FORTGESETZTE UNTERSUCHUNG

DER

BEWEGUNG VOM TYPUS 2/3 IM PROBLEM DER DREI KÖRPER

AUF GRUND DER

GYLDÉN'SCHEN STÖRUNGSTHEORIE

VON

DR. HUGO BUCHHOLZ,

PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT HALLE A. S.

ZWEITER TEIL.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 17. MÄRZ 1904.

Inhaltsverzeichnis.

Siebentes Kapitel.

Die Integration der Differentialgleichung des Sinus der Breite für die Glieder ersten und zweiten Grades im Typus 2/3.

Achtes Kapitel.

Die Bestimmung der exargumentalen Glieder dritten Grades für den Typus 2/3.

Einleitung.

Im folgenden sind die Ergebnisse meiner weiteren Studien über die Bewegung der Planeten der Hilda-Gruppe auf Grund der Gyldén'schen Störungstheorie, speziell auf Grund des linearen, Gyldén-Brendel'schen Integrationsverfahrens gegeben. Dabei habe ich jedoch die partielle Integration Gyldén's in dieser zweiten Abteilung meist durch die partielle Differentiation und Koeffizientenvergleichung ersetzt, weil sich dadurch die für den Typus $\frac{2}{3}$ beim zweiten Grad komplizierte Behandlungsweise der Differentialgleichungen zweiter Ordnung des Radius Vector und der Breite besonders übersichtlich gestaltet. (Hinsichtlich des Prinzipes cf. Abteilung I, S. 438 und 443.)

Nachdem ich in Abteilung I[1] zunächst in den zwei ersten Kapiteln eine kurze Einleitung in die Gyldén'schen Grundprinzipien vorausgeschickt, hierauf im dritten Kapitel die Bestimmung der »elementären« und »charakteristischen« Glieder für den Typus $\frac{2}{3}$ ausführlich dargetan hatte, im Hinblick auf Gyldén's neue Prinzipien den didaktischen Gesichtspunkt festzuhalten bemüht, führte ich im vierten Kapitel die Integration für den nullten und ersten Grad mittelst der partiellen Integration vollständig durch, um schließlich im fünften Kapitel eine provisorische numerische Anwendung bezüglich der Grenzen der Lücke zu geben, die im System der kleinen Planeten bei Hilda auftritt und ein so interessantes, bis Gyldén nicht erklärbares Phänomen im Planetensystem bildet.

In dieser zweiten Abteilung meiner fortgesetzten Untersuchungen über den Typus $\frac{2}{3}$ habe ich zunächst im sechsten Kapitel die Störungen zweiten Grades für den Radius Vektor, soweit sie in Betracht kommen, bestimmt, wobei sich die analytischen Entwicklungen, deren Umständlichkeit mit dem Grade wächst, bereits wesentlich komplizierter erweisen als beim ersten Grad. Dabei habe ich auch in dieser Abteilung bei den Entwicklungen für den schwierigen, überhaupt noch nicht behandelten Planetentypus $\frac{2}{3}$ doch dem didaktischen Gesichtspunkt Rechnung zu tragen versucht und mich bestrebt, die Darstellung so einfach und natürlich wie möglich zu geben.

Im siebenten Kapitel habe ich die Breitenstörungen bis inklusive zum zweiten Grad entwickelt und im achten Kapitel mit der wiederum wesentlich umfangreicheren Entwicklung der Störungsglieder dritten Grades insofern den Anfang gemacht, als daselbst die Berechnung der in bestimmten exargumentalen Gliedern bestehenden Hauptbeträge der Störungen dritten Grades ausgeführt ist, und zwar für den Radius Vector, für die Breite und für die Zeitreduktion (Länge). Wohingegen die Berechnung der Störungen zweiten Grades für die Zeitreduktion, ferner die vollständige Angabe aller für den Typus $\frac{2}{3}$ spezialisierten, für die numerische Rechnung in Betracht kommenden Entwicklungskoeffizienten der Derivierten P, Q, Z der Störungsfunktion bis zum dritten Grad inklusive und die weitere Integration für den dritten Grad, dazu die Berechnung der von der Neigung herrührenden Störungsglieder, sowie schließlich der konstanten Glieder in $S, R, T, \mathfrak{Z}$, der elementären Glieder der Form A, die zweiten Grades sind und der Integrationskonstanten der dritten und letzten Abteilung dieser, zunächst noch ohne Anwendung durchgeführten, rein theoretischen Untersuchungen vorbehalten bleibt. Zugleich werde ich dieser dritten Abteilung ein alle Einzelheiten des theoretischen Weges umfassendes Schema für die numerische Anwendung samt einem Resumé der bei unserer Darstellung prinzipiell innegehaltenen Genauigkeitsgrenze beifügen.

---

[1] Denkschr. d. math.-naturw. Kl. d. kais. Akad. d. Wissensch. zu Wien, Bd. LXXII, S. 309–473.

Die vorliegenden, mittelst der lineären Integrationsmethode durchgeführten Untersuchungen beanspruchen als solche, wie in Abteilung I bereits hervorgehoben wurde, noch nicht, die von Gyldén als letztes Ziel ins Auge gefaßte »absolute Bahn« eines Planeten der Hilda-Gruppe zu geben und machen daher auch nicht den Anspruch, auf gleichförmig konvergente, unbeschränkt gültige Entwicklungen für die Koordinaten eines Planeten vom Typus $\frac{2}{3}$ zu führen. Sie sehen es vielmehr zunächst nur auf eine für beschränkte Zeit gültige Lösung einer kommensurablen Bewegung ab, welche die analytische Störungstheorie bis Gyldén nicht zu geben im stande war. Indem die vorliegenden Entwicklungen also unter Verwendung der neuen von Gyldén gegebenen störungstheoretischen Gesichtspunkte einen im Planetensystem wirklich auftretenden fundamentalen Fall behandeln, stehen sie doch selbst von vorneherein auf einem prinzipiell vollkommen einwandsfreien und auch bisher von keiner Seite theoretisch angefochtenen Boden: dem des lineären Integrationsverfahrens. Dies sei vorerst betont.

In Wahrheit freilich befindet man sich auf theoretisch nicht minder einwandsfreiem Boden auch bei Anwendung von Gyldén's horistischer Integrationsmethode, die neuerdings wieder ganz zu Unrecht angegriffen, gerade den entscheidenden Fortschritt in Bezug auf die Konvergenzfrage in Gyldén's Theorie bezeichnet.

In seinem prinzipiell bedeutsamsten Werk, den Nouvelles recherches,[1] seiner großen Antwort auf Poincaré's »Preisarbeit« — der Jahre 1889/90 — gibt Gyldén die Hauptzüge dieser seiner letzten, mathematisch kompliziertesten horistischen Methode an. Über die Entstehungsgeschichte der Gyldén'schen Nouvelles recherches, welche auf das innigste mit jenen Vorgängen zusammenhängt, die sich im Jahre 1889 und im Jahre 1890 bei der internationalen Preisbewerbung um den großen Königspreis in Stockholm abspielten, habe ich im Interesse Gyldén's vor kurzem in der physikalischen Zeitschrift[2] bereits einiges berichtet.

In meinen vorliegenden Untersuchungen über den Typus $\frac{2}{3}$, die im Verein mit meinen anderen Arbeiten über Gyldén's Theorie in letzter Instanz das Ziel verfolgen, durch die vollständige Anwendung der Gyldén'schen Prinzipien auf einen bestimmten Einzelfall des Planetensystems die Bedeutung und den großen Fortschritt der Gyldén'schen Theorie vor der alten Störungstheorie durch die Praxis nachzuweisen, d. h. numerisch durch Vergleich der gewonnenen Resultate mit den Beobachtungen, gedenke ich jedes der zwei Gyldén'schen Integrationsverfahren nacheinander zur Anwendung zu bringen, um ihre Resultate in einem und demselben Fall miteinander vergleichen zu können. Denn bloß so wird man den bis jetzt noch gänzlich ausstehenden Aufschluß erlangen können, was beide Methoden, die lineäre wie die horistische, in äußerster Konsequenz ausgebildet und angewendet, faktisch leisten. Darum zunächst in den beiden vorliegenden und dem noch erscheinenden dritten Teil dieser Untersuchungen die detaillierte Ausführung der lineären Integration für den Typus $\frac{2}{3}$ in einem solchen Umfang, daß sich eine numerische Anwendung auf einen bestimmten, zunächst nicht zu kompliziert gewählten Planeten der Hilda-Gruppe direkt anschließen kann und die Aussicht auf Erfolg nach prinzipiellem Ermessen eine möglichst sichere wird.

---

[1] H. Gyldén. Nouv. rech. sur les séries employées dans les théories des planètes. Acta Mathematica, XV, 1891, 65; XVII, 1892, I.

[2] H. Buchholz. Poincaré's Preisarbeit von 1889/90 und Gyldén's Forschung über das Problem der drei Körper in ihren Ergebnissen für die Astronomie. Historisch kritische Erläuterungen zu Herrn Schwarzschild's historischem Referat über Himmelsmechanik auf der Naturforscherversammlung in Cassel am 24. September 1903. Physik. Zeitschrift Nr. 7, 5. Jahrgang, 1. April 1904. Hierzu vergleiche man auch den interessanten Aufsatz von G. Eneström: »Ist es zweckmäßig, daß mathematische Zeitschriftenartikel datiert werden?« Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathem. Wissenschaften, dritte Folge, V. Band, 2. Heft.

Das gleiche Beispiel muß dann unter verschiedenen theoretischen Modifikationen, in erster Linie unter Berechnung der Zeitreduktion mittelst elliptischer Funktionen an Stelle der Doppelquadratur und unter Einführung des horistischen Verfahrens beim Radius Vektor, sowie der absoluten Elemente mittelst der horistischen Methode, zunächst theoretisch, danach numerisch behandelt werden. Denn bloß so wird man ein sicheres Urteil in der Frage erlangen, ob das horistische Verfahren auch in einem einfacheren Fall, den ich zunächst behandeln werde: einer nicht zu großen Exzentrizität und von nicht zu kleinem δ_1, also nicht zu nahe erfüllter Kommensurabilität praktisch zu besseren Resultaten führt, d. h. die Beobachtungen wirklich genauer darstellt als das lineäre Verfahren, das nur für beschränkte Zeiträume gültige Resultate gibt, Resultate, die also hinsichtlich ihrer zeitlichen Gültigkeit keinen Vorzug vor der alten Störungstheorie besitzen. Hingegen lassen sich mittelst der lineären Integrationsmethode Gyldén's Resultate auch in solchen Fällen (wie dem von uns behandelten) noch erlangen, bei deren Behandlung die analytische Störungstheorie bis Gyldén, wie schon erwähnt, versagt; abgesehen von den übrigen Vorzügen des lineären Verfahrens. Wogegen das horistische Verfahren rein prinzipiell betrachtet, allein insofern schon ganz ohne Frage prävaliert, als es die Differentialgleichung für die Zeitreduktion durch eine gleichförmig konvergente Entwicklung im mathematischen Sinne löst. In einer Abhandlung in den Nova Acta[1] habe ich, in vollständiger Detailklarlegung der kurz gehaltenen komplizierten Originalentwicklungen von § 6 der Gyldén'schen Nouvelles recherches, Schritt für Schritt den Beweis hiefür erbracht.

Im Hinblick auf den Sachverhalt muß es befremden, wie Herr Poincaré seine neueste Polemik in den Comptes rendus gegen Gyldén's horistische Methode einleitet, die in zwei verschiedenen Verfahren besteht, je nachdem es sich um die Integration der Differentialgleichung für die Zeitreduktion oder um diejenige für den Radius Vector handelt.

Es ist seit Jahren bekannt, daß jener erste Angriff, den Herr Poincaré gegen die horistische Methode richtete, sein Ziel verfehlte. Herr Poincaré schrieb damals:[2]

»*La critique qui précède ne saurait, en aucune façon s'adresser à notre savant correspondant (Backlund), puisqu'il n'a fait qu'appliquer* une méthode classique que tout le monde croyait correcte. *Mais c'est là une raison de plus pour que j'aie cru devoir mettre en évidence* le vice fondamental de la méthode de Gyldén, dont on pourrait être tenté de faire d'autres applications.«

Herr Backlund selbst hat hierauf die Antwort gegeben:[3]

»*Je vous suis très reconnaissant pour avoir appelé l'attention sur l'erreur commise dans ma Note sur la précession*... Cette erreur élémentaire m'appartient exclusivement.... *Je le dois (dire) à la mémoire de Gyldén.*«

---

[1] H. Buchholz. Die Gyldén'sche horistische Integrationsmethode des Problems der drei Körper und ihre Konvergenz. Abh. der kais. Leop.-Karol. deutschen Akad. der Naturf., Bd. LXXXI, Nr. 3, 1903.

Ich benütze die Gelegenheit, noch einmal darauf hinzuweisen, daß die auf S. 195—198 in dieser Abhandlung von mir eingeschaltete Mitteilung über die Behandlungsweise des Radius Vector besser unterblieben wäre. Dieselbe ist vielmehr durch Gyldén's eigene Behandlungsweise des Radius Vector, wie sie sich in den Nouvelles recherches findet, zu ersetzen.

Vergleiche übrigens:

H. Buchholz. Klarstellung der von Herrn Backlund A. N. 3911 gegen mich erhobenen Vorwürfe. Astron. Nachr. Nr. 3922.

[2] Comptes rendus t. CXXXI', p. 50—51. Séance du lundi 14 janvier 1901. Mécanique céleste. Sur la théorie de la précession. Note de M. H. Poincaré.

[3] Comptes rendus, t. CXXXII, p. 291—292. Séance du lundi 11 février 1901. Mécanique céleste. Sur la précession extrait d'une lettre de M. O. Backlund à M. Poincaré.

Und kurze Zeit darauf stellte Herr Backlund fest:[1]

»*Assisté par MM. Ivanoff et Zeipel, j'ai refait les calculs de Gyldén dans les „Nouv. recherches" et poussée l'approximation plus loin que ne l'avait fait Gyldén.* Le résultat confirme les conclusions de Gyldén.«

Dies ist der Sachverhalt. Herr Poincaré aber beginnt seinen zweiten Angriff gegen die Nouvelles reeherches Gyldén's in Bezug auf die Zeitreduktion wörtlich wie folgt:[2]

Dans un ouvrage intitulé „Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes" (Stockholm, imprimerie centrale, 1892) Gyldén a exposé deux méthodes qu'il appelle horistiques; **la première de ces méthodes soulève d'assez graves objections; M. Backlund et moi, nous avons montré qu'elle conduisait dans certains cas à des résultats inadmissibles et qu'on ne devait l'employer qu'avec circonspection.** (Cf. Comptes rendus, **t. CXXXII, p. 50 et 291**; Bulletin astronomique **t. XIX, p. 433.**)[3] *J'ai pensé en conséquence, qu'il y avait lieu d'examiner de plus près la seconde de ces méthodes (sur le rayon vecteur) et de la soumettre à la discussion*« etc. (!)

Gegenüber dieser Behauptung des Herrn Poincaré, Herr Backlund selbst habe »d'assez graves objections« gegen die horistische Methode erhoben — während, wie die angeführten Zitate beweisen, in Wahrheit das Gegenteil der Fall ist — stellt Herr Backlund noch einmal von neuem fest (cf. bulletin astronomique, t. XXI, août 1904, p. 292):

»Il faut regretter que M. Poincaré, dans sa critique de la méthode de Gyldén (voir Comptes rendus, le 14 janvier 1901, No. 2), ne tienne compte que des termes du premier ordre. Gyldén lui-même a démontré que dans ce cas il n'existe pas de coefficient horistique et que c'est seulement en considérant au début des approximations les termes du troisième ordre qu'on peut établir une équation horistique pour la détermination de la longitude. La critique de M. Poincaré dans le No. 2, 1901, ne se rapporte pas alors à la théorie de Gyldén, mais seulement au coefficient erroné, déterminé par moi.« —

Was die (gleichfalls in einer gänzlichen Ablehnung gipfelnde) »Prüfung« der Gyldén'schen Behandlungsweise des Radius Vector durch Herrn Poincaré in den Comptes rendus (18 avril 1904) betrifft, so hat Herr Baeklund dieselbe ebenfalls als vollständig verfehlt nachgewiesen[4] (wie der nur einigermaßen mit Gyldén's Prinzipien vertraute Leser wohl erkennt). Unterscheidet doch Herr Poincaré nicht einmal richtig, welche Glieder bei Gyldén »kritisch« werden, sondern gründet vielmehr gerade auf ein elementares Mißverständnis, wie Herr Backlund zeigt, seinen ganzen Einwand gegen das Prinzip der horistischen Methode für den Radius Vector. Trotzdem wiederholt Herr Poincaré in einer dritten Note[5] — nur in veränderter Form — seine, von Herrn Backlund widerlegten, in den Comptes rendus erhobenen Behauptungen gegen die horistische Methode. —

Des weiteren heißt es bei Herrn Poincaré in seinem zweiten Angriff auf die Theorie Gyldén's:

»*On voit, a fortiori, combien est* vaine l'illusion des personnes *qui espèrent tirer de la méthode horistique des développements* uniformement convergents *au sens géometrique du mot.*«

---

[1] Bulletin astronomique, t. XIX, p. 433, décembre 1902. Remarques sur la méthode de Gyldén pour déterminer les termes élémentaires à longues périodes; par M. O. Backlund.

[2] Comptes rendus. Séance du lundi 18 avril 1904. Mécaniques céleste. Sur la méthode horistique de Gyldén. Note de M. H. Poincaré.

[3] Wie man bemerkt, sind das genau die zuvor zitierten Nummern und Seiten der Comptes rendus und des Bulletin astronomique!

[4] Bulletin astronomique, t. XXI, août 1904. Sur la méthode horistique de Gyldén; p. Mr. Backlund.

[5] Bulletin astronomique, t. XXI, août 1904. Sur la méthode horistique. Observations sur l'article de Mr. Backlund; par M. H. Poincaré.

Statt »des personnes« hätte er genauer »Gyldén« selbst gesagt. Denn gerade dieser selbst ist es (wie ich in meinem zuvor erwähnten, in der physikalischen Zeitschrift erschienenen Aufsatz unzweideutig klargestellt), der in den Nouvelles recherches auf S. 275 und 276 das Resumé seiner von Herrn Poincaré nicht erschütterten Untersuchungen wörtlich wie folgt ausspricht:

»Néanmoins si les constantes arbitraires sont fixées, et qu'elles aient des valeurs convenables, *on peut toujours, abstraction faite d'un cas extrêmement rare appelé cas asymptotique, obtenir une solution numérique* donnant les coordonnées d'une planète au moyen des séries trigonométriques uniformément convergentes. . .*Donc, en considérant que la convergence des termes critiques dans la fonction perturbatrice est comparable à celle d'une progression géometrique, il sera facile de conclure* qu'on pourra pousser le degré d'approximation si loin qu'on voudra, de sorte que le reste deviendra moindre qu'une quantité donnée.«

Und in den Orbites absolues (cf. I p. 497) faßt Gyldén das große positive Ergebnis seiner »Nouvelles recherches« über das Problem der drei Körper — wie es Herr Poincaré bekanntlich weder mit seiner ersten[1] noch mit seiner zweiten[2] Arbeit über das Problem erreichte — treffend dahin zusammen:

»En abordant les approximations successives (pour obtenir les intégrales des équations semblables à celles que nous allons établir dans le livre suivant) par l'intégration d'une équation linéaire ou bien, ce qui revient au même, d'un système d'équations linéaires, on n'arrivera pas toujours a des résultats satisfaisants. Et même, si en partant, d'un résultat obtenu par l'intégration d'un tel système, on continue, d'une manière consequente, les approximations successives, on tombera tôt ou tard sur les dévcloppements divergents. Il en est autrement quand on commence par l'intégration d'un système d'équations, chacune du troisième degré: on pourra alors, sauf dans des cas exceptionnels, réduire de telles équations à des équations linéaires et horistiques, après quoi on arrivera, en les intégrant, à de véritables approximations. Ayant obtenu des résultats de cette qualité, on déduira de proche en proche les expressions des quantités cherchécs avec une exactitude aussi grande qu'on voudra.

Voilà la raison pourquoi j'ai donné beaucoup de soins à mettre en évidence les termes du troisième degré: il devront dès l'abord entrer dans les équations différentielles, et il importe de les avoir mis sous la forme la plus convenable.«

---

[1] Die erste Arbeit ist (cf. Physik. Zeitschr., 5. Jahrg., Nr. 7, p. 180—186): »Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique par H. Poincaré. **Mémoire couronné du prix de S. M. le roi Oscar II. le 21. janvier 1889. Avec des Notes par l'auteur.**«

Gedruckt als **t. XIII** der Acta math. vom 29. April **1889** bis 13. November **1889**.

Gerade die scheinbar positiven großen Resultate dieser Arbeit Herrn Poincaré's hinsichtlich der Konvergenz — der springende Punkt der ganzen Frage — waren, wie man weiß, unrichtig und veranlaßten die Ersetzung dieser Arbeit Herrn Poincaré's durch jene zweite, welche bezüglich der Konvergenzfrage nur mehr rein negative Resultate aufweist.

[2] Diese zweite Arbeit ist: »Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique par H. Poincaré. **Mémoire couronné du prix de S. M. le roi Oscar II. le 21. janvier 1889.**«

Gedruckt als **t. XIII** der Acta math. vom 28. April **1890** bis 21. Oktober **1890**.

Indes ist die Introduktion der ersten Poincaré'schen Arbeit — vom Jahre **1889** — im Hinblick auf diejenige vom Jahre **1890** und auf die Nouvelles recherches Gyldén's in der Tat vom größten historischen Interesse bezüglich der Entwicklung, die das Problem in der Behandlungsweise seiner beiden bedeutendsten Bearbeiter in neuerer Zeit gefunden hat (und daher in der historischen Zeitschrift »Bibliotheca Mathematica« am Platze). Gerade das, was Herr Poincaré mit seinen beiden Arbeiten über das Problem nicht zu leisten vermochte, hat Gyldén in seinen Nouvelles recherches erreicht: eine astronomisch wirklich verwertbare Methode von positiven Ergebnissen für das Problem zu schaffen. Und hinsichtlich der Nouvelles recherches Gyldén's wäre das Wort am passenden, verdienten Platze: In ihnen »hat die fortschreitende Wissenschaft ihr Verdikt ausgesprochen!«

Auf Seite 199 der »Nouvelles recherches« aber sagt Gyldén hinsichtlich der horistischen Methode:

»Ces termes — je les appellerai termes à facteur horistique (ὁριστικός, appartenant à ce qui limite, qui termine) — sont dans la théorie des mouvements des corps célestes, on l'entend aisément, de la plus grande importance: en effet, la présence des termes de la nature envisagée rend convergents et, quant au résultat numérique, limitées, les solutions des équations différentielles, tandis que, sans eux, le procès d'intégration pourrait aboutir à un résultat divergent.«

Wie man sieht, ist es in erster Instanz Gyldén selbst, der überall auf die Konvergenz seines horistischen Integrationsverfahrens mit Nachdruck hinweist; und die strenge Gültigkeit dieser letzten bedeutsamsten Methode von Hugo Gyldén ist weder durch die bisher versuchten Einwände des Herrn Poincaré, noch durch die negativen Ergebnisse von dessen zweiter Arbeit über das Problem — vom Jahre 1890 — auch nur entfernt erschüttert worden. —

In der von Herrn Backlund widerlegten zweiten Note Herrn Poincaré's lesen wir noch:

»Ceux qui voudront appliquer la méthode horistique risquent d'arriver à des résultats fantastiques; il y a des cas où elle peut être inoffensive, il n'y en a pas où elle peut être utile.«

Zum mindesten wird man erst das Erscheinen dieser Anwendungen von Gyldén's horistischer Methode abzuwarten haben, ehe man sie verurteilt.

In hoffentlich nicht allzu ferner Zeit wird Herr Backlund die astronomische Wissenschaft mit Teil III von Gyldén's Orbites absolues beschenken — er, der gründliche Sachkenner und gewissermaßen, als Inhaber des wissenschaftlichen Nachlasses, der offizielle Repräsentant von Gyldén's Theorie. Mit Spannung darf man dieser Publikation entgegensehen, in der Herr Backlund durch die Anwendung von neuem den Beweis erbringen wird, daß er sein Urteil über die horistische Methode — im schärfsten Gegensatz zu Herrn Poincaré — mit gutem Recht dahin fixiert hat:[1]

»Die neuen Methoden, die er zu dem Zweck schuf, und zwar in erster Linie die sogenannte horistische Methode, gehören zu Gyldén's genialsten Leistungen. Dadurch gelang es ihm in der Tat, den kritischen Gliedern die richtige Bedeutung zu vindizieren....

Die volle Bedeutung der großen Arbeiten Gyldén's abzuschätzen, die den Kernpunkt der zweiten Periode bilden und zugleich nach seiner eigenen Meinung das Hauptresultat seiner Forschung repräsentieren, wäre meinerseits Vermessenheit. Überhaupt glaube ich, daß eine dazu kompetente Persönlichkeit noch lange auf sich warten lassen wird....«—

Es ist bedauerlich, daß die Theorie Gyldén's noch immer mehr der Gegenstand absprechender Urteile[2] als gründlicher Vertiefung und eingehender eigener Arbeiten ist. Demgegenüber kommt es mir vor allem auf die wirkliche Anwendung der neuen Prinzipien Gyldén's auf einen bestimmten Fall des Planetensystems, an der Gyldén selbst beim ersten Beginnen durch seinen frühen Tod verhindert ward, und damit auf eine **objektive** Prüfung seiner Theorie in der vorliegenden und in den nächstfolgenden Arbeiten an. Und keine gegnerische Meinungsäußerung kann mich hindern, den als richtig erkannten Weg fortzusetzen. Erst nach Vorstudien, wie den zu Anfang dieser Bemerkungen charakterisierten, die indes, worauf es zunächst vor allem ankommt, die zuvor angedeuteten allgemeinen Maßstäbe hinsichtlich der praktischen Leistungsfähigkeit der beiden Methoden ergeben, wird man die Untersuchung des berühmten Grenzfalles, den Hilda darstellt, versuchen dürfen, eines der schwierigsten Probleme der Mechanik des Himmels überhaupt, mit dessen Bearbeitung Gyldén selbst kurz vor seinem Tode begann.

---

[1] V. J. S. der astron. Gesellschaft, Jahrgang 32, Heft I.

[2] Der in der Physik. Zeitschrift (5. Jahrgang, Nr. 13) erschienene Artikel Herrn Poincaré's gegen die horistische Methode ist nur eine deutsche Übersetzung des zuvor erwähnten in den Comptes rendus (April 1904) erschienenen Artikels.

Der Verfasser.

Sechstes Kapitel.

Die Integration der Differentialgleichung des Radius Vector für die Glieder zweiten Grades im Typus 2/3.

A. Die Differentialgleichung in S.

I. Übergang auf die zu integrierende Form der Differentialgleichung für S.

Nachdem die Integration für den Radius Vector in der ersten Abteilung dieser Untersuchungen für den nullten und ersten Grad vollständig durchgeführt wurde, haben wir sie nun zunächst für die Glieder zweiten Grades auszuführen. Dazu müssen wir vorerst wieder die Hilfsdifferentialgleichung für S behandeln, indem ja S auf der rechten Seite der Differentialgleichung für ρ (cf. I, S. 391) auftritt, deren Integration, wie früher gezeigt wurde, den Radius-Vector:

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\rho}$$

ergiebt.

Die allgemeine Form der Differentialgleichung für die Glieder zweiten Grades in S haben wir für den Typus $\frac{2}{3}$ bereits abgeleitet (cf. I, S. 394). Sie lautete:

$$-\left(\frac{dS}{dv}\right)_2 = Q_2 + 3(S_2)_l\, Q_0 + 3(S_1)_l\, Q_1 + \frac{1}{2}\frac{d\eta^2}{dv}. \tag{1}$$

Die rechte Seite ist nun mit Rücksicht auf die früher gefundenen Werte von S und Q wirklich zu bilden. Diese Werte waren aber (cf. I, S. 381, 384), indem wir sie jetzt entsprechend getrennt anführen:

$$\left.\begin{aligned}
(S_1)_l &= \alpha_2\eta\cos(3w-\mathrm{v}) + \alpha_3\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)\\
(S_2)_l &= \alpha_{14}\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v}) + \alpha_{15}\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \alpha_{16}\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1)\\
Q_0 &= q_1\sin 3w + g_1\sin 6w\\
Q_1 &= q_2\eta\sin\mathrm{v} + q_4\eta\sin(3w-\mathrm{v}) + q_6\eta\sin(6w-\mathrm{v})\\
&\quad + q_3\eta'\sin\mathrm{v}_1 + q_5\eta'\sin(3w-\mathrm{v}_1) + q_7\eta'\sin(6w-\mathrm{v}_1)\\
&\quad + g_2\eta\sin(3w+\mathrm{v}) + g_4\eta\sin(9w-\mathrm{v})\\
&\quad + g_3\eta'\sin(3w+\mathrm{v}_1) + g_5\eta'\sin(9w-\mathrm{v}_1)\\
Q_2 &= q_8\eta^2\sin 3w + q_{12}\eta^2\sin(3w-2\mathrm{v}) + q_{15}\eta^2\sin(6w-2\mathrm{v}) + q_{18}\eta^2\sin(9w-2\mathrm{v})\\
&\quad + q_9\eta\eta'\sin(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + q_{13}\eta\eta'\sin(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + q_{16}\eta\eta'\sin(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + q_{19}\eta\eta'\sin(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
&\quad + q_{10}\eta\eta'\sin(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) + q_{14}\eta'^2\sin(3w-2\mathrm{v}_1) + q_{17}\eta'^2\sin(6w-2\mathrm{v}_1) + q_{20}\eta'^2\sin(9w-2\mathrm{v}_1)\\
&\quad + q_{11}\eta'^2\sin 3w + q_{21}\eta\eta'\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Zunächst sollen wie in Abteilung I bei Q_1, so jetzt auch bei Q_2 die q-Koeffizienten in jene vereinfachte Form übergeführt werden, die Herr Brendel[1] bei der Behandlung von Hecuba nach seiner Methode

[1] M. Brendel. Theorie der kleinen Planeten. I. Theil. Abhandl. d. königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. Neue Folge, Bd. I, Nr. 2.

als typisch festsetzte, die auch von den Herren Ludendorff[1] und Kramer[2] in ihren Arbeiten über Hecuba verwandt wurde.

Wir müssen dazu in den q-Koeffizienten in Q_2 [cf. I., S. 385. Formel (29)] die γ-Koeffizienten durch die β ausdrücken und gehen hierzu, im Hinblicke auf die bei dieser Aufgabe innezuhaltende Genauigkeitsgrenze, von der folgenden Form der Differentialgleichung der Zeitreduktion aus:

$$\frac{dT}{dv} = -2R_2 + \{6R_1 - 2(S_1)_l\}\eta\cos v - 3\eta^2 R_0 - 6R_0\eta^2\cos 2v.$$

Mit Rücksicht auf die für R_0, R_1, R_2, $(S_1)_l$ früher gefundenen Werte (cf. I, S. 381) nimmt diese Differentialgleichung, wenn man die Ausmultiplikation der bezüglichen periodischen Aggregate nach den Formeln (36) (cf. I, S. 344) ausführt, für den Typus 2/3 die folgende Form an, im Hinblick auf die jetzt innezuhaltende Genauigkeitsgrenze (cf. I, S. 398):

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dv} = {} & T_{\rm II}^{(1)}\eta^2\cos 3w + T_{\rm II}^{(5)}\eta^2\cos(3w-2v) + T_{\rm II}^{(8)}\eta^2\cos(9w-2v)\\ & + T_{\rm II}^{(2)}\eta\eta'\cos(3w+v-v_1) + T_{\rm II}^{(6)}\eta\eta'\cos(3w-v-v_1) + T_{\rm II}^{(9)}\eta\eta'\cos(9w-v-v_1)\\ & + T_{\rm II}^{(3)}\eta\eta'\cos(3w-v+v_1) + T_{\rm II}^{(7)}\eta'^2\cos(3w-2v_1) + T_{\rm II}^{(10)}\eta'^2\cos(9w-2v_1)\\ & + T_{\rm II}^{(4)}\eta'^2\cos 3w\\ & + T_{\rm II}^{(11)}\eta^2\cos(3w+2v)\\ & + T_{\rm II}^{(12)}\eta^2\cos 6w\\ & + T_{\rm II}^{(13)}\eta\eta'\cos(6w+v-v_1)\end{aligned} \tag{3}$$

und es ist:

$$\begin{aligned} & T_{\rm II}^{(1)} = -3\beta_1+3\beta_2-2\beta_7-\alpha_2\,; \quad T_{\rm II}^{(2)} = 3\beta_3-2\beta_8-\alpha_3\,; \quad T_{\rm II}^{(3)} = -2\beta_9\,;\\ & T_{\rm II}^{(4)} = -2\beta_{10}\,; \quad T_{\rm II}^{(5)} = -3\beta_1+3\beta_2-2\beta_{11}-\alpha_2\,; \quad T_{\rm II}^{(6)} = 3\beta_3-2\beta_{12}-\alpha_3\,;\\ & T_{\rm II}^{(7)} = -2\beta_{13}\,; \quad T_{\rm II}^{(8)} = -2\beta_{17}\,; \quad T_{\rm II}^{(9)} = -2\beta_{18}\,; \quad T_{\rm II}^{(10)} = -2\beta_{19}\,;\\ & T_{\rm II}^{(11)} = -3\beta_1\,; \quad T_{\rm II}^{(12)} = 3\beta_4\,; \quad T_{\rm II}^{(13)} = 3\beta_5.\end{aligned} \tag{4}$$

Nach Abteilung I (cf. S. 348, 382) war aber allgemein:

$$T = \gamma v + T_l + K; \qquad K = T_k + T_g = K_k + K_g\,; \qquad K_l = 0\,;$$

$$\begin{aligned} K_2 = {} & \gamma_7\eta^2\sin 3w + \gamma_{11}\eta^2\sin(3w-2v) + \gamma_{17}\eta^2\sin(9w-2v)\\ & + \gamma_8\eta\eta'\sin(3w+v-v_1) + \gamma_{12}\eta\eta'\sin(3w-v-v_1) + \gamma_{18}\eta\eta'\sin(9w-v-v_1)\\ & + \gamma_9\eta\eta'\sin(3w-v+v_1) + \gamma_{13}\eta'^2\sin(3w-2v_1) + \gamma_{19}\eta'^2\sin(9w-2v_1)\\ & + \gamma_{10}\eta'^2\sin 3w\\ & + \gamma_{20}\eta^2\sin(3w+2v)\\ & + \gamma_{21}\eta^2\sin 6w\\ & + \gamma_{22}\eta\eta'\sin(6w+v-v_1).\end{aligned} \tag{5}$$

[1] H. Ludendorff. Die Jupiterstörungen der kleinen Planeten vom Hecubatypus. Berlin, Mayer und Müller.

[2] J. Kramer. Theorie der kleinen Planeten. Die Planeten vom Hecubatypus. Abhandl. d. königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. Neue Folge, Bd. II, Nr. 2.

Durch Differentiation des unbestimmten Integralansatzes für die Glieder zweiten Grades ergeben sich somit im Hinblick auf die zuvor gewonnene Differentialgleichung (3) für T die zur Bestimmung der γ als reine Funktionen der β nötigen Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
&(1+\delta_1)\gamma_7 = T_{\rm II}^{(1)}; \quad (1+\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)\gamma_8 = T_{\rm II}^{(2)}; \quad (1+\delta_1+\varsigma-\varsigma_1)\gamma_9 = T_{\rm II}^{(3)};\\
&(1+\delta_1)\gamma_{10} = T_{\rm II}^{(4)}; \quad (\delta_1+2\varsigma-1)\gamma_{11} = T_{\rm II}^{(5)}; \quad (\delta_1+\varsigma+\varsigma_1-1)\gamma_{12} = T_{\rm II}^{(6)};\\
&(\delta_1+2\varsigma_1-1)\gamma_{13} = T_{\rm II}^{(7)}; \quad (1+3\delta_1+2\varsigma)\gamma_{17} = T_{\rm II}^{(8)};\\
&(1+3\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)\gamma_{18} = T_{\rm II}^{(9)}; \quad (1+3\delta_1+2\varsigma_1)\gamma_{19} = T_{\rm II}^{(10)};\\
&(3+\delta_1-2\varsigma)\gamma_{20} = T_{\rm II}^{(11)}; \quad 2(1+\delta_1)\gamma_{21} = T_{\rm II}^{(12)}; \quad (2+2\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)\gamma_{22} = T_{\rm II}^{(13)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Daher wird bei Vernachlässigung der kleinen Größe δ_1, sowie der kleinen Größen ς und ς_1 (die von der Ordnung m' sind, cf. I, S. 428) gegenüber der Einheit, für die beabsichtigte Transformation genügend genau (bezüglich α_2 und α_3, cf. I, p. 421 und 400):

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_7 = -3\beta_1+3\beta_2-2\beta_7-\frac{A_{3.1.0}^{(-1)}}{\delta_1}; \quad \gamma_8 = 3\beta_3-2\beta_8-\frac{A_{3.0.1}^{(-1)}}{\delta_1};\\
&\gamma_9 = -2\beta_9; \quad \gamma_{10} = -2\beta_{10}; \quad \gamma_{11} = 3\beta_1-3\beta_2+2\beta_{11}+\frac{A_{3.1.0}^{(-1)}}{\delta_1};\\
&\gamma_{12} = -3\beta_3+2\beta_{12}+\frac{A_{3.0.1}^{(-1)}}{\delta_1}; \quad \gamma_{13} = 2\beta_{13}; \quad \gamma_{17} = -2\beta_{17};\\
&\gamma_{18} = -2\beta_{18}; \quad \gamma_{19} = -2\beta_{19}; \quad \gamma_{20} = -\beta_1; \quad \gamma_{21} = \frac{3}{2}\beta_4; \quad \gamma_{22} = \frac{3}{2}\beta_5.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Durch Einsetzen dieser γ-Werte in die q- bezüglich p-Koeffizienten der Ausdrücke für Q_2 und P_2 (cf. die Relationen (29) und (34) I, S. 385 bis 390) erhält man diese als reine Funktionen der β und der numerisch bekannten A- und B-Koeffizienten der Derivierten der Störungsfunktion in einer für die Integration direkt verwertbaren Form.

Diese Transformation gestaltet sich analog wie diejenige für den ersten Grad, die in Abteilung I (cf. S. 399 bis 403) ausgeführt wurde. Als Resultat derselben erhält man für die Koeffizienten der Glieder zweiten Grades in Q_2 und P_2 die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
q_8 &= q_{8.1}+q_8^{(7)}\beta_7\\
q_9 &= q_{9.1}+q_9^{(9)}\beta_9\\
q_{10} &= q_{10.1}+q_{10}^{(8)}\beta_8\\
q_{11} &= q_{11.1}+q_{11}^{(10)}\beta_{10}\\
q_{12} &= q_{12.1}+q_{12}^{(14)}\beta_{14}+q_{12}^{(17)}\beta_{17}\\
q_{13} &= q_{13.1}+q_{13}^{(15)}\beta_{15}+q_{13}^{(18)}\beta_{18}\\
q_{14} &= q_{14.1}+q_{14}^{(16)}\beta_{16}+q_{14}^{(19)}\beta_{19}\\
q_{15} &= q_{15.1}+q_{15}^{(11)}\beta_{11}+q_{15}^{(17)}\beta_{17}\\
q_{16} &= q_{16.1}+q_{16}^{(12)}\beta_{12}+q_{16}^{(18)}\beta_{18}\\
q_{17} &= q_{17.1}+q_{17}^{(13)}\beta_{13}+q_{17}^{(19)}\beta_{19}\\
q_{18} &= q_{18.1}+q_{18}^{(11)}\beta_{11}+q_{18}^{(14)}\beta_{14}\\
q_{19} &= q_{19.1}+q_{19}^{(12)}\beta_{12}+q_{19}^{(15)}\beta_{15}\\
q_{20} &= q_{20.1}+q_{20}^{(13)}\beta_{13}+q_{20}^{(16)}\beta_{16}
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned}
q_{8.1} &= q_8^{(0)} + q_8^{(1)}\beta_1 + q_8^{(2)}\beta_2 + q_8^{(4)}\beta_4 \\
q_{9.1} &= q_9^{(0)} + q_9^{(1)}\beta_1 + q_9^{(2)}\beta_2 + q_9^{(4)}\beta_4 + q_9^{(5)}\beta_5 \\
q_{10.1} &= q_{10}^{(0)} + q_{10}^{(1)}\beta_1 + q_{10}^{(2)}\beta_2 + q_{10}^{(3)}\beta_3 + q_{10}^{(4)}\beta_4 + q_{10}^{(5)}\beta_5 \\
q_{11.1} &= q_{11}^{(0)} + q_{11}^{(1)}\beta_1 + q_{11}^{(3)}\beta_3 + q_{11}^{(5)}\beta_5 \\
q_{12.1} &= q_{12}^{(0)} + q_{12}^{(1)}\beta_1 + q_{12}^{(4)}\beta_4 \\
q_{13.1} &= q_{13}^{(0)} + q_{13}^{(1)}\beta_1 + q_{13}^{(2)}\beta_2 + q_{13}^{(4)}\beta_4 + q_{13}^{(5)}\beta_5 \\
q_{14.1} &= q_{14}^{(0)} + q_{14}^{(1)}\beta_1 + q_{14}^{(3)}\beta_3 + q_{14}^{(5)}\beta_5 \\
q_{15.1} &= q_{15}^{(0)} + q_{15}^{(1)}\beta_1 + q_{15}^{(2)}\beta_2 \\
q_{16.1} &= q_{16}^{(0)} + q_{16}^{(1)}\beta_1 + q_{16}^{(2)}\beta_2 + q_{16}^{(3)}\beta_3 + q_{16}^{(4)}\beta_4 \\
q_{17.1} &= q_{17}^{(0)} + q_{17}^{(1)}\beta_1 + q_{17}^{(3)}\beta_3 + q_{17}^{(5)}\beta_5 \\
q_{18.1} &= q_{18}^{(0)} + q_{18}^{(1)}\beta_1 + q_{18}^{(2)}\beta_2 + q_{18}^{(4)}\beta_4 \\
q_{19.1} &= q_{19}^{(0)} + q_{19}^{(1)}\beta_1 + q_{19}^{(2)}\beta_2 + q_{19}^{(3)}\beta_3 + q_{19}^{(4)}\beta_4 + q_{19}^{(5)}\beta_5 \\
q_{20.1} &= q_{20}^{(0)} + q_{20}^{(1)}\beta_1 + q_{20}^{(3)}\beta_3 + q_{20}^{(5)}\beta_5
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

und diese letzteren Größen $q_{8.1}$ bis $q_{20.1}$ gegeben sind, da β_1 bis β_5 bereits durch die Integration für den ersten Grad ermittelt wurden. Die 13 Gleichungen (8) enthalten also nur die 13 Größen β_7 bis β_{19} als Unbekannte, während sich die sämtlichen q-Koeffizienten der rechten Seiten von (8) und (9) aus den A-Koeffizienten zusammensetzen. Bei ihrer Berechnung habe ich die Ausdrücke für P_2 und Q_2 der ersten Abteilung noch vervollständigt, indem eine Anzahl dort noch nicht mitgenommener Glieder, so auch noch Glieder der zweiten Ordnung vom zweiten Grad mitgenommen wurden. Die Werte dieser kompleten Ausdrücke für P_2 und Q_2 samt derjenigen der q- und p-Koeffizienten selbst, dargestellt durch die A und B werden in Abteilung III bei Zusammenstellung aller in Betracht kommenden A- und B-Koeffizienten der Derivierten P und Q der Störungsfunktion für die typischen Zahlenwerte 0, 3, 6, 9, 12 des Typus $\frac{2}{3}$ in den Grundlagen für die numerische Rechnung angegeben werden. Für die p-Koeffizienten findet man in derselben Weise:

$$\left.\begin{aligned}
p_9 &= p_{9.1} + p_9^{(7)}\beta_7 \\
p_{10} &= p_{10.1} + p_{10}^{(8)}\beta_8 + p_{10}^{(9)}\beta_9 \\
p_{11} &= p_{11.1} + p_{11}^{(8)}\beta_8 + p_{11}^{(9)}\beta_9 \\
p_{12} &= p_{12.1} + p_{12}^{(10)}\beta_{10} \\
p_{14} &= p_{14.1} + p_{14}^{(11)}\beta_{11} + p_{14}^{(14)}\beta_{14} + p_{14}^{(17)}\beta_{17} \\
p_{15} &= p_{15.1} + p_{15}^{(12)}\beta_{12} + p_{15}^{(15)}\beta_{15} + p_{15}^{(18)}\beta_{18} \\
p_{16} &= p_{16.1} + p_{16}^{(13)}\beta_{13} + p_{16}^{(16)}\beta_{16} + p_{16}^{(19)}\beta_{19} \\
p_{17} &= p_{17.1} + \beta_{17}^{(11)}\beta_{11} + p_{17}^{(14)}\beta_{14} + p_{17}^{(17)}\beta_{17} \\
p_{18} &= p_{18.1} + p_{18}^{(12)}\beta_{12} + p_{18}^{(15)}\beta_{15} + p_{18}^{(18)}\beta_{18} \\
p_{19} &= p_{19.1} + p_{19}^{(13)}\beta_{13} + p_{19}^{(16)}\beta_{16} + p_{19}^{(19)}\beta_{19} \\
p_{20} &= p_{20.1} + p_{20}^{(11)}\beta_{11} + p_{20}^{(14)}\beta_{14} + p_{20}^{(17)}\beta_{17} \\
p_{21} &= p_{21.1} + p_{21}^{(12)}\beta_{12} + p_{21}^{(15)}\beta_{15} + p_{21}^{(18)}\beta_{18} \\
p_{22} &= p_{22.1} + p_{22}^{(13)}\beta_{13} + p_{22}^{(16)}\beta_{16} + p_{22}^{(19)}\beta_{19}
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

wo:

$$
\left.\begin{aligned}
p_{9.1} &= p_9^{(0)} + p_9^{(1)}\beta_1 + p_9^{(2)}\beta_2 + p_9^{(4)}\beta_4 \\
p_{10.1} &= p_{10}^{(0)} + p_{10}^{(1)}\beta_1 + p_{10}^{(2)}\beta_2 + p_{10}^{(3)}\beta_3 + p_{10}^{(4)}\beta_4 + p_{10}^{(5)}\beta_5 \\
p_{11.1} &= p_{11}^{(0)} + p_{11}^{(1)}\beta_1 + p_{11}^{(2)}\beta_2 + p_{11}^{(3)}\beta_3 + p_{11}^{(4)}\beta_4 + p_{11}^{(5)}\beta_5 \\
p_{12.1} &= p_{12}^{(0)} + p_{12}^{(1)}\beta_1 + p_{12}^{(3)}\beta_3 + p_{12}^{(5)}\beta_5 \\
p_{14.1} &= p_{14}^{(0)} + p_{14}^{(1)}\beta_1 + p_{14}^{(2)}\beta_2 + p_{14}^{(4)}\beta_4 \\
p_{15.1} &= p_{15}^{(0)} + p_{15}^{(1)}\beta_1 + p_{15}^{(2)}\beta_2 + p_{15}^{(3)}\beta_3 + p_{15}^{(4)}\beta_4 + p_{15}^{(5)}\beta_5 \\
p_{16.1} &= p_{16}^{(0)} + p_{16}^{(1)}\beta_1 + p_{16}^{(3)}\beta_3 + p_{16}^{(5)}\beta_5 \\
p_{17.1} &= p_{17}^{(0)} + p_{17}^{(1)}\beta_1 + p_{17}^{(2)}\beta_2 + p_{17}^{(4)}\beta_4 \\
p_{18.1} &= p_{18}^{(0)} + p_{18}^{(1)}\beta_1 + p_{18}^{(2)}\beta_2 + p_{18}^{(3)}\beta_3 + p_{18}^{(4)}\beta_4 + p_{18}^{(5)}\beta_5 \\
p_{19.1} &= p_{19}^{(0)} + p_{19}^{(1)}\beta_1 + p_{19}^{(3)}\beta_3 + p_{19}^{(5)}\beta_5 \\
p_{20.1} &= p_{20}^{(0)} + p_{20}^{(1)}\beta_1 + p_{20}^{(2)}\beta_2 + p_{20}^{(4)}\beta_4 \\
p_{21.1} &= p_{21}^{(0)} + p_{21}^{(1)}\beta_1 + p_{21}^{(2)}\beta_2 + p_{21}^{(3)}\beta_3 + p_{21}^{(4)}\beta_4 + p_{21}^{(5)}\beta_5 \\
p_{22.1} &= p_{22}^{(0)} + p_{22}^{(1)}\beta_1 + p_{22}^{(3)}\beta_3 + p_{22}^{(5)}\beta_5
\end{aligned}\right\} \qquad (11)
$$

ist. In den Ausdrücken (8) bis (11) fehlen die Koeffizienten q_{23} und p_8, p_{13}, p_{23}, weil diese den elementären Gliedern der Form A angehören und wir die Differentialgleichungen in S, R, T, $\mathfrak{Z}$ für diese Glieder gesondert in der dritten und letzten Abteilung dieser Untersuchungen behandeln werden.

Wenn man jetzt die rechte Seite der Differentialgleichung (1) mit Hinblick auf die Ausdrücke (2) wirklich bildet, so findet man unter Kombination der Glieder gleicher Argumente, indem man nach dem bereits in Abteilung I befolgten Prinzip bloß Glieder der Gyldén'schen Fundamentaltypen mitnimmt, folgenden Ausdruck:

$$
\left.\begin{aligned}
-\left(\frac{dS}{dv}\right)_2 = {} & S_{II}^{(1)}\eta^2 \sin 3w + S_{II}^{(5)}\eta^2 \sin(3w-2\mathrm{v}) + S_{II}^{(8)}\eta^2 \sin(6w-2\mathrm{v}) \\
& + S_{II}^{(2)}\eta\eta' \sin(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + S_{II}^{(6)}\eta\eta' \sin(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + S_{II}^{(9)}\eta\eta' \sin(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& + S_{II}^{(3)}\eta\eta' \sin(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) + S_{II}^{(7)}\eta'^2 \sin(3w-2\mathrm{v}_1) + S_{II}^{(10)}\eta'^2 \sin(6w-2\mathrm{v}_1) \\
& + S_{II}^{(4)}\eta'^2 \sin 3w \\
& + S_{II}^{(11)}\eta^2 \sin(9w-2\mathrm{v}) \\
& + S_{II}^{(12)}\eta\eta' \sin(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& + S_{II}^{(13)}\eta'^2 \sin(9w-2\mathrm{v}_1),
\end{aligned}\right\} \qquad (12)
$$

wobei gesetzt ist:

$$
\left.\begin{aligned}
S_{II}^{(1)} &= \frac{3}{2}\left(\alpha_2 q_2 + \alpha_2 q_6 + \frac{2}{3}\, q_8\right); & S_{II}^{(2)} &= \frac{3}{2}\left(\alpha_2 q_7 + \alpha_3 q_2 + \frac{2}{3}\, q_9\right); \\
S_{II}^{(3)} &= \frac{3}{2}\left(\alpha_2 q_3 + \alpha_3 q_6 + \frac{2}{3}\, q_{10}\right); & S_{II}^{(4)} &= \frac{3}{2}\left(\alpha_3 q_3 + \alpha_3 q_7 + \frac{2}{3}\, q_{11}\right); \\
S_{II}^{(5)} &= -\frac{3}{2}\left(\alpha_2 q_2 + \alpha_{14} q_1 - \frac{2}{3}\, q_{12}\right); & S_{II}^{(6)} &= -\frac{3}{2}\left(\alpha_2 q_3 + \alpha_3 q_2 + \alpha_{15} q_1 - \frac{2}{3}\, q_{13}\right); \\
S_{II}^{(7)} &= -\frac{3}{2}\left(\alpha_3 q_3 + \alpha_{16} q_1 - \frac{2}{3}\, q_{14}\right); & S_{II}^{(8)} &= \frac{3}{2}\left(\alpha_2 q_4 + \frac{2}{3}\, q_{15}\right); \\
S_{II}^{(9)} &= \frac{3}{2}\left(\alpha_2 q_5 + \alpha_3 q_4 + \frac{2}{3}\, q_{16}\right); & S_{II}^{(10)} &= \frac{3}{2}\left(\alpha_3 q_5 + \frac{2}{3}\, q_{17}\right);
\end{aligned}\right\} \qquad (13)
$$

$$\left.\begin{aligned} S_{\mathrm{II}}^{(11)} &= \frac{3}{2}\left(\alpha_2 q_6 + \alpha_{14} q_1 + \frac{2}{3} q_{18}\right); \qquad S_{\mathrm{II}}^{(12)} = \frac{3}{2}\left(\alpha_2 q_7 + \alpha_3 q_6 + \alpha_{15} q_1 + \frac{2}{3} q_{19}\right); \\ S_{\mathrm{II}}^{(13)} &= \frac{3}{2}\left(\alpha_3 q_7 + \alpha_{16} q_1 + \frac{2}{3} q_{20}\right), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

indem die Differentialgleichung für S_a, d. s. die elementären Glieder der Form A, zu denen auch das Glied $\frac{d\eta^2}{dv}$ gehört, wie gesagt später in Abtheilung III für sich behandelt werden wird.

II. Bestimmung der exargumentalen Glieder zweiten Grades in S.

Um zunächst die aus der Integration über das Glied nullten Grades hervorgehenden exargumentalen Glieder zweiten Grades zu ermitteln, gehen wir aus von:

$$\left(\frac{dS_0}{dv}\right) = 3\mu a_1 \sin 3w \frac{dV}{dv}$$

und setzen hierin (cf. I, S. 382):

$$\frac{dV}{dv} = \gamma_{14}\eta^2 \cos(6w - 2\mathrm{v}) + \gamma_{15}\eta\eta' \cos(6w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) + \gamma_{16}\eta'^2 \cos(6w - 2\mathrm{v}_1).$$

Für die aus dem nullten Grad entstehenden exargumentalen Glieder zweiten Grades erhält man so:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dS_0}{dv}\right)_2 = & -\nu\gamma_{14}\eta^2 \sin(3w - 2\mathrm{v}) + \nu\gamma_{14}\eta^2 \sin(9w - 2\mathrm{v}) \\ & -\nu\gamma_{15}\eta\eta' \sin(3w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) + \nu\gamma_{15}\eta\eta' \sin(9w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\ & -\nu\gamma_{16}\eta'^2 \sin(3w - 2\mathrm{v}_1) + \nu\gamma_{16}\eta'^2 \sin(9w - 2\mathrm{v}_1) \\ \nu = & \frac{3}{2}\mu a_1. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Um ferner die aus den Gliedern ersten Grades hervorgehenden exargumentalen Glieder zweiten Grades zu ermitteln, differentieren wir zunächst den unbestimmten Integralansatz, der für S_1 aufgestellt wurde (cf. I, S. 381, 417) und erhalten so:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{dS_1}{dv}\right) = a_2\eta \sin\mathrm{v} \frac{d\mathrm{v}}{dv} & + \alpha_2\eta \sin(3w - \mathrm{v})\left(3\frac{dw}{dv} - \frac{d\mathrm{v}}{dv}\right) \\ + a_3\eta' \sin\mathrm{v}_1 \frac{d\mathrm{v}_1}{dv} & + \alpha_3\eta' \sin(3w - \mathrm{v}_1)\left(3\frac{dw}{dv} - \frac{d\mathrm{v}_1}{dv}\right) \\ & + a_4\eta \sin(6w - \mathrm{v})\left(6\frac{dw}{dv} - \frac{d\mathrm{v}}{dv}\right) \\ & + a_5\eta' \sin(6w - \mathrm{v}_1)\left(6\frac{dw}{dv} - \frac{d\mathrm{v}_1}{dv}\right). \end{aligned}$$

Nach der früher entwickelten allgemeinen Theorie ist aber (cf. I, S. 413):

$$\frac{dw}{dv} = 1 - \mu_1 - \mu\frac{dV}{dv}.$$

Während zuvor für $\frac{dV}{dv}$ die in dieser Größe enthaltenen Glieder zweiten Grades einzusetzen waren, hat man jetzt offenbar von denjenigen ersten Grades auszugehen:

$$\frac{dV}{dv} = \gamma_2 \eta \cos(3w - \mathrm{v}) + \gamma_3 \eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1)$$

und erhält dadurch zunächst, da für den Typus $\frac{2}{3}$:

$$\mu_1 = \frac{2 - \delta_1}{3},$$

also:

$$2 - 3\mu_1 = \delta_1 \text{ und } 5 - 6\mu_1 = 1 + 2\delta_1$$

ist:

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{dS_1}{dv}\right) = {} & a_2(1 - \varsigma)\eta \sin \mathrm{v} + a_3(1 - \varsigma_1)\eta' \sin \mathrm{v}_1 \\
& + \alpha_2 \eta \sin(3w - \mathrm{v}) \{\delta_1 + \varsigma \quad - 3\mu\gamma_2\eta \cos(3w - \mathrm{v}) - 3\mu\gamma_3\eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1)\} \\
& + \alpha_3 \eta' \sin(3w - \mathrm{v}_1) \{\delta_1 + \varsigma_1 \quad - 3\mu\gamma_2\eta \cos(3w - \mathrm{v}) - 3\mu\gamma_3\eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1)\} \\
& + a_4 \eta \sin(6w - \mathrm{v}) \{1 + 2\delta_1 + \varsigma - 6\mu\gamma_2\eta \cos(3w - \mathrm{v}) - 6\mu\gamma_3\eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1)\} \\
& + a_5 \eta' \sin(6w - \mathrm{v}_1) \{1 + 2\delta_1 + \varsigma_1 - 6\mu\gamma_2\eta \cos(3w - \mathrm{v}) - 6\mu\gamma_3\eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1)\}.
\end{aligned}$$

Für die aus den Gliedern ersten Grades entstehenden exargumentalen Glieder zweiten Grades erhält man also:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dS_1}{dv}\right)_2 = {} & + 3\mu a_4 \gamma_2 \eta^2 \sin 3w & & + \frac{3}{2}\mu\alpha_2\gamma_2\eta^2 \sin(6w - 2\mathrm{v}) \\
& + 3\mu a_5 \gamma_2 \eta\eta' \sin(3w + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) & & + \frac{3}{2}\mu(\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2)\eta\eta' \sin(6w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& + 3\mu a_4 \gamma_3 \eta\eta' \sin(3w - \mathrm{v} + \mathrm{v}_1) & & + \frac{3}{2}\mu\alpha_3\gamma_3\eta'^2 \sin(6w - 2\mathrm{v}_1) \\
& + 3\mu a_5 \gamma_3 \eta'^2 \sin 3w & & \\
& & & + 3\mu a_4\gamma_2\eta^2 \sin(9w - 2\mathrm{v}) \\
& & & + 3\mu(a_4\gamma_3 + a_5\gamma_2)\eta\eta' \sin(9w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& & & + 3\mu a_5\gamma_3\eta'^2 \sin(9w - 2\mathrm{v}_1).
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

III. Die Integration der Differentialgleichung für S bei konstantem η und π.

Bezeichne nun also im Sinne der bereits angewandten Bezeichnungsweise:

$\left(\frac{dS_0}{dv}\right)_2$ die aus dem nullten Grade stammenden exargumentalen Glieder zweiten Grades,

$\left(\frac{dS_1}{dv}\right)_2$ die aus dem ersten Grade stammenden exargumentalen Glieder zweiten Grades,

$\left(\frac{dS}{dv}\right)_2$ die direkt gebildete Differentialgleichung in den Gliedern zweiten Grades,

$\left(\frac{dS_2}{dv}\right)_2$ den differentierten unbestimmten Integralansatz, so ist ja:

$$\left(\frac{dS}{dv}\right)_2 = \left(\frac{dS_0}{dv}\right)_2 + \left(\frac{dS_1}{dv}\right)_2 + \left(\frac{dS_2}{dv}\right)_2 \tag{16}$$

Die Differentiation des unbestimmten für S_2 gefundenen Integralansatzes (cf. I, S. 381) ergibt aber:

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{dS_2}{dv}\right)_2 = {} & a_7(1+\delta_1)\eta^2 \sin 3w && + a_{11}(\delta_1 - 1 + 2\varsigma)\eta^2 \sin(3w - 2\mathrm{v}) \\
& + a_8(1+\delta_1 - \varsigma + \varsigma_1)\eta\eta' \sin(3w + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) && + a_{12}(\delta_1 - 1 + \varsigma + \varsigma_1)\eta\eta' \sin(3w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& + a_9(1+\delta_1 + \varsigma - \varsigma_1)\eta\eta' \sin(3w - \mathrm{v} + \mathrm{v}_1) && + a_{13}(\delta_1 - 1 + 2\varsigma_1)\eta'^2 \sin(3w - 2\mathrm{v}_1) \\
& + a_{10}(1+\delta_1)\eta'^2 \sin 3w && \\
& + 2\alpha_{14}(\delta_1 + \varsigma)\eta^2 \sin(6w - 2\mathrm{v}) && + a_{17}(1 + 3\delta_1 + 2\varsigma)\eta^2 \sin(9w - 2\mathrm{v}) \\
& + \alpha_{15}(2\delta_1 + \varsigma + \varsigma_1)\eta\eta' \sin(6w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) && + a_{18}(1 + 3\delta_1 + \varsigma + \varsigma_1)\eta\eta' \sin(9w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& + 2\alpha_{16}(\delta_1 + \varsigma_1)\eta'^2 \sin(6w - 2\mathrm{v}_1) && + a_{19}(1 + 3\delta_1 + 2\varsigma_1)\eta'^2 \sin(9w - 2\mathrm{v}_1).
\end{aligned} \tag{17}$$

Das gesuchte Integral der Differentialgleichung (1) sive (12) für S_2 wird somit im Hinblick auf Gleichung (16), sowie (14), (15) und (17):

$$\begin{aligned}
S_2 = {} & a_7\eta^2 \cos 3w && + a_{11}\eta^2 \cos(3w - 2\mathrm{v}) && + \alpha_{14}\eta^2 \cos(6w - 2\mathrm{v}) \\
& + a_8\eta\eta' \cos(3w + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) && + a_{12}\eta\eta' \cos(3w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) && + \alpha_{15}\eta\eta' \cos(6w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& + a_9\eta\eta' \cos(3w - \mathrm{v} + \mathrm{v}_1) && + a_{13}\eta'^2 \cos(3w - 2\mathrm{v}_1) && + \alpha_{16}\eta'^2 \cos(6w - 2\mathrm{v}_1) \\
& + a_{10}\eta'^2 \cos 3w && && \\
& && && + a_{17}\eta^2 \cos(9w - 2\mathrm{v}) \\
& && && + a_{18}\eta\eta' \cos(9w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& && && + a_{19}\eta'^2 \cos(9w - 2\mathrm{v}_1) \\
& && && + (S_2)_3,
\end{aligned} \tag{18}$$

wobei die Koeffizienten gegeben sind durch die folgenden Relationen, indem wir die früher festgesetzte Genauigkeitsgrenze innehalten, also Glieder rein zweiter Ordnung, wie z. B. $a\varsigma$ fortlassen:

$$\begin{aligned}
& a_7 = \frac{1}{1+\delta_1}\{q_8 + H_7\}; \qquad a_8 = \frac{1}{1+\delta_1}\{q_9 + H_8\}; \qquad a_9 = \frac{1}{1+\delta_1}\{q_{10} + H_9\}; \\
& a_{10} = \frac{1}{1+\delta_1}\{q_{11} + H_{10}\}; \qquad a_{11} = \frac{1}{\delta_1 - 1}\left\{q_{12} - \frac{3}{2}q_1\alpha_{14} - \frac{3}{2}\mu a_1\gamma_{14} + H_{11}\right\}; \\
& a_{12} = \frac{1}{\delta_1 - 1}\left\{q_{13} - \frac{3}{2}q_1\alpha_{15} - \frac{3}{2}\mu a_1\gamma_{15} + H_{12}\right\}; \\
& a_{13} = \frac{1}{\delta_1 - 1}\left\{q_{14} - \frac{3}{2}q_1\alpha_{16} - \frac{3}{2}\mu a_1\gamma_{16} + H_{13}\right\}; \qquad \alpha_{14} = \frac{1}{2(\delta_1 + \varsigma)}\{q_{15} + H_{14}\}; \\
& \alpha_{15} = \frac{1}{2\delta_1 + \varsigma + \varsigma_1}\{q_{16} + H_{15}\}; \qquad \alpha_{16} = \frac{1}{2(\delta_1 + \varsigma_1)}\{q_{17} + H_{16}\}; \\
& a_{17} = \frac{1}{1+3\delta_1}\left\{q_{18} + \frac{3}{2}q_1\alpha_{14} + \frac{3}{2}\mu a_1\gamma_{14} + H_{17}\right\}; \\
& a_{18} = \frac{1}{1+3\delta_1}\left\{q_{19} + \frac{3}{2}q_1\alpha_{15} + \frac{3}{2}\mu a_1\gamma_{15} + H_{18}\right\}; \\
& a_{19} = \frac{1}{1+3\delta_1}\left\{q_{20} + \frac{3}{2}q_1\alpha_{16} + \frac{3}{2}\mu a_1\gamma_{16} + H_{19}\right\},
\end{aligned} \tag{19}$$

wobei die Größen:

$$\left.\begin{aligned}
&H_7 = \frac{3}{2}\alpha_2(q_2+q_6)+3\mu a_4\gamma_2; \qquad H_8 = \frac{3}{2}(\alpha_2 q_7+\alpha_3 q_2)+3\mu a_5\gamma_2;\\
&H_9 = \frac{3}{2}(\alpha_2 q_3+\alpha_3 q_6)+3\mu a_4\gamma_3; \qquad H_{10} = \frac{3}{2}\alpha_3(q_3+q_7)+3\mu a_5\gamma_3;\\
&H_{11} = -\frac{3}{2}q_2\alpha_2; \qquad H_{12} = -\frac{3}{2}(q_3\alpha_2+q_2\alpha_3); \qquad H_{13} = -\frac{3}{2}q_3\alpha_3;\\
&H_{14} = \frac{3}{2}q_4\alpha_2+\frac{3}{2}\mu\alpha_2\gamma_2; \qquad H_{15} = \frac{3}{2}(q_5\alpha_2+q_4\alpha_3)+\frac{3}{2}\mu(\alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2);\\
&H_{16} = \frac{3}{2}q_5\alpha_3+\frac{3}{2}\mu\alpha_3\gamma_3; \qquad H_{17} = \frac{3}{2}q_6\alpha_2+3\mu a_4\gamma_2;\\
&H_{18} = \frac{3}{2}(q_7\alpha_2+q_6\alpha_3)+3\mu(a_4\gamma_3+a_5\gamma_2); \qquad H_{19} = \frac{3}{2}q_7\alpha_3+3\mu a_5\gamma_3
\end{aligned}\right\} \quad (19\,a)$$

durch die Integration für den ersten Grad gegeben sind. Den Zusatzteil $(S_2)_3$ des Integrales aber haben wir noch zu bestimmen.

IV. Berücksichtigung der aus der Variabilität von η und π entstehenden Zusatzglieder zweiten Grades in S.

Bei der bisherigen Entwickelung wurden η, η', π, π_1 als konstant betrachtet. Der Variabilität dieser Größen tragen wir nun noch nachträglich Rechnung, jedoch bloß in den großen Gliedern im Integral S_2, die von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$ sind, das sind die Glieder der Form C, nicht aber denjenigen der Ordnung m'. Wir gehen zu ihrer Bestimmung also aus von dem Ausdruck:

$$S_2 = \alpha_{14}\eta^2\cos(6w-2v)+\alpha_{15}\eta\eta'\cos(6w-v-v_1)+\alpha_{16}\eta'^2\cos(6w-2v_1)+(S_2)_3. \qquad (20)$$

Nun ist offenbar:

$$\begin{aligned}
\eta^2\cos(6w-2v) &= \eta^2\cos\{6w-2(1-\varsigma)v+2\pi\}\\
&= \eta^2\cos 2\pi\cos\{6w-2(1-\varsigma)v\}\\
&\quad -\eta^2\sin 2\pi\sin\{6w-2(1-\varsigma)v\},
\end{aligned}$$

also partiell differentiiert (cf. I, S. 418 und 443):

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta^2\cos(6w-2v)}{dv} &= -2(\delta_1+\varsigma)\{\eta^2\cos 2\pi\sin[6w-2(1-\varsigma)v]\\
&\qquad +\eta^2\sin 2\pi\cos[6w-2(1-\varsigma)v]\}\\
&\quad +\frac{d\eta^2\cos 2\pi}{dv}\cos[6w-2(1-\varsigma)v]\\
&\quad -\frac{d\eta^2\sin 2\pi}{dv}\sin[6w-2(1-\varsigma)v]
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta^2\cos(6w-2v)}{dv} &= -2(\delta_1+\varsigma)\eta^2\sin(6w-2v)\\
&\quad +\frac{d\eta^2\cos 2\pi}{dv}\cos[6w-2(1-\varsigma)v]\\
&\quad -\frac{d\eta^2\sin 2\pi}{dv}\sin[6w-2(1-\varsigma)v].
\end{aligned}$$

Die Differentiation von Gleichung (20) ergibt also:

$$-\left(\frac{dS_2}{dv}\right)_2 = 2(\delta_1+\varsigma)\alpha_{14}\eta^2 \sin(6w-2v)$$
$$+(2\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)\alpha_{15}\eta\eta' \sin(6w-v-v_1)$$
$$+2(\delta_1+\varsigma_1)\alpha_{16}\eta'^2 \sin(6w-2v_1)$$
$$-\alpha_{14}\left\{\frac{d\eta^2 \cos 2\pi}{dv}\cos[6w-2(1-\varsigma)v]-\frac{d\eta^2 \sin 2\pi}{dv}\sin[6w-2(1-\varsigma)v]\right\}$$
$$-\alpha_{15}\left\{\frac{d\eta\eta' \cos(\pi+\pi_1)}{dv}\cos[6w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]-\frac{d\eta\eta' \sin(\pi+\pi_1)}{dv}\sin[6w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]\right\}$$
$$-\alpha_{16}\left\{\frac{d\eta'^2 \cos 2\pi_1}{dv}\cos[6w-2(1-\varsigma_1)v]-\frac{d\eta'^2 \sin 2\pi_1}{dv}\sin[6w-2(1-\varsigma_1)v]\right\}$$
$$-\frac{d(S_2)_\delta}{dv}.$$

Nun ist aber:

$$-\left(\frac{dS}{dv}\right)_2 = -\left(\frac{dS_2}{dv}\right)_2 + \text{zweiter Ordnung},$$

da die Koeffizienten von $\left(\frac{dS_0}{dv}\right)_2$ und $\left(\frac{dS_1}{dv}\right)_2$ in Gleichung (16), wie ein Blick auf Gleichung (14) und (15) zeigt, von der zweiten Ordnung sind, indem ja $a \mp m'$, $\alpha \mp \frac{m'}{\delta_1}$, $\gamma \mp \frac{m'}{\delta_1}$, also $a\gamma \mp \frac{m'^2}{\delta_1}$, $\alpha\gamma \mp \frac{m'^2}{\delta_1^2}$ ist. Nach der Differentialgleichung ist aber:

$$-\left(\frac{dS}{dv}\right)_2 = S_{\mathrm{II}}^{(8)}\eta^2 \sin(6w-2v)+S_{\mathrm{II}}^{(9)}\eta\eta' \sin(6w-v-v_1)+S_{\mathrm{II}}^{(10)}\eta'^2 \sin(6w-2v_1),$$

wo:

$$S_{\mathrm{II}}^{(8)} = 2(\delta_1+\varsigma)\alpha_{14}, \qquad S_{\mathrm{II}}^{(9)} = (2\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)\alpha_{15}; \qquad S_{\mathrm{II}}^{(10)} = 2(\delta_1+\varsigma_1)\alpha_{16}$$

ist. Daher wird die Differentialgleichung der Zusatzglieder zweiten Grades in S:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(S_2)_\delta}{dv} = &-\alpha_{14}\left\{\frac{d\eta^2 \cos 2\pi}{dv}\cos[6w-2(1-\varsigma)v]-\frac{d\eta^2 \sin 2\pi}{dv}\sin[6w-2(1-\varsigma)v]\right\}\\ &-\alpha_{15}\left\{\frac{d\eta\eta' \cos(\pi+\pi_1)}{dv}\cos[6w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]-\frac{d\eta\eta' \sin(\pi+\pi_1)}{dv}\sin[6w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]\right\}\\ &-\alpha_{16}\left\{\frac{d\eta'^2 \cos 2\pi_1}{dv}\cos[6w-2(1-\varsigma_1)v]-\frac{d\eta'^2 \sin 2\pi_1}{dv}\sin[6w-2(1-\varsigma_1)v]\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Durch Integration, bei der $\frac{d\eta^2 \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} 2\pi}{dv}$ etc. als konstant betrachtet werden können, erhält man den gesuchten Wert, indem man die Integrationsdivisoren mit Rücksicht auf die festgesetzte Genauigkeitsgrenze bildet:

$$\left.\begin{aligned}(S_2)_\delta = &-\frac{\alpha_{14}}{2\delta_1}\left\{\frac{d\eta^2 \cos 2\pi}{dv}\sin[6w-2(1-\varsigma)v]+\frac{d\eta^2 \sin 2\pi}{dv}\cos[6w-2(1-\varsigma)v]\right\}\\ &-\frac{\alpha_{15}}{2\delta_1}\left\{\frac{d\eta\eta' \cos(\pi+\pi_1)}{dv}\sin[6w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]+\frac{d\eta\eta' \sin(\pi+\pi_1)}{dv}\cos[6w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]\right\}\\ &-\frac{\alpha_{16}}{2\delta_1}\left\{\frac{d\eta'^2 \cos 2\pi_1}{dv}\sin[6w-2(1-\varsigma_1)v]+\frac{d\eta'^2 \sin 2\pi_1}{dv}\cos[6w-2(1-\varsigma_1)v]\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Dieser Wert ist in das Integral S_2, Gleichung (18), einzusetzen. Damit dasselbe vollständig bekannt sei, müssen noch β_7 bis β_{19} ermittelt sein, da diese in den Gleichungen (19) in q_8 bis q_{20} auf Grund der Gleichungen (8) enthalten sind. Die Größen β_7 bis β_{19} ergeben sich aber durch Integration der Gleichung für R_2, indem wir früher sahen, daß:

$$\rho = (\rho) + R$$

ist und (ρ), die elementären Glieder der Form B, nur für den ersten, dritten Grad etc. existieren, so daß für den zweiten Grad einfach $\rho = R$ wird, wo R nur die charakteristischen Glieder der Form C und D enthält, während die Differentialgleichung der elementären Glieder der Form A in R, die auch zweiten Grades sind, später für sich behandelt werden wird. Wir gehen nun also zur Integration der Differentialgleichung in R für den zweiten Grad über, die sich wesentlich komplizierter als diejenige von S gestaltet.

B. Die Differentialgleichung für R.

I. Übergang auf die zu integrierende Form der Differentialgleichung für R.

Allgemein fanden wir als Differentialgleichung für die Glieder zweiten Grades in ρ zur Bestimmung des Radius Vector:

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\rho} = \frac{a(1-\eta^2)}{1+(\rho)+R}$$

für den Typus $\frac{2}{3}$ die folgende Form (cf. I, S. 397), indem jetzt, wie dargelegt, $\rho = R$ zu setzen ist:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d^2R}{dv^2}+R\right)_2 = {} & 2S_2-P_2-2(S_1)_l P_1-2(S_2)_l P_0+2S_0(S_2)_l+(S_1)^2_{l+k}{}^1\\ & +Q_1\eta\sin \mathrm{v}-Q_2\left(\frac{dR}{dv}\right)_0-Q_1 \text{ pars }\left(\frac{dR}{dv}\right)_1-Q_0 \text{ pars }\left(\frac{dR}{dv}\right)_2\\ & +2(S_1)_l Q_0\eta\sin \mathrm{v}-2\frac{d\eta^2}{dv}\left(\frac{dR}{dv}\right)_0.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Diese allgemeine Form müssen wir nun für den Typus $\frac{2}{3}$ wirklich ausführen, indem wir auf der rechten Seite die sämtlichen in Abteilung I (cf. S. 381, 385—390) gegebenen Werte von Q_0, Q_1, Q_2, P_0, P_1, P_2, $(S_1)_l$, $(S_2)_l$, $\left(\frac{dR}{dv}\right)_0$, $\left(\frac{dR}{dv}\right)_1$, $\left(\frac{dR}{dv}\right)_2$ (cf. auch Formel (8) bis (11) dieses Kapitels VI) einführen und die betreffenden periodischen Aggregate ausmultiplizieren, wobei aber wieder nur Glieder der Gyldén'schen Fundamentalformen mitzunehmen sind, wie das in Abteilung I bei Herstellung der Differentialgleichung für die Glieder ersten Grades analog geschah (cf. I, S. 423). Außer den bereits angeführten gewöhnlichen Gliedern ersten Grades in Q_1, vom Argument $6w$, $3w+\mathrm{v}$, $3w+\mathrm{v}_1$, $9w-\mathrm{v}$, $9w-\mathrm{v}_1$, die bei der

---

[1] Durch $(S_1)^2_{l+k}$ ist das in Abteilung I bei Ableitung obiger Gleichung gegebene Glied $(S_1)^2_l$ vielmehr zu ersetzen; da ja Glieder von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ auch mitgenommen werden, und deshalb die kurzperiodischen Glieder bei Bildung des vorliegenden Ausdruckes für den Typus $\frac{2}{3}$ mitberücksichtigt werden müssen, was ich damals übersehen hatte, was aber jetzt bei der Ausführung erst in Betracht kommt. Ferner lies in Ergänzung des Abteilung I beigefügten Druckfehlerververzeichnisses auf S. 396, Z. 10, von unten natürlich: $S_0 Q \asymp m'^2$ statt $S_0 Q \asymp m'$.

Ausmultiplikation der periodischen Aggregate in Q_1 mitzunehmen waren (cf. I, S. 374), zeigt aber die weitere Untersuchung der Glieder, daß auch beim zweiten Grad eine Anzahl gewöhnlicher Glieder in Q_2 zu berücksichtigen sind. Auf diesen Punkt wies ich bereits in Abteilung I (S. 383) hin, wo die Anmerkung besagt: »Dabei sind aber in dem Wert (26) für Q, wie in der zweiten Abteilung dieser Untersuchungen dargetan werden wird, noch eine Anzahl gewöhnlicher Glieder zweiten Grades mitzunehmen, die bei Berechnung der Störungen zweiten Grades in Multiplikation mit $\frac{dR}{dv}$ neue elementäre und charakteristische Glieder ergeben«. Denn ein Blick auf die Differentialgleichung (23) zeigt, daß auf der rechten Seite das Glied:

$$Q_2\left(\frac{dR}{dv}\right)_0$$

auftritt. Bei Bildung dieses Wertes hat man in Q_2 offenbar noch andere als die in Gleichung (2) dieses Kapitels für Q_2 bereits angegebenen Glieder zu berücksichtigen, nämlich zu setzen:

$$Q_2\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 = Q_2'\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 + (Q_2)_g\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 \tag{24}$$

wobei jetzt rechts Q_2' den früher abgeleiteten Q_2—Wert bedeutet, $(Q_2)_g$ aber, wie die gehörige Durchmusterung aller denkbaren Möglichkeiten zeigt, die folgenden gewöhnlichen Glieder zweiten Grades umfaßt:

$$\left.\begin{aligned}
(Q_2)_g = & A_{6.2.0}\eta^2 \sin 6w & & + A^{(-2)}_{12.2.0}\eta^2 \sin(12w - 2v) \\
& + A^{(+1)}_{6.1.1}\eta\eta' \sin(6w + v - v_1) & & + A^{(-2)}_{12.1.1}\eta\eta' \sin(12w - v - v_1) \\
& + A^{(-1)}_{6.1.1}\eta\eta' \sin(6w - v + v_1) & & + A^{(-2)}_{12.0.2}\eta'^2 \sin(12w - 2v_1) \\
& + A_{6.0.2}\eta'^2 \sin 6w & & + A^{(+1)}_{0.1.1}\eta\eta' \sin(v - v_1) \\
& & & + A^{(+2)}_{0.1.1}\eta\eta' \sin(v + v_1) \\
& & & + A^{(+2)}_{0.0.2}\eta'^2 \sin 2v_1,
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

indem weitere Glieder der Argumente $v - v_1$, $v + v_1$ und $2v_1$ nicht in Betracht kommen, da:

$$A^{(-1)}_{0.1.1} = A^{(-2)}_{0.1.1} = A^{(+2)}_{0.2.0} = A^{(-2)}_{0.2.0} = A^{(-2)}_{0.0.2} = 0$$

ist, wie die Zusammenstellung aller bei der numerischen Rechnung mitzunehmenden A, B, C Koeffizienten der Derivierten Q, P, Z der Störungsfunktion bis zum dritten Grad inklusive in der dritten Abteilung zeigen wird. Schließlich sei noch bemerkt, daß in Gleichung (24) in den q-Koeffizienten (cf. die Relationen (8) u. (9) dieses Kapitels VI) nur die Glieder erster, nicht aber die Glieder zweiter Ordnung mitzunehmen sind, da $Q_2\left(\frac{dR}{dv}\right)_0$ bei Mitnahme von Gliedern erster Ordnung in den q schon zweiter Ordnung ist, im Falle der Mitnahme von Gliedern zweiter Ordnung in den q also dritter Ordnung würde. Die Mitnahme von Gliedern dritter Ordnung beim zweiten Grade liegt jedoch jenseits der festgesetzten notwendigen Genauigkeitsgrenze.

Für die einzelnen Ausdrücke der rechten Seite von Gleichung (23) fand ich folgende Resultate:

$$\begin{aligned}
2S_2 - P_2 = & (2a_7 - p_9)\eta^2 \cos 3w & & + (2a_{11} - p_{14})\eta^2 \cos(3w - 2v) \\
& + (2a_8 - p_{10})\eta\eta' \cos(3w + v - v_1) & & + (2a_{12} - p_{15})\eta\eta' \cos(3w - v - v_1) \\
& + (2a_9 - p_{11})\eta\eta' \cos(3w - v + v_1) & & + (2a_{13} - p_{16})\eta'^2 \cos(3w - 2v_1) \\
& + (2a_{10} - p_{12})\eta'^2 \cos 3w & & \\
& & & \\
& + (2\alpha_{14} - p_{17})\eta^2 \cos(6w - 2v) & & + (2a_{17} - p_{20})\eta^2 \cos(9w - 2v) \\
& + (2\alpha_{15} - p_{18})\eta\eta' \cos(6w - v - v_1) & & + (2a_{18} - p_{21})\eta\eta' \cos(9w - v - v_1) \\
& + (2\alpha_{16} - p_{19})\eta'^2 \cos(6w - 2v_1) & & + (2a_{19} - p_{22})\eta'^2 \cos(9w - 2v_1).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-2(S_1)_l P_1 = & -\alpha_2(p_2+p_6)\eta^2\cos 3w && -\alpha_2 p_2\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v}) \\
& -(\alpha_2 p_7+\alpha_3 p_2)\eta\eta'\cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && -(\alpha_2 p_3+\alpha_3 p_2)\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& -(\alpha_2 p_3+\alpha_3 p_6)\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && -\alpha_3 p_3\eta'^2\cos(3w-2\mathrm{v}_1) \\
& -\alpha_3(p_3+p_7)\eta'^2\cos 3w && \\
& -\alpha_2 p_4\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v}) && -\alpha_2 p_6\eta^2\cos(9w-2\mathrm{v}) \\
& -(\alpha_2 p_5+\alpha_3 p_4)\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && -(\alpha_2 p_7+\alpha_3 p_6)\eta\eta'\cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& -\alpha_3 p_5\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1) && -\alpha_3 p_7\eta'^2\cos(9w-2\mathrm{v}_1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-2(S_2)_l P_0 = & -\alpha_{14}p_1\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v}) && -2\alpha_{14}p_0\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v}) \\
& -\alpha_{15}p_1\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && -2\alpha_{15}p_0\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& -\alpha_{16}p_1\eta'^2\cos(3w-2\mathrm{v}_1) && -2\alpha_{16}p_0\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1) \\
& && -\alpha_{14}p_1\eta^2\cos(9w-2\mathrm{v}) \\
& && -\alpha_{15}p_1\eta\eta'\cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& && -\alpha_{16}p_1\eta'^2\cos(9w-2\mathrm{v}_1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2S_0(S_2)_l = & \; a_1\alpha_{14}\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v}) && +2a_0\alpha_{14}\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v}) \\
& \; a_1\alpha_{15}\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +2a_0\alpha_{15}\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& \; a_1\alpha_{16}\eta'^2\cos(3w-2\mathrm{v}_1) && +2a_0\alpha_{16}\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1) \\
& && +a_1\alpha_{14}\eta^2\cos(9w-2\mathrm{v}) \\
& && +a_1\alpha_{15}\eta\eta'\cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& && +a_1\alpha_{16}\eta'^2\cos(9w-2\mathrm{v}_1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(S_1)^2_{l+k} = & (a_2+a_4)\alpha_2\eta^2\cos 3w && +a_2\alpha_2\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v}) \\
& +(a_2\alpha_3+a_5\alpha_2)\eta\eta'\cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +(a_2\alpha_3+a_3\alpha_2)\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +(a_3\alpha_2+a_4\alpha_3)\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && +a_3\alpha_3\eta'^2\cos(3w-2\mathrm{v}_1) \\
& +(a_3+a_5)\alpha_3\eta'^2\cos 3w && \\
& +\frac{1}{2}\alpha_2^2\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v}) && +a_4\alpha_2\eta^2\cos(9w-2\mathrm{v}) \\
& +\alpha_2\alpha_3\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +(a_5\alpha_2+a_4\alpha_3)\eta\eta'\cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +\frac{1}{2}\alpha_3^2\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1) && +a_5\alpha_3\eta'^2\cos(9w-2\mathrm{v}_1),
\end{aligned}
$$

wobei wie immer Glieder rein zweiter Ordnung, wie z. B. $\frac{1}{2}a_2 a_4\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})$ etc. fortgelassen sind.

$$
\begin{aligned}
Q_1\eta\sin\mathrm{v} = & \frac{1}{2}(g_2-q_4)\eta^2\cos 3w && +\frac{1}{2}q_4\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v}) \\
& -\frac{1}{2}q_5\eta\eta'\cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +\frac{1}{2}g_5\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +\frac{1}{2}g_3\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && \\
& +\frac{1}{2}q_6\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v}) && +\frac{1}{2}g_4\eta^2\cos(9w-2\mathrm{v}) \\
& +\frac{1}{2}q_7\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +\frac{1}{2}g_5\eta\eta'\cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1).
\end{aligned}
$$

In diesem Ausdrucke und ebenso in demjenigen für $2S_2 - P_2$ hat man offenbar in den q-, g- und p-Koeffizienten die Glieder zweiter Ordnung mitzunehmen, während das in allen übrigen Teilen der rechten Seite von Gleichung (23), wie aus dem in Bezug auf Gleichung (24) zuvor Gesagten hervorgeht, nicht der Fall ist. Weiter ist:

$$
\begin{aligned}
-Q_2 \left(\frac{dR}{dv}\right)_0 = & \frac{1}{2}(1+\delta_1) A_{6.2.0} \beta_1 \eta^2 \cos 3w \\
& + \frac{1}{2}(1+\delta_1)\left(A^{(+1)}_{6.1.1} - A^{(+1)}_{0.1.1} - q_{21}\right)\beta_1 \eta\eta' \cos(3w + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& + \frac{1}{2}(1+\delta_1)\left(A^{(-1)}_{6.1.1} + A^{(+1)}_{0.1.1} + q_{21}\right)\beta_1 \eta\eta' \cos(3w - \mathrm{v} + \mathrm{v}_1) \\
& + \frac{1}{2}(1+\delta_1) A_{6.0.2} \beta_1 \eta'^2 \cos 3w \\
& + \frac{1}{2}(1+\delta_1) q_{15} \beta_1 \eta^2 \cos(3w - 2\mathrm{v}) \\
& + \frac{1}{2}(1+\delta_1)\left(A^{(+2)}_{0.1.1} + q_{16}\right)\beta_1 \eta\eta' \cos(3w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& + \frac{1}{2}(1+\delta_1)\left(A^{(+2)}_{0.0.2} + q_{17}\right)\beta_1 \eta'^2 \cos(3w - 2\mathrm{v}_1) \\
& - \frac{1}{2}(1+\delta_1)(q_{12} - q_{18})\beta_1 \eta^2 \cos(6w - 2\mathrm{v}) \\
& - \frac{1}{2}(1+\delta_1)(q_{13} - q_{19})\beta_1 \eta\eta' \cos(6w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& - \frac{1}{2}(1+\delta_1)(q_{14} - q_{20})\beta_1 \eta'^2 \cos(6w - 2\mathrm{v}_1) \\
& + \frac{1}{2}(1+\delta_1)\left(A^{(-2)}_{12.2.0} - q_{15}\right)\beta_1 \eta^2 \cos(9w - 2\mathrm{v}) \\
& + \frac{1}{2}(1+\delta_1)\left(A^{(-2)}_{12.1.1} - q_{16}\right)\beta_1 \eta\eta' \cos(9w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& + \frac{1}{2}(1+\delta_1)\left(A^{(-2)}_{12.0.2} - q_{17}\right)\beta_1 \eta'^2 \cos(9w - 2\mathrm{v}_1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-Q_1 \text{ pars} \left(\frac{dR}{dv}\right)_1 = & \frac{1}{2}(1+2\delta_1+\varsigma)(g_4+q_4)\beta_4 \eta^2 \cos 3w \\
& + \frac{1}{2}\left[g_5(1+2\delta_1+\varsigma)\beta_4 + q_4(1+2\delta_1+\varsigma_1)\beta_5\right]\eta\eta' \cos(3w + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& + \frac{1}{2}\left[q_5(1+2\delta_1+\varsigma)\beta_4 + g_4(1+2\delta_1+\varsigma_1)\beta_5\right]\eta\eta' \cos(3w - \mathrm{v} + \mathrm{v}_1) \\
& + \frac{1}{2}(1+2\delta_1+\varsigma_1)(g_5+q_5)\beta_5 \eta'^2 \cos 3w \\
& + \frac{1}{2}(1+2\delta_1+\varsigma) g_2 \beta_4 \eta^2 \cos(3w - 2\mathrm{v}) \\
& + \frac{1}{2}\left[g_3(1+2\delta_1+\varsigma)\beta_4 + g_2(1+2\delta_1+\varsigma_1)\beta_5\right]\eta\eta' \cos(3w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& + \frac{1}{2}(1+2\delta_1+\varsigma_1) g_3 \beta_5 \eta'^2 \cos(3w - 2\mathrm{v}_1)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}(1+2\delta_1+\varsigma)q_2\beta_4\eta^2\cos(6w-2v)$$

$$+\frac{1}{2}[q_3(1+2\delta_1+\varsigma)\beta_4+q_2(1+2\delta_1+\varsigma_1)\beta_5]\eta\eta'\cos(6w-v-v_1)$$

$$+\frac{1}{2}q_3(1+2\delta_1+\varsigma_1)\beta_5\eta'^2\cos(6w-2v_1)$$

$$-\frac{1}{2}(1+2\delta_1+\varsigma)q_4\beta_4\eta^2\cos(9w-2v)$$

$$-\frac{1}{2}[q_5(1+2\delta_1+\varsigma)\beta_4+q_4(1+2\delta_1+\varsigma_1)\beta_5]\eta\eta'\cos(9w-v-v_1)$$

$$-\frac{1}{2}[q_5(1+2\delta_1+\varsigma_1)\beta_5\eta'^2\cos(9w-2v_1).$$

$$-Q_0\text{ pars}\left(\frac{dR}{dv}\right)_2=\frac{1}{2}(1+\delta_1)g_1\beta_7\eta^2\cos 3w$$

$$+\frac{1}{2}(1+\delta_1+\varsigma-\varsigma_1)g_1\beta_9\eta\eta'\cos(3w+v-v_1)$$

$$+\frac{1}{2}(1+\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)g_1\beta_8\eta\eta'\cos(3w-v+v_1)$$

$$+\frac{1}{2}(1+\delta_1)g_1\beta_{10}\eta'^2\cos 3w$$

$$+\frac{1}{2}(1+3\delta_1+2\varsigma)g_1\beta_{17}\eta^2\cos(3w-2v)$$

$$+\frac{1}{2}(1+3\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)g_1\beta_{18}\eta\eta'\cos(3w-v-v_1)$$

$$+\frac{1}{2}(1+3\delta_1+2\varsigma_1)g_1\beta_{19}\eta'^2\cos(3w-2v_1)$$

$$+\frac{1}{2}q_1[(1+3\delta_1+2\varsigma)\beta_{17}-(\delta_1+2\varsigma-1)\beta_{11}]\eta^2\cos(6w-2v)$$

$$+\frac{1}{2}q_1[(1+3\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)\beta_{18}-(\delta_1+\varsigma+\varsigma_1-1)\beta_{12}]\eta\eta'\cos(6w-v-v_1)$$

$$+\frac{1}{2}q_1[(1+3\delta_1+2\varsigma_1)\beta_{19}-(\delta_1+2\varsigma_1-1)\beta_{13}]\eta'^2\cos(6w-2v_1)$$

$$-\frac{1}{2}(\delta_1+2\varsigma-1)g_1\beta_{11}\eta^2\cos(9w-2v)$$

$$-\frac{1}{2}(\delta_1+\varsigma+\varsigma_1-1)g_1\beta_{12}\eta\eta'\cos(9w-v-v_1)$$

$$-\frac{1}{2}(\delta_1+2\varsigma_1-1)g_1\beta_{13}\eta'^2\cos(9w-2v_1).$$

$$
\begin{aligned}
2(S_1)_l Q_0 \eta \sin \mathrm{v} = {} & \frac{1}{2}\, g_1 \alpha_2 \eta^2 \cos 3w \\
& + \frac{1}{2}\, g_1 \alpha_3 \eta\eta' \cos(3w - \mathrm{v} + \mathrm{v}_1) \\
& + \frac{1}{2}\, q_1 \alpha_2 \eta^2 \cos(6w - 2\mathrm{v}) \\
& + \frac{1}{2}\, q_1 \alpha_3 \eta\eta' \cos(6w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& + \frac{1}{2}\, g_1 \alpha_2 \eta^2 \cos(9w - 2\mathrm{v}) \\
& + \frac{1}{2}\, g_1 \alpha_3 \eta\eta' \cos(9w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1).
\end{aligned}
$$

Bei Behandlung der elementären Glieder zweiten Grades der Form A in Abteilung III werden wir sehen, daß:

$$
\frac{d\eta^2}{dv} = -P_{\mathrm{I}}^{(2)} \eta\eta' \sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}_1) - P_{\mathrm{I}}^{(2)} \eta\eta' \sin(\mathrm{v} + \mathrm{v}_1) - P_{\mathrm{I}}^{(1)} \eta^2 \sin 2\mathrm{v} \tag{26}
$$

ist, wobei $P_{\mathrm{I}}^{(1)}$ und $P_{\mathrm{I}}^{(2)}$ die Koeffizienten der Differentialgleichung in (ρ) für die elmentären Glieder der Form B ersten Grades sind, deren Werte wir bereits ermittelten, nämlich (cf. I, S. 426):

$$
\left.
\begin{aligned}
P_{\mathrm{I}}^{(1)} &= 2a_2 - p_2 + \frac{1}{2}\{g_1 \beta_4 + (g_2 + q_4)\beta_1\} + (a_1 - p_1)\alpha_2 - \zeta\gamma_2 \\
P_{\mathrm{I}}^{(2)} &= 2a_3 - p_3 + \frac{1}{2}\{g_1 \beta_5 + (g_3 + q_5)\beta_1\} + (a_1 - p_1)\alpha_3 - \zeta\gamma_3 \\
\zeta &= -3\mu\beta_1\left(1 + \frac{1}{2}\,\delta_1\right).
\end{aligned}
\right\} \tag{27}
$$

Daher ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
-2\,\frac{d\eta^2}{dv}\left(\frac{dR}{dv}\right)_0 = {} & (1+\delta_1) P_{\mathrm{I}}^{(2)} \beta_1 \eta\eta' \cos(3w + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& - (1+\delta_1) P_{\mathrm{I}}^{(2)} \beta_1 \eta\eta' \cos(3w - \mathrm{v} + \mathrm{v}_1) \\
& - (1+\delta_1) P_{\mathrm{I}}^{(2)} \beta_1 \eta\eta' \cos(3w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& - (1+\delta_1) P_{\mathrm{I}}^{(1)} \beta_1 \eta^2 \cos(3w - 2\mathrm{v}).
\end{aligned}
$$

Die Differentialgleichung zur Bestimmung der Glieder zweiten Grades im Radius Vector wird daher:

$$
\left.
\begin{aligned}
\left(\frac{d^2R}{dv^2} + R\right)_2 = {} & P_{\mathrm{II}}^{(1)} \eta^2 \cos 3w && + P_{\mathrm{II}}^{(5)} \eta^2 \cos(3w - 2\mathrm{v}) \\
& + P_{\mathrm{II}}^{(2)} \eta\eta' \cos(3w + \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) && + P_{\mathrm{II}}^{(6)} \eta\eta' \cos(3w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& + P_{\mathrm{II}}^{(3)} \eta\eta' \cos(3w - \mathrm{v} + \mathrm{v}_1) && + P_{\mathrm{II}}^{(7)} \eta'^2 \cos(3w - 2\mathrm{v}_1) \\
& + P_{\mathrm{II}}^{(4)} \eta'^2 \cos 3w && \\
& + P_{\mathrm{II}}^{(8)} \eta^2 \cos(6w - 2\mathrm{v}) && + P_{\mathrm{II}}^{(11)} \eta^2 \cos(9w - 2\mathrm{v}) \\
& + P_{\mathrm{II}}^{(9)} \eta\eta' \cos(6w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) && + P_{\mathrm{II}}^{(12)} \eta\eta' \cos(9w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\
& + P_{\mathrm{II}}^{(10)} \eta'^2 \cos(6w - 2\mathrm{v}_1) && + P_{\mathrm{II}}^{(13)} \eta'^2 \cos(9w - 2\mathrm{v}_1),
\end{aligned}
\right\} \tag{28}
$$

wobei die Koeffizienten unter Einhaltung der festgesetzten Genauigkeitsgrenze, also mit Vernachlässigung von δ_1, ς, ς_1, indem z. B. $\delta_1\beta_1 q_{17} = m'^2$, resp. $\frac{m'^3}{\delta_1}$ und $\varsigma q_5 \beta_4 = \frac{m'^3}{\delta_1}$ resp. $\frac{m'^4}{\delta_1^2}$ ist, die folgenden Werte haben:

$$\left.\begin{aligned}
P_{\rm II}^{(1)} &= 2a_7 - p_9 + \frac{1}{2}(g_2 - q_4) + \frac{1}{2}A_{6.2.0}\beta_1 + \frac{1}{2}(g_4 + q_4)\beta_4 + \\
&\qquad + \frac{1}{2}g_1\beta_7 + \left(\frac{1}{2}g_1 + a_2 + a_4 - p_2 - p_6\right)\alpha_2 \\
P_{\rm II}^{(2)} &= 2a_8 - p_{10} - \frac{1}{2}q_5 + \frac{1}{2}(A_{6.1.1}^{(+1)} - A_{0.1.1}^{(+1)} + 2P_{\rm I}^{(2)} - q_{21})\beta_1 + \\
&\qquad + \frac{1}{2}(g_5\beta_4 + q_4\beta_5) + \frac{1}{2}g_1\beta_9 + (a_5 - p_7)\alpha_2 + (a_2 - p_2)\alpha_3 \\
P_{\rm II}^{(3)} &= 2a_9 - p_{11} + \frac{1}{2}g_3 + \frac{1}{2}(A_{6.1.1}^{(-1)} + A_{0.1.1}^{(+1)} - 2P_{\rm I}^{(2)} + q_{21})\beta_1 + \\
&\qquad + \frac{1}{2}(q_5\beta_4 + g_4\beta_5) + \frac{1}{2}g_1\beta_8 + (a_3 - p_3)\alpha_2 + \left(\frac{1}{2}g_1 + a_4 - p_6\right)\alpha_3 \\
P_{\rm II}^{(4)} &= 2a_{10} - p_{12} + \frac{1}{2}A_{6.0.2}\beta_1 + \frac{1}{2}(g_5 + q_5)\beta_5 + \frac{1}{2}g_1\beta_{10} + (a_3 + a_5 - p_3 - p_7)\alpha_3 \\
P_{\rm II}^{(5)} &= 2a_{11} - p_{14} + \frac{1}{2}q_4 + \frac{1}{2}(q_{15} - 2P_{\rm I}^{(1)})\beta_1 + \frac{1}{2}g_2\beta_4 + \frac{1}{2}g_1\beta_{17} + (a_2 - p_2)\alpha_2 + (a_1 - p_1)\alpha_{14} \\
P_{\rm II}^{(6)} &= 2a_{12} - p_{15} + \frac{1}{2}q_5 + \frac{1}{2}(A_{0.1.1}^{(+2)} - 2P_{\rm I}^{(2)} + q_{16})\beta_1 + \\
&\qquad + \frac{1}{2}(g_3\beta_4 + g_2\beta_5) + \frac{1}{2}g_1\beta_{18} + (a_3 - p_3)\alpha_2 + (a_2 - p_2)\alpha_3 + (a_1 - p_1)\alpha_{15} \\
P_{\rm II}^{(7)} &= 2a_{13} - p_{16} + \frac{1}{2}(A_{0.0.2}^{(+2)} + q_{17})\beta_1 + \frac{1}{2}g_3\beta_5 + \frac{1}{2}g_1\beta_{19} + (a_3 - p_3)\alpha_3 + (a_1 - p_1)\alpha_{16} \\
P_{\rm II}^{(8)} &= 2\alpha_{14} - p_{17} + \frac{1}{2}q_6 + \frac{1}{2}\alpha_2^2 - \frac{1}{2}(q_{12} - q_{18})\beta_1 + \frac{1}{2}q_2\beta_4 + \\
&\qquad + \frac{1}{2}q_1\beta_{11} + \frac{1}{2}q_1\beta_{17} + \left(\frac{1}{2}q_1 - p_4\right)\alpha_2 + 2(a_0 - p_0)\alpha_{14} \\
P_{\rm II}^{(9)} &= 2\alpha_{15} - p_{18} + \frac{1}{2}q_7 + \alpha_2\alpha_3 - \frac{1}{2}(q_{13} - q_{19})\beta_1 + \frac{1}{2}q_3\beta_4 + \frac{1}{2}q_2\beta_5 + \\
&\qquad + \frac{1}{2}q_1\beta_{12} + \frac{1}{2}q_1\beta_{18} - p_5\alpha_2 + \left(\frac{1}{2}q_1 - p_4\right)\alpha_3 + 2(a_0 - p_0)\alpha_{15} \\
P_{\rm II}^{(10)} &= 2\alpha_{16} - p_{19} + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{1}{2}(q_{14} - q_{20})\beta_1 + \frac{1}{2}q_3\beta_5 + \\
&\qquad + \frac{1}{2}q_1\beta_{13} + \frac{1}{2}q_1\beta_{19} - p_5\alpha_3 + 2(a_0 - p_0)\alpha_{16} \\
P_{\rm II}^{(11)} &= 2a_{17} - p_{20} + \frac{1}{2}g_4 + \frac{1}{2}(A_{12.2.0}^{(-2)} - q_{15})\beta_1 - \frac{1}{2}q_4\beta_4 + \\
&\qquad + \frac{1}{2}g_1\beta_{11} + \frac{1}{2}g_1\alpha_2 + (a_4 - p_6)\alpha_2 + (a_1 - p_1)\alpha_{14} \\
P_{\rm II}^{(12)} &= 2a_{18} - p_{21} + \frac{1}{2}g_5 + \frac{1}{2}(A_{12.1.1}^{(-2)} - q_{16})\beta_1 - \frac{1}{2}q_5\beta_4 - \\
&\qquad - \frac{1}{2}q_4\beta_5 + \frac{1}{2}g_1\beta_{12} + (a_5 - p_7)\alpha_2 + \left(\frac{1}{2}g_1 + a_4 - p_6\right)\alpha_3 + (a_1 - p_1)\alpha_{15} \\
P_{\rm II}^{(13)} &= 2a_{19} - p_{22} + \frac{1}{2}(A_{12.0.2}^{(-2)} - q_{17})\beta_1 - \frac{1}{2}q_5\beta_5 + \frac{1}{2}g_1\beta_{13} + (a_5 - p_7)\alpha_3 + (a_1 - p_1)\alpha_{16}.
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Hier sind für die charakteristischen Argumente der Form C, d. h. für die Argumente: $6w-2v$ $6w-v-v_1$, $6w-2v_1$, doch neben den großen Gliedern $2\alpha_{16}-p_{19}+\frac{1}{2}\alpha_3^2$ noch die übrigen in $P_{II}^{(10)}$ angegebenen mitgenommen worden, wiewohl sie durch die Integration in R nicht vergrößert werden, was indes in T der Fall ist (cf. I, S. 368 und 380); und dementsprechend ist auch später bei der numerischen Ausführung der Integration des ersten Grades für R besser von den Gleichungen (84) (cf. Abteilung I, Kapitel IV) für $P_I^{(3)}$ und $P_I^{(4)}$ (d. s. die Glieder der Form C beim ersten Grad) auszugehen und nicht, wie dort gesagt wurde, von den Gleichungen (90), wiewohl das bezüglich der Genauigkeit ja kein wesentlicher Punkt ist (cf. I, S. 424 und 426).

II. Bestimmung der exargumentalen Glieder zweiten Grades in R.

Zunächst müssen wir nun wieder die exargumentalen Glieder bestimmen, und zwar entstehen exargumentale Glieder zweiten Grades durch Integration sowohl über das Glied nullten Grades wie über die Glieder ersten Grades. Dabei wollen wir wieder so verfahren, daß wir in jedem Fall diese Glieder statt durch partielle Integration durch partielle Differentiation bestimmen.

a) **Exargumentale Glieder zweiten Grades aus dem nullten Grade.**

Durch Differentiation des unbestimmten Integralansatzes für den nullten Grad von R (cf. I, S. 381) erhält man:

$$\frac{dR_0}{dv} = -3\beta_1 \sin 3w \frac{dw}{dv}$$

und:

$$\frac{d^2R_0}{dv^2} = -9\beta_1 \cos 3w \left(\frac{dw}{dv}\right)^2 - 3\beta_1 \sin 3w \frac{d^2w}{dv^2}.$$

Im Sinne der früher entwickelten allgemeinen Theorie ist nun aber (cf. I, S. 410 bis 415):

$$\frac{dw}{dv} = 1-\mu_1-\mu\left(\frac{dT}{dv}\right)_l = 1-\mu_1-\mu\gamma_0-\mu\frac{dT_l}{dv}$$
$$= 1-\mu_2-\mu\frac{dT_l}{dv} = 1-\mu_1-\mu\frac{dV}{dv},$$

also:

$$\frac{d^2w}{dv^2} = -\mu\frac{d^2V}{dv^2},$$

mithin:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2R_0}{dv^2}+R_0 &= \{1-(1+\delta_1)^2\}\beta_1 \cos 3w \\ &+\left\{6\mu(1+\delta_1)\frac{dV}{dv}-9\mu^2\left(\frac{dV}{dv}\right)^2\right\}\beta_1 \cos 3w \\ &+3\mu\beta_1\frac{d^2V}{dv^2}\sin 3w. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Um erstens die aus:

$$-9\mu^2\left(\frac{dV}{dv}\right)^2\beta_1 \cos 3w$$

entspringenden exargumentalen Glieder zweiten Grades zu bestimmen, sind offenbar in $\frac{dV}{dv}$ nur die Glieder ersten Grades mitzunehmen; es ist also auszugehen von (cf. I, S. 382):

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 = \gamma_2 \eta \cos(3w-\mathrm{v}) + \gamma_3 \eta' \cos(3w-\mathrm{v}_1).$$

Es wird also:

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_1^2 = \frac{1}{2}\gamma_2^2\eta^2 + \frac{1}{2}\gamma_3^2\eta'^2 + \gamma_2\gamma_3\eta\eta' \cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$$
$$+\frac{1}{2}\gamma_2^2\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v}) + \gamma_2\gamma_3\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \frac{1}{2}\gamma_3^2\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1),$$

mithin:

$$\begin{aligned} -9\mu^2\left(\frac{dV}{dv}\right)_1^2\beta_1\cos 3w = {} & -\lambda_1\gamma_2^2\eta^2\cos 3w - \frac{1}{2}\lambda_1\gamma_2^2\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v}) \\ & -\lambda_1\gamma_2\gamma_3\eta\eta'\cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) - \lambda_1\gamma_2\gamma_3\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ & -\lambda_1\gamma_2\gamma_3\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) - \frac{1}{2}\lambda_1\gamma_3^2\eta'^2\cos(3w-2\mathrm{v}_1) \\ & -\lambda_1\gamma_3^2\eta'^2\cos 3w - \frac{1}{2}\lambda_1\gamma_2^2\eta^2\cos(9w-2\mathrm{v}) \\ & - \lambda_1\gamma_2\gamma_3\eta\eta'\cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ & - \frac{1}{2}\lambda_1\gamma_3^2\eta'^2\cos(9w-2\mathrm{v}_1), \end{aligned} \tag{31}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\lambda_1 = \frac{9}{2}\mu^2\beta_1, \tag{31a}$$

und β_1 aus Abteilung I bekannt, also λ_1 eine gegebene Konstante ist.

Um zweitens die aus:

$$6\mu(1+\delta_1)\frac{dV}{dv}\beta_1\cos 3w$$

entspringenden exargumentalen Glieder zweiten Grades zu bestimmen, haben wir offenbar auszugehen von:

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_2 = \gamma_{14}\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v}) + \gamma_{15}\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \gamma_{16}\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1)$$

und erhalten so:

$$\begin{aligned} 6\mu(1+\delta_1)\frac{dV}{dv}\beta_1\cos 3w = {} & \lambda_2'\gamma_{14}\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v}) + \lambda_2'\gamma_{14}\eta^2\cos(9w-2\mathrm{v}) \\ & +\lambda_2'\gamma_{15}\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \lambda_2'\gamma_{15}\eta\eta'\cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ & +\lambda_2'\gamma_{16}\eta'^2\cos(3w-2\mathrm{v}_1) + \lambda_2'\gamma_{16}\eta'^2\cos(9w-2\mathrm{v}_1), \end{aligned} \tag{32}$$

wo:

$$\lambda_2' = 3\mu(1+\delta_1)\beta_1$$

ist.

Um drittens die aus:

$$3\mu\beta_1 \frac{d^2V}{dv^2}\sin 3w \tag{32 a}$$

entspringenden exargumentalen Glieder zweiten Grades zu erhalten, haben wir aus:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dv} = \gamma_2\eta\cos(3w-\mathrm{v}) &+\gamma_3\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)\\ +\gamma_{14}\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v}) &+\gamma_{15}\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &+\gamma_{16}\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1)\end{aligned}$$

den zweiten Differentialquotienten zu bilden.

Derselbe wird:

$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{dv^2} = &-\gamma_2\eta\sin(3w-\mathrm{v})\left\{3\frac{dw}{dv}-1+\varsigma\right\}\\ &-\gamma_3\eta'\sin(3w-\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}-1+\varsigma_1\right\}\\ &-\gamma_{14}\eta^2\sin(6w-2\mathrm{v})\left\{6\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma\right\}\\ &-\gamma_{15}\eta\eta'\sin(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\left\{6\frac{dw}{dv}-2+\varsigma+\varsigma_1\right\}\\ &-\gamma_{16}\eta'^2\sin(6w-2\mathrm{v}_1)\left\{6\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma_1\right\}.\end{aligned}$$

Da es auf den zweiten Grad abgesehen ist, haben wir hierin zu setzen:

$$\frac{dw}{dv} = 1-\mu\varsigma-\mu\gamma_2\eta\cos(3w-\mathrm{v})-\mu\gamma_3\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)$$

und erhalten, wenn wieder ς und ς_1 vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{dv^2} = &\left(\frac{3}{2}\mu\gamma_2^2-2\delta_1\gamma_{14}\right)\eta^2\sin(6w-2\mathrm{v})\\ &+(3\mu\gamma_2\gamma_3-2\delta_1\gamma_{15})\eta\eta'\sin(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &+\left(\frac{3}{2}\mu\gamma_3^2-2\delta_1\gamma_{16}\right)\eta'^2\sin(6w-2\mathrm{v}_1).\end{aligned}$$

Daher ergibt sich für:

$$\left.\begin{aligned}3\mu\beta_1\frac{d^2V}{dv^2}\sin 3w = &\,\lambda_3\left(\frac{3}{2}\mu\gamma_2^2-2\delta_1\gamma_{14}\right)\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v})\\ &+\lambda_3(3\mu\gamma_2\gamma_3-2\delta_1\gamma_{15})\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &+\lambda_3\left(\frac{3}{2}\mu\gamma_3^2-2\delta_1\gamma_{16}\right)\eta'^2\cos(3w-2\mathrm{v}_1)\\ &-\lambda_3\left(\frac{3}{2}\mu\gamma_2^2-2\delta_1\gamma_{14}\right)\eta^2\cos(9w-2\mathrm{v})\\ &-\lambda_3(3\mu\gamma_2\gamma_3-2\delta_1\gamma_{15})\eta\eta'\cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &-\lambda_3\left(\frac{3}{2}\mu\gamma_3^2-2\delta_1\gamma_{16}\right)\eta'^2\cos(9w-2\mathrm{v}_1),\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

wobei:

$$\lambda_3 = \frac{3}{2}\mu\beta_1 \tag{33a}$$

ist.

Durch Kombination der Glieder gleicher Argumente, wobei sich Glieder teils gegenseitig tilgen, teils zusammenziehen, erhält man für die aus dem nullten Grad entspringenden exargumentalen Glieder zweiten Grades:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d^2R_0}{dv^2}\right)_2 = &-\lambda_1\gamma_2^2\eta^2\cos 3w &&+2\lambda_3\gamma_{14}\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v})\\ &-\lambda_1\gamma_2\gamma_3\eta\eta'\cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) &&+2\lambda_3\gamma_{15}\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &-\lambda_1\gamma_2\gamma_3\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) &&+2\lambda_3\gamma_{16}\eta'^2\cos(3w-2\mathrm{v}_1)\\ &-\lambda_1\gamma_3^2\eta'^2\cos 3w &&\\ & &&-(\lambda_1\gamma_2^2-\lambda_2\gamma_{14})\,\eta^2\cos(9w-2\mathrm{v})\\ & &&-(2\lambda_1\gamma_2\gamma_3-\lambda_2\gamma_{15})\,\eta\eta'\cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ & &&-(\lambda_1\gamma_3^2-\lambda_2\gamma_{16})\,\eta'^2\cos(9w-2\mathrm{v}_1),\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

wobei also:

$$\lambda_1 = \frac{9}{2}\mu^2\beta_1, \qquad \lambda_2 = 3\mu(1+2\delta_1)\beta_1, \qquad \lambda_3 = \frac{3}{2}\mu\beta_1 \tag{34a}$$

ist.

---

b) Exargumentale Glieder zweiten Grades aus dem ersten Grade.

Durch Differentiation des unbestimmten Integralansatzes für die Glieder ersten Grades in R (cf. I, S. 381) erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{dR_1}{dv} = &-\beta_2\eta\sin(3w-\mathrm{v})\left\{3\frac{dw}{dv}-1+\varsigma\right\}\\ &-\beta_3\eta'\sin(3w-\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}-1+\varsigma_1\right\}\\ &-\beta_4\eta\sin(6w-\mathrm{v})\left\{6\frac{dw}{dv}-1+\varsigma\right\}\\ &-\beta_5\eta'\sin(6w-\mathrm{v}_1)\left\{6\frac{dw}{dv}-1+\varsigma_1\right\}\end{aligned}$$

und weiter:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2R_1}{dv^2} = &-\beta_2\eta\cos(3w-\mathrm{v})\left\{3\frac{dw}{dv}-1+\varsigma\right\}^2\\ &-\beta_3\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)\left\{\frac{3\,dw}{dv}-1+\varsigma_1\right\}^2\\ &-\beta_4\eta\cos(6w-\mathrm{v})\left\{6\frac{dw}{dv}-1+\varsigma\right\}^2\\ &-\beta_5\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1)\left\{6\frac{dw}{dv}-1+\varsigma_1\right\}^2\\ &-3\beta_2\eta\sin(3w-\mathrm{v})\frac{d^2w}{dv^2}\\ &-3\beta_3\eta'\sin(3w-\mathrm{v}_1)\frac{d^2w}{dv^2}\\ &-6\beta_4\eta\sin(6w-\mathrm{v})\frac{d^2w}{dv^2}\\ &-6\beta_5\eta'\sin(6w-\mathrm{v}_1)\frac{d^2w}{dv^2}.\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Da man aber mit Hinblick auf $\mu_1 = \frac{2-\delta_1}{3}$ für den Typus $\frac{2}{3}$ auch schreiben kann:

$$\frac{dw}{dv} = \frac{1+\delta_1}{3} - \mu \frac{dV}{dv},$$

so wird:

$$\left(3\frac{dw}{dv} - 1 + \varsigma\right)^2 = \left(\delta_1 + \varsigma - 3\mu \frac{dV}{dv}\right)^2$$

oder:

$$\left(3\frac{dw}{dv} - 1 + \varsigma\right)^2 = (\delta_1 + \varsigma)^2 - 6\mu(\delta_1 + \varsigma)\frac{dV}{dv} + 9\mu^2\left(\frac{dV}{dv}\right)^2.$$

Hier sind offenbar rechts bloß die Glieder ersten Grades in Betracht zu ziehen, da es jetzt auf den zweiten Grad der exargumentalen Glieder abgesehen ist, und somit ist zu setzen:

$$\left(3\frac{dw}{dv} - 1 + \varsigma\right)^2 = -6\mu(\delta_1 + \varsigma)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1,$$

also:

$$\left(3\frac{dw}{dv} - 1 + \varsigma\right)^2 = -6\mu(\delta_1 + \varsigma)\{\gamma_2\eta\cos(3w - v) + \gamma_3\eta'\cos(3w - v_1)\}.$$

Ähnlich erhält man:

$$\left(6\frac{dw}{dv} - 1 + \varsigma\right)^2 = \left(1 + 2\delta_1 + \varsigma - 6\mu\frac{dV}{dv}\right)^2$$

oder:

$$\left(6\frac{dw}{dv} - 1 + \varsigma\right)^2 = (1 + 2\delta_1 + \varsigma)^2 - 12\mu(1 + 2\delta_1 + \varsigma)\frac{dV}{dv} + 36\mu^2\left(\frac{dV}{dv}\right)^2$$

oder:

$$\left(6\frac{dw}{dv} - 1 + \varsigma\right)^2 = -12\mu(1 + 2\delta_1 + \varsigma)\{\gamma_2\eta\cos(3w - v) + \gamma_3\eta'\cos(3w - v_1)\}.$$

Weiter erhält man offenbar:

$$\frac{d^2w}{dv^2} = -\mu\frac{d^2V}{dv^2} = -\mu\gamma_2\eta\sin(3w - v)\left\{3\frac{dw}{dv} - 1 + \varsigma\right\}$$
$$-\mu\gamma_3\eta'\sin(3w - v_1)\left\{3\frac{dw}{dv} - 1 + \varsigma_1\right\}$$

oder:

$$\frac{d^2w}{dv^2} = -(\delta_1 + \varsigma)\mu\gamma_2\eta\sin(3w - v) - (\delta_1 + \varsigma_1)\mu\gamma_3\eta'\sin(3w - v_1).$$

Durch Einsetzen aller dieser Werte in Gleichung (35) und Ausmultiplikation der bezüglichen periodischen Aggregate findet man 32 exargumentale Glieder zweiten Grades, die wir nicht einzeln aufführen. Zieht man dann die Koeffizienten der Glieder gleicher Argumente zusammen, wobei sich teils Glieder tilgen, teils zusammenziehen, so erhält man zunächst für die aus dem ersten Grad entspringenden exargumentalen Glieder zweiten Grades (unter Ausschluß der acht Glieder der elementären Form A, die später zu behandeln sind) die Form:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2R_1}{dv^2}\right)_2 = & \, 3\mu(2+5\delta_1+3\varsigma)\beta_4\gamma_2\eta^2 \cos 3w \\
& +3\mu(2+5\delta_1+\varsigma+2\varsigma_1)\beta_5\gamma_2\eta\eta' \cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +3\mu(2+5\delta_1+2\varsigma+\varsigma_1)\beta_4\gamma_3\eta\eta' \cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) \\
& +3\mu(2+5\delta_1+3\varsigma_1)\beta_5\gamma_3\eta'^2 \cos 3w \\
& +\frac{3}{2}\mu(\delta_1+\varsigma)\beta_2\gamma_2\eta^2 \cos(6w-2\mathrm{v}) \\
& +3\mu\left[(\delta_1+\varsigma)\left(\beta_2\gamma_3-\frac{1}{2}\beta_3\gamma_2\right)+(\delta_1+\varsigma_1)\left(\beta_3\gamma_2-\frac{1}{2}\beta_2\gamma_3\right)\right]\eta\eta' \cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +\frac{3}{2}\mu(\delta_1+\varsigma_1)\beta_3\gamma_3\eta'^2 \cos(6w-2\mathrm{v}_1) \\
& +3\mu(2+3\delta_1+\varsigma)\beta_4\gamma_2\eta^2 \cos(9w-2\mathrm{v}) \\
& +3\mu[(2+3\delta_1+2\varsigma-\varsigma_1)\beta_4\gamma_3+(2+3\delta_1-\varsigma+2\varsigma_1)\beta_5\gamma_2]\eta\eta' \cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +3\mu(2+3\delta_1+\varsigma_1)\beta_5\gamma_3\eta'^2 \cos(9w-2\mathrm{v}_1).
\end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\beta \asymp \frac{m'}{\delta_1}, \qquad \gamma \asymp \frac{m'}{\delta_1}, \text{ also } \beta\gamma \asymp \frac{m'^2}{\delta_1^2},$$

mithin:

$$\delta_1\beta\gamma \asymp m' . \frac{m'}{\delta_1}$$

also rein erster Ordnung und für die Grenze $\delta_1^2 = m'$ von der Ordnung $m'\sqrt{m'}$.

Und da (cf. I, S. 428):

$$\varsigma \asymp m', \quad \varsigma_1 \asymp m'$$

ist, so wird:

$$\varsigma\beta\gamma \asymp \frac{m'^3}{\delta_1^2}.$$

Nun ist ja für nicht kritische Planeten δ_1 definiert durch:

$$\delta_1 > \sqrt{m'},$$

für kritische Planeten hingegen durch:

$$\delta_1 < \sqrt{m'}.$$

Für die Grenze zwischen kritischen und nicht kritischen Planeten ist also:

$$\delta_1^2 = m',$$

mithin:

$$\varsigma\beta\gamma \asymp m'^2,$$

d. h. rein zweiter und übrigens dritter Ordnung. Außerdem werden aber diese kleinen Glieder vom Argument $6w-2\mathrm{v}$ etc. noch mit η^2 multipliziert, also noch verkleinert (cf. I, S. 392). Ihre Mitnahme fällt daher außerhalb des Bereiches der festgesetzten Genauigkeitsgrenze und demnach wird, wenn wir im

Hinblick auf die festgesetzte Genauigkeitsgrenze noch in den anderen Gliedern von der Größe $\varsigma = m'$, wo $m' = \dfrac{1}{1048}$ ist, absehen:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d^2R_1}{dv^2}\right)_2 = {} & \lambda_5\gamma_2\eta^2\cos 3w \\ & +\lambda_7\gamma_2\eta\eta'\cos(3w+v-v_1) \\ & +\lambda_5\gamma_3\eta\eta'\cos(3w-v+v_1) \\ & +\lambda_7\gamma_3\eta'^2\cos 3w \\ & +\lambda_4\gamma_2\eta^2\cos(9w-2v) \\ & +(\lambda_4\gamma_3+\lambda_6\gamma_2)\eta\eta'\cos(9w-v-v_1) \\ & +\lambda_6\gamma_3\eta'^2\cos(9w-2v_1),\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned} 3\mu(2+3\delta_1)\beta_4 = \lambda_4 \qquad 3\mu(2+3\delta_1)\beta_5 = \lambda_6 \\ 3\mu(2+5\delta_1)\beta_4 = \lambda_5 \qquad 3\mu(2+5\delta_1)\beta_5 = \lambda_7 \end{aligned}\right\} \tag{36 a}$$

gegebene Konstanten repräsentieren, da β_4 und β_5 durch die Integration für den ersten Grad gefunden sind.

III. Integration der Differentialgleichung für die Glieder zweiten Grades in R bei konstantem η und π.

Die Integration für die Glieder zweiten Grades in R, d. h. die Bestimmung der Unbekannten β_7 bis β_{19} gestaltet sich wesentlich komplizierter als die Integration für die Glieder zweiten Grades in S, d. h. als die Bestimmung der Unbekannten α_7 bis α_{19}. Bezeichnet zunächst wieder:

$\left(\dfrac{d^2R_0}{dv^2}\right)_2$ die aus dem nullten Grad stammenden exargumentalen Glieder zweiten Grades,

$\left(\dfrac{d^2R_1}{dv^2}\right)_2$ die aus dem ersten Grad stammenden exargumentalen Glieder zweiten Grades,

$\left(\dfrac{d^2R}{dv^2}+R\right)_2$ die direkt gebildete Differentialgleichung in den Gliedern zweiten Grades,

$\left(\dfrac{d^2R_2}{dv^2}+R_2\right)_2$ den differentierten unbestimmten Integralansatz,

so ist im Sinne des Bisherigen:

$$\left(\frac{d^2R}{dv^2}+R\right)_2 = \left(\frac{d^2R_0}{dv^2}\right)_2 + \left(\frac{d^2R_1}{dv^2}\right)_2 + \left(\frac{d^2R_2}{dv^2}+R_2\right)_2 \tag{37}$$

und es erübrigt also nur noch, das dritte Glied der rechten Seite dieser Gleichung herzustellen. Dazu differentieren wir zunächst den unbestimmten Integralansatz für die Glieder zweiten Grades in R (cf. I, S. 381) zweimal und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d^2R_2}{dv^2}\right)_2 = &-(1+\delta_1)^2\beta_7\eta^2\cos 3w &&-(\delta_1+2\varsigma-1)^2\beta_{11}\eta^2\cos(3w-2v)\\
&-(1+\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)^2\beta_8\eta\eta'\cos(3w+v-v_1) &&-(\delta_1+\varsigma+\varsigma_1-1)^2\beta_{12}\eta\eta'\cos(3w-v-v_1)\\
&-(1+\delta_1+\varsigma-\varsigma_1)^2\beta_9\eta\eta'\cos(3w-v+v_1) &&-(\delta_1+2\varsigma_1-1)^2\beta_{13}\eta'^2\cos(3w-2v_1)\\
&-(1+\delta_1)^2\beta_{10}\eta'^2\cos 3w &&\\
&-4(\delta_1+\varsigma)^2\beta_{14}\eta^2\cos(6w-2v) &&-(1+3\delta_1+2\varsigma)^2\beta_{17}\eta^2\cos(9w-2v)\\
&-(2\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)^2\beta_{15}\eta\eta'\cos(6w-v-v_1) &&-(1+3\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)^2\beta_{18}\eta\eta'\cos(9w-v-v_1)\\
&-4(\delta_1+\varsigma_1)^2\beta_{16}\eta'^2\cos(6w-2v_1) &&-(1+3\delta_1+2\varsigma_1)^2\beta_{19}\eta'^2\cos(9w-2v_1).
\end{aligned}
$$

Durch Kombination mit dem unbestimmten Integralansatz selbst erhält man daher, unter Transformation der Koeffizienten:

$$
\left.
\begin{aligned}
\left(\frac{d^2R_2}{dv^2}+R_2\right)_2 = &-(2\delta_1+\delta_1^2)\beta_7\eta^2\cos 3w\\
&-\{2(\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)+(\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)^2\}\beta_8\eta\eta'\cos(3w+v-v_1)\\
&-\{2(\delta_1+\varsigma-\varsigma_1)+(\delta_1+\varsigma-\varsigma_1)^2\}\beta_9\eta\eta'\cos(3w-v+v_1)\\
&-(2\delta_1+\delta_1^2)\beta_{10}\eta'^2\cos 3w\\
&+\{2(\delta_1+2\varsigma)-(\delta_1+2\varsigma)^2\}\beta_{11}\eta^2\cos(3w-2v)\\
&+\{2(\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)-(\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)^2\}\beta_{12}\eta\eta'\cos(3w-v-v_1)\\
&+\{2(\delta_1+2\varsigma_1)-(\delta_1+2\varsigma_1)^2\}\beta_{13}\eta'^2\cos(3w-2v_1)\\
&+\{1-4(\delta_1+\varsigma)^2\}\beta_{14}\eta^2\cos(6w-2v)\\
&+\{1-(2\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)^2\}\beta_{15}\eta\eta'\cos(6w-v-v_1)\\
&+\{1-4(\delta_1+\varsigma_1)^2\}\beta_{16}\eta'^2\cos(6w-2v_1)\\
&-\{2(3\delta_1+2\varsigma)+(3\delta_1+2\varsigma)^2\}\beta_{17}\eta^2\cos(9w-2v)\\
&-\{2(3\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)+(3\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)^2\}\beta_{18}\eta\eta'\cos(9w-v-v_1)\\
&-\{2(3\delta_1+2\varsigma_1)+(3\delta_1+2\varsigma_1)^2\}\beta_{19}\eta'^2\cos(9w-2v_1).
\end{aligned}
\right\}
\tag{38}
$$

In den Koeffizienten dieser Gleichung kann man wieder im Hinblick auf die festgesetzte Genauigkeitsgrenze, von ς und ς_1 absehen. Man erhält also auf Grund der Gleichung:

$$
\left(\frac{d^2R_2}{dv^2}+R_2\right)_2 = \left(\frac{d^2R}{dv^2}+R\right)_2 - \left(\frac{d^2R_0}{dv^2}\right)_2 - \left(\frac{d^2R_1}{dv^2}\right)_2 \tag{39}
$$

die 13 Bestimmungsgleichungen der 13 Unbekannten β_7 bis β_{19} des unbestimmten Integralansatzes für die Glieder zweiten Grades:

$$
\begin{aligned}
R_2 = &\;\beta_7\eta^2\cos 3w &&+\beta_{11}\eta^2\cos(3w-2v) &&+\beta_{14}\eta^2\cos(6w-2v)\\
&+\beta_8\eta\eta'\cos(3w+v-v_1) &&+\beta_{12}\eta\eta'\cos(3w-v-v_1) &&+\beta_{15}\eta\eta'\cos(6w-v-v_1)\\
&+\beta_9\eta\eta'\cos(3w-v+v_1) &&+\beta_{13}\eta'^2\cos(3w-2v_1) &&+\beta_{16}\eta'^2\cos(6w-2v_1)\\
&+\beta_{10}\eta'^2\cos 3w && &&\\
& && &&+\beta_{17}\eta^2\cos(9w-2v)\\
& && &&+\beta_{18}\eta\eta'\cos(9w-v-v_1)\\
& && &&+\beta_{19}\eta'^2\cos(9w-2v_1)
\end{aligned}
$$

zunächst in der folgenden Form, indem wir die Teile J_7 bis J_{19}, welche durch die für den ersten Grad bereits ausgeführte Integration schon bekannt sind, absondern und in Gleichung VIII bis X die außerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenze liegenden Glieder fortlassen:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{I.} & \{1-(1+\delta_1)^2\}\beta_7 = 2a_7 - p_9 + \frac{1}{2}\beta_7 g_1 + J_7 \\
\text{II.} & \{1-(1+\delta_1)^2\}\beta_8 = 2a_8 - p_{10} - \frac{1}{2}q_{21}\beta_1 + \frac{1}{2}g_1\beta_9 + J_8 \\
\text{III.} & \{1-(1+\delta_1)^2\}\beta_9 = 2a_9 - p_{11} + \frac{1}{2}q_{21}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_8 g_1 + J_9 \\
\text{IV.} & \{1-(1+\delta_1)^2\}\beta_{10} = 2a_{10} - p_{12} + \frac{1}{2}g_1\beta_{10} + J_{10} \\
\text{V.} & \{1-(\delta_1-1)^2\}\beta_{11} = 2a_{11} - p_{14} + \frac{1}{2}q_{15}\beta_1 + \frac{1}{2}g_1\beta_{17} + (a_1-p_1)\alpha_{14} + J_{11} - 2\lambda_3\gamma_{14} \\
\text{VI.} & \{1-(\delta_1-1)^2\}\beta_{12} = 2a_{12} - p_{15} + \frac{1}{2}q_{16}\beta_1 + \frac{1}{2}g_1\beta_{18} + (a_1-p_1)\alpha_{15} + J_{12} - 2\lambda_3\gamma_{15} \\
\text{VII.} & \{1-(\delta_1-1)^2\}\beta_{13} = 2a_{13} - p_{16} + \frac{1}{2}q_{17}\beta_1 + \frac{1}{2}g_1\beta_{19} + (a_1-p_1)\alpha_{16} + J_{13} - 2\lambda_3\gamma_{16} \\
\text{VIII.} & \{1-4\delta_1^2\}\beta_{14} = 2\alpha_{14} - p_{17} - \frac{1}{2}(q_{12}-q_{18})\beta_1 + \frac{1}{2}q_1(\beta_{11}+\beta_{17}) + 2(a_0-p_0)\alpha_{14} + J_{14} \\
\text{IX.} & \{1-4\delta_1^2\}\beta_{15} = 2\alpha_{15} - p_{18} - \frac{1}{2}(q_{13}-q_{19})\beta_1 + \frac{1}{2}q_1(\beta_{12}+\beta_{18}) + 2(a_0-p_0)\alpha_{15} + J_{15} \\
\text{X.} & \{1-4\delta_1^2\}\beta_{16} = 2\alpha_{16} - p_{19} - \frac{1}{2}(q_{14}-q_{20})\beta_1 + \frac{1}{2}q_1(\beta_{13}+\beta_{19}) + 2(a_0-p_0)\alpha_{16} + J_{16} \\
\text{XI.} & \{1-(1+3\delta_1)^2\}\beta_{17} = 2a_{17} - p_{20} - \frac{1}{2}q_{15}\beta_1 + \frac{1}{2}g_1\beta_{11} + (a_1-p_1)\alpha_{14} + J_{17} - 2\lambda_2\gamma_{14} \\
\text{XII.} & \{1-(1+3\delta_1)^2\}\beta_{18} = 2a_{18} - p_{21} - \frac{1}{2}q_{16}\beta_1 + \frac{1}{2}g_1\beta_{12} + (a_1-p_1)\alpha_{15} + J_{18} - 2\lambda_2\gamma_{15} \\
\text{XIII.} & \{1-(1+3\delta_1)^2\}\beta_{19} = 2a_{19} - p_{22} - \frac{1}{2}q_{17}\beta_1 + \frac{1}{2}g_1\beta_{13} + (a_1-p_1)\alpha_{16} + J_{19} - 2\lambda_2\gamma_{16}),
\end{array}\right\} \quad (40)$$

wobei gesetzt ist, weil durch die Integration für den ersten Grad bekannt:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{I}a. & J_7 = \frac{1}{2}(g_2-q_4) + \frac{1}{2}A_{6.2.0}\beta_1 + \frac{1}{2}(g_4+q_4)\beta_4 + \left(\frac{1}{2}g_1 + a_2 + a_4 - p_2 - p_6\right)\alpha_2 - (\lambda_5-\lambda_1\gamma_2)\gamma_2 \\
\text{II}a. & J_8 = -\frac{1}{2}q_5 + \frac{1}{2}(A^{(+1)}_{6.1.1} - A^{(+1)}_{0.1.1} + 2P^{(2)}_{\mathrm{I}})\beta_1 + \frac{1}{2}(g_5\beta_4 + q_4\beta_5) + \\
& \qquad + (a_5-p_7)\alpha_2 + (a_2-p_2)\alpha_3 - (\lambda_7-\lambda_1\gamma_3)\gamma_2 \\
\text{III}a. & J_9 = \frac{1}{2}g_3 + \frac{1}{2}(A^{(-1)}_{6.1.1} + A^{(+1)}_{0.1.1} - 2P^{(2)}_{\mathrm{I}})\beta_1 + \frac{1}{2}(q_5\beta_4 + g_4\beta_5) + \\
& \qquad + (a_3-p_3)\alpha_2 + \left(\frac{1}{2}g_1 + a_4 - p_6\right)\alpha_3 - (\lambda_5-\lambda_1\gamma_2)\gamma_3 \\
\text{IV}a. & J_{10} = \frac{1}{2}A_{6.0.2}\beta_1 + \frac{1}{2}(g_5+q_5)\beta_5 + (a_3+a_5-p_3-p_7)\alpha_3 - (\lambda_7-\lambda_1\gamma_3)\gamma_3 \\
\text{V}a. & J_{11} = \frac{1}{2}q_4 - P^{(1)}_{\mathrm{I}}\beta_1 + \frac{1}{2}g_2\beta_4 + (a_2-p_2)\alpha_2
\end{array}\right\} \quad (40\,a)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{VI}a. && J_{12}=\frac{1}{2}\,q_5+\frac{1}{2}\,(A^{(+2)}_{0.1.1}-2\,P^{(2)}_{\mathrm{I}})\,\beta_1+\frac{1}{2}\,(g_3\,\beta_4+g_2\,\beta_5)+(a_3-p_3)\,\alpha_2+(a_2-p_2)\,\alpha_3\\
&\text{VII}a. && J_{13}=\frac{1}{2}\,A^{(+2)}_{0.0.2}\,\beta_1+\frac{1}{2}\,g_3\,\beta_5+(a_3-p_3)\,\alpha_3\\
&\text{VIII}a. && J_{14}=\frac{1}{2}\,q_6+\frac{1}{2}\,\alpha_2^2+\frac{1}{2}\,q_2\,\beta_4+\left(\frac{1}{2}\,q_1-p_4\right)\alpha_2\\
&\text{IX}a. && J_{15}=\frac{1}{2}\,q_7+\alpha_2\,\alpha_3+\frac{1}{2}\,q_3\,\beta_4+\frac{1}{2}\,q_2\,\beta_5-p_5\,\alpha_2+\left(\frac{1}{2}\,q_1-p_4\right)\alpha_3\\
&\text{X}a. && J_{16}=\frac{1}{2}\,\alpha_3^2+\frac{1}{2}\,q_3\,\beta_5-p_5\,\alpha_3\\
&\text{XI}a. && J_{17}=\frac{1}{2}\,g_4+\frac{1}{2}\,A^{(-2)}_{12.2.0}\,\beta_1-\frac{1}{2}\,q_4\,\beta_4+\left(\frac{1}{2}\,g_1+a_4-p_6\right)\alpha_2-(\lambda_4-\lambda_1\gamma_2)\,\gamma_2\\
&\text{XII}a. && J_{18}=\frac{1}{2}\,g_5+\frac{1}{2}\,A^{(-2)}_{12.1.1}\,\beta_1-\frac{1}{2}\,(q_5\,\beta_4+q_4\,\beta_5)+(a_5-p_7)\,\alpha_2+\\
& && \qquad\qquad+\left(\frac{1}{2}\,g_1+a_4-p_6\right)\alpha_3-(\lambda_6-\lambda_1\gamma_3)\,\gamma_2-(\lambda_4-\lambda_1\gamma_2)\,\gamma_3\\
&\text{XIII}a. && J_{19}=\frac{1}{2}\,A^{(-2)}_{12\,0.2}\,\beta_1-\frac{1}{2}\,q_5\,\beta_5+(a_5-p_7)\,\alpha_3-(\lambda_6-\lambda_1\gamma_3)\,\gamma_3.
\end{aligned}\right\}\ (40\,a)$$

Um aber in den 13 Gleichungen (40) die 13 Unbekannten β_7 bis β_{19} als die e i n z i g e n zu bestimmenden Größen zu haben, müssen wir für die a und α ihre Werte nach den zuvor gefundenen Gleichungen (19) und für die q und p ihre Werte nach den Gleichungen (8) und (10) in das System (40) wirklich einsetzen. Zuvor aber müssen, damit die β wirklich als die einzigen Unbekannten in (40) auftreten, noch γ_{14}, γ_{15}, γ_{16} als Funktionen der β dargestellt werden.

Zur Lösung dieser letzteren Aufgabe gehen wir in analoger Behandlungsweise derselben wie beim e r s t e n Grad (cf. I, S. 429) für den z w e i t e n Grad aus von der folgenden allgemeinen Form der Differentialgleichung für die Zeitreduktion:

$$\frac{dT}{d\,v}=S-2R-2RS+3R^2+\{6R-2S-12R^2+6RS\}\,\eta\cos\mathrm{v}-3\eta^2R+\left\{\frac{3}{2}\,S-6R\right\}\eta^2\cos2\mathrm{v},\tag{41}$$

indem wir auch beim zweiten Grad wieder bloß die langperiodischen Glieder in S und R berücksichtigen. Die einzelnen Teile der rechten Seite letzterer Gleichung werden dann:

$$\begin{aligned}
S&=\alpha_{14}\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})+\alpha_{15}\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)+\alpha_{16}\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1)\\
-2R&=-2\,\beta_{14}\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})-2\,\beta_{15}\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)-2\,\beta_{16}\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1)\\
-2RS&=-\alpha_2\,\beta_2\,\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})-(\alpha_2\,\beta_3+\alpha_3\,\beta_2)\,\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)-\alpha_3\,\beta_3\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1)\\
3R^2&=\left(\frac{3}{2}\,\beta_2^2+3\,\beta_1\beta_{11}+3\,\beta_1\,\beta_{17}\right)\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})\\
&\quad+(3\,\beta_1\,\beta_{12}+3\,\beta_1\,\beta_{18}+3\,\beta_2\,\beta_3)\,\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
&\quad+\left(\frac{3}{2}\,\beta_3^2+3\,\beta_1\,\beta_{13}+3\,\beta_1\,\beta_{19}\right)\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1)\\
6R\eta\cos\mathrm{v}&=3\,\beta_4\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})+3\,\beta_5\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
-2S\eta\cos\mathrm{v}&=-a_4\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})-a_5\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
-12R^2\eta\cos\mathrm{v}&=-6\,\beta_1\,\beta_2\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})-6\,\beta_1\,\beta_3\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
6RS\eta\cos\mathrm{v}&=\frac{3}{2}\,\alpha_2\,\beta_1\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})+\frac{3}{2}\,\alpha_3\,\beta_1\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1).
\end{aligned}$$

Schließlich findet man bei Durchmusterung aller Möglichkeiten, daß noch die beiden gewöhnlichen Glieder:

$$S_{n.0.0} \cos n w \quad \text{und} \quad R_{n.0.0} \cos n w$$

für $n = 6$, also die zwei Glieder: $S_{6.0.0} \cos 6 w$ und $R_{6.0.0} \cos 6 w$ in Multiplikation mit $\eta^2 \cos 2\mathrm{v}$ gleichfalls noch mitzunehmende Glieder ergeben, nämlich:

$$\left(\frac{3}{2} S - 6R\right) \eta^2 \cos 2\mathrm{v} = \frac{3}{4} S_{6.0.0}\, \eta^2 \cos (6w - 2\mathrm{v}) - 3R_{6.0.0}\, \eta^2 \cos (6w - 2\mathrm{v}).$$

Die Differentialgleichung (41) wird somit:

$$\left(\frac{dT_l}{dv}\right)_2 = T_{\mathrm{II}}^{(14)} \eta^2 \cos (6w - 2\mathrm{v}) + T_{\mathrm{II}}^{(15)} \eta\eta' \cos (6w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) + T_{\mathrm{II}}^{(16)} \eta'^2 \cos (6w - 2\mathrm{v}_1) \tag{42}$$

und hier haben also die Koeffizienten, in denen wir nur Glieder von der Ordnung m', $\frac{m'}{\delta_1}$ und $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$, nicht aber solche von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ (wie z. B. $a_{11} \beta_1$ etc.) mitgenommen haben, die folgenden Werte:

$$\left.\begin{aligned}
T_{\mathrm{II}}^{(14)} &= \alpha_{14} - 2\beta_{14} - \alpha_2\beta_2 + \frac{3}{2}\beta_2^2 + 3\beta_1\beta_{11} + 3\beta_1\beta_{17} + 3\beta_4 - 6\beta_1\beta_2 + \frac{3}{2}\beta_1\alpha_2 - a_4 + \frac{3}{4} S_{6.0.0} - 3R_{6.0.0} \\
T_{\mathrm{II}}^{(15)} &= \alpha_{15} - 2\beta_{15} - \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + 3\beta_2\beta_3 + 3\beta_1\beta_{12} + 3\beta_1\beta_{18} + 3\beta_5 - 6\beta_1\beta_3 + \frac{3}{2}\alpha_3\beta_1 - a_5 \\
T_{\mathrm{II}}^{(16)} &= \alpha_{16} - 2\beta_{16} - \alpha_3\beta_3 + \frac{3}{2}\beta_3^2 + 3\beta_1\beta_{13} + 3\beta_1\beta_{19}.
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Früher hatten wir aber für den Typus $\frac{2}{3}$ gefunden (cf. I, S. 382):

$$\left(\frac{dT_l}{dv}\right)_2 = \gamma_{14}\eta^2 \cos (6w - 2\mathrm{v}) + \gamma_{15}\eta\eta' \cos (6w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) + \gamma_{16}\eta'^2 \cos (6w - 2\mathrm{v}_1). \tag{44}$$

Setzt man nun für die α ihre Werte nach den zuvor gefundenen Gleichungen (19) mit Rücksicht auf (8) in (43) ein, indem die a und α für den ersten Grad bereits bekannt sind, so erhält man γ_{14}, γ_{15}, γ_{16} mit Hinblick auf (42) und (44) dargestellt als reine Funktionen der β und bekannter Konstanten durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{14} &= \gamma_{14}^{(0)} + \gamma_{14}^{(11)}\beta_{11} - 2\beta_{14} + \gamma_{14}^{(17)}\beta_{17} \\
\gamma_{15} &= \gamma_{15}^{(0)} + \gamma_{15}^{(12)}\beta_{12} - 2\beta_{15} + \gamma_{15}^{(18)}\beta_{18} \\
\gamma_{16} &= \gamma_{16}^{(0)} + \gamma_{16}^{(13)}\beta_{13} - 2\beta_{16} + \gamma_{16}^{(19)}\beta_{19},
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{14}^{(0)} &= \frac{q_{15.1} + H_{14}}{2(\delta_1 + \varsigma)} - \beta_2\alpha_2 + \frac{3}{2}\beta_2^2 + 3\beta_4 - 6\beta_1\beta_2 + \frac{3}{2}\beta_1\alpha_2 - a_4 + \frac{3}{4} S_{6.0.0} - 3R_{6.0.0} \\
\gamma_{14}^{(11)} &= \frac{q_{15}^{(11)}}{2(\delta_1 + \varsigma)} + 3\beta_1 \\
\gamma_{14}^{(17)} &= \frac{q_{15}^{(17)}}{2(\delta_1 + \varsigma)} + 3\beta_1 \\
\gamma_{15}^{(0)} &= \frac{q_{16.1} + H_{15}}{2\delta_1 + \varsigma + \varsigma_1} - \beta_3\alpha_2 - \beta_2\alpha_3 + 3\beta_2\beta_3 + 3\beta_5 - 6\beta_1\beta_3 + \frac{3}{2}\beta_1\alpha_3 - a_5
\end{aligned}\right\} \tag{45 a}$$

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{15}^{(12)} &= \frac{q_{16}^{(12)}}{2\delta_1+\varsigma+\varsigma_1}+3\beta_1 \\
\gamma_{15}^{(18)} &= \frac{q_{16}^{(18)}}{2\delta_1+\varsigma+\varsigma_1}+3\beta_1 \\
\gamma_{16}^{(0)} &= \frac{q_{17.1}+H_{16}}{2(\delta_1+\varsigma_1)}-\beta_3\alpha_3+\frac{3}{2}\beta_3^2 \\
\gamma_{16}^{(13)} &= \frac{q_{17}^{(13)}}{2(\delta_1+\varsigma_1)}+3\beta_1 \\
\gamma_{16}^{(19)} &= \frac{q_{17}^{(19)}}{2(\delta_1+\varsigma_1)}+3\beta_1 .
\end{aligned}\right\} \tag{45a}$$

Setzt man jetzt die a_i, α_i, p_i, q_i, γ_i, die wir sämtlich als reine Funktionen der β und der numerisch berechenbaren Entwicklungskoeffizienten A und B der Störungsfunktion dargestellt haben, in die Bedingungsgleichungen (40) der Unbekannten β_7 bis β_{19} ein, so erhält man bei Vernachlässigung der jenseits der festgesetzten Genauigkeitsgrenze liegenden Glieder die Bestimmungsgleichungen dieser Unbekannten in der definitiven, der numerischen Rechnung zu Grunde zu legenden Form, die sehr einfach deshalb wirklich auflösbar ist, weil, wie man sieht, stets in je drei Gleichungen höchstens je drei Unbekannte gleichzeitig enthalten sind.

An einer der Gleichungen, z. B. der fünften, deuten wir den Gang der Transformation an. Durch Einsetzen erhält man:

$$\begin{aligned}
(2\delta_1-\delta_1^2)\beta_{11} = &-\frac{2}{1-\delta_1}\left\{q_{12.1}+q_{12}^{(14)}\beta_{14}+q_{12}^{(17)}\beta_{17}+H_{11}-\frac{3q_1(q_{15.1}+H_{14})}{4(\delta_1+\varsigma)}-\frac{3}{2}\mu a_1\gamma_{14}\right\} \\
&-p_{14.1}-p_{14}^{(11)}\beta_{11}-p_{14}^{(14)}\beta_{14}-p_{14}^{(17)}\beta_{17}+\frac{1}{2}q_{15.1}\beta_1+\frac{1}{2}g_1\beta_{17} \\
&+\frac{a_1(q_{15.1}+H_{14})}{2(\delta_1+\varsigma)}-\frac{p_1(q_{15.1}+H_{14})}{2(\delta_1+\varsigma)}+J_{11}-2\lambda_3\gamma_{14}
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
&\left\{2\delta_1-\delta_1^2+p_{14}^{(11)}\right\}\beta_{11}+\left\{2q_{12}^{(14)}+p_{14}^{(14)}\right\}\beta_{14}+\left\{2q_{12}^{(17)}+p_{14}^{(17)}-\frac{1}{2}g_1\right\}\beta_{17} = \\
&= -\frac{2(q_{12.1}+H_{11})}{1-\delta_1}+\frac{3q_1(q_{15.1}+H_{14})}{2(\delta_1+\varsigma)}+\left(\frac{3\mu a_1}{1-\delta_1}-2\lambda_3\right)(\gamma_{14}^{(0)}+\gamma_{14}^{(11)}\beta_{11}-2\beta_{14}+\gamma_{14}^{(17)}\beta_{17}) \\
&\qquad -p_{14.1}+\frac{1}{2}q_{15.1}\beta_1+\frac{a_1(q_{15.1}+H_{14})}{2(\delta_1+\varsigma)}-\frac{p_1(q_{15.1}+H_{14})}{2(\delta_1+\varsigma)}+J_{11}
\end{aligned}$$

oder, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\frac{3\mu a_1}{1-\delta_1}-2\lambda_3 = N_1, \qquad a_1-p_1+3q_1 = F,$$

auch:

$$\begin{aligned}
&\left\{2\delta_1-\delta_1^2+p_{14}^{(11)}-N_1\gamma_{14}^{(11)}\right\}\beta_{11}+\left\{2q_{12}^{(14)}+p_{14}^{(14)}+2N_1\right\}\beta_{14}+ \\
&\qquad+\left\{2q_{12}^{(17)}+p_{14}^{(17)}-\frac{1}{2}g_1-N_1\gamma_{14}^{(17)}\right\}\beta_{17} = -\frac{2(q_{12.1}+H_{11})}{1-\delta_1}- \\
&\qquad\qquad -p_{14.1}+\frac{1}{2}\beta_1 q_{15.1}+\frac{(q_{15.1}+H_{14})F}{2(\delta_1+\varsigma)}+N_1\gamma_{14}^{(0)}+J_{11}.
\end{aligned}$$

In toto erhält man so die folgenden der numerischen Rechnung zu Grunde zu legenden Formen, in denen sämtliche Größen außer β_7 bis β_{19} bekannt sind:

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{I.} && \left\{2\delta_1+\delta_1^2+2q_8^{(7)}-p_9^{(7)}+\frac{1}{2}g_1\right\}\beta_7 = -\frac{2(q_{8.1}+H_7)}{1+\delta_1}+p_{9.1}-J_7\\
&\text{II.} && \{2\delta_1+\delta_1^2-p_{10}^{(8)}\}\beta_8+\left\{2q_9^{(9)}-p_{10}^{(9)}+\frac{1}{2}g_1\right\}\beta_9 = -\frac{2(q_{9.1}+H_8)}{1+\delta_1}+p_{10.1}+\frac{1}{2}q_{21.1}\beta_1-J_8\\
&\text{III.} && \{2\delta_1+\delta_1^2-p_{11}^{(9)}\}\beta_9+\left\{2q_{10}^{(8)}-p_{11}^{(8)}+\frac{1}{2}g_1\right\}\beta_8 = -\frac{2(q_{10.1}+H_9)}{1+\delta_1}+p_{11.1}-\frac{1}{2}q_{21.1}\beta_1-J_9\\
&\text{IV.} && \left\{2\delta_1+\delta_1^2+2q_{11}^{(10)}-p_{12}^{(10)}+\frac{1}{2}g_1\right\}\beta_{10} = -\frac{2(q_{11.1}+H_{10})}{1+\delta_1}+p_{12.1}-J_{10}\\
&\text{V.} && \{2\delta_1-\delta_1^2+p_{14}^{(11)}-N_1\gamma_{14}^{(11)}\}\beta_{11}+\{2q_{12}^{(14)}+p_{14}^{(14)}+2N_1\}\beta_{14}+\\
& && +\left\{2q_{12}^{(17)}+p_{14}^{(17)}-\frac{1}{2}g_1-N_1\gamma_{14}^{(17)}\right\}\beta_{17} = -\frac{2(q_{12.1}+H_{11})}{1-\delta_1}-p_{14.1}+\\
& && +\frac{1}{2}q_{15.1}\beta_1+\frac{(q_{15.1}+H_{14})F}{2(\delta_1+\varsigma)}+N_1\gamma_{14}^{(0)}+J_{11}\\
&\text{VI.} && \{2\delta_1-\delta_1^2+p_{15}^{(12)}-N_1\gamma_{15}^{(12)}\}\beta_{12}+\{2q_{13}^{(15)}+p_{15}^{(15)}+2N_1\}\beta_{15}+\\
& && +\left\{2q_{13}^{(18)}+p_{15}^{(18)}-\frac{1}{2}g_1-N_1g_{15}^{(18)}\right\}\beta_{18} = -\frac{2(q_{13.1}+H_{12})}{1-\delta_1}-\\
& && -p_{15.1}+\frac{1}{2}q_{16.1}\beta_1+\frac{(q_{16.1}+H_{15})F}{2\delta_1+\varsigma+\varsigma_1}+N_1\gamma_{15}^{(0)}+J_{12}\\
&\text{VII.} && \{2\delta_1-\delta_1^2+p_{16}^{(13)}-N_1\gamma_{16}^{(13)}\}\beta_{13}+\{2q_{14}^{(16)}+p_{16}^{(16)}+2N_1\}\beta_{16}+\\
& && +\left\{2q_{14}^{(19)}+p_{16}^{(19)}-\frac{1}{2}g_1-N_1\gamma_{16}^{(19)}\right\}\beta_{19} = -\frac{2(q_{14.1}+H_{13})}{1-\delta_1}-p_{16.1}+\\
& && +\frac{1}{2}q_{17.1}\beta_1+\frac{(q_{17.1}+H_{16})F}{2(\delta_1+\varsigma_1)}+N_1\gamma_{16}^{(0)}+J_{13}\\
&\text{VIII.} && \{1-4\delta_1^2+p_{17}^{(14)}\}\beta_{14}+\left\{p_{17}^{(11)}-\frac{1}{2}q_1^{(0)}-\frac{q_{15}^{(11)}}{\delta_1+\varsigma}\right\}\beta_{11}+\\
& && +\left\{p_{17}^{(17)}-\frac{1}{2}q_1^{(0)}-\frac{q_{15}^{(17)}}{\delta_1+\varsigma}\right\}\beta_{17} = \frac{(q_{15.1}+H_{14})G}{\delta_1+\varsigma}-p_{17.1}-\frac{1}{2}(q_{12.1}-q_{18.1})\beta_1+J_{14}\\
&\text{IX.} && \{1-4\delta_1^2+p_{18}^{(15)}\}\beta_{15}+\left\{p_{18}^{(12)}-\frac{1}{2}q_1^{(0)}-\frac{2q_{16}^{(12)}}{2\delta_1+\varsigma+\varsigma_1}\right\}\beta_{12}+\\
& && +\left\{p_{18}^{(18)}-\frac{1}{2}q_1^{(0)}-\frac{2q_{16}^{(18)}}{2\delta_1+\varsigma+\varsigma_1}\right\}\beta_{18} = \frac{(q_{16.1}+H_{15})G}{2\delta_1+\varsigma+\varsigma_1}-p_{18.1}-\frac{1}{2}(q_{13.1}-q_{19.1})\beta_1+J_{15}\\
&\text{X.} && \{1-4\delta_1^2+p_{19}^{(16)}\}\beta_{16}+\left\{p_{19}^{(13)}-\frac{1}{2}q_1^{(0)}-\frac{q_{17}^{(13)}}{\delta_1+\varsigma_1}\right\}\beta_{13}+\\
& && +\left\{p_{19}^{(19)}-\frac{1}{2}q_1^{(0)}-\frac{q_{17}^{(19)}}{\delta_1+\varsigma_1}\right\}\beta_{19} = \frac{(q_{17.1}+H_{16})G}{2(\delta_1+\varsigma_1)}-p_{19.1}-\frac{1}{2}(q_{14.1}-q_{20.1})\beta_1+J_{19}\\
&\text{XI.} && \{6\delta_1+9\delta_1^2-p_{20}^{(17)}+N_2\gamma_{14}^{(17)}\}\beta_{17}+\left\{\frac{2q_{18}^{(11)}}{1+3\delta_1}-p_{20}^{(11)}+\right.\\
& && \left.+\frac{1}{2}g_1+N_2\gamma_{14}^{(11)}\right\}\beta_{11}+\left\{\frac{2q_{18}^{(14)}}{1+3\delta_1}-p_{20}^{(14)}-2N_2\right\}\beta_{14} =\\
& && = -\frac{2(q_{18.1}+H_{17})}{1+3\delta_1}+p_{20.1}+\frac{1}{2}q_{15.1}\beta_1-\frac{(q_{15.1}+H_{14})F}{2(\delta_1+\varsigma)}-N_2\gamma_{14}^{(0)}-J_{14}
\end{aligned}\right\}\quad(46)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{XII.}\quad \{6\delta_1+9\delta_1^2-p_{21}^{(18)}+N_2\gamma_{15}^{(18)}\}\beta_{18}+\left\{\frac{2q_{19}^{(12)}}{1+3\delta_1}-p_{21}^{(12)}+\frac{1}{2}g_1+\right.\\
&\qquad\left.+N_2\gamma_{15}^{(12)}\right\}\beta_{12}+\left\{\frac{2q_{19}^{(15)}}{1+3\delta_1}-p_{21}^{(15)}-2N_2\right\}\beta_{15}=-\frac{2(q_{19.1}+H_{18})}{1+3\delta_1}+\\
&\qquad\qquad+p_{21.1}+\frac{1}{2}q_{16.1}\beta_1-\frac{(q_{16.1}+H_{15})F}{2\delta_1+\varsigma+\varsigma_1}-N_2\gamma_{15}^{(0)}-J_{18}\\
&\text{XIII.}\quad \{6\delta_1+9\delta_1^2-p_{22}^{(19)}+N_2\gamma_{16}^{(19)}\}\beta_{19}+\left\{\frac{2q_{20}^{(13)}}{1+3\delta_1}-p_{22}^{(13)}+\frac{1}{2}g_1+\right.\\
&\qquad\left.+N_2\gamma_{16}^{(13)}\right\}\beta_{13}+\left\{\frac{2q_{20}^{(16)}}{1+3\delta_1}-p_{22}^{(16)}-2N_2\right\}\beta_{16}=-\frac{2(q_{20.1}+H_{19})}{1+3\delta_1}+\\
&\qquad\qquad+p_{22.1}+\frac{1}{2}q_{17.1}\beta_1-\frac{(q_{17.1}+H_{16})F}{2(\delta_1+\varsigma_1)}-N_2\gamma_{16}^{(0)}-J_{19},
\end{aligned}
\right|\quad(46)
$$

wobei also:

$$
N_1=\frac{3\mu a_1}{1-\delta_1}-2\lambda_3;\qquad N_2=\frac{3\mu a_1}{1+3\delta_1}-\lambda_2;\qquad F=a_1-p_1+3q_1;
$$

$$
G=2(1+a_0-p_0);\qquad \lambda_2=3\mu(1+2\delta_1)\beta_1;\qquad \lambda_3=\frac{3}{2}\mu\beta_1
$$

ist, und die Größen H_7 bis H_{19} durch die Gleichungen (19*a*), J_7 bis J_{19} durch die Gleichungen (40*a*), die q und p durch die Gleichungen (8) bis (11) und die γ durch (45) und (45*a*) gegeben sind.

Diese innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenze strengen Gleichungen (46), aus denen für einen bestimmten Wert des Verhältnisses der mittleren Entfernungen $\frac{a}{a'}=\alpha$ die gesuchten Unbekannten β_7 bis β_{19} für einen beliebigen Planeten der Hildagruppe numerisch berechenbar sind, könnte man, analog wie beim ersten Grad (cf. I, S. 431) auch jetzt beim zweiten Grad durch Vernachlässigung von ς und ς_1 in den Gleichungen (45*a*) wieder vereinfachen; indes sollen für die numerische Rechnung die Gleichungen (46) die Grundlage bilden.

IV. Berücksichtigung der aus der Variabilität von η und π entstehenden Zusatzglieder zweiten Grades in R.

Zur nachträglichen Bestimmung der Zusatzglieder zweiten Grades, die sich durch Integration der Differentialgleichung (28) für R_2 dadurch ergeben, daß man in derselben, der Wirklichkeit entsprechend, η, η', π, π_1 als variabel betrachtet, gehen wir aus von der früher abgeleiteten allgemeinen Differentialformel (cf. I, S. 444):

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{d\eta^{m_1}\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}(nw+m_2v)}{dv}&=\mp\{n(1-\mu_1)+m_2(1-\varsigma)\}\,\eta^{m_1}\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(nw+m_2v)\\
&+\frac{d(\eta^{m_1}\cos m_2\pi)}{dv}\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}[nw+m_2(1-\varsigma)v]\\
&\pm\frac{d(\eta^{m_1}\sin m_2\pi)}{dv}\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}[nw+m_2(1-\varsigma)v],
\end{aligned}
\right\}\quad(47)
$$

wobei wir das zweite Glied in $\frac{dT}{dv}$, das die exargumentalen Glieder liefert, gleich fortgelassen haben, da wir die exargumentalen Glieder zweiten Grades in R bereits bestimmt haben und die exargumentalen Glieder, welche dies Glied sonst noch ergibt, dritten und höheren Grades würden, deren erstere wir später bei der Integration für den dritten Grad gesondert behandeln werden.

Durch nochmalige Differentiation der vorstehenden Differentialformel ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\eta^{m_1}\frac{\cos}{\sin}(nw+m_2\mathrm{v})}{dv^2} &= -\{n(1-\mu_1)+m_2(1-\varsigma)\}^2\eta^{m_1}\frac{\cos}{\sin}(nw+m_2\mathrm{v}) \\
&\mp 2\{n(1-\mu_1)+m_2(1-\varsigma)\}\frac{d\eta^{m_1}\cos m_2\pi}{dv}\frac{\sin}{\cos}\{nw+m_2(1-\varsigma)v\} \\
&+2\{n(1-\mu_1)+m_2(1-\varsigma)\}\frac{d\eta^{m_1}\sin m_2\pi}{dv}\frac{\cos}{\sin}\{nw+m_2(1-\varsigma)v\} \\
&+\frac{d^2\eta^{m_1}\cos m_2\pi}{dv^2}\frac{\cos}{\sin}\{nw+m_2(1-\varsigma)v\} \\
&\pm\frac{d^2\eta^{m_1}\sin m_2\pi}{dv^2}\frac{\sin}{\cos}\{nw+m_2(1-\varsigma)v\}.
\end{aligned}
$$

Da aber (cf. I, S. 439):

$$
\frac{d^2\eta\frac{\sin}{\cos}\pi}{dv^2} \asymp \varsigma^2 \asymp m'^2,
$$

so kommen die beiden letzten Glieder bei der Anwendung dieser Differentialformel in Anbetracht der festgesetzten Genauigkeitsgrenze, weil r e i n zweiter Ordnung, nicht in Betracht und somit ist auszugehen von:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{d^2\eta^{m_1}\frac{\cos}{\sin}(nw+m_2\mathrm{v})}{dv^2} &= -\{n(1-\mu_1)+m_2(1-\varsigma)\}^2\eta^{m_1}\frac{\cos}{\sin}(nw+m_2\mathrm{v}) \\
&\mp 2\{n(1-\mu_1)+m_2(1-\varsigma)\}\frac{d\eta^{m_1}\cos m_2\pi}{dv}\frac{\sin}{\cos}\{nw+m_2(1-\varsigma)v\} \\
&+2\{n(1-\mu_1)+m_2(1-\varsigma)\}\frac{d\eta^{m_1}\sin m_2\pi}{dv}\frac{\cos}{\sin}\{nw+m_2(1-\varsigma)v\}
\end{aligned}
\right\} \tag{48}
$$

analog:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{d^2\eta^{m_1}\eta'^{m'_1}\frac{\cos}{\sin}(nw+m_2\mathrm{v}+m'_2\mathrm{v}_1)}{dv^2} = \\
&\qquad = -\{n(1-\mu_1)+m_2(1-\varsigma)+m'_2(1-\varsigma_1)\}^2\eta^{m_1}\eta'^{m'_1}\frac{\cos}{\sin}(nw+m_2\mathrm{v}+m'_2\mathrm{v}_1) \\
&\mp 2\{n(1-\mu_1)+m_2(1-\varsigma)+m'_2(1-\varsigma_1)\}\frac{d\eta^{m_1}\eta'^{m'_1}\cos(m_2\pi+m'_2\pi_1)}{dv}\frac{\sin}{\cos}\{nw+ \\
&\qquad\qquad +m_2(1-\varsigma)v+m'_2(1-\varsigma_1)v\} \\
&+2\{n(1-\mu_1)+m_2(1-\varsigma)+m'_2(1-\varsigma_1)\}\frac{d\eta^{m_1}\eta'^{m'_1}\sin(m_2\pi+m'_2\pi_1)}{dv}\frac{\cos}{\sin}\{nw+ \\
&\qquad\qquad +m_2(1-\varsigma)v+m'_2(1-\varsigma_1)v\}.
\end{aligned}
\right\} \tag{49}
$$

Analog wie beim ersten Grad (cf. I, S. 452) soll der Variabitität von η, η' π, π_1 aber wieder nur in den Gliedern, welche durch die Integration in R v e r g r ö ß e r t werden, also in den Gliedern der Form D

(cf. I, S. 380) Rechnung getragen werden. Indem wir in diesem Sinne also im unbestimmten Integralansatz für R_2 diese Glieder allein ins Auge fassen, wird derselbe:

$$\left.\begin{aligned}
R_2 = {} & \beta_7 \eta^2 \cos 3w && + \beta_{11} \eta^2 \cos(3w-2\mathrm{v}) && + \beta_{17} \eta^2 \cos(9w-2\mathrm{v}) \\
& + \beta_8 \eta\eta' \cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && + \beta_{12} \eta\eta' \cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && + \beta_{18} \eta\eta' \cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& + \beta_9 \eta\eta' \cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && + \beta_{13} \eta'^2 \cos(3w-2\mathrm{v}_1) && + \beta_{19} \eta'^2 \cos(9w-2\mathrm{v}_1) \\
& + \beta_{10} \eta'^2 \cos 3w && && + (R_2)_\delta .
\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Das erste Glied rechts gibt, wenn man setzt:

$$m_1 = 2, \quad n = 3, \quad m_2 = 0$$

nach Formel (48):

$$\frac{d^2 \eta^2 \cos 3w}{dv^2} = -(1+\delta_1)^2 \eta^2 \cos 3w - 2(1+\delta_1) \frac{d\eta^2}{dv} \sin 3w.$$

Das folgende Glied gibt, wenn man setzt:

$$m_1 = 1, \quad m_1' = 1, \quad n = 3, \quad m_2 = 1, \quad m_2' = -1,$$

nach (49):

$$\begin{aligned}
\eta\eta' \cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \frac{d^2 \eta\eta' \cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)}{dv^2} = {} & -\{2(\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)+(\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)^2\}\eta\eta' \cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& -2(1+\delta_1-\varsigma+\varsigma_1) \frac{d\eta\eta' \cos(\pi-\pi_1)}{dv} \sin\{3w-(\varsigma-\varsigma_1)v\} \\
& +2(1+\delta_1-\varsigma+\varsigma_1) \frac{d\eta\eta' \sin(\pi-\pi_1)}{dv} \cos\{3w-(\varsigma-\varsigma_1)v\}.
\end{aligned}$$

Beim Glied vom Koeffizienten β_{18} ferner hätte man z. B. zu setzen:

$$m_1 = 1, \quad m_1' = 1, \quad n = 9, \quad m_2 = -1, \quad m_2' = -1 \quad \text{u. s. f.}$$

In toto erhält man so aus (50):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2 R_2}{dv^2} + R_2\right)_2 = {} & -(2\delta_1+\delta_1^2)\beta_7 \eta^2 \cos 3w^* \\
& -2(1+\delta_1)\beta_7 \frac{d\eta^2}{dv} \sin 3w \\
& -\{2(\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)+(\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)^2\}\beta_8 \eta\eta' \cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)^* \\
& -2(1+\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)\beta_8 \frac{d\eta\eta' \cos(\pi-\pi_1)}{dv} \sin[3w-(\varsigma-\varsigma_1)v] \\
& +2(1+\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)\beta_8 \frac{d\eta\eta' \sin(\pi-\pi_1)}{dv} \cos[3w-(\varsigma-\varsigma_1)v] \\
& -\{2(\delta_1+\varsigma-\varsigma_1)+(\delta_1+\varsigma-\varsigma_1)^2\}\beta_9 \eta\eta' \cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)^* \\
& -2(1+\delta_1+\varsigma-\varsigma_1)\beta_9 \frac{d\eta\eta' \cos(\pi-\pi_1)}{dv} \sin[3w+(\varsigma-\varsigma_1)v] \\
& -2(1+\delta_1+\varsigma-\varsigma_1)\beta_9 \frac{d\eta\eta' \sin(\pi-\pi_1)}{dv} \cos[3w+(\varsigma-\varsigma_1)v] \\
& -(2\delta_1+\delta_1^2)\beta_{10} \eta'^2 \cos 3w^*
\end{aligned} \tag{51}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-2(1+\delta_1)\,\beta_{10}\,\frac{d\eta'^2}{dv}\sin 3w\\
&+\{2(\delta_1+2\varsigma)-(\delta_1+2\varsigma)^2\}\,\beta_{11}\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v})^*\\
&+2(1-\delta_1-2\varsigma)\beta_{11}\,\frac{d\,\eta^2\cos 2\pi}{dv}\sin[3w-2(1-\varsigma)v]\\
&-2(1-\delta_1-2\varsigma)\beta_{11}\,\frac{d\,\eta^2\sin 2\pi}{dv}\cos[3w-2(1-\varsigma)v]\\
&+\{2(\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)-(\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)^2\}\,\beta_{12}\,\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)^*\\
&+2(1-\delta_1-\varsigma-\varsigma_1)\beta_{12}\,\frac{d\eta\eta'\cos(\pi+\pi_1)}{dv}\sin[3w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]\\
&-2(1-\delta_1-\varsigma-\varsigma_1)\beta_{12}\,\frac{d\eta\eta'\sin(\pi+\pi_1)}{dv}\cos[3w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]\\
&+\{2(\delta_1+2\varsigma_1)-(\delta_1+2\varsigma_1)^2\}\,\beta_{13}\eta'^2\cos(3w-2\mathrm{v}_1)^*\\
&+2(1-\delta_1-2\varsigma_1)\,\beta_{13}\,\frac{d\eta'^2\cos 2\pi_1}{dv}\sin[3w-2(1-\varsigma_1)v]\\
&-2(1-\delta_1-2\varsigma_1)\,\beta_{13}\,\frac{d\eta'^2\sin 2\pi_1}{dv}\cos[3w-2(1-\varsigma_1)v]\\
&-\{2(3\delta_1+2\varsigma)+(3\delta_1+2\varsigma)^2\}\,\beta_{17}\eta^2\cos(9w-2\mathrm{v}_1)^*\\
&-2(1+3\delta_1+2\varsigma)\beta_{17}\,\frac{d\eta^2\cos 2\pi}{dv}\sin[9w-2(1-\varsigma)v]\\
&+2(1+3\delta_1+2\varsigma)\beta_{17}\,\frac{d\,\eta^2\sin 2\pi}{dv}\cos[9w-2(1-\varsigma)v]\\
&-\{2(3\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)+(3\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)^2\}\,\beta_{18}\eta\eta'\cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)^*\\
&-2(1+3\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)\beta_{18}\,\frac{d\eta\eta'\cos(\pi+\pi_1)}{dv}\sin[9w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]\\
&+2(1+3\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)\beta_{18}\,\frac{d\eta\eta'\sin(\pi+\pi_1)}{dv}\cos[9w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]\\
&-\{2(3\delta_1+2\varsigma_1)+(3\delta_1+2\varsigma_1)^2\}\,\beta_{19}\eta'^2\cos(9w-2\mathrm{v}_1)^*\\
&-2(1+3\delta_1+2\varsigma_1)\,\beta_{19}\,\frac{d\eta'^2\cos 2\pi_1}{dv}\sin[9w-2(1-\varsigma_1)v]\\
&+2(1+3\delta_1+2\varsigma_1)\,\beta_{19}\,\frac{d\eta'^2\sin 2\pi_1}{dv}\cos[9w-2(1-\varsigma_1)v]\\
&+\frac{d^2(R_2)_3}{dv^2}+(R_2)_3.
\end{aligned}\right\}\qquad(51)
$$

Nun ist aber:

$$
\left(\frac{d^2R}{dv^2}+R\right)_2=\left(\frac{d^2R_2}{dv^2}+R_2\right)_2+\text{zweiter Ordnung,}\qquad(52)
$$

wobei das erste Glied der rechten Seite durch die Entwicklung (51), die linke Seite aber durch die Differentialgleichung (28), unter Ausschluß derjenigen Glieder derselben, welche durch die Integration nicht vergrößert werden, d. h. durch die Gleichung:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2R}{dv^2}+R\right)_2 = {} & P_{II}^{(1)}\eta^2\cos 3w && +P_{II}^{(5)}\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v}) \\ & +P_{II}^{(2)}\eta\eta'\cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +P_{II}^{(6)}\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ & +P_{II}^{(3)}\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && +P_{II}^{(7)}\eta'^2\cos(3w-2\mathrm{v}_1) \\ & +P_{II}^{(4)}\eta'^2\cos 3w && +P_{II}^{(11)}\eta^2\cos(9w-2\mathrm{v}) \\ & && +P_{II}^{(12)}\eta\eta'\cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ & && +P_{II}^{(13)}\eta'^2\cos(9w-2\mathrm{v}_1) \\ & && +2(S_2)_\delta\end{aligned} \tag{53}$$

gegeben ist. Und zwar ist nach dem Früheren:

$$\begin{aligned} -(2\delta_1+\delta_1^2)\beta_7 &= P_{II}^{(1)} + \text{zweiter Ordnung}, \\ -\{2(\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)+(\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)^2\}\beta_8 &= P_{II}^{(2)} + \quad » \quad » \\ -\{2(\delta_1+\varsigma-\varsigma_1)+(\delta_1+\varsigma-\varsigma_1)^2\}\beta_9 &= P_{II}^{(3)} + \quad » \quad » \\ -(2\delta_1+\delta_1^2)\beta_{10} &= P_{II}^{(4)} + \quad » \quad » \\ \{2(\delta_1+2\varsigma)-(\delta_1+2\varsigma)^2\}\beta_{11} &= P_{II}^{(5)} + \quad » \quad » \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \tag{54}$$

daher heben sich in Gleichung (52) die Glieder der rechten Seite, die in (51) mit * bezeichnet sind, fort gegen die durch Gleichung (53) gegebenen Glieder der linken Seite von Gleichung (52) und man erhält für die Zusatzglieder zweiten Grades in R die folgende zu integrierende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}\frac{d^2(R_2)_\delta}{dv^2}+(R_2)_\delta = 2(S_2)_\delta & +2(1+\delta_1)\beta_7\frac{d\eta^2}{dv}\sin 3w \\ & +2(1+\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)\beta_8\frac{d\eta\eta'\cos(\pi-\pi_1)}{dv}\sin[3w-(\varsigma-\varsigma_1)v] \\ & -2(1+\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)\beta_8\frac{d\eta\eta'\sin(\pi-\pi_1)}{dv}\cos[3w-(\varsigma-\varsigma_1)v] \\ & +2(1+\delta_1+\varsigma-\varsigma_1)\beta_9\frac{d\eta\eta'\cos(\pi-\pi_1)}{dv}\sin[3w+(\varsigma-\varsigma_1)v] \\ & +2(1+\delta_1+\varsigma-\varsigma_1)\beta_9\frac{d\eta\eta'\sin(\pi-\pi_1)}{dv}\cos[3w+(\varsigma-\varsigma_1)v] \\ & +2(1+\delta_1)\beta_{10}\frac{d\eta'^2}{dv}\sin 3w \\ & -2(1-\delta_1-2\varsigma)\beta_{11}\frac{d\eta^2\cos 2\pi}{dv}\sin[3w-2(1-\varsigma)v] \\ & +2(1-\delta_1-2\varsigma)\beta_{11}\frac{d\eta^2\sin 2\pi}{dv}\cos[3w-2(1-\varsigma)v] \\ & -2(1-\delta_1-\varsigma-\varsigma_1)\beta_{12}\frac{d\eta\eta'\cos(\pi+\pi_1)}{dv}\sin[3w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v] \\ & +2(1-\delta_1-\varsigma-\varsigma_1)\beta_{12}\frac{d\eta\eta'\sin(\pi+\pi_1)}{dv}\cos[3w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-2(1-\delta_1-2\varsigma_1)\beta_{13}\frac{d\eta'^2\cos 2\pi_1}{dv}\sin[3w-2(1-\varsigma_1)v]\\
&+2(1-\delta_1-2\varsigma_1)\beta_{13}\frac{d\eta'^2\sin 2\pi_1}{dv}\cos[3w-2(1-\varsigma_1)v]\\
&+2(1+3\delta_1+2\varsigma)\beta_{17}\frac{d\eta^2\cos 2\pi}{dv}\sin[9w-2(1-\varsigma)v]\\
&-2(1+3\delta_1+2\varsigma)\beta_{17}\frac{d\eta^2\sin 2\pi}{dv}\cos[9w-2(1-\varsigma)v]\\
&+2(1+3\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)\beta_{18}\frac{d\eta\eta'\cos(\pi+\pi_1)}{dv}\sin[9w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]\\
&-2(1+3\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)\beta_{18}\frac{d\eta\eta'\sin(\pi+\pi_1)}{dv}\cos[9w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]\\
&+2(1+3\delta_1+2\varsigma_1)\beta_{19}\frac{d\eta'^2\cos 2\pi_1}{dv}\sin[9w-2(1-\varsigma_1)v]\\
&-2(1+3\delta_1+2\varsigma_1)\beta_{19}\frac{d\eta'^2\sin 2\pi_1}{dv}\cos[9w-2(1-\varsigma_1)v].
\end{aligned}$$

Da nun, wenn $\alpha_n\cos(\lambda_n v-B_n)$ allgemein ein Glied dieser Differentialgleichung bezeichnet, das entsprechende Glied im Integral $\frac{\alpha_n}{1-\lambda_n^2}\cos(\lambda_n v-B_n)$ ist, so erhält man durch Integration von letzterer Gleichung direkt die Zusatzglieder zweiten Grades in R, welche durch die Variabilität von η und π in Gleichung (28) bei der Integration entstehen, wobei wir wieder im Hinblick auf die festgesetzte Genauigkeitsgrenze ς und ς_1 wie bisher vernachlässigen:

$$\left.\begin{aligned}
(R_2)_\delta = {}&\frac{\alpha_{14}}{\delta_1}\left\{\frac{d\eta^2\cos 2\pi}{dv}\cos[6w-2(1-\varsigma)v]-\frac{d\eta^2\sin 2\pi}{dv}\sin[6w-2(1-\varsigma)v]\right\}\\
&+\frac{\alpha_{15}}{\delta_1}\left\{\frac{d\eta\eta'\cos(\pi+\pi_1)}{dv}\cos[6w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]-\frac{d\eta\eta'\sin(\pi+\pi_1)}{dv}\sin[6w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]\right\}\\
&+\frac{\alpha_{16}}{\delta_1}\left\{\frac{d\eta'^2\cos 2\pi_1}{dv}\cos[6w-2(1-\varsigma_1)v]-\frac{d\eta'^2\sin 2\pi_1}{dv}\sin[(6w-2(1-\varsigma_1)v]\right\}\\
&-\frac{2\beta_7(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\frac{d\eta^2}{dv}\cos 3w\\
&-\frac{2\beta_8(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\left\{\frac{d\eta\eta'\cos(\pi-\pi_1)}{dv}\cos[3w-(\varsigma-\varsigma_1)v]-\frac{d\eta\eta'\sin(\pi-\pi_1)}{dv}\sin[3w-(\varsigma-\varsigma_1)v]\right\}\\
&-\frac{2\beta_9(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\left\{\frac{d\eta\eta'\cos(\pi-\pi_1)}{dv}\cos[3w+(\varsigma-\varsigma_1)v]+\frac{d\eta\eta'\sin(\pi-\pi_1)}{dv}\sin[3w+(\varsigma-\varsigma_1)v]\right\}\\
&-\frac{2\beta_{10}(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\frac{d\eta'^2}{dv}\cos 3w\\
&-\frac{2\beta_{11}(1-\delta_1)}{\delta_1(2-\delta_1)}\left\{\frac{d\eta^2\cos 2\pi}{dv}\cos[3w-2(1-\varsigma)v]-\frac{d\eta^2\sin 2\pi}{dv}\sin[3w-2(1-\varsigma)v]\right\}\\
&-\frac{2\beta_{12}(1-\delta_1)}{\delta_1(2-\delta_1)}\left\{\frac{d\eta\eta'\cos(\pi+\pi_1)}{dv}\cos[3w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{d\eta\eta'\sin(\pi+\pi_1)}{dv}\sin[3w-(2-\varsigma-\varsigma_1)v]\right\}\\
&-\frac{2\beta_{13}(1-\delta_1)}{\delta_1(2-\delta_1)}\left\{\frac{d\eta'^2\cos 2\pi_1}{dv}\cos[3w-2(1-\varsigma_1)v]-\frac{d\eta'^2\sin 2\pi_1}{dv}\sin[3w-2(1-\varsigma_1)v]\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(55)$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2\,\beta_{17}\,(1+3\,\delta_1)}{3\,\delta_1\,(2+3\,\delta_1)}\Big\{\frac{d\eta^2\cos 2\,\pi}{dv}\cos\,[9\,w-2\,(1-\varsigma)\,v]-\frac{d\eta^2\sin 2\,\pi}{dv}\sin\,[9\,w-2\,(1-\varsigma)\,v]\Big\} \\
&-\frac{2\,\beta_{18}\,(1+3\,\delta_1)}{3\,\delta_1\,(2+3\,\delta_1)}\Big\{\frac{d\eta\eta'\cos\,(\pi+\pi_1)}{dv}\cos\,[9\,w-(2-\varsigma-\varsigma_1)\,v]- \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{d\eta\eta'\sin\,(\pi+\pi_1)}{dv}\sin\,[9\,w-(2-\varsigma-\varsigma_1)\,v] \\
&-\frac{2\,\beta_{19}\,(1+3\,\delta_1)}{3\,\delta_1\,(2+3\,\delta_1)}\Big\{\frac{d\eta'^2\cos 2\,\pi_1}{dv}\cos\,[9\,w-2\,(1-\varsigma_1)\,v]-\frac{d\eta'^2\sin 2\,\pi_1}{dv}\sin\,[9\,w-2\,(1-\varsigma_1)\,v]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Siebentes Kapitel.

Die Integration der Differentialgleichung des Sinus der Breite für die Glieder ersten und zweiten Grades im Typus 2/3.

I. Die allgemeine Gyldén'sche Bestimmungsweise der Bewegung der instantanen Bahnebene im Raume.

In Abteilung I (cf. S. 314) waren wir ausgegangen von der folgenden Form der allgemeinen Differentialgleichungen der relativen Bewegung eines Planeten um die Sonne:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + m_1 \frac{x}{r^3} &= m_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + m_1 \frac{y}{r^3} &= m_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} + m_1 \frac{z}{r^3} &= m_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Wir sahen wie Gyldén im Anschluß an Hansen die gesonderte Betrachtung der Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene, die nach Hansen definiert war durch die Gleichungen (cf. I, S. 318):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{r^2 \frac{dv}{dt}\right\} &= m_1 \frac{\partial \Omega}{\partial v} \\ \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{m_1}{r^2} &= m_1 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

von der Bewegung der Bahnebene selbst im Raum, welche zunächst definiert bleibt durch die Gleichung:

$$\left.\frac{d^2z}{dt^2} + m_1 \frac{z}{r^3} = m_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z}\right\} \tag{3}$$

beibehält.

In die Gleichungen (2) hatten wir dann die Gyldén'schen Variabeln S, η, ρ eingeführt und so zunächst das neue System der drei Gyldén'schen Bewegungsgleichungen des Planeten in seiner momentanen Bahnebene erhalten, welches dem System (2) äquivalent ist (cf. I, S. 318—330):

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.} \quad -\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv} = (1+S)^2 Q + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv} \\ &\text{II.} \quad \frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho = -\left\{\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv} + (1+S)^2 Q\right\}\frac{d\rho}{dv} + 2S + S^2 - (1+S)^2 P \\ &\qquad - \left\{\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d^2\eta^2}{dv^2} + \frac{2}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2 + \frac{(1+S)^2}{1-\eta^2} Q \frac{d\eta^2}{dv}\right\}(1+\rho) \end{aligned}\right| \tag{4}$$

III.[1]
$$\left.\begin{aligned}\frac{dT}{dv} &= S-2R-2RS+3R^2+3SR^2-4R^3+\ldots\ldots\\ &+\{6R-2S-12R^2+6RS-\ldots\}\eta\cos\{(1-\varsigma)v-\pi\}\\ &-3\eta^2R+\left\{\frac{3}{2}S-6R+\ldots\ldots\right\}\eta^2\cos 2\{(1-\varsigma)v-\pi\}\\ &+6R\eta^3\cos v+\left\{\frac{19}{4}R-S\right\}\eta^3\cos 3\{(1-\varsigma)v-\pi\}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &-\frac{dX}{dv},\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wobei:

$$P = r^2\frac{\partial\Omega}{\partial r}; \qquad Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$

ist; Gleichungen, deren Aufstellung und Integration für das gewählte spezielle Beispiel der kleinen Planeten vom Typus $\frac{2}{3}$ uns im Vorhergehenden im Detail beschäftigt hat.

Bei Betrachtung der Bewegung der instantanen Bahnebene im Raum hingegen geht Gyldén nicht von der Hansen'schen Form aus, wie zuvor bei Betrachtung der Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene, wo er die Hansen'schen Gleichungen (2) direkt als Ausgangspunkt benützt, indes neue begriffliche Bestimmungen in sie einführt. Zur Ermittlung der Breitenstörungen führt Gyldén direkt die Breite b des Planeten über der festen Fundamentalebene, als welche die Ekliptik 1800 Januar 1.0 oder 1850 Januar 1.0 zu Grunde gelegt gedacht ist, in die Differentialgleichung (3) ein. Die ausführliche Behandlung des Problems findet sich außer in Gyldén's Erstlingswerk[2] über Himmelsmechanik in seinem Hauptwerk, den Orbites absolues,[3] sowie in Herrn Brendels Theorie der kleinen Planeten.[4] Wir deuten hier, wo es auf die Ermittlung der Breitenstörungen für den Typus $\frac{2}{3}$ ankommt, nur die Hauptgesichtspunkte der Transformation an, welche auf diejenige allgemeine Form der Differentialgleichung für den Sinus der Breite $\mathfrak{z} = \sin b$ führt, deren Spezialisierung und Integration wir dann für den speziellen Fall der Planeten des Hildatypus auszuführen haben. Im Ausdruck für den momentanen Abstand des Planeten von der Ebene der Ekliptik:

$$z = r\sin b \tag{5}$$

setzt Gyldén zur Abkürzung:

$$\sin b = \mathfrak{z}, \tag{6}$$

so daß:

$$z = r.\mathfrak{z} \tag{7}$$

wird.

[1] In Ergänzung des Abteilung I beigefügten Druckfehlerverzeichnisses sei hier bemerkt, daß bei Ableitung obiger Gleichung in Abteilung I, S. 328 einigemal $\frac{dX}{dt}$ und $\frac{d\zeta}{dt}$ statt $\frac{dX}{dv}$ und $\frac{d\zeta}{dv}$ verschentlich geschrieben ist, während auf S. 329 und sonst überall $\frac{dX}{dv}$ und $\frac{d\zeta}{dv}$ steht.

[2] Hugo Gyldén, Undersökningar af theorien för himlakropparnes rörelser. I, II, III Bihang till svenska Vet. Acad. Handlingar, Band 6, Nr. 8, Band 6, Nr. 16, Band 7, Nr. 2. Man vergleiche hierzu die in Abteilung I, S. 358, gemachte Anmerkung.

[3] Hugo Gyldén, Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales (Berlin, Mayer und Müller; Paris, A. Hermann; Stockholm F. und G. Beijer).

[4] Martin Brendel, Theorie der kleinen Planeten, I. Teil, Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathem.-physikalische Klasse. Neue Folge, Bd. 1. Nr. 2, Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung 1898.

Durch zweimalige Differentiation dieses Wertes und Einsetzen in Gleichung (3) geht diese über in:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + \frac{\mathfrak{z}}{r}\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{2}{3}\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\frac{dr}{dt} + m_1\frac{\mathfrak{z}}{r^3} = \frac{m_1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

Aus der zweiten der Gleichungen (2) aber ergibt sich:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - \frac{m_1}{r^2} + m_1\frac{\partial\Omega}{\partial r}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes wird die vorstehende Gleichung:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + \mathfrak{z}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{m_1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial z} - m_1\frac{\mathfrak{z}}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}. \tag{8}$$

In diese Gleichung führt Gyldén an Stelle der Zeit t als unabhängige Variable nun ebenfalls die wahre Länge v ein, die ja auch in den Differentialgleichungen für S, ρ, T als independente Variable figuriert. Dazu hat man:

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{d\mathfrak{z}}{dv}\cdot\frac{dv}{dt}.$$

Es war aber, wenn man von m_1 nicht absieht (cf. I. S. 320 und 323):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{m_1 a(1-\eta^2)}}{r^2(1+S)},$$

also:

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{\sqrt{m_1 a(1-\eta^2)}}{r^2(1+S)},$$

mithin:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}\frac{dv}{dt}\frac{\sqrt{m_1 a(1-\eta^2)}}{r^2(1+S)} + \frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{d}{dv}\left\{\frac{\sqrt{m_1 a(1-\eta^2)}}{r^2(1+S)}\right\}$$

oder:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}\frac{m_1 a(1-\eta^2)}{r^4(1+S)^2} + \frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{d}{dv}\left\{\frac{\sqrt{m_1 a(1-\eta^2)}}{r^2(1+S)}\right\}$$

oder, indem man das letzte Glied noch ausdifferentiert, im Resultat:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \frac{1}{r^4}\frac{m_1 a(1-\eta^2)}{(1+S)^2}\left\{\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} - \frac{2}{r}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{dr}{dv} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right\}. \tag{9}$$

Aus der Differentialgleichung für S folgt aber direkt:

$$(1+S)^2 Q = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv} - \frac{1}{1+S}\cdot\frac{dS}{dv}.$$

Daher kann man für (9) auch schreiben:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \frac{1}{r^4}\frac{m_1 a(1-\eta^2)}{(1+S)^2}\left\{\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} - \frac{2}{r}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{dr}{dv} + (1+S)^2 Q\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right\}. \tag{9a}$$

Aus der Definitionsgleichung für S folgt aber:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{1}{r^4}\frac{m_1 a(1-\eta^2)}{(1+S)^2}. \tag{10}$$

Ferner ist:

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{dv}{dt}\frac{dr}{dv}\frac{dv}{dt},$$

also:

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r^4}\frac{m_1 a(1-\eta^2)}{(1+S)^2}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{dr}{dv}. \tag{11}$$

Setzt man die Ausdrücke (9a), (10), (11) in Gleichung (8) ein, so erhält man die Bestimmungsgleichung von $\mathfrak{z} = \sin b$ in der Form, wie sie Gyldén zu Grunde legt:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = -(1+S)^2 Q \frac{d\mathfrak{z}}{dv} + (1+S)^2 Z, \tag{12}$$

wobei bedeutet:

$$Z = \frac{r^3}{a(1-\eta^2)}\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial z} - \mathfrak{z}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right\}, \tag{12a}$$

und S durch Integration der Differentialgleichung I bereits für den Typus $\frac{2}{3}$ bis inklusive zum zweiten Grad ermittelt wurde, während Q, die Derivierte der Störungsfunktion:

$$Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$

nach Gyldén's Prinzip in eine unendliche Reihe entwickelt worden war, die fortschreitet nach Grad und Ordnung, deren Koeffizienten A gegebene Größen, und berechenbar waren aus dem numerisch zunächst genähert bekannten Verhältnis der mittleren Entfernungen $\frac{a}{a'} = \alpha$ (cf. I, S. 347 und 349).

Den Ausdruck (12a) der dritten Derivierten Z, der Störungsfunktion, kann man noch transformieren. Der Ausdruck für die Störungsfunktion Ω war ja (cf. I, S. 314):

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\Delta} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right\},$$

wo:

$$\Delta = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

Durch Differentiation nach z erhält man also:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{m'}{1+m}\left\{-\frac{z}{\Delta^3} + z'\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\right\}.$$

Andererseits war:

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}\cos H\right\},$$

wo H der Winkel zwischen den Radien-Vektoren des störenden und gestörten Planeten war. Die Differentiation dieses Ausdruckes ergibt:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{m'}{1+m}\left\{-\frac{r}{\Delta^3} + r'\left(\frac{r}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\cos H\right\}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H} = \frac{m'}{1+m}rr'\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right).$$

Also wird mit Hinblick auf $z = r.\mathfrak{z}$ und analog $\mathfrak{z}' = \sin b'$, also $z = r'.\mathfrak{z}'$:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{m'}{1+m}\left\{-\frac{r\mathfrak{z}}{\Delta^3} + \frac{\mathfrak{z}'}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H}\right\}$$

und:

$$\mathfrak{z}\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{m'}{1+m}\left\{-\frac{r\mathfrak{z}}{\Delta^3} + \frac{\mathfrak{z}\cos H}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H}\right\}.$$

Somit ist:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = -(1+S)^2 Q \frac{d\mathfrak{z}}{dv} + (1+S)^2 Z, \tag{12}$$

wo:

$$Z = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)}(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\cos H)\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H} \tag{12b}$$

ist.

Genau in derselben Weise nun, wie die beiden Derivierten Q und P läßt sich auch die Derivierte Z in eine unendliche Reihe entwickeln, eine Entwicklung, die wir hier, wo die Ermittlung der Breitenstörungen des Hildatypus unsere Aufgabe bildet, umsoweniger durchzuführen Veranlassung haben, als diese Entwicklung gegenüber der in Abteilung I durchgeführten Entwicklung von P und Q prinzipiell keine neuen Gesichtspunkte bietet und zudem ausführlich in Herrn Brendel's Theorie der kleinen Planeten durchgeführt ist; ergänzt ist dieselbe noch von Herrn Kramer in seiner bereits erwähnten Abhandlung über den Hekubatypus $\left(\frac{1}{2}\right)$ durch Hinzufügung der wesentlichen Glieder zweiten Grades zweiter Ordnung.

Diese Entwicklung der Gyldén'schen Derivierten Z in der Brendel'schen Form ist gegeben durch den folgenden Ausdruck, den ich, analog wie P und Q, gleich geordnet nach Grad und Ordnung schreibe, den wir beim Aufsuchen der langperiodischen und kurzperiodischen elementären und charakteristischen Glieder für den Typus $\frac{2}{3}$ direkt zugrunde zu legen haben:

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
Z = \sum C^{(+1)}_{n.1.0} \sin j \sin(nw + \mathfrak{v}) + \sum C^{(-1)}_{n.1.0} \sin j \sin(nw - \mathfrak{v}) \\
\quad + \sum C^{(+1)}_{n.0.1} \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1) + \sum C^{(-1)}_{n.0.1} \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1)
\end{array}\right\} \text{I. Grad} \\
\left.\begin{array}{l}
\quad + \sum C^{(+2)}_{n.1.0.1.0}\, \eta \sin j \sin(nw + \mathfrak{v} + \mathrm{v}) + \sum C^{(+2)}_{n.1.0.0.1}\, \eta' \sin j \sin(nw + \mathfrak{v} + \mathrm{v}_1) \\
\quad + \sum C^{(+1)}_{n.1.0.1.0}\, \eta \sin j \sin(nw + \mathfrak{v} - \mathrm{v}) + \sum C^{(+1)}_{n.1.0.0.1}\, \eta' \sin j \sin(nw + \mathfrak{v} - \mathrm{v}_1) \\
\quad + \sum C^{(-1)}_{n.1.0.1.0}\, \eta \sin j \sin(nw - \mathfrak{v} + \mathrm{v}) + \sum C^{(-1)}_{n.1.0.0.1}\, \eta' \sin j \sin(nw - \mathfrak{v} + \mathrm{v}_1) \\
\quad + \sum C^{(-2)}_{n.1.0.1.0}\, \eta \sin j \sin(nw - \mathfrak{v} - \mathrm{v}) + \sum C^{(-2)}_{n.1.0.0.1}\, \eta' \sin j \sin(nw - \mathfrak{v} - \mathrm{v}_1) \\
\quad + \sum C^{(+2)}_{n.0.1.1.0}\, \eta \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1 + \mathrm{v}) + \sum C^{(+2)}_{n.0.1.0.1}\, \eta' \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1 + \mathrm{v}_1) \\
\quad + \sum C^{(+1)}_{n.0.1.1.0}\, \eta \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1 - \mathrm{v}) + \sum C^{(+1)}_{n.0.1.0.1}\, \eta' \sin j' \sin(nw + \mathfrak{v}_1 - \mathrm{v}_1) \\
\quad + \sum C^{(-1)}_{n.0.1.1.0}\, \eta \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1 + \mathrm{v}) + \sum C^{(-1)}_{n.0.1.0.1}\, \eta' \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1 + \mathrm{v}_1) \\
\quad + \sum C^{(-2)}_{n.0.1.1.0}\, \eta \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1 - \mathrm{v}) + \sum C^{(-2)}_{n.0.1.0.1}\, \eta' \sin j' \sin(nw - \mathfrak{v}_1 - \mathrm{v}_1)
\end{array}\right\} \text{II. Grad}
\end{array}\right\} \text{I. Ordnung} \\
\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \tag{13}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum C_{n.0.0}^{0.1}\,\mathfrak{Z}_1 \cos nw \\
&+R_0\Big\{\sum C_{n.1.0}^{+1.1.0} \sin j \sin (nw+\mathfrak{v}) \;+\sum C_{n.1.0}^{-1.1.0} \sin j \sin (nw-\mathfrak{v}) \\
&\qquad +\sum C_{n.0.1}^{+1.1.0} \sin j' \sin (nw+\mathfrak{v}_1)+\sum C_{n.0.1}^{-1.1.0} \sin j' \sin (nw-\mathfrak{v}_1)\Big\} \\
&-\mu K_0\Big\{\sum n\, C_{n.1.0}^{(+1)} \sin j \cos (nw+\mathfrak{v}) \;+\sum n\, C_{n.1.0}^{(-1)} \sin j \cos (nw-\mathfrak{v}) \\
&\qquad +\sum n\, C_{n.0.1}^{(+1)} \sin j' \cos (nw+\mathfrak{v}_1)+\sum n\, C_{n.0.1}^{(-1)} \sin j' \cos (nw-\mathfrak{v}_1)\Big\}
\end{aligned}
$$

I. Grad

$$
\begin{aligned}
&+\sum C_{n.0.0}^{0.1}\,\mathfrak{Z}_2 \cos nw \\
&+R_1\Big\{\sum C_{n.1.0}^{+1.1.0} \sin j \sin (nw+\mathfrak{v}) &&+\sum C_{n.1.0}^{-1.1.0} \sin j \sin (nw-\mathfrak{v}) \\
&\qquad +\sum C_{n.0.1}^{+1.1.0} \sin j' \sin (nw+\mathfrak{v}_1) &&+\sum C_{n.0.1}^{-1.1.0} \sin j' \sin (nw-\mathfrak{v}_1)\Big\} \\
&-\mu K_1\Big\{\sum n C_{n.1.0}^{(+1)} \sin j \cos (nw+\mathfrak{v}) &&+\sum n C_{n.1.0}^{(-1)} \sin j \cos (nw-\mathfrak{v}) \\
&\qquad +\sum n C_{n.0.1}^{(+1)} \sin j' \cos (nw+\mathfrak{v}_1) &&+\sum n\, C_{n.0.1}^{(-1)} \sin j' \cos (nw-\mathfrak{v}_1)\Big\} \\
&+\mathfrak{Z}_1\Big\{\sum C_{n.0.0.1.0}^{+1.0.1}\,\eta \cos (nw+\mathrm{v}) &&+\sum C_{n.0.0.1.0}^{-1.0.1}\,\eta \cos (nw-\mathrm{v}) \\
&\qquad +\sum C_{n.0.0.0.1}^{+1.0.1}\,\eta' \cos (nw+\mathrm{v}_1) &&+\sum C_{n.0.0.0.1}^{-1.0.1}\,\eta' \cos (nw-\mathrm{v}_1)\Big\} \\
&+R_0\Big\{\sum C_{n.1.0.1.0}^{+2.1.0}\,\eta \sin j \sin (nw+\mathfrak{v}+\mathrm{v}) &&+\sum C_{n.1.0.0.1}^{+2.1.0}\,\eta' \sin j \sin (nw+\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1) \\
&\qquad +\sum C_{n.1.0.1.0}^{+1.1.0}\,\eta \sin j \sin (nw+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) &&+\sum C_{n.1.0.0.1}^{+1.1.0}\,\eta' \sin j \sin (nw+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) \\
&\qquad +\sum C_{n.1.0.1.0}^{-1.1.0}\,\eta \sin j \sin (nw-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) &&+\sum C_{n.1.0\,0.1}^{-1.1.0}\,\eta' \sin j \sin (nw-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1) \\
&\qquad +\sum C_{n.1.0.1.0}^{-2.1.0}\,\eta \sin j \sin (nw-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) &&+\sum C_{n.1.0.0.1}^{-2.1.0}\,\eta' \sin j \sin (nw-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) \\
&\qquad +\sum C_{n.0.1.1.0}^{+2.1.0}\,\eta \sin j' \sin (nw+\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) &&+\sum C_{n.0.1.0.1}^{+2.1.0}\,\eta' \sin j' \sin (nw+\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1) \\
&\qquad +\sum C_{n.0.1.1.0}^{+1.1.0}\,\eta \sin j' \sin (nw+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) &&+\sum C_{n.0.1.0.1}^{+1.1.0}\,\eta' \sin j' \sin (nw+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) \\
&\qquad +\sum C_{n.0.1.1.0}^{-1.1.0}\,\eta \sin j' \sin (nw-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) &&+\sum C_{n.0.1.0.1}^{-1.1.0}\,\eta' \sin j' \sin (nw-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1) \\
&\qquad +\sum C_{n.0.1.1.0}^{-2.1.0}\,\eta \sin j' \sin (nw-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) &&+\sum C_{n.0.1.0.1}^{-2.1.0}\,\eta' \sin j' \sin (nw-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)\Big\}
\end{aligned}
$$

II. Grad

II. Ordnung (13)

$$
\begin{aligned}
-\mu K_0 \Big\{ & \sum nC^{+2}_{n.1.0.1.0}\,\eta \sin j \cos(nw+\mathfrak{v}+\mathrm{v}) + \sum nC^{+2}_{n.1.0.0.1}\,\eta' \sin j \cos(nw+\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1) \\
+ & \sum nC^{+1}_{n.1.0.1.0}\,\eta \sin j \cos(nw+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) + \sum nC^{+1}_{n.1.0.0.1}\,\eta' \sin j \cos(nw+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) \\
+ & \sum nC^{-1}_{n.1.0.1.0}\,\eta \sin j \cos(nw-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) + \sum nC^{-1}_{n.1.0.0.1}\,\eta' \sin j \cos(nw-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1) \\
+ & \sum nC^{-2}_{n.1.0.1.0}\,\eta \sin j \cos(nw-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) + \sum nC^{-2}_{n.1.0.0.1}\,\eta' \sin j \cos(nw-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) \\
+ & \sum nC^{+2}_{n.0.1.1.0}\,\eta \sin j' \cos(nw+\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) + \sum nC^{+2}_{n.0.1.0.1}\,\eta' \sin j' \cos(nw+\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1) \\
+ & \sum nC^{+1}_{n.0.1.1.0}\,\eta \sin j' \cos(nw+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) + \sum nC^{+1}_{n.0.1.0.1}\,\eta' \sin j' \cos(nw+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) \\
+ & \sum nC^{-1}_{n.0.1.1.0}\,\eta \sin j' \cos(nw-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) + \sum nC^{-1}_{n.0.1.0.1}\,\eta' \sin j' \cos(nw-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1) \\
+ & \sum nC^{-2}_{n.0.1.1.0}\,\eta \sin j' \cos(nw-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) + \sum nC^{-2}_{n.0.1.0.1}\,\eta' \sin j' \cos(nw-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) \Big\}\,.
\end{aligned} \qquad (13)
$$

II. Grad | II. Ordnung

Die Angabe der Werte der C-Koeffizienten, die ebenso wie die A und B aus α herleitbar sind, samt ihrer Spezialisierung für den Typus $\frac{2}{3}$ wird gleichzeitig mit der Aufstellung der für den Typus $\frac{2}{3}$ in Betracht kommenden A- und B-Koeffizienten der Entwicklungen von Q und P in Abteilung III ausgeführt werden.

Die für $\mathfrak{z}$ gefundene Gleichung (12):

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = -(1+S)^2 Q \frac{d\mathfrak{z}}{dv} + (1+S)^2 Z$$

ist nun offenbar ein genaues Analogon zur Gleichung für ρ:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho = -(1+S)^2 Q \frac{d\rho}{dv} - (1+S)^2 P + \ldots$$

nur mit dem Unterschied, daß auf der rechten Seite der Gleichung für ρ noch Glieder stehen, die in der Gleichung für $\mathfrak{z}$ nicht vorkommen, welche also einfacher als die Gleichung für ρ, im übrigen aber analog zu behandeln ist.

Genau wie in ρ werden also auch in $\mathfrak{z}$ elementäre und charakteristische Glieder neben den gewöhnlichen Gliedern auftreten, indem die Funktion Z, wie wir sogleich sehen werden, genau wie das bei Q und P der Fall war, für bestimmte Werte von n solche Glieder gibt. In diesem Sinne denkt Gyldén analog wie bei ρ auch in $\mathfrak{z}$ die elementären Glieder der Form B, $(\mathfrak{z})$, von den übrigen Gliedern, $\mathfrak{Z}$, geschieden, derart, daß:

$$\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}) + \mathfrak{Z} \qquad (14)$$

zu setzen ist, ganz analog wie $\rho = (\rho) + R$ war, so daß auch die obige Differentialgleichung für $\mathfrak{z}$:

$$\frac{d^2\{(\mathfrak{z})+\mathfrak{Z}\}}{dv^2} + \{(\mathfrak{z})+\mathfrak{Z}\} = -(1+S)^2 Q \frac{d\{(\mathfrak{z})+\mathfrak{Z}\}}{dv} + (1+S)^2 Z \qquad (15)$$

in zwei getrennt zu behandelnde Differentialgleichungen zerfällt; in eine Differentialgleichung in den elementären Gliedern der Form B:

$$\frac{d^2(\mathfrak{z})}{dv^2} + (\mathfrak{z}) = -(1+S)^2 Q \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} + (1+S)^2 (Z)_{(\mathfrak{z})}, \qquad (16)$$

wo $(Z)_{(\mathfrak{z})}$ die elementären Glieder der Form B der Entwicklung Z enthält; und in eine Differentialgleichung in den Gliedern der übrigen Formen:

$$\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z}=-(1+S)^2 Q\,\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}+(1+S)^2 (Z)_{(\mathfrak{Z})}, \tag{17}$$

die wir für den Typus $\frac{2}{3}$ eine jede für sich gesondert aufzustellen und dann zu integrieren haben.

In weiterer Analogie zu (ρ), für das wir als unbestimmten Integralansatz die Form fanden (cf. I, S. 426):

$$(\rho)=\varkappa\cos\{(1-\varsigma)v-\Gamma\}+\Sigma\,\varkappa_n\cos\{(1-\varsigma_n)v-\Gamma_n\}$$

setzt Gyldén als unbestimmten Integralansatz für $(\mathfrak{z})$ die Form:

$$(\mathfrak{z})=\sin\iota\sin\{(1+\tau)v-\Theta\}+\Sigma\sin\iota_n\sin\{(1+\tau_n)v-\Theta_n\}, \tag{18}$$

wo entsprechend den Größen $\varkappa$ und Γ bei (ρ), die Größen $\sin\iota$ und Θ die beiden Integrationskonstanten der Differentialgleichung zweiter Ordnung für $(\mathfrak{z})$ repräsentieren und die τ_n analog den ς_n von der Ordnung der störenden Masse $m'=\frac{1}{1048}$ sind, während die $\sin\iota_n$, wie wir gleich sehen werden, mindestens vom ersten Grade sind; und analog wie ςv die Apsidenbewegung ausdrückte, steht τv in Analogie zur Knotenbewegung und weil letztere in entgegengesetztem Sinne wie die erstere Bewegung vor sich geht, hat τv das positive Vorzeichen.

Nun definiert Gyldén, wie gesagt, die Funktion $(\mathfrak{z})$ analog wie:

$$(\rho)=\eta\cos\{(1-\varsigma)v-\pi\}=\eta\cos\mathrm{v}$$

derart, daß $(\mathfrak{z})$ ausschließlich die elementären Glieder der Form B enthalten soll, so daß:

$$(\mathfrak{z})=\sin j\sin\{(1+\tau)v-\sigma\}=\sin j\sin\mathfrak{v} \tag{19}$$

ist. Dieser Gyldén'schen Definition zufolge, durch welche die elementären Glieder in (18) wieder in ein einziges zusammengefaßt werden, muß also sein:

$$\sin j\sin\{v-(\sigma-\tau v)\}=\sin\iota\sin\{v-(\Theta-\tau v)\}+\Sigma\sin\iota_n\sin\{v-(\Theta_n-\tau_n v)\}$$

oder:

$$\begin{aligned}\sin j\sin v\cos(\sigma-\tau v)-\sin j\cos v\sin(\sigma-\tau v)&=\sin\iota\sin v\cos(\Theta-\tau v)-\sin\iota\cos v\sin(\Theta-\tau v)\\&+\Sigma\sin\iota_n\sin v\cos(\Theta_n-\tau_n v)-\Sigma\sin\iota_n\cos v\sin(\Theta_n-\tau_n v).\end{aligned}$$

Somit ergeben sich also aus der Gyldén'schen Definition von $(\mathfrak{z})$ für die langperiodischen Funktionen $\sin j$ und σ die folgenden Bestimmungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\sin j\cos(\sigma-\tau v)&=\sin\iota\cos(\Theta-\tau v)+\Sigma\sin\iota_n\cos(\Theta_n-\tau_n v)\\ \sin j\sin(\sigma-\tau v)&=\sin\iota\sin(\Theta-\tau v)+\Sigma\sin\iota_n\sin(\Theta_n-\tau_n v)\end{aligned}\right\} \tag{20a}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}\sin j\cos\sigma&=\sin\iota\cos\Theta+\Sigma\sin\iota_n\cos\{(\tau-\tau_n)v+\Theta_n\}\\ \sin j\sin\sigma&=\sin\iota\sin\Theta+\Sigma\sin\iota_n\sin\{(\tau-\tau_n)v+\Theta_n\}\end{aligned}\right\} \tag{20b}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}\sin j\cos(\sigma-\Theta)&=\sin\iota+\Sigma\sin\iota_n\cos\{(\tau-\tau_n)v-(\Theta-\Theta_n)\}\\ \sin j\sin(\sigma-\Theta)&=\Sigma\sin\iota_n\sin\{(\tau-\tau_n)v-(\Theta-\Theta_n)\}.\end{aligned}\right\} \tag{20c}$$

In Analogie zu η^2 (cf. I, S. 393)[1] wird also:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sin^2 j &= \sin^2 \iota + \sum_1^\infty \sin^2 \iota_n + 2\sin\iota_n \sum_1^\infty \sin\iota_n \cos\{(\tau-\tau_n)v-(\Theta-\Theta_n)\} \\
&\quad + 2\sum_1^\infty\sum_1^\infty \sin\iota_n \sin\iota_m \cos\{(\tau_n-\tau_m)v-(\Theta_n-\Theta_m)\} \\
&= \sum_0^\infty \sin^2\iota_n + 2\sum_0^\infty\sum_0^\infty \sin\iota_n \sin\iota_m \cos\{(\tau_n-\tau_m)v-(\Theta_n-\Theta_m)\},
\end{aligned}
\right\} \tag{21}
$$

wo in der Doppelsumme m nicht gleich n zu nehmen ist.

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$\Theta-\tau v = \vartheta; \qquad \Theta_n-\tau_n v = \vartheta_n,$$

so werden obige Formen kürzer:

$$(\mathfrak{z}) = \sin\iota \sin(v-\vartheta)+\Sigma \sin\iota_n \sin(v-\vartheta_n) \tag{22}$$

und:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sin j \cos(\sigma-\tau v) &= \sin\iota \cos\vartheta+\Sigma \sin\iota_n \cos\vartheta_n \\
\sin j \sin(\sigma-\tau v) &= \sin\iota \sin\vartheta+\Sigma \sin\iota_n \sin\vartheta_n
\end{aligned}
\right\} \tag{23a}
$$

oder:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sin j \cos\sigma &= \sin\iota \cos(\vartheta+\tau v)+\Sigma \sin\iota_n \cos(\vartheta_n+\tau v) \\
\sin j \sin\sigma &= \sin\iota \sin(\vartheta+\tau v)+\Sigma \sin\iota_n \sin(\vartheta_n+\tau v)
\end{aligned}
\right\} \tag{23b}
$$

oder:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sin j \cos(\sigma-\Theta) &= \sin\iota+\Sigma \sin\iota_n \cos(\vartheta_n-\vartheta) \\
\sin j \sin(\sigma-\Theta) &= \qquad\quad \Sigma \sin\iota_n \sin(\vartheta_n-\vartheta).
\end{aligned}
\right\} \tag{23c}
$$

Während i und Ω in der elliptischen Bewegung Konstanten bezeichnen, repräsentieren $\sin j$ und σ (analog wie beim Radius Vektor η und π) in der Gyldén'schen Bahn mit der Zeit langsam veränderliche Größen, durch deren Einführung Gyldén das Auftreten der säkularen Glieder der alten Störungstheorie vermeidet. Und es soll noch bemerkt werden, daß im Ausdruck (13) der Entwicklung für die Derivierte Z, da $\sin j$ dem η entspricht, nicht nur Glieder, welche die erste Potenz der Funktionen η und η' enthalten, ersten Grade sind, sondern auch solche, welche die erste Potenz des Sinus der Neigung der Bahnebene enthalten, als Glieder ersten Grades zu bezeichnen sind; ebenso sind Glieder zweiten Grades solche, welche entweder das Quadrat von η und η' oder den Sinussen der Neigungen, oder auch das Produkt zweier dieser Größen enthalten etc.

Durch Betrachtungen, die den in Abteilung I (cf. S. 369 und 381) für P und Q angestellten völlig analog sind und auf die wir sogleich bei Untersuchung von Z näher eingehen werden, erkennt man, wie hier der Übersichtlichkeit halber der nachfolgenden Betrachtung vorweg entnommen sei, daß der unbestimmte Integralansatz für $\mathfrak{Z}$ in:

$$\mathfrak{z} = (\mathfrak{z})+\mathfrak{Z}$$

---

[1] In Ergänzung des Abteilung I beigegebenen Druckfehlerverzeichnisses sei hier bemerkt, daß auf S. 393, Abteilung I, im Ausdruck für η^2 der Faktor 2 einigemale fehlt; auf S. 427 ist der Ausdruck für η^2 (der auf S. 393 richtig abgeleitet ist), unrichtig zitiert und durch den Wert von S. 393 zu ersetzen.

für den Typus $\frac{2}{3}$ die folgende Form hat:

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\mathfrak{Z} = \varepsilon_1 \sin j \sin(6w-\mathfrak{v}) + \varepsilon_2 \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}_1) & \\
+\varepsilon_3 \eta \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-v) & +\varepsilon_7 \eta \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-v) \\
+\varepsilon_4 \eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+v) & +\varepsilon_8 \eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+v) \\
+\varepsilon_5 \eta' \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-v_1) & +\varepsilon_9 \eta' \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-v_1) \\
+\varepsilon_6 \eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+v_1) & +\varepsilon_{10} \eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+v_1) \\
+\varepsilon_{11} \eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-v) & +\varepsilon_{15} \eta \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-v) \\
+\varepsilon_{12} \eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-v_1) & +\varepsilon_{16} \eta' \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-v_1) \\
+\varepsilon_{13} \eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-v) & +\varepsilon_{17} \eta \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-v) \\
+\varepsilon_{14} \eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-v_1) & +\varepsilon_{18} \eta' \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-v_1).
\end{array}
\right\} \quad (24)
$$

Hier sind sämtliche Argumente kurzperiodisch charakteristisch (Form D), und es sei bemerkt, daß die langperiodisch charakteristischen Glieder (Form C) in $\mathfrak{Z}$ deshalb nicht in Betracht kommen, weil auf der rechten Seite der Differentialgleichung für $\mathfrak{z}$ die Funktion S nicht wie bei ρ für sich auftritt und daher $\mathfrak{z}$ keine Glieder zweiten Grades enthalten wird, welche nicht rein erster Ordnung wären; mit anderen Worten es wäre $\mathfrak{Z}_l = m'$, fiele also in die Kategorie der gewöhnlichen Glieder. Während in der Differentialgleichung für ρ auf der rechten Seite die Funktion S für sich allein auftritt, die selbst schon Glieder enthält, die groß sind im Vergleich zur störenden Masse, indem: $S_l = \frac{m'}{\delta_1}$. Und ferner können offenbar in $\mathfrak{Z}$ keine Glieder nullten Grades auftreten, weil alle Glieder der Gleichung (12) mit einer der Funktionen:

$$\mathfrak{z} = \sin j \sin \mathfrak{v} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{z}' = \sin j' \sin \mathfrak{v}_1$$

multipliziert und somit ersten Grades werden, da ja Glieder in $\sin j$ und $\sin j'$, analog wie solche in η und η' vom ersten Grade sind. Mithin verschwinden mit den Neigungen auch die Störungen der Bahnebene, während die Störungen im Radius Vector nicht mit den Exzentrizitäten verschwinden.

II. Die Bestimmung der »elementären« und »charakteristischen« Glieder ersten und zweiten Grades in der Derivierten Z für den Typus 2/3.

Um die langperiodischen und kurzperiodischen elementären und charakteristischen Glieder im Ausdruck (13) der Derivierten Z zu bestimmen, müssen wir wieder diejenigen Werte von n aufsuchen, für welche der Faktor von v in den Argumenten der einzelnen Glieder von (13) Null oder Eins wird (cf. I, S. 368). Dabei fassen wir wie gesagt bloß die Glieder der Form A, B, D, nicht aber die der Form C ins Auge, da S in der Gleichung für $\mathfrak{z}$ rechts nicht für sich allein auftritt; während in P und Q eben die Glieder der Form C mitzunehmen waren, weil in der Gleichung für ρ rechts S für sich allein auftrat und diese Größe außer Gliedern von der Ordnung m' (das sind die Glieder in den a-Koeffizienten, cf. I, S. 381) auch noch solche von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$ enthält (die Glieder in α_2, α_3, α_{14}, α_{15}, α_{16}), die zwar bei der Integration in ρ nicht vergrößert erscheinen (cf. I, S. 368 und 380), die aber schon an sich groß sind, eben von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$ und nicht von der Ordnung m'.

Mit Hinblick auf die Bedeutung der Argumente (cf. I, S. 343, 348, 369):

$$w = n(1-\mu_2)v - nB - n\mu T_l;\quad \mathrm{v} = (1-\varsigma)v - \pi;\quad \mathfrak{v} = (1+\tau)v - \sigma;\quad 1-\mu_2 = \frac{1+\delta_2}{3}$$

wird nun in Z der Faktor von v im ersten und dritten Glied $n(1-\mu_2)+1$, also gleich 1 für $n=0$; es ergeben sich somit die beiden kurzperiodischen Glieder $C^{(+1)}_{0.1.0}\sin j \sin \mathfrak{v}$ und $C^{(+1)}_{0.0.1}\sin j' \sin \mathfrak{v}_1$. Im zweiten und vierten Glied wird der Faktor von v gleich $n(1-\mu_2)-1$, also gleich -1 für $n=0$; das gibt die beiden kurzperiodischen Glieder $-C^{(-1)}_{0.1.0}\sin j \sin \mathfrak{v}$ und $-C^{(-1)}_{0.0.1}\sin j' \sin \mathfrak{v}_1$; ferner nahe gleich 0 für $n=3$; die so entstehenden Glieder kommen aber, weil von der Form C, nicht in Betracht; schließlich nahe gleich $+1$ für $n=6$; das gibt die zwei kurzperiodischen Glieder $C^{(-1)}_{6.1.0}\sin j \sin(6w-\mathfrak{v})$ und $C^{(-1)}_{6.0.1}\sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}_1)$. Hingegen ergeben offenbar das 5., 6. und ebenso das 13. und 14. Glied keine lang- oder kurzperiodischen Glieder. Im 7., 8., 9., 10. Glied, und ebenso im 15, 16., 17., 18., Glied wird der Faktor von v gleich $n(1-\mu_2)$, also gleich 0 für $n=0$, und nahe $=1$ für $n=3$.

Der erstere Wert von n ergibt die langperiodischen Glieder:

$$\begin{array}{ll}
C^{(+1)}_{0.1.0.1.0}\,\eta \sin j \sin(\mathfrak{v}-\mathrm{v}), & C^{(+1)}_{0.1.0.0.1}\,\eta' \sin j \sin(\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1),\\
-C^{(-1)}_{0.1.0.1.0}\,\eta \sin j \sin(\mathfrak{v}-\mathrm{v}), & -C^{(-1)}_{0.1.0.0.1}\,\eta' \sin j \sin(\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1),\\
C^{(+1)}_{0.0.1.1.0}\,\eta \sin j' \sin(\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}), & C^{(+1)}_{0.0.1.0.1}\,\eta' \sin j' \sin(\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1).\\
-C^{(-1)}_{0.0.1.1.0}\,\eta \sin j' \sin(\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}), & -C^{(-1)}_{0.0.1.0.1}\,\eta' \sin j' \sin(\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1).
\end{array}$$

Der zweite n-Wert ergibt die kurzperiodischen Glieder:

$$\begin{array}{ll}
C^{(+1)}_{3.1.0.1.0}\,\eta \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}), & C^{(+1)}_{3.1.0.0.1}\,\eta' \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1),\\
C^{(-1)}_{3.1.0.1.0}\,\eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}), & C^{(-1)}_{3.1.0.0.1}\,\eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1),\\
C^{(+1)}_{3.0.1.1.0}\,\eta \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}), & C^{(+1)}_{3.0.1.0.1}\,\eta' \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1),\\
C^{(-1)}_{3.0.1.1.0}\,\eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}), & C^{(-1)}_{3.0.1.0.1}\,\eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1).
\end{array}$$

Im 11., 12., 19. und 20. Glied schließlich wird der Faktor von v gleich $n(1-\mu_2)-2$. Für $n=3$ wird er nahe nahe gleich -1; für $n=6$ wird er Null und für $n=9$ nahe gleich $+1$. Somit folgen für $n=3$ und $n=9$ die kurzperiodischen Glieder:

$$\begin{array}{ll}
C^{(-2)}_{3.1.0.1.0}\,\eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}), & C^{(-2)}_{3.1.0.0.1}\,\eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1),\\
C^{(-2)}_{3.0.1.1.0}\,\eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}), & C^{(-2)}_{3.0.1.0.1}\,\eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1),
\end{array}$$

und:

$$\begin{array}{ll}
C^{(-2)}_{9.1.0.1.0}\,\eta \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}), & C^{(-2)}_{9.1.0.0.1}\,\eta' \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1),\\
C^{(-2)}_{9.0.1.1.0}\,\eta \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}), & C^{(-2)}_{9.0.1.0.1}\,\eta' \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1).
\end{array}$$

Die für $n=6$ entstehenden langperiodischen charakteristischen Glieder (Form C) kommen wie gesagt nicht in Betracht. Von den angeführten 30 Gliedern fallen indes 6 Glieder fort, da, wie wir in Abteilung III bei Zusammenstellung der für die numerische Rechnung nöthigen Ausdrücke der C-Koeffizienten für den Typus $\frac{2}{3}$ sehen werden, allgemein:

$$C^{(-1)}_{0.1.0} = C^{(-1)}_{0.0.1} = C^{(-1)}_{0.1.0.1.0} = C^{(-1)}_{0.1.0.0.1} = C^{(-1)}_{0.0.1.1.0} = C^{(-1)}_{0.0.1.0.1} = C^{-1.1.0}_{0.1.0} = C^{-1.1.0}_{0.0.1} = 0$$

und wie gleich für die zweite Ordnung erwähnt sei:

$$\left.\begin{array}{c}
C^{-1.0.1}_{0.0.0.1.0} = C^{-1.0.1}_{0.0.0.0.1} = C^{-1.1.0}_{0.1.0.1.0} = C^{-1.1.0}_{0.1.0.0.1} = C^{-2.1.0}_{0.1.0.1.0} = C^{-2.1.0}_{0.1.0.0.1} = C^{-1.1.0}_{0.0.1.1.0} = 0\\
C^{-1.1.0}_{0.0.1.0.1} = C^{-2.1.0}_{0.0.1.1.0} = C^{-2.1.0}_{0.0.1.0.1} = 0
\end{array}\right\} \quad (25)$$

ist. Damit sind die in Betracht kommenden Glieder erster Ordnung erschöpft.

Um zunächst die Glieder zweiter Ordnung für den ersten Grad, und zwar die aus dem 21. Glied $C^{0.1}_{n.0.0}\mathfrak{Z}_1 \cos nw$ mitzunehmenden Glieder zu bestimmen, hat man bei Bildung dieses Produktes nach dem Vorhergehenden:

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{e}_1 \sin j \sin (6w - \mathfrak{v}) + \mathfrak{e}_2 \sin j' \sin (6w - \mathfrak{v}_1)$$

zu setzen und erhält daher:

1. für $n = 0$ die kurzperiodischen Glieder:

$$C^{0.1}_{0.0.0}\, \mathfrak{e}_1 \sin j \sin (6w - \mathfrak{v}) \quad \text{und} \quad C^{0.1}_{0.0.0}\, \mathfrak{e}_2 \sin j' \sin (6w - \mathfrak{v}_1),$$

während die Glieder der Form C fortfallen.

2. Für $n = 6$ die kurzperiodischen Glieder:

$$-\frac{1}{2}\, C^{0.1}_{6.0.0}\, \mathfrak{e}_1 \sin j \sin \mathfrak{v} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2}\, C^{0.1}_{6.0.0}\, \mathfrak{e}_2 \sin j' \sin \mathfrak{v}_1.$$

Die Glieder zweiter Ordnung ersten Grades ferner, die aus dem 22. bis 29. Glied in Z hervorgehen, folgen durch ganz analoge Schlüsse, wie die entsprechenden Glieder in P (cf. I, S. 370—372). Analog wie dort (S. 373) erhält man das Resultat:

$$\left.\begin{aligned}
&+\{C^{+1.1.0}_{3.1.0} \sin j \sin (3w+\mathfrak{v}) + C^{-1.1.0}_{9.1.0} \sin j \sin (9w - \mathfrak{v})\\
&+C^{+1.1.0}_{3.0.1} \sin j' \sin (3w+\mathfrak{v}_1) + C^{-1.1.0}_{9.0.1} \sin j' \sin (9w - \mathfrak{v}_1)\} \,.\, R_k\\
&+\{C^{+1.1.0}_{0.1.0} \sin j \sin \mathfrak{v} \qquad + C^{-1.1.0}_{3.1.0} \sin j \sin (3w - \mathfrak{v}) + C^{-1.1.0}_{6.1.0} \sin j \sin (6w - \mathfrak{v})\\
&+C^{+1.1.0}_{0.0.1} \sin j' \sin \mathfrak{v}_1 \qquad + C^{-1.1.0}_{3.0.1} \sin j' \sin (3w - \mathfrak{v}_1) + C^{-1.1.0}_{6.0.1} \sin j' \sin (6w - \mathfrak{v}_1)\} \,.\, (R_l + R_k)\\
&-\{3C^{(+1)}_{3.1.0} \sin j \cos (3w+\mathfrak{v}) + 3C^{(-1)}_{3.1.0} \sin j \cos (3w - \mathfrak{v})\\
&+3C^{(+1)}_{3.0.1} \sin j' \cos (3w+\mathfrak{v}_1) + 3C^{(-1)}_{3.0.1} \sin j' \cos (3w - \mathfrak{v}_1)\\
&+6C^{(-1)}_{6.1.0} \sin j \cos (6w - \mathfrak{v}) + 9C^{(-1)}_{9.1.0} \sin j \cos (9w - \mathfrak{v}) + 12C^{(-1)}_{12.1.0} \sin j \cos (12w - \mathfrak{v})\\
&+6C^{(-1)}_{6.0.1} \sin j' \cos (6w - \mathfrak{v}_1) + 9C^{(-1)}_{9.0.1} \sin j' \cos (9w - \mathfrak{v}_1) + 12C^{(-1)}_{12.0.1} \sin j' \cos (12w - \mathfrak{v}_1)\} \,.\, \mu(K_k + K_g).
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Setzt man in diesen Produkten entsprechend den für R und K früher ermittelten Werten (cf. I, S. 381 und 382) bezüglich:

$$R_k = \beta_1 \cos 3w; \quad R_l + R_k = \beta_1 \cos 3w; \quad K_k + K_g = \gamma_1 \sin 3w,$$

so erhält man die aus dem 22. bis 29. Glied von Z folgenden mitzunehmenden Glieder zweiter Ordnung ersten Grades der Form A, B, D. Setzt man hingegen:

$$\begin{aligned}
R_k &= \beta_4 \eta \cos (6w - \mathrm{v}) + \beta_5 \eta' \cos (6w - \mathrm{v}_1)\\
R_l + R_k &= \beta_2 \eta \cos (3w - \mathrm{v}) + \beta_4 \eta \cos (6w - \mathrm{v})\\
&\quad + \beta_3 \eta' \cos (3w - \mathrm{v}_1) + \beta_5 \eta' \cos (6w - \mathrm{v}_1)\\
K_k + K_g &= \gamma_4 \eta \sin (6w - \mathrm{v}) + \gamma_6 \eta \sin (3w + \mathrm{v})\\
&\quad + \gamma_5 \eta' \sin (6w - \mathrm{v}_1),
\end{aligned}$$

so erhält man die aus dem 31. bis 38. Glied von Z sich ergebenden Glieder der Form A, B, D zweiter Ordnung zweiten Grades. Das Ergebnis der Ausmultiplikation der periodischen Aggregate (26) geben wir im Schlußresultate an.

Um die aus dem 30. Gliede von Z hervorgehenden Glieder zweiter Ordnung zweiten Grades der Form A, B, D zu erhalten, ist zu setzen:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Z}_2 = {} & \varepsilon_3 \eta \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && +\varepsilon_7 \eta \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\
& +\varepsilon_4 \eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) && +\varepsilon_8 \eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) \\
& +\varepsilon_5 \eta' \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) && +\varepsilon_9 \eta' \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) \\
& +\varepsilon_6 \eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1) && +\varepsilon_{10} \eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1) \\
& +\varepsilon_{11} \eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && +\varepsilon_{15} \eta \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) \\
& +\varepsilon_{12} \eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) && +\varepsilon_{16} \eta' \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +\varepsilon_{13} \eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) && +\varepsilon_{17} \eta \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\
& +\varepsilon_{14} \eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) && +\varepsilon_{18} \eta' \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1).
\end{aligned}
$$

Das Produkt $\Sigma C^{0.1}_{n.0.0} \mathfrak{Z}_2 \cos nw$ ergibt dann offenbar:

1. Für $n = 0$ die kurzperiodischen Glieder:

$$
\begin{aligned}
& +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_3 \eta \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_7 \eta \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\
& +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_4 \eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) && +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_8 \eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) \\
& +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_5 \eta' \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) && +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_9 \eta' \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) \\
& +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_6 \eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1) && +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_{10} \eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1) \\
& +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_{11} \eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_{15} \eta \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) \\
& +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_{12} \eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) && +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_{16} \eta' \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_{13} \eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) && +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_{17} \eta \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\
& +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_{14} \eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) && +C^{0.1}_{0.0.0} \varepsilon_{18} \eta' \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1).
\end{aligned}
$$

2. Für $n = 3$ die langperiodischen Glieder:

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0} \varepsilon_3 \eta \sin j \sin(\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && +\frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0} \varepsilon_7 \eta \sin j' \sin(\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\
& -\frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0} \varepsilon_4 \eta \sin j \sin(\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && -\frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0} \varepsilon_8 \eta \sin j' \sin(\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\
& +\frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0} \varepsilon_5 \eta' \sin j \sin(\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) && +\frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0} \varepsilon_9 \eta' \sin j' \sin(\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) \\
& -\frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0} \varepsilon_6 \eta' \sin j \sin(\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) && -\frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0} \varepsilon_{10} \eta' \sin j' \sin(\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1).
\end{aligned}
$$

3. Für $n = 6$ die kurzperiodischen Glieder:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0} \varepsilon_3 \eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) && -\frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0} \varepsilon_7 \eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) \\
& -\frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0} \varepsilon_4 \eta \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && -\frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0} \varepsilon_8 \eta \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\
& -\frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0} \varepsilon_5 \eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1) && -\frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0} \varepsilon_9 \eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{6}\eta'\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-v_1)-\frac{1}{2}C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{10}\eta'\sin j'\sin(3w+\mathfrak{v}_1-v_1)$$
$$+\frac{1}{2}C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{11}\eta\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v)+\frac{1}{2}C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{15}\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v)$$
$$+\frac{1}{2}C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{12}\eta'\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v_1)+\frac{1}{2}C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{16}\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v_1)$$
$$+\frac{1}{2}C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{13}\eta\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v)+\frac{1}{2}C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{17}\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v)$$
$$+\frac{1}{2}C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{14}\eta'\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v_1)+\frac{1}{2}C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{18}\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v_1).$$

Das Produkt:

$$\mathfrak{Z}_1\left\{\sum C^{+1.0.1}_{n.0.0.1.0}\eta\cos(nw+v)+C^{-1.0.1}_{n.0.0.1.0}\eta\cos(nw-v)\right.$$
$$\left.+\sum C^{+1.0.1}_{n.0.0.0.1}\eta'\cos(nw+v_1)+C^{-1.0.1}_{n.0.0.0.1}\eta'\cos(nw-v_1)\right\}$$

ergibt:

1. Für $n=3$ die kurzperiodischen Glieder:

$$+\frac{1}{2}C^{+1.0.1}_{3.0.0.1.0}\varepsilon_1\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v)+\frac{1}{2}C^{+1.0.1}_{3.0.0.1.0}\varepsilon_2\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v)$$
$$+\frac{1}{2}C^{+1.0.1}_{3.0.0.0.1}\varepsilon_1\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v_1)+\frac{1}{2}C^{+1.0.1}_{3.0.0.0.1}\varepsilon_2\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v_1)$$
$$+\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{3.0.0.1.0}\varepsilon_1\eta\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v)+\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{3.0.0.1.0}\varepsilon_1\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v)$$
$$+\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{3.0.0.1.0}\varepsilon_2\eta\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v)+\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{3.0.0.1.0}\varepsilon_2\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v)$$
$$+\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{3.0.0.0.1}\varepsilon_1\eta'\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v_1)+\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{3.0.0.0.1}\varepsilon_1\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v_1)$$
$$+\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{3.0.0.0.1}\varepsilon_2\eta'\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v_1)+\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{3.0.0.0.1}\varepsilon_2\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v_1).$$

2. Für $n=6$ die langperiodischen Glieder:

$$-\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{6.0.0.1.0}\varepsilon_1\eta\sin j\sin(\mathfrak{v}-v)-\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{6.0.0.1.0}\varepsilon_2\eta\sin j'\sin(\mathfrak{v}_1-v)$$
$$-\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{6.0.0.0.1}\varepsilon_1\eta'\sin j\sin(\mathfrak{v}-v_1)-\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{6.0.0.0.1}\varepsilon_2\eta'\sin j'\sin(\mathfrak{v}_1-v_1).$$

3. Für $n=9$ die kurzperiodischen Glieder:

$$-\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{9.0.0.1.0}\varepsilon_1\eta\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-v)-\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{9.0.0.1.0}\varepsilon_2\eta\sin j'\sin(3w+\mathfrak{v}_1-v)$$
$$-\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{9.0.0.0.1}\varepsilon_1\eta'\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-v_1)-\frac{1}{2}C^{-1.0.1}_{9.0.0.0.1}\varepsilon_2\eta'\sin j'\sin(3w+\mathfrak{v}_1-v_1).$$

Schließlich erhält man die aus dem 43. bis 74. Glied von Z, das heißt die aus den Produkten:

$$R_0 \left\{ C^{+2.1.0}_{n.1.0.1.0}\,\eta \sin j \sin(nw+\mathfrak{v}+v) + \ldots + \sum C^{-2.1.0}_{n.0.1.0.1}\,\eta' \sin j' \sin(nw-\mathfrak{v}_1-v_1) \right\}$$

und:

$$-\mu K_0 \left\{ \sum n\,C^{+2}_{n.1.0.1.0}\,\eta \sin j \cos(nw+\mathfrak{v}+v) + \ldots + \sum n\,C^{-2}_{n.0.1.0.1}\,\eta' \sin j' \cos(nw-\mathfrak{v}_1-v_1) \right\}$$

sich ergebenden mitzunehmenden Glicder der Form A, B, D, indem man in den Argumenten dieser Glieder bezüglich $n = 0, 3, 6, 12$ setzt, ferner für R_0 und K_0, da $b_0 = m'$ ist, die Wertc:

$$R_0 = \beta_1 \cos 3w, \quad K_0 = \gamma_1 \sin 3w$$

einführt und die periodischen Aggregate ausmultipliziert. Führt man diese und ebenso die durch die Gleichungen (26) vorgeschriebenen Multiplikationen aus und faßt die Glieder gleicher Argumente, der so entstehenden sowohl wie der schon gcfundcnen Glieder zusammen, so erhält man für Z einen Ausdruck der folgenden Form:

$$\left.\begin{aligned}
Z = Z_1 + Z_2 = {} & z_1 \sin j \sin \mathfrak{v} && + z_3 \sin j \sin(6w-\mathfrak{v}) \\
& + z_2 \sin j' \sin \mathfrak{v}_1 && + z_4 \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}_1) \\
& + z_5\,\eta \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-v) && + z_9\,\eta \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-v) \\
& + z_6\,\eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+v) && + z_{10}\,\eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+v) \\
& + z_7\,\eta' \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-v_1) && + z_{11}\,\eta' \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-v_1) \\
& + z_8\,\eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+v_1) && + z_{12}\,\eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+v_1) \\
& + z_{13}\,\eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-v) && + z_{17}\,\eta \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-v) \\
& + z_{14}\,\eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-v_1) && + z_{18}\,\eta' \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-v_1) \\
& + z_{15}\,\eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-v) && + z_{19}\,\eta \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-v) \\
& + z_{16}\,\eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-v_1) && + z_{20}\,\eta' \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-v_1) \\
& + z_{21}\,\eta \sin j \sin(\mathfrak{v}-v) && + z_{23}\,\eta \sin j' \sin(\mathfrak{v}_1-v) \\
& + z_{22}\,\eta' \sin j \sin(\mathfrak{v}-v_1) && + z_{24}\,\eta' \sin j' \sin(\mathfrak{v}_1-v_1).
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Die Koeffizienten dieses Ausdruckes aber sind Funktionen der berechenbaren C-Koeffizienten sowohl wie der Unbekannten des Problems: β, γ, ε und haben folgende Werte:

1. Grad. Koeffizienten in Z_1:

$$\left.\begin{aligned}
z_1 &= C^{(+1)}_{0.1.0} + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{3.1.0}\beta_1 - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_1 + \frac{3}{2}\mu C^{(+1)}_{3.1.0}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{(-1)}_{3.1.0}\gamma_1 - \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_1 \\
z_2 &= C^{(+1)}_{0.0.1} + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{3.0.1}\beta_1 - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_1 + \frac{3}{2}\mu C^{(+1)}_{3.0.1}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{(-1)}_{3.0.1}\gamma_1 - \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_2 \\
z_3 &= C^{(-1)}_{6.1.0} + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{9.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_1 - \frac{3}{2}\mu C^{(-1)}_{3.1.0}\gamma_1 + \frac{9}{2}\mu C^{(-1)}_{9.1.0}\gamma_1 + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_1 \\
z_4 &= C^{(-1)}_{6.0.1} + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{9.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_1 - \frac{3}{2}\mu C^{(-1)}_{3.0.1}\gamma_1 + \frac{9}{2}\mu C^{(-1)}_{9.0.1}\gamma_1 + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_2.
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

2. Grad. Koeffizienten in Z_2.

$$
\begin{aligned}
z_5 = {} & C^{(+1)}_{3.1.0.1.0} + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.1.0.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{6.1.0.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.1.0}\beta_2 - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_4 \\
& + 3\mu C^{+1}_{6.1.0.1.0}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{(-1)}_{3.1.0}\gamma_4 - \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{9.0.0.1.0}\varepsilon_1 + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_3 - \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_6 = {} & C^{(-1)}_{3.1.0.1.0} - \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.1.0.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.1.0.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.1.0}\beta_2 \\
& + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{9.1.0}\beta_4 + 3\mu C^{-1}_{6.1.0.1.0}\gamma_1 + \frac{9}{2}\mu C^{(-1)}_{9.1.0}\gamma_4 + \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{3.0.0.1.0}\varepsilon_1 \\
& - \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_3 + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_7 = {} & C^{(+1)}_{3.1.0.0.1} + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.1.0.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{6.1.0.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.1.0}\beta_3 - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_5 \\
& + 3\mu C^{+1}_{6.1.0.0.1}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{(-1)}_{3.1.0}\gamma_5 - \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{9.0.0.0.1}\varepsilon_1 + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_5 \\
& - \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_8 = {} & C^{(-1)}_{3.1.0.0.1} - \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.1.0.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.1.0.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.1.0}\beta_3 \\
& + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{9.1.0}\beta_5 + 3\mu C^{-1}_{6.1.0.0.1}\gamma_1 + \frac{9}{2}\mu C^{(-1)}_{9.1.0}\gamma_5 + \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{3.0.0.0.1}\varepsilon_1 \\
& - \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_5 + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_9 = {} & C^{(+1)}_{3.0.1.1.0} + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.0.1.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{6.0.1.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_2 - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_4 + 3\mu C^{+1}_{6.0.1.1.0}\gamma_1 \\
& - \frac{3}{2}\mu C^{(-1)}_{3.0.1}\gamma_4 - \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{9.0.0.1.0}\varepsilon_2 + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_7 - \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{10} = {} & C^{(-1)}_{3.0.1.1.0} - \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.0.1.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.0.1.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.0.1}\beta_2 - \\
& + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{9.0.1}\beta_4 + 3\mu C^{-1}_{6.0.1.1.0}\gamma_1 + \frac{9}{2}\mu C^{(-1)}_{9.0.1}\gamma_4 + \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{3.0.0.1.0}\varepsilon_2 - \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_7 + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{11} = {} & C^{(+1)}_{3.0.1.0.1} + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.0.1.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{6.0.1.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_3 \\
& - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_5 + 3\mu C^{+1}_{6.0.1.0.1}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{(-1)}_{3.0.1}\gamma_5 - \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{9.0.0.0.1}\varepsilon_2 + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_9 - \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{12} = {} & C^{(-1)}_{3.0.1.0.1} - \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.0.1.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.0.1.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.0.1}\beta_3 \\
& + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{9.0.1}\beta_5 + 3\mu C^{-1}_{6.0.1.0.1}\gamma_1 + \frac{9}{2}\mu C^{(-1)}_{9.0.1}\gamma_5 + \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{3.0.0.0.1}\varepsilon_2 \\
& - \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_9 + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_{10}
\end{aligned}
\qquad (29)
$$

$$\left.\begin{aligned}
z_{13} = {} & C^{(-2)}_{3.1.0.1.0} - \frac{1}{2} C^{+2.1.0}_{0.1.0.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-2.1.0}_{6.1.0.1.0}\beta_1 - \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.1.0}\beta_2 - \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{3.1.0}\beta_4 \\
& + 3\mu C^{-2}_{6.1.0.1.0}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{(+1)}_{3.1.0}\gamma_4 + 3\mu C^{(-1)}_{6.1.0}\gamma_6 \\
& + \frac{1}{2} C^{+1.0.1}_{3.0.0.1.0}\varepsilon_1 + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_{11} + \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{15} \\[2ex]
z_{14} = {} & C^{(-2)}_{3.1.0.0.1} - \frac{1}{2} C^{+2.1.0}_{0.1.0.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-2.1.0}_{6.1.0.0.1}\beta_1 - \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.1.0}\beta_3 - \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{3.1.0}\beta_5 \\
& + 3\mu C^{-2}_{6.1.0.0.1}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{(+1)}_{3.1.0}\gamma_5 + \frac{1}{2} C^{+1.0.1}_{3.0.0.0.1}\varepsilon_1 + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_{12} + \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{16} \\[2ex]
z_{15} = {} & C^{(-2)}_{3.0.1.1.0} - \frac{1}{2} C^{+2.1.0}_{0.0.1.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-2.1.0}_{6.0.1.1.0}\beta_1 - \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_2 - \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{3.0.1}\beta_4 \\
& + 3\mu C^{-2}_{6.0.1.1.0}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{(+1)}_{3.0.1}\gamma_4 + 3\mu C^{(-1)}_{6.0.1}\gamma_6 + \frac{1}{2} C^{+1.0.1}_{3.0.0.1.0}\varepsilon_2 + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_{13} + \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{17} \\[2ex]
z_{16} = {} & C^{(-2)}_{3.0.1.0.1} - \frac{1}{2} C^{+2.1.0}_{0.0.1.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-2.1.0}_{6.0.1.0.1}\beta_1 - \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.0.1}\beta_3 - \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{3.0.1}\beta_5 \\
& + 3\mu C^{-2}_{6.0.1.0.1}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{(+1)}_{3.0.1}\gamma_5 + \frac{1}{2} C^{+1.0.1}_{3.0.0.0.1}\varepsilon_2 + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_{14} + \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{18} \\[2ex]
z_{17} = {} & C^{(-2)}_{9.1.0.1.0} + \frac{1}{2} C^{-2.1.0}_{6.1.0.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-2.1.0}_{12.1.0.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.1.0}\beta_2 \\
& + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_4 - 3\mu C^{-2}_{6.1.0.1.0}\gamma_1 + 6\mu C^{-2}_{12.1.0.1.0}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{(-1)}_{3.1.0}\gamma_4 + 6\mu C^{(-1)}_{12.1.0}\gamma_6 \\
& + \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{3.0.0.1.0}\varepsilon_1 + \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{11} + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_{15} \\[2ex]
z_{18} = {} & C^{(-2)}_{9.1.0.0.1} + \frac{1}{2} C^{-2.1.0}_{6.1.0.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-2.1.0}_{12.1.0.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{1.1.0}_{6.1.0}\beta_3 \\
& + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_5 - 3\mu C^{-2}_{6.1.0.0.1}\gamma_1 + 6\mu C^{-2}_{12.1.0.0.1}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{(-1)}_{3.1.0}\gamma_5 \\
& + \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{3.0.0.0.1}\varepsilon_1 + \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{12} + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_{16} \\[2ex]
z_{19} = {} & C^{(-2)}_{9.0.1.1.0} + \frac{1}{2} C^{-2.1.0}_{6.0.1.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-2.1.0}_{12.0.1.1.0}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.0.1}\beta_2 \\
& + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_4 - 3\mu C^{-2}_{6.0.1.1.0}\gamma_1 + 6\mu C^{-2}_{12.0.1.1.0}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{(-1)}_{3.0.1}\gamma_4 + 6\mu C^{(-1)}_{12.0.1}\gamma_6 + \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{3.0.0.1.0}\varepsilon_2 \\
& + \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{13} + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_{17} \\[2ex]
z_{20} = {} & C^{(-2)}_{9.0.1.0.1} + \frac{1}{2} C^{-2.1.0}_{6.0.1.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-2.1.0}_{12.0.1.0.1}\beta_1 + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.0.1}\beta_3 \\
& + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_5 - 3\mu C^{-2}_{6.0.1.0.1}\gamma_1 + 6\mu C^{-2}_{12.0.1.0.1}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{(-1)}_{3.0.1}\gamma_5 \\
& + \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{3.0.0.0.1}\varepsilon_2 + \frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}\varepsilon_{14} + C^{0.1}_{0.0.0}\varepsilon_{18}
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

$$
\begin{aligned}
z_{21} = {} & C^{(+1)}_{0.1.0.1.0} + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{3.1.0.1.0}\beta_1 - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.1.0.1.0}\beta_1 - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_2 \\
& - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.1.0}\beta_4 + \frac{3}{2}\mu C^{+1}_{3.1.0.1.0}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{-1}_{3.1.0.1.0}\gamma_1 - 3\mu C^{(-1)}_{6.1.0}\gamma_4 \\
& + \frac{3}{2}\mu C^{(+1)}_{3.1.0}\gamma_6 - \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{6.0.0.1.0}\varepsilon_1 + \frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0}\varepsilon_3 - \frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0}\varepsilon_4 \\[1em]
z_{22} = {} & C^{(+1)}_{0.1.0.0.1} + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{3.1.0.0.1}\beta_1 - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.1.0.0.1}\beta_1 - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.1.0}\beta_3 \\
& - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.1.0}\beta_5 + \frac{3}{2}\mu C^{+1}_{3.1.0.0.1}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{-1}_{3.1.0.0.1}\gamma_1 - 3\mu C^{(-1)}_{6.1.0}\gamma_5 \\
& - \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{6.0.0.0.1}\varepsilon_1 + \frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0}\varepsilon_5 - \frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0}\varepsilon_6 \\[1em]
z_{23} = {} & C^{(+1)}_{0.0.1.1.0} + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{3.0.1.1.0}\beta_1 - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.0.1.1.0}\beta_1 - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_2 \\
& - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.0.1}\beta_4 + \frac{3}{2}\mu C^{+1}_{3.0.1.1.0}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{-1}_{3.0.1.1.0}\gamma_1 \\
& - 3\mu C^{(-1)}_{6.0.1}\gamma_4 + \frac{3}{2}\mu C^{(+1)}_{3.0.1}\gamma_6 - \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{6.0.0.1.0}\varepsilon_2 + \frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0}\varepsilon_7 - \frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0}\varepsilon_8 \\[1em]
z_{24} = {} & C^{(+1)}_{0.0.1.0.1} + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{3.0.1.0.1}\beta_1 - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.0.1.0.1}\beta_1 - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.0.1}\beta_3 \\
& - \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.0.1}\beta_5 + \frac{3}{2}\mu C^{+1}_{3.0.1.0.1}\gamma_1 - \frac{3}{2}\mu C^{-1}_{3.0.1.0.1}\gamma_1 \\
& - 3\mu C^{(-1)}_{6.0.1}\gamma_5 - \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{6.0.0.0.1}\varepsilon_2 + \frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0}\varepsilon_9 - \frac{1}{2} C^{0.1}_{3.0.0}\varepsilon_{10}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Ersetzt man in diesen Koeffizienten z_1 bis z_{24} die Werte der γ durch die β mittelst der Formeln (cf. I, S. 399):

$$
\left.
\begin{aligned}
& \gamma_1 = -2\beta_1; \quad \gamma_2 = 3\beta_1 - \frac{3}{2}\beta_2; \quad \gamma_3 = -\frac{3}{2}\beta_3; \quad \gamma_4 = -2\beta_4; \\
& \gamma_5 = -2\beta_5; \quad \gamma_6 = \frac{3}{2}\beta_1
\end{aligned}
\right\}
\tag{30}
$$

und ordnet successive nach den β und den ε, so erhält man Ausdrücke folgender Form:

I. Koeffizienten für den ersten Grad:

$$
\left.
\begin{aligned}
z_1 &= z_1^{(0)} + z_1^{(1)}\beta_1 + z_1^{[1]}\varepsilon_1 \\
z_2 &= z_2^{(0)} + z_2^{(1)}\beta_1 + z_2^{[2]}\varepsilon_2 \\
z_3 &= z_3^{(0)} + z_3^{(1)}\beta_1 + z_3^{[1]}\varepsilon_1 \\
z_4 &= z_4^{(0)} + z_4^{(1)}\beta_1 + z_4^{[2]}\varepsilon_2.
\end{aligned}
\right\}
\tag{31}
$$

II. Koeffizienten für den zweiten Grad:

$$
\left.
\begin{aligned}
z_5 &= z_{5.1} + z_5^{[3]}\,\varepsilon_3 + z_5^{[4]}\,\varepsilon_4 \\
z_6 &= z_{6.1} + z_6^{[3]}\,\varepsilon_3 + z_6^{[4]}\,\varepsilon_4 \\
z_7 &= z_{7.1} + z_7^{[5]}\,\varepsilon_5 + z_7^{[6]}\,\varepsilon_6 \\
z_8 &= z_{8.1} + z_8^{[5]}\,\varepsilon_5 + z_8^{[6]}\,\varepsilon_6 \\
z_9 &= z_{9.1} + z_9^{[7]}\,\varepsilon_7 + z_9^{[8]}\,\varepsilon_8 \\
z_{10} &= z_{10.1} + z_{10}^{[7]}\,\varepsilon_7 + z_{10}^{[8]}\,\varepsilon_8 \\
z_{11} &= z_{11.1} + z_{11}^{[9]}\,\varepsilon_9 + z_{11}^{[10]}\,\varepsilon_{10} \\
z_{12} &= z_{12.1} + z_{12}^{[9]}\,\varepsilon_9 + z_{12}^{[10]}\,\varepsilon_{10} \\
z_{13} &= z_{13.1} + z_{13}^{[11]}\,\varepsilon_{11} + z_{13}^{[15]}\,\varepsilon_{15} \\
z_{14} &= z_{14.1} + z_{14}^{[12]}\,\varepsilon_{12} + z_{14}^{[16]}\,\varepsilon_{16} \\
z_{15} &= z_{15.1} + z_{15}^{[13]}\,\varepsilon_{13} + z_{15}^{[17]}\,\varepsilon_{17} \\
z_{16} &= z_{16.1} + z_{16}^{[14]}\,\varepsilon_{14} + z_{16}^{[18]}\,\varepsilon_{18} \\
z_{17} &= z_{17.1} + z_{17}^{[11]}\,\varepsilon_{11} + z_{17}^{[15]}\,\varepsilon_{15} \\
z_{18} &= z_{18.1} + z_{18}^{[12]}\,\varepsilon_{12} + z_{18}^{[16]}\,\varepsilon_{16} \\
z_{19} &= z_{19.1} + z_{19}^{[13]}\,\varepsilon_{13} + z_{19}^{[17]}\,\varepsilon_{17} \\
z_{20} &= z_{20.1} + z_{20}^{[14]}\,\varepsilon_{14} + z_{20}^{[18]}\,\varepsilon_{18} \\
z_{21} &= z_{21.1} + z_{21}^{[3]}\,\varepsilon_3 + z_{21}^{[4]}\,\varepsilon_4 \\
z_{22} &= z_{22.1} + z_{22}^{[5]}\,\varepsilon_5 + z_{22}^{[6]}\,\varepsilon_6 \\
z_{23} &= z_{23.1} + z_{23}^{[7]}\,\varepsilon_7 + z_{23}^{[8]}\,\varepsilon_8 \\
z_{24} &= z_{24.1} + z_{24}^{[9]}\,\varepsilon_9 + z_{24}^{[10]}\,\varepsilon_{10},
\end{aligned}
\right\}
\qquad (32)
$$

wobei $z_{5.1}$ bis $z_{24.1}$ nur β- und ε-Koeffizienten von Gliedern ersten Grades enthalten, also nach Ausführung der Integration der Differentialgleichung für $\mathfrak{z}$ für den ersten Grad bekannt sind, da durch diese Integration die ε für den ersten Grad bestimmt werden, während die β für den ersten Grad bereits aus Abteilung I bekannt sind. Und zwar bedeutet:

$$
\left.
\begin{aligned}
z_{5.1} &= z_5^{(0)} + z_5^{(1)}\beta_1 + z_5^{(2)}\beta_2 + z_5^{(4)}\beta_4 + z_5^{[1]}\varepsilon_1 \\
z_{6.1} &= z_6^{(0)} + z_6^{(1)}\beta_1 + z_6^{(2)}\beta_2 + z_6^{(4)}\beta_4 + z_6^{[1]}\varepsilon_1 \\
z_{7.1} &= z_7^{(0)} + z_7^{(1)}\beta_1 + z_7^{(3)}\beta_3 + z_7^{(5)}\beta_5 + z_7^{[1]}\varepsilon_1 \\
z_{8.1} &= z_8^{(0)} + z_8^{(1)}\beta_1 + z_8^{(3)}\beta_3 + z_8^{(5)}\beta_5 + z_8^{[1]}\varepsilon_1 \\
z_{9.1} &= z_9^{(0)} + z_9^{(1)}\beta_1 + z_9^{(2)}\beta_2 + z_9^{(4)}\beta_4 + z_9^{[2]}\varepsilon_2 \\
z_{10.1} &= z_{10}^{(0)} + z_{10}^{(1)}\beta_1 + z_{10}^{(2)}\beta_2 + z_{10}^{(4)}\beta_4 + z_{10}^{[2]}\varepsilon_2 \\
z_{11.1} &= z_{11}^{(0)} + z_{11}^{(1)}\beta_1 + z_{11}^{(3)}\beta_3 + z_{11}^{(5)}\beta_5 + z_{11}^{[2]}\varepsilon_2 \\
z_{12.1} &= z_{12}^{(0)} + z_{12}^{(1)}\beta_1 + z_{12}^{(3)}\beta_3 + z_{12}^{(5)}\beta_5 + z_{12}^{[2]}\varepsilon_2 \\
z_{13.1} &= z_{13}^{(0)} + z_{13}^{(1)}\beta_1 + z_{13}^{(2)}\beta_2 + z_{13}^{(4)}\beta_4 + z_{13}^{[1]}\varepsilon_1 \\
z_{14.1} &= z_{14}^{(0)} + z_{14}^{(1)}\beta_1 + z_{14}^{(3)}\beta_3 + z_{14}^{(5)}\beta_5 + z_{14}^{[1]}\varepsilon_1
\end{aligned}
\right|
\qquad (32a)
$$

$$\left.\begin{aligned}
z_{15.1} &= z_{15}^{(0)}+z_{15}^{(1)}\beta_1+z_{15}^{(2)}\beta_2+z_{15}^{(4)}\beta_4+z_{15}^{[2]}\varepsilon_2\\
z_{16.1} &= z_{16}^{(0)}+z_{16}^{(1)}\beta_1+z_{16}^{(3)}\beta_3+z_{16}^{(5)}\beta_5+z_{16}^{[2]}\varepsilon_2\\
z_{17.1} &= z_{17}^{(0)}+z_{17}^{(1)}\beta_1+z_{17}^{(2)}\beta_2+z_{17}^{(4)}\beta_4+z_{17}^{[1]}\varepsilon_1\\
z_{18.1} &= z_{18}^{(0)}+z_{18}^{(1)}\beta_1+z_{18}^{(3)}\beta_3+z_{18}^{(5)}\beta_5+z_{18}^{[1]}\varepsilon_1\\
z_{19.1} &= z_{19}^{(0)}+z_{19}^{(1)}\beta_1+z_{19}^{(2)}\beta_2+z_{19}^{(4)}\beta_4+z_{19}^{[2]}\varepsilon_2\\
z_{20.1} &= z_{20}^{(0)}+z_{20}^{(1)}\beta_1+z_{20}^{(3)}\beta_3+z_{20}^{(5)}\beta_5+z_{20}^{[2]}\varepsilon_2\\
z_{21.1} &= z_{21}^{(0)}+z_{21}^{(1)}\beta_1+z_{21}^{(2)}\beta_2+z_{21}^{(4)}\beta_4+z_{21}^{[1]}\varepsilon_1\\
z_{22.1} &= z_{22}^{(0)}+z_{22}^{(1)}\beta_1+z_{22}^{(3)}\beta_3+z_{22}^{(5)}\beta_5+z_{22}^{[1]}\varepsilon_1\\
z_{23.1} &= z_{23}^{(0)}+z_{23}^{(1)}\beta_1+z_{23}^{(2)}\beta_2+z_{23}^{(4)}\beta_4+z_{23}^{[2]}\varepsilon_2\\
z_{24.1} &= z_{24}^{(0)}+z_{24}^{(1)}\beta_1+z_{24}^{(3)}\beta_3+z_{24}^{(5)}\beta_5+z_{24}^{[2]}\varepsilon_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (32a)$$

Dabei sind die sämtlichen z-Koeffizienten der rechten Seiten von (31), (32) und (32a) für den Typus $\frac{2}{3}$ gegeben durch die folgenden Ausdrücke in den C-Koeffizienten, die ihrerseits wieder, genau wie die A- und B-Koeffizienten, aus dem Verhältnis $\frac{a}{a'} = \alpha$ für jeden Planeten des Typus $\frac{2}{3}$ berechenbar sind:

$$z_1^{(0)} = C_{0.1.0}^{(+1)}; \qquad z_1^{(1)} = \frac{1}{2}\,C_{3.1.0}^{+1.1.0} - \frac{1}{2}\,C_{3.1.0}^{-1.1.0} - 3\mu\,C_{3.1.0}^{(+1)} + 3\mu\,C_{3.1.0}^{(-1)}; \qquad z_1^{[1]} = -\frac{1}{2}\,C_{6.0.0}^{0.1}.$$

$$z_2^{(0)} = C_{0.0.1}^{(+1)}; \qquad z_2^{(1)} = \frac{1}{2}\,C_{3.0.1}^{+1.1.0} - \frac{1}{2}\,C_{3.0.1}^{-1.1.0} - 3\mu\,C_{3.0.1}^{(+1)} + 3\mu\,C_{3.0.1}^{(-1)}; \qquad z_2^{[2]} = -\frac{1}{2}\,C_{6.0.0}^{0.1}.$$

$$z_3^{(0)} = C_{6.1.0}^{(-1)}; \qquad z_3^{(1)} = \frac{1}{2}\,C_{3.1.0}^{-1.1.0} + 3\mu\,C_{3.1.0}^{(-1)} + \frac{1}{2}\,C_{9.1.0}^{-1.1.0} - 9\mu\,C_{9.1.0}^{(-1)}; \qquad z_3^{[1]} = C_{0.0.0}^{0.1}.$$

$$z_4^{(0)} = C_{6.0.1}^{(-1)}; \qquad z_4^{(1)} = \frac{1}{2}\,C_{3.0.1}^{-1.1.0} + 3\mu\,C_{3.0.1}^{(-1)} + \frac{1}{2}\,C_{9.0.1}^{-1.1.0} - 9\mu\,C_{9.0.1}^{(-1)}; \qquad z_4^{[2]} = C_{0.0.0}^{0.1}.$$

$$z_5^{(0)} = C_{3.1.0.1.0}^{(+1)}; \qquad z_5^{(1)} = \frac{1}{2}\,C_{0.1.0.1.0}^{+1.1.0} + \frac{1}{2}\,C_{6.1.0.1.0}^{+1.1.0} - 6\mu\,C_{6.1.0.1.0}^{(+1)}; \quad z_5^{(2)} = \frac{1}{2}\,C_{0.1.0}^{+1.1.0};$$

$$z_5^{(4)} = -\frac{1}{2}\,C_{3.1.0}^{-1.1.0} + 3\mu\,C_{3.1.0}^{(-1)}; \qquad z_5^{[1]} = -\frac{1}{2}\,C_{9.0.0.1.0}^{-1.0.1}; \qquad z_5^{[3]} = C_{0.0.0}^{0.1};$$

$$z_5^{[4]} = -\frac{1}{2}\,C_{6.0.0}^{0.1}.$$

$$z_6^{(0)} = C_{3.1.0.1.0}^{(-1)}; \qquad z_6^{(1)} = -\frac{1}{2}\,C_{0.1.0.1.0}^{+1.1.0} + \frac{1}{2}\,C_{6.1.0.1.0}^{-1.1.0} - 6\mu\,C_{6.1.0.1.0}^{-1}; \qquad z_6^{(2)} = \frac{1}{2}\,C_{6.1.0}^{-1.0.1};$$

$$z_6^{(4)} = -9\mu\,C_{9.1.0}^{(-1)} + \frac{1}{2}\,C_{9.1.0}^{-1.1.0}; \qquad z_6^{[1]} = \frac{1}{2}\,C_{3.0.0.1.0}^{-1.0.1};$$

$$z_6^{[3]} = -\frac{1}{2}\,C_{6.0.0}^{0.1}; \qquad z_6^{[4]} = C_{0.0.0}^{0.1}; \qquad (33)$$

$$z_7^{(0)} = C^{(+1)}_{3.1.0.0.1}; \qquad z_7^{(1)} = \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.1.0.0.1} + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{6.1.0.0.1} - 6\mu C^{+1}_{6.1.0.0.1}; \qquad z_7^{(3)} = \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.1.0};$$

$$z_7^{(5)} = -\frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.1.0} + 3\mu C^{(-1)}_{3.1.0}; \qquad z_7^{[1]} = -\frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{9.0.0.0.1}; \qquad z_7^{[5]} = C^{0.1}_{0.0.0};$$

$$z_7^{[6]} = -\frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}.$$

$$z_8^{(0)} = C^{(-1)}_{3.1.0.0.1}; \qquad z_8^{(1)} = -\frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.1.0.0.1} + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.1.0.0.1} - 6\mu C^{-1}_{6.1.0.0.1};$$

$$z_8^{(3)} = \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.1.0}; \qquad z_8^{(5)} = \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{9.1.0} - 9\mu C^{(-1)}_{9.1.0}; \qquad z_8^{[1]} = \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{3.0.0.0.1};$$

$$z_8^{[5]} = -\frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}; \qquad z_8^{[6]} = C^{0.1}_{0.0.0}.$$

$$z_9^{(0)} = C^{(+1)}_{3.0.1.1.0}; \qquad z_9^{(1)} = \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.0.1.1.0} + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{6.0.1.1.0} - 6\mu C^{+1}_{6.0.1.1.0};$$

$$z_9^{(2)} = \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.0.1}; \qquad z_9^{(4)} = -\frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.0.1} + 3\mu C^{(-1)}_{3.0.1}; \qquad z_9^{[2]} = -\frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{9.0.0.1.0};$$

$$z_9^{[7]} = C^{0.1}_{0.0.0}; \qquad z_9^{[8]} = -\frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}.$$

$$z_{10}^{(0)} = C^{(-1)}_{3.0.1.1.0}; \qquad z_{10}^{(1)} = -\frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.0.1.1.0} + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.0.1.1.0} - 6\mu C^{-1}_{6.0.1.1.0};$$

$$z_{10}^{(2)} = \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.0.1}; \qquad z_{10}^{(4)} = \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{9.0.1} - 9\mu C^{(-1)}_{9.0.1}; \qquad z_{10}^{[2]} = \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{3.0.0.1.0};$$

$$z_{10}^{[7]} = -\frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}; \qquad z_{10}^{[8]} = C^{0.1}_{0.0.0}.$$

$$z_{11}^{(0)} = C^{(+1)}_{3.0.1.0.1}; \qquad z_{11}^{(1)} = \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.0.1.0.1} + \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{6.0.1.0.1} - 6\mu C^{+1}_{6.0.1.0.1};$$

$$z_{11}^{(3)} = \frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.0.1}; \qquad z_{11}^{(5)} = -\frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{3.0.1} + 3\mu C^{(-1)}_{3.0.1}; \qquad z_{11}^{[2]} = -\frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{9.0.0.0.1};$$

$$z_{11}^{[9]} = C^{0.1}_{0.0.0}; \qquad z_{11}^{[10]} = -\frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}.$$

$$z_{12}^{(0)} = C^{(-1)}_{3.0.1.0.1}; \qquad z_{12}^{(1)} = -\frac{1}{2} C^{+1.1.0}_{0.0.1.0.1} + \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.0.1.0.1} - 6\mu C^{-1}_{6.0.1.0.1};$$

$$z_{12}^{(3)} = \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{6.0.1}; \qquad z_{12}^{(5)} = \frac{1}{2} C^{-1.1.0}_{9.0.1} - 9\mu C^{(-1)}_{9.0.1}; \qquad z_{12}^{[2]} = \frac{1}{2} C^{-1.0.1}_{3.0.0.0.1};$$

$$z_{12}^{[9]} = -\frac{1}{2} C^{0.1}_{6.0.0}; \qquad z_{12}^{[10]} = C^{0.1}_{0.0.0}. \tag{33}$$

$$\left.\begin{array}{l}
z_{13}^{(0)} = C^{(-2)}_{3.1.0.1.0}\,; \qquad z_{13}^{(1)} = -\frac{1}{2}\,C^{+2.1.0}_{0.1.0.1.0} + \frac{1}{2}\,C^{-2.1.0}_{6.1.0.1.0} - 6\,\mu\,C^{-2}_{6.1.0.1.0} + \frac{9}{2}\,\mu C^{(-1)}_{6.1.0}\,; \\
z_{13}^{(2)} = -\frac{1}{2}\,C^{+1.1.0}_{0.1.0}\,; \qquad z_{13}^{(4)} = -\frac{1}{2}\,C^{+1.1.0}_{3.1.0} + 3\mu C^{(+1)}_{3.1.0}\,; \qquad z_{13}^{[1]} = \frac{1}{2}\,C^{+1.0.1}_{3.0.0.1.0}\,; \\
z_{13}^{[11]} = C^{0.1}_{0.0.0}\,; \qquad z_{13}^{[15]} = \frac{1}{2}\,C^{0.1}_{6.0.0}\,. \\
\hline
z_{14}^{(0)} = C^{(-2)}_{3.1.0.0.1}\,; \qquad z_{14}^{(1)} = -\frac{1}{2}\,C^{+2.1.0}_{0.1.0.0.1} + \frac{1}{2}\,C^{-2.1.0}_{6.1.0.0.1} - 6\,\mu\,C^{-2}_{6.1.0.0.1}\,; \\
z_{14}^{(3)} = -\frac{1}{2}\,C^{+1.1.0}_{0.1.0}\,; \qquad z_{14}^{(5)} = -\frac{1}{2}\,C^{+1.1.0}_{3.1.0} - 3\mu C^{(+1)}_{3.1.0}\,; \qquad z_{14}^{[1]} = \frac{1}{2}\,C^{+1.0.1}_{3.0.0.0.1}\,; \\
z_{14}^{[12]} = C^{0.1}_{0.0.0}\,; \qquad z_{14}^{[16]} = \frac{1}{2}\,C^{0.1}_{6.0.0}. \\
\hline
z_{15}^{(0)} = C^{(-2)}_{3.0.1.1.0}\,; \qquad z_{15}^{(1)} = -\frac{1}{2}\,C^{+2.1.0}_{0.0.1.1.0} + \frac{1}{2}\,C^{-2.1.0}_{6.0.1.1.0} + \frac{9}{2}\,\mu C^{(-1)}_{6.0.1} - 6\,\mu\,C^{-2}_{6.0.1.1.0}\,; \\
z_{15}^{(2)} = -\frac{1}{2}\,C^{+1.1.0}_{0.0.1}\,; \qquad z_{15}^{(4)} = -\frac{1}{2}\,C^{+1.1.0}_{3.0.1} + 3\,\mu\,C^{(+1)}_{3.0.1}\,; \qquad z_{15}^{[2]} = +\frac{1}{2}\,C^{+1.0.1}_{3.0.0.1.0}\,; \\
z_{15}^{[13]} = C^{0.1}_{0.0.0}\,; \qquad z_{15}^{[17]} = \frac{1}{2}\,C^{0.1}_{6.0.0}\,. \\
\hline
z_{16}^{(0)} = C^{(-2)}_{3.0.1.0.1}\,; \qquad z_{16}^{(1)} = -\frac{1}{2}\,C^{+2.1.0}_{0.0.1.0.1} + \frac{1}{2}\,C^{-2.1.0}_{6.0.1.0.1} - 6\,\mu\,C^{-2}_{6.0.1.0.1}\,; \\
z_{16}^{(3)} = -\frac{1}{2}\,C^{+1.1.0}_{0.0.1}\,; \qquad z_{16}^{(5)} = -\frac{1}{2}\,C^{+1.1.0}_{3.0.1} + 3\,\mu\,C^{(+1)}_{3.0.1}\,; \\
z_{16}^{[2]} = \frac{1}{2}\,C^{+1.0.1}_{3.0.0.0.1}\,; \qquad z_{16}^{[14]} = C^{0.1}_{0.0.0}\,; \qquad z_{16}^{[18]} = \frac{1}{2}\,C^{0.1}_{6.0.0}. \\
\hline
z_{17}^{(0)} = C^{(-2)}_{9.1.0.1.0}\,; \qquad z_{17}^{(1)} = \frac{1}{2}\,C^{-2.1.0}_{6.1.0.1.0} + \frac{1}{2}\,C^{-2.1.0}_{12.1.0.1.0} + 6\,\mu C^{-2}_{6.1.0.1.0} - 12\,\mu\,C^{-2}_{12.1.0.1.0} + 9\,\mu\,C^{(-1)}_{12.1.0}\,; \\
z_{17}^{(2)} = \frac{1}{2}\,C^{-1.1.0}_{6.1.0}\,; \qquad z_{17}^{(4)} = \frac{1}{2}\,C^{-1.1.0}_{3.1.0} + 3\,\mu\,C^{(-1)}_{3.1.0}\,; \qquad z_{17}^{[1]} = \frac{1}{2}\,C^{-1.0.1}_{3.0.0.1.0}\,; \\
z_{17}^{[11]} = \frac{1}{2}\,C^{0.1}_{6.0.0}\,; \qquad z_{17}^{[15]} = C^{0.1}_{0.0.0}. \\
\hline
z_{18}^{(0)} = C^{(-2)}_{9.1.0.0.1}\,; \qquad z_{18}^{(1)} = \frac{1}{2}\,C^{-2.1.0}_{6.1.0.0.1} + \frac{1}{2}\,C^{-2.1.0}_{12.1.0.0.1} + 6\,\mu C^{-2}_{6.1.0.0.1} - 12\,\mu C^{-2}_{12.1.0.0.1}\,; \\
z_{18}^{(3)} = \frac{1}{2}\,C^{-1.1.0}_{6.1.0}\,; \qquad z_{18}^{(5)} = \frac{1}{2}\,C^{-1.1.0}_{3.1.0} + 3\,\mu\,C^{(-1)}_{3.1.0}\,; \qquad z_{18}^{[1]} = \frac{1}{2}\,C^{-1.0.1}_{3.0.0.0.1}\,; \\
z_{18}^{[12]} = \frac{1}{2}\,C^{0.1}_{6.0.0}\,; \qquad z_{18}^{[16]} = C^{0.1}_{0.0.0}.
\end{array}\right\}\quad (33)$$

$$z_{19}^{(0)} = C_{9.0.1.1.0}^{(-2)}; \qquad z_{19}^{(1)} = \frac{1}{2} C_{6.0.1.1.0}^{-2.1.0} + \frac{1}{2} C_{12.0.1.1.0}^{-2.1.0} - 12\mu C_{12.0.1.1.0}^{-2} + 6\mu C_{6.0.1.1.0}^{-2} + 9\mu C_{12.0.1}^{(-1)}; \tag{33}$$

$$z_{19}^{(2)} = \frac{1}{2} C_{6.0.1}^{-1.1.0}; \qquad z_{19}^{(4)} = \frac{1}{2} C_{3.0.1}^{-1.1.0} + 3\mu C_{3.0.1}^{(-1)}; \qquad z_{19}^{[2]} = \frac{1}{2} C_{3.0.0.1.0}^{-1.0.1};$$

$$z_{19}^{[13]} = \frac{1}{2} C_{6.0.0}^{0.1}; \qquad z_{19}^{[17]} = C_{0.0.0}^{0.1}$$

$$z_{20}^{(0)} = C_{9.0.1.0.1}^{(-2)}; \qquad z_{20}^{(1)} = \frac{1}{2} C_{6.0.1.0.1}^{-2.1.0} + \frac{1}{2} C_{12.0.1.0.1}^{-2.1.0} - 12\mu C_{12.0.1.0.1}^{-2} + 6\mu C_{6.0.1.0.1}^{-2};$$

$$z_{20}^{(3)} = \frac{1}{2} C_{6.0.1}^{-1.1.0}; \qquad z_{20}^{(5)} = \frac{1}{2} C_{3.0.1}^{-1.1.0} + 3\mu C_{3.0.1}^{(-1)}; \qquad z_{20}^{[2]} = \frac{1}{2} C_{3.0.0.0.1}^{-1.0.1};$$

$$z_{20}^{[14]} = \frac{1}{2} C_{6.0.0}^{0.1}; \qquad z_{20}^{[18]} = C_{0.0.0}^{0.1}.$$

$$z_{21}^{(0)} = C_{0.1.0.1.0}^{(+1)};$$

$$z_{21}^{(1)} = \frac{1}{2} C_{3.1.0.1.0}^{+1.1.0} - \frac{1}{2} C_{3.1.0.1.0}^{-1.1.0} - 3\mu C_{3.1.0.1.0}^{+1} + 3\mu C_{3.1.0.1.0}^{-1} + \frac{9}{4}\mu C_{3.1.0}^{(+1)};$$

$$z_{21}^{(2)} = -\frac{1}{2} C_{3.1.0}^{-1.1.0}; \qquad z_{21}^{(4)} = -\frac{1}{2} C_{6.1.0}^{-1.1.0} + 6\mu C_{6.1.0}^{(-1)}; \qquad z_{21}^{[1]} = -\frac{1}{2} C_{6.0.0.1.0}^{-1.0.1};$$

$$z_{21}^{[3]} = \frac{1}{2} C_{3.0.0}^{0.1}; \qquad z_{21}^{[4]} = -\frac{1}{2} C_{3.0.0}^{0.1}.$$

$$z_{22}^{(0)} = C_{0.1.0.0.1}^{(+1)}; \qquad z_{22}^{(1)} = \frac{1}{2} C_{3.1.0.0.1}^{+1.1.0} - \frac{1}{2} C_{3.1.0.0.1}^{-1.1.0} - 3\mu C_{3.1.0.0.1}^{+1} + 3\mu C_{3.1.0.0.1}^{-1};$$

$$z_{22}^{(3)} = -\frac{1}{2} C_{3.1.0}^{-1.1.0}; \qquad z_{22}^{(5)} = -\frac{1}{2} C_{6.1.0}^{-1.1.0} + 6\mu C_{6.1.0}^{(-1)}; \qquad z_{22}^{[1]} = -\frac{1}{2} C_{6.0.0.0.1}^{-1.0.1};$$

$$z_{22}^{[5]} = \frac{1}{2} C_{3.0.0}^{0.1}; \qquad z_{22}^{[6]} = -\frac{1}{2} C_{3.0.0}^{0.1}.$$

$$z_{23}^{(0)} = C_{0.0.1.1.0}^{(+1)}; \qquad z_{23}^{(1)} = \frac{1}{2} C_{3.0.1.1.0}^{+1.1.0} - \frac{1}{2} C_{3.0.1.1.0}^{-1.1.0} - 3\mu C_{3.0.1.1.0}^{+1} + 3\mu C_{3.0.1.1.0}^{-1} + \frac{9}{4}\mu C_{3.0.1}^{(+1)};$$

$$z_{23}^{(2)} = -\frac{1}{2} C_{3.0.1}^{-1.1.0}; \qquad z_{23}^{(4)} = -\frac{1}{2} C_{6.0.1}^{-1.1.0} + 6\mu C_{6.0.1}^{(-1)}; \qquad z_{23}^{[2]} = -\frac{1}{2} C_{6.0.0.1.0}^{-1.0.1};$$

$$z_{23}^{[7]} = \frac{1}{2} C_{3.0.0}^{0.1}; \qquad z_{23}^{[8]} = -\frac{1}{2} C_{3.0.0}^{0.1}.$$

$$z_{24}^{(0)} = C_{0.0.1.0.1}^{(+1)}; \qquad z_{24}^{(1)} = \frac{1}{2} C_{3.0.1.0.1}^{+1.1.0} - \frac{1}{2} C_{3.0.1.0.1}^{-1.1.0} - 3\mu C_{3.0.1.0.1}^{+1} + 3\mu C_{3.0.1.0.1}^{-1};$$

$$z_{24}^{(3)} = -\frac{1}{2} C_{3.0.1}^{-1.1.0}; \qquad z_{24}^{(5)} = -\frac{1}{2} C_{6.0.1}^{-1.1.0} + 6\mu C_{6.0.1}^{(-1)}; \qquad z_{24}^{[2]} = -\frac{1}{2} C_{6.0.0.0.1}^{-1.0.1};$$

$$z_{24}^{[9]} = \frac{1}{2} C_{3.0.0}^{0.1}; \qquad z_{24}^{[10]} = -\frac{1}{2} C_{3.0.0}^{0.1}.$$

III. Die Integration der Differentialgleichung für $\sin b = \mathfrak{z} = (\mathfrak{z}) + \mathfrak{Z}$ für die Glieder ersten Grades.

a) Übergang von der allgemeinen Form der Differentialgleichung für $\mathfrak{z}$ auf die für den Typus 2/3 zu integrierende Form der Differentialgleichung für $\mathfrak{z}$.

Wir haben in Nr. I dieses Kapitels als Differentialgleichung für $\mathfrak{z}$ die folgende allgemeine Form gefunden:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = +(1+S)^2 Z - (1+S)^2 Q \frac{d\mathfrak{z}}{dv}, \tag{34}$$

die wir für den Typus $\frac{2}{3}$ unter Berücksichtigung der für S, Q, Z geltenden speziellen Werte behufs ihrer Integration zuvor wirklich bilden müssen. Der Wert von Q wurde in Teil I dieser Untersuchungen abgeleitet, der Wert von S durch Integration der Differentialgleichung für S bereits für den ersten und zweiten Grad vollständig gefunden, während der in der unendlichen Reihe, durch welche Z nach Gleichung (13) repräsentiert ist, als wesentlich in Betracht kommende, mitzunehmende Teil durch den Ausdruck (27) gegeben ist, wobei die Koeffizienten dieses Ausdruckes z_4 bis z_{24} durch die Gleichungen (31) bis (33) gegeben sind.

Untersuchen wir nun die Gleichung (34) für den Typus $\frac{2}{3}$ nach den gleichen Gesichtspunkten, die wir für die Differentialgleichungen für S und ρ zu Grunde legten (cf. I, S. 391 bis 397), so wird zunächst das erste Glied der rechten Seite von (34):

$$Z + 2SZ + S^2 Z.$$

In diesem Ausdruck ist offenbar, da Z, wie wir gesehen, keine Glieder nullten Grades enthält, also bloß Z_1 und Z_2 in Betracht kommen, so lange wir nicht den dritten Grad in der Störungsfunktion selbst in Rechnung ziehen, die Größe $S^2 Z$ dritter Ordnung und höher als vom nullten Grad, fällt also im Hinblick auf die festgesetzte Genauigkeitsgrenze fort. Ferner sind die aus $S_0 Z$, $(S_1)_k Z$ und $(S_2)_k Z$ entstehenden Glieder sämtlich rein zweiter oder dritter, respektive höherer Ordnung und die bezüglichen Glieder dritter oder höherer Ordnung höher als vom nullten Grad, fallen also auch fort, während $(S_2)_l Z$ höher als vom zweiten Grad wird, also vorläufig noch nicht mitberücksichtigt wird. Das erste Glied der rechten Seite von Gleichung (34) liefert somit die folgenden mitzunehmenden Glieder:

$$Z_1 + Z_2 + 2(S_1)_l Z_1.$$

Betrachten wir das zweite Glied der rechten Seite von Gleichung (34):

$$-Q\frac{d\mathfrak{z}}{dv} - 2SQ\frac{d\mathfrak{z}}{dv} - S^2 Q\frac{d\mathfrak{z}}{dv},$$

so kommt zunächst das dritte dieser drei Glieder nicht in Betracht, weil:

$$S^2 Q \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = m'^3, \text{ resp. } \frac{m'^3}{\mathfrak{z}_1^2}$$

und höher als vom nullten Grad ist, selbst wenn man S_0 und Q_0 für S und Q einsetzt, da:

$$\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = \sin j \cos \mathfrak{v} + \text{Glieder rein erster Ordnung}$$

ist, während:

$$-S^2 Q \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$$

mindestens von der vierten Ordnung und mindestens vom ersten Grad ist.

Faßt man im zweiten der drei zu betrachtenden Glieder zunächst die elementären Terme ins Auge, so sind offenbar:

$$2 S_0 Q_0 \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} \quad \text{und} \quad 2 S_0 Q_1 \frac{d(\mathfrak{z})}{dv}$$

rein zweiter oder dritter Ordnung, da S_0 rein erster Ordnung ist und Q_0 und Q_1 sich aus Teilen zweiter und rein erster Ordnung zusammensetzen (cf. I, S. 381 und 399), während $(\mathfrak{z}) \doteq m'^0$ ist. Diese zwei Glieder fallen also fort. Mitzunehmen sind hingegen die aus:

$$-2(S_1)_l Q_0 \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = -2(S_1)_l Q_0 \sin j \cos \mathfrak{v}$$

entspringenden Glieder zweiten Grades, während offenbar:

$$2 S_0 Q_2 \sin j \cos \mathfrak{v}, \qquad 2 S_1 (Q_1 + Q_2) \sin j \cos \mathfrak{v}, \qquad 2 S_2 (Q_0 + Q_1 + Q_2) \sin j \cos \mathfrak{v}$$

Glieder von einem höheren als dem zweiten Grad ergeben und daher vorläufig für uns nicht in Betracht kommen.

Das Produkt ferner:

$$2 S Q \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$$

ist mindestens von der dritten Ordnung, aber höher als vom nullten Grad, weil $\mathfrak{Z}$ keine Glieder nullten Grades enthält und fällt daher auch fort.

Um schließlich zu entscheiden, welche Bestandteile aus dem Gliede:

$$Q \frac{d\mathfrak{z}}{dv}$$

folgen, ist:

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} + \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_1 + \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_2.$$

Hier ist, da $\tau \doteq m'$:

$$\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = +\sin j \cos \mathfrak{v} + \text{Glieder rein erster Ordnung.}$$

Diese Glieder von der Ordnung m' in $(\mathfrak{z})$ aber ergeben bei Multiplikation mit Q Glieder rein zweiter oder dritter Ordnung. Und da $-Q_2 \frac{d(\mathfrak{z})}{dv}$ vom dritten oder einem höheren Grad würde, so sind aus dem Produkt $Q \frac{d(\mathfrak{z})}{dv}$ nur die Glieder:

$$-(Q_0 + Q_1) \sin j \cos \mathfrak{v}$$

mitzunehmen. Und schließlich sind die aus:

$$-(Q_0 + Q_1)\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_1 \quad \text{und} \quad -Q_0 \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_2$$

entspringenden Glieder mitzunehmen, während:

$$Q_2 \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_1, \quad Q_1 \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_2, \quad Q_2 \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_2$$

weil höher als vom zweiten Grad, zunächst in dieser Abteilung nicht in Betracht kommen. Dabei ist aber in:

$$\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_2$$

von den Gliedern der Form C abzusehen, wie dies aus dem gleichen Grunde schon zuvor in Nr. II dieses Kapitels geschah. Mitzunehmen sind also in dem betrachteten Produkt in toto nur die Glieder:

$$-Q\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = -(Q_0+Q_1)\sin j\cos\mathfrak{v} - (Q_0+Q_1)\text{ pars}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_1 - Q_0\text{ pars}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_2.$$

Die speziell für die Planeten vom Typus $\frac{2}{3}$ der Integration zugrunde zu legende Form der Differentialgleichung für $\mathfrak{z}$ wird daher zunächst bis inklusive zu Gliedern zweiten Grades:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}+\mathfrak{z} = {} & Z_1 - Q_0\sin j\cos\mathfrak{v} - Q_0\text{ pars}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_1\\ & + Z_2 + 2(S_1)_l Z_1 - 2(S_1)_l Q_0\sin j\cos\mathfrak{v} - Q_1\sin j\cos\mathfrak{v} - Q_1\text{ pars}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_1\\ & - Q_0\text{ pars}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_2,\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

wobei also unter »pars« der Teil der Form D zu verstehen ist.

Indem wir uns zunächst wieder die Aufgabe stellen, die Integration für den ersten Grad auszuführen, haben wir jetzt folgende Differentialgleichung zu integrieren:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}+\mathfrak{z} = Z_1 - Q_0\sin j\cos\mathfrak{v} - Q_0\text{ pars}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_1. \tag{36}$$

---

b) Die Integration der Differentialgleichung für $(\mathfrak{z})$, die elementären Glieder der Form B vom ersten Grad.

Mit Hinblick auf die Werte:

$$\begin{aligned}Z_1 &= z_1\sin j\sin\mathfrak{v} + z_3\sin j\sin(6w-\mathfrak{v})\\ &\quad + z_2\sin j'\sin\mathfrak{v}_1 + z_4\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1)\\ Q_0 &= q_1\sin 3w + g_1\sin 6w\\ \text{pars}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_1 &= (1+2\delta_1-\tau)\varepsilon_1\sin j\cos(6w-\mathfrak{v}) + (1+2\delta_1-\tau_1)\varepsilon_2\sin j'\cos(6w-\mathfrak{v}_1)\end{aligned}$$

geht Gleichung (36), wenn wir setzen:

$$\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}) + \mathfrak{Z}$$

über in die beiden separatim zu integrierenden Gleichungen, die erste in den elementären Gliedern ersten Grades der Form B:

$$\frac{d^2(\mathfrak{z})}{dv^2} + (\mathfrak{z}) = z_1\sin j\sin\mathfrak{v} + z_2\sin j'\sin\mathfrak{v}_1, \tag{37}$$

die zweite in den charakteristischen Gliedern der Form D:

$$\frac{d^2 \mathfrak{Z}}{d v^2} + \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_{\mathrm{I}}^{(3)} \sin j \sin (6w - \mathfrak{v}) + \mathfrak{Z}_{\mathrm{I}}^{(4)} \sin j' \sin (6w - \mathfrak{v}_1), \tag{38}$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Z}_{\mathrm{I}}^{(3)} &= z_3 - \frac{1}{2} g_1 \\ \mathfrak{Z}_{\mathrm{I}}^{(4)} &= z_4 \end{aligned}\right\} \tag{38a}$$

z_1 und z_2 in (37) und z_3 und z_4 in (38) aber direkt durch (31) gegeben sind.

Zur Integration der Gleichung (37) verfahren wir analog wie bei der Integration der Differentialgleichung für (ρ) (cf. I, S. 449), setzen also:

$$\frac{d^2 (\mathfrak{z})}{d v^2} + (\mathfrak{z}) = f(v)$$

und analog wie früher bei (ρ) als Integral:

$$(\mathfrak{z}) = C_1 \sin v - C_2 \cos v. \tag{39}$$

Dann ist (cf. I, 446):

$$\frac{d C_1}{d v} = f(v) \cos v; \quad \frac{d C_2}{d v} = f(v) \sin v.$$

also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d C_1}{d v} &= \frac{1}{2} z_1 \sin j \sin (\mathfrak{v} + v) + \frac{1}{2} z_1 \sin j \sin (\mathfrak{v} - v) \\ &\quad + \frac{1}{2} z_2 \sin j' \sin (\mathfrak{v}_1 + v) + \frac{1}{2} z_2 \sin j' \sin (\mathfrak{v}_1 - v) \\ \frac{d C_2}{d v} &= -\frac{1}{2} z_1 \sin j \cos (\mathfrak{v} + v) + \frac{1}{2} z_1 \sin j \cos (\mathfrak{v} - v) \\ &\quad - \frac{1}{2} z_2 \sin j' \cos (\mathfrak{v}_1 + v) + \frac{1}{2} z_2 \sin j' \cos (\mathfrak{v}_1 - v). \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Da nun:

$$\mathfrak{v} = (1+\tau) v - \sigma; \quad \mathfrak{v}_1 = (1+\tau_1) v - \sigma_1 = v - \sigma_1,$$

da $\tau_1 = 0$ ist, so:

$$\mathfrak{v} + v = (2+\tau) v - \sigma; \quad \mathfrak{v} - v = \tau v - \sigma$$

$$\mathfrak{v}_1 + v = (2+\tau_1) v - \sigma_1 = 2v - \sigma_1; \quad \mathfrak{v}_1 - v = \tau_1 v - \sigma_1 = -\sigma_1,$$

mithin die Integrale von (40):

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} z_1 \int \sin j \sin \{(2+\tau) v - \sigma)\} + \frac{1}{2} z_1 \int \sin j \sin (\tau v - \sigma) \\ &\quad + \frac{1}{2} z_2 \int \sin j' \sin (2v - \sigma_1) \quad - \frac{1}{2} z_2 \int \sin j' \sin \sigma_1 \\ C_2 &= -\frac{1}{2} z_1 \int \sin j \cos \{(2+\tau) v - \sigma\} + \frac{1}{2} z_1 \int \sin j \cos (\tau v - \sigma) \\ &\quad - \frac{1}{2} z_2 \int \sin j' \cos (2v - \sigma_1) \quad + \frac{1}{2} z_2 \int \sin j' \cos \sigma_1. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Als Definitionsgleichungen für $\sin j$ und σ haben wir aber unter anderen Formen die folgende gefunden:

$$\left.\begin{aligned}\sin j\cos(\tau v-\sigma) &= \sin\iota\cos\vartheta+\sum\sin\iota_n\cos\vartheta_n\\ \sin j\sin(\tau v-\sigma) &= -\sin\iota\sin\vartheta-\sum\sin\iota_n\sin\vartheta_n.\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, wenn man sie bezüglich erst mit $\sin 2v$ und $\cos 2v$, dann mit $\cos 2v$ und $-\sin 2v$ multipliziert und addiert:

$$\left.\begin{aligned}\sin j\sin\{(2+\tau)v-\sigma\} &= \sin\iota\sin(2v-\vartheta)+\sum\sin\iota_n\sin(2v-\vartheta_n)\\ \sin j\cos\{(2+\tau)v-\sigma\} &= \sin\iota\cos(2v-\vartheta)+\sum\sin\iota_n\cos(2v-\vartheta_n).\end{aligned}\right\}\tag{43}$$

Zur Darstellung der übrigen unter den Integralzeichen in (41) auftretenden Größen ist nach dem Früheren:

$$(\mathfrak{z})=\sin j\sin\mathfrak{v}=\sin\iota\sin(v-\vartheta)+\sum\sin\iota_n\sin(v-\vartheta_n)$$

analog:

$$\sin j'\sin\mathfrak{v}_1=\sum\sin\iota'_n\sin\{(1+\tau_n)v-\theta_n\}=\sum\sin\iota'_n\sin(v-\vartheta_n),$$

wobei $\mathfrak{v}_1=v-\sigma_1$ ist; also:

$$\left.\begin{aligned}\sin j'\cos\sigma_1 &= \sum\sin\iota'_n\cos(\tau_n v-\theta_n)=\sum\sin\iota'_n\cos\vartheta_n\\ \sin j'\sin\sigma_1 &= -\sum\sin\iota'_n\sin(\tau_n v-\theta_n)=+\sum\sin\iota'_n\sin\vartheta_n.\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

Und schließlich erhält man durch Multiplikation dieser Gleichungen bezüglich mit $\sin 2v$ und $-\cos 2v$, sodann mit $\cos 2v$ und $\sin 2v$ und Addition, da nach dem früheren $\theta_n-\tau_n v=\vartheta_n$ ist:

$$\left.\begin{aligned}\sin j'\sin(2v-\sigma_1) &= \sum\sin\iota'_n\sin(2v-\vartheta_n)\\ \sin j'\cos(2v-\sigma_1) &= \sum\sin\iota'_n\cos(2v-\vartheta_n).\end{aligned}\right\}\tag{45}$$

Die Integralgleichungen (41) ergeben nunmehr:

$$\left.\begin{aligned}C_1 = &-\frac{1}{2}z_1\frac{\sin\iota}{2+\tau}\cos(2v-\vartheta)-\frac{1}{2}z_1\sum\frac{\sin\iota_n}{2+\tau_n}\cos(2v-\vartheta_n)-\frac{1}{2}z_1\frac{\sin\iota}{\tau}\cos\vartheta\\ &-\frac{1}{2}z_1\sum\frac{\sin\iota_n}{\tau_n}\cos\vartheta_n-\frac{1}{2}z_2\sum\frac{\sin\iota'_n}{2+\tau_n}\cos(2v-\vartheta_n)-\frac{1}{2}z_2\sum\frac{\sin\iota'_n}{\tau_n}\cos\vartheta_n\\ C_2 = &-\frac{1}{2}z_1\frac{\sin\iota}{2+\tau}\sin(2v-\vartheta)-\frac{1}{2}z_1\sum\frac{\sin\iota_n}{2+\tau_n}\sin(2v-\vartheta_n)-\frac{1}{2}z_1\frac{\sin\iota}{\tau}\sin\vartheta\\ &-\frac{1}{2}z_1\sum\frac{\sin\iota_n}{\tau_n}\sin\vartheta_n-\frac{1}{2}z_2\sum\frac{\sin\iota'_n}{2+\tau_n}\sin(2v-\vartheta_n)-\frac{1}{2}z_2\sum\frac{\sin\iota'_n}{\tau_n}\sin\vartheta_n.\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

Als Integral unserer Differentialgleichung (37) für die elementären Glieder der Form B in der Breite erhält man somit auf Grund von (39) den Wert:

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{z}) = &\frac{1}{2} z_1 \frac{\sin\iota}{2+\tau} \sin(v-\vartheta) + \frac{1}{2} z_1 \sum \frac{\sin\iota_n}{2+\tau_n} \sin(v-\vartheta_n) \\ &-\frac{1}{2} z_1 \frac{\sin\iota}{\tau} \sin(v-\vartheta) - \frac{1}{2} z_1 \sum \frac{\sin\iota_n}{\tau_n} \sin(v-\vartheta_n) \\ &+\frac{1}{2} z_1 \sum \frac{\sin\iota'_n}{2+\tau_n} \sin(v-\vartheta_n) - \frac{1}{2} z_2 \sum \frac{\sin\iota'_n}{\tau_n} \sin(v-\vartheta_n)\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{z}) = &\frac{1}{2} z_1 \sin\iota \left\{\frac{1}{2+\tau} - \frac{1}{\tau}\right\} \sin(v-\vartheta) \\ &+\frac{1}{2} \sum \{z_1 \sin\iota_n + z_2 \sin\iota'_n\} \left\{\frac{1}{2+\tau_n} - \frac{1}{\tau_n}\right\} \sin(v-\vartheta_n).\end{aligned}\right\} \tag{47 a}$$

Nun setzen wir:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{z}) &= -\frac{z_1}{\tau(2+\tau)} \sin\iota \sin(v-\vartheta) - \frac{1}{\tau_n(2+\tau_n)} \sum \{z_1 \sin\iota_n + z_2 \sin\iota'_n\} \sin(v-\vartheta_n) \\ &= \sin\iota \sin(v-\vartheta) + \sum \sin\iota_n \sin(v-\vartheta_n)\end{aligned}$$

und erhalten dadurch:

$$\sin\iota = -\frac{z_1 \sin\iota}{\tau(2+\tau)} \tag{48}$$

$$\sin\iota_n = -\frac{z_1 \sin\iota_n + z_2 \sin\iota'_n}{\tau_n(2+\tau_n)}. \tag{49}$$

Aus (48) ergibt sich τ, indem sich $\sin\iota$ als Integrationskonstante forthebt, durch die Relation:

$$\tau(2+\tau) = -z_1. \tag{50}$$

Aus (49) folgt:

$$\sin\iota_n = -\frac{z_2 \sin\iota'_n}{z_1 + \tau_n(2+\tau_n)}$$

oder, da nach (50): $z_1 = -2\tau-\tau^2$ ist, und τ_n und $\sin\iota'_n$ aus der Jupitertheorie gegeben sind, so erhält man $\sin\iota_n$ aus:

$$\sin\iota_n = \frac{z_2 \sin\iota'_n}{2(\tau-\tau_n)+(\tau^2-\tau_n^2)} = \frac{z_2 \sin\iota'_n}{2(\tau-\tau_n)\left(1+\frac{\tau+\tau_n)}{2}\right)}. \tag{51}$$

---

c) Die Integration der Differentialgleichung für $\mathfrak{Z}$, die Glieder der Form D, bei konstantem $\sin j$ und σ für den ersten Grad.

Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2} + \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_{\mathrm{I}}^{(3)} \sin j \sin(6w-\mathfrak{v}) + \mathfrak{Z}_{\mathrm{I}}^{(4)} \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}_1) \tag{52}$$

erhält man durch zweimalige Differentiation des unbestimmten Integralansatzes:

$$\frac{d^2\mathfrak{Z}_1}{dv^2}+\mathfrak{Z}_1=\{1-(1+2\delta_1-\tau)^2\}\varepsilon_1\sin j\sin(6w-\mathfrak{v})$$
$$+\{1-(1+2\delta_1-\tau_1)^2\}\varepsilon_2\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1).$$

Zur Bestimmung der gesuchten Koeffizienten des Integrales von (52):

$$\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}_1=\varepsilon_1\sin j\sin(6w-\mathfrak{v})+\varepsilon_2\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1) \tag{53}$$

hat man daher einfach die zwei Bedingungsgleichungen:

$$\{1-(1+2\delta_1-\tau)^2\}\varepsilon_1=z_3-\frac{1}{2}g_1$$
$$\{1-(1+2\delta_1-\tau_1)^2\}\varepsilon_2=z_4,$$

woraus mit Hinblick auf die für g_1, z_3 und z_4 ermittelten Werte, und weil $\tau^2=m'^2$ ist:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=-\frac{z_3^{(0)}-\frac{1}{2}g_1^{(0)}+\left\{z_3^{(1)}-\frac{1}{2}g_1^{(1)}\right\}\beta_1}{z_3^{[1]}+4\delta_1(1+\delta_1)}\\ \varepsilon_2&=-\frac{z_4^{(0)}+z_4^{(1)}\beta_1}{z_4^{[2]}+4\delta_1(1+\delta_1)}\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

folgt, wo rechts lauter bekannte Größen stehen.

---

d) Berücksichtigung der aus der Variabilität von sin j und σ entstehenden Zusatzglieder ersten Grades in $\mathfrak{Z}$.

Um die Zusatzglieder zu bestimmen, die sich bei der Integration von (52) durch die Variabilität von sin j und σ ergeben, fassen wir der Kürze halber zunächst bloß das erste Glied der rechten Seite von (52) ins Auge:

$$\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}_{\rm I}^{(3)}\sin j\sin(6w-\mathfrak{v});\qquad \mathfrak{Z}_{\rm I}^{(3)}=z_3-\frac{1}{2}g_1$$

und haben, wenn $(\mathfrak{Z}_1)_\delta$ die Zusatzglieder bezeichnet, als Integralansatz einfach:

$$\mathfrak{Z}=\varepsilon_1\sin j\sin(6w-\mathfrak{v})+(\mathfrak{Z}_1)_\delta$$

oder:

$$\mathfrak{Z}=\varepsilon_1\sin j\sin\{6w-(1+\tau)v+\sigma\}+(\mathfrak{Z}_1)_\delta$$

oder:

$$\mathfrak{Z}=\varepsilon_1\sin j\sin\sigma\cos\{6w-(1+\tau)v\}$$
$$+\varepsilon_1\sin j\cos\sigma\sin\{6w-(1+\tau)v\}+(\mathfrak{Z}_1)_\delta,$$

also durch Differentiation:

$$\frac{d\mathfrak{Z}}{dv} = -\varepsilon_1(1+2\delta_1-\tau)\sin j \sin\sigma \sin\{6w-(1+\tau)v\}$$

$$+\varepsilon_1(1+2\delta_1-\tau)\sin j\cos\sigma\cos\{6w-(1+\tau)v\}$$

$$+\varepsilon_1\frac{d\sin j\sin\sigma}{dv}\cos\{6w-(1+\tau)v\}$$

$$+\varepsilon_1\frac{d\sin j\cos\sigma}{dv}\sin\{6w-(1+\tau)v\}$$

$$+\frac{d(\mathfrak{Z}_1)_\delta}{dv}$$

und durch nochmalige Differentiation:

$$\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2} = -\varepsilon_1(1+2\delta_1-\tau)^2\sin j\sin\sigma\cos\{6w-(1+\tau)v\}$$

$$-\varepsilon_1(1+2\delta_1-\tau)^2\sin j\cos\sigma\sin\{6w-(1+\tau)v\}$$

$$-2\varepsilon_1(1+2\delta_1-\tau)\frac{d\sin j\sin\sigma}{dv}\sin\{6w-(1+\tau)v\}$$

$$+2\varepsilon_1(1+2\delta_1-\tau)\frac{d\sin j\cos\sigma}{dv}\cos\{6w-(1+\tau)v\}$$

$$+\varepsilon_1\frac{d^2\sin j\sin\sigma}{dv^2}\cos\{6w-(1+\tau)v\}$$

$$+\varepsilon_1\frac{d^2\sin j\cos\sigma}{dv^2}\sin\{6w-(1+\tau)v\}$$

$$+\frac{d^2(\mathfrak{Z}_1)_\delta}{dv^2}.$$

Das fünfte und sechste Glied der rechten Seite aber kommt, weil rein zweiter Ordnung, nicht in Betracht; denn wenn man die zweiten Differentialquotienten von $\sin j$ und $\cos\sigma$ mit Hinblick auf die Gleichungen (20) sive (23) ausführt, so sieht man, daß sie bei der Differentiation den Faktor $\tau^2 \mathrel{\underline{\underline{\cdot}}} m'^2$ erhalten.

Mithin hat man:

$$\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2} + \mathfrak{Z} = \{1-(1+2\delta_1-\tau)^2\}\varepsilon_1\sin j\sin(6w-\mathfrak{v})$$

$$-2(1+2\delta_1-\tau)\varepsilon_1\frac{d\sin j\sin\sigma}{dv}\sin\{6w-(1+\tau)v\}$$

$$+2(1+2\delta_1-\tau)\varepsilon_1\frac{d\sin j\cos\sigma}{dv}\cos\{6w-(1+\tau)v\}$$

$$+\frac{d^2(\mathfrak{Z}_1)_\delta}{dv^2}+(\mathfrak{Z}_1)_\delta = \mathfrak{Z}_1^{(3)}\sin j\sin(6w-\mathfrak{v}),$$

also als Differentialgleichung für $(\mathfrak{Z}_1)_\delta$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2(\mathfrak{Z}_1)_\delta}{dv^2}+(\mathfrak{Z}_1)_\delta &= +2\varepsilon_1(1+2\delta_1-\tau)\frac{d\sin j\sin\sigma}{dv}\sin\{6w-(1+\tau)v\}\\ &-2\varepsilon_1(1+2\delta_1-\tau)\frac{d\sin j\cos\sigma}{dv}\cos\{6w-(1+\tau)v\}.\end{aligned}\right\}\quad(55)$$

Da die Zusatzglieder immer eine Ordnung höher als die anderen Glieder sind, und mithin jetzt die Zusatzglieder, welche sich in (55) bei variabeln $\sin j$ und σ durch Integration ergäben, dritter Ordnung würden, deshalb hat man im Hinblick auf die festgesetzte Genauigkeitsgrenze bei Integration von (55) $\sin j$ und σ nunmehr als konstant zu betrachten. So erhält man durch direkte Integration von (55), wobei wir auch das zweite Glied der rechten Seite von (52) mit berücksichtigen, die gesuchten Zusatzglieder ersten Grades der Funktion $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}) + \mathfrak{Z}$ im Hinblick auf die innezuhaltende Genauigkeitsgrenze, welche dem Integral (53) noch hinzuzufügen sind:

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{Z}_1)_{\mathfrak{z}} = &-\frac{2\varepsilon_1(1+2\delta_1)}{4\delta_1(1+\delta_1)}\,\frac{d\sin j\sin\sigma}{dv}\sin\{6w-(1+\tau)v\}\\ &+\frac{2\varepsilon_1(1+2\delta_1)}{4\delta_1(1+\delta_1)}\,\frac{d\sin j\cos\sigma}{dv}\cos\{6w-(1+\tau)v\}\\ &-\frac{2\varepsilon_2(1+2\delta_1)}{4\delta_1(1+\delta_1)}\,\frac{d\sin j'\sin\sigma_1}{dv}\sin\{6w-(1+\tau_1)v\}\\ &+\frac{2\varepsilon_2(1+2\delta_1)}{4\delta_1(1+\delta_1)}\,\frac{d\sin j'\cos\sigma_1}{dv}\cos\{6w-(1+\tau_1)v\},\end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

wo bei der numerischen Rechnung für $\sin j \frac{\sin}{\cos}\sigma$ und $\sin j' \frac{\sin}{\cos}\sigma_1$ ihre Werte nach (20) und (44) in die Differentialquotienten einzusetzen und die Differentationen auszuführen sind.

IV. Die Integration der Differentialgleichung der Glieder zweiten Grades in $\mathfrak{Z}$.

a) Übergang auf die zu integrierende Form der Differentialgleichung zweiten Grades für $\mathfrak{Z}$.

Als Differentialgleichung zur Bestimmung der Glieder zweiten Grades in der Breite $\mathfrak{z}$ hatten wir die Form gefunden:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z} = Z_2+2(S_1)_l Z_1-2(S_1)_l Q_0\sin j\cos\mathfrak{v}-Q_1\sin j\cos\mathfrak{v}\\ -Q_1\,\text{pars}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_1-Q_0\,\text{pars}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_2.\end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Mit Hinblick auf die aus Abteilung I bekannten Werte:

$$\begin{aligned}Q_0 &= q_1\sin 3w+g_1\sin 6w\\ Q_1 &= q_2\eta\sin \mathrm{v}+q_4\eta\sin(3w-\mathrm{v})+q_6\eta\sin(6w-\mathrm{v})\\ &\quad+q_3\eta'\sin\mathrm{v}_1+q_5\eta'\sin(3w-\mathrm{v}_1)+q_7\eta'\sin(6w-\mathrm{v}_1)\\ &\quad+g_2\eta\sin(3w+\mathrm{v})+g_4\eta\sin(9w-\mathrm{v})\\ &\quad+g_3\eta'\sin(3w+\mathrm{v}_1)+g_5\eta'\sin(9w-\mathrm{v}_1)\\ (S_1)_l &= \alpha_2\eta\cos(3w-\mathrm{v})+\alpha_3\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)\end{aligned}$$

unter Berücksichtigung ferner der zuvor für Z_1 und Z_2 abgeleiteten Werte sowie der durch Differentiation von $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ sich ergebende Werte:

$$\text{pars}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_1 = (1+2\delta_1-\tau)\varepsilon_1\sin j\cos(6w-\mathfrak{v})+(1+2\delta_1-\tau_1)\varepsilon_2\sin j'\cos(6w-\mathfrak{v}_1)$$

$$\begin{aligned}
\text{pars}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_2 = {} & (1+\delta_1+\tau+\varsigma)\varepsilon_3\eta \sin j \cos(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && +(1+\delta_1+\tau_1+\varsigma)\varepsilon_7\eta \sin j' \cos(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\
& +(1+\delta_1-\tau-\varsigma)\varepsilon_4\eta \sin j \cos(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) && +(1+\delta_1-\tau_1-\varsigma)\varepsilon_8\eta \sin j' \cos(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) \\
& +(1+\delta_1+\tau+\varsigma_1)\varepsilon_5\eta' \sin j \cos(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) && +(1+\delta_1+\tau_1+\varsigma_1)\varepsilon_9\eta' \sin j' \cos(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) \\
& +(1+\delta_1-\tau-\varsigma_1)\varepsilon_6\eta' \sin j \cos(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1) && +(1+\delta_1-\tau_1-\varsigma_1)\varepsilon_{10}\eta' \sin j' \cos(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1) \\
& +(\delta_1-\tau+\varsigma-1)\varepsilon_{11}\eta \sin j \cos(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && +(1+3\delta_1-\tau+\varsigma)\varepsilon_{15}\eta \sin j \cos(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) \\
& +(\delta_1-\tau+\varsigma_1-1)\varepsilon_{12}\eta' \sin j \cos(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) && +(1+3\delta_1-\tau+\varsigma_1)\varepsilon_{16}\eta' \sin j \cos(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +(\delta_1-\tau_1+\varsigma-1)\varepsilon_{13}\eta \sin j' \cos(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) && +(1+3\delta_1-\tau_1+\varsigma)\varepsilon_{17}\eta \sin j' \cos(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\
& +(\delta_1-\tau_1+\varsigma_1-1)\varepsilon_{14}\eta' \sin j' \cos(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) && +(1+3\delta_1-\tau_1+\varsigma_1)\varepsilon_{18}\eta' \sin j' \cos(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)
\end{aligned}$$

erhält man für die einzelnen Glieder der rechten Seite von Gleichung (57) folgende Ausdrücke, im steten Hinblick auf die zu beobachtende Genauigkeitsgrenze:

$$\begin{aligned}
+2(S_1)_l Z_1 = {} & \alpha_2 z_1\eta \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && +\alpha_2 z_2\eta \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\
& +\alpha_2 z_3\eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) && +\alpha_2 z_4\eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) \\
& +\alpha_3 z_1\eta' \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) && +\alpha_3 z_2\eta' \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) \\
& +\alpha_3 z_3\eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1) && +\alpha_3 z_4\eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1) \\
& -\alpha_2 z_1\eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && +\alpha_2 z_3\eta \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) \\
& -\alpha_3 z_1\eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) && +\alpha_3 z_3\eta' \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) \\
& -\alpha_2 z_2\eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) && +\alpha_2 z_4\eta \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\
& -\alpha_3 z_2\eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) && +\alpha_3 z_4\eta' \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2(S_1)_l Q_0 \sin j \cos\mathfrak{v} = {} & -\frac{1}{2}\alpha_2 g_1\eta \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) - \frac{1}{2}\alpha_2 g_1\eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) \\
& -\frac{1}{2}\alpha_3 g_1\eta' \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) - \frac{1}{2}\alpha_3 g_1\eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-Q_1 \sin j \cos\mathfrak{v} = {} & -\frac{1}{2}q_4\eta \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) - \frac{1}{2}q_4\eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) \\
& -\frac{1}{2}g_2\eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) - \frac{1}{2}q_5\eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) \\
& -\frac{1}{2}q_5\eta' \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) - \frac{1}{2}g_4\eta \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) \\
& -\frac{1}{2}g_3\eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1) - \frac{1}{2}g_5\eta' \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-Q_1\, \text{pars}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_1 = {} & -\frac{1}{2}g_4\varepsilon_1\eta \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && -\frac{1}{2}g_4\varepsilon_2\eta \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\
& +\frac{1}{2}q_4\varepsilon_1\eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) && +\frac{1}{2}q_4\varepsilon_2\eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) \\
& -\frac{1}{2}g_5\varepsilon_1\eta' \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) && -\frac{1}{2}g_5\varepsilon_2\eta' \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) \\
& +\frac{1}{2}q_5\varepsilon_1\eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1) && +\frac{1}{2}q_5\varepsilon_2\eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}g_2\varepsilon_1\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v) && -\frac{1}{2}q_4\varepsilon_1\eta\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v)\\
&+\frac{1}{2}g_3\varepsilon_1\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v_1) && -\frac{1}{2}q_5\varepsilon_1\eta'\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v_1)\\
&+\frac{1}{2}g_2\varepsilon_2\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v) && -\frac{1}{2}q_4\varepsilon_2\eta\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v)\\
&+\frac{1}{2}g_3\varepsilon_2\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v_1) && -\frac{1}{2}q_5\varepsilon_2\eta'\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-Q_0\,\mathrm{pars}\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_2 = &-\frac{1}{2}g_1\varepsilon_4\eta\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-v) && -\frac{1}{2}g_1\varepsilon_8\eta\sin j'\sin(3w+\mathfrak{v}_1-v)\\
&-\frac{1}{2}g_1\varepsilon_3\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v) && -\frac{1}{2}g_1\varepsilon_7\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v)\\
&-\frac{1}{2}g_1\varepsilon_6\eta'\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-v_1) && -\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{10}\eta'\sin j'\sin(3w+\mathfrak{v}_1-v_1)\\
&-\frac{1}{2}g_1\varepsilon_5\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v_1) && -\frac{1}{2}g_1\varepsilon_9\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v_1)\\
&+\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{15}\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v) && +\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{11}\eta\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v)\\
&+\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{16}\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v_1) && +\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{12}\eta'\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v_1)\\
&+\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{17}\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v) && +\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{13}\eta\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v)\\
&+\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{18}\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v_1) && +\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{14}\eta'\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v_1).
\end{aligned}
$$

Durch Kombination der Glieder gleicher Argumente erhält man daher als zu integrierende Differentialgleichung für die Glieder zweiten Grades in $\mathfrak{Z}$:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z} = &\,\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(5)}\eta\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-v) && +\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(9)}\eta\sin j'\sin(3w+\mathfrak{v}_1-v)\\
&+\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(6)}\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v) && +\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(10)}\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v)\\
&+\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(7)}\eta'\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-v_1) && +\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(11)}\eta'\sin j'\sin(3w+\mathfrak{v}_1-v_1)\\
&+\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(8)}\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v_1) && +\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(12)}\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v_1)\\
&+\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(13)}\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v) && +\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(17)}\eta\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v)\\
&+\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(14)}\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v_1) && +\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(18)}\eta'\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v_1)\\
&+\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(15)}\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v) && +\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(19)}\eta\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v)\\
&+\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(16)}\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v_1) && +\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(20)}\eta'\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v_1),
\end{aligned}
\right\}\qquad (58)
$$

wobei:

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(5)} &= z_5-\frac{1}{2}q_4+\alpha_2 z_1-\frac{1}{2}(g_4\varepsilon_1+g_1\varepsilon_4)\\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(6)} &= z_6-\frac{1}{2}g_2+\alpha_2\left(z_3-\frac{1}{2}g_1\right)+\frac{1}{2}(q_4\varepsilon_1-g_1\varepsilon_3)
\end{aligned}
\right|\qquad (58\,a)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(7)} &= z_7 - \frac{1}{2}\, q_5 + \alpha_3 z_1 - \frac{1}{2}\,(g_5\,\varepsilon_1 + g_1\,\varepsilon_6)\\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(8)} &= z_8 - \frac{1}{2}\, g_3 + \alpha_3\left(z_3 - \frac{1}{2}\, g_1\right) + \frac{1}{2}\,(q_5\,\varepsilon_1 - g_1\,\varepsilon_5)\\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(9)} &= z_9 + \alpha_2 z_2 - \frac{1}{2}\,(g_4\,\varepsilon_2 + g_1\,\varepsilon_8)\\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(10)} &= z_{10} + \alpha_2 z_4 + \frac{1}{2}\,(q_4\,\varepsilon_2 - g_1\,\varepsilon_7)\\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(11)} &= z_{11} + \alpha_3 z_2 - \frac{1}{2}\,(g_5\,\varepsilon_2 + g_1\,\varepsilon_{10})\\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(12)} &= z_{12} + \alpha_3 z_4 + \frac{1}{2}\,(q_5\,\varepsilon_2 - g_1\,\varepsilon_9)\\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(13)} &= z_{13} - \frac{1}{2}\, q_4 - \alpha_2 z_1 + \frac{1}{2}\,(g_2\,\varepsilon_1 + g_1\,\varepsilon_{15})\\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(14)} &= z_{14} - \frac{1}{2}\, q_5 - \alpha_3 z_1 + \frac{1}{2}\,(g_3\,\varepsilon_1 + g_1\,\varepsilon_{16})\\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(15)} &= z_{15} - \alpha_2 z_2 + \frac{1}{2}\,(g_2\,\varepsilon_2 + g_1\,\varepsilon_{17})\\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(16)} &= z_{16} - \alpha_3 z_2 + \frac{1}{2}\,(g_3\,\varepsilon_2 + g_1\,\varepsilon_{18})\\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(17)} &= z_{17} - \frac{1}{2}\, g_4 + \alpha_2\left(z_3 - \frac{1}{2}\, g_1\right) - \frac{1}{2}\,(q_4\,\varepsilon_1 - g_1\,\varepsilon_{11})\\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(18)} &= z_{18} - \frac{1}{2}\, g_5 + \alpha_3\left(z_3 - \frac{1}{2}\, g_1\right) - \frac{1}{2}\,(q_5\,\varepsilon_1 - g_1\,\varepsilon_{12})\\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(19)} &= z_{19} + \alpha_2 z_4 - \frac{1}{2}\,(q_4\,\varepsilon_2 - g_1\,\varepsilon_{13})\\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(20)} &= z_{20} + \alpha_3 z_4 - \frac{1}{2}\,(q_5\,\varepsilon_2 - g_1\,\varepsilon_{14}).
\end{aligned}\right\} \tag{58a}
$$

ist.

---

b) **Integration der Differentialgleichung für $\mathfrak{Z}$ unter Mitnahme der exargumentalen Glieder bei konstantem η, π, $\sin j$ und σ für den zweiten Grad.**

Bedeute im Sinne der früher bereits verwandten Bezeichnungsweise:

$\left(\frac{d^2 \mathfrak{Z}_1}{dv^2}\right)_2$ die aus dem ersten Grad hervorgehenden exargumentalen Glieder zweiten Grades,

$\left(\frac{d^2 \mathfrak{Z}}{dv^2} + \mathfrak{Z}\right)_2$ die direkt gebildete Differentialgleichung,

$\left(\frac{d^2 \mathfrak{Z}_2}{dv^2} + \mathfrak{Z}_2\right)_2$ den differentierten unbestimmten Integralansatz,

so ist:

$$\left(\frac{d^2 \mathfrak{Z}}{dv^2} + \mathfrak{Z}\right)_2 = \left(\frac{d^2 \mathfrak{Z}_1}{dv^2}\right)_2 + \left(\frac{d^2 \mathfrak{Z}_2}{dv^2} + \mathfrak{Z}_2\right)_2$$

oder:

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_2}{dv^2}+\mathfrak{Z}_2\right)_2=\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z}\right)_2-\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_1}{dv^2}\right)_2 \tag{59}$$

Zur Bestimmung der aus der Integration über die Glieder ersten Grades hervorgehenden exargumentalen Glieder zweiten Grades ist:

$$\mathfrak{Z}_1=\varepsilon_1\sin j\sin(6w-\mathfrak{v})+\varepsilon_2\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1),$$

also:

$$\frac{d\mathfrak{Z}_1}{dv}=\varepsilon_1\sin j\cos(6w-\mathfrak{v})\left\{6\frac{dw}{dv}-1-\tau\right\}$$

$$+\varepsilon_2\sin j'\cos(6w-\mathfrak{v}_1)\left\{6\frac{dw}{dv}-1-\tau_1\right\}$$

und:

$$\frac{d^2\mathfrak{Z}_1}{dv^2}=-\varepsilon_1\sin j\sin(6w-\mathfrak{v})\left\{6\frac{dw}{dv}-1-\tau\right\}^2$$

$$-\varepsilon_2\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1)\left\{6\frac{dw}{dv}-1-\tau_1\right\}^2$$

$$+6\varepsilon_1\sin j\cos(6w-\mathfrak{v})\frac{d^2w}{dv^2}$$

$$+6\varepsilon_2\sin j'\cos(6w-\mathfrak{v}_1)\frac{d^2w}{dv^2}.$$

Hier ist wieder zu setzen, analog wie bei R:

$$\frac{dw}{dv}=\frac{1+\delta_1}{3}-\mu\left(\frac{dV}{dv}\right)_1,$$

also:

$$\left\{6\frac{dw}{dv}-1-\tau\right\}^2=-12\mu(1+2\delta_1-\tau)\left\{\gamma_2\eta\cos(3w-\mathrm{v})+\gamma_3\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)\right\}$$

$$\frac{d^2w}{dv^2}=-(\delta_1+\varsigma)\mu\gamma_2\eta\sin(3w-\mathrm{v})-(\delta_1+\varsigma_1)\mu\gamma_3\eta'\sin(3w-\mathrm{v}_1).$$

Für die exargumentalen Glieder erhält man somit:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_1}{dv^2}\right)_2 &= 6\mu(1+2\delta_1-\tau)\varepsilon_1\gamma_2\eta\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v})\\
&+6\mu(1+2\delta_1-\tau)\varepsilon_1\gamma_2\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v})\\
&+6\mu(1+2\delta_1-\tau)\varepsilon_1\gamma_3\eta'\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\\
&+6\mu(1+2\delta_1-\tau)\varepsilon_1\gamma_3\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1)\\
&+6\mu(1+2\delta_1-\tau_1)\varepsilon_2\gamma_2\eta\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})\\
&+6\mu(1+2\delta_1-\tau_1)\varepsilon_2\gamma_2\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v})\\
&+6\mu(1+2\delta_1-\tau_1)\varepsilon_2\gamma_3\eta'\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)\\
&+6\mu(1+2\delta_1-\tau_1)\varepsilon_2\gamma_3\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)\\
&-3\mu(\delta_1+\varsigma)\varepsilon_1\gamma_2\eta\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v})\\
&+3\mu(\delta_1+\varsigma)\varepsilon_1\gamma_2\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v})
\end{aligned}$$

$$-3\mu(\delta_1+\varsigma_1)\varepsilon_1\gamma_3\eta'\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v_1)$$
$$+3\mu(\delta_1+\varsigma_1)\varepsilon_1\gamma_3\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v_1)$$
$$-3\mu(\delta_1+\varsigma)\varepsilon_2\gamma_2\eta\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v)$$
$$+3\mu(\delta_1+\varsigma)\varepsilon_2\gamma_2\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v)$$
$$-3\mu(\delta_1+\varsigma_1)\varepsilon_2\gamma_3\eta'\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v_1)$$
$$+3\mu(\delta_1+\varsigma_1)\varepsilon_2\gamma_3\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v_1)$$

oder bei Einhaltung derselben Genauigkeitsgrenze wie bei R:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_1}{dv^2}\right)_2 = {} & 6\mu(1+2\delta_1)\varepsilon_1\gamma_2\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v)\\
& +6\mu(1+2\delta_1)\varepsilon_1\gamma_3\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v_1)\\
& +6\mu(1+2\delta_1)\varepsilon_2\gamma_2\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v)\\
& +6\mu(1+2\delta_1)\varepsilon_2\gamma_3\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v_1)\\
& +6\mu(1+2\delta_1)\varepsilon_1\gamma_2\eta\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v)\\
& +6\mu(1+2\delta_1)\varepsilon_1\gamma_3\eta'\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v_1)\\
& +6\mu(1+2\delta_1)\varepsilon_2\gamma_2\eta\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v)\\
& +6\mu(1+2\delta_1)\varepsilon_2\gamma_3\eta'\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v_1).
\end{aligned}\right\}\quad(60)$$

Durch zweimalige Differentiation des unbestimmten Integralansatzes $\mathfrak{Z}_2$ aber erhält man:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_2}{dv^2}\right)_2 = {} & -(1+\delta_1+\tau+\varsigma)^2\varepsilon_3\eta\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-v) && -(1+\delta_1+\tau_1+\varsigma)^2\varepsilon_7\eta\sin j'\sin(3w+\mathfrak{v}_1-v)\\
& -(1+\delta_1-\tau-\varsigma)^2\varepsilon_4\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v) && -(1+\delta_1-\tau_1-\varsigma)^2\varepsilon_8\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v)\\
& -(1+\delta_1+\tau+\varsigma_1)^2\varepsilon_5\eta'\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-v_1) && -(1+\delta_1+\tau_1+\varsigma_1)^2\varepsilon_9\eta'\sin j'\sin(3w+\mathfrak{v}_1-v_1)\\
& -(1+\delta_1-\tau-\varsigma_1)^2\varepsilon_6\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v_1) && -(1+\delta_1-\tau_1-\varsigma_1)^2\varepsilon_{10}\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v_1)\\
& -(\delta_1-\tau+\varsigma-1)^2\varepsilon_{11}\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v) && -(1+3\delta_1-\tau+\varsigma)^2\varepsilon_{15}\eta\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v)\\
& -(\delta_1-\tau+\varsigma_1-1)^2\varepsilon_{12}\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v_1) && -(1+3\delta_1-\tau+\varsigma_1)^2\varepsilon_{16}\eta'\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v_1)\\
& -(\delta_1-\tau_1+\varsigma-1)^2\varepsilon_{13}\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v) && -(1+3\delta_1-\tau_1+\varsigma)^2\varepsilon_{17}\eta\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v)\\
& -(\delta_1-\tau_1+\varsigma_1-1)^2\varepsilon_{14}\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v_1) && -(1+3\delta_1-\tau_1+\varsigma_1)^2\varepsilon_{18}\eta'\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v_1),
\end{aligned}$$

mithin die linke Seite von (59):

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_2}{dv^2}+\mathfrak{Z}_2\right)_2 = {} & -\{2(\delta_1+\tau+\varsigma)+(\delta_1+\tau+\varsigma)^2\}\varepsilon_3\eta\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-v)\\
& -\{2(\delta_1-\tau-\varsigma)+(\delta_1-\tau-\varsigma)^2\}\varepsilon_4\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v)\\
& -\{2(\delta_1+\tau+\varsigma_1)+(\delta_1+\tau+\varsigma_1)^2\}\varepsilon_5\eta'\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-v_1)\\
& -\{2(\delta_1-\tau-\varsigma_1)+(\delta_1-\tau-\varsigma_1)^2\}\varepsilon_6\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v_1)\\
& -\{2(\delta_1+\tau_1+\varsigma)+(\delta_1+\tau_1+\varsigma)^2\}\varepsilon_7\eta\sin j'\sin(3w+\mathfrak{v}_1-v)\\
& -\{2(\delta_1-\tau_1-\varsigma)+(\delta_1-\tau_1-\varsigma)^2\}\varepsilon_8\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v)\\
& -\{2(\delta_1+\tau_1+\varsigma_1)+(\delta_1+\tau_1+\varsigma_1)^2\}\varepsilon_9\eta'\sin j'\sin(3w+\mathfrak{v}_1-v_1)\\
& -\{2(\delta_1-\tau_1-\varsigma_1)+(\delta_1-\tau_1-\varsigma_1)^2\}\varepsilon_{10}\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v_1)
\end{aligned}\right\}\quad(61)$$

$$\left.\begin{aligned}
&+\{2(\delta_1-\tau+\varsigma)-(\delta_1-\tau+\varsigma)^2\}\varepsilon_{11}\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v)\\
&+\{2(\delta_1-\tau+\varsigma_1)-(\delta_1-\tau+\varsigma_1)^2\}\varepsilon_{12}\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v_1)\\
&+\{2(\delta_1-\tau_1+\varsigma)-(\delta_1-\tau_1+\varsigma)^2\}\varepsilon_{13}\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v)\\
&+\{2(\delta_1-\tau_1+\varsigma_1)-(\delta_1-\tau_1+\varsigma_1)^2\}\varepsilon_{14}\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v_1)\\
&-\{2(3\delta_1-\tau+\varsigma)+(3\delta_1-\tau+\varsigma)^2\}\varepsilon_{15}\eta\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v)\\
&-\{2(3\delta_1-\tau+\varsigma_1)+(3\delta_1-\tau+\varsigma_1)^2\}\varepsilon_{16}\eta'\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v_1)\\
&-\{2(3\delta_1-\tau_1+\varsigma)+(3\delta_1-\tau_1+\varsigma)^2\}\varepsilon_{17}\eta\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v)\\
&-\{2(3\delta_1-\tau_1+\varsigma_1)+(3\delta_1-\tau_1+\varsigma_1)^2\}\varepsilon_{18}\eta'\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v_1).
\end{aligned}\right\}\tag{61}$$

Bei Innehaltung derselben Genauigkeitsgrenze, die bei Bestimmung der β-Koeffizienten in R beobachtet wurde, ergeben sich somit zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten des Integrales der Differentialgleichung (58):

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}_2=\;&\varepsilon_3\eta\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-v) && +\varepsilon_7\eta\sin j'\sin(3w+\mathfrak{v}_1-v)\\
&+\varepsilon_4\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v) && +\varepsilon_8\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v)\\
&+\varepsilon_5\eta'\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-v_1) && +\varepsilon_9\eta'\sin j'\sin(3w+\mathfrak{v}_1-v_1)\\
&+\varepsilon_6\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v_1) && +\varepsilon_{10}\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v_1)\\
&+\varepsilon_{11}\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v) && +\varepsilon_{15}\eta\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v)\\
&+\varepsilon_{12}\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v_1) && +\varepsilon_{16}\eta'\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v_1)\\
&+\varepsilon_{13}\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v) && +\varepsilon_{17}\eta\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v)\\
&+\varepsilon_{14}\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v_1) && +\varepsilon_{18}\eta'\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v_1)
\end{aligned}\right\}\tag{62}$$

die folgenden Relationen, in denen ε_3 bis ε_{18} die einzigen Unbekannten sind:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{I.} && -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_3=z_5-\frac{1}{2}q_4+\alpha_2z_1-\frac{1}{2}(g_4\varepsilon_1+g_1\varepsilon_4)\\
&\text{II.} && -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_4=z_6-\frac{1}{2}g_2+\alpha_2\left(z_3-\frac{1}{2}g_1\right)+\frac{1}{2}(q_4\varepsilon_1-g_1\varepsilon_3)-6\mu'\varepsilon_1\gamma_2\\
&\text{III.} && -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_5=z_7-\frac{1}{2}q_5+\alpha_3z_1-\frac{1}{2}(g_5\varepsilon_1+g_1\varepsilon_6)\\
&\text{IV.} && -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_6=z_8-\frac{1}{2}g_3+\alpha_3\left(z_3-\frac{1}{2}g_1\right)+\frac{1}{2}(q_5\varepsilon_1-g_1\varepsilon_5)-6\mu'\varepsilon_1\gamma_3\\
&\text{V.} && -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_7=z_9+\alpha_2z_2-\frac{1}{2}(g_4\varepsilon_2+g_1\varepsilon_8)\\
&\text{VI.} && -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_8=z_{10}+\alpha_2z_4+\frac{1}{2}(q_4\varepsilon_2-g_1\varepsilon_7)-6\mu'\varepsilon_2\gamma_2\\
&\text{VII.} && -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_9=z_{11}+\alpha_3z_2-\frac{1}{2}(g_5\varepsilon_2+g_1\varepsilon_{10})\\
&\text{VIII.} && -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_{10}=z_{12}+\alpha_3z_4+\frac{1}{2}(q_5\varepsilon_2-g_1\varepsilon_9)-6\mu'\varepsilon_2\gamma_3\\
&\text{IX.} && +\delta_1(2-\delta_1)\varepsilon_{11}=z_{13}-\frac{1}{2}q_4-\alpha_2z_1+\frac{1}{2}(g_2\varepsilon_1+g_1\varepsilon_{15})\\
&\text{X.} && +\delta_1(2-\delta_1)\varepsilon_{12}=z_{14}-\frac{1}{2}q_5-\alpha_3z_1+\frac{1}{2}(g_3\varepsilon_1+g_1\varepsilon_{16})
\end{aligned}\right\}\tag{63}$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{XI.} & +\delta_1(2-\delta_1)\varepsilon_{13} = z_{15}-\alpha_2 z_2+\frac{1}{2}(g_2\varepsilon_2+g_1\varepsilon_{17}) \\[2ex]
\text{XII.} & +\delta_1(2-\delta_1)\varepsilon_{14} = z_{16}-\alpha_3 z_2+\frac{1}{2}(g_3\varepsilon_2+g_1\varepsilon_{18}) \\[2ex]
\text{XIII.} & -3\delta_1(2+3\delta_1)\varepsilon_{15} = z_{17}-\frac{1}{2}g_4+\alpha_2\left(z_3-\frac{1}{2}g_1\right)-\frac{1}{2}(q_4\varepsilon_1-g_1\varepsilon_{11})-6\mu'\varepsilon_1\gamma_2 \\[2ex]
\text{XIV.} & -3\delta_1(2+3\delta_1)\varepsilon_{16} = z_{18}-\frac{1}{2}g_5+\alpha_3\left(z_3-\frac{1}{2}g_1\right)-\frac{1}{2}(q_5\varepsilon_1-g_1\varepsilon_{12})-6\mu'\varepsilon_1\gamma_3 \\[2ex]
\text{XV.} & -3\delta_1(2+3\delta_1)\varepsilon_{17} = z_{19}+\alpha_2 z_4-\frac{1}{2}(q_4\varepsilon_2-g_1\varepsilon_{13})-6\mu'\varepsilon_2\gamma_2 \\[2ex]
\text{XVI.} & -3\delta_1(2+3\delta_1)\varepsilon_{18} = z_{20}+\alpha_3 z_4-\frac{1}{2}(q_5\varepsilon_2-g_1\varepsilon_{14})-6\mu'\varepsilon_2\gamma_3.
\end{array}\right| \qquad (63)
$$

Ersetzt man in diesen Gleichungen z_5 bis z_{20} nach den Gleichungen (32) durch ihre Werte, die bloß Funktionen der ε und bekannter Konstanten sind, so erhält man die Bestimmungsgleichungen der ε in der folgenden, der numerischen Rechnung unmittelbar zugrunde zu legenden Form:

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{I}a. & -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_3+\frac{1}{2}g_1\varepsilon_4 = z_5^{[3]}\varepsilon_3+z_5^{[4]}\varepsilon_4+D_1 \\[2ex]
\text{II}a. & -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_4+\frac{1}{2}g_1\varepsilon_3 = z_6^{[3]}\varepsilon_3+z_6^{[4]}\varepsilon_4+D_2 \\[2ex]
\text{III}a. & -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_5+\frac{1}{2}g_1\varepsilon_6 = z_7^{[5]}\varepsilon_5+z_7^{[6]}\varepsilon_6+D_3 \\[2ex]
\text{IV}a. & -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_6+\frac{1}{2}g_1\varepsilon_5 = z_8^{[5]}\varepsilon_5+z_8^{[6]}\varepsilon_6+D_4 \\[2ex]
\text{V}a. & -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_7+\frac{1}{2}g_1\varepsilon_8 = z_9^{[7]}\varepsilon_7+z_9^{[8]}\varepsilon_8+D_5 \\[2ex]
\text{VI}a. & -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_8+\frac{1}{2}g_1\varepsilon_7 = z_{10}^{[7]}\varepsilon_7+z_{10}^{[8]}\varepsilon_8+D_6 \\[2ex]
\text{VII}a. & -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_9+\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{10} = z_{11}^{[9]}\varepsilon_9+z_{11}^{[10]}\varepsilon_{10}+D_7 \\[2ex]
\text{VIII}a. & -\delta_1(2+\delta_1)\varepsilon_{10}+\frac{1}{2}g_1\varepsilon_9 = z_{12}^{[9]}\varepsilon_9+z_{12}^{[10]}\varepsilon_{10}+D_8 \\[2ex]
\text{IX}a. & +\delta_1(2-\delta_1)\varepsilon_{11}-\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{15} = z_{15}^{[11]}\varepsilon_{11}+z_{13}^{[15]}\varepsilon_{15}+D_9 \\[2ex]
\text{X}a. & +\delta_1(2-\delta_1)\varepsilon_{12}-\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{16} = z_{14}^{[12]}\varepsilon_{12}+z_{14}^{[16]}\varepsilon_{16}+D_{10} \\[2ex]
\text{XI}a. & +\delta_1(2-\delta_1)\varepsilon_{13}-\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{17} = z_{15}^{[13]}\varepsilon_{13}+z_{15}^{[17]}\varepsilon_{17}+D_{11} \\[2ex]
\text{XII}a. & +\delta_1(2-\delta_1)\varepsilon_{14}-\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{18} = z_{16}^{[14]}\varepsilon_{14}+z_{16}^{[18]}\varepsilon_{18}+D_{12} \\[2ex]
\text{XIII}a. & -3\delta_1(2+3\delta_1)\varepsilon_{15}-\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{11} = z_{17}^{[11]}\varepsilon_{11}+z_{17}^{[15]}\varepsilon_{15}+D_{13} \\[2ex]
\text{XIV}a. & -3\delta_1(2+3\delta_1)\varepsilon_{16}-\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{12} = z_{18}^{[12]}\varepsilon_{12}+z_{18}^{[16]}\varepsilon_{16}+D_{14} \\[2ex]
\text{XV}a. & -3\delta_1(2+3\delta_1)\varepsilon_{17}-\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{13} = z_{19}^{[13]}\varepsilon_{13}+z_{19}^{[17]}\varepsilon_{17}+D_{15} \\[2ex]
\text{XVI}a. & -3\delta_1(2+3\delta_1)\varepsilon_{18}-\frac{1}{2}g_1\varepsilon_{14} = z_{20}^{[14]}\varepsilon_{14}+z_{20}^{[18]}\varepsilon_{18}+D_{16},
\end{array}\right| \qquad (63a)
$$

wobei die D lauter, durch die bereits für $S, R, T, \mathfrak{z}$ geleisteten Integrationen schon bekannte Größen enthalten und gegeben sind durch die folgenden Ausdrücke:

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{I}b. & D_1 = z_{5.1} - \frac{1}{2} q_4 + \alpha_2 z_1 - \frac{1}{2} g_4 \varepsilon_1 \\
\text{II}b. & D_2 = z_{6.1} - \frac{1}{2} g_2 + \alpha_2 \left(z_3 - \frac{1}{2} g_1\right) + \frac{1}{2} q_4 \varepsilon_1 - 6\mu' \varepsilon_1 \gamma_2 \\
\text{III}b. & D_3 = z_{7.1} - \frac{1}{2} q_5 + \alpha_3 z_1 - \frac{1}{2} g_5 \varepsilon_1 \\
\text{IV}b. & D_4 = z_{8.1} - \frac{1}{2} g_3 + \alpha_3 \left(z_3 - \frac{1}{2} g_1\right) + \frac{1}{2} q_5 \varepsilon_1 - 6\mu' \varepsilon_1 \gamma_3 \\
\text{V}b. & D_5 = z_{9.1} + \alpha_2 z_2 - \frac{1}{2} g_4 \varepsilon_2 \\
\text{VI}b. & D_6 = z_{10.1} + \alpha_2 z_4 + \frac{1}{2} q_4 \varepsilon_2 - 6\mu' \varepsilon_2 \gamma_2 \\
\text{VII}b. & D_7 = z_{11.1} + \alpha_3 z_2 - \frac{1}{2} g_5 \varepsilon_2 \\
\text{VIII}b. & D_8 = z_{12.1} + \alpha_3 z_4 + \frac{1}{2} q_5 \varepsilon_2 - 6\mu' \varepsilon_2 \gamma_3 \\
\text{IX}b. & D_9 = z_{13.1} - \frac{1}{2} q_4 - \alpha_2 z_1 + \frac{1}{2} g_2 \varepsilon_1 \\
\text{X}b. & D_{10} = z_{14.1} - \frac{1}{2} q_5 - \alpha_3 z_1 + \frac{1}{2} g_3 \varepsilon_1 \\
\text{XI}b. & D_{11} = z_{15.1} - \alpha_2 z_2 + \frac{1}{2} g_2 \varepsilon_2 \\
\text{XII}b. & D_{12} = z_{16.1} - \alpha_3 z_2 + \frac{1}{2} g_3 \varepsilon_2 \\
\text{XIII}b. & D_{13} = z_{17.1} - \frac{1}{2} g_4 + \alpha_2 \left(z_3 - \frac{1}{2} g_1\right) - \frac{1}{2} q_4 \varepsilon_1 - 6\mu' \varepsilon_1 \gamma_2 \\
\text{XIV}b. & D_{14} = z_{18.1} - \frac{1}{2} g_5 + \alpha_3 \left(z_3 - \frac{1}{2} g_1\right) - \frac{1}{2} q_5 \varepsilon_1 - 6\mu' \varepsilon_1 \gamma_3 \\
\text{XV}b. & D_{15} = z_{19.1} + \alpha_2 z_4 - \frac{1}{2} q_4 \varepsilon_2 - 6\mu' \varepsilon_2 \gamma_2 \\
\text{XVI}b. & D_{16} = z_{20.1} + \alpha_3 z_4 - \frac{1}{2} q_5 \varepsilon_2 - 6\mu' \varepsilon_2 \gamma_3,
\end{array}\right\} \qquad (63b)
$$

wo $\mu' = \mu(1+2\delta_1)$ ist.

Dabei sind, wie man sieht, immer in je zwei der Gleichungen $(63a)$ je zwei Unbekannte ε enthalten, deren Koeffizienten nebst allen übrigen in den Gleichungen enthaltenen Größen bekannt sind.

Die Werte der ε sind daher für ein gegebenes Verhältnis der mittleren Entfernungen $\frac{a}{a'} = \alpha$, das heißt für einen beliebigen Planeten der Hildagruppe sofort berechenbar, indem die C-Koeffizienten bestimmbar und mit diesen die z durch die Gleichungen (33) gegeben sind.

c) **Berücksichtigung der aus der Variabilität von η, π, $\sin j$ und σ entstehenden Zusatzglieder zweiten Grades in $\mathfrak{Z}$.**

Es erübrigt noch, der Variabilität der langperiodischen Funktionen η, π, $\sin j$ und σ Rechnung zu tragen, das heißt, die Zusatzglieder zweiten Grades zu berechnen und zu $\mathfrak{Z}_2$ (62) hinzuzufügen, um diesen Integralwert mit Rücksicht auf die vorgesetzte Genauigkeitsgrenze definitiv zu erhalten. Wie bei Ermittlung der Zusatzglieder ersten Grades in $\mathfrak{Z}$, führen wir die Betrachtung der Übersichtlichkeit halber zunächst nur für ein Glied durch. Dann wird die Differentialgleichung (58):

$$\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}_{\mathrm{II}}^{(5)}\eta\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) \tag{64}$$

und der unbestimmte Integralansatz, wenn $(\mathfrak{Z}_2)_5$ die Zusatzglieder repräsentiert, ist einfach:

$$\mathfrak{Z}=\varepsilon_3\eta\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v})+(\mathfrak{Z}_2)_5$$

oder:

$$\mathfrak{Z}=\varepsilon_3\eta\sin j\sin\{3w+(\varsigma+\tau)v+\pi-\sigma\}+(\mathfrak{Z}_2)_5$$

oder:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}=&\;\varepsilon_3\eta\sin j\sin(\pi-\sigma)\cos\{3w+(\varsigma+\tau)v\}\\&+\varepsilon_3\eta\sin j\cos(\pi-\sigma)\sin\{3w+(\varsigma+\tau)v\}+(\mathfrak{Z}_2)_5,\end{aligned}$$

also differentiert:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}=&-\varepsilon_3(1+\delta_1+\varsigma+\tau)\eta\sin j\sin(\pi-\sigma)\sin\{3w+(\varsigma+\tau)v\}\\&+\varepsilon_3(1+\delta_1+\varsigma+\tau)\eta\sin j\cos(\pi-\sigma)\cos\{3w+(\varsigma+\tau)v\}\\&+\varepsilon_3\frac{d\eta\sin j\sin(\pi-\sigma)}{dv}\cos\{3w+(\varsigma+\tau)v\}\\&+\varepsilon_3\frac{d\eta\sin j\cos(\pi-\sigma)}{dv}\sin\{3w+(\varsigma+\tau)v\}\\&+\frac{d(\mathfrak{Z}_2)_5}{dv}\end{aligned}$$

und durch nochmalige Differentiation, indem die zweiten Differentialquotienten, weil rein zweiter Ordnung, analog wie beim ersten Grad fortfallen:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}=&-\varepsilon_3(1+\delta_1+\varsigma+\tau)^2\eta\sin j\sin(\pi-\sigma)\cos\{3w+(\varsigma+\tau)v\}\\&-\varepsilon_3(1+\delta_1+\varsigma+\tau)^2\eta\sin j\cos(\pi-\sigma)\sin\{3w+(\varsigma+\tau)v\}\\&-2\varepsilon_3(1+\delta_1+\varsigma+\tau)\frac{d\eta\sin j\sin(\pi-\sigma)}{dv}\sin\{3w+(\varsigma+\tau)v\}\\&+2\varepsilon_3(1+\delta_1+\varsigma+\tau)\frac{d\eta\sin j\cos(\pi-\sigma)}{dv}\cos\{3w+(\varsigma+\tau)v\}\\&+\frac{d^2(\mathfrak{Z}_2)_5}{dv^2}.\end{aligned}$$

Es wird also sein:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}+\mathfrak{z} &= \{1-(1+\delta_1+\varsigma+\tau)^2\}\,\varepsilon_3\,\eta\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) \\
&-2\varepsilon_3(1+\delta_1+\varsigma+\tau)\frac{d\eta\sin j\sin(\pi-\sigma)}{dv}\sin\{3w+(\varsigma+\tau)v\} \\
&+2\varepsilon_3(1+\delta_1+\varsigma+\tau)\frac{d\eta\sin j\cos(\pi-\sigma)}{dv}\cos\{3w+(\varsigma+\tau)v\} \\
&+\frac{d^2(\mathfrak{z}_2)_5}{dv^2}+(\mathfrak{z}_2)_5=\mathfrak{z}_{11}^{(5)}\eta\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}),
\end{aligned}$$

also, da:

$$\mathfrak{z}_{11}^{(5)}\eta\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v})=\{1-(1+\delta_1+\varsigma+\tau)^2\}\,\varepsilon_3\,\eta\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v})$$

ist, so erhält man als direkt integrable Differentialgleichung des speziell ins Auge gefaßten Zusatzgliedes:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(\mathfrak{z}_2)_5}{dv^2}+(\mathfrak{z}_2)_5 &= +2\varepsilon_3(1+\delta_1+\varsigma+\tau)\frac{d\eta\sin j\sin(\pi-\sigma)}{dv}\sin\{3w+(\varsigma+\tau)v\} \\
&-2\varepsilon_3(1+\delta_1+\varsigma+\tau)\frac{d\eta\sin j\cos(\pi-\sigma)}{dv}\cos\{3w+(\varsigma+\tau)v\}.
\end{aligned}$$

Stellt man in dieser höchst einfachen Weise die Differentialgleichung für die Zusatzglieder vollständig auf, indem man die eben für Gleichung (64) durchgeführte Betrachtung für Gleichung (58) selbst ausführt, so ergibt das Integrationsresultat d i e g e s u c h t e n Z u s a t z g l i e d e r z w e i t e n G r a d e s i n $\mathfrak{z}$, im Hinblicke auf die festgesetzte Genauigkeitsgrenze:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{z}_2)_5 = &-\frac{2\varepsilon_3(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\frac{d\eta\sin j\sin(\pi-\sigma)}{dv}\sin\{3w+(\varsigma+\tau)v\} \\
&+\frac{2\varepsilon_3(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\frac{d\eta\sin j\cos(\pi-\sigma)}{dv}\cos\{3w+(\varsigma+\tau)v\} \\
&-\frac{2\varepsilon_4(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\frac{d\eta\sin j\sin(\sigma-\pi)}{dv}\sin\{3w-(\varsigma+\tau)v\} \\
&+\frac{2\varepsilon_4(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\frac{d\eta\sin j\cos(\sigma-\pi)}{dv}\cos\{3w-(\varsigma+\tau)v\} \\
&-\frac{2\varepsilon_5(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\frac{d\eta'\sin j\sin(\pi_1-\sigma)}{dv}\sin\{3w+(\varsigma_1+\tau)v\} \\
&+\frac{2\varepsilon_5(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\frac{d\eta'\sin j\cos(\pi_1-\sigma)}{dv}\cos\{3w+(\varsigma_1+\tau)v\} \\
&-\frac{2\varepsilon_6(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\frac{d\eta'\sin j\sin(\sigma-\pi_1)}{dv}\sin\{3w-(\varsigma_1+\tau)v\} \\
&+\frac{2\varepsilon_6(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\frac{d\eta'\sin j\cos(\sigma-\pi_1)}{dv}\cos\{3w-(\varsigma_1+\tau)v\} \\
&-\frac{2\varepsilon_7(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\frac{d\eta\sin j'\sin(\pi-\sigma_1)}{dv}\sin\{3w+\varsigma v\} \\
&+\frac{2\varepsilon_7(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\frac{d\eta\sin j'\cos(\pi-\sigma_1)}{dv}\cos\{3w+\varsigma v\} \\
&-\frac{2\varepsilon_8(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\frac{d\eta\sin j'\sin(\sigma_1-\pi)}{dv}\sin\{3w-\varsigma v\} \\
&+\frac{2\varepsilon_8(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\frac{d\eta\sin j'\cos(\sigma_1-\pi)}{dv}\cos\{3w-\varsigma v\} \\
&-\frac{2\varepsilon_9(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\frac{d\eta'\sin j'\sin(\pi_1-\sigma_1)}{dv}\sin(3w+\varsigma_1 v)
\end{aligned} \tag{65}$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
+\dfrac{2\varepsilon_9(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\,\dfrac{d\eta'\sin j'\cos(\pi_1-\sigma_1)}{dv}\cos\{3w+\varsigma_1 v\} \\
-\dfrac{2\varepsilon_{10}(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\,\dfrac{d\eta'\sin j'\sin(\sigma_1-\pi_1)}{dv}\sin\{3w-\varsigma_1 v\} \\
+\dfrac{2\varepsilon_{10}(1+\delta_1)}{\delta_1(2+\delta_1)}\,\dfrac{d\eta'\sin j'\cos(\sigma_1-\pi_1)}{dv}\cos\{3w-\varsigma_1 v\} \\
-\dfrac{2\varepsilon_{11}(1-\delta_1)}{\delta_1(2-\delta_1)}\,\dfrac{d\eta\sin j\sin(\pi+\sigma)}{dv}\sin\{3w-(2-\varsigma+\tau)v\} \\
+\dfrac{2\varepsilon_{11}(1-\delta_1)}{\delta_1(2-\delta_1)}\,\dfrac{d\eta\sin j\cos(\pi+\sigma)}{dv}\cos\{3w-(2-\varsigma+\tau)v\} \\
-\dfrac{2\varepsilon_{12}(1-\delta_1)}{\delta_1(2-\delta_1)}\,\dfrac{d\eta'\sin j\sin(\pi_1+\sigma)}{dv}\sin\{3w-(2-\varsigma_1+\tau)v\} \\
+\dfrac{2\varepsilon_{12}(1-\delta_1)}{\delta_1(2-\delta_1)}\,\dfrac{d\eta'\sin j\cos(\pi_1+\sigma)}{dv}\cos\{3w-(2-\varsigma_1+\tau)v\} \\
-\dfrac{2\varepsilon_{13}(1-\delta_1)}{\delta_1(2-\delta_1)}\,\dfrac{d\eta\sin j'\sin(\pi+\sigma_1)}{dv}\sin\{3w-(2-\varsigma)v\} \\
+\dfrac{2\varepsilon_{13}(1-\delta_1)}{\delta_1(2-\delta_1)}\,\dfrac{d\eta\sin j'\cos(\pi+\sigma_1)}{dv}\cos\{3w-(2-\varsigma)v\} \\
-\dfrac{2\varepsilon_{14}(1-\delta_1)}{\delta_1(2-\delta_1)}\,\dfrac{d\eta'\sin j'\sin(\pi_1+\sigma_1)}{dv}\sin\{3w-(2-\varsigma_1)v\} \\
+\dfrac{2\varepsilon_{14}(1-\delta_1)}{\delta_1(2-\delta_1)}\,\dfrac{d\eta'\sin j'\cos(\pi_1+\sigma_1)}{dv}\cos\{3w-(2-\varsigma_1)v\} \\
-\dfrac{2\varepsilon_{15}(1+3\delta_1)}{3\delta_1(2+3\delta_1)}\,\dfrac{d\eta\sin j\sin(\pi+\sigma)}{dv}\sin\{9w-(2-\varsigma+\tau)v\} \\
+\dfrac{2\varepsilon_{15}(1+3\delta_1)}{3\delta_1(2+3\delta_1)}\,\dfrac{d\eta\sin j\cos(\pi+\sigma)}{dv}\cos\{9w-(2-\varsigma+\tau)v\} \\
-\dfrac{2\varepsilon_{16}(1+3\delta_1)}{3\delta_1(2+3\delta_1)}\,\dfrac{d\eta'\sin j\sin(\pi_1+\sigma)}{dv}\sin\{9w-(2-\varsigma_1+\tau)v\} \\
+\dfrac{2\varepsilon_{16}(1+3\delta_1)}{3\delta_1(2+3\delta_1)}\,\dfrac{d\eta'\sin j\cos(\pi_1+\sigma)}{dv}\cos\{9w-(2-\varsigma_1+\tau)v\} \\
-\dfrac{2\varepsilon_{17}(1+3\delta_1)}{3\delta_1(2+3\delta_1)}\,\dfrac{d\eta\sin j'\sin(\pi+\sigma_1)}{dv}\sin\{9w-(2-\varsigma)v\} \\
+\dfrac{2\varepsilon_{17}(1+3\delta_1)}{3\delta_1(2+3\delta_1)}\,\dfrac{d\eta\sin j'\cos(\pi+\sigma_1)}{dv}\cos\{9w-(2-\varsigma)v\} \\
-\dfrac{2\varepsilon_{18}(1+3\delta_1)}{3\delta_1(2+3\delta_1)}\,\dfrac{d\eta'\sin j'\sin(\pi_1+\sigma_1)}{dv}\sin\{9w-(2-\varsigma_1)v\} \\
+\dfrac{2\varepsilon_{18}(1+3\delta_1)}{3\delta_1(2+3\delta_1)}\,\dfrac{d\eta'\sin j'\cos(\pi_1+\sigma_1)}{dv}\cos\{9w-(2-\varsigma_1)v\}.
\end{array}
\right\} \qquad (65)
$$

Das definitive Integral von Gleichung (58) ist somit:

$$
\mathfrak{Z}_2' = \mathfrak{Z}_2 + (\mathfrak{Z}_2)_5, \qquad (66)
$$

wo $\mathfrak{Z}_2$ durch die Gleichungen (62), (63*a*) und (63*b*), $(\mathfrak{Z}_2)_5$ durch (65) gegeben ist. Für die numerische Rechnung sind dabei die Differentialquotienten in (65) auf Grund der für η, π, $\sin j$ und σ aufgestellten Bedingungsgleichungen wirklich zu bilden, was in Abteilung III geschehen wird.

Achtes Kapitel.

Die Bestimmung der exargumentalen Glieder dritten Grades.

I. Die exargumentalen Glieder dritten Grades im Radius Vector.

A. Die exargumentalen Glieder dritten Grades in *S*.

Da die exargumentalen Glieder dritten Grades zum Teile größer werden als die aus der Störungsfunktion selbst stammenden Glieder dritten Grades in Q, P, Z und daher einen erheblichen Einfluß auf das Resultat ausüben können, so müssen sie bei genäherten Commensurabilitätstypen kleiner Planeten, vor allem aber bei kritischen Planeten mitberücksichtigt werden. Wir wollen sie deshalb für den Typus $\frac{2}{3}$ in den Funktionen S, R, T, $\mathfrak{Z}$ aufsuchen, eine Arbeit, die mit wachsender Gradzahl der exargumentalen Glieder an Weitläufigkeit zunimmt. Denn während beim ersten Grad bloß aus der Integration über das Glied nullten Grades exargumentale Glieder ersten Grades sich ergeben, für den zweiten Grad hingegen schon durch die Integration über die Glieder nullten und ersten Grades exargumentale Glieder zweiten Grades entstehen, folgen exargumentale Glieder dritten Grades aus der Integration sowohl über das Glied nullten Grades, wie über die Glieder ersten Grades, als auch über die Glieder zweiten Grades. Wir bestimmen diese Glieder wieder durch partielle Differentiation.

Verstehen wir in diesem Sinne in entsprechender Erweiterung der schon beim zweiten Grade eingeführten Bezeichnungsweise unter:

$\left(\frac{dS_0}{dv}\right)_3$ die aus dem nullten Grad folgenden exargumentalen Glieder dritten Grades,

$\left(\frac{dS_1}{dv}\right)_3$ die aus dem ersten Grad entspringenden exargumentalen Glieder dritten Grades,

$\left(\frac{dS_2}{dv}\right)_3$ die aus dem zweiten Grad resultierenden exargumentalen Glieder dritten Grades,

$\left(\frac{dS_3}{dv}\right)_3$ den differentierten unbestimmten Integralansatz,

$\left(\frac{dS}{dv}\right)_3$ die direkt gebildete Differentialgleichung,

so ist zunächst:

$$\left(\frac{dS}{dv}\right)_3 = \left(\frac{dS_0}{dv}\right)_3 + \left(\frac{dS_1}{dv}\right)_3 + \left(\frac{dS_2}{dv}\right)_3 + \left(\frac{dS_3}{dv}\right)_3. \tag{1}$$

Die linke Seite dieser Gleichung, das heißt die aus der Derivierten Q der Störungsfunktion selbst stammenden Glieder dritten Grades, die vor der Integration rein erster Ordnung sind und mit η^3 multipliziert, also, da $\eta = e$ cirka $\frac{1}{10}$ ist, noch verkleinert werden, ziehen wir zunächst in dieser Abteilung nicht in Betracht. Von den Gliedern der rechten Seite der Gleichung (1) aber nehmen wir in diesem

Sinne überhaupt nur diejenigen exargumentalen Glieder mit, welche der Ordnung nach größer sind als die aus der Derivierten Q hervorgehenden Glieder dritten Grades.

In Betrachtung zunächst der exargumentalen Glieder dritten Grades, die durch Integration aus dem Gliede nullten Grades entstehen, hätte man offenbar in dem Ausdruck:

$$\left(\frac{dS_0}{dv}\right)_3 = 3\mu a_1 \sin 3w \frac{dV}{dv}$$

für $\frac{dV}{dv}$ die Glieder dritten Grades einzusetzen.

Nun sind aber die in $\frac{dV}{dv}$[1] auftretenden γ-Koeffizienten (cf. I, S. 382) von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$, bei Multiplikation mit $a_1 = m'$ also von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$, mithin noch obendrein klein gegen die aus Q selbst stammenden Glieder dritten Grades, von denen wir jetzt ja absehen. Daher kommt $\left(\frac{dS_0}{dv}\right)_3$ bei der ins Auge gefaßten Genauigkeitsgrenze, weil es für die Grenze $\delta_1^2 = m'$ von der Ordnung $m'\sqrt{m'}$ würde, nicht in Betracht. Anders verhält es sich bei den durch Integration über die Glieder ersten Grades entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades, die wir jedoch auch wieder durch partielle Differentiation bestimmen wollen.

---

a) **Ableitung der aus den Gliedern ersten Grades entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades in *S*.**

Durch Differentiation der Glieder ersten Grades des unbestimmten Integralansatzes für S erhielten wir bei Bestimmung der exargumentalen Glieder zweiten Grades im sechsten Kapitel mit Hinblick darauf, daß:

$$\frac{dw}{dv} = 1 - \mu_1 - \mu\frac{dV}{dv}$$

ist. für den Typus $\frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dv} = & -a_2(1-\varsigma)\,\eta \sin v - \alpha_2\eta \sin(3w - v)\left\{2 - 3\mu_1 - 3\mu\frac{dV}{dv} + \varsigma\right\}\\ & -a_3(1-\varsigma_1)\eta' \sin v_1 - \alpha_3\eta' \sin(3w - v_1)\left\{2 - 3\mu_1 - 3\mu\frac{dV}{dv} + \varsigma_1\right\}\\ & -a_4\eta \sin(6w - v)\left\{5 - 6\mu_1 - 6\mu\frac{dV}{dv} + \varsigma\right\}\\ & -a_5\eta' \sin(6w - v_1)\left\{5 - 6\mu_1 - 6\mu\frac{dV}{dv} + \varsigma_1\right\}.\end{aligned}$$

---

[1] Es ist (cf. I, S. 414):

$$\left(\frac{dT}{dv}\right)_l = \gamma_0 + \frac{dT_l}{dv} = \frac{dV}{dv}.$$

Die aus diesem Ausdruck entspringenden exargumentalen Glieder dritten Grades erhält man offenbar aus dem Ausdrucke:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dS_1}{dv}\right)_3 &= 3\mu\,\alpha_2\,\eta\,\sin(3w-v)\left(\frac{dV}{dv}\right)_2\\ &+3\mu\,\alpha_3\,\eta'\sin(3w-v_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_2\\ &+6\mu\,a_4\,\eta\,\sin(6w-v)\left(\frac{dV}{dv}\right)_2\\ &+6\mu\,a_5\,\eta'\sin(6w-v_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_2,\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

indem man:

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_2 = \gamma_{14}\eta^2\cos(6w-2v)+\gamma_{15}\eta\eta'\cos(6w-v-v_1)+\gamma_{16}\eta'^2\cos(6w-2v_1)$$

setzt. Nun sind ja aber die γ von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$, mithin die Glieder:

$$\left.\begin{aligned}6\mu\,a_4\,\eta\,\sin(6w-v)\\ 6\mu\,a_5\,\eta'\sin(6w-v_1)\end{aligned}\right\}\left(\frac{dV}{dv}\right)_2 \asymp \frac{m'^2}{\delta_1},$$

also obendrein klein gegenüber den aus der Störungsfunktion selbst stammenden Gliedern dritten Grades, kommen mithin jetzt nicht in Betracht, da sie für die Grenze gleichfalls von der Ordnung $m'\sqrt{m'}$ werden.

Die beiden Glieder hingegen:

$$\left.\begin{aligned}3\mu\,\alpha_2\,\eta\,\sin(3w-v)\\ 3\mu\,\alpha_3\,\eta'\sin(3w-v_1)\end{aligned}\right\}\left(\frac{dV}{dv}\right)_2 \asymp \frac{m'^2}{\delta_1^2}$$

müssen, weil sie gegenüber m', das heißt gegen $\left(\frac{dS}{dv}\right)_3$ groß werden können, für kritische Planeten eo ipso mitgenommen werden. Denn die kritischen Planeten sind ja so definiert, daß $\delta_1 < \sqrt{m'}$, also $\delta_1^2 < m'$ ist. Mithin ist bei kritischen Planeten:

$$\frac{m'^2}{\delta_1^2} > m',$$

während bei nicht kritischen Planeten:

$$\frac{m'^2}{\delta_1^2} < m'$$

ist. Wäre es also auch überflüssig, diese Glieder bei nicht kritischen Planeten mitzunehmen, wenn man die aus P und Q selbst stammenden Glieder dritten Grades nicht mit in Betracht zieht, so müssen diese Glieder doch bei kritischen Planeten auch in diesem Falle unter allen Umständen mitgenommen werden, da sie größer sind als die Glieder dritten Grades in Q selbst.

Daher wird Gleichung (2):

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dS_1}{dv}\right)_3 = &-\frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\alpha_2\eta^3 \sin(3w-v) && +\frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\alpha_2\eta^3 \sin(9w-3v) \\
&-\frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\alpha_3\eta^2\eta' \sin(3w-2v+v_1) && +\frac{3}{2}\mu(\gamma_{14}\alpha_3+\gamma_{15}\alpha_2)\eta^2\eta' \sin(9w-2v-v_1) \\
&-\frac{3}{2}\mu\gamma_{15}\alpha_2\eta^2\eta' \sin(3w-v_1) && +\frac{3}{2}\mu(\gamma_{15}\alpha_3+\gamma_{16}\alpha_2)\eta\eta'^2 \sin(9w-v-2v_1) \\
&-\frac{3}{2}\mu\gamma_{15}\alpha_3\eta\eta'^2 \sin(3w-v) && +\frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\alpha_3\eta'^3 \sin(9w-3v_1) \\
&-\frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\alpha_2\eta\eta'^2 \sin(3w+v-2v_1) \\
&-\frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\alpha_3\eta'^3 \sin(3w-v_1),
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wo sämtliche Argumente von der Form C sind.

Dies zunächst der Ausdruck für die gesuchten exargumentalen Glieder dritten Grades.

---

b) Ableitung der aus den Gliedern zweiten Grades entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades in S.

Zur Berechnung der aus dem zweiten Grad hervorgehenden exargumentalen Glieder dritten Grades haben wir im Hinblick auf die jetzt ins Auge gefaßte Genauigkeitsgrenze offenbar nur von den Gliedern der Form C in S_2 auszugehen, also zu setzen:

$$S_2 = \alpha_{14}\eta^2 \cos(6w-2v)+\alpha_{15}\eta\eta' \cos(6w-v-v_1)+\alpha_{16}\eta'^2 \cos(6w-2v_1).$$

Durch Differentiation erhält man hieraus:

$$\begin{aligned}
\frac{dS_2}{dv} = &-\alpha_{14}\eta^2 \sin(6w-2v) \left\{6\frac{dw}{dv}-2(1-\varsigma)\right\} \\
&-\alpha_{15}\eta\eta' \sin(6w-v-v_1)\left\{6\frac{dw}{dv}-(2-\varsigma-\varsigma_1)\right\} \\
&-\alpha_{16}\eta'^2 \sin(6w-2v_1) \left\{6\frac{dw}{dv}-2(1-\varsigma_1)\right\}
\end{aligned}$$

oder da jetzt:

$$\frac{dw}{dv} = -\mu\frac{dV}{dv}$$

zu setzen ist, so wird:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dS_2}{dv}\right)_3 = &\; 6\mu\alpha_{14}\eta^2 \sin(6w-2v)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\
&+6\mu\alpha_{15}\eta\eta' \sin(6w-v-v_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\
&+6\mu\alpha_{16}\eta'^2 \sin(6w-2v_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1,
\end{aligned}$$

wo:

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 = \gamma_2\eta \cos(3w-v) + \gamma_3\eta' \cos(3w-v_1)$$

ist. Daher wird der Ausdruck für die gesuchten Glieder:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dS_2}{dv}\right)_3 = {} & 3\mu.\alpha_{14}\gamma_2\eta^3 \sin(3w-v) && +3\mu.\alpha_{14}\gamma_2\eta^3 \sin(9w-3v)\\ & +3\mu.\alpha_{14}\gamma_3\eta^2\eta' \sin(3w-2v+v_1) && +3\mu.(\alpha_{14}\gamma_3+\alpha_{15}\gamma_2)\eta^2\eta' \sin(9w-2v-v_1)\\ & +3\mu.\alpha_{15}\gamma_2\eta^2\eta' \sin(3w-v_1) && +3\mu.(\alpha_{15}\gamma_3+\alpha_{16}\gamma_2)\eta\eta'^2 \sin(9w-v-2v_1)\\ & +3\mu.\alpha_{15}\gamma_3\eta\eta'^2 \sin(3w-v) && +3\mu.\alpha_{16}\gamma_3\eta'^3 \sin(9w-3v_1)\\ & +3\mu.\alpha_{16}\gamma_2\eta\eta'^2 \sin(3w+v-2v_1) && \\ & +3\mu.\alpha_{16}\gamma_3\eta'^3 \sin(3w-v_1). && \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

---

c) Die Koeffizientenbestimmung des Integralansatzes.

Die zehn verschiedenen in den Gleichungen (3) und (4) auftretenden neuen Argumente, die sämtlich von der Form C sind, müssen offenbar ebenso im unbestimmten Integralansatz für S_3 auftreten. Entsprechend wie wir im Integralansatz für S und R (cf. I, S. 381) den Koeffizientenindex 6 übersprangen und ihn für das eine auftretende koordinierte Glied ersten Grades in K verwandten, damit im übrigen in den Indices 1 bis 19 in S, R, K Symmetrie stattfände, verfahren wir auch bei Bildung des unbestimmten Integralansatzes für S_3 und R_3, indem wir die Indices 20, 21, 22, die wir für die drei beim zweiten Grad auftretenden koordinierten Glieder in T verwandten (cf. I, S. 382) überspringen, damit die Indices in S_3, R_3, T_3 übereinstimmen. Dabei müssen wir aber auch noch, um diese Symmetrie zu wahren, wie der Blick auf die folgenden Entwicklungen zeigt, die Indices 29 bis 38 in S_3 überspringen, da deren Argumente in R_3, nicht aber in S_3 vorkommen. In diesem Sinne erhalten wir als unbestimmten Integralansatz für S_3 offenbar:

$$\left.\begin{aligned}S_3 = {} & \alpha_{23}\eta^3 \cos(3w-v) && +\alpha_{39}\eta^3 \cos(9w-3v)\\ & \alpha_{24}\eta^2\eta' \cos(3w-2v+v_1) && +\alpha_{40}\eta^2\eta' \cos(9w-2v-v_1)\\ & \alpha_{25}\eta^2\eta' \cos(3w-v_1) && +\alpha_{41}\eta\eta'^2 \cos(9w-v-2v_1)\\ & \alpha_{26}\eta\eta'^2 \cos(3w-v) && +\alpha_{42}\eta'^3 \cos(9w-3v_1)\\ & \alpha_{27}\eta\eta'^2 \cos(3w+v-2v_1) && \\ & \alpha_{28}\eta'^3 \cos(3w-v_1), && \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

also durch Differentiation:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dS_3}{dv}\right)_3 = {} & -(\delta_1+\varsigma)\alpha_{23}\eta^3 \sin(3w-v) && -3(\delta_1+\varsigma)\alpha_{39}\eta^3 \sin(9w-3v)\\ & -(\delta_1+2\varsigma-\varsigma_1)\alpha_{24}\eta^2\eta' \sin(3w-2v+v_1) && -(3\delta_1+2\varsigma+\varsigma_1)\alpha_{40}\eta^2\eta' \sin(9w-2v-v_1)\\ & -(\delta_1+\varsigma_1)\alpha_{25}\eta^2\eta' \sin(3w-v_1) && -(3\delta_1+\varsigma+2\varsigma_1)\alpha_{41}\eta\eta'^2 \sin(9w-v-2v_1)\\ & -(\delta_1+\varsigma)\alpha_{26}\eta\eta'^2 \sin(3w-v) && -3(\delta_1+\varsigma_1)\alpha_{42}\eta'^3 \sin(9w-3v_1)\\ & -(\delta_1-\varsigma+2\varsigma_1)\alpha_{27}\eta\eta'^2 \sin(3w+v-2v_1) && \\ & -(\delta_1+\varsigma_1)\alpha_{28}\eta'^3 \sin(3w-v_1). && \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Somit ergibt die Gleichung (1) mit Hinblick auf (3), (4), (6) unter Einhaltung der festgesetzten Genauigkeitsgrenze für die gesuchten unbekannten Koeffizienten der exargumentalen Glieder dritten Grades in S, das heißt für das Integral S_3 folgende Werte, die in (5) einzuführen sind:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{23} &= \frac{3\mu\alpha_{14}\gamma_2 - \frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\alpha_2}{\delta_1} \\
\alpha_{24} &= \frac{3\mu\alpha_{14}\gamma_3 - \frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\alpha_3}{\delta_1} \\
\alpha_{25} &= \frac{3\mu\alpha_{15}\gamma_2 - \frac{3}{2}\gamma_{15}\alpha_2}{\delta_1} \\
\alpha_{26} &= \frac{3\mu\alpha_{15}\gamma_3 - \frac{3}{2}\mu\gamma_{15}\alpha_3}{\delta_1} \\
\alpha_{27} &= \frac{3\mu\alpha_{16}\gamma_2 - \frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\alpha_2}{\delta_1} \\
\alpha_{28} &= \frac{3\mu\alpha_{16}\gamma_3 - \frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\alpha_3}{\delta_1} \\
\alpha_{39} &= \frac{3\mu\alpha_{14}\gamma_2 + \frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\alpha_2}{3\delta_1} \\
\alpha_{40} &= \frac{3\mu\alpha_{14}\gamma_3 + 3\mu\alpha_{15}\gamma_2 + \frac{3}{2}\mu\gamma_{15}\alpha_2 + \frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\alpha_3}{3\delta_1} \\
\alpha_{41} &= \frac{3\mu\alpha_{15}\gamma_3 + 3\mu\alpha_{16}\gamma_2 + \frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\alpha_2 + \frac{3}{2}\mu\gamma_{15}\alpha_3}{3\delta_1} \\
\alpha_{42} &= \frac{3\mu\alpha_{16}\gamma_3 + \frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\alpha_3}{3\delta_1} .
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Da α_2, α_3 und γ_2, γ_3 durch die Integration für den ersten Grad, und α_{14}, α_{15}, α_{16} durch die Integration für den zweiten Grad bereits ermittelt sind (respective γ_{14}, γ_{15}, γ_{16} in Abteilung III durch Integration der Differentialgleichung für die Glieder zweiten Grades in T noch ermittelt werden, so sind darnach α_{23} bis α_{42} vollständig bekannt und die exargumentalen Glieder dritten Grades in S durch Gleichung (5) für S_3 mit Rücksicht auf (7) berechenbar.

B. Die exargumentalen Glieder dritten Grades in *R*.

a) Die aus dem nullten Grade entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades in *R*.

Während die Bestimmung der exargumentalen Glieder in S verhältnismäßig einfach war, gestaltet sich die Ermittlung der in R in Betracht kommenden exargumentalen Glieder dritten Grades wesentlich komplizierter. Es kommt vor allem darauf an, klarzustellen, welche von diesen Gliedern angesichts der jetzt ins Auge gefaßten Genauigkeitsgrenze nicht in Betracht kommen und fortgelassen werden dürfen und welche mitgenommen werden müssen.

Bezeichne:

$\left(\frac{d^2R_0}{dv^2}+R_0\right)_3$ die aus dem nullten Grad entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades,

$\left(\frac{d^2R_1}{dv^2}+R_1\right)_3$ die aus dem ersten Grad entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades,

$\left(\frac{d^2R_2}{dv^2}+R_2\right)_3$ die aus dem zweiten Grad entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades,

$\left(\frac{d^2R_3}{dv^2}+R_3\right)_3$ den differentierten unbestimmten Integralansatz für die exargumentalen Glieder dritten Grades,

$\left(\frac{d^2R}{dv^2}+R\right)_3$ die aus den Gliedern dritten Grades in P und Q gebildete Differentialgleichung,

so ist ja allgemein:

$$\left(\frac{d^2R}{dv^2}+R\right)_3=\left(\frac{d^2R_0}{dv^2}+R_0\right)_3+\left(\frac{d^2R_1}{dv^2}+R_1\right)_3+\left(\frac{d^2R_2}{dv^2}+R_2\right)_3+\left(\frac{d^2R_3}{dv^2}+R_3\right)_3. \tag{8}$$

Da aber R_0, R_1, R_2 nicht dritten Grades sind und auch nicht differentiert werden, so kommen sie bei Bestimmung der exargumentalen Glieder für uns jetzt nicht in Betracht, ebensowenig die linke Seite der Gleichung (8), da wir die Glieder dritten Grades in P und Q selbst ja jetzt nicht berücksichtigen. Die Gleichung (8) wird daher:

$$-\left(\frac{d^2R_3}{dv^2}+R_3\right)_3=\left(\frac{d^2R_0}{dv^2}\right)_3+\left(\frac{d^2R_1}{dv^2}\right)_3+\left(\frac{d^2R_2}{dv^2}\right)_3. \tag{9}$$

Nun war aber, wie im sechsten Kapitel (cf. S. 26) gezeigt:

$$\begin{aligned}\frac{d^2R_0}{dv^2} &= -(1+\delta_1)^2\beta_1\cos 3w\\ &+\left\{6\mu(1+\delta_1)\frac{dV}{dv}-9\mu^2\left(\frac{dV}{dv}\right)^2\right\}\beta_1\cos 3w\\ &+3\mu\beta_1\frac{d^2V}{dv^2}\sin 3w.\end{aligned}$$

Um jetzt erstens die aus:

$$6\mu(1+\delta_1)\frac{dV}{dv}\beta_1\cos 3w \tag{10}$$

resultierenden Glieder dritten Grades zu bekommen, müßte man eigentlich von $\frac{dV}{dv}$ die Glieder dritten Grades kennen, während unser Ansatz in Abteilung I (S. 382) für:

$$\left(\frac{dT}{dv}\right)_l = \frac{dV}{dv}$$

nur inklusive bis zum zweiten Grad reicht. Da wir es ja aber jetzt nur auf den größten Teil von $\frac{dV}{dv}$, eben den exargumentalen absehen, dessen zehn Argumente der Form C wir bei Untersuchung der Funktion S kennen gelernt haben, so können wir offenbar ansetzen:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dV}{dv}\right)_3 = {} & \gamma_{23}\,\eta^3 \cos(3w - \mathrm{v}) && + \gamma_{39}\,\eta^3 \cos(9w - 3\mathrm{v}) \\ & + \gamma_{24}\,\eta^2\eta' \cos(3w - 2\mathrm{v} + \mathrm{v}_1) && + \gamma_{40}\,\eta^2\eta' \cos(9w - 2\mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\ & + \gamma_{25}\,\eta^2\eta' \cos(3w - \mathrm{v}_1) && + \gamma_{41}\,\eta\eta'^2 \cos(9w - \mathrm{v} - 2\mathrm{v}_1) \\ & + \gamma_{26}\,\eta\eta'^2 \cos(3w - \mathrm{v}) && + \gamma_{42}\,\eta'^3 \cos(9w - 3\mathrm{v}_1) \\ & + \gamma_{27}\,\eta\eta'^2 \cos(3w + \mathrm{v} - 2\mathrm{v}_1) && \\ & + \gamma_{28}\,\eta'^3 \cos(3w - \mathrm{v}_1). && \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Die γ sind nun (cf. I, Kapitel III) sämtlich von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$. Hier brauchen wir nur solche Glieder, welche noch etwas größer sind, also zum Beispiel von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1} \cdot \frac{m'}{\delta_1^2}$. Bei nicht kritischen Planeten, die ja definiert sind, durch:

$$\delta_1 > \sqrt{m'}$$

ist also $\delta_1^2 > m'$, mithin $\frac{m'}{\delta_1^2} < 1$, also:

$$\frac{m'^2}{\delta_1^3} < \frac{m'}{\delta_1}$$

und die aus (10) resultierenden Glieder kommen bei ihnen also im Hinblick auf die jetzige Genauigkeitsgrenze nicht in Betracht.

Bei kritischen Planeten hingegen, für die ja:

$$\delta_1 < \sqrt{m'},$$

also:

$$\frac{m'^2}{\delta_1^3} > \frac{m'}{\delta_1}$$

ist, müssen die aus (10) hervorgehenden Glieder mitgenommen werden. Durch Einsetzen von (11) in (10) und Ausführung der periodischen Aggregate erhält man für diese Glieder:

$$\left.\begin{aligned}6\mu(1+\delta_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_3 \beta_1 \cos 3w = {} & k\beta_1\gamma_{23}\eta^3 \cos(6w - \mathrm{v}) && + k\beta_1\gamma_{39}\eta^3 \cos(6w - 3\mathrm{v}) \\ & + k\beta_1\gamma_{24}\eta^2\eta' \cos(6w - 2\mathrm{v} + \mathrm{v}_1) && + k\beta_1\gamma_{40}\eta^2\eta' \cos(6w - 2\mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \\ & + k\beta_1\gamma_{25}\eta^2\eta' \cos(6w - \mathrm{v}_1) && + k\beta_1\gamma_{41}\eta\eta'^2 \cos(6w - \mathrm{v} - 2\mathrm{v}_1) \\ & + k\beta_1\gamma_{26}\eta\eta'^2 \cos(6w - \mathrm{v}) && + k\beta_1\gamma_{42}\eta'^3 \cos(6w - 3\mathrm{v}_1) \\ & + k\beta_1\gamma_{27}\eta\eta'^2 \cos(6w + \mathrm{v} - 2\mathrm{v}_1) && \\ & + k\beta_1\gamma_{28}\eta'^3 \cos(6w - \mathrm{v}_1) && \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
+k\beta_1\gamma_{39}\eta^3\cos(12w-3\mathrm{v}) & +k\beta_1\gamma_{23}\eta^3\cos\mathrm{v} \\
+k\beta_1\gamma_{40}\eta^2\eta'\cos(12w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) & +k\beta_1\gamma_{26}\eta\eta'^2\cos\mathrm{v} \\
+k\beta_1\gamma_{41}\eta\eta'^2\cos(12w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) & +k\beta_1\gamma_{24}\eta^2\eta'\cos(2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
+k\beta_1\gamma_{42}\eta'^3\cos(12w-3\mathrm{v}_1) & +k\beta_1\gamma_{27}\eta\eta'^2\cos(\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) \\
 & +k\beta_1\gamma_{25}\eta^2\eta'\cos\mathrm{v}_1 \\
 & +k\beta_1\gamma_{28}\eta'^3\cos\mathrm{v}_1,
\end{array}\right\} \tag{12}$$

wobei jedoch die Glieder der Argumente v, $2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1$, $\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1$ und v_1 als elementäre Glieder dritten Grades der Form B zu $(\rho)_3$ kommen und:

$$k = 3\mu(1+\delta_1)$$

gesetzt wurde.

Um zweitens die aus:

$$-9\mu^2\left(\frac{dV}{dv}\right)^2\beta_1\cos 3w \tag{13}$$

hervorgehenden exargumentalen Glieder dritten Grades zu untersuchen, wäre ja $\left(\frac{dV}{dv}\right)^2_3$ zu bilden, und zwar nur der große Teil dieses Ausdruckes. Nun ist aber (cf. I, S. 382):

$$\frac{dV}{dv} \asymp \frac{m'}{\delta_1},$$

also:

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)^2 \asymp \frac{m'^2}{\delta_1^2},$$

mithin:

$$\beta_1\left(\frac{dV}{dv}\right)^2 \asymp \frac{m'^3}{\delta_1^3}.$$

Definiert sind aber die nicht kritischen Planeten durch

$$\delta_1 > \sqrt{m'},$$

die kritischen durch:

$$\delta_1 < \sqrt{m'}.$$

Für die Grenze zwischen nicht kritischen und kritischen Planeten erhält man also, indem man in $\beta_1\left(\frac{dV}{dv}\right)^2$:

$$\delta_1^2 = m'$$

setzt:

$$\beta_1\left(\frac{dV}{dv}\right)^2 \asymp m'\sqrt{m'}\,.$$

Für nicht kritische Planeten ist dieser Ausdruck der Größenordnung nach kleiner als m'. Bei kritischen Planeten ist er nur um ein geringes größer als bei nicht kritischen Planeten, keinesfalls aber größer als m', fällt also, wenn man den dritten Grad in P und Q selbst nicht in Betracht zieht, jetzt fort.

Um drittens zu untersuchen, ob exargumentale Glieder dritten Grades, die aus:

$$3\mu\frac{d^2V}{dv^2}\beta_1\sin 3w \tag{14}$$

folgen, mitzunehmen sind, kann man offenbar auch schreiben:

$$\left(\frac{d^2V}{dv^2}\right)_3 = \left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_3}{dv}\right)_3 + \left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_2}{dv}\right)_3 + \left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_1}{dv}\right)_3 + \left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_0}{dv}\right)_3. \tag{15}$$

Durch Differentiation von (11) erhält man aber:

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_3}{dv} = &-(\delta_1+\varsigma)\gamma_{23}\eta^3 \sin(3w-\mathrm{v}) &&-3(\delta_1+\varsigma)\gamma_{39}\eta^3 \sin(9w-3\mathrm{v})\\ &-(\delta_1+2\varsigma-\varsigma_1)\gamma_{24}\eta^2\eta' \sin(3w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) &&-(3\delta_1+2\varsigma+\varsigma_1)\gamma_{40}\eta^2\eta' \sin(9w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &-(\delta_1+\varsigma_1)\gamma_{25}\eta^2\eta' \sin(3w-\mathrm{v}_1) &&-(3\delta_1+\varsigma+2\varsigma_1)\gamma_{41}\eta\eta'^2 \sin(9w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\ &-(\delta_1+\varsigma)\gamma_{26}\eta\eta'^2 \sin(3w-\mathrm{v}) &&-3(\delta_1+\varsigma_1)\gamma_{42}\eta'^3 \sin(9w-3\mathrm{v}_1)\\ &-(\delta_1-\varsigma+2\varsigma_1)\gamma_{27}\eta\eta'^2 \cos(3w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\ &-(\delta_1+\varsigma_1)\gamma_{28}\eta'^3 \sin(3w-\mathrm{v}_1).\end{aligned}$$

Somit ist:

$$\left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_3}{dv}\right)_3 \equiv m', \text{ respektive } \frac{m'^2}{\delta_1},$$

also:

$$\beta_1\left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_3}{dv}\right)_3 \equiv \frac{m'^2}{\delta_1}, \text{ respektive } \frac{m'^3}{\delta_1^2}. \tag{16}$$

Um das zweite Glied der rechten Seite von Gleichung (15) zu untersuchen, ist ja:

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_2 = \gamma_{14}\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v}) + \gamma_{15}\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \gamma_{16}\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1),$$

also:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_2}{dv}\right)_3 = &-6\gamma_{14}\eta^2\sin(6w-2\mathrm{v})\frac{dw}{dv}\\ &-6\gamma_{15}\eta\eta'\sin(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\frac{dw}{dv}\\ &-6\gamma_{16}\eta'^2\sin(6w-2\mathrm{v}_1)\frac{dw}{dv}\end{aligned}$$

oder da jetzt:

$$\frac{dw}{dv} = -\mu\frac{dV}{dv} = -\mu\gamma_2\eta\cos(3w-\mathrm{v}) - \mu\gamma_3\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)$$

ist, auch:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_2}{dv}\right)_3 = &\;3\mu\gamma_2\gamma_{14}\eta^3\sin(3w-\mathrm{v})\\ &+3\mu\gamma_3\gamma_{14}\eta^2\eta'\sin(3w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)\\ &+\text{lauter Produkte in je zwei Faktoren } \gamma,\end{aligned}$$

also:

$$\left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_2}{dv}\right)_3 \asymp \frac{m'^2}{\delta_1^2},$$

das heißt:

$$\beta_1 \left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_2}{dv}\right)_3 \asymp \frac{m'^3}{\delta_1^3},$$

also wird für die Grenze $\delta_1^2 = m'$:

$$\beta_1 \left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_2}{dv}\right)_3 \asymp \left(\frac{m'^2}{\delta_1} = \frac{m'^2}{\sqrt{m'}} = m'\sqrt{m'}\right) \tag{17}$$

und kann nahe an m' herankommen, keinesfalls aber m' übersteigen.

Um das dritte Glied der rechten Seite von Gleichung (15) zu untersuchen, differentieren wir $\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$, erhalten so:

$$\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_1}{dv} = -3\gamma_2\eta \sin(3w-\mathrm{v})\frac{dw}{dv} - 3\gamma_3\eta' \sin(3w-\mathrm{v}_1)\frac{dw}{dv}$$

und setzen hierin:

$$\frac{dw}{dv} = -\mu\left(\frac{dV}{dv}\right)_2 = -\mu\gamma_{14}\eta^2 \cos(6w-2\mathrm{v}) - \mu\gamma_{15}\eta\eta' \cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)$$
$$-\mu\gamma_{16}\eta'^2 \cos(6w-2\mathrm{v}_1).$$

Dann wird:

$$\left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_1}{dv}\right)_3 = -\frac{3}{2}\mu\gamma_2\gamma_{14}\eta^3 \sin(3w-\mathrm{v})$$
$$-\frac{3}{2}\mu\gamma_3\gamma_{14}\eta^2\eta' \sin(3w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)$$
$$\mp \text{ lauter Produkte in je zwei Faktoren } \gamma$$

also analog wie beim zuvor betrachteten Glied:

$$\beta_1 \left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_1}{dv}\right)_3 \asymp m'\sqrt{m'}, \tag{18}$$

das heißt der Größenordnung nach kleiner als m' und höchstens nahezu gleich m'.

Schließlich ist (cf. I, S. 382):

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_0 = 0,$$

also:

$$\left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_0}{dv}\right)_3 = 0. \tag{19}$$

Ziehen wir das Resumé unserer bisherigen Betrachtung, so wird das erste Glied der rechten Seite von Gleichung (9) mit Rücksicht auf die gesetzte Genauigkeitsgrenze.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d^2R_0}{dv^2}\right)_3 = {} & k\beta_1\gamma_{23}\eta^3\cos(6w-\mathrm{v}) && +k\beta_1\gamma_{39}\eta^3\cos(6w-3\mathrm{v}) \\
& + k\beta_1\gamma_{24}\eta^2\eta'\cos(6w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && +k\beta_1\gamma_{40}\eta^2\eta'\cos(6w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& + k\beta_1\gamma_{25}\eta^2\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1) && +k\beta_1\gamma_{41}\eta\eta'^2\cos(6w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) \\
& + k\beta_1\gamma_{26}\eta\eta'^2\cos(6w-\mathrm{v}) && +k\beta_1\gamma_{42}\eta'^3\cos(6w-3\mathrm{v}_1) \\
& + k\beta_1\gamma_{27}\eta\eta'^2\cos(6w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) && +k\beta_1\gamma_{39}\eta^3\cos(12w-3\mathrm{v}) \\
& + k\beta_1\gamma_{28}\eta'^5\cos(6w-\mathrm{v}_1) && +k\beta_1\gamma_{40}\eta^2\eta'\cos(12w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& && +k\beta_1\gamma_{41}\eta\eta'^2\cos(12w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) \\
& && +k\beta_1\gamma_{42}\eta'^3\cos(12w-3\mathrm{v}_1),
\end{aligned}
\tag{20}
$$

wobei:

$$k = 3\mu(1+\delta_1)$$

ist.

---

b) **Die aus dem ersten Grade entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades in** R.

Wir haben nun weiter zu untersuchen, in welchen exargumentalen Gliedern dritten Grades das zweite Glied der rechten Seite von Gleichung (9):

$$\left(\frac{d^2R_1}{dv^2}\right)_3$$

besteht. Dazu differentieren wir zunächst den unbestimmten Integralansatz für die Glieder ersten Grades in R zweimal, was bereits bei Aufsuchung der exargumentalen Glieder zweiten Grades in R in Kapitel VI geschah. Dort fanden wir:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2R_1}{dv^2} = {} & -\beta_2\eta\cos(3w-\mathrm{v})\left\{3\frac{dw}{dv}-1+\varsigma\right\}^2 \\
& -\beta_3\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}-1+\varsigma_1\right\}^2 \\
& -\beta_4\eta\cos(6w-\mathrm{v})\left\{6\frac{dw}{dv}-1+\varsigma\right\}^2 \\
& -\beta_5\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1)\left\{6\frac{dw}{dv}-1+\varsigma_1\right\}^2 \\
& -3\beta_2\eta\sin(3w-\mathrm{v})\frac{d^2w}{dv^2} \\
& -3\beta_3\eta'\sin(3w-\mathrm{v}_1)\frac{d^2w}{dv^2} \\
& -6\beta_4\eta\sin(6w-\mathrm{v})\frac{d^2w}{dv^2} \\
& -6\beta_5\eta'\sin(6w-\mathrm{v}_1)\frac{d^2w}{dv^2}.
\end{aligned}
$$

Mit Hinblick auf den früheren Wert:

$$\frac{dw}{dv} = \frac{1+\delta_1}{3} - \mu\,\frac{dV}{dv}$$

schreiben wir diese Gleichung nun so:

$$\frac{d^2R_1}{dv^2} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 6\mu(\delta_1+\varsigma)\beta_2\eta\cos(3w-\mathrm{v}) + 12\mu(1+2\delta_1+\varsigma)\beta_4\eta\cos(6w-\mathrm{v}) \\ +6\mu(\delta_1+\varsigma_1)\beta_3\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1) + 12\mu(1+2\delta_1+\varsigma_1)\beta_5\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1) \end{array} \right\} \dfrac{dV}{dv} \\ + \left\{ \begin{array}{l} 3\mu\beta_2\eta\sin(3w-\mathrm{v}) + 6\mu\beta_4\eta\sin(6w-\mathrm{v}) \\ +3\mu\beta_3\eta'\sin(3w-\mathrm{v}_1) + 6\mu\beta_5\eta'\sin(6w-\mathrm{v}_1) \end{array} \right\} \dfrac{d^2V}{dv^2} \\ - \left\{ \begin{array}{l} 9\mu^2\beta_2\eta\cos(3w-\mathrm{v}) + 36\mu^2\beta_4\eta\cos(6w-\mathrm{v}) \\ +9\mu^2\beta_3\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1) + 36\mu^2\beta_5\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1) \end{array} \right\} \left(\dfrac{dV}{dv}\right)^2. \end{array} \right. \tag{21}$$

In den vier ersten Gliedern hat man offenbar zu setzen:

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_2 = \gamma_{14}\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v}) + \gamma_{15}\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \gamma_{16}\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1).$$

Bei Ausführung der periodischen Aggregate ergeben die beiden Glieder der Form C (Argument $3w-\mathrm{v}$) Glieder von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ bezüglich $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$, da $\delta_1\beta\gamma \asymp \frac{m'^2}{\delta_1}$ und $\varsigma\beta\gamma \asymp \frac{m'^3}{\delta_1^2}$ ist. Diese Glieder werden für die Grenze $\delta_1^2 = m'$ von der Ordnung $m'\sqrt{m'}$, fallen also fort. Die beiden Glieder der Form D hingegen geben, wie man sieht, zwar ebenfalls Glieder der eben genannten Ordnungen. Außerdem aber ergeben diese Glieder offenbar noch solche von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$. Und diese letzteren Glieder werden für die Grenze von der Ordnung m', bei kritischen Planeten sogar noch etwas größer, sind also mitzunehmen. Diese Glieder sind:

$$\begin{array}{ll} +6\mu\beta_4\gamma_{14}\eta^3\cos(12w-3\mathrm{v}) & +6\mu\beta_4\gamma_{14}\eta^3\cos\mathrm{v} \\ +6\mu(\beta_4\gamma_{15}+\beta_5\gamma_{14})\eta^2\eta'\cos(12w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) & +6\mu\beta_5\gamma_{15}\eta\eta'^2\cos\mathrm{v} \\ +6\mu(\beta_4\gamma_{16}+\beta_5\gamma_{15})\eta\eta'^2\cos(12w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) & +6\mu\beta_5\gamma_{14}\eta^2\eta'\cos(2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ +6\mu\beta_5\gamma_{16}\eta'^3\cos(12w-3\mathrm{v}_1) & +6\mu\beta_4\gamma_{16}\eta\eta'^2\cos(\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) \\ & +6\mu\beta_4\gamma_{15}\eta^2\eta'\cos\mathrm{v}_1 \\ & +6\mu\beta_5\gamma_{16}\eta'^3\cos\mathrm{v}_1, \end{array}$$

wobei die Glieder der Argumente v, $2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1$, $\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1$, v_1, weil elementär von der Form B, zu $(\rho)_3$ kommen.

In Betrachtung der vier letzten Glieder von (21), wäre bei Bildung der periodischen Aggregate der Teil zweiten Grades aus $\left(\frac{dV}{dv}\right)^2$ zugrunde zu legen. Es ist ja aber:

$$\frac{dV}{dv} \asymp \frac{m'}{\delta_1},$$

also:

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)^2 \asymp \frac{m'^2}{\delta_1^2},$$

mithin:

$$\beta_2\left(\frac{dV}{dv}\right)^2 \asymp \frac{m'^3}{\delta_1^3},$$

also, da:

$$\frac{m'^3}{\delta_1^3} = \frac{m'}{\delta_1^2} \cdot \frac{m'}{\delta_1} . m'$$

und für die Grenze von nicht kritischen und kritischen Planeten $\delta_1^2 = m'$ ist, so wird für diese:

$$\beta_2 \left(\frac{dV}{dv}\right)^2 \asymp m' \sqrt{m'}$$

kommt also bei der vorgesetzten Genauigkeitsgrenze nicht in Betracht.

Zur Untersuchung schließlich, ob die vier mittleren mit $\frac{d^2 V}{dv^2}$ multiplizierten Glieder in (21) mitzunehmende exargumentale Glieder dritten Grades ergeben, setzen wir wie folgt an:

$$\left(\frac{d^2 V}{dv^2}\right)_2 = \left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_1}{dv}\right)_2 + \left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_2}{dv}\right)_2 \tag{22}$$

und differentieren zunächst den Ausdruck für $\frac{dV}{dv}$ hinsichtlich der Glieder ersten Grades. Dann wird:

$$\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_1}{dv} = -\gamma_2 \eta \sin(3w - \mathrm{v}) \left\{3\frac{dw}{dv} - 1 + \varsigma\right\}$$
$$-\gamma_3 \eta' \sin(3w - \mathrm{v}_1) \left\{3\frac{dw}{dv} - 1 + \varsigma_1\right\}$$

oder mit Hinblick darauf, daß jetzt:

$$\frac{dw}{dv} = -\mu \left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

zu setzen:

$$\left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_1}{dv}\right)_2 = 3\mu\gamma_2 \eta \sin(3w - \mathrm{v}) \left(\frac{dV}{dv}\right)_1 + 3\mu\gamma_3 \eta' \sin(3w - \mathrm{v}_1) \left(\frac{dV}{dv}\right)_1.$$

Es wird demnach:

$$\left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_1}{dv}\right)_2 \asymp \frac{m'^2}{\delta_1^2} \tag{23}$$

für die Grenze $\delta_1^2 = m'$ also wird dies Glied von der Ordnung m'. Dies sei zunächst festgestellt.

Durch Differentiation ferner der Glieder zweiten Grades in $\frac{dV}{dv}$ erhält man:

$$\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_2}{dv} = -\gamma_{14} \eta^2 \sin(6w - 2\mathrm{v}) \left\{6\frac{dw}{dv} - 2 + 2\varsigma\right\}$$
$$-\gamma_{15} \eta\eta' \sin(6w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \left\{6\frac{dw}{dv} - 2 + \varsigma + \varsigma_1\right\}$$
$$-\gamma_{16} \eta'^2 \sin(6w - 2\mathrm{v}_1) \left\{6\frac{dw}{dv} - 2 + 2\varsigma_1\right\}$$

oder:

$$\left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_2}{dv}\right)_2 = 6\mu\gamma_{14} \eta^2 \sin(6w - 2\mathrm{v}) \left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$
$$+ 6\mu\gamma_{15} \eta\eta' \sin(6w - \mathrm{v} - \mathrm{v}_1) \left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$
$$+ 6\mu\gamma_{16} \eta'^2 \sin(6w - 2\mathrm{v}_1) \left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

also für die Grenzen auch:

$$\left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_2}{dv}\right)_2 \asymp m'. \tag{24}$$

Indem also die rechte Seite der Gleichung (22) von der Ordnung m' ist, wird:

$$\beta_2 \frac{d^2V}{dv^2} \asymp \left(\frac{m'^2}{\delta_1} = \frac{m'}{\delta_1} . m'\right),$$

also für die Grenze:

$$\beta_2 \frac{d^2V}{dv^2} \asymp m'\sqrt{m'}$$

fällt also fort.

Im ganzen wird daher:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d^2R_1}{dv^2}\right)_3 &= 6\mu\beta_4\gamma_{14}\eta^3 \cos(12w - 3v)\\ &+6\mu(\beta_4\gamma_{15}+\beta_5\gamma_{14})\eta^2\eta' \cos(12w-2v-v_1)\\ &+6\mu(\beta_4\gamma_{16}+\beta_5\gamma_{15})\eta\eta'^2 \cos(12w-v-2v_1)\\ &+6\mu\beta_5\gamma_{16}\eta'^3 \cos(12w-3v_1).\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

---

c) **Die aus dem zweiten Grad entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades in** R.

Etwas weitläufiger gestaltet sich die Untersuchung welche mitzunehmenden exargumentalen Glieder dritten Grades das dritte Glied der rechten Seite von Gleichung (9):

$$\left(\frac{d^2R_2}{dv^2}\right)_3$$

ergibt. Dazu differentieren wir den früher gefundenen unbestimmten Integralansatz für R_2 (cf. I, S. 381):

$$\begin{aligned}R_2 = \beta_7\eta^2\cos 3w \quad &+\beta_{11}\eta^2\cos(3w-2v) &&+\beta_{14}\eta^2\cos(6w-2v)\\ +\beta_8\eta\eta'\cos(3w+v-v_1) &+\beta_{12}\eta\eta'\cos(3w-v-v_1) &&+\beta_{15}\eta\eta'\cos(6w-v-v_1)\\ +\beta_9\eta\eta'\cos(3w-v+v_1) &+\beta_{13}\eta'^2\cos(3w-2v_1) &&+\beta_{16}\eta'^2\cos(6w-2v_1)\\ +\beta_{10}\eta'^2\cos 3w & && \\ & &&+\beta_{17}\eta^2\cos(9w-2v)\\ & &&+\beta_{18}\eta\eta'\cos(9w-v-v_1)\\ & &&+\beta_{19}\eta'^2\cos(9w-2v_1)\end{aligned}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{dR_2}{dv} &= -3\beta_7\eta^2\sin 3w\frac{dw}{dv}\\ &-\beta_8\eta\eta'\sin(3w+v-v_1)\left\{3\frac{dw}{dv}-\varsigma+\varsigma_1\right\}\\ &-\beta_9\eta\eta'\sin(3w-v+v_1)\left\{3\frac{dw}{dv}+\varsigma-\varsigma_1\right\}\\ &-3\beta_{10}\eta'^2\sin 3w\frac{dw}{dv}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\beta_{11}\,\eta^2 \sin(3w-2\mathrm{v})\left\{3\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma\right\}\\
&-\beta_{12}\,\eta\eta' \sin(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}-2+\varsigma+\varsigma_1\right\}\\
&-\beta_{13}\,\eta'^2 \sin(3w-2\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma_1\right\}\\
&-\beta_{14}\,\eta^2 \sin(6w-2\mathrm{v})\left\{6\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma\right\}\\
&-\beta_{15}\,\eta\eta' \sin(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\left\{6\frac{dw}{dv}-2+\varsigma+\varsigma_1\right\}\\
&-\beta_{16}\,\eta'^2 \sin(6w-2\mathrm{v}_1)\left\{6\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma_1\right\}\\
&-\beta_{17}\,\eta^2 \sin(9w-2\mathrm{v})\left\{9\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma\right\}\\
&-\beta_{18}\,\eta\eta' \sin(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\left\{9\frac{dw}{dv}-2+\varsigma+\varsigma_1\right\}\\
&-\beta_{19}\,\eta'^2 \sin(9w-2\mathrm{v}_1)\left\{9\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma_1\right\},
\end{aligned}
$$

also durch nochmalige Differentiation:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{d^2R_2}{dv^2} = &-9\beta_7\eta^2\cos 3w\left(\frac{dw}{dv}\right)^2\\
&-\beta_8\,\eta\eta'\cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}-\varsigma+\varsigma_1\right\}^2\\
&-\beta_9\,\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}+\varsigma-\varsigma_1\right\}^2\\
&-9\beta_{10}\eta'^2\cos 3w\left(\frac{dw}{dv}\right)^2\\
&-\beta_{11}\,\eta^2\cos(3w-2\mathrm{v})\left\{3\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma\right\}^2\\
&-\beta_{12}\,\eta\eta'\cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}-2+\varsigma+\varsigma_1\right\}^2\\
&-\beta_{13}\,\eta'^2\cos(3w-2\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma_1\right\}^2\\
&-\beta_{14}\,\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})\left\{6\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma\right\}^2\\
&-\beta_{15}\,\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\left\{6\frac{dw}{dv}-2+\varsigma+\varsigma_1\right\}^2\\
&-\beta_{16}\,\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1)\left\{6\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma_1\right\}^2\\
&-\beta_{17}\,\eta^2\cos(9w-2\mathrm{v})\left\{9\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma\right\}^2\\
&-\beta_{18}\,\eta\eta'\cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\left\{9\frac{dw}{dv}-2+\varsigma+\varsigma_1\right\}^2
\end{aligned}
\right\}
\quad (26)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\beta_{19}\eta'^2\cos(9w-2v_1)\left\{9\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma_1\right\}^2\\
&-3\beta_7\eta^2\sin 3w\,\frac{d^2w}{dv^2}\\
&-3\beta_8\eta\eta'\sin(3w+v-v_1)\frac{d^2w}{dv^2}\\
&-3\beta_9\eta\eta'\sin(3w-v+v_1)\frac{d^2w}{dv^2}\\
&-3\beta_{10}\eta'^2\sin 3w\,\frac{d^2w}{dv^2}\\
&-3\beta_{11}\eta^2\sin(3w-2v)\frac{d^2w}{dv^2}\\
&-3\beta_{12}\eta\eta'\sin(3w-v-v_1)\frac{d^2w}{dv^2}\\
&-3\beta_{13}\eta'^2\sin(3w-2v_1)\frac{d^2w}{dv^2}\\
&-6\beta_{14}\eta^2\sin(6w-2v)\frac{d^2w}{dv^2}\\
&-6\beta_{15}\eta\eta'\sin(6w-v-v_1)\frac{d^2w}{dv^2}\\
&-6\beta_{16}\eta'^2\sin(6w-2v_1)\frac{d^2w}{dv^2}\\
&-9\beta_{17}\eta^2\sin(9w-2v)\frac{d^2w}{dv^2}\\
&-9\beta_{18}\eta\eta'\sin(9w-v-v_1)\frac{d^2w}{dv^2}\\
&-9\beta_{19}\eta'^2\sin(9w-2v_1)\frac{d^2w}{dv^2}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{26}
$$

Mit Hinblick auf den Wert von $\frac{dw}{dv}$ aber wird, da wir offenbar bloß Glieder, die mit $\frac{dV}{dv}$ behaftet sind, ins Auge fassen müssen, zum Beispiel:

$$\left\{3\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma\right\}^2=-6(\delta_1+2\varsigma-1)\mu\frac{dV}{dv}+9\mu^2\left(\frac{dV}{dv}\right)^2$$

$$\left\{6\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma\right\}^2=-24(\delta_1+\varsigma)\mu\frac{dV}{dv}+36\mu^2\left(\frac{dV}{dv}\right)^2$$

$$\left\{9\frac{dw}{dv}-2+2\varsigma\right\}^2=-18(1+3\delta_1+2\varsigma)\mu\frac{dV}{dv}+81\mu^2\left(\frac{dV}{dv}\right)^2.$$

Wenn man diese Werte in (26) einsetzt und dabei bedenkt, daß $\frac{dV}{dv}$ vom ersten, $\left(\frac{dV}{dv}\right)^2$ aber vom zweiten Grad sein muß, wenn man es auf die exargumentalen Glieder dritten und nicht auf solche höheren Grades absieht, so hat man von den Gliedern in $\left(\frac{dV}{dv}\right)^2$ gänzlich abzusehen. Ferner ist:

$$\frac{d^2w}{dv^2}=-\mu\frac{d^2V}{dv^2}=(\delta_1+\varsigma)\mu\gamma_2\eta\sin(3w-v)+(\delta_1+\varsigma_1)\mu\gamma_3\eta'\sin(3w-v_1),$$

also:

$$\frac{d^2 w}{d v^2} = m', \text{ respektive } \frac{m'^2}{\delta_1}.$$

Die mit $\frac{d^2 w}{dv^2}$ multiplizierten Glieder in (26) werden somit von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ respektive $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$, also für die Grenze $\delta_1^2 = m'$ von der Ordnung $m'\sqrt{m'}$, respektive m'^2. Daher kommen in dem Ausdruck (26) nur die ersten dreizehn Glieder, und diese auch bloß bezüglich der Glieder ersten Grades in $\frac{dV}{dv}$ in Betracht; man erhält also zunächst:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2 R_2}{d v^2}\right)_3 = {} & 6\mu(1+\delta_1)\beta_7\eta^2 \cos 3w \left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\
& + 6\mu(1+\delta_1-\varsigma+\varsigma_1)\beta_8\eta\eta' \cos(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\
& + 6\mu(1+\delta_1+\varsigma-\varsigma_1)\beta_9\eta\eta' \cos(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\
& + 6\mu(1+\delta_1)\beta_{10}\eta'^2 \cos 3w \left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\
& + 6\mu(\delta_1+2\varsigma-1)\beta_{11}\eta^2 \cos(3w-2\mathrm{v})\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\
& + 6\mu(\delta_1+\varsigma+\varsigma_1-1)\beta_{12}\eta\eta' \cos(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\
& + 6\mu(\delta_1+2\varsigma_1-1)\beta_{13}\eta'^2 \cos(3w-2\mathrm{v}_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\
& + 24\mu(\delta_1+\varsigma)\beta_{14}\eta^2 \cos(6w-2\mathrm{v})\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\
& + 12\mu(2\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)\beta_{15}\eta\eta' \cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\
& + 24\mu(\delta_1+\varsigma_1)\beta_{16}\eta'^2 \cos(6w-2\mathrm{v}_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\
& + 18\mu(1+3\delta_1+2\varsigma)\beta_{17}\eta^2 \cos(9w-2\mathrm{v})\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\
& + 18\mu(1+3\delta_1+\varsigma+\varsigma_1)\beta_{18}\eta\eta' \cos(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\
& + 18\mu(1+3\delta_1+2\varsigma_1)\beta_{19}\eta'^2 \cos(9w-2\mathrm{v}_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1.
\end{aligned}$$

In diesem Ausdruck fallen noch die drei Glieder vom Argument $6w-2\mathrm{v}$, $6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1$, $6w-2\mathrm{v}_1$, weil von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ bezüglich $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$, also für die Grenze von der Ordnung $m'\sqrt{m'}$ bezüglich m'^2 fort. Bei Einsetzen des Wertes von $\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$ erhält man somit, im Hinblick auf die festgesetzte Genauigkeitsgrenze:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2 R_2}{d v^2}\right)_3 = {} & \{h_1\beta_7\gamma_2 + h_3\beta_{17}\gamma_2\}\eta^3 \cos(6w-\mathrm{v}) \\
& + \{h_1\beta_9\gamma_2 + h_3\beta_{17}\gamma_3\}\eta^2\eta' \cos(6w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) \\
& + \{h_1\beta_7\gamma_3 + h_1\beta_8\gamma_2 + h_3\beta_{18}\gamma_2\}\eta^2\eta' \cos(6w-\mathrm{v}_1) \\
& + \{h_1\beta_9\gamma_3 + h_1\beta_{10}\gamma_2 + h_3\beta_{18}\gamma_3\}\eta\eta'^2 \cos(6w-\mathrm{v}) \\
& + \{h_1\beta_8\gamma_3 + h_3\beta_{19}\gamma_2\}\eta\eta'^2 \cos(6w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)
\end{aligned} \qquad (27)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+\{h_1\beta_{19}\gamma_3+h_3\beta_{19}\gamma_3\}\eta'^3\cos(6w-v_1)\\
&+h_2\beta_{11}\gamma_2\eta^3\cos(6w-3v)\\
&+\{h_2\beta_{11}\gamma_3+h_2\beta_{12}\gamma_2\}\eta^2\eta'\cos(6w-2v-v_1)\\
&+\{h_2\beta_{12}\gamma_3+h_2\beta_{13}\gamma_2\}\eta\eta'^2\cos(6w-v-2v_1)\\
&+h_2\beta_{13}\gamma_3\eta'^3\cos(6w-3v_1)\\
&+h_3\beta_{17}\gamma_2\eta^3\cos(12w-3v)\\
&+\{h_3\beta_{17}\gamma_3+h_3\beta_{18}\gamma_2\}\eta^2\eta'\cos(12w-2v-v_1)\\
&+\{h_3\beta_{18}\gamma_3+h_3\beta_{19}\gamma_2\}\eta\eta'^2\cos(12w-v-2v_1)\\
&+h_3\beta_{19}\gamma_3\eta'^3\cos(12w-3v_1).
\end{aligned}
\right\}
\tag{27}
$$

Während die bei Bildung der periodischen Aggregate entstehenden elementären Glieder der Form B zu $(\rho)_3$ kommen:

$$
\begin{aligned}
&+\{h_1\beta_7\gamma_2+h_2\beta_{11}\gamma_2\}\eta^3\cos v\\
&+\{h_1\beta_8\gamma_3+h_1\beta_{10}\gamma_2+h_2\beta_{12}\gamma_3\}\eta\eta'^2\cos v\\
&+\{h_2\beta_{11}\gamma_3+h_1\beta_8\gamma_2\}\eta^2\eta'\cos(2v-v_1)\\
&+\{h_1\beta_9\gamma_3+h_2\beta_{13}\gamma_2\}\eta\eta'^2\cos(v-2v_1)\\
&+\{h_1\beta_7\gamma_3+h_1\beta_9\gamma_2+h_2\beta_{12}\gamma_2\}\eta^2\eta'\cos v_1\\
&+\{h_1\beta_{10}\gamma_3+h_2\beta_{13}\gamma_3\}\eta'^3\cos v_1,
\end{aligned}
$$

wobei gesetzt ist:

$$
3\mu=h_1;\qquad -3\mu=h_2;\qquad 9\mu=h_3. \tag{27 a}
$$

---

d) Die Koeffizientenbestimmung des Integralansatzes.

Auf Grund der vorstehenden für S_3 und R_3 in den exargumentalen Gliedern durchgeführten Entwicklungen haben wir offenbar dem unbestimmten Integralansatz die folgende Form zu geben:

$$
\left.
\begin{aligned}
R_3=\;&2\alpha_{23}\eta^3\cos(3w-v) &&+\beta_{29}\eta^3\cos(6w-v) &&+\beta_{35}\eta^3\cos(6w-3v)\\
&+2\alpha_{24}\eta^2\eta'\cos(3w-2v+v_1) &&+\beta_{30}\eta^2\eta'\cos(6w-2v+v_1) &&+\beta_{36}\eta^2\eta'\cos(6w-2v-v_1)\\
&+2\alpha_{25}\eta^2\eta'\cos(3w-v_1) &&+\beta_{31}\eta^2\eta'\cos(6w-v_1) &&+\beta_{37}\eta\eta'^2\cos(6w-v-2v_1)\\
&+2\alpha_{26}\eta\eta'^2\cos(3w-v) &&+\beta_{32}\eta\eta'^2\cos(6w-v) &&+\beta_{38}\eta'^3\cos(6w-3v_1)\\
&+2\alpha_{27}\eta\eta'^2\cos(3w+v-2v_1) &&+\beta_{33}\eta\eta'^2\cos(6w+v-2v_1)\\
&+2\alpha_{28}\eta'^3\cos(3w-v_1) &&+\beta_{34}\eta'^3\cos(6w-v_1)\\
&\\
&+2\alpha_{39}\eta^3\cos(9w-3v) &&+\beta_{43}\eta^3\cos(12w-3v)\\
&+2\alpha_{40}\eta^2\eta'\cos(9w-2v-v_1) &&+\beta_{44}\eta^2\eta'\cos(12w-2v-v_1)\\
&+2\alpha_{41}\eta\eta'^2\cos(9w-v-2v_1) &&+\beta_{45}\eta\eta'^2\cos(12w-v-2v_1)\\
&+2\alpha_{42}\eta'^3\cos(9w-3v_1) &&+\beta_{46}\eta'^3\cos(12w-3v_1),
\end{aligned}
\right\}
\tag{28}
$$

wobei die Glieder in den α aus $2S$ stammen und von der Form C sind, während alle übrigen Glieder von der Form D sind. Durch zweimalige Differentiation der D Glieder erhält man nun in Kombination mit R_3:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2R_3}{dv^2}+R_3\right)_3 = &\{1-(1+2\delta_1+\varsigma)^2\}\beta_{29}\eta^3\cos(6w-v)\\
&+\{1-(1+2\delta_1+2\varsigma-\varsigma_1)^2\}\beta_{30}\eta^2\eta'\cos(6w-2v+v_1)\\
&+\{1-(1+2\delta_1+\varsigma_1)^2\}\beta_{31}\eta^2\eta'\cos(6w-v_1)\\
&+\{1-(1+2\delta_1+\varsigma)^2\}\beta_{32}\eta\eta'^2\cos(6w-v)\\
&+\{1-(1+2\delta_1-\varsigma+2\varsigma_1)^2\}\beta_{33}\eta\eta'^2\cos(6w+v-2v_1)\\
&+\{1-(1+2\delta_1+\varsigma_1)^2\}\beta_{34}\eta'^3\cos(6w-v_1)\\
&+\{1-(2\delta_1+3\varsigma-1)^2\}\beta_{35}\eta^3\cos(6w-3v)\\
&+\{1-(2\delta_1+2\varsigma+\varsigma_1-1)^2\}\beta_{36}\eta^2\eta'\cos(6w-2v-v_1)\\
&+\{1-(2\delta_1+\varsigma+2\varsigma_1-1)^2\}\beta_{37}\eta\eta'^2\cos(6w-v-2v_1)\\
&+\{1-(2\delta_1+3\varsigma_1-1)^2\}\beta_{38}\eta'^3\cos(6w-3v_1)\\
&+\{1-(1+4\delta_1+3\varsigma)^2\}\beta_{43}\eta^3\cos(12w-3v)\\
&+\{1-(1+4\delta_1+2\varsigma+\varsigma_1)^2\}\beta_{44}\eta^2\eta'\cos(12w-2v-v_1)\\
&+\{1-(1+4\delta_1+\varsigma+2\varsigma_1)^2\}\beta_{45}\eta\eta'^2\cos(12w-v-2v_1)\\
&+\{1-(1+4\delta_1+3\varsigma_1)^2\}\beta_{46}\eta'^3\cos(12w-3v_1).
\end{aligned} \tag{29}$$

Zur Bestimmung der gesuchten unbekannten β-Koeffizienten des unbestimmten Integralansatzes (28) für die exargumentalen Glieder dritten Grades in R_3 (indem die in R_3 enthaltenen α-Koeffizienten durch die Gleichungen (7) dieses Kapitels bereits gefunden sind), erhält man nach den vorstehenden Untersuchungen mit Hinblick auf die Gleichungen (9), (20), (25), (27) und (29) die folgenden Bedingungsgleichungen mit Rücksicht auf die festgesetzte Genauigkeitsgrenze:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && 4\delta_1(1+\delta_1)\beta_{29} = k\beta_1\gamma_{23}+h_1\beta_7\gamma_2+h_3\beta_{17}\gamma_2\\
&\text{II.} && 4\delta_1(1+\delta_1)\beta_{30} = k\beta_1\gamma_{24}+h_1\beta_9\gamma_2+h_3\beta_{17}\gamma_3\\
&\text{III.} && 4\delta_1(1+\delta_1)\beta_{31} = k\beta_1\gamma_{25}+h_1\beta_7\gamma_3+h_1\beta_8\gamma_2+h_3\beta_{18}\gamma_2\\
&\text{IV.} && 4\delta_1(1+\delta_1)\beta_{32} = k\beta_1\gamma_{26}+h_1\beta_9\gamma_3+h_1\beta_{10}\gamma_2+h_3\beta_{18}\gamma_3\\
&\text{V.} && 4\delta_1(1+\delta_1)\beta_{33} = k\beta_1\gamma_{27}+h_1\beta_8\gamma_3+h_3\beta_{19}\gamma_2\\
&\text{VI.} && 4\delta_1(1+\delta_1)\beta_{34} = k\beta_1\gamma_{28}+h_1\beta_{10}\gamma_3+h_3\beta_{19}\gamma_3\\
&\text{VII.} && 4\delta_1(\delta_1-1)\beta_{35} = k\beta_1\gamma_{39}+h_2\beta_{11}\gamma_2\\
&\text{VIII.} && 4\delta_1(\delta_1-1)\beta_{36} = k\beta_1\gamma_{40}+h_2\beta_{11}\gamma_3+h_2\beta_{12}\gamma_2\\
&\text{IX.} && 4\delta_1(\delta_1-1)\beta_{37} = k\beta_1\gamma_{41}+h_2\beta_{12}\gamma_3+h_2\beta_{13}\gamma_2\\
&\text{X.} && 4\delta_1(\delta_1-1)\beta_{38} = k\beta_1\gamma_{42}+h_2\beta_{13}\gamma_3\\
&\text{XI.} && 8\delta_1(1+2\delta_1)\beta_{43} = k\beta_1\gamma_{39}+2h_1\beta_4\gamma_{14}+h_3\beta_{17}\gamma_2\\
&\text{XII.} && 8\delta_1(1+2\delta_1)\beta_{44} = k\beta_1\gamma_{40}+2h_1(\beta_4\gamma_{15}+\beta_5\gamma_{14})+h_3\beta_{17}\gamma_3+h_3\beta_{18}\gamma_2\\
&\text{XIII.} && 8\delta_1(1+2\delta_1)\beta_{45} = k\beta_1\gamma_{41}+2h_1(\beta_4\gamma_{16}+\beta_5\gamma_{15})+h_3\beta_{18}\gamma_3+h_3\beta_{19}\gamma_2\\
&\text{XIV.} && 8\delta_1(1+2\delta_1)\beta_{46} = k\beta_1\gamma_{42}+2h_1\beta_5\gamma_{16}+h_3\beta_{19}\gamma_3.
\end{aligned} \tag{30}$$

Aus diesen Gleichungen sind die β aber erst wirklich bestimmbar, wenn γ_{23} bis γ_{28} und γ_{39} bis γ_{42} bekannt sind. Zur Bestimmung dieser Größen haben wir offenbar von der folgenden Form der Differentialgleichung für die Zeitreduktion auszugehen, insofern sie Glieder dritten Grades ergibt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dT}{dv} &= S-2R+(6R-2S)\eta\cos\mathrm{v}-3\eta^2 R+\left(\frac{3}{2}S-6R\right)\eta^2\cos 2\mathrm{v}\\ &+6R\eta^3\cos\mathrm{v}+\left\{\frac{19}{4}R-S\right\}\eta^3\cos 3\mathrm{v}\end{aligned}\right\}\qquad(31)$$

und mit derselben die Form zu vergleichen:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dV}{dv}\right)_3 = {} &\gamma_{23}\eta^3\cos(3w-\mathrm{v}) &&+\gamma_{39}\eta^3\cos(9w-3\mathrm{v})\\ &+\gamma_{24}\eta^2\eta'\cos(3w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) &&+\gamma_{40}\eta^2\eta'\cos(9w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &+\gamma_{25}\eta^2\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1) &&+\gamma_{41}\eta\eta'^2\cos(9w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\ &+\gamma_{26}\eta\eta'^2\cos(3w-\mathrm{v}) &&+\gamma_{42}\eta'^3\cos(9w-3\mathrm{v}_1)\\ &+\gamma_{27}\eta\eta'^2\cos(3w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\ &+\gamma_{28}\eta'^3\cos(3w-\mathrm{v}_1).\end{aligned}\right\}\qquad(32)$$

Die Glieder dritten Grades der Form C sind nun aber:

$$\begin{aligned}(R_3)_C = {} &\beta_{23}\eta^3\cos(3w-\mathrm{v}) &&+\beta_{39}\eta^3\cos(9w-3\mathrm{v})\\ &\beta_{24}\eta^2\eta'\cos(3w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) &&+\beta_{40}\eta^2\eta'\cos(9w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &\beta_{25}\eta^2\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1) &&+\beta_{41}\eta\eta'^2\cos(9w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\ &\beta_{26}\eta\eta'^2\cos(3w-\mathrm{v}) &&+\beta_{42}\eta'^3\cos(9w-3\mathrm{v}_1)\\ &\beta_{27}\eta\eta'^2\cos(3w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\ &\beta_{28}\eta'^3\cos(3w-\mathrm{v}_1),\end{aligned}$$

so daß also:

$$\left.\begin{aligned}\beta_{23} &= 2\alpha_{23} &\qquad \beta_{28} &= 2\alpha_{28}\\ \beta_{24} &= 2\alpha_{24} & \beta_{39} &= 2\alpha_{39}\\ \beta_{25} &= 2\alpha_{25} & \beta_{40} &= 2\alpha_{40}\\ \beta_{26} &= 2\alpha_{26} & \beta_{41} &= 2\alpha_{41}\\ \beta_{27} &= 2\alpha_{27} & \beta_{42} &= 2\alpha_{42}\end{aligned}\right\}\qquad(33)$$

ist, wobei diese β-Werte bekannt sind, da ja die betreffenden α durch die Gleichungen (7) gegeben sind Die beiden ersten Glieder der rechten Seite von Gleichung (31) werden also:

$$\begin{aligned}(S-2R)_3 = {} &(\alpha_{23}-2\beta_{23})\eta^3\cos(3w-\mathrm{v})\\ &+(\alpha_{24}-2\beta_{24})\eta^2\eta'\cos(3w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)\\ &+(\alpha_{25}-2\beta_{25})\eta^2\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)\\ &+(\alpha_{26}-2\beta_{26})\eta\eta'^2\cos(3w-\mathrm{v})\\ &+(\alpha_{27}-2\beta_{27})\eta\eta'^2\cos(3w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\ &+(\alpha_{28}-2\beta_{28})\eta'^3\cos(3w-\mathrm{v}_1)\\ &+(\alpha_{39}-2\beta_{39})\eta^3\cos(9w-3\mathrm{v})\\ &+(\alpha_{40}-2\beta_{40})\eta^2\eta'\cos(9w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &+(\alpha_{41}-2\beta_{41})\eta\eta'^2\cos(9w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\ &+(\alpha_{42}-2\beta_{42})\eta'^3\cos(9w-3\mathrm{v}_1).\end{aligned}$$

Bei Bildung des Produktes $(6R-2S)\eta\cos v$ hat man, wie man sich leicht überzeugt, auszugehen von der Form D, weil diese in Multiplikation mit $\eta\cos v$-Glieder der Form C, also Beiträge zu γ_{23}, γ_{24} etc. gibt, die ja nur in Gliedern der Form C vorkommen. Somit ist zu setzen, weil die a- und α-Koeffizienten nicht in Betracht kommen, da die α in S Gliedern der Form C angehören und die a von der Ordnung m' sind:

$$
\begin{aligned}
(6R-2S)_2 = {} & 6\beta_7\eta^2\cos 3w && +6\beta_{11}\eta^2\cos(3w-2v) \\
& +6\beta_8\eta\eta'\cos(3w+v-v_1) && +6\beta_{12}\eta\eta'\cos(3w-v-v_1) \\
& +6\beta_9\eta\eta'\cos(3w-v+v_1) && +6\beta_{13}\eta'^2\cos(3w-2v_1) \\
& +6\beta_{10}\eta'^2\cos 3w && \\
& && +6\beta_{17}\eta^2\cos(9w-2v) \\
& && +6\beta_{18}\eta\eta'\cos(9w-v-v_1) \\
& && +6\beta_{19}\eta'^2\cos(9w-2v_1)
\end{aligned}
$$

und man erhält:

$$
\begin{aligned}
(6R-2S)_2\eta\cos v = {} & (3\beta_7+\beta_{11})\eta^3\cos 3w && +3\beta_{17}\eta^3\cos(9w-3v) \\
& +3\beta_9\eta^2\eta'\cos(3w-2v+v_1) && +3\beta_{18}\eta^2\eta'\cos(9w-2v-v_1) \\
& +3(\beta_8+\beta_{13})\eta^2\eta'\cos(3w-v_1) && +3\beta_{19}\eta\eta'^2\cos(9w-v-2v_1). \\
& +3\beta_{10}\eta\eta'^2\cos(3w-v) && \\
& +3\beta_{13}\eta\eta'^2\cos(3w+v-2v_1) &&
\end{aligned}
$$

Ferner wird:

$$-3\eta^2R_1 = -3\beta_2\eta^3\cos(3w-v)-3\beta_3\eta^2\eta'\cos(3w-v_1).$$

Hingegen überzeugt man sich, daß die Glieder:

$$\left(\frac{3}{2}S-6R\right)\eta^2\cos 2v \quad \text{und:} \quad \left\{\frac{19}{4}R-S\right\}\eta^3\cos 3v$$

keine Glieder der Form C ergeben, während:

$$6R_0\eta^3\cos v = 3\beta_1\eta^3\cos(3w-v)$$

wird. Die Differentialgleichung (31) wird somit für die Glieder der Form C:

$$
\left.
\begin{aligned}
\left(\frac{dT}{dv}\right)_3^C = {} & T_{III}^{(23)}\eta^3\cos(3w-v) && +T_{III}^{(39)}\eta^3\cos(9w-3v) \\
& +T_{III}^{(24)}\eta^2\eta'\cos(3w-2v+v_1) && +T_{III}^{(40)}\eta^2\eta'\cos(9w-2v-v_1) \\
& +T_{III}^{(25)}\eta^2\eta'\cos(3w-v_1) && +T_{III}^{(41)}\eta\eta'^2\cos(9w-v-2v_1) \\
& +T_{III}^{(26)}\eta\eta'^2\cos(3w-v) && +T_{III}^{(42)}\eta'^3\cos(9w-3v_1) \\
& +T_{III}^{(27)}\eta\eta'^2\cos(3w+v-2v_1) && \\
& +T_{III}^{(28)}\eta'^3\cos(3w-v_1), &&
\end{aligned}
\right\} \tag{33a}
$$

wobei sich die Koeffizienten $T_{III}^{(23)}$ etc. aus den einzelnen zuvor gefundenen α und β-Werten direkt zusammensetzen.

Diese T-Koeffizienten sind aber mit Hinblick auf Gleichung (32) gleich den gesuchten γ, die mithin durch die folgenden Relationen gegeben und nunmehr völlig bekannt sind:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{23} &= \alpha_{23}-2\beta_{23}+3\beta_{11}+3\beta_{7}-3\beta_{2}+3\beta_{1}\\
\gamma_{24} &= \alpha_{24}-2\beta_{24}+3\beta_{9}\\
\gamma_{25} &= \alpha_{25}-2\beta_{25}+3\beta_{12}+3\beta_{8}-3\beta_{3}\\
\gamma_{26} &= \alpha_{26}-2\beta_{26}+3\beta_{10}\\
\gamma_{27} &= \alpha_{27}-2\beta_{27}+3\beta_{13}\\
\gamma_{28} &= \alpha_{28}-2\beta_{28}\\
\gamma_{39} &= \alpha_{39}-2\beta_{39}+3\beta_{17}\\
\gamma_{40} &= \alpha_{40}-2\beta_{40}+3\beta_{18}\\
\gamma_{41} &= \alpha_{41}-2\beta_{41}+3\beta_{19}\\
\gamma_{42} &= \alpha_{42}-2\beta_{42}.
\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Durch Einführung dieser Werte in die Gleichungen (30) erhält man mithin direkt die der numerischen Rechnung zugrunde zu legenden Werte für die β-Koeffizienten des Integralansatzes (28), welcher die exargumentalen Glieder dritten Grades in R repräsentiert:

$$\left.\begin{aligned}
\beta_{29} &= \frac{k\beta_1(3\beta_1-3\beta_2+3\beta_7+3\beta_{11}-3\alpha_{23})+h_1\beta_7\gamma_2+h_3\beta_{17}\gamma_2}{4\delta_1(1+\delta_1)}\\
\beta_{30} &= \frac{k\beta_1(3\beta_9-3\alpha_{24})+h_1\beta_9\gamma_2+h_3\beta_{17}\gamma_3}{4\delta_1(1+\delta_1)}\\
\beta_{31} &= \frac{k\beta_1(-3\beta_3+3\beta_8+3\beta_{12}-3\alpha_{25})+h_1\beta_7\gamma_3+h_1\beta_8\gamma_2+h_3\beta_{18}\gamma_2}{4\delta_1(1+\delta_1)}\\
\beta_{32} &= \frac{k\beta_1(3\beta_{10}-3\alpha_{26})+h_1\beta_9\gamma_3+h_1\beta_{10}\gamma_2+h_3\beta_{18}\gamma_3}{4\delta_1(1+\delta_1)}\\
\beta_{33} &= \frac{k\beta_1(3\beta_{13}-3\alpha_{27})+h_1\beta_8\gamma_3+h_3\beta_{19}\gamma_2}{4\delta_1(1+\delta_1)}\\
\beta_{34} &= \frac{-3k\beta_1\alpha_{28}+h_1\beta_{10}\gamma_3+h_3\beta_{19}\gamma_3}{4\delta_1(1+\delta_1)}.\\
\beta_{35} &= \frac{k\beta_1(3\beta_{17}-3\alpha_{39})+h_2\beta_{11}\gamma_2}{4\delta_1(\delta_1-1)}\\
\beta_{36} &= \frac{k\beta_1(3\beta_{18}-3\alpha_{40})+h_2\beta_{11}\gamma_3+h_2\beta_{12}\gamma_2}{4\delta_1(\delta_1-1)}\\
\beta_{37} &= \frac{k\beta_1(3\beta_{19}-3\alpha_{41})+h_2\beta_{12}\gamma_3+h_2\beta_{13}\gamma_2}{4\delta_1(\delta_1-1)}\\
\beta_{38} &= \frac{-3k\beta_1\alpha_{42}+h_2\beta_{13}\gamma_3}{4\delta_1(\delta_1-1)}\\
\beta_{43} &= \frac{k\beta_1(3\beta_{17}-3\alpha_{39})+2h_1\beta_4\gamma_{14}+h_3\beta_{17}\gamma_2}{8\delta_1(1+2\delta_1)}\\
\beta_{44} &= \frac{k\beta_1(3\beta_{18}-3\alpha_{40})+2h_1(\beta_4\gamma_{15}+\beta_5\gamma_{14})+h_3(\beta_{17}\gamma_3+\beta_{18}\gamma_2)}{8\delta_1(1+2\delta_1)}\\
\beta_{45} &= \frac{k\beta_1(3\beta_{19}-3\alpha_{41})+2h_1(\beta_4\gamma_{16}+\beta_5\gamma_{15})+h_3(\beta_{18}\gamma_3+\beta_{19}\gamma_2)}{8\delta_1(1+2\delta_1)}\\
\beta_{46} &= \frac{-3k\beta_1\alpha_{42}+2h_1\beta_5\gamma_{16}+h_3\beta_{19}\gamma_3}{8\delta_1(1+2\delta_1)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

II. Die exargumentalen Glieder dritten Grades in der Breite.

a) Die aus dem ersten Grade entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades in $\mathfrak{z}$.

Durch zweimalige Differentiation des im siebenten Kapitel gegebenen unbestimmten Integralansatzes für die Glieder ersten Grades in $\mathfrak{z}$ erhält man zunächst:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}_1}{dv^2} = -\varepsilon_1 \sin j \sin(6w-\mathfrak{v}) \left\{6\frac{dw}{dv}-1-\tau\right\}^2$$
$$-\varepsilon_2 \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}_1) \left\{6\frac{dw}{dv}-1-\tau_1\right\}^2$$
$$+6\varepsilon_1 \sin j \cos(6w-\mathfrak{v})\frac{d^2w}{dv^2}$$
$$+6\varepsilon_2 \sin j' \cos(6w-\mathfrak{v}_1)\frac{d^2w}{dv^2}.$$

Nach der früher entwickelten allgemeinen Theorie (cf. Abteilung I, Kapitel IV, Nr. II, *A*, 4) ist aber:

$$\frac{dw}{dv} = \frac{1+\delta_1}{3} - \mu\frac{dV}{dv},$$

also:

$$\left\{6\frac{dw}{dv}-1-\tau\right\}^2 = \left(1+2\delta_1-\tau-6\mu\frac{dV}{dv}\right)^2$$

oder, da es sich jetzt bloß um die exargumentalen Glieder handelt:

$$\left\{6\frac{dw}{dv}-1-\tau\right\}^2 = -12\mu(1+2\delta_1-\tau)\frac{dV}{dv}+36\mu^2\left(\frac{dV}{dv}\right)^2.$$

Mithin wird:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}_1}{dv^2} = \left\{\begin{array}{l} 12\mu(1+2\delta_1-\tau)\varepsilon_1 \sin j \sin(6w-\mathfrak{v}) \\ +12\mu(1+2\delta_1-\tau_1)\varepsilon_2 \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}_1)\end{array}\right\}\frac{dV}{dv}$$
$$+\left\{\begin{array}{l} -36\mu^2\varepsilon_1 \sin j \sin(6w-\mathfrak{v}) \\ -36\mu^2\varepsilon_2 \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}_1)\end{array}\right\}\left(\frac{dV}{dv}\right)^2$$
$$+\left\{\begin{array}{l} -6\mu\varepsilon_1 \sin j \cos(6w-\mathfrak{v}) \\ -6\mu\varepsilon_2 \sin j' \cos(6w-\mathfrak{v}_1)\end{array}\right\}\frac{d^2V}{dv^2}.$$

Bei Untersuchung der exargumentalen Glieder dritten Grades in *R* fanden wir aber, daß:

$$\frac{d^2V}{dv^2} = \left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_1}{dv}\right)_2 + \left(\frac{d\left(\frac{dV}{dv}\right)_2}{dv}\right)_2 \asymp m'$$

ist. Also wird, da $\varepsilon \asymp \frac{m'}{\delta_1}$ ist, offenbar für die Grenze $\delta_1 = \sqrt{m'}$:

$$\varepsilon_1\frac{d^2V}{dv^2} \asymp m'\sqrt{m'}.$$

Ferner ist ja:

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)^2 = \frac{m'^2}{\delta_1^2},$$

also:

$$\varepsilon_1 \left(\frac{dV}{dv}\right)^2 = \frac{m'^3}{\delta_1^3},$$

mithin für die Grenze $\delta_1^2 = m'$:

$$\varepsilon_1 \left(\frac{dV}{dv}\right)^2 = m'\sqrt{m'}.$$

Daher ergibt sich, wenn wir für $\frac{dV}{dv}$ den früher gefundenen Wert setzen (cf. I, S. 382):

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_2 = \gamma_{14}\eta^2 \cos(6w-2\mathrm{v}) + \gamma_{15}\eta\eta' \cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) + \gamma_{16}\eta'^2 \cos(6w-2\mathrm{v}_1)$$

durch Ausmultiplikation der periodischen Aggregate im Hinblick auf die festgesetzte Genauigkeitsgrenze als Ausdruck der exargumentalen Glieder dritten Grades in $\mathfrak{Z}$, die aus dem ersten Grad entstehen:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_1}{dv^2}\right)_3 = {} & 6\mu\varepsilon_1\gamma_{14}\eta^2 \sin j \sin(12w-\mathfrak{v}-2\mathrm{v}) \\ & +6\mu\varepsilon_1\gamma_{15}\eta\eta' \sin j \sin(12w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ & +6\mu\varepsilon_1\gamma_{16}\eta'^2 \sin j \sin(12w-\mathfrak{v}-2\mathrm{v}_1) \\ & +6\mu\varepsilon_2\gamma_{14}\eta^2 \sin j' \sin(12w-\mathfrak{v}_1-2\mathrm{v}) \\ & +6\mu\varepsilon_2\gamma_{15}\eta\eta' \sin j' \sin(12w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ & +6\mu\varepsilon_2\gamma_{16}\eta'^2 \sin j' \sin(12w-\mathfrak{v}_1-2\mathrm{v}_1).\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

wohingegen die elementären Glieder der Form B:

$$\left.\begin{aligned} & 6\mu\varepsilon_1\gamma_{14}\eta^2 \sin j \sin(2\mathrm{v}-\mathfrak{v}) + 6\mu\varepsilon_1\gamma_{16}\eta'^2 \sin j \sin(2\mathrm{v}_1-\mathfrak{v}) \\ & +6\mu\varepsilon_2\gamma_{14}\eta^2 \sin j' \sin(2\mathrm{v}-\mathfrak{v}_1) + 6\mu\varepsilon_2\gamma_{16}\eta'^2 \sin j' \sin(2\mathrm{v}_1-\mathfrak{v}_1) \\ & +6\mu\varepsilon_1\gamma_{15}\eta\eta' \sin j \sin(\mathrm{v}+\mathrm{v}_1-\mathfrak{v}) \\ & +6\mu\varepsilon_2\gamma_{15}\eta\eta' \sin j' \sin(\mathrm{v}+\mathrm{v}_1-\mathfrak{v}_1)\end{aligned}\right\} \quad (36a)$$

zu $(\mathfrak{z})_3$ kommen.

---

b) **Die aus dem zweiten Grade entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades in $\mathfrak{Z}$.**

Als unbestimmten Integralansatz für die Glieder zweiten Grades in $\mathfrak{Z}$ fanden wir:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Z}_2 = {} & \varepsilon_3\eta \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}) && +\varepsilon_7\eta \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \\ & +\varepsilon_4\eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}) && +\varepsilon_8\eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}) \\ & +\varepsilon_5\eta' \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) && +\varepsilon_9\eta' \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1) \\ & +\varepsilon_6\eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1) && +\varepsilon_{10}\eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
&+\varepsilon_{11}\eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}) \quad +\varepsilon_{15}\eta \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v})\\
&+\varepsilon_{12}\eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1) \quad +\varepsilon_{16}\eta' \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\\
&+\varepsilon_{13}\eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}) \quad +\varepsilon_{17}\eta \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})\\
&+\varepsilon_{14}\eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)+\varepsilon_{18}\eta' \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1).
\end{aligned} \tag{37}$$

Durch zweimalige Differentiation dieses Ausdruckes ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\mathfrak{z}_2}{dv^2} = &-\varepsilon_3\eta \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v})\left\{3\frac{dw}{dv}+\tau+\varsigma\right\}^2\\
&-\varepsilon_4\eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v})\left\{3\frac{dw}{dv}-\tau-\varsigma\right\}^2\\
&-\varepsilon_5\eta' \sin j \sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}+\tau+\varsigma_1\right\}^2\\
&-\varepsilon_6\eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}-\tau-\varsigma_1\right\}^2\\
&-\varepsilon_7\eta \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})\left\{3\frac{dw}{dv}+\tau_1+\varsigma\right\}^2\\
&-\varepsilon_8\eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v})\left\{3\frac{dw}{dv}-\tau_1-\varsigma\right\}^2\\
&-\varepsilon_9\eta' \sin j' \sin(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}+\tau_1+\varsigma_1\right\}^2\\
&-\varepsilon_{10}\eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}-\tau_1-\varsigma_1\right\}^2\\
&-\varepsilon_{11}\eta \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v})\left\{3\frac{dw}{dv}-2-\tau+\varsigma\right\}^2\\
&-\varepsilon_{12}\eta' \sin j \sin(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}-2-\tau+\varsigma_1\right\}^2\\
&-\varepsilon_{13}\eta \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})\left\{3\frac{dw}{dv}-2-\tau_1+\varsigma\right\}^2\\
&-\varepsilon_{14}\eta' \sin j' \sin(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}-2-\tau_1+\varsigma_1\right\}^2\\
&-\varepsilon_{15}\eta \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v})\left\{9\frac{dw}{dv}-2-\tau+\varsigma\right\}^2\\
&-\varepsilon_{16}\eta' \sin j \sin(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\left\{9\frac{dw}{dv}-2-\tau+\varsigma_1\right\}^2\\
&-\varepsilon_{17}\eta \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})\left\{9\frac{dw}{dv}-2-\tau_1+\varsigma\right\}^2\\
&-\varepsilon_{18}\eta' \sin j' \sin(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)\left\{9\frac{dw}{dv}-2-\tau_1+\varsigma_1\right\}^2
\end{aligned}$$

$$+3\varepsilon_3\,\eta\sin j\cos(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v})\frac{d^2w}{dv^2} \qquad +3\varepsilon_7\,\eta\sin j'\cos(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})\frac{d^2w}{dv^2}$$

$$+3\varepsilon_4\,\eta\sin j\cos(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v})\frac{d^2w}{dv^2} \qquad +3\varepsilon_8\,\eta\sin j'\cos(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v})\frac{d^2w}{dv^2}$$

$$+3\varepsilon_5\,\eta'\sin j\cos(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\frac{d^2w}{dv^2} \qquad +3\varepsilon_9\,\eta'\sin j'\cos(3w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)\frac{d^2w}{dv^2}$$

$$+3\varepsilon_6\,\eta'\sin j\cos(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}_1)\frac{d^2w}{dv^2} \qquad +3\varepsilon_{10}\eta'\sin j'\cos(3w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}_1)\frac{d^2w}{dv^2}$$

$$+3\varepsilon_{11}\,\eta\sin j\cos(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v})\frac{d^2w}{dv^2} \qquad +9\varepsilon_{15}\,\eta\sin j\cos(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v})\frac{d^2w}{dv^2}$$

$$+3\varepsilon_{12}\,\eta'\sin j\cos(3w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\frac{d^2w}{dv^2} \qquad +9\varepsilon_{16}\,\eta'\sin j\cos(9w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}_1)\frac{d^2w}{dv^2}$$

$$+3\varepsilon_{13}\,\eta\sin j'\cos(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})\frac{d^2w}{dv^2} \qquad +9\varepsilon_{17}\,\eta\sin j'\cos(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v})\frac{d^2w}{dv^2}$$

$$+3\varepsilon_{14}\eta'\sin j'\cos(3w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)\frac{d^2w}{dv^2} \qquad +9\varepsilon_{18}\eta'\sin j'\cos(9w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}_1)\frac{d^2w}{dv^2}.$$

Da es sich jetzt bloß um die exargumentalen Glieder handelt, so wird:

$$\left\{3\frac{dw}{dv}+\tau+\varsigma\right\}^2=\left\{1+\delta_1+\tau+\varsigma-3\mu\frac{dV}{dv}\right\}^2=-6\mu(1+\delta_1+\tau+\varsigma)\frac{dV}{dv}+9\mu^2\left(\frac{dV}{dv}\right)^2.$$

Ferner:

$$\left\{3\frac{dw}{dv}-2-\tau+\varsigma\right\}^2=\left\{-1+\delta_1-\tau+\varsigma-3\mu\frac{dV}{dv}\right\}^2=-6\mu(-1+\delta_1-\tau+\varsigma)\frac{dV}{dv}+9\mu^2\left(\frac{dV}{dv}\right)^2.$$

Ferner:

$$\left\{9\frac{dw}{dv}-2-\tau+\varsigma\right\}^2=\left\{1+3\delta_1-\tau+\varsigma-9\mu\frac{dV}{dv}\right\}^2=-18\mu(1+3\delta_1-\tau+\varsigma)\frac{dV}{dv}+81\mu^2\left(\frac{dV}{dv}\right)^2 \quad \text{etc.}$$

Setzt man diese Werte in den vorstehenden Ausdruck ein, so würden die Glieder in $\left(\frac{dV}{dv}\right)^2$, welches vom zweiten Grad ist, offenbar exargumentale Glieder vierten Grades ergeben, so daß also jetzt bloß die Glieder in $\frac{dV}{dv}$ in Betracht kommen. Ferner sahen wir, daß:

$$\frac{d^2w}{dv^2}=m',\ \text{respektive}\ \frac{m'^2}{\delta_1}$$

ist, so daß die mit $\frac{d^2w}{dv^2}$ multiplizierten Glieder von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$, respektive $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$, das heißt, für die Grenze $\delta_1^2=m'$ von der Ordnung $m'\sqrt{m'}$, respektive m'^2 sind, also im Hinblick auf die festgesetzte Genauigkeitsgrenze fortfallen. Indem jetzt ferner in $\frac{dV}{dv}$ offenbar nur die Glieder ersten Grades in Betracht kommen, erhält man zunächst:

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_2}{dv^2}\right)_3=6\mu(1+\delta_1+\tau+\varsigma)\varepsilon_3\,\eta\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-\mathrm{v})\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

$$+6\mu(1+\delta_1-\tau-\varsigma)\varepsilon_4\,\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+\mathrm{v})\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

$$+6\mu(1+\delta_1+\tau+\varsigma_1)\varepsilon_5\eta'\sin j\sin(3w+\mathfrak{v}-v_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

$$+6\mu(1+\delta_1-\tau-\varsigma_1)\varepsilon_6\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}+v_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

$$+6\mu(1+\delta_1+\tau_1+\varsigma)\varepsilon_7\eta\sin j'\sin(3w+\mathfrak{v}_1-v)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

$$+6\mu(1+\delta_1-\tau_1-\varsigma)\varepsilon_8\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

$$+6\mu(1+\delta_1+\tau_1+\varsigma_1)\varepsilon_9\eta'\sin j'\sin(3w+\mathfrak{v}_1-v_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

$$+6\mu(1+\delta_1-\tau_1-\varsigma_1)\varepsilon_{10}\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1+v_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

$$+6\mu(-1+\delta_1-\tau+\varsigma)\varepsilon_{11}\eta\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

$$+6\mu(-1+\delta_1-\tau+\varsigma_1)\varepsilon_{12}\eta'\sin j\sin(3w-\mathfrak{v}-v_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

$$+6\mu(-1+\delta_1-\tau_1+\varsigma)\varepsilon_{13}\eta\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

$$+6\mu(-1+\delta_1-\tau_1+\varsigma_1)\varepsilon_{14}\eta'\sin j'\sin(3w-\mathfrak{v}_1-v_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

$$+18\mu(1+3\delta_1-\tau+\varsigma)\varepsilon_{15}\eta\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

$$+18\mu(1+3\delta_1-\tau+\varsigma_1)\varepsilon_{16}\eta'\sin j\sin(9w-\mathfrak{v}-v_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

$$+18\mu(1+3\delta_1-\tau_1+\varsigma)\varepsilon_{17}\eta\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$$

$$+18\mu(1+3\delta_1-\tau_1+\varsigma_1)\varepsilon_{18}\eta'\sin j'\sin(9w-\mathfrak{v}_1-v_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1.$$

Mit Hinblick auf den Wert:

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_1=\gamma_2\eta\cos(3w-v)+\gamma_3\eta'\cos(3w-v_1),$$

wird also:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_2}{dv^2}\right)_3 = {} & [h_1\varepsilon_4\gamma_2+h_3\varepsilon_{15}\gamma_2]\eta^2\sin j\sin(6w-\mathfrak{v})\\ & +[h_1\varepsilon_4\gamma_3+h_3\varepsilon_{16}\gamma_2]\eta\eta'\sin j\sin(6w-\mathfrak{v}+v-v_1)\\ & +[h_1\varepsilon_6\gamma_2+h_3\varepsilon_{15}\gamma_3]\eta\eta'\sin j\sin(6w-\mathfrak{v}-v+v_1)\\ & +[h_1\varepsilon_6\gamma_3+h_3\varepsilon_{16}\gamma_3]\eta'^2\sin j\sin(6w-\mathfrak{v})\\ & +[h_1\varepsilon_8\gamma_2+h_3\varepsilon_{17}\gamma_2]\eta^2\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1)\\ & +[h_1\varepsilon_8\gamma_3+h_3\varepsilon_{18}\gamma_2]\eta\eta'\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1+v-v_1)\\ & +[h_1\varepsilon_{10}\gamma_2+h_3\varepsilon_{17}\gamma_3]\eta\eta'\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1-v+v_1)\\ & +[h_1\varepsilon_{10}\gamma_3+h_3\varepsilon_{18}\gamma_3]\eta'^2\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1)\\ & +h_1\varepsilon_3\gamma_2\eta^2\sin j\sin(6w+\mathfrak{v}-2v_1)\end{aligned} \quad (38)$$

$$\left.\begin{aligned}
&+[h_1\varepsilon_3\gamma_3+h_1\varepsilon_5\gamma_2]\eta\eta'\sin j\sin(6w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
&+h_1\varepsilon_5\gamma_3\eta'^2\sin j\sin(6w+\mathfrak{v}-2\mathrm{v}_1)\\
&+h_1\varepsilon_7\gamma_2\eta^2\sin j'\sin(6w+\mathfrak{v}_1-2\mathrm{v})\\
&+[h_1\varepsilon_7\gamma_3+h_1\varepsilon_9\gamma_2]\eta\eta'\sin j'\sin(6w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
&+h_1\varepsilon_9\gamma_3\eta'^2\sin j'\sin(6w+\mathfrak{v}_1-2\mathrm{v}_1)\\
&+h_2\varepsilon_{11}\gamma_2\eta^2\sin j\sin(6w-\mathfrak{v}-2\mathrm{v})\\
&+[h_2\varepsilon_{11}\gamma_3+h_2\varepsilon_{12}\gamma_2]\eta\eta'\sin j\sin(6w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
&+h_2\varepsilon_{12}\gamma_3\eta'^2\sin j\sin(6w-\mathfrak{v}-2\mathrm{v}_1)\\
&+h_2\varepsilon_{13}\gamma_2\eta^2\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1-2\mathrm{v})\\
&+[h_2\varepsilon_{13}\gamma_3+h_2\varepsilon_{14}\gamma_2]\eta\eta'\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
&+h_2\varepsilon_{14}\gamma_3\eta'^2\sin j'\sin(6w-\mathfrak{v}_1-2\mathrm{v}_1)\\
&+h_3\varepsilon_{15}\gamma_2\eta^2\sin j\sin(12w-\mathfrak{v}-2\mathrm{v})\\
&+[h_3\varepsilon_{15}\gamma_3+h_3\varepsilon_{16}\gamma_2]\eta\eta'\sin j\sin(12w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
&+h_3\varepsilon_{16}\gamma_3\eta'^2\sin j\sin(12w-\mathfrak{v}-2\mathrm{v}_1)\\
&+h_3\varepsilon_{17}\gamma_2\eta^2\sin j'\sin(12w-\mathfrak{v}_1-2\mathrm{v})\\
&+[h_3\varepsilon_{17}\gamma_3+h_3\varepsilon_{18}\gamma_2]\eta\eta'\sin j'\sin(12w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
&+h_3\varepsilon_{18}\gamma_3\eta'^2\sin j'\sin(12w-\mathfrak{v}_1-2\mathrm{v}_1),
\end{aligned}\right\}\qquad(38)$$

während 24 elementäre Glieder bei Ausmultiplikation der periodischen Aggregate entstehen, und zu $(\mathfrak{Z})_3$ kommen und wobei $h_1=3\mu$, $h_2=-3\mu$, $h_3=9\mu$ ist.

---

c) Die Koeffizientenbestimmung des Integralansatzes.

Bezeichnet:

$\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_1}{dv^2}\right)_3$ die aus dem ersten Grad hervorgehenden exargumentalen Glieder dritten Grades,

$\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_2}{dv^2}\right)_3$ die aus dem zweiten Grad hervorgehenden exargumentalen Glieder dritten Grades,

$\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_3}{dv^2}+\mathfrak{Z}_3\right)_3$ den differentierten unbestimmten Integralansatz,

$\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z}\right)_3$ die direkt gebildete Differenlialgleichung,

so ist:

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z}\right)_3=\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_3}{dv^2}+\mathfrak{Z}_3\right)_3+\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_2}{dv^2}\right)_3+\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_1}{dv^2}\right)_3. \qquad (39)$$

Im Hinblick auf die in diesem Kapitel ins Auge gefaßte Genauigkeitsgrenze aber ist analog wie bei R zu setzen:

$$-\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_3}{dv^2}+\mathfrak{Z}_3\right)_3=\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_2}{dv^2}\right)_3+\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}_1}{dv^2}\right)_3. \qquad (40)$$

Der unbestimmte Integralansatz für die Glieder dritten Grades in $\mathfrak{z}$ aber wird offenbar:

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathfrak{z}_3 = {} & \varepsilon_{19}\eta^2 \sin j \sin(6w-\mathfrak{v}) && +\varepsilon_{23}\eta^2 \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}_1) \\
& +\varepsilon_{20}\eta\eta' \sin j \sin(6w-\mathfrak{v}+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +\varepsilon_{24}\eta\eta' \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}_1+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +\varepsilon_{21}\eta\eta' \sin j \sin(6w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && +\varepsilon_{25}\eta\eta' \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) \\
& +\varepsilon_{22}\eta'^2 \sin j \sin(6w-\mathfrak{v}) && +\varepsilon_{26}\eta'^2 \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}_1) \\
& +\varepsilon_{27}\eta^2 \sin j \sin(6w+\mathfrak{v}-2\mathrm{v}) && +\varepsilon_{30}\eta^2 \sin j' \sin(6w+\mathfrak{v}_1-2\mathrm{v}) \\
& +\varepsilon_{28}\eta\eta' \sin j \sin(6w+\mathfrak{v}-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +\varepsilon_{31}\eta\eta' \sin j' \sin(6w+\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +\varepsilon_{29}\eta'^2 \sin j \sin(6w+\mathfrak{v}-2\mathrm{v}_1) && +\varepsilon_{32}\eta'^2 \sin j' \sin(6w+\mathfrak{v}_1-2\mathrm{v}_1) \\
& +\varepsilon_{33}\eta^2 \sin j \sin(6w-\mathfrak{v}-2\mathrm{v}) && +\varepsilon_{36}\eta^2 \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}_1-2\mathrm{v}) \\
& +\varepsilon_{34}\eta\eta' \sin j \sin(6w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +\varepsilon_{37}\eta\eta' \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +\varepsilon_{35}\eta'^2 \sin j \sin(6w-\mathfrak{v}-2\mathrm{v}_1) && +\varepsilon_{38}\eta'^2 \sin j' \sin(6w-\mathfrak{v}_1-2\mathrm{v}_1) \\
& +\varepsilon_{39}\eta^2 \sin j \sin(12w-\mathfrak{v}-2\mathrm{v}) && +\varepsilon_{42}\eta^2 \sin j' \sin(12w-\mathfrak{v}_1-2\mathrm{v}) \\
& +\varepsilon_{40}\eta\eta' \sin j \sin(12w-\mathfrak{v}-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +\varepsilon_{43}\eta\eta' \sin j' \sin(12w-\mathfrak{v}_1-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +\varepsilon_{41}\eta'^2 \sin j \sin(12w-\mathfrak{v}-2\mathrm{v}_1) && +\varepsilon_{44}\eta'^2 \sin j' \sin(12w-\mathfrak{v}_1-2\mathrm{v}_1).
\end{aligned}
\right\} \quad (41)
$$

Nach zweimaliger Differentiation dieses Ausdruckes findet man zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten ε_{19} bis ε_{44}, mit Rücksicht auf die vorhergehenden Entwickelungen (36), (38) und (40) und unter Innehaltung der festgesetzten Genauigkeitsgrenze die folgenden Bestimmungsgleichungen für die gesuchten ε, in denen ε_{19} bis ε_{44} die einzigen Unbekannten sind:

$$
\left.
\begin{aligned}
-4\delta_1(1+\delta_1)\varepsilon_{19} &= h_1\varepsilon_4\gamma_2 + h_3\varepsilon_{15}\gamma_2 \\
-4\delta_1(1+\delta_1)\varepsilon_{20} &= h_1\varepsilon_4\gamma_3 + h_3\varepsilon_{16}\gamma_2 \\
-4\delta_1(1+\delta_1)\varepsilon_{21} &= h_1\varepsilon_6\gamma_2 + h_3\varepsilon_{15}\gamma_3 \\
-4\delta_1(1+\delta_1)\varepsilon_{22} &= h_1\varepsilon_6\gamma_3 + h_3\varepsilon_{16}\gamma_3 \\
-4\delta_1(1+\delta_1)\varepsilon_{23} &= h_1\varepsilon_8\gamma_2 + h_3\varepsilon_{17}\gamma_2 \\
-4\delta_1(1+\delta_1)\varepsilon_{24} &= h_1\varepsilon_8\gamma_3 + h_3\varepsilon_{18}\gamma_2 \\
-4\delta_1(1+\delta_1)\varepsilon_{25} &= h_1\varepsilon_{10}\gamma_2 + h_3\varepsilon_{17}\gamma_3 \\
-4\delta_1(1+\delta_1)\varepsilon_{26} &= h_1\varepsilon_{10}\gamma_3 + h_3\varepsilon_{18}\gamma_3 \\
-4\delta_1(1+\delta_1)\varepsilon_{27} &= h_1\varepsilon_3\gamma_2 \\
-4\delta_1(1+\delta_1)\varepsilon_{28} &= h_1\varepsilon_3\gamma_3 + h_1\varepsilon_5\gamma_2 \\
-4\delta_1(1+\delta_1)\varepsilon_{29} &= h_1\varepsilon_5\gamma_3 \\
-4\delta_1(1+\delta_1)\varepsilon_{30} &= h_1\varepsilon_7\gamma_2 \\
-4\delta_1(1+\delta_1)\varepsilon_{31} &= h_1\varepsilon_7\gamma_3 + h_1\varepsilon_9\gamma_2 \\
-4\delta_1(1+\delta_1)\varepsilon_{32} &= h_1\varepsilon_9\gamma_3 \\
+4\delta_1(1-\delta_1)\varepsilon_{33} &= h_2\varepsilon_{11}\gamma_2 \\
+4\delta_1(1-\delta_1)\varepsilon_{34} &= h_2\varepsilon_{11}\gamma_3 + h_2\varepsilon_{12}\gamma_2 \\
+4\delta_1(1-\delta_1)\varepsilon_{35} &= h_2\varepsilon_{12}\gamma_3 \\
+4\delta_1(1-\delta_1)\varepsilon_{36} &= h_2\varepsilon_{13}\gamma_2 \\
+4\delta_1(1-\delta_1)\varepsilon_{37} &= h_2\varepsilon_{13}\gamma_3 + h_2\varepsilon_{14}\gamma_2 \\
+4\delta_1(1-\delta_1)\varepsilon_{38} &= h_2\varepsilon_{14}\gamma_3
\end{aligned}
\right\} \quad (42)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
-8\delta_1(1+2\delta_1)\varepsilon_{39} &= 2h_1\varepsilon_1\gamma_{14}+h_3\varepsilon_{15}\gamma_2\\
-8\delta_1(1+2\delta_1)\varepsilon_{40} &= 2h_1\varepsilon_1\gamma_{15}+h_3\varepsilon_{15}\gamma_3+h_3\varepsilon_{16}\gamma_2\\
-8\delta_1(1+2\delta_1)\varepsilon_{41} &= 2h_1\varepsilon_1\gamma_{16}+h_3\varepsilon_{16}\gamma_3\\
-8\delta_1(1+2\delta_1)\varepsilon_{42} &= 2h_1\varepsilon_2\gamma_{14}+h_3\varepsilon_{17}\gamma_2\\
-8\delta_1(1+2\delta_1)\varepsilon_{43} &= 2h_1\varepsilon_2\gamma_{15}+h_3\varepsilon_{17}\gamma_3+h_3\varepsilon_{18}\gamma_2\\
-8\delta_1(1+2\delta_1)\varepsilon_{44} &= 2h_1\varepsilon_2\gamma_{16}+h_3\varepsilon_{18}\gamma_3.
\end{aligned}\right| \qquad (42)
$$

III. Die exargumentalen Glieder dritten Grades in der Zeitreduktion.

Bei den Funktionen S und R haben wir in den zuvor durchgeführten Entwicklungen die Glieder dritten Grades in den Derivierten Q und P der Störungsfunktion selbst und damit die Größen $\left(\frac{dS}{dv}\right)_3$, $\left(\frac{d^2R}{dv^2}+R\right)_3$ und $\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}+\mathfrak{Z}\right)_3$ zunächst noch bei Seite gelassen. Da diese in Q und P auftretenden Glieder dritten Grades von der Ordnung m' sind, so hatten wir in den vorstehenden Untersuchungen die in den rechten Seiten der Gleichungen:

$$\left(\frac{dS}{dv}\right)_3=\left(\frac{dS_0}{dv}\right)_3+\left(\frac{dS_1}{dv}\right)_3+\left(\frac{dS_2}{dv}\right)_3+\left(\frac{dS_3}{dv}\right)_3$$

$$\left(\frac{d^2R}{dv^2}+R\right)_3=\left(\frac{d^2R_0}{dv^2}\right)_3+\left(\frac{d^2R_1}{dv^2}\right)_3+\left(\frac{d^2R_2}{dv^2}\right)_3+\left(\frac{d^2R_3}{dv^2}+R_3\right)_3$$

auftretenden exargumentalen Glieder dritten Grades, die sich durch Integration aus den Gliedern des nullten, des ersten und des zweiten Grades ergeben (die wir jedoch durchweg durch partielle Differentiation bestimmt haben), mit m' verglichen. Und zwar hatten wir sie bei kritischen Planeten dann noch mitgenommen, wenn sie um ein Geringes größer als von der Ordnung m' waren, sie hingegen fortgelassen, wenn sie von der Ordnung $m'\sqrt{m'}$ waren.

In der Differentialgleichung für die Zeitreduktion hingegen:

$$\left(\frac{dT}{dv}\right)_3=\left(\frac{dT_0}{dv}\right)_3+\left(\frac{dT_1}{dv}\right)_3+\left(\frac{dT_2}{dv}\right)_3+\left(\frac{dT_3}{dv}\right)_3 \qquad (43)$$

ist die linke Seite, da sich $\frac{dT}{dv}$ ja aus S und R zusammengesetzt (wie die rechte Seite der Gleichung für T zeigt, cf. I, S. 391) offenbar nicht von der Ordnung m', sondern von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$.

Bei Entscheidung darüber, welche exargumentalen Glieder der rechten Seite wir in Gleichung (43) mitzunehmen haben, dürfen wir also die Größen:

$$\left(\frac{dT_0}{dv}\right)_3,\qquad \left(\frac{dT_1}{dv}\right)_3,\qquad \left(\frac{dT_2}{dv}\right)_3$$

nicht mit m', sondern müssen sie vielmehr mit $\frac{m'}{\delta_1}$ vergleichen.

Nun ist aber:

$$T_0 = \gamma_1 \sin 3w$$

und:

$$\left(\frac{dT_0}{dv}\right)_3 = -3\mu\gamma_1 \cos 3w \left(\frac{dV}{dv}\right)_3, \tag{44}$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dV}{dv}\right)_3 = {} & \gamma_{23}\eta^3 \cos(3w-\mathrm{v}) && +\gamma_{39}\eta^3 \cos(9w-3\mathrm{v}) \\ & +\gamma_{24}\eta^2\eta' \cos(3w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && +\gamma_{40}\eta^2\eta' \cos(9w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ & +\gamma_{25}\eta^2\eta' \cos(3w-\mathrm{v}_1) && +\gamma_{41}\eta\eta'^2 \cos(9w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) \\ & +\gamma_{26}\eta\eta'^2 \cos(3w-\mathrm{v}) && +\gamma_{42}\eta'^3 \cos(9w-3\mathrm{v}_1) \\ & +\gamma_{27}\eta\eta'^2 \cos(3w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) \\ & +\gamma_{28}\eta'^3 \cos(3w-\mathrm{v}_1)\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

bekannt ist, da γ_{23} bis γ_{28} und γ_{39} bis γ_{42} zuvor gefunden wurden. Es ist somit:

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_3 \asymp \frac{m'}{\delta_1},$$

und zwar bei kritischen Planeten numerisch um ein Geringes größer. Und da auch $\gamma_1 \asymp \frac{m'}{\delta_1}$ ist, so werden mit Hinblick auf (44) die aus $\frac{dT_0}{dv}$ entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades:

$$\left(\frac{dT_0}{dv}\right)_3 \asymp \frac{m'^2}{\delta_1^2}.$$

Für die Grenze $\delta_1^2 = m'$ also würden diese Glieder von der Ordnung m', d. h. $\lessdot \frac{m'}{\delta_1}$ und kommen deshalb in Gleichung (43), wo wir nur Glieder von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$ mitzunehmen haben, jetzt nicht in Betracht. Anders verhält es sich indes schon für das zweite Glied der rechten Seite von Gleichung (43).

---

a) **Die aus dem ersten Grade entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades in *T*.**

Zur Untersuchung des zweiten Gliedes der rechten Seite von Gleichung (43):

$$\left(\frac{dT_1}{dv}\right)_3$$

ist ja (cf. I, S. 382):

$$T_1 = (T_l)_1 + (T_k)_1 + (T_g)_1 = (T_l)_1 + (K_k + K_g)_1.$$

Also haben wir jetzt anzusetzen:

$$\left.\begin{aligned}T_1 = {} & \gamma_2'\eta \sin(3w-\mathrm{v}) + \gamma_4\eta \sin(6w-\mathrm{v}) + \gamma_6\eta \sin(3w+\mathrm{v}) \\ & + \gamma_3'\eta' \sin(3w-\mathrm{v}_1) + \gamma_5\eta' \sin(6w-\mathrm{v}_1)\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

und erhalten durch Differentiation hieraus:

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{dv} = \gamma_2'\eta\cos(3w-\mathrm{v})\left\{3\frac{dw}{dv}-1+\varsigma\right\} &+\gamma_4\eta\cos(6w-\mathrm{v})\left\{6\frac{dw}{dv}-1+\varsigma\right\}\\ +\gamma_3'\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)\left\{3\frac{dw}{dv}-1+\varsigma_1\right\} &+\gamma_5\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1)\left\{6\frac{dw}{dv}-1+\varsigma_1\right\}\\ &+\gamma_6\eta\cos(3w+\mathrm{v})\left\{3\frac{dw}{dv}+1-\varsigma\right\}.\end{aligned}$$

Nach dem Früheren ist jetzt zu setzen:

$$\frac{dw}{dv} = -\mu\frac{dV}{dv}.$$

Da nun:

$$\frac{dV}{dv} = \frac{m'}{\delta_1}; \quad \left.\begin{matrix}\gamma_4\\ \gamma_5\\ \gamma_6\end{matrix}\right\} = \frac{m'}{\delta_1}; \quad \text{dagegen} \quad \left.\begin{matrix}\gamma_2'\\ \gamma_3'\end{matrix}\right\} = \frac{m'}{\delta_1^2}$$

sind, so wird z. B. ein Glied in:

$$\gamma_4\frac{dw}{dv} = \frac{m'^2}{\delta_1^2},$$

hingegen:

$$\gamma_2'\frac{dw}{dv} = \frac{m'^2}{\delta_1^3}.$$

Das erste dieser Glieder wird für die Grenze $\delta_1^2 = m'$ von der Ordnung m', kommt jetzt also nicht in Betracht. Das zweite hingegen wird von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$, ist also mitzunehmen nach dem zuvor in Bezug auf Gleichung (43) Bemerkten. Mithin wird:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dT_1}{dv}\right)_3 = &-3\mu\gamma_2'\eta\cos(3w-\mathrm{v})\left(\frac{dV}{dv}\right)_2\\ &-3\mu\gamma_3'\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_2\end{aligned}$$

oder, da:

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)_2 = \gamma_{14}\eta^2\cos(6w-2\mathrm{v})+\gamma_{15}\eta\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)+\gamma_{16}\eta'^2\cos(6w-2\mathrm{v}_1)$$

ist, so erhält man hieraus den folgenden Ausdruck für die mitzunehmenden exargumentalen Glieder dritten Grades in T, die aus dem ersten Grad folgen:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dT_1}{dv}\right)_3 = &-\frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\gamma_2'\eta^3\cos(3w-\mathrm{v}) && -\frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\gamma_2'\eta^3\cos(9w-3\mathrm{v})\\ &-\frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\gamma_3'\eta^2\eta'\cos(3w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && -\frac{3}{2}\mu(\gamma_{14}\gamma_3'+\gamma_{15}\gamma_2')\eta^2\eta'\cos(9w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &-\frac{3}{2}\mu\gamma_{15}\gamma_2'\eta^2\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1) && -\frac{3}{2}\mu(\gamma_{15}\gamma_3'+\gamma_{16}\gamma_2')\eta\eta'^2\cos(9w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\ &-\frac{3}{2}\mu\gamma_{15}\gamma_3'\eta\eta'^2\cos(3w-\mathrm{v}) && -\frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\gamma_3'\eta'^3\cos(9w-3\mathrm{v}_1).\\ &-\frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\gamma_2'\eta\eta'^2\cos(3w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\ &-\frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\gamma_3'\eta'^3\cos(3w-\mathrm{v}_1)\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

b) Die aus dem zweiten Grade entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades in T.

Um zu entscheiden, welche Glieder sich aus dem dritten Glied der rechten Seite von Gleichung (43) ergeben:

$$\left(\frac{dT_2}{dv}\right)_2$$

hat man für T_2 offenbar in Ergänzung des allgemeinen Integralansatzes (cf. I, S. 382) jetzt den folgenden Ansatz zu machen:

$$\left.\begin{aligned} T_2 = \; & \gamma_7\eta^2 \sin 3w && +\gamma_{11}\eta^2 \sin(3w-2\mathrm{v}) && +\gamma'_{14}\eta^2 \sin(6w-2\mathrm{v}) \\ & \gamma_8\eta\eta' \sin(3w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +\gamma_{12}\eta\eta' \sin(3w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +\gamma'_{15}\eta\eta' \sin(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ & \gamma_9\eta\eta' \sin(3w-\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && +\gamma_{13}\eta'^2 \sin(3w-2\mathrm{v}_1) && +\gamma'_{16}\eta'^2 \sin(6w-2\mathrm{v}_1) \\ & \gamma_{10}\eta'^2 \sin 3w && && \\ & && +\gamma_{17}\eta^2 \sin(9w-2\mathrm{v}) && +\gamma_{20}\eta^2 \sin(3w+2\mathrm{v}) \\ & && +\gamma_{18}\eta\eta' \sin(9w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +\gamma_{21}\eta^2 \sin 6w \\ & && +\gamma_{19}\eta'^2 \sin(9w-2\mathrm{v}_1) && +\gamma_{22}\eta\eta' \sin(6w+\mathrm{v}-\mathrm{v}_1). \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

Nun sind ja aber die Glieder vom Argument $6w-2\mathrm{v}$ etc. die langperiodischen, die bei der Integration in T vergrößert erscheinen (cf. I, S. 376 und 380) und daher ist:

$$\left.\begin{matrix} \gamma'_{14} \\ \gamma'_{15} \\ \gamma'_{16} \end{matrix}\right\} = \frac{m'}{\delta_1^2},$$

während die übrigen γ in (48) sämtlich von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$ sind. Bei der Differentiation werden jetzt aber sämtliche Glieder (d. h. die exargumentalen, die wir ja betrachten), mit $\left(\frac{dV}{dv}\right)_1$ multipliziert, also nur die langperiodischen vergrößert, und daher werden sie von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^3}$, also für die Grenze von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$ und sind demnach mitzunehmen. Mitzunehmende Glieder liefert also der Ausdruck:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dT_2}{dv}\right)_3 = & -6\mu\gamma'_{14}\eta^2 \cos(6w-2\mathrm{v})\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\ & -6\mu\gamma'_{15}\eta\eta' \cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \\ & -6\mu\gamma'_{16}\eta'^2 \cos(6w-2\mathrm{v}_1)\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 \end{aligned}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dT_2}{dv}\right)_3 = & -3\mu\gamma_2\gamma'_{14}\eta^3 \cos(3w-\mathrm{v}) && -3\mu\gamma_2\gamma'_{14}\eta^3 \cos(9w-3\mathrm{v}) \\ & -3\mu\gamma_3\gamma'_{14}\eta^2\eta' \cos(3w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && -3\mu(\gamma_3\gamma'_{14}+\gamma_2\gamma'_{15})\eta^2\eta' \cos(9w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\ & -3\mu\gamma_2\gamma'_{15}\eta^2\eta' \cos(3w-\mathrm{v}_1) && -3\mu(\gamma_3\gamma'_{15}+\gamma_2\gamma'_{16})\eta\eta'^2 \cos(9w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) \\ & -3\mu\gamma_3\gamma'_{15}\eta\eta'^2 \cos(3w-\mathrm{v}) && -3\mu\gamma_3\gamma'_{16}\eta'^3 \cos(9w-3\mathrm{v}_1) \\ & -3\mu\gamma_2\gamma'_{16}\eta\eta'^2 \cos(3w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) && \\ & -3\mu\gamma_3\gamma'_{16}\eta'^3 \cos(3w-\mathrm{v}_1) && \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

c) Die Koeffizientenbestimmung des Integralansatzes.

Jetzt dürfen wir indes den Differentialquotienten des unbestimmten Integralansatzes $\left(\frac{dT_3}{dv}\right)$, noch nicht wie bei R und S bilden, da wir nicht wissen, ob aus der linken Seite der Gleichung (43) nicht etwa Glieder mit neuen Argumenten hervorgehen. Um das zu entscheiden, bilden wir zunächst die linke Seite von Gleichung (43) dadurch, daß wir in:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dT}{dv}\right)_3 = (S-2R)_3 + (6R-2S)_2\eta \cos \mathrm{v} - 3\eta^2 R_1 + \left(\frac{3}{2}S-6R\right)_1\eta^2 \cos 2\mathrm{v}\\ +6R_0\eta^3 \cos \mathrm{v} + \left(\frac{19}{4}R-S\right)_0\eta^3 \cos 3\mathrm{v}\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

den exargumentalen Teil einsetzen. Dabei ist der exargumentale Teil der Form C durch die Gleichungen (32) und (34) dieses Kapitels bereits bekannt. Um den Teil der Form D für Gleichung (50) zu bilden, wird, da S_3 von der Form C ist:

$$\begin{aligned} S_3-2R_3 = &-2\beta_{29}\eta^3 \cos(6w-\mathrm{v}) && -2\beta_{35}\eta^3 \cos(6w-3\mathrm{v})\\ &-2\beta_{30}\eta^2\eta' \cos(6w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && -2\beta_{36}\eta^2\eta' \cos(6w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &-2\beta_{31}\eta^2\eta' \cos(6w-\mathrm{v}_1) && -2\beta_{37}\eta\eta'^2 \cos(6w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\ &-2\beta_{32}\eta\eta'^2 \cos(6w-\mathrm{v}) && -2\beta_{38}\eta'^3 \cos(6w-3\mathrm{v}_1)\\ &-2\beta_{33}\eta\eta'^2 \cos(6w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) && \\ &-2\beta_{34}\eta'^3 \cos(6w-\mathrm{v}_1) && -2\beta_{43}\eta^3 \cos(12w-3\mathrm{v})\\ & && -2\beta_{44}\eta^2\eta' \cos(12w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ & && -2\beta_{45}\eta\eta'^2 \cos(12w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\ & && -2\beta_{46}\eta'^3 \cos(12w-3\mathrm{v}_1). \end{aligned}$$

Um die Glieder der Form D aus dem Produkt:

$$(6R-2S)_2\eta \cos \mathrm{v}$$

zu erhalten, hätten wir von $(6R-2S)_2$ nur die Glieder der Form C ins Auge zu fassen, da sich, wie man erkennt, nur aus diesen in Multiplikation mit $\eta \cos \mathrm{v}$ Glieder von der Form D ergeben; wir haben also auszugehen von:

$$\begin{aligned}(6R-2S)_2 = &(6\beta_{14}-2\alpha_{14})\eta^2 \cos(6w-2\mathrm{v})\\ &(6\beta_{15}-2\alpha_{15})\eta\eta' \cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &(6\beta_{16}-2\alpha_{16})\eta'^2 \cos(6w-2\mathrm{v}_1).\end{aligned}$$

und erhalten somit:

$$\begin{aligned}(6R-2S)_2\eta \cos \mathrm{v} = &(3\beta_{14}-\alpha_{14})\eta^3 \cos(6w-\mathrm{v})\\ &+(3\beta_{14}-\alpha_{14})\eta^3 \cos(6w-3\mathrm{v})\\ &+(3\beta_{15}-\alpha_{15})\eta^2\eta' \cos(6w-\mathrm{v}_1)\\ &+(3\beta_{15}-\alpha_{15})\eta^2\eta' \cos(6w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\ &+(3\beta_{16}-\alpha_{16})\eta\eta'^2 \cos(6w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\ &+(3\beta_{16}-\alpha_{16})\eta\eta'^2 \cos(6w-\mathrm{v}+2\mathrm{v}_1).\end{aligned}$$

Zur Bestimmung ferner der aus $3\eta^2 R_1$ resultierenden Glieder dritten Grades der Form D haben wir in R_1 offenbar den Teil der Form D ins Auge zu fassen und erhalten so:

$$-3\eta^2 R_1 = -3\beta_4\eta^3\cos(6w-\mathrm{v})-3\beta_5\eta^2\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1).$$

Und da in:

$$\left(\frac{3}{2}S-6R\right)_1\eta^2\cos 2\mathrm{v}$$

S_1 keine großen Glieder der Form D enthält, da die Koeffizienten der Glieder der Eorm D in S_1, nämlich a_4, a_5, von der Ordnung m', nicht aber von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$ sind, so wird:

$$\left(\frac{3}{2}S-6R\right)_1\eta^2\cos 2\mathrm{v} = -6R_1\eta^2\cos 2\mathrm{v} = -3\beta_4\eta^3\cos(6w-3\mathrm{v})-3\beta_5\eta^2\eta'\cos(6w-\mathrm{v}-\mathrm{v}_1).$$

Hingegen ergeben die Ausdrücke:

$$6R_0\eta^3\cos\mathrm{v} \quad \text{und} \quad \left(\frac{19}{4}R-S\right)_0\eta^3\cos 3\mathrm{v}$$

offenbar keine mitzunehmenden Glieder dritten Grades der Form D. Die Gleichung (50) wird daher bei Mitnahme der C- und D-Glieder:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dT}{dv}\right)_3 = {} & \gamma_{23}\eta^3\cos(3w-\mathrm{v}) && +\zeta_{29}\eta^3\cos(6w-\mathrm{v}) \\
& +\gamma_{24}\eta^2\eta'\cos(3w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && +\zeta_{30}\eta^2\eta'\cos(6w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) \\
& +\gamma_{25}\eta^2\eta'\cos(3w-\mathrm{v}_1) && +\zeta_{31}\eta^2\eta'\cos(6w-\mathrm{v}_1) \\
& +\gamma_{26}\eta\eta'^2\cos(3w-\mathrm{v}) && +\zeta_{32}\eta\eta'^2\cos(6w-\mathrm{v}) \\
& +\gamma_{27}\eta\eta'^2\cos(3w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) && +\zeta_{33}\eta\eta'^2\cos(6w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) \\
& +\gamma_{28}\eta'^3\cos(3w-\mathrm{v}_1) && +\zeta_{34}\eta'^3\cos(6w-\mathrm{v}_1) \\[1ex]
& +\zeta_{35}\eta^3\cos(6w-3\mathrm{v}) && +\gamma_{39}\eta^3\cos(9w-3\mathrm{v}) \\
& +\zeta_{36}\eta^2\eta'\cos(6w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +\gamma_{40}\eta^2\eta'\cos(9w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& +\zeta_{37}\eta\eta'^2\cos(6w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) && +\gamma_{41}\eta\eta'^2\cos(9w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) \\
& +\zeta_{38}\eta'^3\cos(6w-3\mathrm{v}_1) && +\gamma_{42}\eta'^3\cos(9w-3\mathrm{v}_1) \\[1ex]
& && +\zeta_{43}\eta^3\cos(12w-3\mathrm{v}) \\
& && +\zeta_{44}\eta^2\eta'\cos(12w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) \\
& && +\zeta_{45}\eta\eta'^2\cos(12w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) \\
& && +\zeta_{46}\eta'^3\cos(12w-3\mathrm{v}_1),
\end{aligned}\right\} \quad (51)$$

wobei γ_{23} bis γ_{28} und γ_{39} bis γ_{42} durch die Gleichungen (34), ζ_{29} bis ζ_{38} und ζ_{43} bis ζ_{46} hingegen durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\zeta_{29} &= -3\beta_4+3\beta_{14}-\alpha_{14}-2\beta_{29} \\
\zeta_{30} &= -2\beta_{30} \\
\zeta_{31} &= -3\beta_5+3\beta_{15}-\alpha_{15}-2\beta_{31} \\
\zeta_{32} &= -2\beta_{32}
\end{aligned} \quad (52)$$

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_{33} &= 3\beta_{16}-\alpha_{16}-2\beta_{33}\\
\zeta_{34} &= -2\beta_{34}\\
\zeta_{35} &= -3\beta_4+3\beta_{14}-\alpha_{14}-2\beta_{35}\\
\zeta_{36} &= -3\beta_5+3\beta_{15}-\alpha_{15}-2\beta_{36}\\
\zeta_{37} &= 3\beta_{16}-\alpha_{16}-2\beta_{37}\\
\zeta_{38} &= -2\beta_{38}\\
\zeta_{43} &= -2\beta_{43}\\
\zeta_{44} &= -2\beta_{44}\\
\zeta_{45} &= -2\beta_{45}\\
\zeta_{46} &= -2\beta_{46}
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

gegeben sind, da β_{29} bis β_{46} durch (35) gegeben sind.

Jetzt sind wir imstande, auf Grund der drei berechneten Glieder:

$$\left(\frac{dT_0}{dv}\right)_3, \quad \left(\frac{dT_1}{dv}\right)_3, \quad \left(\frac{dT_2}{dv}\right)_3,$$

sowie der ermittelten linken Seite von Gleichung (43):

$$\left(\frac{dT}{dv}\right)_3$$

den unbestimmten Integralansatz für die exargumentalen Glieder dritten Grades in T aufzustellen. Derselbe wird offenbar:

$$\left.\begin{aligned}
T_3 = {} & \gamma'_{23}\eta^3 \sin(3w-\mathrm{v}) && +\gamma_{29}\eta^3\sin(6w-\mathrm{v})\\
&+\gamma'_{24}\eta^2\eta'\sin(3w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1) && +\gamma_{30}\eta^2\eta'\sin(6w-2\mathrm{v}+\mathrm{v}_1)\\
&+\gamma'_{25}\eta^2\eta'\sin(3w-\mathrm{v}_1) && +\gamma_{31}\eta^2\eta'\sin(6w-\mathrm{v}_1)\\
&+\gamma'_{26}\eta\eta'^2\sin(3w-\mathrm{v}) && +\gamma_{32}\eta\eta'^2\sin(6w-\mathrm{v})\\
&+\gamma'_{27}\eta\eta'^2\sin(3w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) && +\gamma_{33}\eta\eta'^2\sin(6w+\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\
&+\gamma'_{28}\eta'^3\sin(3w-\mathrm{v}_1) && +\gamma_{34}\eta'^3\sin(6w-\mathrm{v}_1)\\
&+\gamma_{35}\eta^3\sin(6w-3\mathrm{v}) && +\gamma'_{39}\eta^3\sin(9w-3\mathrm{v})\\
&+\gamma_{36}\eta^2\eta'\sin(6w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1) && +\gamma'_{40}\eta^2\eta'\sin(9w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
&+\gamma_{37}\eta\eta'^2\sin(6w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1) && +\gamma'_{41}\eta\eta'^2\sin(9w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\
&+\gamma_{38}\eta'^3\sin(6w-3\mathrm{v}_1) && +\gamma'_{42}\eta'^3\sin(9w-3\mathrm{v}_1)\\
& && +\gamma_{43}\eta^3\sin(12w-3\mathrm{v})\\
& && +\gamma_{44}\eta^2\eta'\sin(12w-2\mathrm{v}-\mathrm{v}_1)\\
& && +\gamma_{45}\eta\eta'^2\sin(12w-\mathrm{v}-2\mathrm{v}_1)\\
& && +\gamma_{46}\eta'^3\sin(12w-3\mathrm{v}_1),
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

wobei γ_{29} bis γ_{38} und γ_{43} bis γ_{46} sämtlich von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$, hingegen γ'_{23} bis γ'_{28} und γ'_{39} bis γ'_{42} von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1^2}$ sind.

Durch Differentiation von Gleichung (53) ist nunmehr auch das vierte Glied der rechten Seite von Gleichung (43) gefunden. Es wird:

$$
\left(\frac{dT_3}{dv}\right)_3 = \left.\begin{aligned}
&(\delta_1+\varsigma)\gamma_{23}'\eta^3\cos(3w-v) && +(1+2\delta_1+\varsigma)\gamma_{29}\eta^3\cos(6w-v)\\
&+(\delta_1+2\varsigma-\varsigma_1)\gamma_{24}'\eta^2\eta'\cos(3w-2v+v_1) && +(1+2\delta_1+2\varsigma-\varsigma_1)\gamma_{30}\eta^2\eta'\cos(6w-2v+v_1)\\
&+(\delta_1+\varsigma_1)\gamma_{25}'\eta^2\eta'\cos(3w-v_1) && +(1+2\delta_1+\varsigma_1)\gamma_{31}\eta^2\eta'\cos(6w-v_1)\\
&+(\delta_1+\varsigma)\gamma_{26}'\eta\eta'^2\cos(3w-v) && +(1+2\delta_1+\varsigma)\gamma_{32}\eta\eta'^2\cos(6w-v)\\
&+(\delta_1-\varsigma+2\varsigma_1)\gamma_{27}'\eta\eta'^2\cos(3w+v-2v_1) && +(1+2\delta_1-\varsigma+2\varsigma_1)\gamma_{33}\eta\eta'^2\cos(6w+v-2v_1)\\
&+(\delta_1+\varsigma_1)\gamma_{28}'\eta'^3\cos(3w-v_1) && +(1+2\delta_1+\varsigma_1)\gamma_{34}\eta'^3\cos(6w-v_1)\\
&+(2\delta_1+3\varsigma-1)\gamma_{35}\eta^3\cos(6w-3v) && +3(\delta_1+\varsigma)\gamma_{39}'\eta^3\cos(9w-3v)\\
&+(2\delta_1+2\varsigma+\varsigma_1-1)\gamma_{36}\eta^2\eta'\cos(6w-2v-v_1) && +(3\delta_1+2\varsigma+\varsigma_1)\gamma_{40}'\eta^2\eta'\cos(9w-2v-v_1)\\
&+(2\delta_1+\varsigma+2\varsigma_1-1)\gamma_{37}\eta\eta'^2\cos(6w-v-2v_1) && +(3\delta_1+\varsigma+2\varsigma_1)\gamma_{41}'\eta\eta'^2\cos(9w-v-2v_1)\\
&+(2\delta_1+3\varsigma_1-1)\gamma_{38}\eta'^3\cos(6w-3v_1) && +3(\delta_1+\varsigma_1)\gamma_{42}'\eta'^3\cos(9w-3v_1)\\
& && +(1+4\delta_1+3\varsigma)\gamma_{43}\eta^3\cos(12w-3v)\\
& && +(1+4\delta_1+2\varsigma+\varsigma_1)\gamma_{44}\eta^2\eta'\cos(12w-2v-v_1)\\
& && +(1+4\delta_1+\varsigma+2\varsigma_1)\gamma_{45}\eta\eta'^2\cos(12w-v-2v_1)\\
& && +(1+4\delta_1+3\varsigma_1)\gamma_{46}\eta'^3\cos(12w-3v_1).
\end{aligned}\right\} \quad (54)
$$

Im Hinblick auf die Gleichung (43) erhält man somit die folgenden Bestimmungsgleichungen für die gesuchten unbekannten Koeffizienten des Integralansatzes (53) für die exargumentalen Glieder dritten Grades in T:

$$
\left.\begin{aligned}
\gamma_{23} &= (\delta_1+\varsigma)\gamma_{23}'-3\mu\gamma_2\gamma_{14}'-\frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\gamma_2'\\
\gamma_{24} &= (\delta_1+2\varsigma-\varsigma_1)\gamma_{24}'-3\mu\gamma_3\gamma_{14}'-\frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\gamma_3'\\
\gamma_{25} &= (\delta_1+\varsigma_1)\gamma_{25}'-3\mu\gamma_2\gamma_{15}'-\frac{3}{2}\mu\gamma_{15}\gamma_2'\\
\gamma_{26} &= (\delta_1+\varsigma)\gamma_{26}'-3\mu\gamma_3\gamma_{15}'-\frac{3}{2}\mu\gamma_{15}\gamma_3'\\
\gamma_{27} &= (\delta_1-\varsigma+2\varsigma_1)\gamma_{27}'-3\mu\gamma_2\gamma_{16}'-\frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\gamma_2'\\
\gamma_{28} &= (\delta_1+\varsigma_1)\gamma_{28}'-3\mu\gamma_3\gamma_{16}'-\frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\gamma_3'\\
\zeta_{29} &= (1+2\delta_1+\varsigma)\gamma_{29}\\
\zeta_{30} &= (1+2\delta_1+2\varsigma-\varsigma_1)\gamma_{30}\\
\zeta_{31} &= (1+2\delta_1+\varsigma_1)\gamma_{31}\\
\zeta_{32} &= (1+2\delta_1+\varsigma)\gamma_{32}\\
\zeta_{33} &= (1+2\delta_1-\varsigma+2\varsigma_1)\gamma_{33}\\
\zeta_{34} &= (1+2\delta_1+\varsigma_1)\gamma_{34}\\
\zeta_{35} &= (2\delta_1+3\varsigma-1)\gamma_{35}\\
\zeta_{36} &= (2\delta_1+2\varsigma+\varsigma_1-1)\gamma_{36}\\
\zeta_{37} &= (2\delta_1+\varsigma+2\varsigma_1-1)\gamma_{37}\\
\zeta_{38} &= (2\delta_1+3\varsigma_1-1)\gamma_{38}
\end{aligned}\right\} \quad (55)
$$

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{39} &= 3(\delta_1+\varsigma)\gamma'_{39}-3\mu\gamma_2\gamma'_{14}-\frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\gamma'_2\\
\gamma_{40} &= (3\delta_1+2\varsigma+\varsigma_1)\gamma'_{40}-3\mu\gamma_3\gamma'_{14}-3\mu\gamma_2\gamma'_{15}-\frac{3}{2}\mu(\gamma_{14}\gamma'_3+\gamma_{15}\gamma'_2)\\
\gamma_{41} &= (3\delta_1+\varsigma+2\varsigma_1)\gamma'_{41}-3\mu\gamma_3\gamma'_{15}-3\mu\gamma_2\gamma'_{16}-\frac{3}{2}\mu(\gamma_{15}\gamma'_3+\gamma_{16}\gamma'_2)\\
\gamma_{42} &= 3(\delta_1+\varsigma_1)\gamma'_{42}-3\mu\gamma_3\gamma'_{16}-\frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\gamma'_3\\
\zeta_{43} &= (1+4\delta_1+3\varsigma)\gamma_{43}\\
\zeta_{44} &= (1+4\delta_1+2\varsigma+\varsigma_1)\gamma_{44}\\
\zeta_{45} &= (1+4\delta_1+\varsigma+2\varsigma_1)\gamma_{45}\\
\zeta_{46} &= (1+4\delta_1+3\varsigma_1)\gamma_{46}.
\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Die gesuchten Koeffizienten des Integralansatzes (53) sind somit im Hinblick auf die vorgesetzte Genauigkeitsgrenze:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma'_{23} &= \frac{3\beta_{11}+3\beta_7-3\beta_2+3\beta_1-3\alpha_{23}+3\mu\gamma_2\gamma'_{14}+\frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\gamma'_2}{\delta_1}\\
\gamma'_{24} &= \frac{3\beta_9-3\alpha_{24}+3\mu\gamma_3\gamma'_{14}+\frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\gamma'_3}{\delta_1}\\
\gamma'_{25} &= \frac{3\beta_{12}+3\beta_8-3\beta_3-3\alpha_{25}+3\mu\gamma_2\gamma'_{15}+\frac{3}{2}\mu\gamma_{15}\gamma'_2}{\delta_1}\\
\gamma'_{26} &= \frac{3\beta_{10}-3\alpha_{26}+3\mu\gamma_3\gamma'_{15}+\frac{3}{2}\mu\gamma_{15}\gamma'_3}{\delta_1}\\
\gamma'_{27} &= \frac{3\beta_{13}-3\alpha_{27}+3\mu\gamma_2\gamma'_{16}+\frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\gamma'_2}{\delta_1}\\
\gamma'_{28} &= \frac{-3\alpha_{28}+3\mu\gamma_3\gamma'_{16}+\frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\gamma'_3}{\delta_1}\\
\gamma_{29} &= \frac{-3\beta_4+3\beta_{14}-\alpha_{14}-2\beta_{29}}{1+2\delta_1}\\
\gamma_{30} &= \frac{-2\beta_{30}}{1+2\delta_1}\\
\gamma_{31} &= \frac{-3\beta_5+3\beta_{15}-\alpha_{15}-2\beta_{31}}{1+2\delta_1}\\
\gamma_{32} &= \frac{-2\beta_{32}}{1+2\delta_1}\\
\gamma_{33} &= \frac{3\beta_{16}-\alpha_{16}-2\beta_{33}}{1+2\delta_1}\\
\gamma_{34} &= \frac{-2\beta_{34}}{1+2\delta_1}
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{35} &= \frac{3\beta_4 - 3\beta_{14} + \alpha_{14} + 2\beta_{35}}{1-2\delta_1} \\
\gamma_{36} &= \frac{3\beta_5 - 3\beta_{15} + \alpha_{15} + 2\beta_{36}}{1-2\delta_1} \\
\gamma_{37} &= \frac{-3\beta_{16} + \alpha_{16} + 2\beta_{37}}{1-2\delta_1} \\
\gamma_{38} &= \frac{+2\beta_{38}}{1-2\delta_1} \\
\gamma'_{39} &= \frac{3\beta_{17} - 3\alpha_{39} + 3\mu\gamma_2\gamma'_{14} + \frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\gamma'_2}{3\delta_1} \\
\gamma'_{40} &= \frac{3\beta_{18} - 3\alpha_{40} + 3\mu\gamma_3\gamma'_{14} + 3\mu\gamma_2\gamma'_{15} + \frac{3}{2}\mu\gamma_{14}\gamma'_3 + \frac{3}{2}\mu\gamma_{15}\gamma'_2}{3\delta_1} \\
\gamma'_{41} &= \frac{3\beta_{19} - 3\alpha_{41} + 3\mu\gamma_3\gamma'_{15} + 3\mu\gamma_2\gamma'_{16} + \frac{3}{2}\mu\gamma_{15}\gamma'_3 + \frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\gamma'_2}{3\delta_1} \\
\gamma'_{42} &= \frac{-3\alpha_{42} + 3\mu\gamma_3\gamma'_{16} + \frac{3}{2}\mu\gamma_{16}\gamma'_3}{3\delta_1} \\
\gamma_{43} &= \frac{-2\beta_{43}}{1+4\delta_1}, \quad \gamma_{44} = \frac{-2\beta_{44}}{1+4\delta_1}, \quad \gamma_{45} = \frac{-2\beta_{45}}{1+4\delta_1}, \\
\gamma_{46} &= \frac{-2\beta_{46}}{1+4\delta_1}.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Die exargumentalen Glieder dritten Grades in T sind somit durch die Gleichungen (53) und (56) ermittelt, wobei natürlich die γ für den zweiten Grad bekannt sein müssen, die wir bei der in Abteilung III durchzuführenden Integration der Differentialgleichung für die Glieder zweiten Grades in der Zeitreduktion ableiten werden.

Nun ist ja:

$$\gamma_2 = \frac{m'}{\delta_1}, \qquad \gamma'_{14} = \frac{m'}{\delta_1^2}, \quad \text{also} \quad \gamma_2\gamma'_{14} = \frac{m'^2}{\delta_1^3},$$

mithin für die Grenze:

$$\gamma'_{23} = \frac{m'^2}{\delta_1^4} = m'^0,$$

das heißt nullter Ordnung, also so groß wie die elementären Glieder. Zunächst fanden wir nun in T Glieder von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1^2}$, jetzt solche von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^4}$. Ist nun bei nicht kritischen Planeten $\delta_1^2 > m'$ also $\frac{m'}{\delta_1^2} < 1$, so fällt die Reihe der exargumentalen Glieder, die offenbar eine Potenzreihe in $\frac{m'}{\delta_1^2}$ ist:

$$\frac{m'}{\delta_1^2} + \frac{m'^2}{\delta_1^4} + \frac{m'^3}{\delta_1^6} + \ldots \tag{57}$$

Für kritische Planeten hingegen, wo:

$$\frac{m'}{\delta_1^2} > 1$$

ist, steigt die Reihe (57) und darum sind eben bei kritischen Planeten die exargumentalen Glieder dritten Grades größer als die Glieder dritten Grades in Q und P selbst. Wiewohl nun die Reihe (57) in jedem Grad für sich endlich ist und ihre Konvergenz daher nicht in Betracht kommt, so wird doch, wenn die Reihe (57) bedeutend steigt, auch die Gesamtreihe der Störungen schwächer konvergieren, trotzdem das Steigen der Reihe durch die Potenzen von η ja herabgedrückt wird. In einem kritischen Grenzfall, wie dem von Hilda, müßte man dann bis zu sehr hohen Potenzen hinsichtlich der Exzentrizität und Masse in den exargumentalen Gliedern gehen, um den gerechneten Ort innerhalb der Beobachtungsgrenzen darzustellen. Für solche extreme Fälle, in denen die partielle Integration (oder Differentiation) kaum noch praktisch zum Ziele führen dürfte, hat Gyldén ein anderes Verfahren mittelst elliptischer Funktionen eingeführt (wie es ähnlich Herr Harzer bei Hecuba verwandt hat), das alle exargumentalen Glieder der verschiedenen Grade mit einemmale zu berechnen erlaubt. Für die übrigen Planeten des Typus $\frac{2}{3}$, die nicht, wie Hilda selbst, den extremen Fall bezeichnen, dürfte die im Vorstehenden entwickelte Theorie genügende Resultate verbürgen. Nur bildet bei diesen prinzipiell so tief angelegten und in mathematischer Beziehung so vollendet ausgebildeten Methoden zur Behandlung des Problems der Bewegung der Planeten, wie sie Gyldén uns hinterlassen hat, doch wieder nur die numerische Anwendung, der Vergleich und die Übereinstimmung mit der Erfahrung, den eigentlichen Wertmesser und Maßstab. Und eben deswegen habe ich mir in diesen und in den weiter durchzuführenden Untersuchungen das Ziel gesteckt, die lineäre und die horistische Integrationsmethode Gyldén's am Beispiel eines zunächst einfacheren Planeten der wirklich im Planetensystem auftretenden Bewegung vom Typus $\frac{2}{3}$ auf ihre wirkliche Verwertbarkeit hin zu untersuchen und zu prüfen.

Halle a. d. Saale, im Februar 1904.

Hugo Buchholz.