
& + \frac{3}{2}\mu\gamma_1\gamma_3\eta' \cos \mathrm{v}_1 + \frac{3}{2}\mu\gamma_1\gamma_3\eta' \cos(6w-\mathrm{v}_1).
\end{aligned}\right\} \qquad (116)
$$

Fassen wir sämmtliche Glieder gleicher Argumente zusammen, so ergibt sich die folgende zu integrierende Differentialgleichung, indem wir der Vollständigkeit halber die Glieder nullten Grades nochmals mitschreiben:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dT}{dv}\right) = T_0 &+ T_0^{(1)}\cos 3w + T_0^{(2)}\cos 6w \qquad\qquad + T_0^{(3)}\cos 9w \\ &+ T_1^{(1)}\eta\cos \mathrm{v} \quad + T_1^{(3)}\eta\cos(3w-\mathrm{v}) \quad + T_1^{(5)}\eta\cos(6w-\mathrm{v}) \\ &+ T_1^{(2)}\eta'\cos \mathrm{v}_1 \quad + T_1^{(4)}\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1) \quad + T_1^{(6)}\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1) \\ &+ T_1^{(7)}\eta\cos(3w+\mathrm{v}) + T_1^{(8)}\eta\cos(9w-\mathrm{v}) + T_1^{(9)}\eta'\cos(9w-\mathrm{v}_1) \\ &+ T_1^{(10)}\eta\cos(6w+\mathrm{v}),\end{aligned}\right\} \tag{117}$$

wo die Klammer um $\frac{dT}{dv}$ bedeutet, dass bei der Integration V (oder T_l) in den Argumenten als constant anzusehen ist, da in (117) die exargumentalen Glieder bereits inbegriffen sind. Hier sind also die Glieder vom Argument v von elementärer Form (nicht aber elementär), diejenigen vom Argument $(3w-\mathrm{v})$ und $(6w-\mathrm{v})$ bezüglich langperiodisch und kurzperiodisch charakteristisch, die übrigen gewöhnlich, aber groß, und zwar ist das Glied vom Argument $(3w+\mathrm{v})$ besonders groß bei Hilda. Ein solches Glied wie das Glied $T_1^{(7)}\eta\cos(3w+\mathrm{v})$, welches ein gewöhnliches Argument hat, aber von der Ordnung der charakteristischen Glieder ist, d. h. $= \frac{m'}{\delta_1}$, nennt man ein »coordiniertes« Glied. Beim ersten Grad existiert also nur ein solches Glied, beim zweiten Grad indessen gibt es, wie wir sehen werden, mehrere. In obiger Differentialgleichung aber bedeutet:

$$\left.\begin{aligned}T_0 &= \left(a_0-2b_0-a_1\beta_1+\frac{3}{2}a_0\beta_1^2-6b_0\beta_1^2\right)+\frac{3}{2}\beta_1^2 \\ T_0^{(1)} &= a_1-2\beta_1-2a_0\beta_1+6b_0\beta_1+\frac{3}{2}a_1\beta_1^2-3\beta_1^3 \\ T_0^{(2)} &= \frac{3}{2}\beta_1^2+\frac{3}{2}a_0\beta_1^2-6b_0\beta_1^2 \\ T_0^{(3)} &= -\beta_1^3+\frac{3}{4}a_1\beta_1^2 \\ T_1^{(1)} &= a_2-\alpha_2\beta_1+3\beta_1\beta_2+6b_0-2a_0-6\beta_1^2+\frac{3}{2}\mu\gamma_1\gamma_2 \\ T_1^{(2)} &= a_3-\alpha_3\beta_1+3\beta_1\beta_3+\frac{3}{2}\mu\gamma_1\gamma_3 \\ T_1^{(3)} &= \alpha_2-2\beta_2-2a_0\beta_2-2b_0\alpha_2-a_2\beta_1-a_1\beta_4-a_4\beta_1 \\ &\quad +6b_0\beta_2+3\beta_1\beta_4+3\beta_1+3a_0\beta_1-a_1 \\ T_1^{(4)} &= \alpha_3-2\beta_3-2a_0\beta_3-2b_0\alpha_3-a_3\beta_1-a_1\beta_5-a_5\beta_1 \\ &\quad +6b_0\beta_3+3\beta_1\beta_5 \\ T_1^{(5)} &= a_4-2\beta_4-\alpha_2\beta_1+3\beta_1\beta_2-3\beta_1^2+3R_{6.0.0}-S_{6.0.0}+\frac{3}{2}\mu\gamma_1\gamma_2 \\ T_1^{(6)} &= a_5-2\beta_5-\alpha_3\beta_1+3\beta_1\beta_2+\frac{3}{2}\mu\gamma_1\gamma_3 \\ T_1^{(7)} &= 3\beta_1-a_1 \\ T_1^{(8)} &= 3\beta_1\beta_1 \\ T_1^{(9)} &= 3\beta_1\beta_5. \\ T_1^{(10)} &= -3\beta_1^2.\end{aligned}\right\} \tag{118}$$

Dabei sind also in T Glieder der Ordnung m', $\frac{m'}{\delta_1}$, $\frac{m'^2}{\delta_1}$, $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$, und hinsichtlich des 0^{ten} Grades auch noch die Glieder von der Ordnung $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$, $\frac{m'^3}{\delta_1^3}$ mitgenommen; beim ersten Grad aber sind diese letzteren Glieder, weil sie da noch mit η, respective mit η' multipliciert und somit verkleinert werden, vernachlässigt.

Im dritten Capitel hatten wir nun gefunden:

$$T = \bar{\gamma} v + T_l + T_k + T_g.$$

Daher ist:

$$\frac{dT}{dv} = \bar{\gamma} + \frac{dT_l}{dv} + \frac{dT_k}{dv} + \frac{dT_g}{dv}.$$

Es war aber:

$$\bar{\gamma} = c_0 + \gamma + \gamma_0.$$

Wenn man also, wie wir es jetzt thun, die Glieder nullten und ersten Grades allein ins Auge fasst, so ist, da γ_0 vom zweiten Grnde:

$$\bar{\gamma} = c_0 + \gamma$$

und die Beziehung:

$$\frac{dT_l}{dv} = -\gamma_0 + \left(\frac{dT}{dv}\right)_l,$$

wird jetzt einfach:

$$\frac{dT_l}{dv} = \left(\frac{dT}{dv}\right)_l.$$

Mithin ist jetzt:

$$\frac{dT}{dv} = c_0 + \gamma + \left(\frac{dT}{dv}\right)_l + \frac{dT_k}{dv} + \frac{dT_g}{dv}.$$

Bilden wir also $\frac{dT_k}{dv}$ und $\frac{dT_g}{dv}$ mit Hinblick auf die im Capitel III für $T_k = K_k$ und $T_g = K$ gefundenen Werte und nehmen an, es sei:

$$(T_l)_1 = \gamma_2' \eta \sin(3w - v) + \gamma_3' \eta' \sin(3w - v_1),$$

so findet sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dT_1}{dv} = c_0 + \gamma &+ (1+\delta_1)\gamma_1 \cos 3w + 2(1+\delta_1) g_1' \cos 6w + 3(1+\delta_1) g_2' \cos 9w \\ &+ (1-\varsigma) g_3' \eta \cos v + (\delta_1 + \varsigma)\gamma_2' \eta \cos(3w - v) + (1 + 2\delta_1 + \varsigma)\gamma_4 \eta \cos(6w - v) \\ &+ (1-\varsigma_1) g_4' \eta' \cos v_1 + (\delta_1 + \varsigma_1)\gamma_3' \eta' \cos(3w - v_1) + (1 + 2\delta_1 + \varsigma_1)\gamma_5 \eta' \cos(6w - v_1) \\ &+ (2 + \delta_1 - \varsigma)\gamma_6 \eta \cos(3w + v) + (2 + 3\delta_1 + \varsigma) g_5' \eta \cos(9w - v) \\ &+ (2 + 3\delta_1 + \varsigma_1) g_6' \eta' \cos(9w - v_1) \\ &+ (3 + 2\delta_1 - \varsigma) g_7' \eta \cos(6w + v).\end{aligned}\right\} \quad (119)$$

Das Integral ist also:

$$
\left.\begin{aligned}
T_1 = (c_0+\gamma)v + \gamma_1 \cos 3w \quad & + g_1' \cos 6w \quad + g_2' \cos 9w \\
+ g_3'\eta \cos \nu \quad & + \gamma_2'\eta \cos(3w-\nu) + \gamma_4\eta \cos(6w-\nu) \\
+ g_4'\eta' \cos \nu_1 \quad & + \gamma_3'\eta' \cos(3w-\nu_1) + \gamma_5\eta' \cos(6w-\nu_1) \\
+ \gamma_6\eta \cos(3w+\nu) & + g_5'\eta \cos(9w-\nu) + g_6'\eta' \cos(9w-\nu_1) \\
+ g_7'\eta \cos(6w+\nu), &
\end{aligned}\right\} \tag{120}
$$

wobei:

$$
\left.\begin{aligned}
& c_0+\gamma = T_0; \quad \gamma_1 = \frac{T_0^{(1)}}{1+\delta_1}; \quad g_1' = \frac{T_0^{(2)}}{2(1+\delta_1)}; \quad g_2' = \frac{T_0^{(3)}}{3(1+\delta_1)}; \\
& g_3' = \frac{T_1^{(1)}}{1-\varsigma}; \quad g_4' = \frac{T_1^{(2)}}{1-\varsigma_1}; \quad \gamma_2' = \frac{T_1^{(3)}}{\delta_1+\varsigma}; \quad \gamma_3' = \frac{T_1^{(4)}}{\delta_1+\varsigma_1}; \\
& \gamma_4 = \frac{T_1^{(5)}}{1+2\delta_1+\varsigma}; \quad \gamma_5 = \frac{T_1^{(6)}}{1+2\delta_1+\varsigma_1}; \quad \gamma_6 = \frac{T_1^{(7)}}{2+\delta_1-\varsigma}; \\
& g_5' = \frac{T_1^{(8)}}{2+3\delta_1+\varsigma}; \quad g_6' = \frac{T_1^{(9)}}{2+3\delta_1+\varsigma_1}; \quad g_7' = \frac{T_1^{(10)}}{3+2\delta_1-\varsigma}
\end{aligned}\right\} \tag{121}
$$

ist und wo die T durch (118) gegeben und sämmtlich vollständig bekannte Größen sind. Das Integral (120) ist also für Hilda numerisch auswertbar.

Die gewöhnlichen Glieder in T_1 berechnet man direct aus der Gleichung (cf. kleine Planeten pag. 102), indem man für den Typus $\frac{2}{3}$ modificiert und nicht auf die Variabilität von T_l im Winkelargument Rücksicht nimmt:

$$
\frac{dT}{dv} = S_1 - 2R_1 + (6R_0 - 2S_0)\eta \cos \nu,
$$

also aus:

$$
\left.\begin{aligned}
T_1 = \sum_1^\infty{}_n \Big\{ & T^{(+1)}_{n.1.0}\eta \sin(nw+\nu) + T^{(-1)}_{n.1.0}\eta \sin(nw-\nu) \\
& + T^{(+1)}_{n.0.1}\eta' \sin(nw+\nu_1) + T^{(-1)}_{n.0.1}\eta' \sin(nw-\nu_1) \Big\},
\end{aligned}\right\} \tag{122}
$$

wo:

$$
\left.\begin{aligned}
T^{(+1)}_{n.1.0} &= \frac{c^{(+1)}_{n.1.0}}{\frac{n}{3}(1+\delta_1)+1}; \quad & T^{(-1)}_{n.1.0} &= \frac{c^{(-1)}_{n.1.0}}{\frac{n}{3}(1+\delta_1)-1} \\
T^{(+1)}_{n.0.1} &= \frac{c^{(+1)}_{n.0.1}}{\frac{n}{3}(1+\delta_1)+1}; \quad & T^{(-1)}_{n.0.1} &= \frac{c^{(-1)}_{n.0.1}}{\frac{n}{3}(1+\delta_1)-1}
\end{aligned}\right\} \tag{123}
$$

und:

$$
\left.\begin{aligned}
c^{(+1)}_{n.1.0} &= S^{(+1)}_{n.1.0} - 2R^{(+1)}_{n.1.0} + 3R_{n.0.0} - S_{n.0.0} \\
c^{(-1)}_{n.1.0} &= S^{(-1)}_{n.1.0} - 2R^{(-1)}_{n.1.0} + 3R_{n.0.0} - S_{n.0.0} \\
c^{(+1)}_{n.0.1} &= S^{(+1)}_{n.0.1} - 2R^{(+1)}_{n.0.1}; \quad c^{(-1)}_{n.0.1} = S^{(-1)}_{n.0.1} - 2R^{(-1)}_{n.0.1}.
\end{aligned}\right\} \tag{124}
$$

ist. Dabei sind die Werte der S und R in (124) aus dem Vorhergehenden bekannt, nämlich durch die Formeln (28), (34), (80) und (114) gegeben, und es ist jetzt $n \neq 3, 6, 9$. Im übrigen sind aber, ebenso wie bei S und R, auch in T nur einige wenige gewöhnliche Glieder aus (122) mitzunehmen, wie wir bei der numerischen Rechnung sehen werden.

b) Die strenge Integration bei variabeln η, η', π, π_1.

Das allgemeine Verfahren.

In Abtheilung *a* sind wir dadurch zu den Integralen unserer Differentialgleichungen gelangt, dass wir den formell bekannten Integralansatz differentiierten und die so erhaltene Form der Differentialgleichung mit der direct abgeleiteten verglichen, wodurch sich die unbekannten Coefficienten des Integralansatzes ergaben.

In dieser Abtheilung wollen wir die Integration der Differentialgleichungen direct ausführen, was natürlich im Resultat auf ganz dasselbe hinausläuft. Nur werden wir jetzt η, η', π, π_1 als variable Größen betrachten, wie sie das in der Natur ja wirklich sind. Dabei können wir uns kürzer fassen, weil wir bereits in Besitz der zur Integration fertigen Formen der Differentialgleichungen sind, die wir einfach der Abtheilung *a* entlehnen. Hervorgehoben sei aber noch, dass die im Folgenden gegebenen Vorschriften, durch partielle Integration der Variabilität von η, η', π, π_1 Rechnung zu tragen, indem man die »Zusatzglieder« hinzufügt, auf alle Glieder anzuwenden sind, mit Ausnahme der elementären, bei denen nicht partiell integriert werden darf, sondern η und π von vorneherein als variabel anzusehen sind.

Wir haben bereits in Abtheilung *a* gesehen, wie man durch partielle Integration der Variabilität von T_l im Winkelargument der trigonometrischen Functionen Rechnung trägt und wollen nun zunächst zeigen, wie man nach Gyldén das Princip der sogenannten partiellen Integration:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{125}$$

verwertet, um die Variabilität der langperiodischen Functionen η, η', π, π_1 zu berücksichtigen. Offenbar ist, da $\mathrm{v} = (1-\varsigma)v - \pi$:

$$\int \eta \sin(nw - \mathrm{v})\,dv = \int \eta \cos\pi \sin[nw-(1-\varsigma)v]\,dv + \int \eta \sin\pi \cos[nw-(1-\varsigma)v]\,dv,$$

also:

$$\left.\begin{aligned}\int \eta \sin(nw-\mathrm{v})\,dv = \eta\cos\pi \int \sin[nw-(1-\varsigma)v]\,dv + \eta\sin\pi\int\cos[nw-(1-\varsigma)v]\,dv \\ -\int\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\int\sin[nw-(1-\varsigma)v]\,dv^2 - \int\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\int\cos[nw-(1-\varsigma)v]\,dv^2.\end{aligned}\right\} \tag{126}$$

Nach Formel (63) ist aber:

$$\left.\begin{aligned}\int {\sin \atop \cos}[nw\pm(1-\varsigma)v]\,dv = \mp\frac{1}{n(1-\mu_1)\pm(1-\varsigma)}{\cos \atop \sin}[nw\pm(1-\varsigma)v] + \\ +\frac{n\mu}{n(1-\mu_1)\pm(1-\varsigma)}\int\frac{dV}{dv}{\sin \atop \cos}[nw\pm(1-\varsigma)v]\,dv.\end{aligned}\right\} \tag{127}$$

Daher wird, wenn wir vorerst vom zweiten Glied in (126) absehen, damit das Princip deutlicher hervortritt:

$$\left.\begin{aligned}\int\eta\sin(nw-\mathrm{v})\,dv = \frac{1}{n(1-\mu_1)-(1-\varsigma)}\{-\eta\cos\pi\cos[nw-(1-\varsigma)v]+\eta\sin\pi\sin[nw-(1-\varsigma)v]\} \\ +\frac{1}{n(1-\mu_1)-(1-\varsigma)}\left\{\int\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\cos[nw-(1-\varsigma)v]\,dv - \int\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\sin[nw-(1-\varsigma)v]\,dv\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Nun kann man wieder partiell integrieren und erhält:

$$\int \frac{d\eta \cos\pi}{dv} \cos\,[nw-(1-\varsigma)v]\,dv = \frac{d\eta\cos\pi}{dv}\int \cos\,[nw-(1-\varsigma)v]\,dv - \int \frac{d^2\eta\cos\pi}{dv^2}\int \cos\,[nw-(1-\varsigma)v]\,dv^2$$

$$\int \frac{d\eta \sin\pi}{dv} \sin\,[nw-(1-\varsigma)v]\,dv = \frac{d\eta\sin\pi}{dv}\int \sin\,[nw-(1-\varsigma)v]\,dv - \int \frac{d^2\eta\sin\pi}{dv^2}\int \sin\,[nw-(1-\varsigma)v]\,dv^2.$$

Mit Hinblick auf diese Gleichungen und (127), wo wir wieder nur das erste Glied rechts ins Auge fassen, wird daher Gleichung (128):

$$\left.\begin{aligned}
&\int \eta \sin(nw-\mathrm{v})\,dv = -\frac{1}{n(1-\mu_1)-(1-\varsigma)}\,\eta\cos(nw-\mathrm{v})\\
&+\frac{1}{\{n(1-\mu_1)-(1-\varsigma)\}^2}\left\{\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\sin\,[nw-(1-\varsigma)v]+\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\cos\,[nw-(1-\varsigma)v]\right\}\\
&+\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (129)$$

wo die vernachlässigten Glieder, abgesehen von den mit $\frac{dV}{dv}$ multiplicierten (cf. 130), von der Ordnung m'^2 sind, da, wie ein Blick auf die Gleichungen (93) zeigt:

$$\frac{d^2\eta \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\pi}{dv^2} \asymp \varsigma^2 \asymp m'^2$$

ist. Bei diesem Verfahren hat man den Vortheil, dass man die Integrationen, welche η und π als Variable enthalten, ganz umgeht und statt dessen immer nur die einfachen Integrationen $\int \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw\pm v)\,dv$ auszuführen hat. Dann hat man bloß die Ableitung $\frac{d\eta \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\pi}{dv}$ zu bilden, was aber äußerst einfach ist, indem nach (93):

$$\eta \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\pi = \varkappa \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\Gamma + \sum \varkappa_n \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[(\varsigma_n-\varsigma)v+\Gamma_n],$$

also:

$$\frac{d\eta \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\pi}{dv} = \mp \sum (\varsigma_n-\varsigma)\varkappa_n \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}[(\varsigma_n-\varsigma)v+\Gamma_n]$$

ist. Betrachtete man, wie hier nebenbei bemerkt sei, die Jupiterbewegung als elliptisch, so würde:

$$\eta \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\pi = \varkappa \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\Gamma + \varkappa_1 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}(\Gamma_1-\varsigma v),$$

mithin:

$$\frac{d\eta \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\pi}{dv} = \pm\varsigma\varkappa_1 \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(\Gamma_1-\varsigma v).$$

Während aber in Wirklichkeit Γ_1 und Γ' nicht völlig, jedoch so nahe einander gleich sind, dass ihre Differenz fast unmerklich klein ist, wird jetzt in aller Strenge $\Gamma_1 = \Gamma'$ und unter dieser Voraussetzung also einfacher:

$$\eta' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\pi_1 = \varkappa' \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\Gamma'$$

also, da jetzt $\eta' = \varkappa'$ und $\pi_1 = \Gamma$ beide constant:

$$\frac{d\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\pi_1}{dv} = 0.$$

Durch diese Annahme einer elliptischen Jupiterbewegung könnte man sich also auch die im folgenden gegebenen strengen Integralformen für S und R wieder sehr vereinfachen und bewirkte dadurch einen Fehler, der erst nach etwa 400 Jahren merkbar würde. Ableiten wollen wir indes das Folgende allgemein, ohne die Beschränkung auf eine elliptische Jupiterbahn.

Wenn wir in (126) auch das zweite Glied der rechten Seite von (127), aus dem die exargumentalen Glieder entstehen, mitberücksichtigen, so setzen wir in der ersten Zeile rechts von (126) die ganze Gleichung (127) ein, in der zweiten aber genügt es, das erste Glied von (127) allein einzusetzen. So ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}\int\eta\sin(nw-\mathrm{v})\,dv = &-\frac{1}{n(1-\mu_1)-(1-\varsigma)}\,\eta\cos(nw-\mathrm{v})\\ &+\frac{n\mu}{n(1-\mu_1)-(1-\varsigma)}\left\{\eta\cos\pi\int\frac{dV}{dv}\sin[nw-(1-\varsigma)v]\,dv+\eta\sin\pi\int\frac{dV}{dv}\cos[nw-(1-\varsigma)v]\,dv\right\}\\ &+\frac{1}{n(1-\mu_1)-(1-\varsigma)}\left\{\int\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\cos[nw-(1-\varsigma)v]\,dv-\int\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\sin[nw-(1-\varsigma)v]\,dv\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(130)$$

In der zweiten Zeile kann man $\eta\cos\pi$ und $\eta\sin\pi$ als constant betrachten und erhält so:

$$\begin{aligned}\eta\cos\pi\int\frac{dV}{dv}\sin[nw-(1-\varsigma)v]\,dv+\eta\sin\pi\int\frac{dV}{dv}\cos[nw-(1-\varsigma)v]\,dv\\ =\int\eta\cos\pi\frac{dV}{dv}\sin[nw-(1-\varsigma)v]\,dv+\int\eta\sin\pi\frac{dV}{dv}\cos[nw-(1-\varsigma)v]\,dv\\ =\int\frac{dV}{dv}\eta\sin(nw-\mathrm{v})\,dv.\end{aligned}$$

In der dritten Zeile kann man $\dfrac{d\eta\cos\pi}{dv}$ und $\dfrac{d\eta\sin\pi}{dv}$ als constant ansehen, findet also:

$$\begin{aligned}\int\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\cos[nw-(1-\varsigma)v]\,dv-\int\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\sin[nw-(1-\varsigma)v]\,dv\\ =\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\int\cos[nw-(1-\varsigma)v]\,dv-\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\int\sin[nw-(1-\varsigma)v]\,dv\\ =\frac{1}{n(1-\mu_1)-(1-\varsigma)}\left\{\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\sin[nw-(1-\varsigma)v]+\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\cos[nw-(1-\varsigma)v]\right\},\end{aligned}$$

wobei V im Argument als constant angesehen, also hier keine exargumentalen Glieder berücksichtigt sind. Mithin wird (130) in toto:

$$\left.\begin{aligned}\int\eta\sin(nw-\mathrm{v})\,dv = &-\frac{1}{n(1-\mu_1)-(1-\varsigma)}\,\eta\cos(nw-\mathrm{v})\\ &+\frac{n\mu}{n(1-\mu_1)-(1-\varsigma)}\int\frac{dV}{dv}\,\eta\sin(nw-\mathrm{v})\,dv\\ &+\frac{1}{\{n(1-\mu_1)-(1-\varsigma)\}^2}\left\{\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\sin[nw-(1-\varsigma)v]+\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\cos[nw-(1-\varsigma)v]\right\}\\ &+\text{Glieder von der Ordnung } m'^2 \text{ etc.}\end{aligned}\right\}\quad(131)$$

In diesem Sinne also sind die Integrationen auszuführen. Außer den beiden Formeln:

$$
\left.
\begin{aligned}
\int \eta \sin(nw \pm \nu)\,dv &= \eta \cos\pi \int \sin[nw \pm (1-\zeta)v]\,dv \mp \eta \sin\pi \int \cos[nw \pm (1-\zeta)v]\,dv \\
&\quad - \frac{d\eta}{dv}\cos\pi \iint \sin[nw \pm (1-\zeta)v]\,dv^2 \pm \frac{d\eta}{dv}\sin\pi \iint \cos[nw \pm (1-\zeta)v]\,dv^2 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int \eta \cos(nw \pm \nu)\,dv &= \eta \cos\pi \int \cos[nw \pm (1-\zeta)v]\,dv \pm \eta \sin\pi \int \sin[nw \pm (1-\zeta)v]\,dv \\
&\quad - \frac{d\eta}{dv}\cos\pi \iint \cos[nw \pm (1-\zeta)v]\,dv^2 \mp \frac{d\eta}{dv}\sin\pi \iint \sin[nw \pm (1-\zeta)v]\,dv^2 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right\} \quad (132)
$$

brauchen wir bei Integration der Differentialgleichung für ρ noch die folgenden:

$$
\left.
\begin{aligned}
\int \eta \sin\{nw \pm (\nu+v)\}\,dv &= \eta \cos\pi \int \sin[nw \pm (2-\zeta)v]\,dv \mp \eta \sin\pi \int \cos[nw \pm (2-\zeta)v]\,dv \\
&\quad - \frac{d\eta}{dv}\cos\pi \iint \sin[nw \pm (2-\zeta)v]\,dv^2 \pm \frac{d\eta}{dv}\sin\pi \iint \cos[nw \pm (2-\zeta)v]\,dv^2 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int \eta \sin\{nw \pm (\nu-v)\}\,dv &= \eta \cos\pi \int \sin(nw \mp \zeta v)\,dv \mp \eta \sin\pi \int \cos(nw \mp \zeta v)\,dv \\
&\quad - \frac{d\eta}{dv}\cos\pi \iint \sin(nw \mp \zeta v)\,dv^2 \pm \frac{d\eta}{dv}\sin\pi \iint \cos(nw \mp \zeta v)\,dv^2 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int \eta \cos\{nw \pm (\nu+v)\}\,dv &= \eta \cos\pi \int \cos[nw \pm (2-\zeta)v]\,dv \pm \eta \sin\pi \int \sin[nw \pm (2-\zeta)v]\,dv \\
&\quad - \frac{d\eta}{dv}\cos\pi \iint \cos[nw \pm (2-\zeta)v]\,dv^2 \mp \frac{d\eta}{dv}\sin\pi \iint \sin[nw \pm (2-\zeta)v]\,dv^2 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int \eta \cos\{nw \pm (\nu-v)\}\,dv &= \eta \cos\pi \int \cos(nw \mp \zeta v)\,dv \pm \eta \sin\pi \int \sin(nw \mp \zeta v)\,dv \\
&\quad - \frac{d\eta}{dv}\cos\pi \iint \cos(nw \mp \zeta v)\,dv^2 \mp \frac{d\eta}{dv}\sin\pi \iint \sin(nw \mp \zeta v)\,dv^2 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right\} \quad (133)
$$

und schließlich:

$$
\left.
\begin{aligned}
\int \sin(nw \pm 2v)\,dv &= -\frac{1}{n(1-\mu_1) \pm 2}\cos(nw \pm 2v) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1) \pm 2}\int \frac{dV}{dv}\sin(nw \pm 2v)\,dv \\
\int \cos(nw \pm 2v)\,dv &= \frac{1}{n(1-\mu_1) \pm 2}\sin(nw \pm 2v) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1) \pm 2}\int \frac{dV}{dv}\cos(nw \pm 2v)\,dv.
\end{aligned}
\right\} \quad (134)
$$

Analoge Formeln gelten natürlich für η' und π_1.

1. Die Integration der Differentialgleichung für S.

Nach dem e en entwickelten Princip könnte man natürlich der Variabilität von η, η', π, π_1 durchweg Rechnung tragen Es soll aber nur in denjenigen Gliedern geschehen, die durch die Integration einen kleinen Divisor erhalten. In der Differentialgleichung für S waren es die Glieder der Form C, die durch den Integrationsprocess vergrößert wurden, und wir werden daher nur in diesen η, η', π, π_1 als variabel, in den übrigen Gliedern diese Größen jedoch ls constant betrachten. Als Differentialgleichung für S hatten wir gefunden:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dS}{dv} = Q_0^{(1)} \sin 3w + Q_1^{(1)}\eta \sin \mathrm{v} + Q_1^{(3)}\eta \sin (3w - \mathrm{v}) + Q_1^{(5)}\eta \sin (6w - \mathrm{v})\\ + Q_1^{(2)}\eta' \sin \mathrm{v}_1 + Q_1^{(4)}\eta' \sin (3w - \mathrm{v}_1) + Q_1^{(6)}\eta' \sin (6w - \mathrm{v}_1),\end{aligned}\right\} \tag{135}$$

wo die Q durch die Gleichungen (73) gegeben waren.

Die Integration gestaltet sich dann beispielsweise für das erste Glied der Form C in S wie folgt:

$$\begin{aligned}-q_4\int \eta \sin (3w - \mathrm{v})\,dv = -q_4\eta\cos\pi \int \sin[3w-(1-\varsigma)v]\,dv - q_4\eta \sin\pi\int\cos[3w-(1-\varsigma)v]\,dv\\ + q_4\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\iint \sin[3w-(1-\varsigma)v]\,dv^2 + q_4\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\iint\cos[3w-(1-\varsigma)v]\,dv^2.\end{aligned}$$

Da aber:

$$\int \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[3w-(1-\varsigma)v]\,dv = \mp\frac{1}{\delta_1+\varsigma}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[3w-(1-\varsigma)v]$$

$$\iint \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[3w-(1-\varsigma)v]\,dv^2 = -\frac{1}{(\delta_1+\varsigma)^2}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[3w-(1-\varsigma)v]$$

ist, so wird auch:

$$\begin{aligned}-q_4\int\eta\sin(3w-\mathrm{v})\,dv &= \frac{q_4}{\delta_1+\varsigma}\eta\cos\pi\cos[3w-(1-\varsigma)v] - \frac{q_4}{\delta_1+\varsigma}\eta\sin\pi\sin[3w-(1-\varsigma)v]\\ &\quad - \frac{q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma)v] - \frac{q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\cos[3w-(1-\varsigma)v]\\ &= \frac{q_4}{\delta_1+\varsigma}\eta\cos(3w-\mathrm{v}) - \frac{q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma)v]\\ &\quad - \frac{q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\cos[3w-(1-\varsigma)v].\end{aligned}$$

Als vollständiges Integral für S bis inclusive zum ersten Grad erhält man somit, wirklich ausgeschrieben:

$$\left.\begin{aligned}S_1 = q_1\eta\cos 3w + \frac{q_2+\frac{3}{2}\left(q_1\frac{q_4}{\delta_1+\varsigma}+\mu a_1\gamma_2\right)}{1-\varsigma}\eta\cos\mathrm{v} + \frac{q_6+\frac{3}{2}\left(q_1\frac{q_4}{\delta_1+\varsigma}+\mu a_1\gamma_2\right)}{1+2\delta_1+\varsigma}\eta\cos(6w-\mathrm{v})\\ + \frac{q_3+\frac{3}{2}\left(q_1\frac{q_5}{\delta_1+\varsigma_1}+\mu a_1\gamma_3\right)}{1-\varsigma_1}\eta'\cos\mathrm{v}_1 + \frac{q_7+\frac{3}{2}\left(q_1\frac{q_5}{\delta_1+\varsigma_1}+\mu a_1\gamma_3\right)}{1+2\delta_1+\varsigma_1}\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1)\\ + \frac{q_4}{\delta_1+\varsigma}\eta\cos(3w-\mathrm{v}) - \frac{q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\left\{\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma)v] + \frac{d\eta\sin\pi}{dv}\cos[3w-(1-\varsigma)v]\right\}\\ + \frac{q_5}{\delta_1+\varsigma_1}\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1) - \frac{q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\left\{\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma_1)v] + \frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\cos[3w-(1-\varsigma_1)v]\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{136}$$

Nachdem man durch Integration der Gleichung für R die β bestimmt hat, sind also die q und γ bekannt; und da $\eta \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} \pi$ und ebenso, wie wir gleich sehen werden, $\eta' \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} \pi_1$ nach Integration der Gleichung für (ρ) gleichfalls bekannt sind, so ist S eine numerisch berechenbare Größe.

Den Integralwert (136) würde man natürlich auch erhalten, wenn man wie in Abtheilung a verführe und den unbestimmten Integralansatz, aber unter Berücksichtigung der Variabilität von η, η', π, π_1 differentiierte und mit der Differentialgleichung selbst vergliche, anstatt, wie eben, direct zu integrieren. Um einen Ausdruck der Form $\eta^{m_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} (nw+m_2 v)$, wo m_1, n und m_2 ganze Zahlen sind, zu differentiieren, hätte man, mit Hinblick darauf, dass η und π variable Größen sind, einfach:

$$\eta^{m_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} \{n(1-\mu_1)v - nB - n\mu T_l + m_2(1-\varsigma)v - m_2\pi\} =$$

$$= \eta^{m_1} \cos m_2\pi \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} \{n(1-\mu_1)v - nB - n\mu T_l + m_2(1-\varsigma)v\}$$

$$\pm \eta^{m_1} \sin m_2\pi \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} \{n(1-\mu_1)v - nB - n\mu T_l + m_2(1-\varsigma)v\}$$

oder:

$$\eta^{m_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} (nw+m_2 v) = \eta^{m_1} \cos m_2\pi \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} [nw+m_2(1-\varsigma)v]$$

$$\pm \eta^{m_1} \sin m_2\pi \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} [nw+m_2(1-\varsigma)v]$$

und bei der Differentiation wäre nun erst w und v als variabel und η und π als constant, und dann w und v als constant und η und π als variabel zu betrachten, also:

$$\frac{d\eta^{m_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} (nw+m_2 v)}{dv} = \mp \eta^{m_1} \cos m_2\pi \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} [nw+m_2(1-\varsigma)v] \left(n \frac{dw}{dv} + m_2(1-\varsigma)\right)$$

$$+ \eta^{m_1} \sin m_2\pi \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} [nw+m_2(1-\varsigma)v] \left(n \frac{dw}{dv} + m_2(1-\varsigma)\right)$$

$$+ \frac{d(\eta^{m_1} \cos m_2\pi)}{dv} \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} [nw+m_2(1-\varsigma)v]$$

$$\pm \frac{d(\eta^{m_1} \sin m_2\pi)}{dv} \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} [nw+m_2(1-\varsigma)v].$$

Setzt man hier für $\frac{dw}{dv}$ seinen früher gefundenen Wert:

$$\frac{dw}{dv} = (1-\mu_1) - \mu \left(\frac{dT}{dv}\right)_l$$

ein, und bezeichnet für den Augenblick:

$$n(1-\mu_1) + m_2(1-\varsigma) = g_1; \quad \mu\left(\frac{dT}{dv}\right)_l = g_2,$$

so wird:

$$\left\{\eta^{m_1} \sin m_2\pi \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} [nw+m_2(1-\varsigma)v] \mp \eta^{m_1} \cos m_2\pi \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} [nw+m_2(1-\varsigma)v]\right\} g_1$$

$$- \left\{\eta^{m_1} \sin m_2\pi \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} [nw+m_2(1-\varsigma)v] \mp \eta^{m_1} \cos m_2\pi \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} [nw+m_2(1-\varsigma)v]\right\} ng_2$$

$$= \mp \eta^{m_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} \{nw+m_2(v-\varsigma v-\pi)\} g_1 \pm \eta^{m_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} \{nw+m_2(v-\varsigma v-\pi)\} ng_2$$

$$= \mp g_1 \eta^{m_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} (nw+m_2 v) \pm ng_2 \eta^{m_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} (nw+m_2 v)$$

und somit als allgemeine Differentialformel:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\eta^{m_1}\overset{\cos}{\underset{\sin}{}}(nw+m_2\nu)}{dv} &= \mp\{n(1-\mu_1)+m_2(1-\varsigma)\}\eta^{m_1}\overset{\sin}{\underset{\cos}{}}(nw+m_2\nu) \\
&\pm n\mu_1\left(\frac{dT}{dv}\right)_1\eta^{m_1}\overset{\sin}{\underset{\cos}{}}(nw+m_2\nu) \\
&+\frac{d(\eta^{m_1}\cos m_2\pi)}{dv}\overset{\cos}{\underset{\sin}{}}[nw+m_2(1-\varsigma)v] \\
&\pm\frac{d(\eta^{m_1}\sin m_2\pi)}{dv}\overset{\sin}{\underset{\cos}{}}[nw+m_2(1-\varsigma)v]
\end{aligned}\right\} \tag{137}$$

Auf Grund derselben wäre die strenge Integration natürlich ebenso durchzuführen wie mit den directen partiellen Integralformeln (132) etc. Das erste Glied in (137) liefert die bei constantem η und π entstehenden Glieder, das zweite die exargumentalen, das dritte und vierte aber die infolge der Variabilität von η und π entstehenden »Zusatzglieder«. In der zweiten Abtheilung werden wir von dieser Formel Gebrauch zu machen haben.

---

2. Integration der Differentialgleichung für $\rho = (\rho)+R$.

Als Differentialgleichung für die elementären Glieder erhält man wieder die frühere Form:

$$\frac{d^2(\rho)}{dv^2}+(\rho) = P_1^{(1)}\eta\cos\nu+P_1^{(2)}\eta'\cos\nu_1, \tag{138}$$

die wir jetzt aber allgemein, also ohne die frühere Beschränkung auf eine elliptische Jupiterbewegung integrieren wollen; $P_1^{(1)}$ und $P_1^{(2)}$ sind dabei durch (84) gegeben.

Als Differentialgleichung für die charakteristischen Glieder aber erhält man mit Rücksicht auf die Variabilität von η, η', π, π_1 nach den vorstehenden Entwickelungen für S offenbar:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2R}{dv^2}+R = P_0+P_0^{(1)}\cos 3w+P_1^{(3)}\eta\cos(3w-\nu)+P_1^{(5)}\eta\cos(6w-\nu) \\
+P_1^{(4)}\eta'\cos(3w-\nu_1)+P_1^{(6)}\eta'\cos(6w-\nu_1) \\
-\frac{2q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\left\{\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma)v]+\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\cos[3w-(1-\varsigma)v]\right\} \\
-\frac{2q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\left\{\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma_1)v]+\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\cos[3w-(1-\varsigma_1)v]\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{139}$$

wobei die P-Coefficienten durch (84) gegeben sind.

Die allgemeine Form der zu integrierenden Differentialgleichungen (138) und (139) ist:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2}+\rho = f(v), \tag{140}$$

und diese lässt sich bekanntlich mittelst der Variation der Constanten integrieren, nach der wir also auch die beiden Differentialgleichungen für die elementären und charakteristischen Glieder zu behandeln haben.

Das Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + a^2 x = 0$$

ist:

$$x = C_1 \sin a t - C_2 \cos a t.$$

Das Integral einer linearen Differentialgleichung mit zweitem Theil:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + a^2 x_1 = f(t) \tag{141}$$

aber erhält man bekanntlich, indem man für x_1 wieder den Wert ansetzt:

$$x_1 = C_1 \sin a t - C_2 \cos a t,$$

nur dass man hier C_1 und C_2 nicht als Constanten, sondern als Functionen von t zu betrachten hat. Nimmt man an, dass nicht nur x_1 mit x der Form nach identisch sein soll, sondern dass dies auch bei den ersten Ableitungen nach t, $\frac{d x_1}{d t}$ und $\frac{d x}{d t}$ der Fall sei — im Sinne der Mechanik, dass nicht nur die Coordinaten, sondern auch die Geschwindigkeiten zusammenfallen — so wird, da:

$$\frac{d x_1}{d t} = C_1 a \cos a t + C_2 a \sin a t$$

$$+ \frac{d C_1}{d t} \sin a t - \frac{d C_2}{d t} \cos a t$$

ist, nach der Voraussetzung für C_1 und C_2 die Bedingung stattfinden:

$$\frac{d C_1}{d t} \sin a t - \frac{d C_2}{d t} \cos a t = 0,$$

denn dann stimmen $\frac{d x}{d t}$ und $\frac{d x_1}{d t}$ der Form nach überein. Durch abermalige Differentiation folgt:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} = - C_1 a^2 \sin a t + C_2 a^2 \cos a t$$

$$+ \frac{d C_1}{d t} a \cos a t + \frac{d C_2}{d t} a \sin a t,$$

wo man jetzt aber die beiden letzten Glieder natürlich nicht abermals Null setzen darf, da sich dann zwei Bedingungen für C_1 und C_2 ergäben, diese also nicht mehr willkürlich wären. Setzt man indess:

$$\frac{d C_1}{d t} a \cos a t + \frac{d C_2}{d t} a \sin a t = f(t),$$

so folgt, da:

$$C_1 a^2 \sin a t \quad C_2 a^2 \cos a t = a^2 x_1$$

ist, offenbar:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} = - a^2 x_1 + f(t)$$

also:

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} + a^2 x_1 = f(t),$$

d. i. aber die zu integrierende Differentialgleichung.

Derselben wird mithin dadurch genüge gethan, dass man die arbiträren Constanten C_1 und C_2 aus folgenden Bedingungsgleichungen bestimmt:

$$\frac{dC_1}{dt}\sin at - \frac{dC_2}{dt}\cos at = 0$$

$$\frac{dC_1}{dt}\cos at + \frac{dC_2}{dt}\sin at = \frac{1}{a}f(t).$$

Dieselben ergeben durch entsprechende Multiplication mit $\sin at$ und $\cos at$ und algebraische Addition:

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{1}{a}f(t)\cos(at)$$

$$\frac{dC_2}{dt} = \frac{1}{a}f(t)\sin(at).$$

Die arbiträren Constanten C_1 und C_2 bestimmen sich somit aus:

$$C_1 = \frac{1}{a}\int f(t)\cos(at)dt$$

$$C_2 = \frac{1}{a}\int f(t)\sin(at)dt.$$

Und das Integral der Differentialgleichung (141) wird mithin:

$$x_1 = \frac{\sin at}{a}\int f(t)\cos(at)dt - \frac{\cos at}{a}\int f(t)\sin(at)dt. \tag{142}$$

In Anwendung dieses Principes auf unsere Gyldén'schen Differentialgleichungen (138) und (139) bilden wir zunächst die Relationen:

$$\frac{dC_1}{dv} = f(v)\cos v;\quad \frac{dC_2}{dv} = f(v)\sin v, \tag{143}$$

indem wir für $f(v)$ die elementären, bezüglich charakteristischen Glieder einsetzen. Hierauf integrieren wir die so gebildeten Relationen (143) und setzen danach ihre Werte in das Integral:

$$\rho = C_1\sin v - C_2\cos v \tag{144}$$

ein. Und zwar wollen wir von diesen drei Operationen die erste für die elementären und charakteristischen Glieder gemeinsam, die beiden anderen hingegen für diese Glieder getrennt durchführen, so dass wir die beiden Integrale (ρ) und R dann zu ρ zu vereinigen haben. Die folgenden Formelentwickelungen werden zwar theilweise etwas compliciert, allein die Resultate selbst werden schließlich ganz einfache und übersichtliche.

Die exargumentalen Glieder in ρ, die wir in Abtheilung a durch zweimalige Differentation separatim bestimmt haben, wollen wir hier direct bei der Integration mitbestimmen, so dass dann also im folgenden die P Coefficienten eben nicht durch die Formeln (88) und (90), sondern vielmehr durch die Formeln (84) definiert sind. Als exargumentalen Theil in den Differentialquotienten (143) erhält man offenbar, da:

$$\frac{dC_1}{dv} = P_0^{(1)}\cos 3w\cos v = \frac{1}{2}P_0^{(1)}\cos(3w+v) + \frac{1}{2}P_0^{(1)}\cos(3w-v)$$

$$\frac{dC_2}{dv} = P_0^{(1)}\cos 3w\sin v = \frac{1}{2}P_0^{(1)}\sin(3w+v) - \frac{1}{2}P_0^{(1)}\sin(3w-v)$$

und:

$$\int \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(3w \pm v)\,dv = \mp \frac{1}{3(1-\mu_1) \pm 1} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(3w \pm v) + \frac{3\mu}{3(1-\mu_1) \pm 1} \int \frac{dV}{dv} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(3w \pm v)\,dv$$

ist:

$$\left(\frac{dC_1}{dv}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu P_0^{(1)}}{2+\delta_1} \left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \cos(3w+v) + \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu P_0^{(1)}}{\delta_1} \left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \cos(3w-v)$$

$$\left(\frac{dC_2}{dv}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu P_0^{(1)}}{2+\delta_1} \left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \sin(3w+v) - \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu P_0^{(1)}}{\delta_1} \left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \sin(3w-v),$$

wo die Klammern bei $\left(\frac{dC_1}{dv}\right)$ und $\left(\frac{dC_2}{dv}\right)$ bedeuten, dass j e t z t die Integration o h n e Rücksicht auf das Vorkommen von V in den Argumenten auszuführen, dass also die e x a r g u m e n t a l e n Glieder schon berücksichtigt sind. Da nun nach dem Früheren:

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 = \gamma_2 \eta \cos(3w-\mathrm{v}) + \gamma_3 \eta' \cos(3w-\mathrm{v}_1),$$

ist, so wird:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dC_1}{dv}\right) = \frac{3}{4}\mu P_0^{(1)} \Big\{ & \frac{\gamma_2}{2+\delta_1} \{\eta \cos(\mathrm{v}+v) + \eta \cos(6w-\mathrm{v}+v)\} \\
& + \frac{\gamma_2}{\delta_1} \{\eta \cos(\mathrm{v}-v) + \eta \cos(6w-\mathrm{v}-v)\} \\
& + \frac{\gamma_3}{2+\delta_1} \{\eta' \cos(\mathrm{v}_1+v) + \eta' \cos(6w-\mathrm{v}_1+v)\} \\
& + \frac{\gamma_3}{\delta_1} \{\eta' \cos(\mathrm{v}_1-v) + \eta' \cos(6w-\mathrm{v}_1-v)\}\Big\}
\end{aligned}\right\} \tag{145}$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dC_2}{dv}\right) = \frac{3}{4}\mu P_0^{(1)} \Big\{ & \frac{\gamma_2}{2+\delta_1} \{\eta \sin(\mathrm{v}+v) + \eta \sin(6w-\mathrm{v}+v)\} \\
& - \frac{\gamma_2}{\delta_1} \{\eta \sin(\mathrm{v}-v) + \eta \sin(6w-\mathrm{v}-v)\} \\
& + \frac{\gamma_3}{2+\delta_1} \{\eta' \sin(\mathrm{v}_1+v) + \eta' \sin(6w-\mathrm{v}_1+v)\} \\
& - \frac{\gamma_3}{\delta_1} \{\eta' \sin(\mathrm{v}_1-v) + \eta' \sin(6w-\mathrm{v}_1-v)\}\Big\}.
\end{aligned}\right\} \tag{146}$$

Bilden wir die Gleichungen (143) für die übrigen e l e m e n t ä r e n und c h a r a k t e r i s t i s c h e n Glieder, indem wir dabei immer nach den fundamentalen Gleichungen (36) des zweiten Capitels zerlegen und allein Glieder, die zu den G y l d é n'schen vier Haupttypen A, B, C, D führen, beibehalten, so findet man unter Hinzuziehung der eben erhaltenen Werte (145) und (146), unter Combination der Glieder gleicher Argumente folgende Ausdrücke:

$$\left(\frac{dC_1}{dv}\right) = \left(\frac{dC_1'}{dv}\right) + \left(\frac{dC_1''}{dv}\right), \tag{147}$$

wo:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dC_1'}{dv}\right) = {} & \frac{1}{2}\left\{P_1^{(1)} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_2}{2+\delta_1}\right\} \eta \cos(\mathrm{v}+v) + \frac{1}{2}\left\{P_1^{(1)} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_2}{\delta_1}\right\} \eta \cos(\mathrm{v}-v) \\
& + \frac{1}{2}\left\{P_1^{(2)} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_3}{2+\delta_1}\right\} \eta' \cos(\mathrm{v}_1+v) + \frac{1}{2}\left\{P_1^{(2)} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_3}{\delta_1}\right\} \eta' \cos(\mathrm{v}_1-v).
\end{aligned}\right\} \tag{147a}$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dC_1''}{dv}\right) = {} & \frac{1}{2}P_1^{(3)}\{\eta\cos(3w-\text{v}+v)+\eta\cos(3w-\text{v}-v)\}\\
& +\frac{1}{2}P_1^{(4)}\{\eta'\cos(3w-\text{v}_1+v)+\eta'\cos(3w-\text{v}_1-v)\}\\
& -\frac{q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\,\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\{\sin(3w+\varsigma v)+\sin[3w-(2-\varsigma)v]\}\\
& -\frac{q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\,\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\{\cos(3w+\varsigma v)+\cos[3w-(2-\varsigma)v]\}\\
& -\frac{q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\,\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\{\sin(3w+\varsigma_1 v)+\sin[3w-(2-\varsigma_1)v]\}\\
& -\frac{q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\,\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\{\cos(3w+\varsigma_1 v)+\cos[3w-(2-\varsigma_1)v]\}\\
& +\frac{1}{2}\left\{P_1^{(5)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_2}{2+\delta_1}\right\}\eta\cos(6w-\text{v}+v)+\frac{1}{2}\left\{P_1^{(5)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_2}{\delta_1}\right\}\eta\cos(6w-\text{v}-v)\\
& +\frac{1}{2}\left\{P_1^{(6)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_3}{2+\delta_1}\right\}\eta'\cos(6w-\text{v}_1+v)+\frac{1}{2}\left\{P_1^{(6)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_3}{\delta_1}\right\}\eta'\cos(6w-\text{v}_1-v)
\end{aligned}\right\}\quad(147b)$$

und analog:

$$\left(\frac{dC_2}{dv}\right)=\left(\frac{dC_2'}{dv}\right)+\left(\frac{dC_2''}{dv}\right), \tag{148}$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dC_2'}{dv}\right) = {} & \frac{1}{2}\left\{P_1^{(1)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_2}{2+\delta_1}\right\}\eta\sin(\text{v}+v)-\frac{1}{2}\left\{P_1^{(1)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_2}{\delta_1}\right\}\eta\sin(\text{v}-v)\\
& +\frac{1}{2}\left\{P_1^{(2)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_3}{2+\delta_1}\right\}\eta'\sin(\text{v}_1+v)-\frac{1}{2}\left\{P_1^{(2)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_3}{\delta_1}\right\}\eta'\sin(\text{v}_1-v).
\end{aligned}\right\}\quad(148a)$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dC_2''}{dv}\right) = {} & \frac{1}{2}P_1^{(3)}\{\eta\sin(3w-\text{v}+v)-\eta\sin(3w-\text{v}-v)\}\\
& \frac{1}{2}P_1^{(4)}\{\eta'\sin(3w-\text{v}_1+v)-\eta'\sin(3w-\text{v}_1-v)\}\\
& -\frac{q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\,\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\{\cos[3w-(2-\varsigma)v-\cos(3w+\varsigma v)\}\\
& -\frac{q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\,\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\{\sin(3w+\varsigma v)-\sin[3w-(2-\varsigma)v]\}\\
& -\frac{q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\,\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\{\cos[3w-(2-\varsigma_1)v]-\cos(3w+\varsigma_1 v)\}\\
& -\frac{q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\,\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\{\sin(3w+\varsigma_1 v)-\sin[3w-(2-\varsigma_1)v]\}\\
& +\frac{1}{2}\left\{P_1^{(5)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_2}{2+\delta_1}\right\}\eta\sin(6w-\text{v}+v)-\frac{1}{2}\left\{P_1^{(5)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_2}{\delta_1}\right\}\eta\sin(6w-\text{v}-v)\\
& +\frac{1}{2}\left\{P_1^{(6)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_3}{2+\delta_1}\right\}\eta'\sin(6w-\text{v}_1+v)-\frac{1}{2}\left\{P_1^{(6)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_3}{\delta_1}\right\}\eta'\sin(6w-\text{v}_1-v)
\end{aligned}\right\}\quad(148b)$$

ist. Man sieht, dass durch Ausführung der Integration über diese beiden Ausdrücke elementäre Glieder nur durch Integration über $\left(\frac{dC_1'}{dv}\right)$ und $\left(\frac{dC_2'}{dv}\right)$ folgen, während die Integration über $\left(\frac{dC_1''}{dv}\right)$ und $\left(\frac{dC_2''}{dv}\right)$ nur charakteristische Glieder ergibt. Nach dem Gyldén'schen Zerlegungsprincip $\rho=(\rho)+R$ führen wir also die Integration der Differentialgleichungen in (ρ) und R wieder gesondert durch.

2*a*. Integration der Differentialgleichung in (ρ).

Setzen wir für v und v_1 ihre Werte:

$$\mathrm{v} = (1-\varsigma)v-\pi$$
$$\mathrm{v}_1 = (1-\varsigma_1)v-\pi_1$$

und führen die folgenden abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left\{P_1^{(1)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_2}{\delta_1}\right\} = c_1; \qquad \frac{1}{2}\left\{P_1^{(1)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_2}{2+\delta_1}\right\} = c_3; \\ &\frac{1}{2}\left\{P_1^{(2)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_3}{\delta_1}\right\} = c_2; \qquad \frac{1}{2}\left\{P_1^{(2)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_3}{2+\delta_1}\right\} = c_4, \end{aligned}\right\} \tag{149}$$

so ist das Integral der Differentialgleichung für die elementären Glieder:

$$\frac{d^2(\rho)}{dv^2}+(\rho) = P_1^{(1)}\eta\cos\mathrm{v}+P_1^{(2)}\eta'\cos\mathrm{v}_1 \tag{150}$$

gleich:

$$(\rho) = C_1'\sin v - C_2'\cos v, \tag{151}$$

wenn für C_1' und C_2' die folgenden Werte gesetzt werden, die sich durch Integration aus (147*a*) und (148*a*) ergeben:

$$\left.\begin{aligned} C_1' &= c_1\int\eta\cos(\varsigma v+\pi)dv+c_2\int\eta'\cos(\varsigma_1 v+\pi_1)dv \\ &\quad +c_3\int\eta\cos\{(2-\varsigma)v-\pi\}dv+c_4\int\eta'\cos\{(2-\varsigma_1)v-\pi_1\}dv \\ C_2' &= c_1\int\eta\sin(\varsigma v+\pi)dv+c_2\int\eta'\sin(\varsigma_1 v+\pi_1)dv \\ &\quad +c_3\int\eta\sin\{(2-\varsigma)v-\pi\}dv+c_4\int\eta'\sin\{(2-\varsigma_1)v-\pi_1\}dv. \end{aligned}\right\} \tag{152}$$

Unter der Annahme, dass:

$$(\rho) = \eta\cos\{(1-\varsigma)v-\pi\}$$

hatten wir nun aber für η und π die folgenden Bestimmungsgleichungen gefunden:

$$\eta\,{\cos \atop \sin}(\varsigma v+\pi) = \varkappa\,{\cos \atop \sin}(\varsigma v+\Gamma)+\Sigma\varkappa_n\,{\cos \atop \sin}(\varsigma_n v+\Gamma_n). \tag{153}$$

daher ist auch:

$$\eta\,{\cos \atop \sin}\{(2-\varsigma)v-\pi\} = \varkappa\,{\cos \atop \sin}\{(2-\varsigma)v-\Gamma\}+\Sigma\varkappa_n\,{\cos \atop \sin}\{(2-\varsigma_n)v-\Gamma_n\}. \tag{154}$$

Analog ist nun in der Jupitertheorie ursprünglich:

$$(\rho)' = \eta'\cos\{(1-\varsigma')v'-\pi'\}$$

und

$$\eta'\,{\cos \atop \sin}(\varsigma' v'+\pi') = \varkappa'\,{\cos \atop \sin}(\varsigma' v'+\Gamma')+\Sigma\varkappa_n'\,{\cos \atop \sin}(\varsigma_n' v'+\Gamma_n').$$

Sind bei der Jupiterbewegung drei störende Körper vorhanden, nämlich Saturn, Uranus, Neptun, so ist (wenn man die Glieder dritten Grades fortlässt) der Index n in $\varkappa_n'$ gleich 1, 2, 3 zu setzen und es gehört:

$\varkappa_1'$ zu Saturn als erstem störenden Körper,

$\varkappa_2'$ zu Uranus als zweitem störenden Körper,

$\varkappa_3'$ zu Neptun als drittem störenden Körper.

Hingegen ist $\varkappa'$ ohne Index der eigene Excentricitätsmodul Jupiters. Demnach ist in der Jupitertheorie:

$$\left.\begin{aligned}(\rho) &= \varkappa\cos\{(1-\varsigma)v-\Gamma\}+\underbrace{\varkappa_1\cos\{(1-\varsigma_1)v-\Gamma_1\}}_{\text{♄}}+\underbrace{\varkappa_2\cos\{(1-\varsigma_2)v-\Gamma_2\}}_{\text{♅}}+\underbrace{\varkappa_3\cos\{(1-\varsigma_3)v-\Gamma_3\}}_{\text{♆}}\\ &\text{und:}\\ \eta\cos(\varsigma v+\pi) &= \varkappa\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma v+\Gamma)+\varkappa_1\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma_1 v+\Gamma_1)+\varkappa_2\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma_2 v+\Gamma_2)+\varkappa_3\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma_3 v+\Gamma_3),\end{aligned}\right\}\quad(155)$$

wobei nach Gyldén (cf. Hilfstafeln, S. XXXV) für Jupiter, Saturn und Uranus die folgenden »provisorischen« Werte zu adoptieren sind:

$$\left.\begin{array}{lll}\log\varkappa = 8.625232 & \log\varsigma = 5.517513 & \Gamma = 27°29'\,19''\\ \log\varkappa_1 = 8.177773 & \log\varsigma_1 = 6.402144 & \Gamma_1 = 312\;\;8\;\;11\\ \log\varkappa_2 = 7.22415 & \log\varsigma_2 = 5.367276 & \Gamma_2 = 101\;\;9\;\;57\end{array}\right\}\quad(156)$$

giltig für 1850.0 und bezogen auf das für diese Epoche geltende Äquinoctium. Nach Abschluss der »Orbites absolues«, wenn die Hauptplaneten nach den Gyldén'schen Principien durch Herrn Backlund fertig behandelt sind, aber werden die Werte (156) durch vollkommenere zu ersetzen sein.

In (155) sind die Accente absichtlich weggelassen, also nicht $(\rho)'$, η', $\varsigma'v'+\pi'$ sondern (ρ), η, $\varsigma v+\pi$ für diese Jupitergrößen geschrieben, da, so lange wir die Jupitertheorie ins Auge fassen, Jupiter selbst der gestörte Körper ist. In der Jupitertheorie also ist:

$$\left.\begin{aligned}(\rho) &= \varkappa\cos\{(1-\varsigma)v-\Gamma\}+\Sigma\varkappa_n\cos\{(1-\varsigma_n)v-\Gamma_n\}\\ \eta\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma v+\pi) &= \varkappa\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma v+\Gamma)+\Sigma\varkappa_n\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma_n v+\Gamma_n).\end{aligned}\right\}\quad(157)$$

Wenden wir jetzt aber die Ausdrücke (155) in der Hildatheorie an, so wird Jupiter selbst störender Körper, Saturn rückt in die Stelle des zweiten störenden Körpers u. s. w., und dann also müssen die Accente eingeführt werden:

$$\eta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma'v'+\pi')=\underbrace{\varkappa_1'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma_1'v'+\Gamma_1')}_{\text{♃}}+\underbrace{\varkappa_2'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma_2'v'+\Gamma_2')}_{\text{♄}}+\underbrace{\varkappa_3'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma_3'v'+\Gamma_3')}_{\text{♅}}+\underbrace{\varkappa_4'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma_4'v'+\Gamma_4')}_{\text{♆}}$$

oder:

$$\eta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma'v'+\pi')=\sum_1^4\varkappa_n'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma_n'v'+\Gamma_n');\quad(157a)$$

denn jetzt sind alle vier Hauptplaneten störende Körper.

In der Hildatheorie also wird:

$$\left.\begin{aligned}\eta\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma v+\pi) &= \varkappa\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma v+\Gamma)+\Sigma\varkappa_n\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma_n v+\Gamma_n)\\ \eta'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma_1 v+\pi_1) &= \Sigma\varkappa_n'\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\varsigma_n v+\Gamma_n),\end{aligned}\right\}\quad(158)$$

wo, mit wohl für alle Fälle ausreichender Genauigkeit:

$$\varsigma_n=\mu\varsigma_n' \text{ und } \Gamma_n=\Gamma_n'$$

und demnach in ($157a$) einfach v' durch μv ersetzt ist, und wo beidemale das n der Summe von 1 bis 4 läuft und man bei Jupiter einfacher gleich $\varkappa'$, ς_1, Γ_1 für $\varkappa_1'$, ς_1', Γ_1' schreiben kann, was Gyldén in den Hilfstafeln thut, wo also $\varkappa', \varkappa_1', \varkappa_2'$ etc. durch die Formeln (156) gegeben sind.

Nimmt man, wie in Abtheilung a, die Jupiterbewegung als elliptisch an, so verschwinden nicht nur die von der ♄-⛢-♆-Anziehung herrührenden Glieder, sondern es wird auch die Apsidenbewegung Jupiters $\varsigma_1 = \varsigma' = 0$, und es ist dann, indem $\varkappa'$ und Γ' die elliptische Excentricität und Perihellänge Jupiters bedeuten:

$$\left.\begin{aligned} &\eta' \frac{\cos}{\sin} \pi_1 = \varkappa' \frac{\cos}{\sin} \Gamma', \quad \begin{aligned} \eta' &= \varkappa' \\ \pi_1 &= \Gamma' = \Gamma_1 \end{aligned} \\ &\eta \frac{\cos}{\sin} (\varsigma v + \pi) = \varkappa \frac{\cos}{\sin} (\varsigma v + \Gamma) + \varkappa_1 \frac{\cos}{\sin} \Gamma_1 \end{aligned}\right\} \tag{159}$$

wo also das Glied $\varkappa_1 \frac{\cos}{\sin} \Gamma_1$ eine Constante ist. Von diesen Formen gingen wir in Abtheilung a bei der genäherten Integration der Differentialgleichung für (ρ) aus.

Jetzt jedoch setzen wir strenger:

$$\eta' \frac{\cos}{\sin} (\varsigma_1 v + \pi_1) = \Sigma \varkappa'_n \frac{\cos}{\sin} (\varsigma_n v + \Gamma_n)$$

und somit auch:

$$\eta' \frac{\cos}{\sin} \{(2-\varsigma_1) v - \pi_1\} = \Sigma \varkappa'_n \frac{\cos}{\sin} \{(2-\varsigma_n) v - \Gamma_n\}. \tag{160}$$

Auf Grund der Formeln (153), (154) und (160) sind nun die Integrationen in (152) direct ausführbar. Es wird einfach:

$$\begin{aligned} C_1 = {} & c_1 \frac{\varkappa}{\varsigma} \sin (\varsigma v + \Gamma) + c_1 \sum \frac{\varkappa_n}{\varsigma_n} \sin (\varsigma_n v + \Gamma_n) + c_2 \sum \frac{\varkappa'_n}{\varsigma_n} \sin (\varsigma_n v + \Gamma_n) \\ & + c_3 \frac{\varkappa}{2-\varsigma} \sin \{(2-\varsigma) v - \Gamma\} + c_3 \sum \frac{\varkappa_n}{2-\varsigma_n} \sin \{(2-\varsigma_n) v - \Gamma_n\} + c_4 \sum \frac{\varkappa'_n}{2-\varsigma_n} \sin \{(2-\varsigma_n) v - \Gamma_n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C'_2 = {} & - c_1 \frac{\varkappa}{\varsigma} \cos (\varsigma v + \Gamma) - c_1 \sum \frac{\varkappa_n}{\varsigma_n} \cos (\varsigma_n v + \Gamma_n) - c_2 \sum \frac{\varkappa'_n}{\varsigma_n} \cos (\varsigma_n v + \Gamma_n) \\ & - c_3 \frac{\varkappa}{2-\varsigma} \cos \{(2-\varsigma) v - \Gamma\} - c_3 \sum \frac{\varkappa_n}{2-\varsigma_n} \cos \{(2-\varsigma_n) v - \Gamma_n\} - c_4 \sum \frac{\varkappa'_n}{2-\varsigma_n} \cos \{(2-\varsigma_n) v - \Gamma_n\} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (151) folgt:

$$\begin{aligned} (\rho) = {} & \varkappa \left\{ \frac{c_1}{\varsigma} + \frac{c_3}{2-\varsigma} \right\} \cos \{(1-\varsigma) v - \Gamma\} \\ & + \sum \left\{ \varkappa_n \left(\frac{c_1}{\varsigma_n} + \frac{c_3}{2-\varsigma_n} \right) + \varkappa'_n \left(\frac{c_2}{\varsigma_n} + \frac{c_4}{2-\varsigma_n} \right) \right\} \cos \{(1-\varsigma_n) v - \Gamma_n\}. \end{aligned} \tag{161}$$

Andererseits aber war der allgemeine Integralansatz:

$$(\rho) = \varkappa \cos \{(1-\varsigma) v - \Gamma\} + \Sigma \varkappa_n \cos \{(1-\varsigma_n) v - \Gamma_n\}. \tag{162}$$

Daher erhält man die folgenden Bestimmungsgleichungen für ς und $\varkappa_n$:

$$\left.\begin{aligned}&\varsigma^2-(c_1-c_3+2)\varsigma+2c_1=0\\&\varkappa_n=\frac{c_2+\dfrac{\varsigma_n c_4}{2-\varsigma_n}}{\varsigma_n-c_1-\dfrac{\varsigma_n c_3}{2-\varsigma_n}}\varkappa_n',\end{aligned}\right\}\tag{163}$$

die zusammen mit (162) das Integral von (150) repräsentieren, indem c_1 bis c_4 durch (149) gegeben und bekannt sind, sobald durch Integration der Differentialgleichung für R, zu der wir jetzt übergehen, β_2 bis β_5 bestimmt sind, da nach Bestimmung der β in (149) $P_0^{(1)}$, $P_1^{(1)}$ und $P_1^{(2)}$ nach (84), sowie γ_2 und γ_3 nach (105) und (106) berechenbar sind. Die Integrationsconstanten $\varkappa$ und Γ bestimmen wir später aus den Beobachtungen.

2*b*. Integration der Differentialgleichung für *R*.

Die zu integrierende Differentialgleichung für die charakteristischen Glieder war, indem wir die bekannten Glieder für den 0^{ten} Grad nochmal mitschreiben:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2R}{dv^2}+R=P_0+P_0^{(1)}\cos 3w+P_{\mathrm{I}}^{(3)}\eta\cos(3w-\mathrm{v})+P_{\mathrm{I}}^{(5)}\eta\cos(6w-\mathrm{v})\\+P_{\mathrm{I}}^{(4)}\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)+P_{\mathrm{I}}^{(6)}\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1)\\-\frac{2q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\left\{\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma)v]+\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\cos[3w-(1-\varsigma)v]\right\}\\-\frac{2q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\left\{\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma_1)v]+\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\cos[3w-(1-\varsigma_1)v]\right\}.\end{aligned}\right\}\tag{164}$$

Zunächst findet man durch Integration über die Ausdrücke (147*b*) und (148*b*) folgendes Resultat, indem wir der Variabilität von η, η', π, π_1 nur in den Gliedern vom Argument $6w-\mathrm{v}-v$ und $6w-\mathrm{v}_1-v$, nicht aber in denen vom Argument $3w-\mathrm{v}-v$ und $3w-\mathrm{v}_1-v$ Rechnung tragen, da $\int\eta\cos(3w-\mathrm{v}-v)$ keinen kleinen Divisor enthält, während $\int\eta\cos(6w-\mathrm{v}-v)dv$ einen kleinen Divisor enthält, also groß ist, und $\int\int\eta\cos(6w-\mathrm{v}-v)dv^2$ zweimal einen kleinen Divisor enthält, also erst recht groß ist. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\{P_1^{(5)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_2}{2+\delta_1}\right\}=c_1'; &&\frac{1}{2}\left\{P_1^{(5)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_2}{\delta_1}\right\}=c_2'\\&\frac{1}{2}\left\{P_1^{(6)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_3}{2+\delta_1}\right\}=c_3'; &&\frac{1}{2}\left\{P_1^{(6)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu P_0^{(1)}\gamma_3}{\delta_1}\right\}=c_4',\end{aligned}\right\}\tag{165}$$

so ergibt sich mit Hinblick auf die Formel für die partielle Integration (129):

$$\begin{aligned}C_1''=\frac{1}{2}P_{\mathrm{I}}^{(3)}\left\{\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma}\eta\sin(3w-\mathrm{v}+v)-\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma}\eta\sin(3w-\mathrm{v}-v)\right\}\\+\frac{1}{2}P_{\mathrm{I}}^{(4)}\left\{\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma_1}\eta'\sin(3w-\mathrm{v}_1+v)-\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma_1}\eta'\sin(3w-\mathrm{v}_1-v)\right\}\\+\frac{q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\left\{\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma}\cos(3w+\varsigma v)-\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma}\cos[3w-(2-\varsigma)v]\right\}\end{aligned}\quad(166)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+\frac{q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\,\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\left\{\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma}\sin\,[3w-(2-\varsigma)v]-\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma}\sin\,(3w+\varsigma v)\right\}\\
&+\frac{q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\,\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\left\{\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma_1}\cos\,(3w+\varsigma_1 v)-\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma_1}\cos\,[3w-(2-\varsigma_1)v]\right\}\\
&+\frac{q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\,\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\left\{\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma_1}\sin\,[3w-(2-\varsigma_1)v]-\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma_1}\sin\,(3w+\varsigma_1 v)\right\}\\
&+\frac{c_1'}{2+2\delta_1+\varsigma}\left\{\eta\sin\,(6w-\nu+v)+\frac{1}{2+2\delta_1+\varsigma}\,\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\cos\,(6w+\varsigma v)-\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{2+2\delta_1+\varsigma}\,\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\sin\,(6w+\varsigma v)\right\}\\
&+\frac{c_2'}{2\delta_1+\varsigma}\left\{\eta\sin\,(6w-\nu-v)+\frac{1}{2\delta_1+\varsigma}\,\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\cos\,[6w-(2-\varsigma)v]-\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{2\delta_1+\varsigma}\,\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\sin\,[6w-(2-\varsigma)v]\right\}\\
&+\frac{c_3'}{2+2\delta_1+\varsigma_1}\left\{\eta'\sin\,(6w-\nu_1+v)+\frac{1}{2+2\delta_1+\varsigma_1}\,\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\cos\,(6w+\varsigma_1 v)-\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{2+2\delta_1+\varsigma}\,\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\sin\,(6w+\varsigma_1 v)\right\}\\
&+\frac{c_4'}{2\delta_1+\varsigma_1}\left\{\eta'\sin\,(6w-\nu_1-v)+\frac{1}{2\delta_1+\varsigma_1}\,\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\cos\,[6w-(2-\varsigma_1)v]-\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{2\delta_1+\varsigma_1}\,\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\sin\,[6w-(2-\varsigma_1)v]\right\}.
\end{aligned}
\right\}\;(166)
$$

Ebenso findet man:

$$
\left.
\begin{aligned}
C_2''=&-\frac{1}{2}P_{\mathrm{I}}^{(3)}\left\{\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma}\,\eta\cos\,(3w-\nu+v)+\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma}\,\eta\cos\,(3w-\nu-v)\right\}\\
&-\frac{1}{2}P_{\mathrm{I}}^{(4)}\left\{\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma_1}\,\eta'\cos\,(3w-\nu_1+v)+\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma_1}\,\eta'\cos\,(3w-\nu_1-v)\right\}\\
&+\frac{q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\,\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\left\{\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma}\sin\,(3w+\varsigma v)+\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma}\sin\,[3w-(2-\varsigma)v]\right\}\\
&+\frac{q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\,\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\left\{\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma}\cos\,(3w+\varsigma v)+\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma}\cos\,[3w-(2-\varsigma)v]\right\}\\
&+\frac{q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\,\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\left\{\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma_1}\sin\,(3w+\varsigma_1 v)+\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma_1}\sin\,[3w-(2-\varsigma_1)v]\right\}\\
&+\frac{q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\,\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\left\{\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma_1}\cos\,(3w+\varsigma_1 v)+\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma_1}\cos\,[3w-(2-\varsigma_1)v]\right\}\\
&+\frac{c_1'}{2+2\delta_1+\varsigma}\left\{-\eta\cos\,(6w-\nu+v)+\frac{1}{2+2\delta_1+\varsigma}\,\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\sin\,(6w+\varsigma v)+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{1}{2+2\delta_1+\varsigma}\,\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\cos\,(6w+\varsigma v)\right\}
\end{aligned}
\right\}\;(167)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+\frac{c_2'}{2\delta_1+\varsigma}\left\{\eta\cos(6w-\nu-v)-\frac{1}{2\delta_1+\varsigma}\,\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\sin[6w-(2-\varsigma)v]-\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{2\delta_1+\varsigma}\,\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\cos[6w-(2-\varsigma)v]\right\}\\
&+\frac{c_3'}{2+2\delta_1+\varsigma_1}\left\{-\eta'\cos(6w-\nu_1+v)+\frac{1}{2+2\delta_1+\varsigma_1}\,\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\sin(6w+\varsigma_1v)+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{1}{2+2\delta_1+\varsigma_1}\,\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\cos(6w+\varsigma_1v)\right\}\\
&+\frac{c_4'}{2\delta_1+\varsigma_1}\left\{\eta'\cos(6w-\nu_1-v)-\frac{1}{2\delta_1+\varsigma_1}\,\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\sin[6w-(2-\varsigma)v]-\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{2\delta_1+\varsigma_1}\,\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\cos[6w-(2-\varsigma)v]\right\}
\end{aligned}
\right\}\tag{167}
$$

Diese beiden Werte (166) und (167) sind nun also in:

$$R_1 = C_1''\sin v - C_2''\cos v \tag{168}$$

einzusetzen und Gyldén's Princip entsprechend haben wir bei der Zerlegung der Producte der trigonometrischen Functionen in Summen und Differenzen, wieder bloß Glieder der vier Fundamentaltypen A, B, C, D zu berücksichtigen. Das Resultat dieser etwas weitläufigen Substitution wird jedoch einfach, nämlich zunächst:

$$
\left.
\begin{aligned}
R_1 = {} & \beta_2\eta\cos(3w-\nu)+\beta_4\eta\cos(6w-\nu)\\
&+\beta_3\eta'\cos(3w-\nu_1)+\beta_5\eta'\cos(6w-\nu_1)\\
&-\frac{q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\left\{\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma}+\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma}\right\}\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma)v]\\
&-\frac{q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\left\{\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma}+\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma}\right\}\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\cos[3w-(1-\varsigma)v]\\
&-\frac{q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\left\{\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma_1}+\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma_1}\right\}\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma_1)v]\\
&-\frac{q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\left\{\frac{1}{1+\delta_1+\varsigma_1}+\frac{1}{1-\delta_1-\varsigma_1}\right\}\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\cos[3w-(1-\varsigma_1)v]\\
&+\beta_4'\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\sin[6w-(1-\varsigma)v]+\beta_5'\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\sin[6w-(1-\varsigma_1)v]\\
&+\beta_4'\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\cos[6w-(1-\varsigma)v]+\beta_5'\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\cos[6w-(1-\varsigma_1)v]
\end{aligned}
\right\}\tag{169}
$$

und es bedeutet:

$$
\left.
\begin{aligned}
\beta_2 &= \frac{P_1^{(3)}}{(1+\delta_1+\varsigma)(1-\delta_1-\varsigma)};\qquad \beta_3 = \frac{P_1^{(4)}}{(1+\delta_1+\varsigma_1)(1-\delta_1-\varsigma_1)}\\
\beta_4 &= -\frac{P_1^{(5)}}{(2\delta_1+\varsigma)(2+2\delta_1+\varsigma)}-\frac{3\mu P_0^{(1)}\gamma_2(2+3\delta_1+\varsigma)}{2\delta_1(2+\delta_1)(2\delta_1+\varsigma)(2+2\delta_1+\varsigma)}\\
\beta_5 &= -\frac{P_1^{(6)}}{(2\delta_1+\varsigma_1)(2+2\delta_1+\varsigma_1)}-\frac{3\mu P_0^{(1)}\gamma_3(2+3\delta_1+\varsigma_1)}{2\delta_1(2+\delta_1)(2\delta_1+\varsigma_1)(2+2\delta_1+\varsigma_1)}\\
\beta_4' &= \frac{2P_1^{(5)}(1+2\delta_1+\varsigma)}{(2\delta_1+\varsigma)^2(2+2\delta_1+\varsigma)^2}+\frac{3\mu P_0^{(1)}\gamma_2(4+10\delta_1+4\varsigma+8\delta_1^2+6\delta_1\varsigma+\varsigma^2)}{2\delta_1(2+\delta_1)(2\delta_1+\varsigma)^2(2+2\delta_1+\varsigma)^2}\\
\beta_5' &= \frac{2P_1^{(6)}(1+2\delta_1+\varsigma_1)}{(2\delta_1+\varsigma_1)^2(2+2\delta_1+\varsigma_1)^2}+\frac{3\mu P_0^{(1)}\gamma_3(4+10\delta_1+4\varsigma_1+8\delta_1^2+6\delta_1\varsigma_1+\varsigma_1^2)}{2\delta_1(2+\delta_1)(2\delta_1+\varsigma_1)^2(2+2\delta_1+\varsigma_1)^2}.
\end{aligned}
\right\}\tag{169a}
$$

Die Gleichungen (169) und (169 *a*) repräsentieren das strenge Integral (innerhalb der a priori vorgesetzten Genauigkeitsgrenze). Nun ist ja aber, da für Hilda die Commensurabilität so nahe erfüllt ist, δ_1 eine kleine Größe, während ς_1 und ς rein von der Ordnung der störenden Masse sind. Vernachlässigen wir daher δ_1, ς und ς_1 gegenüber der Einheit, so erhalten wir das folgende, der numerischen Rechnung zugrunde zu legende Integral:

$$\left.\begin{aligned}
R_1 = {} & \beta_2 \eta \cos(3w-v) + \beta_4 \eta \cos(6w-v) \\
& + \beta_3 \eta' \cos(3w-v_1) + \beta_5 \eta' \cos(6w-v_1) \\
& - \frac{2}{(\delta_1+\varsigma)^2}\left\{\frac{d\eta \cos\pi}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma)v] + \frac{d\eta \sin\pi}{dv}\cos[3w-(1-\varsigma)v]\right\} \\
& - \frac{2}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\left\{\frac{d\eta' \cos\pi_1}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma_1)v] + \frac{d\eta' \sin\pi_1}{dv}\cos[3w-(1-\varsigma_1)v]\right\} \\
& + \beta_4'\frac{d\eta \cos\pi}{dv}\sin[6w-(1-\varsigma)v] + \beta_5'\frac{d\eta' \cos\pi_1}{dv}\sin[6w-(1-\varsigma_1)v] \\
& + \beta_4'\frac{d\eta \sin\pi}{dv}\cos[6w-(1-\varsigma)v] + \beta_5'\frac{d\eta' \sin\pi_1}{dv}\cos[6w-(1-\varsigma_1)v].
\end{aligned}\right\} \tag{170}$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned}
\beta_2 &= P_1^{(3)}; \qquad \beta_3 = P_1^{(4)}; \\
\beta_4 &= -\frac{P_1^{(5)}}{2(2\delta_1+\varsigma)} - \frac{3\mu P_0^{(1)}\gamma_2}{4\delta_1(2\delta_1+\varsigma)}; \\
\beta_5 &= -\frac{P_1^{(6)}}{2(2\delta_1+\varsigma_1)} - \frac{3\mu P_0^{(1)}\gamma_3}{4\delta_1(2\delta_1+\varsigma_1)}; \\
\beta_4' &= \frac{P_1^{(5)}}{2(2\delta_1+\varsigma)^2} + \frac{3\mu P_0^{(1)}\gamma_2}{4\delta_1(2\delta_1+\varsigma)^2}; \\
\beta_5' &= \frac{P_1^{(6)}}{2(2\delta_1+\varsigma_1)^2} + \frac{3\mu P_0^{(1)}\gamma_3}{4\delta_1(2\delta_1+\varsigma_1)^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{170a}$$

ist. Indem wir in den Gleichungen (170 *a*) für die P ihre Werte nach (84) und für γ_2 und γ_3 ihre Werte nach (105) und (106) einsetzen, sowie für die q, p, g ihre Werte nach (14), (18) und (22) (in welchen Systemen die Coefficienten der β numerische Constanten repräsentieren, die wir nach (15), (19) und (23) für Hilda zu berechnen haben), erhalten wir vier Gleichungen für die vier Unbekannten β_2, β_3, β_4, β_5, in denen außer den β nur bekannte Zahlen auftreten, so dass die β aus ihnen vollständig berechenbar sind. Und einen anderen Anspruch, als die numerischen Werte der β für einen Planeten der Hildagruppe zu finden, stellt unser astronomisches Problem nicht. Somit ist das Integral R_1 eine vollständig bekannte Größe und mithin auch das Integral der Differentialgleichung für den Radius vector:

$$\rho = (\rho_1) + R_1 \tag{171}$$

für Hilda mittelst der Gleichungen (162) und (163), sowie (170) und (170 *a*) numerisch berechenbar.

3. Integration der Differentialgleichung für T.

Die strenge Integration der Differentialgleichung für T ist derjenigen für S analog; nur ist zu bedenken, dass infolge der Variabilität von η, η', π, π_1 jetzt die rechte Seite der Gleichung für T:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dT}{dv} &= S-2R-2RS+3R^2+3SR^2-4R^3\\ &\quad+\{6R-2S-12R^2+6RS\}\eta\cos\mathrm{v}\end{aligned}\right\}\tag{172}$$

bereits Glieder mit $\dfrac{d\eta\,\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\,\pi}{dv}$ enthält, da solche in den Integralen S_1 und R_1 auftreten. Analog wie in Abtheilung a erhält man also wieder dieselbe Differentialgleichung für T, nur muss man noch die aus S_1-2R_1 resultierenden Glieder mit $\dfrac{d\eta\,\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\,\pi}{dv}$ hinzufügen. Die Differentialgleichung für T wird dann:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dT}{dv}\right) &= T_0+T_0^{(1)}\cos 3w+T_0^{(2)}\cos 6w+T_0^{(3)}\cos 9w\\ &\quad+T_1^{(1)}\eta\cos\mathrm{v}+T_1^{(3)}\eta\cos(3w-\mathrm{v})+T_1^{(5)}\eta\cos(6w-\mathrm{v})\\ &\quad+T_1^{(2)}\eta'\cos\mathrm{v}_1+T_1^{(4)}\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)+T_1^{(6)}\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1)\\ &\quad+T_1^{(7)}\eta\cos(3w+\mathrm{v})+T_1^{(8)}\eta\cos(9w-\mathrm{v})+T_1^{(9)}\eta'\cos(9w-\mathrm{v}_1)\\ &\quad+T_1^{(10)}\eta\cos(6w+\mathrm{v})\\ &\quad+\frac{3q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\,\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma)v]+\frac{3q_4}{(\delta_1+\varsigma)^2}\,\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\cos[3w-(1-\varsigma)v]\\ &\quad+\frac{3q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\,\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma_1)v]+\frac{3q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}\,\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\cos[6w-(1-\varsigma_1)v]\\ &\quad-2\beta_4'\,\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\sin[6w-(1-\varsigma)v]-2\beta_4'\,\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\cos[6w-(1-\varsigma)v]\\ &\quad-2\beta_5'\,\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\sin[6w-(1-\varsigma_1)v]-\beta_5'\,\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\cos[6w-(1-\varsigma_1)v],\end{aligned}\right\}\tag{173}$$

wo die T-Coefficienten wieder durch die Formeln (118) gegeben sind. Bei der Integration betrachten wir η, η', π, π_1, analog wie bei S, nur in den Gliedern der Form C als variabel und erhalten so als Integral:

$$\left.\begin{aligned}T_1 &= (c_0+\gamma)v+\gamma_1\cos 3w+g_1'\cos 6w+g_2'\cos 9w\\ &\qquad+g_3'\eta\cos\mathrm{v}+\gamma_2'\eta\cos(3w-\mathrm{v})+\gamma_4\eta\cos(6w-\mathrm{v})\\ &\qquad+g_4'\eta'\cos\mathrm{v}_1+\gamma_3'\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)+\gamma_5\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1)\\ &\qquad+\gamma_6\eta\cos(3w+\mathrm{v})+g_5'\eta\cos(9w-\mathrm{v})+g_6'\eta'\cos(9w-\mathrm{v}_1)\\ &\qquad+g_7'\eta\cos(6w+\mathrm{v})\\ &+\left\{\frac{T_1^{(3)}}{(\delta_1+\varsigma)^2}-\frac{3q_4}{(\delta_1+\varsigma)^3}\right\}\left\{\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\cos[3w-(1-\varsigma)v]-\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma)v]\right\}\\ &+\left\{\frac{T_1^{(4)}}{(\delta_1+\varsigma_1)^2}-\frac{3q_5}{(\delta_1+\varsigma_1)^3}\right\}\left\{\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\cos[3w-(1-\varsigma_1)v]-\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\sin[3w-(1-\varsigma_1)v]\right\}\\ &+\frac{2\beta_4'}{1+2\delta_1+\varsigma}\left\{\frac{d\eta\cos\pi}{dv}\cos[6w-(1-\varsigma)v]-\frac{d\eta\sin\pi}{dv}\sin[6w-(1-\varsigma)v]\right\}\\ &+\frac{2\beta_5'}{1+2\delta_1+\varsigma_1}\left\{\frac{d\eta'\cos\pi_1}{dv}\cos[6w-(1-\varsigma_1)v]-\frac{d\eta'\sin\pi_1}{dv}\sin[6w-(1-\varsigma_1)v]\right\},\end{aligned}\right\}\tag{174}$$

wobei:

$$
\left.
\begin{aligned}
&T_0 = c_0+\gamma \quad \text{und} \quad c_0 = 0; \qquad \gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2;\\
&\gamma_1 = \frac{T_0^{(1)}}{1+\delta_1}; \quad g_1' = \frac{T_0^{(2)}}{2(1+\delta_1)}; \quad g_2' = \frac{T_0^{(3)}}{3(1+\delta_1)};\\
&g_3' = \frac{T_1^{(1)}}{1-\varsigma}; \quad g_4' = \frac{T_1^{(2)}}{1-\varsigma_1}; \quad \gamma_2' = \frac{T_1^{(3)}}{\delta_1+\varsigma}; \quad \gamma_3' = \frac{T_1^{(4)}}{\delta_1+\varsigma_1};\\
&\gamma_4 = \frac{T_1^{(5)}}{1+2\delta_1+\varsigma}; \quad \gamma_5 = \frac{T_1^{(6)}}{1+2\delta_1+\varsigma_1}; \quad \gamma_6 = \frac{T_1^{(7)}}{2+\delta_1-\varsigma};\\
&g_5' = \frac{T_1^{(8)}}{2+3\delta_1+\varsigma}; \quad g_6' = \frac{T_1^{(9)}}{2+3\delta_1+\varsigma_1}; \quad g_7' = \frac{T_1^{(10)}}{3+2\delta_1-\varsigma}
\end{aligned}
\right\} \tag{175}
$$

ist.

Für die numerische Rechnung ist dabei mit Hinblick auf den früher ermittelten Wert von:

$$q_4 = q_4^{(0)}+q_4^{(1)}\beta_1+q_4^{(4)}\beta_4,$$

wo $q_4^{(0)} \asymp m'$, aber $q_4^{(1)}\beta_1$ und $q_4^{(4)}\beta_4$ von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ sind, zu bemerken, dass z. B. das Zusatzglied:

$$q_4^{(4)}\beta_4 \frac{d\eta\cos\pi}{dv}\cos\left[3w-(1-\varsigma)v\right] \asymp \frac{m'^3}{\delta_1}$$

und mithin so klein ist, dass man es bei der numerischen Rechnung vernachlässigen wird. Im Integral wird man also einfach:

$$q_4 = q_4^{(0)} \quad \text{und} \quad q_5 = q_5^{(0)}$$

setzen, wobei $q_4^{(0)}$ und $q_5^{(0)}$ die durch (15) gegebenen Werte haben. Ähnlich hat man bei den beiden Gliedern in β_4' und β_5' zu verfahren, indem z. B. der in β_4' auftretende Wert $P_1^{(5)}$ nach (84):

$$P_1^{(5)} = 2a_4 - p_6 + \frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}\{(g_4-q_4)\beta_1\} + (a_1-p_1)\alpha_2$$

und hierin z. B.:

$$p_6 = p_6^{(0)}+p_6^{(1)}\beta_1+p_6^{(2)}\beta_2+p_6^{(4)}\beta_4$$

ist; auch hier wird man bei der numerischen Rechnung Glieder dritter und höherer Ordnung vernachlässigen. Im folgenden Capitel, wo wir die numerische Rechnung für den 0[ten] Grad bis zur dritten Ordnung inclusive ausführen werden, sieht man schon, wie die Behandlungsweise des Problems nach den Gyldén'schen Principien zu wirklichen Resultaten führt.

C. Die Integrationsconstanten.

Unsere Differentialgleichungen für S, ρ, T (cf. System I, 1, 2, 3 zu Anfang von Capitel IV) müssen offenbar vier Integrationsconstanten besitzen.

Gehen wir vom Zwei-Körperproblem aus, für welches η constant, also $\frac{d\eta^2}{dv} = 0$ ist, so wird für dieses, da P und Q die störende Masse enthalten, also fortfallen:

$$\frac{dS}{dv} = 0; \qquad \frac{d^2\rho}{dv^2}+\rho = 2S+S^2;$$

also:

$$S = a_0 = \text{const.}; \qquad \rho = 2a_0+a_0^2+c\cos(v-\pi),$$

und hier sind a_0, e, π die Integrationsconstanten. Der Radius vector:

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\rho}$$

wird also für das Zwei-Körperproblem in den Gyldén'schen Coordinaten:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{(1+a_0)^2 + e\cos(v-\pi)}$$

oder:

$$r = \frac{\bar{a}(1-\bar{e})}{1+\bar{e}\cos(v-\pi)} = \frac{p}{1+\bar{e}\cos(v-\pi)},$$

wo:

$$p = \frac{a(1-e^2)}{(1+a_0)^2}; \quad \bar{e} = \frac{e}{(1+a_0)^2}; \quad \bar{a} = \frac{1-e^2}{1-\bar{e}^2}\,\frac{a}{(1+a_0)^2}$$

ist. Dabei ist a eine Constante, die einen Mittelwert von r repräsentiert und noch nicht näher definiert ist. Da sie aber von a_0 abhängt, so kann man offenbar, da beide Constanten ja willkürlich sind, auch a als Integrationsconstante und a_0 als überzählige, beliebig zu bestimmende Constante betrachten. Thut man das, so kann man weiter, auf Grund der Relation:

$$n = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

an Stelle von a auch n als Integrationsconstante betrachten und somit jetzt n, e, π als Integrationsconstanten auffassen, a_0 aber als eine Constante, über die wir noch frei verfügen können.

In diesem Sinne verfahren wir auch beim Drei-Körperproblem und betrachten die Gyldén'schen Größen $n, \varkappa, \Gamma$ als die Integrationsconstanten, während wir über a_0 später verfügen, und zwar im Sinne des Brendel'schen Verfahrens bei kritischen Planeten so, dass der Theil c des ganzen constanten Theiles γ von T, welcher (c) rein erster oder höherer Ordnung ist, verschwindet.

Die Integrationsconstante der Gleichung:

$$n\frac{dt}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\rho)^2}(1+S) = n\frac{d\zeta}{dv} + \frac{dT}{dv}$$

sei Λ, sodass also, wie auch bereits in Capitel I gezeigt:

$$nt = n\zeta + \Lambda + T$$

ist, indem man die durch Integration von $\frac{dT}{dv}$ entstehende Constante mit Λ vereinigt, also gleich Null gesetzt denkt, da sie zu Λ kommen würde.

In toto sind also bei Betrachtung der Bewegung in der instantanen Bahnebene, a oder n, ferner $\varkappa, \Gamma, \Lambda$ die Integrationsconstanten und a_0 eine Constante, die zur freien Verfügung bleibt, während die in R auftretende Constante b_0 bekannt ist, sobald man über a_0 verfügt hat, wie wir in Capitel V sogleich sehen werden.

Die Veränderungen der instantanen Bahnebene im Raum, sind, wie wir in der Fortsetzung dieser Untersuchungen sehen werden, durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung charakterisiert, die als solche zwei Integrationsconstanten, i und Θ besitzt. Sodass die wirkliche Bewegung des Planeten durch die bei der Integration erhaltenen sechs Bahnelemente $n, \varkappa, \Gamma, \Lambda, i, \Theta$, die aber bei dem hier gebrauchten Integrationsverfahren nicht strenge den sechs Gyldén'schen »absoluten Elementen« entsprechen, eindeutig bestimmt ist.

Fünftes Capitel.

Die vorläufigen numerischen Ergebnisse der ersten Näherung für die Grenzen der »Hilda-Lücke« im System der kleinen Planeten.

A. Über die Giltigkeit des Verfahrens in der ersten Näherung.

Bekanntlich haben außer Gyldén selbst die Herren Brendel und Callandreau wertvolle Untersuchungen über das Auftreten der Lücken im System der kleinen Planeten gemacht, ja Herr Brendel hat bereits erste genäherte numerische Rechnungen für Hilda in seiner Theorie der kleinen Planeten angestellt. Es ist von Interesse, zu sehen, wie sich im folgenden die Grenzen der Lücke im Typus $\left(\frac{2}{3}\right)$ durch Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung, die ich mitgenommen habe, verificieren. Im Sinne des Brendel'schen Verfahrens[1] für kritische Planeten werden wir dabei die Constante a_0, über die wir noch willkürlich verfügen konnten, für Hilda so bestimmen, dass der in pars const. $\frac{dT}{dv}$ auftretende Theil rein erster oder höherer Ordnung verschwindet.

Als Wert der Constanten b_0 hatten wir im vierten Capitel gefunden:

$$b_0 = 2a_0 + h_0 + h_1\beta_1 + h_2\beta_1^2, \tag{1}$$

wo:

$$\left.\begin{aligned} h_0 &= -B_{0.0.0} \\ h_1 &= -\frac{1}{2}B_{3.0.0}^{1.0} + \frac{3\mu}{1+\delta_1}B_{3.0.0} + \frac{1+\delta_1}{2}A_{3.0.0} \\ h_2 &= -\frac{1}{2}B_{0.0.0}^{2.0} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

war. Setzen wir diesen Wert von b_0 in die Gleichung der Constanten:

$$c_0 + \gamma = \left(a_0 - 2b_0 - a_1\beta_1 - 6b_0\beta_1^2 + \frac{3}{2}a_0\beta_1^2\right) + \frac{3}{2}\beta_1^2,$$

die sich bei Integration der Gleichung für T ergab, ein, so wird dieselbe:

$$c_0 + \gamma = (-3a_0 + l_0 + l_1\beta_1 + l_2\beta_1^2 + l_3\beta_1^3 + l_4\beta_1^4) + \frac{3}{2}\beta_1^2,$$

---

[1] Cf. 1. Martin Brendel, Über die Lücken im System der kleinen Planeten und über ein Integrationsverfahren im Problem der drei Körper. Astr. Nachrichten, Band 140, Nr. 3346. — 2. Martin Brendel, Theorie der kleinen Planeten, Capitel VII.

wobei:

$$\left.\begin{aligned}
l_0 &= 2B_{0.0.0} \\
l_1 &= B^{1.0}_{3.0.0} - \frac{6\mu}{1+\delta_1} B_{3.0.0} - (1+\delta_1) A_{3.0.0} - a_1 \\
l_2 &= B^{2.0}_{0.0.0} + 6 B_{0.0.0} - \frac{21}{2} a_0 \\
l_3 &= 3B^{1.0}_{3.0.0} - \frac{18\mu}{1+\delta_1} B_{3.0.0} - 3(1+\delta_1) A_{3.0.0} \\
l_4 &= 3B^{2.0}_{0.0.0}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ist.

Da also l_0, l_1, l_2, l_3, l_4 rein erster Ordnung sind, so bestimmen wir a_0 so, dass:

$$c_0 = -3a_0 + l_0 + l_1\beta_1 + l_2\beta_1^2 + l_3\beta_1^3 + l_4\beta_1^4 = 0,$$

also:

$$a_0 = \frac{1}{3}(l_0 + l_1\beta_1 + l_2\beta_1^2 + l_3\beta_1^3 + l_4\beta_1^4) \tag{4}$$

wird. Hiermit wird auch a_0 rein erster Ordnung, wie wir voraussetzten; denn wenn z. B. l_3 rein erster Ordnung ist, so müssen, da $\beta < 1$ ist, die Producte $l_3\beta_1$, $l_3\beta_1^2$, $l_3\beta_1^3$ etc. alle kleiner als l_3 selbst und somit erst recht rein erster Ordnung sein. Und weiter wird:

$$\gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2. \tag{4 a}$$

Schließlich hatten wir für β_1 folgende Gleichung gefunden:

$$(2\delta_1 + \delta_1^2)\beta_1 = p' + p''\beta_1 + p'''\beta_1^2, \tag{5}$$

wo die $p \equiv m'$ und gegeben waren durch:

$$\left.\begin{aligned}
p' &= B_{3.0.0} - \frac{2A_{3.0.0}}{1+\delta_1} \\
p'' &= B^{1.0}_{0.0.0} + \frac{1}{2} B^{1.0}_{6.0.0} - \frac{A^{1.0}_{6.0.0}}{1+\delta_1} - \frac{1+\delta_1}{2} A_{6.0.0} - \frac{6\mu B_{6.0.0}}{1+\delta_1} + \frac{12\mu A_{6.0.0}}{(1+\delta_1)^2} \\
p''' &= \frac{1}{2} B^{2.0}_{3.0.0} + \frac{1}{4} B^{2.0}_{3.0.0} + \frac{1}{4} B^{2.0}_{9.0.0} - \frac{A^{2.0}_{3.0.0}}{1+\delta_1} + \frac{A^{2.0}_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)} - \frac{A^{2.0}_{9.0.0}}{2(1+\delta_1)} \\
&\quad - \frac{1+\delta_1}{4} A^{1.0}_{3.0.0} - \frac{1+\delta_1}{4} A^{1.0}_{9.0.0} - \frac{3\mu B^{1.0}_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)} - \frac{9\mu B^{1.0}_{9.0.0}}{2(1+\delta_1)} - \frac{3\mu A^{1.0}_{3.0.0}}{(1+\delta_1)^2} \\
&\quad + \frac{9\mu A^{1.0}_{9.0.0}}{(1+\delta_1)^2} - \frac{3}{2}\mu A_{3.0.0} + \frac{9}{2}\mu A_{9.0.0} - \frac{9\mu^2 B_{3.0.0}}{(1+\delta_1)^2} + \frac{9\mu^2 B_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)^2} \\
&\quad + \frac{81\mu^2 B_{9.0.0}}{2(1+\delta_1)^2} + \frac{18\mu^2 A_{3.0.0}}{(1+\delta_1)^3} + \frac{9\mu^2 A_{3.0.0}}{(1+\delta_1)^3} - \frac{81\mu^2 A_{9.0.0}}{(1+\delta_1)^3},
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

aus der wir nun β_1 wirklich zu bestimmen haben. Ist β_1 gefunden, so ist auch die Constante:

$$b_0 = 2a_0 + h_0 + h_1\beta_1 + h_2\beta_1^2$$

berechenbar, sobald man über a_0 verfügt hat.

Nun ist für den Typus $\frac{2}{3}$:

$$\mu = \frac{2-\delta}{3}, \quad \mu_1 = \frac{2-\delta_1}{3},$$

und es war:

$$\mu_1 = \mu(1+\gamma).$$

also $2-3\mu_1 = \delta_1$, oder $2-3\mu-3\mu\gamma = \delta_1$, mithin:

$$\delta_1 = \delta - 3\mu\gamma. \tag{7}$$

So lange nun δ_1 nicht sehr klein wird — also bei den gewöhnlichen und auch bei denjenigen charakteristischen Planeten, für welche δ_1 noch so groß ist, dass sie nicht kritisch sind — und zwar der Größenordnung nach nicht kleiner als die Quadratwurzel aus der störenden Masse, also:

$$\delta_1 \gg \sqrt{m'}$$

wird offenbar auf Grund von Gleichung (5):

$$\beta_1 \ll \sqrt{m'}.$$

Denn da mit Fortlassung des Gliedes $p'''\beta_1^2$, wodurch keine wesentliche Modification eintritt:

$$\beta_1 = +\frac{p'}{2\delta_1+\delta_1^2-p''}, \tag{8}$$

so ist, wenn $\delta_1 \gg \sqrt{m'}$ ist, offenbar p'' sehr klein gegen δ_1, denn es ist $p'' \asymp m' = \frac{1}{1000}$ und $\delta_1 \gg \sqrt{m'} = \frac{1}{32}$ oder größer; also:

$$\beta_1 \asymp \frac{p'}{2\delta_1+\delta_1^2},$$

indem man bei Bestimmung der Ordnung einer Größe ja jede kleinere, die in ihr auftritt, gegenüber einer größeren fortlassen kann. Nun ist aber auch δ_1 immer viel kleiner als 1, denn es ist ja die kleine Größe um welche μ_1 vom rationalen Bruch $\frac{2}{3}$ abweicht. Daher ist auch $\delta_1^2 < \delta_1$, also:

$$\beta_1 \asymp \frac{p}{2\delta_1},$$

und da $p' \asymp m'$ und man natürlich δ_1 und $2\delta_1$ auch als von der gleichen Ordnung zu betrachten hat, so ist:

$$\beta_1 \asymp \frac{m'}{\delta_1},$$

also, wenn $\delta_1 \gg \sqrt{m'}$:

$$\beta_1 \ll \sqrt{m'}; \quad \beta_1^2 \ll m'.$$

Verfügt man in diesem Falle über die Constante a_0 so, dass der ganze constante Theil von $\frac{dT}{dv}$ verschwindet, also $c_0+\gamma = 0$ wird, und mithin $\delta_1 = \delta$, so wäre a_0 zu bestimmen aus der Gleichung,

$$3a_0 = l_0+l_1\beta_1+l_2\beta_1^2+l_3\beta_1^3+l_4\beta_1^4+\frac{3}{2}\beta_1^2, \tag{9}$$

und dann würde offenbar:

$$a_0 \asymp m',$$

weil die größten Glieder in Gleichung (9) rein von der Ordnung der störenden Masse sind. Denn wenn:

$$a = b + c,$$

so ist jedenfalls:

$$a \asymp b, \text{ wenn } b > c,$$

aber:

$$a \asymp c, \text{ wenn } b < c$$

ist. Und da $l_1\beta_1 \ll m'$, dagegen $l_0 \asymp m'$ ist, und das größte Glied den Ausschlag für die Größenordnung gibt, so ist eben jetzt a_0 rein von der Ordnung der störenden Masse. Da aber a_0 der constante Theil von S_0 und $a_1 \asymp m'$ ist, so ist auch:

$$S_0 \asymp m'.$$

Es wird dann also S_0 hinreichend klein, was die nothwendige Bedingung für die Convergenz unserer Entwickelungen ist. Denn wenn S_0 groß wäre, so wären auch R_0, T_0 und K_0 groß und damit die Entwickelungen von P und Q, die nach R_0 und K_0 fortschreiten, divergent, was jetzt indes nicht der Fall ist.

Würde hingegen für einen Planeten:

$$\delta_1 \ll \sqrt{m'},$$

wo er dann »kritisch« wäre, und convergierte nun δ_1 gegen Null, so würde offenbar β_1 nach der Gleichung (8) immer mehr wachsen und für einen Wert von δ_1, der rein von der Ordnung m', derart, dass:

$$2\delta_1 + \delta_1^2 = +p''$$

wäre, würde $\beta_1 = \infty$. Mithin würde dann auch $\gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2$ über alle Grenzen wachsen.

Nach der Gleichung (7) aber würde, wenn γ bei constantem δ wächst, δ_1 immer größere negative Werte bekommen und daher β_1 nach Gleichung (8) immer kleiner werden, was dem obigen widerspricht.

Thatsächlich kann β_1 nicht so klein werden, dass $\beta_1 \asymp \sqrt{\delta}$ wird, und man erkennt somit vorläufig schon allgemein, dass δ_1 nicht unter eine gewisse Grenze herabsinken kann, während β_1 nicht über eine bestimmte Grenze hinauswachsen kann, deren Werte wir jetzt präcisieren wollen.

Wollte man, wenn δ_1 beliebig klein wird, also bei kritischen Planeten, a_0 so bestimmen, dass der ganze constante Theil der Differentialgleichung für die Zeitreduction verschwände, also auch $\gamma = 0$ würde, so wäre offenbar:

$$\beta_1^2 \gg m',$$

denn es ist, wenn $2\delta_1 > p'$ ist:

$$\beta_1 = + \frac{p'}{2\delta_1 + \delta_1^2 - p''} \asymp \frac{m'}{\delta_1}$$

und, wenn $2\delta_1 < p'$ ist:

$$\beta_1 \asymp \left(\frac{m'}{m'} = 1\right),$$

also $\beta_1 \asymp 1$, d. h. von der nullten Ordnung in Bezug auf die störende Masse und somit auch $a_0 \asymp 1$ und $S_0 \asymp 1$ und die Entwickelungen würden dann also divergent. Denn wenn sie auch eventuell nicht gleich divergierten, wenn S_0 nur um ein weniges größer als $\frac{1}{1048}$ würde, so würde doch, wenn z. B.

$$a_0 \asymp \frac{m'^2}{\delta_1^2},$$

offenbar a_0 sehr groß werden, wenn δ_1 sehr klein würde, die Reihen für P und Q dann also sicher divergent.

Bestimmt man indes jetzt bei Hilda a_0 aus der Gleichung:

$$3a_0 = l_0 + l_1\beta_1 + l_2\beta_1^2 + l_3\beta_1^3 + l_4\beta_1^4,$$

also so, dass:

$$c_0 = 0, \quad \text{aber} \quad \gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2$$

wird, und führt den Wert:

$$\delta_1 = \delta - \frac{9}{2}\mu\beta_1^2 \tag{10}$$

in Gleichung (5) ein, so finden wir die folgende zu discutierende Gleichung dritten Grades:

$$\beta_1^3 + s\beta_1^2 + t\beta_1 + u = 0, \tag{11}$$

in der:

$$s = \frac{p'''}{9\mu}; \quad t = \frac{p'' - 2\delta}{9\mu}; \quad u = \frac{p'}{9\mu} \tag{12}$$

ist.

Setzen wir, um das quadratische Glied zu eliminieren:

$$\beta_1 = g - \frac{s}{3}, \tag{13}$$

so erhält man an Stelle von Gleichung (11):

$$g^3 + mg + n = 0, \tag{14}$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned} m &= t - \frac{s^2}{3} \\ n &= +\frac{2}{27}s^3 - \frac{ts}{3} + u \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

ist.

Da jetzt also:

$$g^3 = -mg + n,$$

so ist, wenn $mg < n$ (was eben hier der Fall ist), doch:

$$-mg + n \eqsim n,$$

also auch:

$$g^3 \eqsim n.$$

Da aber:

$$n \eqsim m',$$

weil alle p und deshalb auch sowohl s wie t und u rein von der Ordnung der störenden Masse sind, so wird auch $g^3 \eqsim m'$ und mithin nach (13) auch.

$$\beta_1 \eqsim \sqrt[3]{m'}. \tag{16}$$

Diese Grenze also kann jetzt β_1 niemals überschreiten: Der Maximalwert, den die Störungen jemals erreichen können, ist von der Ordnung der Cubikwurzel aus der störenden Masse

Ferner folgt, wenn $\delta = 0$ wird:

$$\delta_1 = -3\mu\beta_1^2,$$

also mit Hinblick auf (16):

$$\delta_1 \eqsim \sqrt[3]{m'^2}. \tag{17}$$

Der Minimalwert, unter den jetzt δ_1 niemals herabsinken kann, wird also von der Größenordnung der Cubikwurzel aus dem Quadrat der störenden Masse.[1]

Mithin existieren, wenn factisch würde:

$$\delta_1 < \sqrt[3]{m'^2},$$

wo die Entwickelungen thatsächlich divergent werden würden, für einen solchen δ_1 Wert überhaupt keine Planeten mehr, weil eben, wie bewiesen, δ_1 der Größenordnung nach nicht kleiner werden kann als die dritte Wurzel aus dem Quadrate der Jupitermasse. Vielmehr tritt in diesem Falle eine Lücke im System der kleinen Planeten auf und somit liefert die Gyldén'sche Störungstheorie (indem auch bei den folgenden Näherungen die Convergenz sich darthun wird) für jeden δ-Wert, Null inclusive, ein convergentes Resultat. Die in dieser Hinsicht von mathematischer Seite gemachten Einwände sind nicht berechtigt.

Und es sei noch bemerkt, dass die vorstehende, für den 0. Grad entsprechend der Brendel'schen Behandlungsweise für kritische Planeten durchgeführte Entwickelung in gewisser Analogie steht zu Gyldén's horistischer Methode, insofern nämlich, als dasjenige, was Gyldén für den Grad bei Hinzuziehung der Glieder dritten Grades nachgewiesen hat, hier beim nullten Grad für die Ordnungen durchgeführt worden ist. Ganz analog der Gleichung 3. Grades, die im Vorstehenden behandelt wurde, ergibt sich bei Gyldén (cf. Nouvelles recherches pag. 11) bei Rücksichtnahme auf die Glieder dritten Grades eine Gleichung 3. Grades. Würde man in (ρ) bei Bestimmung der $\varkappa_n$ nur den ersten Grad berücksichtigen, so könnte der Fall eintreten, dass ein ς-Divisor äußerst klein oder Null wird (gerade wie im Vorstehenden δ Null werden konnte). Das Auftreten solcher »kritischen« Divisoren vermeidet eben Gyldén, indem er die Glieder dritten Grades mitnimmt, bei deren Bestimmung er zu seiner Gleichung 3. Grades in $\varkappa$ gelangt; während im Vorstehenden zur Vermeidung der verschwindend kleinen Divisoren $\delta_1 = \delta - 3\mu\gamma$ eingeführt wurde. Die Größe $3\mu\gamma$ spielt also hier diesbezüglich der Ordnungen eine ähnliche Rolle wie Gyldén's horistische Function H, welche gleichfalls die kleinen Divisoren von der Null weg begrenzt und darum eben von Gyldén als »horistische«, d. h. »begrenzende« Function bezeichnet wird. Wächst nun die mittlere Bewegung zu einem anderen Typus, so macht δ_1 einen Sprung, während es, wie in der folgenden Rechnung für Hilda gezeigt ist (cf. die »Tafel für die Änderung der mittleren Bewegung und die Lücke im Typus $\frac{2}{3}$«) auch beim Typus $\frac{2}{3}$ selbst einen Sprung macht. Somit ist also δ_1 eine unstetige Function der mittleren Bewegung, und zwar ist sie unstetig für jeden rationalen Wert $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3} \ldots$ Das steht ganz in Analogie zu Gyldén's horistischer Function H. Auch diese besitzt, wie wir später sehen werden, Umkehrstellen und, da es unendlich viele rationale Werte gibt, hat sie offenbar unendlich viele solcher »Singularitätsstellen«.

Hierzu kommt noch, dass man zwei rationale Werte wählen kann, die beliebig nahe — »überall dicht« — liegen. Die horistische Function ist daher keine analytische Function, auch fehlen ihr, wie Gyldén zeigt, die Ableitungen, und was sie leistet ist also: die Begrenzung der gefährlichen kleinen Divisoren von der Null weg, wodurch sie den auftretenden kritischen Gliedern begegnet und auf convergente Entwickelungen führt, worauf ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen werde. Der öfter wiederholte Vorwurf der Divergenz trifft nur die früheren Gyldén'schen Entwickelungen. Während von anderer Seite die Behauptung aufgestellt wurde, um tiefer in das Problem der drei Körper einzudringen, müsse die Theorie der analytischen Functionen vertieft werden, gelangt Gyldén gerade durch Einführung einer nicht analytischen Function zur horistischen, der besten Integrationsmethode, die bisher zur genäherten Lösung des Problems der drei Körper in der Astronomie aufgestellt wurde.

---

[1] Cf. auch: Gyldén, Nouvelles recherches p. 11. Ferner: Brendel, Theorie des kleinen Planeten p. 126.

Weil nun also δ_1 niemals Null werden kann, so kann auch gar nicht strenge.

$$\frac{n'}{n_1} = \mu_1 = \frac{2}{3}$$

werden, d. h. eine strenge Commensurabilität kann überhaupt nicht eintreten. Es ist aber gerade n_1 die wahre mittlere tägliche Bewegung, nicht aber n, welches als Integrationsconstante stetig alle beliebigen Werte, Null inclusive, annehmen kann. So lange man n als die mittlere tägliche Bewegung definiert, kann man natürlich zu einer Erklärung der im System der kleinen Planeten auftretenden Lücken nicht gelangen, da n als Integrationsconstante natürlich niemals Lücken aufweisen kann; während hingegen:

$$n_1 = \frac{n}{1+\gamma} \tag{18}$$

Lücken aufweisen muss, da δ_1 der Größenordnung nach nie kleiner werden kann als $\sqrt[3]{m'^2}$, und:

$$n_1 = \frac{3n'}{2-\delta_1} \tag{19}$$

ist.

Ginge man in den hier unter Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung durchgeführten Untersuchungen für Hilda weiter und nähme Glieder vierter Ordnung mit, so bliebe die Bestimmungsgleichung (20) für β_1:

$$(2\delta_1+\delta_1^2)\beta_1 = p'+p''\beta_1+p'''\beta_1^2+p''''\beta_1^3 \tag{20}$$

noch vom dritten Grade und γ definiert durch:

$$\gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2.$$

Ginge man hingegen bis zu Gliedern fünfter Ordnung:

$$(2\delta_1+\delta_1^2)\beta_1 = p'+p''\beta_1+p'''\beta_1^2+p^{\text{IV}}\beta_1^3+p^{\text{V}}\beta_1^4, \tag{21}$$

so würde

$$\gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2+\frac{15}{8}\beta_1^4$$

und die Definitionsgleichung (21) von β_1 vom fünften Grade. Ganz allgemein wäre:

$$\left.\begin{aligned}\gamma = \frac{1.3}{1.2}\beta_1^2+\frac{1}{1.2}\,\frac{1.3.5}{2^2}\beta_1^4+\frac{1}{1.2.3}\,\frac{1.3.5.7}{2^3}\beta_1^6+\frac{1}{1.2.3.4}\,\frac{1.3.5.7.9}{2^4}\beta_1^8+\\ +\ldots+\frac{1}{n!}\,\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^n}\beta_1^{2n}+\ldots = (1-\beta_1^2)^{-\frac{3}{2}}-1\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

und dieser strenge Wert, der von $\gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2$ numerisch indes nur eine kleine Abweichung ergibt, ist der folgenden numerischen Rechnung zugrunde gelegt. Die Reihe (21), die gleichfalls unbegrenzt fortsetzbar ist, convergiert, weil, wie aus der Entwickelung der Störungsfunction hervorgeht, $\frac{p^{(n)}}{p^{(n-1)}}$ sich mit wachsendem n der Einheit nähert und demnach $\frac{p^{(n)}}{p^{(n-1)}}\beta_1^n$ einer Grenze zustrebt, die kleiner als 1 ist. Wie rasch die Reihe convergiert, darüber kann man a priori nichts aussagen; jedenfalls aber hat man praktisch in der numerischen Rechnung keinesfalls weit in der Reihe zu gehen. Ob Glieder vierter Ordnung beim Typus $\frac{2}{3}$ numerisch überhaupt noch in Betracht kommen, bleibt der weiteren Untersuchung vorbehalten. Vorläufig gebe ich hier die Resultate, welche ich für Hilda unter Berücksichtigung inclusive von Gliedern dritter Ordnung gefunden habe.

B. Die numerische Rechnung für Hilda.

Um zunächst den kritischen δ-Wert zu eruieren, für welchen die Lücke auftritt, wurde für δ als Argument eine Reihe von β_1-Werten aus der cubischen Gleichung (14) gerechnet, wie die am Schluss gegebene »Tafel für die Änderung der mittleren Bewegung und die Lücke im Typus $\frac{2}{3}$« angibt. Dabei zeigte sich, dass das kritische δ liegen müsse zwischen 8.450 und 8.460. Den kritischen δ-Wert, für welchen die Bedingung der Lücke:

$$1+\frac{4}{27}\,\frac{m^3}{n^2}=0 \tag{23}$$

sechsstellig am nächsten erfüllt ist, fand ich zunächst durch ein Näherungsverfahren, das rechnerisch indes sehr weitläufig ist. Deshalb will ich ihn hier principiell bestimmen und setze dazu in Gleichung (15) zur Abkürzung:

$$\frac{2}{27}s^3+u=f.$$

Dann wird die kritische Bedingung (23):

$$27\left(f-\frac{ts}{3}\right)^2+4\left(t-\frac{s^2}{3}\right)^3=0.$$

Dies ist eine cubische Gleichung in t. Zur Elimination des quadratischen Gliedes werde gesetzt:

$$t=l+\frac{s^2}{12},$$

dann ergibt sich nach einer kleinen Rechnung zunächst eine cubische Gleichung in l, nämlich:

$$l^3+rl+p=0,$$

wobei:

$$r=-\frac{9}{2}us-\frac{1}{48}s^4$$

$$p=\frac{27}{4}u^2+\frac{5}{8}us^3-\frac{1}{864}s^6$$

ist, und u wie s, was sich gleich zeigen wird, constante Größen sind, die sich aus den Störungsgliedern der ersten und der dritten Ordnung berechnen lassen. Der Wurzelwert von l aber ist:

$$l=\sqrt[3]{\frac{-r+\sqrt{r^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-r-\sqrt{r^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}},$$

und zwar ergibt sich auf Grund der im folgenden für s und u gefundenen Werte numerisch:

$$\log l=8.099936_n-10$$

und damit:

$$\log t=8.099279_n-10.$$

Mittelst des im folgenden berechneten Wertes der Glieder zweiter Ordnung, p'', aber erhält man hiernach für δ aus:

$$\delta = \frac{p'' - 9\mu t}{2}$$

$$\log \delta = 8.453130,$$

ein Wert, der die kritische Bedingung (23), indem sich m und n aus (15) ergeben, indes noch nicht völlig erfüllt, da bei der Berechnung von l, selbst wenn man die höheren Stellen beim Ausziehen der Quadratwurzel sehr weit berücksichtigt, eine gewisse Ungenauigkeit unvermeidlich ist, was mit daher rühren dürfte, dass das Glied $\frac{s^6}{864}$ in p numerisch gänzlich fortfällt. Mit obigem δ Wert findet man nämlich:

$$1 + \frac{4}{27}\,\frac{m^3}{n^2} = -0.000035.$$

Nun überzeugt man sich aber leicht, dass, wenn δ wächst, auch $\frac{m^3}{n^2}$ wächst. Daher braucht man den gefundenen δ-Wert offenbar in den letzten Stellen nur ein wenig zu verkleinern und erhält so sofort als das kritische δ, welches die Bedingung der Lücke sechsstellig am nächsten erfüllt:

$$\log \delta = 8.453120.$$

In der That wird für diesen δ-Wert:

$$1 + \frac{4}{27}\,\frac{m^3}{n^2} = -0.000002,$$

während für die beiden benachbarten δ-Werte:

$$\log \delta = \begin{cases} 8.453119 \\ 8.453121 \end{cases}$$

sich:

$$1 + \frac{4}{27}\,\frac{m^3}{n^2} = \begin{cases} +0.000005 \\ -0.000005 \end{cases}$$

ergibt.

Auf Grund der im zweiten Capitel durchgeführten numerischen Entwickelung der Störungsfunction für den Planeten **Hilda** ergeben sich zur Berechnung der Störungen 0ten Grades bis zur dritten Ordnung inclusive zunächst nach den Formeln (19) desselben Capitels aus den γ folgende Werte für die Ω, die, wie alle folgenden Zahlenwerte, zweimal unabhängig ermittelt wurden:

$$\left.\begin{array}{lll}
\log \Omega_{3.0.0} = 9.176240 & \log \Omega_{6.0.0} = 8.689615 & \log \Omega_{9.0.0} = 8.252822 \\
\log \Omega_{3.1.0} = 9.788548\,n & \log \Omega_{6.1.0} = 9.546530\,n & \log \Omega_{9.1.0} = 9.263056\,n \\
\log \Omega_{3.2.0} = 0.283070 & \log \Omega_{6.2.0} = 0.196703 & \log \Omega_{9.2.0} = 0.033433 \\
\log \Omega_{3.3.0} = 0.768115\,n & \log \Omega_{6.3.0} = 0.763357\,n & \log \Omega_{9.3.0} = 0.688875\,n
\end{array}\right\} \quad (24)$$

Aus den Ω ergeben sich die P und Q auf Grund der Formeln (24):

$$\left.\begin{array}{lll}
\log P_{3.0.0} = 9.788548 & \log P_{6.0.0} = 9.546530 & \log P_{9.0.0} = 9.263056 \\
\log P_{3.1.0} = 0.586100\,n & \log P_{6.1.0} = 0.497733\,n & \log P_{9.1.0} = 0.334463\,n \\
\log P_{3.2.0} = 1.245236 & \log P_{6.2.0} = 1.240478 & \log P_{9.2.0} = 1.165996 \\
 & & \\
\log Q_{3.0.0} = 9.176240 & \log Q_{6.0.0} = 8.689615 & \log Q_{9.0.0} = 8.252822 \\
\log Q_{3.1.0} = 9.961250\,n & \log Q_{6.1.0} = 9.653076\,n & \log Q_{9.1.0} = 9.340517\,n \\
\log Q_{3.2.0} = 0.557153 & \log Q_{6.2.0} = 0.384477 & \log Q_{9.2.0} = 0.176157
\end{array}\right\} \quad (25)$$

Damit ergeben sich für die Entwickelungscoefficienten A und B der partiellen Derivierten Q und P der Störungsfunction Ω mittelst (44) die Werte:

$$\left.\begin{array}{lll}
\log A_{3.0.0} = 9.954391\,n & \log A_{6.0.0} = 9.768796\,n & \log A_{9.0.0} = 9.508095\,n \\
\log A^{1.0}_{3.0.0} = 0.739401 & \log A^{1.0}_{6.0.0} = 0.732257 & \log A^{1.0}_{9.0.0} = 0.595820 \\
\log A^{2.0}_{3.0.0} = 1.335304\,n & \log A^{2.0}_{6.0.0} = 1.463658\,n & \log A^{2.0}_{9.0.0} = 1.431430\,n \\
 & & \\
\log B_{3.0.0} = 0.089578 & \log B_{6.0.0} = 9.847560 & \log B_{9.0.0} = 9.564086 \\
\log B^{1.0}_{3.0.0} = 0.887130\,n & \log B^{1.0}_{6.0.0} = 0.798763\,n & \log B^{1.0}_{9.0.0} = 0.635493\,n \\
\log B^{2.0}_{3.0.0} = 1.546266 & \log B^{2.0}_{6.0.0} = 1.541508 & \log B^{2.0}_{9.0.0} = 1.467026 \\
 & \log B^{1.0}_{0.0.0} = 0.533421\,n &
\end{array}\right\} \quad (26)$$

An dieser Stelle controliren wir indes diese sämmtlichen A- und B-Werte, indem wir sie noch einmal, und zwar nach der zweiten Gyldén'schen Methode, wie sie im zweiten Capitel auseinandergesetzt wurde, berechnen. Auf Grund der dort gegebenen Formeln (61 *b*), welche die A und B direct als Functionen der ϑ geben, erhält man, unter Berücksichtigung der im zweiten Capitel für die »ϑ« für Hilda gefundenen numerischen Werte (87), folgende Resultate für die A- und B-Coefficienten:

$$\left.\begin{array}{lll}
\log A_{3.0.0} = 9.954391\,n & \log A_{6.0.0} = 9.768796\,n & \log A_{9.0.0} = 9.508095\,n \\
\log A^{1.0}_{3.0.0} = 0.739401 & \log A^{1.0}_{6.0.0} = 0.732256 & \log A^{1.0}_{9.0.0} = 0.595821 \\
\log A^{2.0}_{3.0.0} = 1.335304\,n & \log A^{2.0}_{6.0.0} = 1.463658\,n & \log A^{2.0}_{9.0.0} = 1.431431\,n \\
\log B_{3.0.0} = 0.089579 & \log B_{6.0.0} = 9.847561 & \log B_{9.0.0} = 9.564086 \\
\log B^{1.0}_{3.0.0} = 0.887129\,n & \log B^{1.0}_{6.0.0} = 0.798763\,n & \log B^{1.0}_{9.0.0} = 0.635493\,n \\
\log B^{2.0}_{3.0.0} = 1.546266 & \log B^{2.0}_{6.0.0} = 1.541506 & \log B^{2.0}_{9.0.0} = 1.467027, \\
 & \log B^{2.0}_{0.0.0} = 0.533420\,n, &
\end{array}\right\} \quad (26a)$$

die sich in Übereinstimmung mit den zuvor gefundenen Werten (26) befinden.

Mit diesen Werten berechnete ich nun die Glieder der ersten, zweiten und dritten Ordnung p', p'', p''' auf Grund der Formeln (6) dieses Capitels. Dabei wurde δ_1, welches später bestimmt werden wird, bei der ersten Näherung zunächst Null gesetzt. Das Verhältnis μ folgt aus:

$$\mu = \sqrt{\alpha^3(1+m')},$$

wobei die Jupitermasse zu:

$$\log m' = 6.9796387$$

und für α der Ausgangswert der ganzen Rechnung:

$$\log \alpha = 9.8810475$$

angenommen wurde. So ergab sich:

$$\left.\begin{array}{l}
\log \mu = 9.821778 \\
\log p' = 7.461038-10 \\
\log p'' = 8.261640\,n-10 \\
\log p''' = 8.951316-10,
\end{array}\right\} \quad (27)$$

wobei p', p'', p''' die Jupitermasse bereits enthalten, indem nach den früheren Entwickelungen alle A und B mit m' zu multiplicieren sind, was nicht zu vergessen ist, wenn man aus den A und B die Störungen rechnet.

Für die Coefficienten der cubischen Gleichung (11) folgt:

$$\left.\begin{aligned}\log s &= 8.175295-10\\ \log n &= 6.685017-10.\end{aligned}\right\}\qquad(28)$$

Hingegen wird man für t offenbar einen verschiedenen Wert erhalten, je nachdem man δ variiert. Und zwar ertheilte ich δ die im Argument der folgenden Tafel angegebenen Werte, welche in der Nähe der Lücke eng gewählt sind, um den Verlauf der mittleren Bewegung in unmittelbarster Nachbarschaft der Lücke verfolgen zu können. Aus der folgenden Tafel kann man dann auch, nachdem δ_1 aus den Beobachtungen bestimmt ist, wozu jedoch erst die weiteren Entwickelungen für den Hilda-Typus fertig gestellt sein müssen, das zu dem δ_1 von Hilda gehörige β_1 und n_1 und somit die unbekannte mittlere Bewegung des Planeten Hilda bestimmen. Eine ähnliche Tafel wie die folgende für β_1 wird später bei Berechnung der Störungen ersten Grades für $\beta_2 \ldots \beta_5$ berechnet werden, aus der man in analoger Weise die zu Hilda gehörigen Werte der $\beta_2 \ldots \beta_5$ entnimmt, und analog beim zweiten Grad.

Indem wir nun δ die 22 in der folgenden Tafel als Argument enthaltenen Werte ertheilen, folgen zunächst nach (11) ebensoviel cubische Gleichungen mit numerisch gegebenen Coefficienten. Eliminiert man aus denselben mit Hinblick auf die Formeln (13) bis (15) das quadratische Glied, so erhält man das folgende System reducierter cubischer Gleichungen, welches uns zur Discussion der mittleren Bewegung des Typus $\frac{2}{3}$ dienen soll:

$\log\delta$	$g^3+\quad mg\quad+\quad n\quad=0$		
$8.086318\,n$	$g^3+[6.978760\;]g+[6.680620]=0$		(29)
$7.498640\,n$	$g^3+[7.317654n]g+[6.694112]=0$		
$7.331930\,n$	$g^3+[7.382855n]g+[6.695585]=0$	$1+\frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2}>0$	
$7.057810\,n$	$g^3+[7.439545n]g+[6.697054]=0$		
$-\infty$	$g^3+[7.490100n]g+[6.698716]=0$		
7.012481	$g^3+[7.541422n]g+[6.700209]=0$		
7.897473	$g^3+[7.761879n]g+[6.710042]=0$		
8.138964	$g^3+[7.889128n]g+[6.718277]=0$		
8.363193	$g^3+[8.036006n]g+[6.731015]=0$		
8.406714	$g^3+[8.067414n]g+[6.734285]=0$		
8.417544	$g^3+[8.075365n]g+[6.735146]=0$		
8.453120	**$g^3+[8.101847n]g+[6.738118]=0$**	$1+\frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2}=0$	
8.453144	$g^3+[8.101864n]g+[6.738120]=0$	$1+\frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2}<0$	
8.453219	$g^3+[8.101920n]g+[6.738127]=0$		
8.453590	$g^3+[8.102200n]g+[6.738159]=0$		
8.458139	$g^3+[8.105626n]g+[6.738557]=0$		
8.462593	$g^3+[8.108990n]g+[6.738948]=0$		
8.473633	$g^3+[8.117363n]g+[6.739937]=0$		
8.484601	$g^3+[8.125733n]g+[6.740942]=0$		
8.495447	$g^3+[8.134059n]g+[6.741958]=0$		
8.506412	$g^3+[8.142525n]g+[6.743009]=0$		
8.538897	$g^3+[8.167886n]g+[6.746267]=0$		

Allgemein ist nun die Lösung einer cubischen Gleichung:

$$g^3+mg+n=0$$

gegeben:

I. Wenn $1+\frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2}>0$ ist, durch die eine reelle Wurzel:

$$g=\sqrt[3]{\frac{-n+\sqrt{n^2+\frac{4}{27}m^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-n-\sqrt{n^2+\frac{4}{27}m^3}}{2}}. \tag{30}$$

II. Wenn $1+\frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2}=0$ ist, durch drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind, nämlich durch:

$$\left.\begin{aligned} g_1=g_2&=+\sqrt[3]{\frac{n}{2}}\\ g_3&=-2\sqrt[3]{\frac{n}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

III. Wenn $1+\frac{4}{27}\frac{m^3}{n^2}<0$ ist, durch drei reelle Wurzeln. In diesem Falle löst man die cubische Gleichung bekanntlich trigonometrisch, indem man setzt:

$$\sin 3\alpha=n\sqrt{-\frac{27}{4m^3}} \tag{32}$$

und erhält die drei Wurzeln:

$$\left.\begin{aligned} g_1&=\sqrt{-\frac{4}{3}m}\ \sin\alpha\\ g_2&=\sqrt{-\frac{4}{3}m}\ \sin(60-\alpha)\\ g_3&=-\sqrt{-\frac{4}{3}m}\ \sin(60+\alpha) \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Eine Controle der Cardanischen Formel (30) für die numerische Rechnung erhält man durch eine trigonometrische Substitution. Äquivalent der Formel (30) ist nämlich:

1. wenn $m>0$ ist:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}2\omega&=\frac{2}{n}\sqrt{\frac{1}{27}m^3}\\ g&=\sqrt{\frac{m}{3}}\ \sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega}-\frac{\sqrt{\frac{m}{3}}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega}} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

2. wenn $m<0$ ist:

$$\sin 2\omega=\frac{2}{n}\sqrt{-\frac{m^3}{27}}$$

$$g=-\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{m^3}{27}}\,.\operatorname{tg}\omega}-\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{m^3}{27}}\,.\operatorname{cotg}\omega} \tag{35}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\omega &= \frac{1}{n}\sqrt[2]{\frac{4}{27}(-m^3)} \\ g &= \sqrt[3]{n}\sin^2\omega - \sqrt[3]{n}\cos^2\omega. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

In unserem Systeme (29) lassen also die ersten 11 Gleichungen je eine Lösung zu; die Gleichung (12) hat zwei Lösungen; während die letzten 10 Gleichungen zwar je drei Lösungen besitzen, von denen jedoch die erste der beiden durch:

$$g_2 = \sqrt{-\frac{4}{3}m}\,\sin(60-\alpha)$$

und:

$$g_3 = \sqrt{-\frac{4}{3}m}\,\sin(60+\alpha)$$

dargestellten Wurzelserien nicht die Eigenschaft besitzt, mit wachsendem δ_1 abzunehmen und deshalb, wie ein Blick auf unsere Tafel lehrt, astronomisch ausgeschlossen ist; während die zweite zu verwerfen ist, weil sonst δ_1 die Null erreichen würde, während es, wie wir sahen, höchstens von der Ordnung $\sqrt[3]{m'^2}$ werden kann. Astronomisch lassen also alle Gleichungen des Systems (29) nur eine einzige Lösung zu, mit alleiniger Ausnahme der Gleichung (12) für das kritische δ, welche zwei Lösungen besitzt, und die Grenzen der Lücke des Typus $\frac{2}{3}$ im System der kleinen Planeten in erster Näherung definiert. Nach Lösung des Systems (29) folgen aus den Wurzeln g die ursprünglich gesuchten Wurzeln β_1 gemäß Gleichung (13):

$$\beta_1 = g - \frac{s}{3}.$$

Die in unserer Tafel gegebene Wurzelserie des Casus irreducibilis, welche aus $g = \sqrt{-\frac{4}{3}m}\,\sin\alpha$ hervorgeht, hingegen nimmt ab, wenn δ_1 wächst und stellt den weiteren Verlauf der mittleren Bewegung jenseits der Lücke dar. Eine Controle für die Richtigkeit der gefundenen Wurzelwerte, speciell derjenigen des casus irreducibilis, die nur auf eine Weise bestimmt wurden, erhält man, indem man die β_1 in Gleichung (11) einsetzt, so t bestimmt, dann mittelst dieser gefundenen t-Werte m und n berechnet, ferner g aus $g = \beta_1 + \frac{1}{3}s$ bestimmt und hierauf die so erhaltenen g-Werte in Gleichung (14) einsetzt. Man überzeugt sich, dass in der That die in der folgenden Tafel für β_1 gegebenen Werte sämmtlich die Gleichung (14) erfüllen.

Nachdem die zu den verschiedenen δ gehörigen Werte β_1 nach den Formeln (30) bis (36) berechnet worden waren, wurde weiter gerechnet nach dem früheren γ aus:

$$\gamma = \frac{1}{(1-\beta_1^2)^{\frac{3}{2}}} - 1. \tag{37}$$

Hierauf δ_1 aus:

$$\delta_1 = \delta - 3\mu\gamma. \tag{38}$$

Die wahre mittlere tägliche Bewegung des Typus $\frac{2}{3}$ gemäß der Definition $\mu_1 = \frac{2-\delta_1}{3}$ aus:

$$n_1 = \frac{3n'}{2-\delta_1} \tag{39}$$

und die Bewegungsconstante n (welche also Integrationsconstante ist, während man statt ihrer a auch als Integrationsconstante betrachten kann) aus:

$$n = \frac{3n'}{2-\delta}. \tag{40}$$

So erhielt ich die folgende Tafel, welche nicht nur einen Einblick in den Verlauf der mittleren Bewegung n_1 an den Grenzen der Lücke und diese letztere selbst gibt, sondern später, nachdem wir δ_1 bestimmt haben, auch das zu Hilda gehörige β_1 und n_1 liefert:

Tafel für die Änderung der mittleren Bewegung und die Lücke im Typus $\frac{2}{3}$.

$\log \delta$	$\log \beta_1$	$\log \gamma$	$\log \delta_1$	Wahre mittlere Bewegung n_1	n
8.086318 *n*	8.898718 *n*	7.976979	8.492389 *n*	441.8290	445.9722
7.498640 *n*	8.967517 *n*	8.115727	8.464365 *n*	442.2510	447.0867
7.331930 *n*	8.974389 *n*	8.129660	8.462083 *n*	442.2850	448.2111
7.057810 *n*	8.981119 *n*	8.143232	8.459696 *n*	442.3190	448.4367
$-\infty$	8.988598 *n*	8.158433	8.457332 *n*	442.3530	448.6930
7.012481	8.995184 *n*	8.171761	8.455269 *n*	442.3830	448.9230
7.897473	9.035752 *n*	8.254036	8.444431 *n*	442.5350	450.4710
8.138964	9.066330 *n*	8.316165	8.438460 *n*	442.6190	451.8040
8.363193	9.108522 *n*	8.402139	8.433045 *n*	442.6810	453.9300
8.406714	9.118485 *n*	8.422503	8.433613 *n*	442.6850	454.4900
8.417544	9.121058 *n*	8.427749	8.433544 *n*	442.6860	454.6380
Argument der Lücke:					
8.453120	**9.129774** *n*	**8.445567**	**8.433531** *n*	Die Lücke **442.6860**	**455.1522**
	8.777622	**7.733141**	**8.246041**	**452.6820**	
8.453144	8.774813	7.727503	8.249488	452.7140	455.1533
8.453219	8.771739	7.721474	8.253173	452.7478	455.1544
8.453590	8.764691	7.707372	8.261793	452.8300	455.1600
8.458139	8.734760	7.647111	8.298547	453.1990	455.2290
8.462593	8.718284	7.614014	8.318689	453.4150	455.2970
8.473633	8.689010	7.555204	8.354365	453.8233	455 4700
8.484601	8.666502	7.510171	8.381627	454.1600	455.6467
8.495447	8.647368	7.471361	8.404852	454.4644	455.8240
8.506412	8.629959	7.436938	8.425700	454.7522	456.0100
8.538897	8.585006	7.346887	8.479461	455.5633	456.5889

(41)

Aus dieser Tafel erkennt man, dass für den Typus $\frac{2}{3}$ die Maximalwerte, welche β_1 jemals erreichen kann, bezüglich:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -0.135\ldots \\ \beta_1 &= +0.060\ldots \end{aligned} \tag{42}$$

sind, und dass entsprechend diesen Werten stets sein muss:

$$\begin{aligned} \delta_1 &< -0.027\ldots \\ \delta_1 &> +0.018\ldots \end{aligned} \tag{43}$$

Damit muss also die wahre tägliche Bewegung eines Planeten der Hilda-Gruppe stets sein:

$$\begin{aligned} n_1 &< 442''.69 \\ n_1 &> 452''.68, \end{aligned} \tag{44}$$

womit bewiesen, dass zwischen diesen beiden Werten der mittleren Bewegung überhaupt keine Planeten vorkommen können, sondern eine Lücke im System der kleinen Planeten auftreten muss.

Die Grenzen der Lücke ohne Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung sind $44''.38$ und $451''.9$.

Bei Mitnahme von Gliedern erster und zweiter Ordnung allein beträgt die Lücke also $8''.1$, bei Mitnahme von Gliedern erster, zweiter und dritter Ordnung aber beträgt die Lücke $10''.0$. Man sieht also, dass sich infolge der Mitnahme der Glieder dritter Ordnung die Lücke nicht allein wesentlich verschiebt, nämlich von $443''.8$ bis $451''.9$ nach $442''.7$ bis $452''.7$, sondern dass sie sich auch um $1''.9$, also nahezu um zwei ganze Secunden erweitert. Indes ist diese so bestimmte Lücke noch nicht mit der wirklich im System der kleinen Planeten auftretenden Lücke des Hilda-Typus identisch, da wir die Störungen höheren Grades noch nicht berücksichtigt haben. Und sie ist auch für den nullten Grad numerisch noch nicht völlig exact bestimmt, da wir vorläufig δ_1 bei Berechnung der Glieder erster, zweiter und dritter Ordnung in den Gleichungen (6) dieses Capitels Null gesetzt und auch noch den Einfluss der Glieder vierter Ordnung zu untersuchen haben. Es wird von Interesse sein, zu sehen, wie sich die Grenzen der im Vorstehenden bestimmten Lücke bei Mitnahme der zu berücksichtigenden Störungen höheren Grades und von δ_1, sowie der Glieder vierter Ordnung verändern, was neben der numerischen Berechnung der Bahn selbst von Hilda zu zeigen der Fortsetzung dieser Untersuchungen vorbehalten bleibt.

Jedenfalls ist es der neuen, von Gyldén geschaffenen Störungstheorie zu danken, dass die wichtigsten mechanischen Probleme des Planetensystems, welche für die theoretische Astronomie vorher unlösbare Fragen waren, nun zugänglich geworden und sicher und verhältnismäßig einfach zu erledigen sind.

Jena, im März 1901.

Hugo Buchholz.