DIE

LEHRE VON DER ABERRATION DER GESTIRNE

VON

DR. LADISLAUS WEINEK,

O. Ö. PROFESSOR DER ASTRONOMIE UND DIREKTOR DER K. K. STERNWARTE IN PRAG.

Mit 34 Textfiguren.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 18. FEBRUAR 1904.

Vorwort.

Obgleich wir treffliche Lehrbücher der sphärischen Astronomie besitzen, unter denen besonders das »Lehrbuch der sphärischen Astronomie von Dr. F. Brünnow« und »A manual of spherical and practical Astronomy by William Chauvenet« zu nennen sind, so legen diese doch allgemein zu wenig Gewicht auf die instruktive graphische Erläuterung der gegebenen theoretischen Entwicklungen. Brünnow offenbart geradezu einen Mangel an Zeichnungen und, was an solchen in seiner Theorie der Instrumente gebracht ist, kann nur als unzulänglich bezeichnet werden. Chauvenet gibt wohl vereinzelte Abbildungen im Texte, welche aber ihrer geringen Anschaulichkeit wegen kaum wesentlich zur Förderung des Verständnisses beizutragen vermögen. Freilich ist in Betracht zu ziehen, daß eine exakte, plastisch wirkungsvolle Darstellung der oft komplizierten geometrischen Beziehungen an der Sphäre nicht immer ohne Schwierigkeit ist. Gelingt dieselbe aber in erwünschter Durchsichtigkeit, so wird sie auch in den meisten Fällen die Theorie und ihre Konsequenzen einfacher, klarer und überzeugender gestalten.

Im Nachstehenden ist der Versuch gemacht, die Lehre von der Aberration der Gestirne in graphisch anschaulicher und möglichst eingehender Weise zu beleuchten. Der Sachkundige wird dabei ohne Mühe das Neue im Vergleiche zu Brünnow oder Chauvenet, beziehungsweise zu anderen Autoren herausfinden.

Prag, im Februar 1904.

L. Weinek.

Inhalt.

I. Allgemeines über die Erscheinung der Aberration.

Der Name Aberration oder Abirrung des Lichtes wird in der Astronomie für eine kleine scheinbare Positionsveränderung der Sternörter gebraucht, die ihren Grund ebensowohl in der meßbaren Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, als auch in der Bewegung des Beobachtungsortes hat. Würde also das Licht sich momentan im Raume verbreiten oder würde unsere Erde, von welcher aus wir mit dem Fernrohr nach den Sternen visieren, in absoluter Ruhe sein, so existierte jene scheinbare Verschiebung am Himmel nicht. Ihre Entdeckung verdanken wir dem Scharfsinn des ausgezeichneten englischen Beobachters James Bradley, als dieser zu Ende des Jahres 1725 mit einer Reihe von Sternbeobachtungen begann, die zur Auffindung einer parallaktischen Verschiebung der Fixsternörter infolge der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne führen sollte.

Um das Phänomen der Aberration in möglichst klarer Weise zu erfassen, wird es zweckmäßig sein, von analogen Erscheinungen des täglichen Lebens auszugehen.

Denken wir uns, es fiele vertikaler Regen und wir stellten uns in demselben mit einer genau vertikal gehaltenen Papierrolle auf (Fig. 1). Dann würde, wenn wir von den Tropfen, welche die obere Rollenkante

Fig. 1.

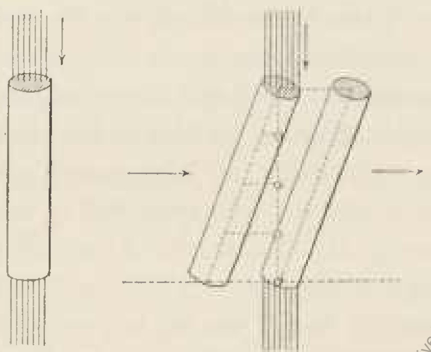
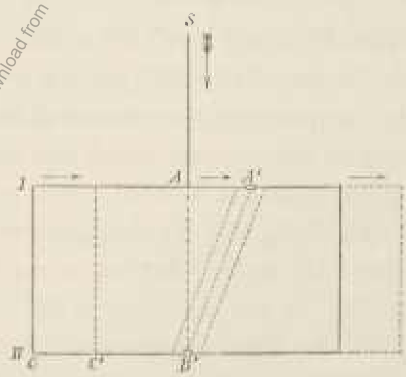


Fig. 2.



treffen, absehen, der Regen unbehindert durch die Rolle gehen, also deren Innenwand nicht benetzen. Anders ist es, wenn wir uns mit der ebenso gehaltenen Rolle in schnelle horizontale Bewegung versetzen. Geschieht diese beispielsweise nach Osten, so wird die westliche Innenwand naß werden und wüßten wir nichts von unserer eigenen Laufbewegung, so würden wir nach dem Effekte schließen und sagen, daß der Regen in schräger Richtung aus Osten gekommen sei. Anderseits, geben wir der Rolle bei derselben Laufbewegung eine passende Neigung nach Osten, so könnten wir erreichen, daß der noch immer vertikale Regen unbehindert durch die Rolle gehe, also deren Innenwand nicht benetze. Die Richtung der Rolle gibt dann die scheinbare Richtung des Regens, und ihr Winkel mit der Vertikalen ist in diesem Falle der scheinbare Ablenkungswinkel der Regenstrahlen.

Wählen wir noch ein anderes Bild. Denken wir uns einen Eisenbahnwagen, der in lebhafter Bewegung begriffen wäre und auf welchen in der Richtung SA (Fig. 2) ein Büchsenschuß abgegeben würde. Im Momente, da die Kugel die Wandung I erreicht, schlüge sie in A ein Loch durch und bewege sich weiter durch den Waggon nach der gegenüberliegenden Wandung II. Da hierüber eine gewisse Zeit vergeht, so wird mittlerweile, bis die Wandung II erreicht ist und in B' (welcher Ort naturgemäß in der Richtung SA liegt) ein zweites Loch durchgeschlagen worden, der Waggon eine kleine Stelle fortgerückt sein, etwa um CC', so daß auch das Loch A nach A' ($AA' = CC'$) gewandert sein wird. Säße nun ein Passagier in dem Waggon und sähe, ohne von seiner Bewegung etwas zu wissen, die beiden Löcher A' und B', so würde er unzweifelhaft schließen, daß die Kugel in der Richtung $A'B'$ abgeschossen worden sei, während dies tatsächlich in der Richtung SA geschehen ist. Hätte man anderseits im Waggon eine Röhre mit der Richtung AB' angebracht, so würde die Kugel ungehindert durchgegangen sein, und doch ist $A'B'$ nur die scheinbare Richtung des Schusses, während AS die wahre ist. Bemerkenswert ist wieder, daß die scheinbare Richtung im Sinne der Bewegungsrichtung des Beobachters voraus gegen die wahre liegt.

An Stelle der fliegenden Kugel denken wir uns nun das sich unvergleichlich schneller, doch ebenfalls geradlinig fortpflanzende Licht des Sternes, an Stelle der Waggonwandung I das Objektiv des Fernrohres, an Stelle der Wandung II das Okular desselben (oder präziser das Fadenkreuz in der Fokalebene des Objektivs) und haben derart den Fall der astronomischen Beobachtung (Fig. 3). Das Fernrohr muß

Fig. 3.

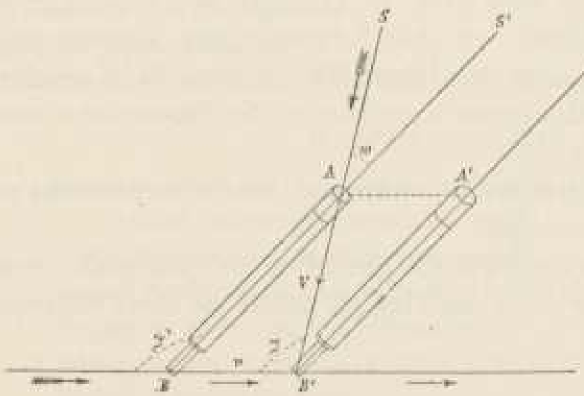
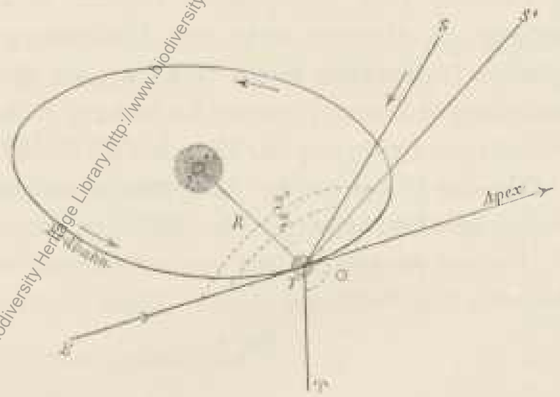


Fig. 4.



gegen die wahre Richtung des Lichtstrahles SA die in der Bewegungsrichtung des Beobachters nach vorne geneigte Stellung $AB//A'B'$ erhalten, wenn der Lichtstrahl unbehindert durch das Fernrohr hindurchgehen, d. i. der Stern in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheinen soll. Die Größe dieser Neigung gegen die wahre Richtung ist ebensowohl durch den Betrag der Geschwindigkeiten des Lichtes und des Fernrohres bedingt, als auch durch den Winkel, unter welchem diese gegeneinander zur Wirksamkeit gelangen. Aus der Figur ist ersichtlich, daß die Stellung des Fernrohres so beschaffen sein muß, daß in derselben Zeit, in welcher das Licht vom Objektive A nach B' gelangt, auch das Okular von B nach B' gelangt sei. Tragen wir daher in der Richtung SAB' die Geschwindigkeit des Lichtes V, in der Richtung $B'B$ die Geschwindigkeit des Fernrohres v (d. i. des Beobachtungsortes) von B' aus auf und verbinden die Endpunkte, so erhalten wir die tatsächliche Richtung des Fernrohres, in welcher wir den Stern anvisieren müssen, um ihn im Fernrohre zu sehen. Derselbe erscheint uns in S', während sein wahrer Ort in S ist. Der Winkel SAS' oder $SB'S'$, um welchen wir die beobachtete Richtung korrigieren müssen, heißt der Aberrationswinkel (w).[1]

Die Aberration in ihrer Wirkungsebene.

Die Aberration w tritt, wie aus Fig. 4 ersichtlich, in jener Ebene zur Wirksamkeit, welche durch die Richtung des Lichtstrahles und die Bewegungsrichtung des Fernrohres gegeben ist. Heißen die Winkel, welche die wahre Richtung nach dem Sterne, beziehungsweise dessen scheinbare Richtung mit jener Richtung im Raume bilden, aus welcher das Fernrohr, d. i. der Beobachtungsort zufolge seiner Bewegung zu kommen scheint (E), ϑ, beziehungsweise ϑ', so folgt sofort aus $\Delta ABB'$ (Fig. 3), da $w = \vartheta' - \vartheta$ ist:

$$\frac{\sin(\vartheta' - \vartheta)}{\sin(180 - \vartheta')} = \frac{v}{V}$$

[1] Aus dieser Betrachtung erkennt man auch, wie unrichtig der Name Aberration für dieses Phänomen gewählt ist, da hierbei das Licht keineswegs von seinem Wege abirrt, sondern sich unverändert geradlinig fortpflanzt, und es nur dem Beobachter so erscheint, als wäre der Lichtstrahl von seiner Richtung abgelenkt worden. Ebensowenig würde es zutreffen, wenn man den Umstand, daß die auf ein sich rasch bewegendes Wild angelegte Büchse nicht die Richtung nach diesem nehmen darf, sondern dem Wilde vorauszielen muß, um zu treffen, eine Aberration der Kugel nennen würde. Mit größerem Rechte könnte man die Erscheinung der Strahlenbrechung in der Erdatmosphäre, wodurch jeder Stern gegen seinen wahren Ort im Raume gehoben erscheint, als eine Aberration des Lichtes bezeichnen.

also

$$\sin(\vartheta'-\vartheta) = \frac{v}{V}\sin\vartheta'$$

und, da wegen des geringen Betrages von v im Vergleich zu V die Größe $\vartheta'-\vartheta$ als klein zu betrachten ist,

$$\vartheta'-\vartheta = \frac{v}{V\sin 1''}\sin\vartheta'.^{1}$$

Wird jetzt der Faktor von $\sin\vartheta'$ mit k bezeichnet, so daß

$$k = \frac{v}{V\sin 1''}$$

ist, und dieser die Aberrationskonstante genannt, so weit v und V als unveränderlich betrachtet werden können, so folgt

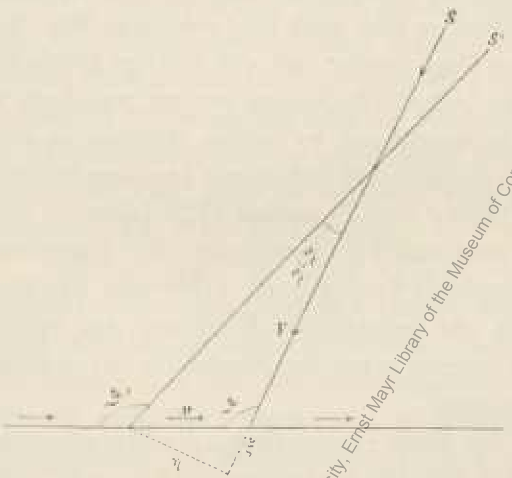
$$\underline{\vartheta'-\vartheta = k\sin\vartheta'}$$

und auch wegen der Kleinheit von w: $\vartheta'-\vartheta = k\sin\vartheta$.

Aus dieser Formel ersieht man, daß die Aberration in ihrer Wirkungsebene ein Maximum wird, wenn ϑ', beziehungsweise ϑ gleich 90° ist, d. i. für den Fall, daß der Lichtstrahl die Bewegungsrichtung des Fernrohres senkrecht trifft. Dieser Maximalwert ist die Größe k, die Aberrationskonstante.

Die eben abgeleitete einfache Formel kann auch erhalten werden, indem man v in zwei Komponenten zerlegt (Fig. 5), senkrecht zum Lichtstrahle und in der Richtung desselben. Letztere heiße ξ, erstere η. Da nur η zur Wirksamkeit gelangt, so ergibt sich:

Fig. 5.



$$tg(\vartheta'-\vartheta) = \frac{\eta}{V+\xi} = \frac{\eta}{V\left(1+\frac{\xi}{V}\right)} = \frac{\eta}{V}\left(1-\frac{\xi}{V}\right)$$

und unter Vernachlässigung des kleinen Gliedes 2. Ordnung auf der rechten Seite:

$$\vartheta'-\vartheta = \frac{\eta}{V\sin 1''},$$

ferner wegen $\eta = v\sin(180-\vartheta)$

$$\vartheta'-\vartheta = \frac{v}{V\sin 1''}\sin\vartheta.$$

Jährliche und tägliche Aberration.

Die Bewegung des Beobachters besteht nun aus der jährlichen Bewegung des Erdzentrums um die Sonne und aus der täglichen Bewegung des Beobachtungsortes um die Erdaxe. Führt man für v die

---

[1] Hierin ist $\sin 1''$ die abgekürzte Bezeichnungsweise für das Verhältnis des Kreisumfanges für den Radius Eins zum vollen Winkelumkreise in Bogensekunden, also

$$\sin 1'' = \frac{2\pi}{360°.60'.60''} = \frac{\pi}{648000''}.$$

In der Tat ist der 7-stellige Logarithmus beider Ausdrücke gleich 4.6855749.

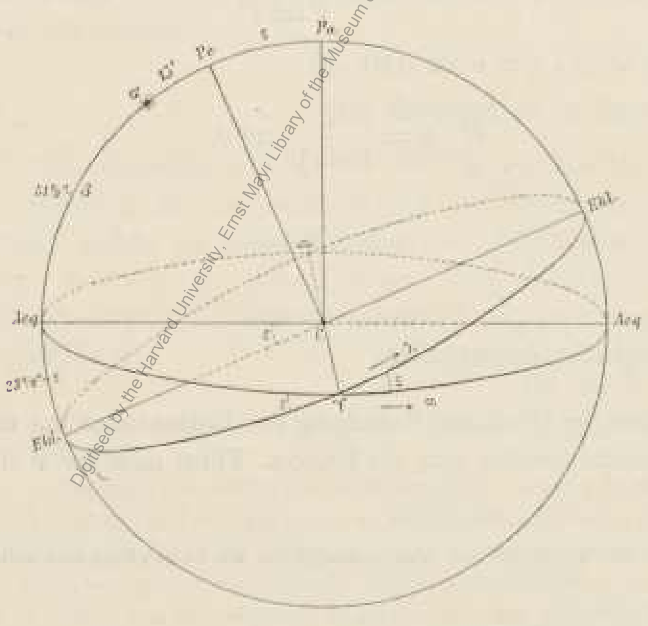
Geschwindigkeit der erstgenannten, viel bedeutenderen Bewegung ein, so heißt die so erhaltene Aberrationskorrektion die jährliche Aberration, im zweiten Falle, wo *w* die lineare Geschwindigkeit der Ortsrotation ist, die tägliche Aberration.

Die Erscheinung der jährlichen Aberration verglichen mit jener der jährlichen Parallaxe.

Zur klaren Erkenntnis der Erscheinung der jährlichen Aberration verfolgen wir denselben Stern ein ganzes Jahr hindurch und sehen zu, welche scheinbare Bahn er an der Sphäre beschreibt. Vergleichen wir gleichzeitig diese Erscheinung mit jener der Parallaxe, die ähnlich, wie die Aberration, jedoch der Richtung nach mit wesentlichem Unterschiede wirkt.

Es wurde oben bemerkt, daß Bradley nach einer Parallaxe der Fixsterne suchte und dabei die Aberration entdeckte. Bradley, damals Professor der Astronomie in Oxford und später Direktor der Sternwarte in Greenwich, begann seine diesbezüglichen Beobachtungen zu Kew bei London, auf der Privatsternwarte eines befreundeten Edelmannes Molyneux, des späteren Lords der Admiralität, welcher einen Graham'schen Zenitsektor von 24 Fuß Halbmesser mit einem Ablesebogen von $^1/_4$° fest aufgestellt hatte, um damit den für Kew nahe durchs Zenit gehenden Stern 2·4 Größe γ Draconis zu verschiedenen Zeiten des Jahres möglichst scharf zu beobachten und aus dessen Zenitdistanzen eine Parallaxe, nach welcher seit Copernicus bereits viele Astronomen vergeblich gesucht, zu finden. Diese Beobachtungsreihe nahm ihren Anfang am 3. Dezember 1725. Schon am 17. Dezember erkannte Bradley eine von der erwarteten Parallaxe verschiedene Bewegungsweise des Sternes und verfolgte nun denselben bis Dezember 1726 mit größter Aufmerksamkeit. Um auch andere Sterne in Betracht ziehen zu können, ließ er einen Zenitsektor von $12^1/_2$ Fuß Halbmesser mit einem Ablesebogen von $6^1/_4$° anfertigen und stellte diesen im August 1727 auf dem Wohnsitze seines Oheims Pound in Wansted in Essex auf. Die weiteren Beobachtungen zeigten bei allen Sternen gleichartige und von der Parallaxe verschiedene Verschiebungen an der Sphäre, deren wahren Grund er nun auch bald erkannte. Wie man erzählt, hätte ihn eine Fahrt auf der Themse bei windstillem Regenwetter auf die richtige Erklärung gebracht. Als er nämlich das Schiff bestiegen und dieses sich in lebhafte Bewegung gesetzt, wunderte es ihn, auf einmal den Regen ohne Wind von vorne ins Gesicht bekommen zu haben, worüber er dann weiter nachgedacht haben soll. In einem Berichte von Halley vom Dezember 1728 (»Bericht über eine neuentdeckte Bewegung der Fixsterne«, Philosophical Transactions 1728) gibt Bradley bereits die vollständige Erklärung des Phänomens, welches er mit dem Namen der »Aberration« bezeichnete.

Fig. 6.



Der Stern γ Draconis hat die Rektaszension $\alpha = 17^h\ 54^m$ und die Deklination $\delta = +51°\ 30'$. Er steht vom Pole der Ekliptik nur etwa 15° entfernt und es wird sich alsbald zeigen, daß solche Sterne, die dem Ekliptikpole nahe liegen, in hervorragendem Maße von der Aberration und Parallaxe beeinflußt werden. Da die Rektaszension nahe gleich 270° ist, also der Stern in einer Ebene senkrecht zur Durchschnittslinie von Äquator und Ekliptik steht, so ist seine Länge λ auch nahe gleich 270° (vergl. Fig. 6, in welcher σ der Stern, P_e der Ekliptikpol, P_a der Äquatorpol, ♈ der Frühlingsnachtgleichenpunkt und ♎ der Herbstnachtgleichenpunkt ist. Von ♈ aus werden die Koordinaten α und λ von Westen nach Osten, hier nach rechts gezählt. $C\Upsilon$ ist senkrecht zur Ebene $P_e C P_a$ zu denken. ε heißt die Schiefe der Ekliptik und ist nahe gleich $23^1/_2$°). Zur Vereinfachung unserer Betrachtung nehmen wir nun an Stelle von γ Draconis einen Stern in der Ekliptik selbst, aber von derselben Länge $\lambda = 270°$ an.

Fig. 7.

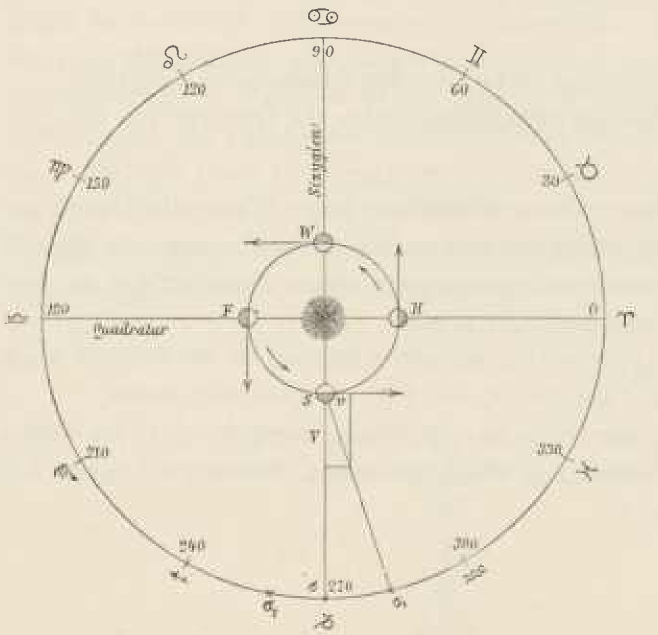
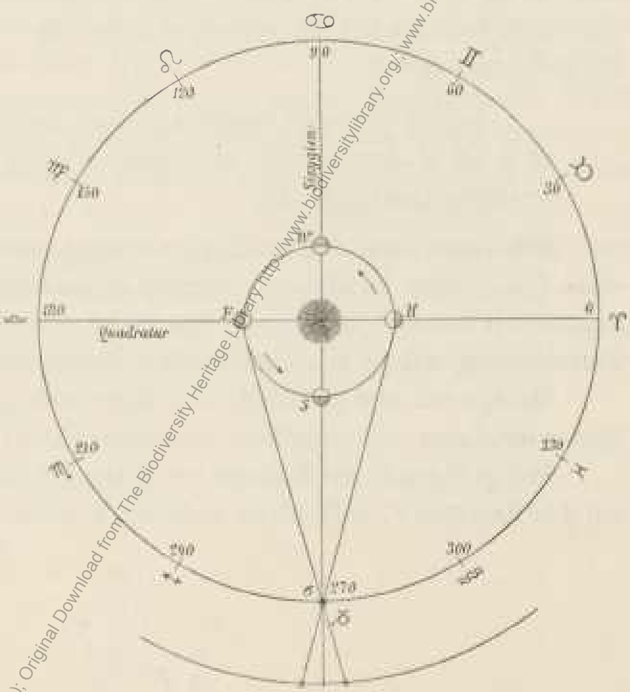


Fig. 8.



In Fig. 7 und 8 gälte die Ebene des Papieres als die Ebene der Ekliptik. In σ stünde der Stern mit $\lambda = 270°$, und es werde durch ihn die Sphäre gezogen. Inmitten derselben ist die Erdbahn mit den Erdorten F zu Anfang des Frühlings, S des Sommers, H des Herbstes und W des Winters verzeichnet. Da die Erde zu Beginn des Frühlings die Sonne im Frühlingsnachtgleichenpunkte sieht und die Längen im Sinne der wahren Erdbewegung oder der jährlichen scheinbaren Bewegung der Sonne gezählt werden, so sind die Tierkreiszeichen in der angeführten Weise zu markieren. Die Entfernung des Sternes σ ist in beiden Figuren als sehr groß im Vergleich zum Durchmesser der Erdbahn zu denken. Fig. 7 gälte für die Aberration, Fig. 8 für die Parallaxe.

Steht in Fig. 7 die Erde in S, so wird der Stern σ zufolge der Aberration in der Richtung der tangentialen Erdbewegung nach voraus verschoben, d. i. von ♑ nach ♒ hin. Da dann der Stern und die Sonne einander gegenüberstehen oder wie man sagt, der Stern sich zur Sonne in Opposition befindet, so folgt hieraus, daß zur Zeit der Opposition infolge der Aberration die Länge wächst und zwar, da die Richtung nach dem Sterne und die Bewegungsrichtung der Erde senkrecht zueinander stehen, um den Maximalbetrag der Aberration, d. i. um k oder nahe 20″. In H fällt die Bewegungsrichtung der Erde in die Richtung $S\sigma$ und es kann keine Verschiebung des Sternortes durch Aberration stattfinden; der Stern wird deshalb am Anfange des Herbstes an seinem wahren Orte in σ gesehen. In W wirkt abermals die Aberration im Maximalbetrage, der Stern wird von ♑ gegen ♐ verschoben, also seine Länge verkleinert, und zwar wieder um 20″. In dieser Richtung sieht man den Stern in Verbindung mit der Sonne (im gezeichneten Falle müßte eine Bedeckung des Sternes durch die Sonne platzgreifen) und sagt, daß der Stern sich in Konjunktion mit der Sonne befinde. Endlich in F wird der Stern wieder an seinem wahren Orte in σ gesehen. Für die Orte H und F heißt es, daß der Stern in Quadratur zur Sonne stehe und bemerkt man noch, daß die Stellungen der Opposition und Konjunktion unter dem Namen der Sizygien zusammengefaßt werden, so haben wir für die Aberration die folgende Erscheinung:

In den Sizygien ist λ im Maximum oder Minimum, ersteres für die Opposition *(S)*, letzteres für die Konjunktion *(W)*; in den Quadraturen hingegen behält λ seinen unveränderten Wert.

Anders spielt sich nun nach Fig. 8 die Erscheinung der Parallaxe ab. Legen wir für dieselbe noch eine Sphäre außerhalb der durch den Fixstern σ gedachten Kugelschale und projizieren wir auf erstere die parallaktischen Verschiebungen des Sternes, insofern als die Erde um die Sonne herumwandert, so sehen wir, daß der größte parallaktische Effekt in den Erdorten F und H stattfindet, während wir in S und W den Stern unverändert an seinem wahren Orte σ erblicken. Für die Parallaxe haben wir daher die Erscheinung folgend:

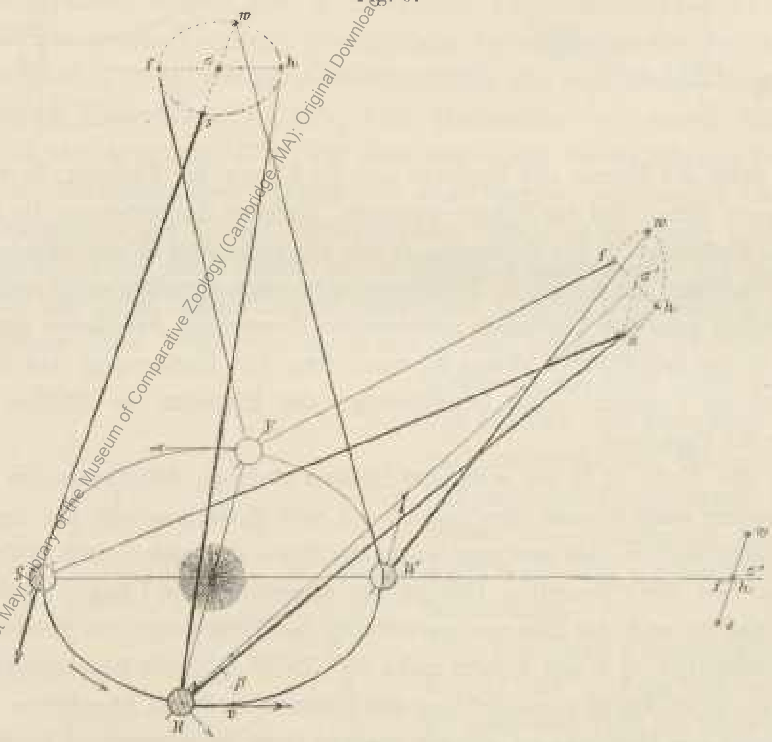
> In den Sizygien behält λ seinen unveränderten Wert; in den Quadraturen hingegen ist λ im Maximum oder Minimum, ersteres für die östliche Quadratur *(F)*, letzteres für die westliche Quadratur *(H)*.

Wir sehen also, daß die Erscheinungen der Aberration und Parallaxe ihrer Wirksamkeit nach um einen Quadranten auseinander liegen; anderseits ist, wenn wir den uns nächsten Fixstern von etwa 1″ Parallaxe in Betracht ziehen, der Betrag der Aberrationsverschiebung noch immer 20mal größer als jene Verschiebung, welche durch die Parallaxe hervorgerufen wird.

Machen wir nun die Zeichnung allgemeiner und betrachten wir außer Sternen in der Ekliptik auch Sterne nahe zum Pole derselben, überhaupt Sterne mit gegebener, von Null verschiedener Breite.

In Fig. 9 werde die Erdbahn als Kreis gedacht, der nur in der Zeichnung perspektivisch als Ellipse mit den Erdorten F, S, H, W im Frühling, Sommer, Herbst und Winter erscheint. Nehmen wir zuerst den

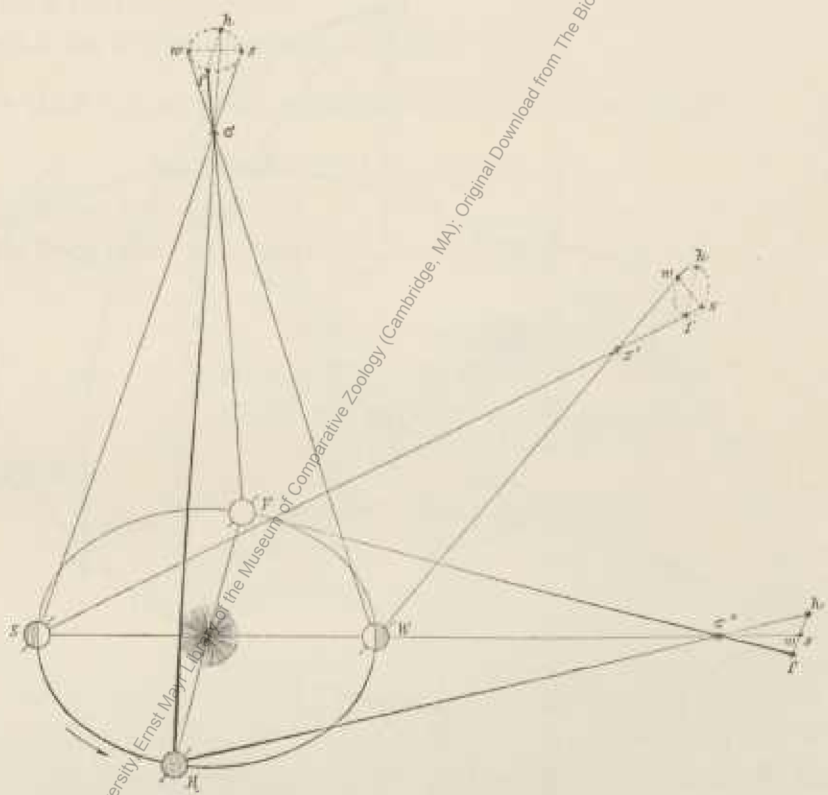
Fig. 9.



Stern σ, hier mit der Länge $\lambda = 90°$, im Pole der Ekliptik (in der Papierebene) an. Im Erdorte S findet die Bewegung der Erde senkrecht zur Ebene des Papieres nach vorne statt und ebenso ist es mit der Verschiebung des Sternes infolge der Aberration, so daß der Sternort s mit S korrespondiert. Dabei ist der Winkelbetrag von $\sigma s = k$, also nahezu 20″. In H ist die Bewegung der Erde nach rechts gerichtet, daher wird auch σ wegen Aberration nach rechts und zwar nach h im gleichen Betrage verschoben. Ähnlich entsprechen w und f den Erdorten W und F. Der Stern σ beschreibt somit im Ekliptikpole einen Kreis mit dem Halbmesser k, welcher Kreis ein verjüngtes Abbild der Erdbahn ist.— Befindet sich der Stern nicht im Pole, sondern in σ′ mit der Breite $\beta = \sigma'\sigma''$, so beschreibt derselbe eine Ellipse, deren große Axe gleich $2k$ ist und parallel zu FH liegt, während die kleine Axe wegen der Geschwindigkeitskomponente der Erdbewegung $v \sin \beta$, die senkrecht zur Visierlinie nach σ′ ist und in H und F allein mit V in Beziehung tritt, gleich $2k \sin \beta$ ist. Endlich schrumpft für den Stern σ'' in der Ekliptik die Aberrationsellipse zu einer geraden Linie zusammen, deren Ausdehnung gleich $2k$ ist und welche wieder parallel zu FH, also hier senkrecht zur Papierebene liegt. Wir sehen abermals, daß in den Sizygienorten S und W die Länge des Sternes ihren kleinsten und größten Wert erreicht, während die Breite unverändert bleibt, ferner, daß in den Quadraturen F und H die Länge unverändert bleibt, während die Breite ihren größten und kleinsten Wert annimmt. — Zu dieser Fig. 9 ist zu bemerken, daß sie die Verhältnisse der Wirklichkeit sehr übertrieben darstellt und insofern für σ der abgestutzte gewundene Kegel entstanden ist. In Wahrheit ist der Stern σ in ungeheuer großer Entfernung von der Sonne, für welche Distanz auch der Halbmesser der Erdbahn als verschwindend klein zu betrachten ist. Lassen wir aber die Erdbahn in ihren Mittelpunkt zusammenschrumpfen, so erhalten wir für σ einen geraden Kegel mit der Spitze in der Sonne und einer Basis, die vom Aberrationskreise gebildet wird. Im gezeichneten Falle hingegen kommen Aberration und Parallaxe gleichzeitig zum Ausdruck.

In Fig. 10 sehen wir die Erscheinung der Parallaxe. Nehmen wir wieder den Stern zuerst im Pole der Ekliptik, in σ an, so wird derselbe vom Erdorte S aus nach s, von H aus nach h, von W aus nach w

Fig. 10.



und von F aus nach f verschoben und beschreibt abermals einen Kreis an der Sphäre. Nur ist dieser viel kleiner als der Aberrationskreis, da die größte Parallaxe der Fixsterne kaum $1''$ beträgt und der Kreishalbmesser gleich dieser Parallaxe sein muß. Vergleichen wir Fig. 10 mit Fig. 9, so sehen wir, daß der parallaktische Sternort s dem Aberrationsort s, und so in allen Stellungen der Erdbahn, um einen Quadranten voraus ist, und hierin besteht der charakteristische Unterschied beider Erscheinungen. Die Aberration wirkt senkrecht zum Radiusvektor des Erdortes, die Parallaxe dagegen in der Richtung dieses Leitstrahles. Wird der Stern in σ' angenommen, so beschreibt er wieder eine Ellipse, endlich in σ'' eine gerade Linie, deren Lage ebenso wie früher ist, deren Orte aber zu anderen Zeiten als vordem erreicht werden. In den Sizygienorten S und W hat die Länge des Sternes σ' in s und w ihren unveränderten Wert, während die Breite ihren kleinsten und größten Wert besitzt. In den Quadraturen F und H hingegen erhält die Länge des Sternes σ' in f und h ihren kleinsten und größten Wert, während die Breite unverändert bleibt.

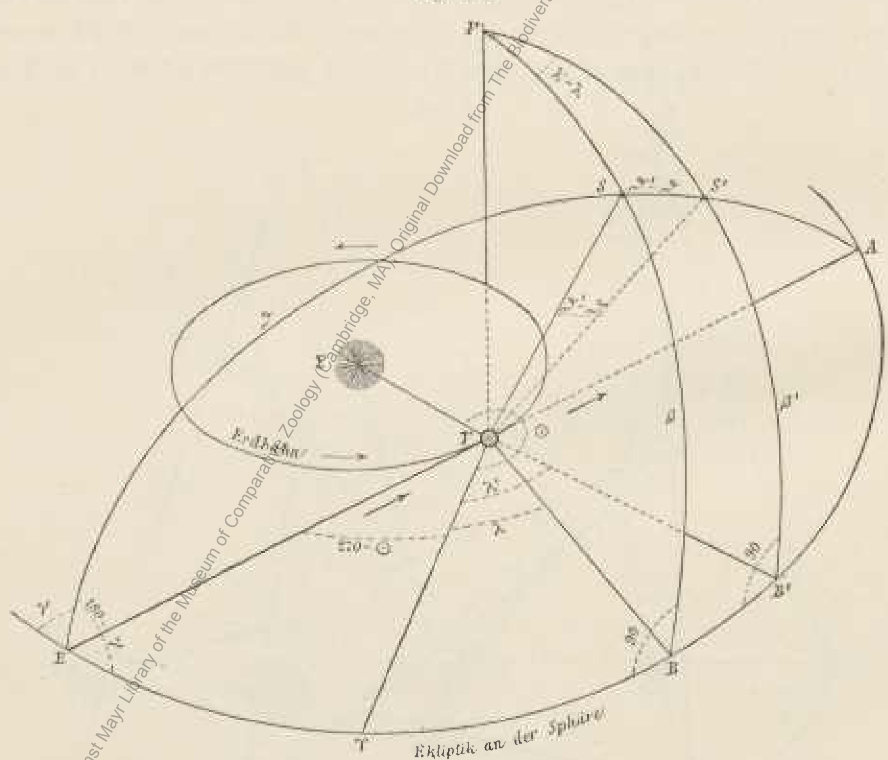
Nach Vorausschickung dieser allgemeinen Betrachtungen über die Erscheinung der Aberration gehen wir jetzt zur analytischen Behandlung derselben über.

II. Die jährliche Aberration der Fixsterne.

1. Jährliche Aberration in Länge und Breite, wenn die Erdbahn als Kreis betrachtet wird.

Vernachlässigen wir zunächst die Exzentrizität der elliptischen Erdbahn, welche nur einen kleinen Wert besitzt, und nehmen wir diese Bahn fürs erste als Kreis an. Die Fig. 11 stellt dieselbe in

Fig. 11.



perspektivischer Verkürzung als Ellipse dar, in deren Mittelpunkte die Sonne Σ zu denken ist. T sei der Erdort zur Zeit der Beobachtung. Die Tangente zur Erdbahn im Orte T steht senkrecht auf der Richtung $T\Sigma$; sie werde nach beiden Seiten verlängert, bis sie die, um T als Mittelpunkt mit beliebigem Radius geschlagene, Sphäre trifft. E sei derjenige Punkt der Sphäre, von welchem die Erde im Raume zu kommen scheint und A der entgegengesetzte Ort der Sphäre, auf welchen die Erde augenblicklich losgeht, d. i. der Apex ihrer Bewegung. S wäre der wahre Sternort der Sphäre, S' der scheinbare. Die Breitenkreise durch S und S' sollen die Ekliptik in B und B' schneiden. Die Aberrationsebene, in welcher S nach S' verschoben wird, fällt mit der Ebene ETS zusammen, so daß der sphärische Bogen ES oder der entsprechende Winkel an T unser ϑ, der Bogen ES' unser ϑ' ist. Markieren wir noch den Frühlingsnachtgleichenpunkt, von welchem aus die ekliptikalen Längen in der Richtung der Erdbewegung um die Sonne gezählt werden, in der Ekliptik mit ♈ und nennen wir die Neigung der Aberrationsebene ETS' zur Ekliptik nach BB' hin $180-\gamma$.

Ferner sei

$\lambda\,\beta$ = Länge und Breite des wahren Sternortes S, wobei $\lambda = \sphericalangle\, \Upsilon TB = \Upsilon B$ und $\beta = \sphericalangle\, BTS = BS$ ist,

$\lambda'\beta'$ = Länge und Breite des beobachteten scheinbaren Sternortes S', wobei $\lambda' = \sphericalangle\, \Upsilon TB' = \Upsilon B'$ und $\beta' = \sphericalangle\, B'TS' = B'S'$ ist,

$\odot$ = wahre Länge der Sonne, von der Erde aus gesehen, also $\odot = \sphericalangle\, \Upsilon T\Sigma$ (im Sinne der Erdbewegung, d. i. nach rechts genommen),

$\odot - 90$ = Länge des Apex A, $\odot + 90$ = Länge des Antiapex E.

Betrachten wir nun vorerst das sphärische Dreieck SEB. Hierin ist:

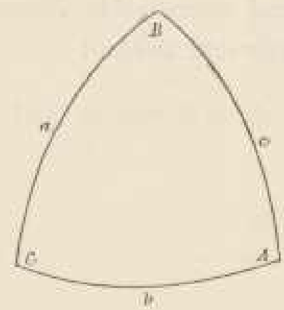
$$ES = \vartheta,\; SB = \beta,\; EB = E\Upsilon + \lambda = 360 - (\odot + 90) + \lambda = 270 - \odot + \lambda = 270 - (\odot - \lambda),$$

weiter der Winkel an $B \ldots 90°$ und an $E \ldots 180 - \gamma$.

Haben wir im sphärischen Dreieck mit den Seiten a, b, c und den gegenüberliegenden Winkeln ABC (Fig. 12), so lauten die Grundformeln desselben

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \sin C &= \sin A \sin c \\ \sin a \cos C &= \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A \end{aligned}\right\}$$

Fig. 12.



Diese auf das ΔSEB angewendet, ergeben, wenn $\sphericalangle A = 90 = \sphericalangle SBE$ genommen wird:

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta &= \cos\,[270 - (\odot - \lambda)] \cos\beta \\ \sin\vartheta \sin(180 - \gamma) &= \sin\beta \\ \sin\vartheta \cos(180 - \gamma) &= \sin\,[270 - (\odot - \lambda)] \cos\beta \end{aligned}\right\}$$

somit

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta &= -\sin(\odot - \lambda)\cos\beta & (1)\\ \sin\vartheta \sin\gamma &= \sin\beta & (2)\\ \sin\vartheta \cos\gamma &= \cos(\odot - \lambda)\cos\beta & (3) \end{aligned}\right\}$$

und analog aus $\Delta S'EB'$:

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta' &= -\sin(\odot - \lambda')\cos\beta' & (4)\\ \sin\vartheta' \sin\gamma &= \sin\beta' & (5)\\ \sin\vartheta' \cos\gamma &= \cos(\odot - \lambda')\cos\beta' & (6) \end{aligned}\right\}$$

Aus dem ersten Systeme (1—3) erhält man, wenn $\lambda\beta\odot$, die wahren Koordinaten, gegeben sind, ϑ und γ Hiermit findet man aus $\vartheta' - \vartheta = k \sin\vartheta'$ die Größe ϑ' und in Anwendung von ϑ' und γ aus dem zweiten Systeme (4—6) die scheinbaren Koordinaten λ' und β'. Ebenso verfährt man umgekehrt, wenn aus $\lambda'\beta'$, die wahren Größen $\lambda\beta$ gesucht werden. Dies wäre die strenge Lösung. Zweckmäßiger geht man folgend vor. Multiplizieren wir (6) mit $\cos\vartheta$, (3) mit $\cos\vartheta'$ und subtrahieren das letzte Produkt von dem ersten; dann ergibt sich:

$$\sin(\vartheta' - \vartheta)\cos\gamma = \cos(\odot - \lambda')\cos\beta'\cos\vartheta - \cos(\odot - \lambda)\cos\beta\cos\vartheta'$$

und, indem man $\cos\vartheta$ und $\cos\vartheta'$ aus (1) und (4) substituiert

$$\begin{aligned} \sin(\vartheta' - \vartheta)\cos\gamma &= -\cos(\odot - \lambda')\cos\beta'\sin(\odot - \lambda)\cos\beta + \cos(\odot - \lambda)\cos\beta\sin(\odot - \lambda')\cos\beta' \\ &= \cos\beta\cos\beta'\sin(\odot - \lambda' - \odot + \lambda) = -\cos\beta\cos\beta'\sin(\lambda' - \lambda) \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\sin(\lambda' - \lambda) = -\frac{\sin(\vartheta' - \vartheta)\cos\gamma}{\cos\beta\cos\beta'}.$$

Es ist aber

$$\sin(\vartheta'-\vartheta) = k \sin 1'' \sin \vartheta'$$ [1]

daher

$$\sin(\lambda'-\lambda) = -\frac{k \sin 1'' \sin \vartheta' \cos \gamma}{\cos \beta \cos \beta'} = -\frac{k \sin 1'' \cos(\odot-\lambda') \cos \beta'}{\cos \beta \cos \beta'}$$

somit strenge:

$$\underline{\sin(\lambda'-\lambda) = -k \sin 1'' \cos(\odot-\lambda') \sec \beta.} \tag{7}$$

Ferner gibt (2):(3) und (5):(6)

$$tg\,\gamma = \frac{tg\,\beta}{\cos(\odot-\lambda)} = \frac{tg\,\beta'}{\cos(\odot-\lambda')}$$

hieraus

$$\frac{tg\,\beta}{tg\,\beta'} = \frac{\cos(\odot-\lambda)}{\cos(\odot-\lambda')}$$

und wenn beide Seiten der Gleichung von Eins subtrahiert und dann auf gemeinschaftlichen Nenner gebracht werden:

$$\frac{tg\,\beta'-tg\,\beta}{tg\,\beta'} = \frac{\cos(\odot-\lambda')-\cos(\odot-\lambda)}{\cos(\odot-\lambda')}$$ [2]

$$\frac{\sin(\beta'-\beta)\cos\beta'}{\cos\beta\cos\beta'\sin\beta'} = \frac{-2\sin\left(\odot-\dfrac{\lambda'+\lambda}{2}\right)\sin\dfrac{\lambda-\lambda'}{2}}{\cos(\odot-\lambda')}$$

$$\sin(\beta'-\beta) = 2\sin\frac{\lambda'-\lambda}{2}\,\frac{\sin\left(\odot-\dfrac{\lambda'+\lambda}{2}\right)}{\cos(\odot-\lambda')}\sin\beta'\cos\beta.$$

---

[1] Es war strenge

$$\sin(\vartheta'-\vartheta) = \frac{v}{V}\sin\vartheta'$$

und

$$k = \frac{v}{V\sin 1''},$$

woraus wegen $\frac{v}{V} = k \sin 1''$ folgt.

$$\sin(\vartheta'-\vartheta) = k\sin 1''\sin\vartheta'.$$

[2] Der rechte Zähler hat die Form $\cos m - \cos n$ und diese Differenz ist gleich

$$-2\sin\frac{m+n}{2}\sin\frac{m-n}{2},$$

denn es ist

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b,$$

was subtrahiert gibt:

$$\cos(a+b)-\cos(a-b) = -2\sin a\sin b,$$

und wenn gesetzt wird:

$$a+b = m$$
$$a-b = n,$$

so ist

$$a = \frac{1}{2}(m+n),\ b = \frac{1}{2}(m-n),$$

woraus das obige hervorgeht.

Aber

$$\sin(\lambda'-\lambda) = 2\sin\frac{\lambda'-\lambda}{2}\cos\frac{\lambda'-\lambda}{2} \quad \text{also} \quad 2\sin\frac{\lambda'-\lambda}{2} = \frac{\sin(\lambda'-\lambda)}{\cos\frac{\lambda'-\lambda}{2}},$$

somit

$$\sin(\beta'-\beta) = \frac{\sin(\lambda'-\lambda)}{\cos\frac{\lambda'-\lambda}{2}} \; \frac{\sin\left(\odot - \frac{\lambda'+\lambda}{2}\right)}{\cos(\odot-\lambda')} \sin\beta' \cos\beta$$

und hierin $\sin(\lambda'-\lambda)$ aus (7) substituiert:

$$\sin(\beta'-\beta) = \frac{-k\sin 1''\cos(\odot-\lambda')\sec\beta}{\cos\frac{\lambda'-\lambda}{2}} \; \frac{\sin\left(\odot - \frac{\lambda'+\lambda}{2}\right)}{\cos(\odot-\lambda')} \sin\beta' \cos\beta.$$

Setzt man im Nenner $\cos\frac{\lambda'-\lambda}{2} = 1$, was immer gestattet sein wird,[1] so folgt in ausreichender Strenge schließlich:

$$\sin(\beta'-\beta) = -k\sin 1''\sin\left(\odot - \frac{\lambda'+\lambda}{2}\right)\sin\beta'. \tag{8}$$

a) Genäherte Aberrationsformeln in λ und β.

Ziehen wir zunächst nur Glieder von Kleinheit 1. Ordnung in Betracht. Dazu setzen wir:

$$\sin(\vartheta'-\vartheta) = (\vartheta'-\vartheta)\sin 1'' \quad \text{und} \quad \sin(\lambda'-\lambda) = (\lambda'-\lambda)\sin 1'', \; \sin(\beta'-\beta) = (\beta'-\beta)\sin 1''.$$

Dann folgt aus (7):

$$\lambda'-\lambda = -k\cos(\odot-\lambda')\sec\beta,$$

ferner aus (8)

$$\beta'-\beta = -k\sin\left(\odot - \frac{\lambda'+\lambda}{2}\right)\sin\beta',$$

wofür auch bis exklusive Glieder 2. Ordnung konsequenter Weise gesetzt werden kann:

$$\left.\begin{aligned} \lambda'-\lambda &= -k\cos(\odot-\lambda)\sec\beta \\ \beta'-\beta &= -k\sin(\odot-\lambda)\sin\beta \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Diese Formeln sind auch leicht durch Differentiation der Gleichungen (1) und (3) zu erhalten, wobei γ, ebenso $\odot$ als konstante Größen (für den Übergang von S zu S') zu behandeln sind.

---

[1] Denn $\cos\frac{\lambda'-\lambda}{2} = 1 - \left(\frac{\lambda'-\lambda}{2}\right)^2 \sin^2 1'' + \ldots\ldots$ Wird diese Reihe zur Potenz -1 erhoben und mit dem Zähler multipliziert, so gäbe das Produkt: $\frac{k(\lambda'-\lambda)^2}{4}\sin^3 1''$ ein Glied von Kleinheit 3. Ordnung, welches füglich weggelassen werden kann. Daher ist die Sache so, als wäre $\cos\frac{\lambda'-\lambda}{2}$ im Nenner $=$ Eins.

Wir finden:

$$\begin{array}{rl|ll} -\sin\vartheta\, d\vartheta = \cos(\odot-\lambda)\cos\beta\, d\lambda + \sin(\odot-\lambda)\sin\beta\, d\beta & & \cos(\odot-\lambda) & \sin(\odot-\lambda) \\ \cos\vartheta\cos\gamma\, d\vartheta = \sin(\odot-\lambda)\cos\beta\, d\lambda - \cos(\odot-\lambda)\sin\beta\, d\beta & & \sin(\odot-\lambda) & -\cos(\odot-\lambda) \end{array}$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit den rechts stehenden Faktoren und addieren die erhaltenen Produkte, so folgt:

$$[-\sin\vartheta\cos(\odot-\lambda)+\cos\vartheta\cos\gamma\sin(\odot-\lambda)]\, d\vartheta = \cos\beta\, d\lambda$$
$$[-\sin\vartheta\sin(\odot-\lambda)-\cos\vartheta\cos\gamma\cos(\odot-\lambda)]\, d\vartheta = \sin\beta\, d\beta$$

Um die Faktoren von $d\vartheta$ im ersten und zweiten Falle einfacher auszudrücken, verwendet man aus (1) und (3):

$$\begin{array}{rl|ll} \sin(\odot-\lambda) = -\dfrac{\cos\vartheta}{\cos\beta} & & \cos\vartheta\cos\gamma & -\sin\vartheta \\ \cos(\odot-\lambda) = \dfrac{\sin\vartheta\cos\gamma}{\cos\beta} & & -\sin\vartheta & -\cos\vartheta\cos\gamma \end{array}$$

Multipliziert man diese letzten Gleichungen mit den rechts angesetzten Faktoren und addiert, so ergibt sich als

$$\text{erster Faktor von } d\vartheta = -\frac{\cos^2\vartheta\cos\gamma}{\cos\beta} - \frac{\sin^2\vartheta\cos\gamma}{\cos\beta} = -\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$$

$$\text{zweiter Faktor von } d\vartheta = \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos\beta} - \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\cos^2\gamma}{\cos\beta} = \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\sin^2\gamma}{\cos\beta}$$

somit

$$-\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\, d\vartheta = \cos\beta\, d\lambda$$

$$\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\sin^2\gamma}{\cos\beta}\, d\vartheta = \sin\beta\, d\beta$$

und wegen $d\vartheta = \vartheta'-\vartheta = k\sin\vartheta$ in Verwendung von (3), (2) und (1):

$$d\lambda = -\frac{\cos\gamma}{\cos^2\beta}\, k\sin\vartheta = -\frac{k\cos(\odot-\lambda)\cos\beta}{\cos^2\beta} = -k\cos(\odot-\lambda)\sec\beta$$

$$d\beta = \frac{k\sin^2\vartheta\sin^2\gamma\cos\vartheta}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{k\sin^2\beta\cos\vartheta}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{-k\sin\beta\sin(\odot-\lambda)\cos\beta}{\cos\beta} = -k\sin(\odot-\lambda)\sin\beta$$

wie oben.

b) Strengere Aberrationsformeln in λ und β.

Berücksichtigen wir nun auch die Glieder von Kleinheit 2. Ordnung. Aus der strengen Formel (7) folgt, indem $\lambda' = \lambda+(\lambda'-\lambda)$ eingeführt wird:

$$\begin{aligned} \sin(\lambda'-\lambda) &= -k\sin 1''\cos[\odot-\lambda-(\lambda'-\lambda)]\sec\beta \\ &= -k\sin 1''\sec\beta\,[\cos(\odot-\lambda)+\sin(\odot-\lambda).(\lambda'-\lambda)\sin 1''] \qquad \text{(bis exkl. Gl. 3. Ordnung)} \\ &= -k\sin 1''\sec\beta\,[\cos(\odot-\lambda)-k\sin 1''\sin(\odot-\lambda)\cos(\odot-\lambda)\sec\beta] \\ &= -k\sin 1''\sec\beta\,[\cos(\odot-\lambda)-\frac{k}{2}\sin 1''\sin 2(\odot-\lambda)\sec\beta]. \end{aligned}$$

Setzt man links unter Vernachlässigung von Gliedern 3. Ordnung $\sin(\lambda'-\lambda) = (\lambda'-\lambda)\sin 1''$, so folgt:

$$\lambda'-\lambda = -k\cos(\odot-\lambda)\sec\beta + \frac{k^2}{2}\sin 1''\sin 2(\odot-\lambda)\sec^2\beta. \tag{10}$$

Aus (8) ergibt sich ebenso

$$\sin(\beta'-\beta) = -k\sin 1''\sin\left(\odot-\lambda-\frac{\lambda'-\lambda}{2}\right)\sin\beta'$$

$$= -k\sin 1''\sin\beta\left[\sin(\odot-\lambda)-\cos(\odot-\lambda).\frac{\lambda'-\lambda}{2}\sin 1''\right] \text{ (bis exkl. Gl. 3. Ordg.)}$$

$$= -k\sin 1''\sin\beta'\left[\sin(\odot-\lambda)+\frac{k}{2}\sin 1''\cos^2(\odot-\lambda)\sec\beta\right]$$

und weil

$$\cos^2(\odot-\lambda) = \frac{1}{2}[1+\cos 2(\odot-\lambda)]$$

ist:

$$\sin(\beta'-\beta) = (\beta'-\beta)\sin 1'' = -k\sin 1''\sin\beta'\left[\sin(\odot-\lambda)+\frac{k}{4}\sin 1''\sec\beta+\frac{k}{4}\sin 1''\cos 2(\odot-\lambda)\sec\beta\right]$$

somit, wenn noch in den Gliedern 2. Ordnung für $\beta' \ldots \beta$ gesetzt wird:

$$\beta'-\beta = -k\sin(\odot-\lambda)\sin\beta' - \frac{k^2}{4}\sin 1''\,tg\,\beta - \frac{k^2}{4}\sin 1''\cos 2(\odot-\lambda)\,tg\,\beta. \tag{11}$$

In dieser Formel darf noch ausreichend strenge im 1. Gliede der rechten Seite für $\beta' \ldots \beta$ genommen werden, da jenes Glied von Kleinheit 2. Ordnung, das dabei vernachlässigt wird, selbst bei Polsternen nicht in Betracht kommt. Es ist nämlich:

$$-k\sin(\odot-\lambda)\sin\beta' = -k\sin(\odot-\lambda)\sin(\beta+\beta'-\beta)$$

$$= -k\sin(\odot-\lambda)[\sin\beta+\cos\beta.(\beta'-\beta)\sin 1'']$$

$$= -k\sin(\odot-\lambda)[\sin\beta-k\sin 1''\sin(\odot-\lambda)\sin\beta\cos\beta]$$

$$= -k\sin(\odot-\lambda)\sin\beta+\frac{k^2}{2}\sin 1''\sin^2(\odot-\lambda)\sin 2\beta.$$

Da ferner das 2. Glied der rechten Seite in (11) kein periodisches Glied ist, so wird es in den mittleren Ort des Sternes aufgenommen gedacht und nicht in der Aberrationsformel mitgeführt, weshalb die strengen Formeln (10) und (11), wenn man noch für k die Struve'sche Aberrationskonstante $= 20''4451$ einführt, übergehen in:

$$\left.\begin{aligned}\lambda'-\lambda &= -20''4451\cos(\odot-\lambda)\sec\beta+0''0010133\sin 2(\odot-\lambda)\sec^2\beta\\ \beta'-\beta &= -20''4451\sin(\odot-\lambda)\sin\beta-0''0005066\cos 2(\odot-\lambda)\,tg\,\beta\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die hierin angeführten Glieder 2. Ordnung kommen nur in Betracht bei Sternen, deren Breite in der Nähe von 90° liegt, d. i. bei Polsternen hinsichtlich der Ekliptik, da dann $\sec\beta$ und $tg\,\beta$ große Werte annehmen. Im Pole selbst wären nicht diese Formeln (12), sondern die Ausgangsformeln (7) und (8) zu benützen. In (12) wird das Glied 2. Ordnung für $\lambda'-\lambda$ in maximo (für $\sin 2(\odot-\lambda) = 1$) gleich 0^s01[1], wenn die Breite des Sternes den Wert 85° 17' erreicht, für $\beta'-\beta$ in maximo (für $\cos(\odot-\lambda) = 1$) gleich $0''01$, wenn diese Breite β auf 87° 6' anwächst. Bei Breiten also, die kleiner als 85° sind, können die Glieder 2. Ordnung weggelassen und nur die Glieder 1. Ordnung, welche identisch mit den Ausdrücken in (9) sind, verwendet werden.

[1] $0^s01 = 0''15$, sobald für die Längen ebenso wie für die Rektaszensionen diese Genauigkeitsgrenze angenommen wird.

Analoge Formeln für die jährliche Parallaxe in λ und β.

Leiten wir zur Vergleichung auch die analogen Formeln der jährlichen Parallaxe nach derselben Methode ab. Da die Fixsternparallaxe, wie oben bemerkt, beträchtlich kleiner als die Aberrationsgröße k ist, so wird man hierbei von den Gliedern 2. Ordnung ganz absehen können.

In Fig. 13 sei wieder T der Erdort, dagegen E_1 derjenige Ort an der Sphäre, wohin derselbe von der

Fig. 13.

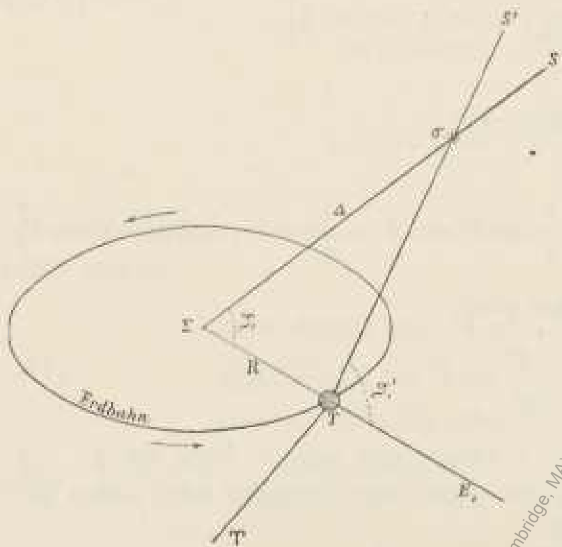
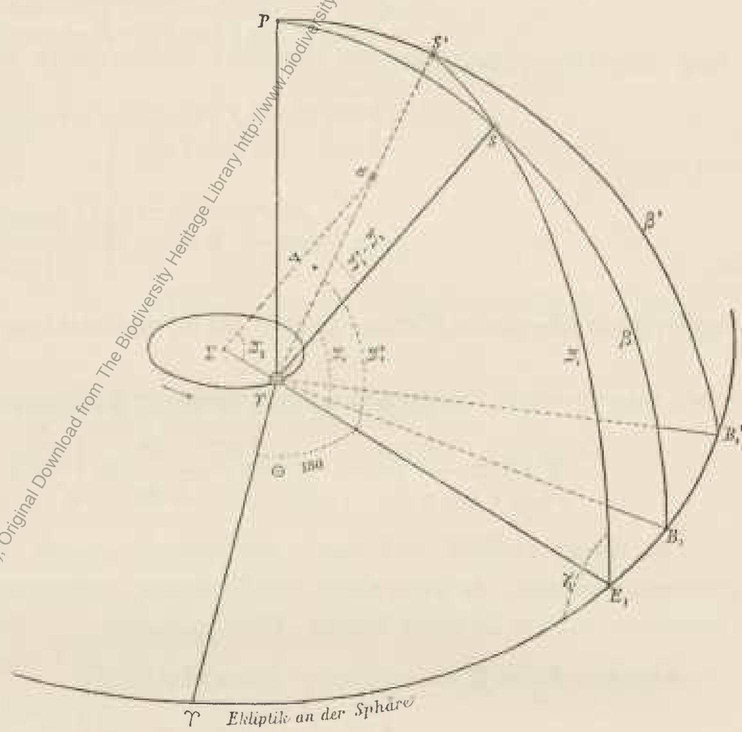


Fig. 14.



Sonne Σ aus projiziert wird. Letzteren führen wir jetzt an Stelle des früheren Ortes E (Fig. 11) ein. Von T aus würde der Stern σ in S', von Σ aus in S gesehen werden. Der Winkel am Sternorte σ, welchem die Seite $T\Sigma$ gegenüberliegt, heißt der parallaktische Winkel. Dieser kommt in der Richtung des Radiusvektors $\Sigma T = R$ zur Entstehung, während die Aberration in einer zum Radiusvektor senkrechten Richtung zur Wirksamkeit gelangte. Bezeichnen wir $\sphericalangle\, \sigma\Sigma T$ mit ϑ_1 und $\sphericalangle\, \sigma TE$ mit ϑ'_1, die Entfernung des Sternes von der Sonne mit $\Delta = \sigma\Sigma$, so ist:

$$\frac{\sin(\vartheta'_1 - \vartheta_1)}{\sin \vartheta'_1} = \frac{R}{\Delta}$$

und wegen der fast verschwindenden Kleinheit der Sternparallaxen

$$(\vartheta'_1 - \vartheta_1) \sin 1'' = \frac{R}{\Delta} \sin \vartheta'_1.$$

Setzen wir

$$p = \frac{1}{\Delta \sin 1''}$$

so wird

$$\underline{\vartheta'_1 - \vartheta_1 = pR \sin \vartheta'_1.}$$

Diese Parallaxe erreicht somit ihren Maximalwert für $\vartheta'_1 = 90°$, d. h. für den Fall, daß die Richtung nach dem Sterne senkrecht zu R steht und wird dann gleich pR. Nehmen wir eine Kreisbahn der Erde an und setzen die Entfernung der Sonne von der Erde als Maß der Sterndistanz Δ gleich Eins, so ist diese Maximalparallaxe gleich p.

Gehen wir nun von der Parallaxe $\vartheta_1'-\vartheta_1$ in ihrer Wirkungsebene zu deren Komponenten parallel und senkrecht zur Ekliptik über. Schlagen wir abermals um den Erdort T die Sphäre, mit einem Radius, der größer als Δ, sonst aber beliebig ist. Fig. 14. Ziehen wir zu $\Sigma\sigma$ eine Parallele durch T, d. i. TS, so stellt S den wahren Sternort an der Sphäre dar, während S' der durch Parallaxe verschobene oder scheinbare Sternort ist. Der größte Kreis SS' geht durch E_1 und fällt mit der Ebene $T\Sigma\sigma$ zusammen. Die Breitenkreise durch S und S' mögen die Ekliptik in B_1 und B_1' schneiden; ferner bilde der größte Kreis $S'E_1$ mit der Ekliptik nach B_1B_1' hin den Winkel $180-\gamma_1$. Heißen dann $\lambda\beta$ die wahren, $\lambda'\beta'$ die scheinbaren Sternkoordinaten bezüglich der Ekliptik und Υ der Frühlingsnachtgleichenpunkt, so ist $\Upsilon B_1=\lambda$, $\Upsilon B_1'=\lambda'$ und wegen $\Upsilon E_1=\odot-180\ldots E_1B_1=\lambda-(\odot-180)=180-(\odot-\lambda)$. Überdies ist $B_1S=\beta$, $B_1S'=\beta'$, $E_1S=\vartheta_1$, $E_1S'=\vartheta_1'$, also $SS'=\vartheta_1'-\vartheta_1$. Zunächst folgt aus dem sphärischen Dreiecke SE_1B_1, das bei B_1 rechtwinklig ist:

$$\left.\begin{aligned}\cos\vartheta_1&=\cos[180-(\odot-\lambda)]\cos\beta\\ \sin\vartheta_1\sin(180-\gamma_1)&=\sin\beta\\ \sin\vartheta_1\cos(180-\gamma_1)&=\sin[180-[\odot-\lambda)]\cos\beta\end{aligned}\right\}$$

also

$$\left.\begin{aligned}\cos\vartheta_1&=-\cos(\odot-\lambda)\cos\beta &&(1)\\ \sin\vartheta_1\sin\gamma_1&=\sin\beta &&(2)\\ \sin\vartheta_1\cos\gamma_1&=-\sin(\odot-\lambda)\cos\beta &&(3)\end{aligned}\right\}$$

und analog aus $\Delta\, S'E_1B_1'$:

$$\left.\begin{aligned}\cos\vartheta_1'&=-\cos(\odot-\lambda')\cos\beta' &&(4)\\ \sin\vartheta_1'\sin\gamma_1&=\sin\beta' &&(5)\\ \sin\vartheta_1'\cos\gamma_1&=-\sin(\odot-\lambda')\cos\beta' &&(6)\end{aligned}\right\}$$

(6) . $\cos\vartheta_1-$ (3) . $\cos\vartheta_1'$ gibt:

$$\sin(\vartheta_1'-\vartheta_1)\cos\gamma_1=-\sin(\odot-\lambda')\cos\beta'\cos\vartheta_1+\sin(\odot-\lambda)\cos\beta\cos\vartheta_1'.$$

Hierin substituiert (1) und (4)

$$\begin{aligned}\sin(\vartheta_1'-\vartheta_1)\cos\gamma_1&=\sin(\odot-\lambda')\cos\beta'\cos(\odot-\lambda)\cos\beta-\sin(\odot-\lambda)\cos\beta\cos(\odot-\lambda')\cos\beta'\\ &=\cos\beta\cos\beta'\sin(\odot-\lambda'-\odot+\lambda),\end{aligned}$$

somit hieraus

$$\sin(\lambda'-\lambda)=-\frac{\sin(\vartheta_1'-\vartheta_1)\cos\gamma_1}{\cos\beta\cos\beta'}.$$

Wird weiter $\sin(\vartheta_1'-\vartheta_1)=pR\sin 1''\sin\vartheta_1'$ substituiert, so folgt in Verbindung mit (6):

$$\sin(\lambda'-\lambda)=-\frac{pR\sin 1''\sin\vartheta_1'\cos\gamma_1}{\cos\beta\cos\beta'}=\frac{pR\sin 1''\sin(\odot-\lambda')\cos\beta'}{\cos\beta\cos\beta'}.$$

daher strenge

$$\underline{\sin(\lambda'-\lambda)=pR\sin 1''\sin(\odot-\lambda')\sec\beta.}\qquad(7)$$

Ferner gibt (2):(3) und (5):(6)

$$tg\gamma_1=-\frac{tg\beta}{\sin(\odot-\lambda)}=-\frac{tg\beta'}{\sin(\odot-\lambda')}.$$

Werden diese Ausdrücke von Eins subtrahiert und auf gemeinschaftlichen Nenner gebracht, so folgt

$$\frac{tg\beta' - tg\beta}{tg\beta'} = \frac{\sin(\odot-\lambda') - \sin(\odot-\lambda)}{\sin(\odot-\lambda')}$$

$$\frac{\sin(\beta'-\beta)\cos\beta'}{\cos\beta'\cos\beta\sin\beta'} = \frac{2\cos\left(\odot-\frac{\lambda'+\lambda}{2}\right)\sin\frac{\lambda-\lambda'}{2}}{\sin(\odot-\lambda')}$$

aber

$$2\sin\frac{\lambda'-\lambda}{2} = \frac{\sin(\lambda'-\lambda)}{\cos\frac{\lambda'-\lambda}{2}}$$

somit

$$\sin(\beta'-\beta) = -\frac{\cos\beta\sin\beta'\cos\left(\odot-\frac{\lambda'+\lambda}{2}\right)\sin(\lambda'-\lambda)}{\cos\frac{\lambda'-\lambda}{2}\sin(\odot-\lambda')}$$

$$= -\frac{\cos\beta\sin\beta'\cos\left(\odot-\frac{\lambda'+\lambda}{2}\right)pR\sin 1''\sin(\odot-\lambda')\sec\beta}{\cos\frac{\lambda'-\lambda}{2}\sin(\odot-\lambda')}$$

und $\cos\frac{\lambda'-\lambda}{2}$ im Nenner gleich Eins gesetzt, ebenfalls strenge:

$$\sin(\beta'-\beta) = -pR\sin 1''\cos\left(\odot-\frac{\lambda'+\lambda}{2}\right)\sin\beta'. \tag{8}$$

Bei der jährlichen Parallaxe der Fixsterne, die im Maximum $1''$ beträgt, abstrahieren wir von vorneherein von den Gliedern der Kleinheit 2. Ordnung und verwenden die nachstehenden einfachen Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \lambda'-\lambda &= pR\sin(\odot-\lambda)\sec\beta \\ \beta'-\beta &= -pR\cos(\odot-\lambda)\sin\beta \end{aligned}\right\} \quad (9)_1$$

Vergleichen wir diese Formeln mit jenen für die Aberration, so sehen wir, daß, wo dort ein Cosinus steht, hier ein Sinus ist und umgekehrt, so daß beide Erscheinungen in der Tat um einen Quadranten differieren. Wo die eine ihre Maximalwirkung zeigt, findet für die andere der Minimaleffekt statt und umgekehrt.

Die jährliche Aberrations- und Parallaxen-Ellipse.

Die Formeln (9) für die Aberration können geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda'-\lambda)\cos\beta &= -k\cos(\odot-\lambda) = \xi \\ \beta'-\beta &= -k\sin(\odot-\lambda)\sin\beta = \eta \end{aligned}\right\}$$

Diese Größen ξ und η haben besondere Bedeutungen. Sie repräsentieren die Komponenten der Aberrationsverschiebung SS' senkrecht zum Breitenkreise des Sternes und in der Richtung desselben

Zerlegen wir nämlich SS' in SS'' und $S'S''$ (Fig. 15), so ist unmittelbar $S'S'' = \beta' - \beta = \eta$, während anderseits aus dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke PSS'' folgt: $\sin SS'' \sin 90 = \sin (\lambda' - \lambda) \sin (90 - \beta)$ und wegen der Kleinheit der Aberrationsverschiebung $SS' \ldots SS'' = (\lambda' - \lambda) \cos \beta = \xi$.

Fig. 15.

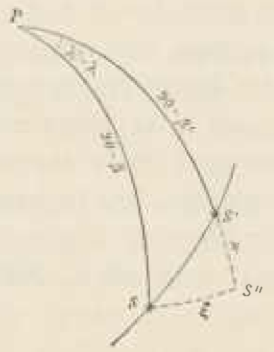
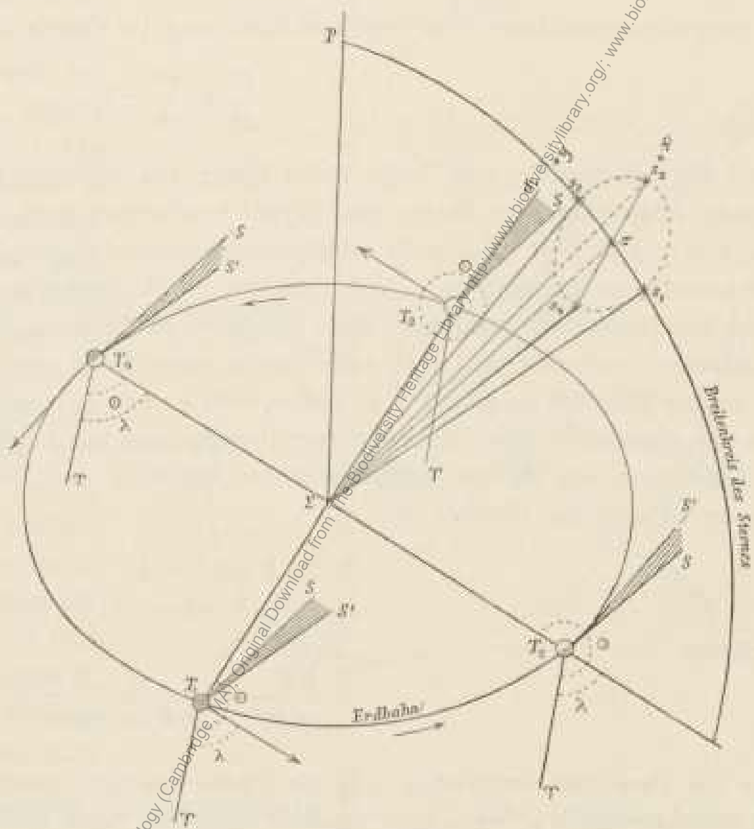


Fig. 16.



Interpretieren wir nun die Formeln für vier in Bezug auf den Breitenkreis des Sternes ausgezeichnete Erdorte, und zwar für zwei Erdorte T_1 und T_3 (Fig. 16) senkrecht zur Ebene des Breitenkreises und für andere zwei T_2 und T_4 in derselben. Für die ersteren ist der Stern in Quadratur mit der Sonne, für die letzteren in Opposition, beziehungsweise Konjunktion. Abstrahiert man von der Parallaxe des Sternes, so ist es gleichgültig, ob man den Stern von der Sonne oder von der Erde aus beobachtet. Die wahre Richtung nach dem Sterne wird in beiden Fällen parallel sein, und in diesem Sinne ist auch die Zeichnung entworfen.

Ist die Erde in T_1, so ist $\odot - \lambda = 90$ und die Formeln ergeben: $\xi = 0$, dagegen η im Maximum und negativ. Der Stern erleidet daher eine Aberrationsverschiebung im Breitenkreise nach s_1, da die Komponente senkrecht dazu verschwindet. Im Erdorte T_2 ist $\odot - \lambda = 180$, der Stern in Opposition und ξ im positiven Maximum, $\eta = 0$. Der Stern wird dann in s_2 gesehen. Im Erdorte T_3 ist $\odot - \lambda = 270$, $\xi = 0$, η im positiven Maximum und der Stern erscheint in s_3. Endlich ist für T_4, wo der Stern mit der Sonne in Konjunktion und $\odot - \lambda = 0$ ist, ξ im negativen Maximum, $\eta = 0$, der Sternort in s_4. Es ist nun leicht zu zeigen, daß die Verbindungslinie der vier Sternörter s_1, s_2, s_3, s_4 die Form einer Ellipse hat. Eliminieren wir nämlich aus unseren Gleichungen für ξ und η die im Laufe des Jahres sich stets ändernde Größe $\odot$, so erhalten wir die Sternörter unabhängig von dieser Größe, d. h. die Bahn, die vom Sterne scheinbar im Laufe eines Jahres beschrieben wird.

Wir haben also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi}{k} &= -\cos(\odot - \lambda) \\ \frac{\eta}{k \sin \beta} &= -\sin(\odot - \lambda) \end{aligned}\right\}$$

Quadriert und addiert man, so ergibt sich

$$\frac{\xi^2}{k^2} + \frac{\eta^2}{k^2 \sin^2 \beta} = 1.$$

Vergleichen wir hiermit die bekannte Gleichung der Ellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

worin a die halbe große Axe, b die halbe kleine Axe derselben ist, so erkennen wir, daß infolge der jährlichen Aberration vom Sterne eine Ellipse beschrieben wird, deren halbe große Axe $= k$, die halbe kleine Axe $= k \sin \beta$ ist. Die große Axe, welche senkrecht zum Breitenkreise liegt, ist daher in ihrer Größe unveränderlich, während die kleine Axe im Breitenkreise je nach der Breite des betrachteten Sternes ihre Dimension verändert. Steht der Stern im Pole der Ekliptik, so ist $\beta = 90$, also $b = k = a$ und derselbe beschreibt im Laufe eines Jahres einen Kreis mit dem Halbmesser k. Steht dagegen der Stern in der Ekliptik, so wird $\beta = 0$, und es folgt $b = 0$, d. h. der Stern beschreibt dann im Laufe des Jahres nur eine gerade Linie senkrecht zum Breitenkreise mit der Elongation $= 2k$.

Bezeichnen wir für die Erscheinung der Parallaxe das Produkt $(\lambda'-\lambda) \cos \beta$ mit ξ_1 und $\beta'-\beta$ mit η_1, so ist nach den Formeln $(9)_1$:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= pR \sin (\odot - \lambda) \\ \eta_1 &= -pR \cos (\odot - \lambda) \sin \beta \end{aligned}\right\}$$

und hieraus

$$\frac{\xi_1^2}{(pR)^2} + \frac{\eta_1^2}{(pR \sin \beta)^2} = 1.$$

Infolge der Parallaxe beschreiben also die Sterne ebenfalls jährliche Ellipsen, deren halbe große Axe gleich pR (oder gleich p, wenn $R = 1$ gesetzt wird), die halbe kleine Axe gleich $pR \sin \beta$ ist. Im Ekliptikpole geht wieder die Ellipse in einen Kreis über, mit dem Radius pR, während für einen Stern in der Ekliptik die jährliche parallaktische Verschiebung sich in einer geraden Linie vollzieht, deren Ausdehnung gleich $2pR$ ist. Die Maxima und Minima für ξ_1 und η_1 fallen aber jetzt keineswegs mit jenen von ξ und η zusammen, sondern liegen um einen Quadranten auseinander.

Betrachtet man beide Wirkungsweisen, der Aberration und der Parallaxe, gleichzeitig, wie dies der Wirklichkeit entspricht, so erhält man abermals eine Ellipse als jährliche scheinbare Bahn des Sternes. Denn setzen wir

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + \xi_1 = -k \cos (\odot - \lambda) + pR \sin (\odot - \lambda) \\ y &= \eta + \eta_1 = [-k \sin (\odot - \lambda) - pR \cos (\odot - \lambda)] \sin \beta \end{aligned}\right\}$$

und substituieren

$$\left.\begin{aligned} k &= m \cos M \\ pR &= m \sin M \end{aligned}\right\}$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned} x &= -m \cos (\odot - \lambda + M) \\ y &= -m \sin (\odot - \lambda + M) \sin \beta \end{aligned}\right\}$$

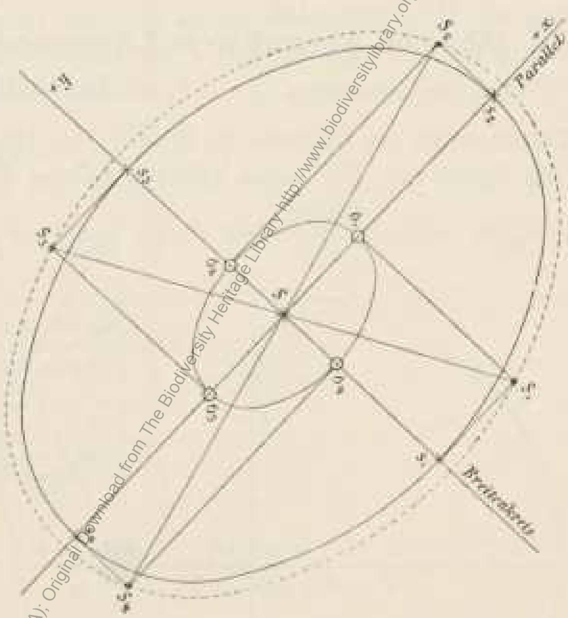
und hieraus

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{m^2 \sin^2 \beta} = 1.$$

Die halbe große Axe dieser Ellipse ist also $m = \sqrt{k^2 + p^2 R^2}$, die halbe kleine Axe $m \sin \beta = \sin \beta \sqrt{k^2 + p^2 R^2}$.

Wir können dieses Resultat auch aus einer einfachen graphischen Darstellung ableiten. In Fig. 17 sind entsprechend den vier Erdorten T_1, T_2, T_3 und T_4 die Parallaxenorte σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 (bezeichnet mit $\odot$) und die Aberrationsorte s_1, s_2, s_3, s_4 (bezeichnet mit $\times$) angegeben. Beide Systeme, deren einzelne Punkte um einen Quadranten verschoben erscheinen und zwar so, daß der Parallaxenort dem Aberrationsorte voraus ist, gehören Ellipsen an, deren x-Axe senkrecht zum Breitenkreise des Sternes S, die y-Axe im Breitenkreise desselben liegt. Die innere oder Parallaxenellipse ist mindestens 20mal kleiner als die äußere oder Aberrationsellipse zu denken. Fassen wir die Orte σ_1 und s_1 ins Auge, die dem Erdorte T_1 entsprechen, so wird der Stern zufolge der gleichzeitigen Wirkung von Parallaxe und Aberration nach dem resultierenden Orte S_1 an der Sphäre verschoben, dessen x-Koordinate $= S\sigma_1 = p\,R$, die y-Koordinate $= S s_1 = k \sin\beta$ ist. Für σ_2 und s_2 liegt der resultierende Sphärenort in S_2 mit $x = k$ und $y = pR \sin\beta$. Haben wir aber zwei Punkte S_1 und S_2 einer elliptischen Kurve, die hier vorausgesetzt werde, gegeben, so können wir auch die Dimension derselben finden. Ausgehend von der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ für die Ellipse haben wir:

Fig. 17.



$$
\begin{array}{lll}
\text{für } S_1 & \dfrac{p^2R^2}{a^2} + \dfrac{k^2 \sin^2\beta}{b^2} = 1 & \left.\begin{array}{ll} p^2R^2 & k^2 \\ -k^2 & -p^2R^2. \end{array}\right. \\[2ex]
\text{für } S_2 & \dfrac{k^2}{a^2} + \dfrac{p^2 R^2 \sin^2\beta}{b^2} = 1 &
\end{array}
$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit den rechts stehenden Faktoren und addieren die Produkte, so eliminieren wir das erste Mal b^2, das zweite Mal a^2 und erhalten:

$$\frac{p^4R^4}{a^2} - \frac{k^4}{a^2} = p^2R^2 - k^2$$

$$\frac{p^4R^4 - k^4}{p^2R^2 - k^2} = a^2 = \frac{(p^2R^2 + k^2)(p^2R^2 - k^2)}{p^2R^2 - k^2},$$

somit

$$a = \sqrt{p^2R^2 + k^2},$$

ferner zufolge der zweiten Multiplikation:

$$\frac{k^4 \sin^2\beta}{b^2} - \frac{p^4R^4 \sin^2\beta}{b^2} = k^2 - p^2R^2$$

$$\frac{(k^4 - p^4R^4)\sin^2\beta}{k^2 - p^2R^2} = b^2 = \frac{(k^2 + p^2R^2)(k^2 - p^2R^2)}{k^2 - p^2R^2} \sin^2\beta,$$

daher

$$b = \sin\beta\sqrt{p^2R^2 + k^2},$$

welche Werte der halben großen und kleinen Axe für die resultierende Ellipse mit den obigen identisch sind.

2. Jährliche Aberration in Länge und Breite, wenn die Erdbahn als Ellipse betrachtet wird.

Zeichnen wir die Erdbahn als Ellipse (Fig. 18) und nehmen in dem einen Brennpunkte derselben, in F, die Sonne an. Die halbe große Axe der Erdbahn $OA = OB$ heiße a, die halbe kleine Axe

Fig. 18.

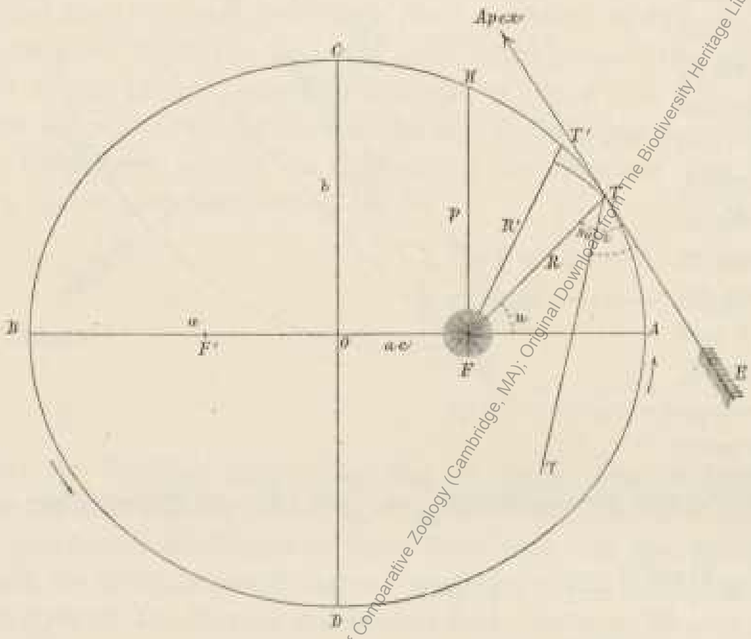
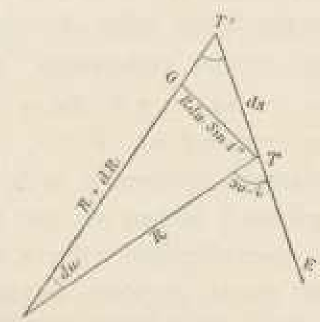


Fig. 19.



$OC = OD$ hingegen b. Das Verhältnis OF zu OA gibt die Exzentrizität e der Ellipse; insofern ist $OF = ae$. In A befindet sich die Erde in ihrer Sonnennähe (Perihel), in B in ihrer Sonnenferne (Aphel). Das arithmetische Mittel aus der kleinsten Distanz AF und der größten Distanz BF ist gleich a, weshalb diese Größe auch als mittlere Entfernung der Sonne von der Erde erscheint. Die Polargleichung der Ellipse bezüglich F lautet, wenn R den veränderlichen Radiusvektor der Erde bezeichnet:

$$R = \frac{p}{1 + e\cos u}.$$

Hierin ist u der Winkel zwischen der Perihelrichtung FA und dem Radiusvektor R; derselbe wird also von dem Perihel A aus gezählt und heißt die wahre Anomalie. Für $u = 90$ folgt $R = p$, so daß $p = FH$ ist; p wird der Parameter der Bahn genannt. Für die Erdbahnellipse ist $e = 0{\cdot}01677$, also sehr klein.

Zu einer bestimmten Zeit wäre die Erde in $T(R, u)$, zu einer späteren Zeit in $T'(R', u')$. Ziehen wir nun in T die Tangente zur Bahn, so wird sie nicht wie beim Kreise auf dem Radiusvektor senkrecht stehen. Es sei also $\sphericalangle ETF$ nicht mehr gleich $90°$, sondern $90° - i$ $(R' > R)$, wobei i wegen der geringen Exzentrizität der Erdbahn nur klein sein kann. Nehmen wir die Frühlingsnachtgleichenlinie in der Richtung $T\Upsilon$ an, so ist nun die Länge des Antiapex E gleich $\sphericalangle \Upsilon TE$ und die Länge der Sonne $\sphericalangle \Upsilon TF$, gezählt nach rechts, somit:

$$\sphericalangle \Upsilon TE = \sphericalangle \Upsilon TF - (270 + i) = \odot - 270 - i.$$

Da man aber zu jedem Winkel 360° hinzugeben darf, ohne ihn zu ändern, so folgt

$$\sphericalangle \Upsilon TE = \odot + 90 - i,$$

während diese Länge früher $\odot + 90$ (Fig. 11) war. Wir haben daher bei Betrachtung der Erdbahn als Ellipse in die für den Kreis abgeleiteten Aberrationsformeln für $\odot \ldots \odot - i$ einzuführen. Es handelt sich weiter um die Ermittlung der Größe i.

Nehmen wir T' sehr nahe zu T an, so können wir das kleine Bahnstück TT' als geradlinig betrachten und $R' - R = dR$, $u' - u = du$, ferner den Winkel an T' im Dreiecke $TT'F$ (Fig. 19) ebenfalls gleich $90 - i$ setzen. Da GT als Längengröße gleich $R\,du \sin 1''$ ist, so ergibt sich aus $\Delta\, TT'G$:

$$\operatorname{cotg}(90 - i) = tg\,i = \frac{dR}{R\,du \sin 1''}.$$

Die Änderung von R mit u, d. i. $\frac{dR}{du}$, erhalten wir aber durch Differentiation der obigen Polargleichung der Ellipse. Diese gibt:

$$dR = \frac{pe \sin u\, du \sin 1''}{(1 + e \cos u)^2}\,[1]$$

und hieraus

$$\frac{dR}{du} = \frac{pe \sin u}{(1 + e \cos u)^2} \sin 1'',$$

somit

$$tg\,i = \frac{1}{R} \cdot \frac{pe \sin u}{(1 + e \cos u)^2} = \frac{1 + e \cos u}{p} \cdot \frac{pe \sin u}{(1 + e \cos u)^2}$$

also

$$\underline{tg\,i = \frac{e \sin u}{1 + e \cos u}}. \qquad (13)$$

Wir benötigen weiter die Geschwindigkeit der Erdbewegung in ihrer elliptischen Bahn, welche jetzt als veränderlich aufzufassen ist. Im Orte T heiße sie v_1. Dieselbe wird allgemein gefunden, indem man ein unendlich kleines Wegstückchen ds durch die entsprechende Zeit dt dividiert; also:

$$v_1 = \frac{ds}{dt}.$$

Da in Fig. 19 die Länge TT' gleich ds zu setzen ist, so folgt aus $\Delta\, TT'G$:

$$R\,du \sin 1'' = ds \sin(90 - i),$$

daher

$$v_1 = \frac{ds}{dt} = R \frac{du}{dt} \sin 1'' \sec i\ .$$

Um $\frac{du}{dt}$ zu finden, benützen wir das zweite Kepler'sche Gesetz, welches besagt, daß bei der Bewegung eines Planeten um die Sonne die Flächengeschwindigkeit konstant sein muß. Heißt df eine unendlich kleine Bahnfläche, dt die entsprechende unendlich kleine Zeit, anderseits F die ganze Fläche der elliptischen Erdbahn und τ die siderische Umlaufszeit der Erde, d. i. diejenige, welche sie braucht, um einen vollen Umlauf (Rückkehr zu demselben Raumpunkte ihrer Bahn) zu vollenden, so besagt das zweite Kepler'sche Gesetz, daß:

$$\frac{df}{dt} = \frac{F}{\tau} = \text{konstant}$$

[1] Das Differentiale von $\cos u$ (im Nenner der Polargleichung) muß abermals eine Länge sein, weshalb $d \cos u = -\sin u\, du \sin 1''$ gesetzt wurde.

ist. Aber aus Fig. 19 folgt:

$$df = (R + dR) \cdot \frac{R\,du \sin 1''}{2} = \frac{R^2}{2} du \sin 1'' \text{ (bis exkl. Gl. 2. Ordg).}$$

Ferner ist

$$F = \pi a b = \pi a . a\sqrt{1-e^2}$$

somit

$$\frac{R^2}{2} \frac{du}{dt} \sin 1'' = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\tau}$$

und hieraus

$$\frac{du}{dt} \sin 1'' = \frac{2\pi}{\tau} \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{R^2}.$$

Dies in v_1 substituiert, gibt

$$v_1 = R \sec i \frac{2\pi}{\tau} \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{R^2} = \frac{1}{R} \sec i . \frac{2\pi}{\tau} a^2\sqrt{1-e^2}$$

$$= \frac{1 + e \cos u}{p} \sec i \frac{2\pi}{\tau} a^2\sqrt{1-e^2}$$

und, weil $p = a\,(1-e^2)$ ist

$$v_1 = \frac{2 a \pi}{\tau\sqrt{1-e^2}} (1 + e \cos u) \sec i. \tag{14}$$

Der mittlere Wert dieser Geschwindigkeit wird erhalten, indem man die kleinen periodischen Glieder, welche von u und i abhängen, wegläßt. Setzt man also

$$\cos i = 1 - \frac{i^2 \sin^2 1''}{2} \ldots, \qquad \text{somit } \sec i = 1 + \frac{i^2 \sin^2 1''}{2} \ldots,$$

so lautet der von u und i freie oder mittlere Wert der Geschwindigkeit (v):

$$v = \frac{2 a \pi}{\tau\sqrt{1-e^2}},$$

welcher sofort in das frühere v übergeht, da für die Kreisbahn $e = 0$ ist und $\frac{2 a \pi}{\tau}$ die konstante Geschwindigkeit einer Bewegung im Kreise, dessen Halbmesser a und Umlaufsdauer τ heißt, bedeutet. Es ist also für die elliptische Erdbewegung:

$$v_1 = v\,(1 + e \cos u) \sec i.$$

Diese veränderliche Erdgeschwindigkeit ist nun mit der Geschwindigkeit des Lichtes zu kombinieren und statt dem früheren k zu nehmen:

$$k_1 = \frac{v_1}{V \sin 1''} = k\,(1 + e \cos u) \sec i.$$

Jetzt ist

$$k = \frac{2 a \pi}{\tau\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{V \sin 1''}$$

diejenige Größe, welche aus den Beobachtungen der Sternpositionen zu verschiedenen Zeiten des Jahres ermittelt wird.

Führen wir in die Formeln (9) für $\odot \ldots \odot - i$ und für $k \ldots k_1$ ein, so erhalten wir:

$$\lambda' - \lambda = -k_1 \cos(\odot - i - \lambda) \sec\beta = -k(1 + e\cos u) \sec i \sec\beta \cos(\odot - \lambda - i)$$
$$\beta' - \beta = -k_1 \sin(\odot - i - \lambda) \sin\beta = -k(1 + e\cos u) \sec i \sin\beta \sin(\odot - \lambda - i)$$

und, wenn der Cosinus und Sinus von $\odot - \lambda - i$ aufgelöst werden:

$$\lambda' - \lambda = -k(1 + e\cos u) \sec\beta\, [\cos(\odot - \lambda) + \sin(\odot - \lambda)\, tg\, i]$$
$$\beta' - \beta = -k(1 + e\cos u) \sin\beta\, [\sin(\odot - \lambda) - \cos(\odot - \lambda)\, tg\, i].$$

Wird nun $tg\, i$ aus (13) substituiert, so folgt

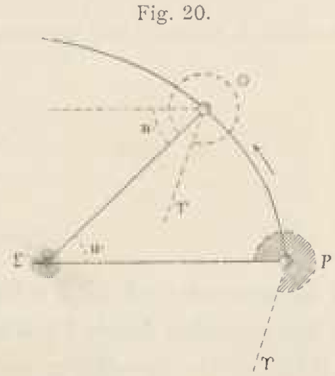
$$\lambda' - \lambda = -k(1 + e\cos u) \sec\beta \cos(\odot - \lambda) - ke \sin u \sec\beta \sin(\odot - \lambda)$$
$$\beta' - \beta = -k(1 + e\cos u) \sin\beta \sin(\odot - \lambda) + ke \sin u \sin\beta \cos(\odot - \lambda),$$

somit

$$\left.\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -k\cos(\odot - \lambda) \sec\beta - ke\cos(\odot - u - \lambda) \sec\beta \\ \beta' - \beta &= -k\sin(\odot - \lambda) \sin\beta - ke\sin(\odot - u - \lambda) \sin\beta \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Hierin können wir noch für $\odot - u$ die Länge der Sonne im Perihel setzen (Fig. 20). Heißt diese P, so ist also $P = \odot - u$. P liegt in der Nähe von 280°; der genaue Wert wird aus den Sonnenephemeriden entnommen. In den Gleichungen (15) fallen die zweiten Glieder rechts fort, sobald wir $e = 0$, d. i. eine Kreisbahn voraussetzen. Da für die elliptische Bahn der Erde $ke = 0\overset{''}{.}3429$, also klein ist, anderseits für einen bestimmten Fixstern das zweite Glied nahezu konstant erscheint, so wird es wieder in den mittleren Sternort aufgenommen gedacht, so daß unsere Formeln (9), welche die Exzentrizität nicht berücksichtigen, auch im Falle der elliptischen Erdbahn als exakt betrachtet werden können. Anders ist es bei der Aberration der Sonne, da sich die Sonnenlänge im Laufe eines Jahres beständig ändert.

Fig. 20.



Jährliche Aberration der Sonne.

Da die Sonne in der Ekliptik ihre scheinbare Bahn beschreibt, so ist für dieselbe die Breite $\beta = 0$ zu setzen (strenge kann die Breite zufolge der Störungen durch die Planeten bis zu 1″ anwachsen) und man hat es nur mit einer Aberration in Länge zu tun. Diese resultiert aus (15):

$$\lambda'_{\odot} - \lambda_{\odot} = \odot' - \odot = -k - ke\cos(P - \odot)$$
$$\odot' - \odot = -20\overset{''}{.}4451 - 0\overset{''}{.}3429 \cos(P - \odot). \qquad (16)$$

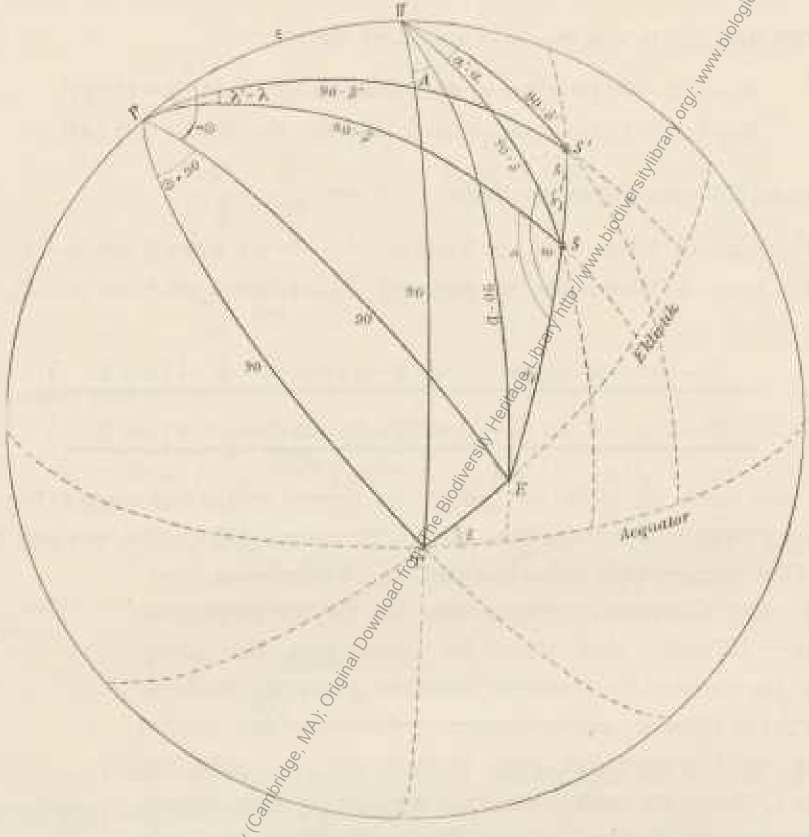
Wird die Erdbahn als Kreis angenommen, so fällt das zweite Glied wegen $e = 0$ weg und man hat $\odot' = \odot - 20\overset{''}{.}4451$ als scheinbare, d. i. mit Aberration behaftete Sonnenlänge. Die Aberrationsverschiebung der Sonne ist dann gleich dem Maximalwerte der Aberration k, weil beim Kreise die Bewegungsrichtung der Erde in jedem Punkte der Bahn senkrecht zum Radiusvektor steht.

3. Jährliche Aberration in Rektaszension und Deklination.

In Fig. 21 sei P der Pol der Ekliptik und Π der Pol des Äquators. $P\Pi = \varepsilon$ ist die Schiefe der Ekliptik oder der Winkel zwischen Äquator und Ekliptik. Der größte Kreis ESS' sei derjenige, in welchem die Aberrationsverschiebung des wahren Sternortes S nach dem scheinbaren S' vor sich geht. $SS' = \vartheta' - \vartheta$.

E ist der Antiapex, von welchem die Erde im Raume zu kommen scheint, ♈ der Frühlingsnachtgleichenpunkt; beide liegen in der Ekliptik. Die ekliptikalen Koordinaten von S und S' mögen heißen $\lambda\beta$ und $\lambda'\beta'$,

Fig. 21.



die äquatorealen $\alpha\delta$ und $\alpha'\delta'$. Die ekliptikalen Koordinaten von E sind: Länge $= \odot + 90$, Breite $= 0$; die äquatorealen dieses Punktes seien A und D. Da ♈P und ♈Π auf $P\Pi$ senkrecht stehen müssen, so ist $\sphericalangle\, \Pi P E = 90 - (\odot + 90) = -\odot$, ferner $\sphericalangle\, P \Pi E = 90 + A$. Die der Verschiebung SS' entsprechenden Winkelgrößen am Ekliptik- und Äquatorpole sind: $\lambda' - \lambda$ und $\alpha' - \alpha$. Endlich sollen noch die Winkel: $\sphericalangle\, PSE = o$ und $\sphericalangle\, \Pi SE = w$ genannt werden.

Mit Hilfe dieser Zeichnung ist es beispielsweise leicht, unsere Formeln (9) für $\lambda' - \lambda$ und $\beta' - \beta$ zu finden. Denn wir haben aus dem sphärischen Drucke $SS'P$:

$$\sin(\vartheta' - \vartheta)\sin(180 - o) = \sin(\lambda' - \lambda)\sin(90 - \beta')$$
$$\sin(\vartheta' - \vartheta)\cos(180 - o) = \sin(90 - \beta)\cos(90 - \beta') - \cos(90 - \beta)\sin(90 - \beta')\cos(\lambda' - \lambda),$$

also strenge

$$\left.\begin{aligned} \sin(\vartheta' - \vartheta)\sin o &= \sin(\lambda' - \lambda)\cos\beta' \\ -\sin(\vartheta' - \vartheta)\cos o &= \cos\beta\sin\beta' - \sin\beta\cos\beta'\cos(\lambda' - \lambda) \end{aligned}\right\}$$

und, indem bloß Glieder von Kleinheit 1. Ordnung berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} (\vartheta' - \vartheta)\sin o &= (\lambda' - \lambda)\cos\beta' = k\sin\vartheta'\sin o \\ -(\vartheta' - \vartheta)\cos o &= \quad \beta' - \beta \quad = -k\sin\vartheta'\cos o \end{aligned}$$

somit bei weiterer konsequenter Vernachlässigung von Gliedern 2. Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= k\sin\vartheta\sin o\sec\beta \\ \beta' - \beta &= -k\sin\vartheta\cos o. \end{aligned}\right\}$$

Aber aus $\Delta\, ESP$ folgt, weil $\sphericalangle\, SPE = \lambda - (\odot + 90) = 270 - (\odot - \lambda)$ ist:

$$\sin\vartheta \sin o = \sin[270 - (\odot - \lambda)] \sin 90$$
$$\sin\vartheta \cos o = \sin(90 - \beta)\cos 90 - \cos(90 - \beta)\sin 90 \cos[270 - (\odot - \lambda)],$$

also

$$\sin\vartheta \sin o = -\cos(\odot - \lambda)$$
$$\sin\vartheta \cos o = \sin\beta \sin(\odot - \lambda),$$

somit

$$\left.\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -k\cos(\odot - \lambda)\sec\beta \\ \beta' - \beta &= -k\sin(\odot - \lambda)\sin\beta. \end{aligned}\right\}$$

Analog verfahren wir in Bezug auf den Äquatorpol Π, um $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ zu erhalten. Aus dem sphärischen Drucke $SS'\Pi$ ist:

$$\sin(\vartheta' - \vartheta)\sin(180 - w) = \sin(\alpha' - \alpha)\sin(90 - \delta')$$
$$\sin(\vartheta' - \vartheta)\cos(180 - w) = \sin(90 - \delta)\cos(90 - \delta') - \cos(90 - \delta)\sin(90 - \delta')\cos(\alpha' - \alpha),$$

also strenge

$$\left.\begin{aligned} \sin(\vartheta' - \vartheta)\sin w &= \sin(\alpha' - \alpha)\cos\delta' \\ -\sin(\vartheta' - \vartheta)\cos w &= \cos\delta\sin\delta' - \sin\delta\cos\delta'\cos(\alpha' - \alpha). \end{aligned}\right\}$$

Aus diesen Formeln wollen wir zuerst genäherte Werte mit Weglassung der Glieder 2. Ordnung und hierauf strengere Werte für $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ ableiten.

a) Genäherte Aberrationsformeln in α und δ.

Unter alleiniger Berücksichtigung von Gliedern 1. Ordnung erhalten wir:

$$(\vartheta' - \vartheta)\sin w = (\alpha' - \alpha)\cos\delta' = k\sin\vartheta'\sin w$$
$$-(\vartheta' - \vartheta)\cos w = \quad \delta' - \delta \quad = -k\sin\vartheta'\cos w$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= k\sin\vartheta\sin w\sec\delta \\ \delta' - \delta &= -k\sin\vartheta\cos w. \end{aligned}\right\}$$

Aber aus dem Dreiecke $SE\Pi$, in welchem der Winkel an $\Pi \ldots \alpha - A$ ist, folgt:

$$\sin\vartheta\sin w = \sin(\alpha - A)\cos D$$
$$\sin\vartheta\cos w = \cos\delta\sin D - \sin\delta\cos D\cos(\alpha - A)$$

und aufgelöst

$$\left.\begin{aligned} \sin\vartheta\sin w &= \sin\alpha\cos A\cos D - \cos\alpha\sin A\cos D \\ \sin\vartheta\cos w &= \cos\delta\sin D - \sin\delta\cos D\cos\alpha\cos A - \sin\delta\cos D\sin\alpha\sin A. \end{aligned}\right\}$$

Weiter ist aber aus $\Delta\, E\Pi P$:

$$\cos(90 - D) = \cos\varepsilon\cos 90 + \sin\varepsilon\sin 90\cos(-\odot)$$
$$\sin(90 - D)\sin(90 + A) = \sin(-\odot)\sin 90$$
$$\sin(90 - D)\cos(90 + A) = \sin\varepsilon\cos 90 - \cos\varepsilon\sin 90\cos(-\odot)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \sin D &= \sin\varepsilon\cos\odot \\ \cos D\cos A &= \cdot\sin\odot \\ \cos D\sin A &= \cos\varepsilon\cos\odot, \end{aligned}\right\}$$

daher

$$\sin\vartheta \sin w = -\sin\alpha \sin\odot - \cos\alpha \cos\varepsilon \cos\odot$$

$$\sin\vartheta \cos w = \cos\delta \sin\varepsilon \cos\odot + \sin\delta \cos\alpha \sin\odot - \sin\delta \sin\alpha \cos\varepsilon \cos\odot$$

und dies oben substituiert:

$$\left.\begin{aligned} \alpha'-\alpha &= -k \sec\delta\,(\cos\odot \cos\alpha \cos\varepsilon + \sin\odot \sin\alpha) \\ \delta'-\delta &= k \cos\odot\,(\sin\alpha \sin\delta \cos\varepsilon - \cos\delta \sin\varepsilon) - k \sin\odot \cos\alpha \sin\delta. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Wir können diese genäherten Aberrationsformeln für den Äquator auch auf differentiellem Wege aus jenen für die Ekliptik ableiten. Bezeichnen wir in dem sphärischen Dreiecke ABC (Fig. 22) die Seiten

Fig. 22.

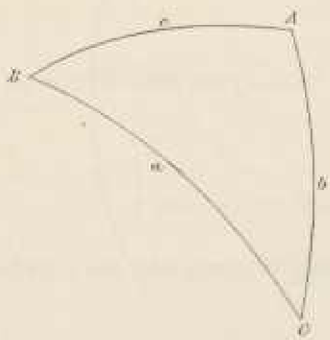
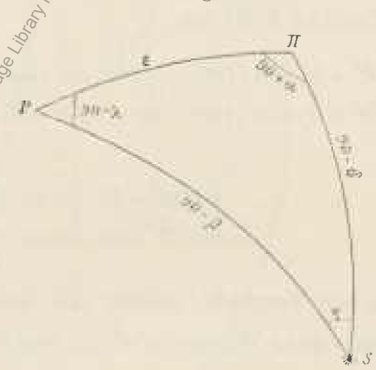


Fig. 23.



mit $a\,b\,c$ und die gegenüberliegenden Winkel mit $A\;B\;C$, so haben wir die folgenden Differentialgleichungen der sphärischen Trigonometrie:

$$\left.\begin{aligned} \sin b\, dA &= -\sin a \cos C\, dB + \sin C\, da - \cos b \sin A\, dc \\ db &= \sin a \sin C\, dB + \cos C\, da + \cos A\, dc. \end{aligned}\right\}$$

Diese wenden wir auf das sphärische Dreieck ΠPS (Fig. 23) an und fragen, wie ändern sich α und δ des Sternes S, wenn die Änderungen $d\lambda = \lambda'-\lambda$ und $d\beta = \beta'-\beta$ zufolge der Aberrationsverschiebung des Sternortes S nach S' gegeben sind. Es ergibt sich zunächst

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta\, d\alpha &= \cos\beta \cos\eta\, d\lambda - \sin\eta\, d\beta - \sin\delta \cos\alpha\, d\varepsilon \\ d\delta &= \cos\beta \sin\eta\, d\lambda + \cos\eta\, d\beta + \sin\alpha\, d\varepsilon \end{aligned}\right\}$$

Da beim Übergange von S zu S' die Größe ε sich nicht ändert, so ist $d\varepsilon = 0$ zu setzen; ferner ist:

$$\left.\begin{aligned} d\lambda &= -k \cos(\odot-\lambda) \sec\beta \\ d\beta &= -k \sin(\odot-\lambda) \sin\beta \end{aligned}\right\}$$

daher vorerst:

$$\begin{aligned} \cos\delta\, d\alpha &= \cos\beta \cos\eta\,[-k \cos(\odot-\lambda) \sec\beta] - \sin\eta\,[-k \sin(\odot-\lambda) \sin\beta] \\ &= -k \cos\eta \cos(\odot-\lambda) + k \sin\eta \sin\beta \sin(\odot-\lambda) \\ &= -k \cos\eta \cos\odot \cos\lambda - k \cos\eta \sin\odot \sin\lambda + k \sin\eta \sin\beta \sin\odot \cos\lambda - k \sin\eta \sin\beta \cos\odot \sin\lambda \\ &= k\,[-\cos\odot\,(\cos\eta \cos\lambda + \sin\eta \sin\lambda \sin\beta) + \sin\odot\,(-\cos\eta \sin\lambda + \sin\eta \cos\lambda \sin\beta)] \end{aligned}$$

Es ist aber (Fig. 22)

$$\sin A \cos c = \sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a$$

somit (Fig. 23)

$$\sin(90+\alpha) \cos\varepsilon = \sin(90-\lambda) \cos\eta + \cos(90-\lambda) \sin\eta \cos(90-\beta)$$

und

$$\cos\alpha\cos\varepsilon = \cos\lambda\cos\eta + \sin\lambda\sin\eta\sin\beta,$$

ferner aus

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a$$

$$\cos(90+\alpha) = -\cos(90-\lambda)\cos\eta + \sin(90-\lambda)\sin\eta\cos(90-\beta),$$

also

$$-\sin\alpha = -\sin\lambda\cos\eta + \cos\lambda\sin\eta\sin\beta.$$

Dies in $\cos\delta\, d\alpha$ substituiert, gibt:

$$\cos\delta\, d\alpha = k\,[-\cos\odot\cos\alpha\cos\varepsilon - \sin\odot\sin\alpha],$$

also

$$d\alpha = \alpha' - \alpha = -k\sec\delta\,(\cos\odot\cos\alpha\cos\varepsilon + \sin\odot\sin\alpha)$$

wie oben. Weiter resultiert

$$\begin{aligned} d\delta &= \cos\beta\sin\eta\,[-k\cos(\odot-\lambda)\sec\beta] + \cos\eta\,[-k\sin(\odot-\lambda)\sin\beta] \\ &= -k\sin\eta\cos(\odot-\lambda) - k\cos\eta\sin\beta\sin(\odot-\lambda) \\ &= -k\sin\eta\cos\odot\cos\lambda - k\sin\eta\sin\odot\sin\lambda - k\cos\eta\sin\beta\sin\odot\cos\lambda + k\cos\eta\sin\beta\cos\odot\sin\lambda \\ &= k\,[\cos\odot\,(-\sin\eta\cos\lambda + \cos\eta\sin\lambda\sin\beta) - \sin\odot\,(\sin\eta\sin\lambda + \cos\eta\cos\lambda\sin\beta)]. \end{aligned}$$

Nun ist (Fig. 22) zufolge eines Satzes der sphärischen Trigonometrie:

$$\sin B\sin C - \cos B\cos C\cos a = \sin b\sin c + \cos b\cos c\cos A,$$

somit

$$\sin(90-\lambda)\sin\eta - \cos(90-\lambda)\cos\eta\cos(90-\beta) = \sin(90-\delta)\sin\varepsilon + \cos(90-\delta)\cos\varepsilon\cos(90+\alpha)$$

$$\cos\lambda\sin\eta - \sin\lambda\cos\eta\sin\beta = \cos\delta\sin\varepsilon - \sin\delta\cos\varepsilon\sin\alpha,$$

ferner

$$\sin A\cos b = \sin C\cos B + \cos C\sin B\cos a,$$

woraus folgt:

$$\sin(90+\alpha)\cos(90-\delta) = \sin\eta\cos(90-\lambda) + \cos\eta\sin(90-\lambda)\cos(90-\beta)$$

also

$$\cos\alpha\sin\delta = \sin\eta\sin\lambda + \cos\eta\cos\lambda\sin\beta.$$

Dies in $d\delta$ substituiert, gibt:

$$d\delta = \delta' - \delta = k\,[\cos\odot\,(-\cos\delta\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon\sin\alpha) - \sin\odot\cos\alpha\sin\delta],$$

was ebenfalls mit dem obigen Werte übereinstimmt.

b) Strengere Aberrationsformeln in α und δ.

Berücksichtigen wir nunmehr auch die Glieder von Kleinheit 2. Ordnung. Es war strenge

$$\sin(\vartheta'-\vartheta)\sin w = \sin(\alpha'-\alpha)\cos\delta' = k\sin 1''\sin\vartheta'\sin w$$

und, indem für $\vartheta' \ldots \vartheta + \vartheta' - \vartheta$, für $\delta' \ldots \delta + \delta' - \delta$ gesetzt wird, erhalten wir

$$k\sin 1''\sin(\vartheta + \vartheta' - \vartheta)\sin w = \sin(\alpha'-\alpha)\cos(\delta + \delta' - \delta),$$

somit bis exkl. Glieder 3. Ordnung:

$$k\sin 1''\,[\sin\vartheta + \cos\vartheta\,(\vartheta'-\vartheta)\sin 1'']\sin w = \sin(\alpha'-\alpha)\,[\cos\delta - \sin\delta\,(\delta'-\delta)\sin 1'']$$

und, weil im Gliede 2. Ordnung auf der linken Seite für $\vartheta' - \vartheta \ldots k\sin\vartheta$ zu setzen ist:

$$k\sin 1''\sin\vartheta\sin w\,(1 + k\sin 1''\cos\vartheta) = \sin(\alpha'-\alpha)\cos\delta\,[1 - tg\delta\,(\delta'-\delta)\sin 1''],$$

daher

$$\sin(\alpha'-\alpha) = \frac{k\sin 1''\sin\vartheta\sin w\,(1 + k\sin 1''\cos\vartheta)\sec\delta}{1 - tg\delta\,(\delta'-\delta)\sin 1''}.$$

Der Nenner kann, indem er zur (—1)-ten Potenz erhoben und in eine Reihe entwickelt wird, als Faktor des Zählers gedacht werden. Bei der betreffenden Multiplikation sind nur Glieder 1. und 2. Ordnung beizubehalten. Es ergibt sich dann:

$$\sin(\alpha'-\alpha) = k \sin 1'' \sin\vartheta \sin w\,(1+k\sin 1''\cos\vartheta)\sec\delta + k\sin 1''\sin\vartheta\sin w\sec\delta\, tg\delta\,(\delta'-\delta)\sin 1''$$

und wegen $\delta'-\delta = -k\sin\vartheta\cos w$:

$$\sin(\alpha'-\alpha) = k\sin 1''\sin\vartheta\sin w\sec\delta + k^2\sin^2 1''\sin\vartheta\sin w\sec\delta\,(\cos\vartheta - \sin\vartheta\cos w\, tg\delta).$$

Behandeln wir zunächst den Ausdruck rechts in der runden Klammer. Es ist aus $\Delta\ ESП$ (Fig. 21)

$$\begin{aligned}\cos\vartheta &= \sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha-A)\\ &= \sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos\alpha\cos A + \cos\delta\cos D\sin\alpha\sin A\end{aligned}$$

und, wenn hierin unsere Beziehungen zwischen $A\,D$ und $\odot\,\varepsilon$ substituiert werden

$$\left.\begin{aligned}\cos\vartheta &= \sin\delta\sin\varepsilon\cos\odot - \cos\delta\cos\alpha\sin\odot + \cos\delta\sin\alpha\cos\varepsilon\cos\odot,\\ \text{ferner war:}\quad \sin\vartheta\cos w &= \cos\delta\sin\varepsilon\cos\odot + \sin\delta\cos\alpha\sin\odot - \sin\delta\sin\alpha\cos\varepsilon\cos\odot\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&1\\ &-tg\delta.\end{aligned}$$

Wird dies mit den rechts stehenden Größen multipliziert und addiert, so findet sich

$$\begin{aligned}\cos\vartheta - \sin\vartheta\cos w\, tg\delta &= -\cos\alpha\sin\odot\left(\cos\delta + \frac{\sin^2\delta}{\cos\delta}\right) + \sin\alpha\cos\varepsilon\cos\odot\left(\cos\delta + \frac{\sin^2\delta}{\cos\delta}\right)\\ &= -\cos\alpha\sin\odot\sec\delta + \sin\alpha\cos\varepsilon\cos\odot\sec\delta.\end{aligned}$$

Anderseits war
$$\sin\vartheta\sin w = -\sin\alpha\sin\odot - \cos\alpha\cos\varepsilon\cos\odot.$$

Dies oben in $\sin(\alpha'-\alpha)$ eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha'-\alpha) = &-k\sin 1''\sec\delta\,(\sin\alpha\sin\odot + \cos\alpha\cos\varepsilon\cos\odot)\\ &-k^2\sin^2 1''\sec^2\delta\,(\sin\alpha\sin\odot + \cos\alpha\cos\varepsilon\cos\odot)(-\cos\alpha\sin\odot + \sin\alpha\cos\varepsilon\cos\odot).\end{aligned}$$

Wird rechts im Gliede 2. Ordnung die angedeutete Multiplikation ausgeführt, so folgt:

$$\begin{aligned}(\ldots)(\ldots) &= -\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\odot - \cos^2\alpha\cos\varepsilon\sin\odot\cos\odot + \sin^2\alpha\cos\varepsilon\sin\odot\cos\odot +\\ &\qquad + \sin\alpha\cos\alpha\cos^2\varepsilon\cos^2\odot\\ &= \sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\varepsilon\cos^2\odot - \sin^2\odot) + \sin\odot\cos\odot\cos\varepsilon(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha).\end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned}\cos^2\varepsilon\cos^2\odot - \sin^2\odot &= \cos^2\varepsilon\frac{1}{2}(1+\cos 2\odot) - \frac{1}{2}(1-\cos 2\odot)\\ &= \frac{1}{2}[\cos^2\varepsilon - 1 + \cos 2\odot(\cos^2\varepsilon + 1)]\\ &= \frac{1}{2}[-\sin^2\varepsilon + (1+\cos^2\varepsilon)\cos 2\odot]\end{aligned}$$

und

$$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -\cos 2\alpha$$

somit

$$(\ldots)(\ldots) = \frac{1}{4}\sin 2\alpha[-\sin^2 + \varepsilon(1+\cos^2\varepsilon)\cos 2\odot] - \frac{1}{2}\sin 2\odot\cos\varepsilon\cos 2\alpha.$$

Dies substituiert in $\sin(\alpha'-\alpha)$ und die linke Seite der Gleichung bis exklusive Glieder 3. Ordnung ersetzt durch $(\alpha'-\alpha)\sin 1''$, folgt:

$$\alpha'-\alpha = -k\sec\delta(\sin\alpha\sin\odot+\cos\alpha\cos\varepsilon\cos\odot)$$
$$-\frac{k^2}{4}\sin 1''\sec^2\delta\sin 2\alpha[-\sin^2\varepsilon+(1+\cos^2\varepsilon)\cos 2\odot]+\frac{k^2}{2}\sin 1''\sec^2\delta\sin 2\odot\cos\varepsilon\cos 2\alpha.$$

In dem ersten Ausdrucke der Glieder 2. Ordnung ist das Glied mit $\sin 2\alpha\sin^2\varepsilon$ für denselben Stern konstant und wird in den mittleren Ort desselben aufgenommen gedacht, so daß der definitive Ausdruck für die jährliche Aberration in Rektaszension mit Rücksicht auf die Glieder von Kleinheit 1. und 2. Ordnung lautet:

$$\left.\begin{aligned}&\underline{\alpha'-\alpha=-k\sec\delta(\cos\odot\cos\alpha\cos\varepsilon+\sin\odot\sin\alpha)}\\&\underline{-\frac{k^2}{4}\sin 1''(1+\cos^2\varepsilon)\sin 2\alpha\cos 2\odot\sec^2\delta+\frac{k^2}{2}\sin 1''\cos\varepsilon\cos 2\alpha\sin 2\odot\sec^2\delta}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\text{Gl. 1. Ordg.}\\&\text{Gl. 2. Ordg.}\end{aligned}\qquad(18)$$

Setzt man $\varepsilon = 23°27'$, so ergeben die Glieder 2. Ordnung mit der Struve'schen Aberrationskonstante $k = 20''\!.4451$:

$$-0''\!.0009330\sin 2\alpha\cos 2\odot\sec^2\delta+0''\!.0009296\cos 2\alpha\sin 2\odot\sec^2\delta$$

und gestattet man sich, das Mittel der beiden numerischen Faktoren, d. i. $0''\!.000931$, einzuführen, so lauten die Glieder 2. Ordnung in Rektaszension:

$$\underline{+0''\!.000931\sin 2(\odot-\alpha)\sec^2\delta,}$$

welcher Wert erst bei $\delta = 85°\!.5$ den Betrag von $0^s\!.01$ erreicht. Es kann daher für Sterne, deren Deklination kleiner als $85^1/_2{}°$ ist, vom Gliede 2. Ordnung ganz abgesehen werden.

Um für die Aberration in Deklination die Formel mit Rücksicht auf die Glieder 2. Ordnung zu erhalten, gehen wir von der obigen strengen Gleichung:

$$-\sin(\vartheta'-\vartheta)\cos w = \cos\delta\sin\delta'-\sin\delta\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha)$$

aus und setzen wieder $\vartheta' = \vartheta+\vartheta'-\vartheta$, ferner $\delta' = \delta+\delta'-\delta$. Es resultiert:

$$-k\sin 1''\sin\vartheta'\cos w = \cos\delta\sin(\delta+\delta'-\delta)-\sin\delta\cos(\delta+\delta'-\delta)\cos(\alpha'-\alpha)$$
$$-k\sin 1''\sin(\vartheta+\vartheta'-\vartheta)\cos w = \cos\delta[\sin\delta\cos(\delta'-\delta)+\cos\delta\sin(\delta'-\delta)]$$
$$-\sin\delta[\cos\delta\cos(\delta'-\delta)-\sin\delta\sin(\delta'-\delta)]\cos(\alpha'-\alpha)$$
$$-k\sin 1''[\sin\vartheta+\cos\vartheta(\vartheta'-\vartheta)\sin 1''] = \cos(\delta'-\delta)\sin\delta\cos\delta[1-\cos(\alpha'-\alpha)]$$
$$+\sin(\delta'-\delta)[\cos^2\delta+\sin^2\delta\cos(\alpha'-\alpha)].$$

Bis exklusive Glieder 3. Ordnung ist rechts für $1-\cos(\alpha'-\alpha) = 2\sin^2\frac{\alpha'-\alpha}{2}$ zu schreiben: $\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)^2\sin^2 1''$ und weiter für $\cos(\delta'-\delta)$, ebenso für $\cos(\alpha'-\alpha)$ die Einheit, also auch wegen $\vartheta'-\vartheta = k\sin\vartheta$:

$$-k\sin 1''(\sin\vartheta+k\sin 1''\sin\vartheta\cos\vartheta)\cos w = \frac{1}{2}\sin\delta\cos\delta(\alpha'-\alpha)^2\sin^2 1''+\sin(\delta'-\delta)$$

also:

$$\sin(\delta'-\delta) = -k\sin 1''\sin\vartheta\cos w(1+k\sin 1''\cos\vartheta)-\frac{1}{2}\sin^2 1''\sin\delta\cos\delta(\alpha'-\alpha)^2.$$

Aber es war

$$\alpha'-\alpha = k \sin\vartheta \sin w \sec\delta$$

daher

$$\sin(\delta'-\delta) = -k \sin 1'' \sin\vartheta \cos w - k^2 \sin^2 1'' \sin\vartheta \cos w \cos\vartheta - \frac{k^2}{2} \sin^2 1''\, tg\,\delta \sin^2\delta \sin^2\vartheta \sin^2 w.$$

Das erste Glied rechts ist das frühere Glied 1. Ordnung. In den Gliedern 2. Ordnung sind nun die Faktoren $\sin\vartheta \cos w \cos\vartheta$ und $\sin^2\vartheta \sin^2 w$ zu ermitteln. Es war:

$$\left.\begin{aligned} \sin\vartheta \cos w &= \cos\odot(\cos\delta \sin\varepsilon - \sin\delta \cos\varepsilon \sin\alpha) + \sin\odot \sin\delta \cos\alpha \\ \cos\vartheta &= \cos\odot(\sin\delta \sin\varepsilon + \cos\delta \cos\varepsilon \sin\alpha) - \sin\odot \cos\delta \cos\alpha. \end{aligned}\right\}$$

Multiplizieren wir diese beiden Ausdrücke miteinander, so sehen wir, daß kein Glied als Faktor $\sec\delta$ oder $tg\,\delta$ erhält, also auch nicht für Polsterne anwachsen kann. Deshalb darf füglich das 2. Glied der rechten Seite in $\sin(\delta'-\delta)$ ganz weggelassen werden. Wir haben dann bloß

$$\delta'-\delta = -k \sin\vartheta \cos w - \frac{k^2}{2} \sin 1''\, tg\,\delta \sin^2\vartheta \sin^2 w.$$

Es ist aber

$$\sin\vartheta \sin w = -(\sin\alpha \sin\odot + \cos\alpha \cos\varepsilon \cos\odot),$$

somit

$$\begin{aligned} \sin^2\vartheta \sin^2 w &= \sin^2\alpha \sin^2\odot + \cos^2\alpha \cos^2\varepsilon \cos^2\odot + 2 \sin\alpha \cos\alpha \sin\odot \cos\odot \cos\varepsilon \\ &= \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\frac{1}{2}(1-\cos 2\odot) + \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\frac{1}{2}(1+\cos 2\odot)\cos^2\varepsilon + \\ &\qquad + \sin 2\alpha \frac{1}{2} \sin 2\odot \cos\varepsilon \\ &= \frac{1}{4}(1-\cos 2\alpha - \cos 2\odot + \cos 2\alpha \cos 2\odot) + \\ &\qquad + \frac{1}{4}(1+\cos 2\alpha + \cos 2\odot + \cos 2\alpha \cos 2\odot)\cos^2\varepsilon + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \sin 2\odot \cos\varepsilon \end{aligned}$$

und, indem wir rechts gleich die nicht periodischen Glieder, d. i. jene ohne $\odot$, weglassen, da konstante Glieder in den mittleren Sternort aufgenommen gedacht werden, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sin^2\vartheta \sin^2 w &= \frac{1}{4}\cos 2\odot(-1+\cos^2\varepsilon) + \frac{1}{4}\cos 2\alpha \cos 2\odot (1+\cos^2\varepsilon) + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \sin 2\odot \cos\varepsilon \\ &= -\frac{1}{4}\cos 2\odot \sin^2\varepsilon + \frac{1}{4}\cos 2\alpha \cos 2\odot (1+\cos^2\varepsilon) + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \sin 2\odot \cos\varepsilon. \end{aligned}$$

Substituiert in $\delta'-\delta$, folgt:

$$\left.\begin{aligned} \delta'-\delta &= k \cos\odot(\sin\alpha \sin\delta \cos\varepsilon - \cos\delta \sin\varepsilon) - k \sin\odot \cos\alpha \sin\delta & &\text{Gl. 1. Ordg.} \\ &+ \frac{k^2}{8}\sin 1''[\sin^2\varepsilon - (1+\cos^2\varepsilon)\cos 2\alpha]\cos 2\odot\, tg\,\delta - \frac{k^2}{4}\sin 1'' \cos\varepsilon \sin 2\alpha \sin 2\odot\, tg\,\delta & &\text{Gl. 2. Ordg.} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Die Glieder 2. Ordnung lauten, wenn für k und ε die obigen Werte eingesetzt werden:

$$+(0''\!.0000401 - 0''\!.0004665 \cos 2\alpha)\cos 2\odot\, tg\,\delta - 0''\!.0004648 \sin 2\alpha \sin 2\odot\, tg\,\delta.$$

Hierin kann man das erste Glied wegen seiner Kleinheit auch ganz weglassen, ferner das Mittel von 0·0004665 und 0·0004648, d. i. 0·000466 einführen, wo dann das Glied 2. Ordnung wird:

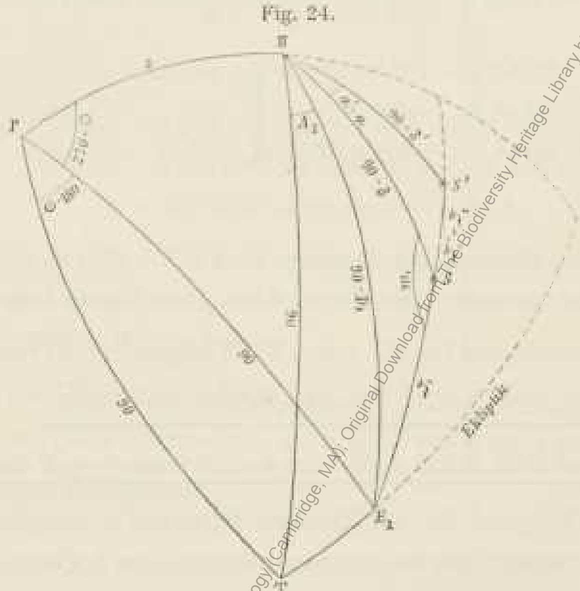
$$-0''.000466 \cos 2\,(\odot-\alpha)\,tg\,\delta.$$

Erst bei $\delta = 87^\circ.3$ erreicht dieses Glied den Betrag von $0''.01$.

Analoge Formeln für die jährliche Parallaxe in α und δ.

Wir entwerfen jetzt die Zeichnung (Fig. 24) ganz ähnlich zu Fig. 13, nur ist hier statt des früheren Punktes E an der Sphäre der Punkt E_1 mit der Länge $\odot-180$ einzuführen. Der größte Kreis, in welchem

Fig. 24.



die jährliche Parallaxe zum Ausdruck gelangt, ist E_1SS' und $SS' = \vartheta_1'-\vartheta_1$ die parallaktische Verschiebung. Wir haben nun aus $\Delta\Pi SS'$:

$$\sin(\vartheta_1'-\vartheta_1)\sin(180-w_1) = \sin(\alpha'-\alpha)\sin(90-\delta')$$
$$\sin(\vartheta_1'-\vartheta_1)\cos(180-w_1) = \sin(90-\delta)\cos(90-\delta')-\cos(90-\delta)\sin(90-\delta')\cos(\alpha'-\alpha)$$

somit

$$\left.\begin{aligned}\sin(\vartheta_1'-\vartheta_1)\sin w_1 &= \sin(\alpha'-\alpha)\cos\delta'\\ -\sin(\vartheta_1'-\vartheta_1)\cos w_1 &= \cos\delta\sin\delta'-\sin\delta\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha)\end{aligned}\right\}$$

und in ausreichender Näherung wegen der fast verschwindenden Kleinheit der Fixsternparallaxen:

$$\left.\begin{aligned}(\vartheta_1'-\vartheta_1)\sin w_1 &= (\alpha'-\alpha)\cos\delta'\\ -(\vartheta_1'-\vartheta_1)\cos w_1 &= \delta'-\delta\end{aligned}\right\}$$

Nun war aber

$$\vartheta_1'-\vartheta_1 = pR\sin\vartheta_1'$$

folglich, wenn man noch hierin für $\vartheta_1'\ldots\vartheta_1$ und für $\delta'\ldots\delta$ setzt:

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha &= pR\sin\vartheta_1\sin w_1\sec\delta\\ \delta'-\delta &= -pR\sin\vartheta_1\cos w_1\end{aligned}\right\}$$

Heißen weiter die Rektaszension und Deklination des Punktes $E_1\ldots A_1$ und D_1, so ist aus $\Delta\Pi SE_1$

$$\sin\vartheta_1\sin w_1 = \sin(\alpha-A_1)\sin(90-D_1)$$
$$\sin\vartheta_1\cos w_1 = \sin(90-\delta)\cos(90-D_1)-\cos(90-\delta)\sin(90-D_1)\cos(\alpha-A_1)$$

oder

$$\begin{aligned} \sin\vartheta_1 \sin w_1 &= \sin\alpha\cos A_1\cos D_1 - \cos\alpha\sin A_1\cos D_1 \\ \sin\vartheta_1\cos w_1 &= \cos\delta\sin D_1 - \sin\delta\cos D_1\cos\alpha\cos A_1 - \sin\delta\cos D_1\sin\alpha\sin A_1. \end{aligned}$$

Da ferner die Länge des Ortes $E_1 \ldots \odot - 180$ und der Winkel $\Upsilon P\Pi = 90$ ist, so folgt

$$\sphericalangle \Pi P E_1 = 90 - (\odot - 180) = 270 - \odot.$$

Anderseits ist der $\sphericalangle P\Pi E_1 = 90 + A_1$, weshalb sich aus $\Delta \Pi P E_1$ ergibt:

$$\begin{aligned} \cos(90 - D_1) &= \cos\varepsilon\cos 90 + \sin\varepsilon\sin 90\cos(270 - \odot) \\ \sin(90 - D_1)\sin(90 + A_1) &= \sin(270 - \odot)\sin 90 \\ \sin(90 - D_1)\cos(90 + A_1) &= \sin\varepsilon\cos 90 - \cos\varepsilon\sin 90\cos(270 - \odot) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \sin D_1 &= -\sin\varepsilon\sin\odot \\ \cos D_1\cos A_1 &= -\cos\odot \\ \cos D_1\sin A_1 &= -\cos\varepsilon\sin\odot \end{aligned}$$

Dies substituiert, folgt:

$$\begin{aligned} \sin\vartheta_1\sin w_1 &= -\sin\alpha\cos\odot + \cos\alpha\cos\varepsilon\sin\odot \\ \sin\vartheta_1\cos w_1 &= -\cos\delta\sin\varepsilon\sin\odot + \sin\delta\cos\alpha\cos\odot + \sin\delta\sin\alpha\cos\varepsilon\sin\odot \end{aligned}$$

und wird dies in die obigen Ausdrücke für $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ eingesetzt, so resultiert:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha' - \alpha} &\underline{= -pR\sec\delta(-\sin\odot\cos\alpha\cos\varepsilon + \cos\odot\sin\alpha)} \\ \underline{\delta' - \delta} &\underline{= -pR\sin\odot(\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon) - pR\cos\odot\cos\alpha\sin\delta.} \end{aligned}$$

Wir sehen, daß diese Formeln für die jährliche Parallaxe in jene für die jährliche Aberration (17, beziehungsweise 18 und 19, letztere mit Weglassung der Glieder 2. Ordnung) übergehen, wenn wir für $pR \ldots k$ und für $\odot \ldots \odot - 90$ setzen, also eine Verschiebung um einen Quadranten vornehmen.

Tafeln der jährlichen Aberration.

In Schumacher's Sammlung von Hilfstafeln (1822), neu herausgegeben und vermehrt 1845 von Warnstorff, finden sich auf Seite 110 und 111 zwei Tafeln für Aberration, berechnet von Nicolai nach Gauss' Vorschlage (Monatliche Korrespondenz, Bd. XVII, S. 312). Die erste hat als Argument die Länge der Sonne, die zweite die Summe und den Unterschied der Sonnenlänge und der Deklination des Sternes.

Sie gründen sich auf die Hilfsgleichungen:

$$\begin{aligned} k\sin\odot &= a\sin(\odot + A) \\ k\cos\odot\cos\varepsilon &= a\cos(\odot + A) \end{aligned}$$

Führt man nämlich diese in die Formeln (17) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -a\sec\delta\cos(\odot + A - \alpha) \\ \delta' - \delta &= -k\cos\odot\cos\delta\sin\varepsilon - a\sin\delta\sin(\odot + A - \alpha) \end{aligned}$$

oder, da

$$\cos\odot\cos\delta = \frac{1}{2}[\cos(\odot + \delta) + \cos(\odot - \delta)]$$

ist:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -a\sec\delta\cos(\odot + A - \alpha) \\ \delta' - \delta &= -\frac{k}{2}\sin\varepsilon\cos(\odot + \delta) - \frac{k}{2}\sin\varepsilon\cos(\odot - \delta) - a\sin\delta\sin(\odot + A - \alpha). \end{aligned}$$

Die erste Tafel gibt nun mit dem Argumente $\odot$ die Hilfsgrößen log a und A, die zweite mit den Argumenten $\odot+\delta$ und $\odot-\delta$ das erste und zweite Glied in $\delta'-\delta$, wobei $k = 20''\!.4451$ und $\varepsilon = 23° 27' 30''$ für 1850 genommen ist.

Eine andere Transformation der Aberrationsformeln in $\alpha'-\alpha$ und $\delta'-\delta$, und zwar der Glieder 1. und 2. Ordnung, basiert auf den Hilfsgrößen h, H und i, welche in den astronomischen Jahrbüchern zur Berechnung des scheinbaren Ortes eines Sternes für jeden Tag des Jahres gegeben werden. Dieselben sind charakterisiert durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} h \cos H &= -k \sin \odot \\ h \sin H &= -k \cos \odot \cos \varepsilon \\ i &= -k \cos \odot \sin \varepsilon. \end{aligned}\right\}$$

Substituieren wir dies in (17), so erhalten wir als

Glieder 1. Ordnung in $\alpha'-\alpha$: $\sec \delta\,(h \sin H \cos \alpha + h \cos H \sin \alpha) = h \sin (H+\alpha) \sec \delta$

» » $\delta'-\delta$: $-h \sin H \sin \alpha \sin \delta + i \cos \delta + h \cos H \cos \alpha \sin \delta$

$$= h \cos (H+\alpha) \sin \delta + i \cos \delta.$$

Um die Glieder 2. Ordnung in (18) durch h, H, i auszudrücken, multiplizieren wir die erste der obigen Hilfsgleichungen mit $\cos \alpha$, die zweite mit $-\sin \alpha$, dann die erste mit $\sin \alpha$, die zweite mit $\cos \alpha$ und addieren in jedem Falle die Produkte. Wir finden so:

$$h \cos (H+\alpha) = -k \sin \odot \cos \alpha + k \cos \odot \sin \alpha \cos \varepsilon$$
$$h \sin (H+\alpha) = -k \sin \odot \sin \alpha - k \cos \odot \cos \alpha \cos \varepsilon$$

und diese Ausdrücke miteinander multipliziert:

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{2} \sin 2(H+\alpha) = {} & k^2 (\sin^2 \odot \sin \alpha \cos \alpha - \sin \odot \cos \odot \sin^2 \alpha \cos \varepsilon + \\ & + \sin \odot \cos \odot \cos^2 \alpha \cos \varepsilon - \cos^2 \odot \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \varepsilon) \\ = {} & k^2 \left(\sin^2 \odot \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \sin \odot \cos \odot \cos \varepsilon \cos 2\alpha - \cos^2 \odot \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos^2 \varepsilon\right) \\ = {} & k^2 \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2\odot) \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \sin 2\odot \cos \varepsilon \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(1+\cos 2\odot) \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos^2 \varepsilon\right] \\ = {} & \frac{k^2}{4} \left\{ \sin 2\alpha\,[1-\cos 2\odot-(1+\cos 2\odot) \cos^2 \varepsilon] + 2 \sin 2\odot \cos \varepsilon \cos 2\alpha \right\} \end{aligned}$$

somit

$$\frac{h^2}{2} \sin 2(H+\alpha) = \frac{k^2}{4} [\sin 2\alpha \sin^2 \varepsilon - \sin 2\alpha \cos 2\odot\,(1+\cos^2 \varepsilon) + 2 \cos 2\alpha \sin 2\odot \cos \varepsilon].$$

Demgemäß lauten die

Glieder 2. Ordnung in $\alpha'-\alpha$: $\dfrac{h^2}{2} \sin 1'' \sin 2(H+\alpha) \sec^2 \delta$.

Um die Glieder 2. Ordnung in $\delta'-\delta$ (Formel 19) zu erhalten, bilden wir:

$$h^2 \sin^2 (H+\alpha) = k^2 (\sin \odot \sin \alpha + \cos \odot \cos \alpha \cos \varepsilon)^2 = k^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 w,$$

somit:

Glieder 2. Ordnung in $\delta'-\delta$: $-\dfrac{h^2}{2} \sin 1'' \sin^2 (H+\alpha)\, tg \delta$.

Die Formeln (18) und (19) lauten daher vollständig in h, H und i:

$$\left.\begin{aligned} \alpha'-\alpha &= h\sin(H+\alpha)\sec\delta+\frac{h^2}{2}\sin 1''\sin 2(H+\alpha)\sec^2\delta \\ \delta'-\delta &= h\cos(H+\alpha)\sin\delta+i\cos\delta-\frac{h^2}{2}\sin 1''\sin^2(H+\alpha)\,tg\,\delta. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Ermittlung der Aberrationskonstante k aus Beobachtungen.

1. Aus Rektaszensionsbeobachtungen. — Die Rektaszensionsbeobachtungen eines dem Pole nahen Sternes eignen sich besonders zur Ermittlung der Größe k, da für einen solchen Stern $\sec\delta$, der Faktor von k im Hauptgliede der Aberrationsformel, möglichst groß wird. Da die Aberrationserscheinung eine Periode von einem Jahre hat, müssen die Beobachtungen über ein ganzes Jahr ausgedehnt werden und namentlich über jene Zeiten des Jahres, wo für den ins Auge gefaßten Stern die Aberration ein Maximum oder Minimum wird. Es heiße:

α die angenommene mittlere Rektaszension am Beobachtungstage + Nutation + Eigenbewegung,[1]

α' die beobachtete Rektaszension des Sternes (befreit von Refraktion),

$\Delta\alpha$ die Korrektion der angenommenen mittleren Rektaszension,

Δk die Korrektion der angenommenen Aberrationskonstante.

Dann ist

$$\alpha'=\alpha+\Delta\alpha-(k+\Delta k)(\cos\odot\cos\alpha\cos\varepsilon+\sin\odot\sin\alpha)+F_1(k^2),$$

wobei $F_1(k^2)$ die Glieder 2. Ordnung darstellt. Letztere können zufolge ihrer Kleinheit genau genug mit dem genäherten k berechnet und zu α hinzugeschlagen gedacht werden, so daß weiter von diesen abgesehen werden soll. Setzt man

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= m\sin M \\ \cos\alpha\cos\varepsilon &= m\cos M \end{aligned}\right\}$$

so wird

$$\alpha'=\alpha+\Delta\alpha-(k+\Delta k)\,m\cos(\odot-M)\sec\delta$$

und für

$$\left.\begin{aligned} a &= -m\cos(\odot-M)\sec\delta \\ n &= \alpha-\alpha'+ak \end{aligned}\right\}$$

folgt:

$$\underline{0=n+\Delta\alpha+a\Delta k}$$

als Bedingungsgleichung. Jede Beobachtung im Laufe des Jahres von demselben Sterne gibt eine solche Gleichung. Aus allen diesen Gleichungen wird dann nach der Methode der kleinsten Quadrate der wahrscheinlichste Wert von Δk und $\Delta\alpha$ abgeleitet. Solche Beobachtungen zur Ermittlung von Δk werden aber am zweckmäßigsten um jene Zeit herum angestellt, wo der Koeffizient von Δk seinen größten numerischen

[1] Bekanntlich sind folgende Bezeichnungsweisen im Gebrauch:

Beobachtung — Refraktion und Parallaxe gibt den scheinbaren Ort,

Scheinbarer Ort — Aberration gibt den wahren Ort,

Wahrer Ort — Nutation gibt den mittleren Ort des Beobachtungstages,

Mittlerer Ort des Tages — Präzession und Eigenbewegung gibt den mittleren Ort für den Jahresanfang.

Wert nach der positiven oder negativen Seite hat. Dies ist der Fall für $\cos(\odot - M) = \mp 1$, woraus $\odot_1 = 180 + M$ und $\odot_2 = M$ folgt. M ergibt sich aus den obigen Hilfsgleichungen und hängt wesentlich von der Rektaszension α des Sternes ab. Man wird also die Beobachtungen hauptsächlich in den zwei entgegengesetzten Erdbahnorten mit $\odot = M$ und $\odot = 180 + M$ anzustellen haben.

2. Aus Deklinationsbeobachtungen. — Es heiße:

δ die angenommene mittlere Deklination am Beobachtungstage + Nutation + Eigenbewegung,
δ' die beobachtete Deklination des Sternes (befreit von Refraktion),
$\Delta\delta$ die Korrektion der angenommenen mittleren Deklination,
Δk die Korrektion der angenommenen Aberrationskonstante.

Dann ist

$$\delta' = \delta + \Delta\delta + (k + \Delta k)\left[\cos\odot\,(\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon) - \sin\odot\cos\alpha\sin\delta\right] + F_2(k^2).$$

Wieder berechnet man die Glieder 2. Ordnung $F_2(k^2)$, wo diese in Betracht kommen, mit dem Näherungswerte von k und fügt sie zu δ hinzu. Weiter setzt man:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha\sin\delta &= m'\sin M' \\ -\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon + \cos\delta\sin\varepsilon &= m'\cos M'. \end{aligned}\right\}$$

Dies substituiert, ergibt:

$$\delta' = \delta + \Delta\delta - (k + \Delta k)\, m'\cos(\odot - M').$$

Heißt ferner

$$\left.\begin{aligned} a' &= -m'\cos(\odot - M') \\ n' &= \delta - \delta' + a'k, \end{aligned}\right\}$$

so resultiert jetzt:

$$\underline{0 = n' + \Delta\delta + a'\Delta k}$$

als Bedingungsgleichung. Aus einer größeren Anzahl solcher Gleichungen wird wieder der wahrscheinlichste Wert von Δk und $\Delta\delta$ bestimmt. Zur möglichst genauen Ermittlung von Δk muß abermals der Koeffizient dieser Größe, d. i. a', möglichst groß, also $\cos(\odot - M') = \mp 1$ sein, was für $\odot_1 = 180 + M'$ und $\odot_2 = M'$ stattfindet. In diesen Punkten der Erdbahn hat also die Deklinationsbestimmung vornehmlich zu geschehen.

Strenge ist noch in beiden Fällen die Parallaxe des Sternes, welche gleichfalls eine jährliche Periode hat, einzuführen, falls eine solche als vorhanden angenommen werden kann. Bei unserem Polarstern beispielsweise muß sie berücksichtigt werden. Es war

jährliche Parallaxe in Rektaszension: $-pR\sec\delta\,(-\sin\odot\cos\alpha\cos\varepsilon + \cos\odot\sin\alpha) =$
$= pRm\sin(\odot - M)\sec\delta$

» » » Deklination: $-pR\,[\sin\odot\,(\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon) + \cos\odot\cos\alpha\sin\delta] =$
$= pRm'\sin(\odot - M')$,

und nennt man

$$\left.\begin{aligned} b &= Rm\sin(\odot - M)\sec\delta \\ b' &= Rm'\sin(\odot - M'), \end{aligned}\right\}$$

so lauten jetzt die vervollständigten Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{0 = n + \Delta\alpha + a\Delta k + bp} \\ &\underline{0 = n' + \Delta\delta + a'\Delta k + b'p} \end{aligned}\right\}$$

deren Lösung $\Delta k, p, \Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ gibt.

Es sei hier nur die numerische Bestimmung der Aberrationskonstante durch W. Struve in den Jahren 1840, 1841 und 1842 zu Pulkowa angeführt. Dieselbe findet sich im »Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Acad. Imp. des sciences de St. Pétersbourg« Tome I, No. 17 und im 27. Bande der »Astronomischen Nachrichten« S. 58. Von Struve wurden bloß Deklinationen von sieben ausgewählten Sternen mit dem Pulkowaer Repsold'schen Passageninstrumente im ersten Vertikale gemessen; die daraus sich ergebenden Resultate lauten mit ihren wahrscheinlichen Fehlern:

	k
v Ursae majoris .	$20''4571 \pm 0''0303$
ι Draconis	4792 ± 0224
δ Cassiopeiae . .	4559 ± 0462
o Draconis	4039 ± 0229
b Draconis	5036 ± 0322
P XIX.371	3947 ± 0333
β Cassiopeiae . .	4227 ± 0352,

woraus als wahrscheinlichster Wert

$$k = 20''4451 \pm 0''0111$$

hervorgeht. Vor Struve wurde der Delambre'sche Wert $k = 20''255$ angewendet. Trotzdem Struve seine Aberrationskonstante für eine der genauest bestimmten astronomischen Konstanten ansah und diese bis vor kurzem allgemein in Gebrauch stand, haben doch verschiedene neuere Beobachtungen erkennen lassen, daß der Struve'sche Wert etwas zu vergrößern sei. Das Berliner astronomische Jahrbuch und der Greenwicher Nautical Almanac benützen gegenwärtig den Wert $k = 20''47$ zufolge der Beschlüsse der Pariser internationalen Konferenz vom Mai 1896 (Conférence internationale des étoiles fondamentales. Proeès-Verbaux, Paris 1896).[1]

III. Die tägliche Aberration der Fixsterne.

1. Tägliche Aberration in Rektaszension und Deklination.

Bei Betrachtung der täglichen Aberration bringen wir die Geschwindigkeit des Lichtes in Beziehung zur Geschwindigkeit des Beobachtungsortes insoferne, als dieser täglich eine Rotation um die Erdaxe ausführt.

Zunächst fassen wir einen Ort B' (Fig. 25) am Erdäquator ins Auge, dessen Bewegung um den Erdmittelpunkt C wir ebenso behandeln, wie früher die Bewegung des Erdmittelpunktes um den Sonnenmittelpunkt. Jetzt geht aber die Bewegung im Äquator vor sich, während sie vordem in der Ekliptik stattfand.

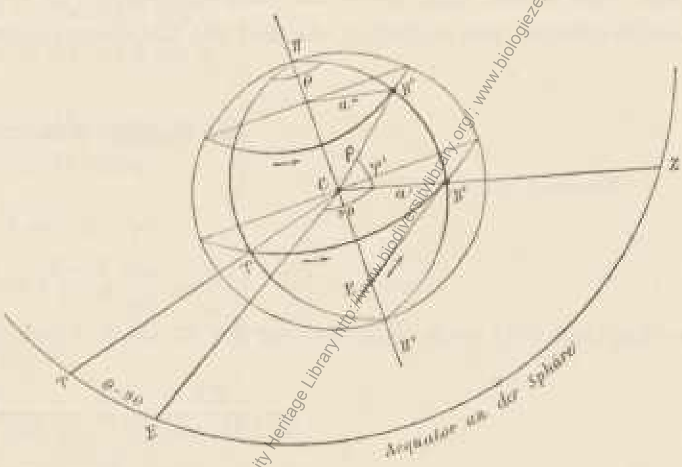
Der Punkt B' scheint bei seiner Rotation vom Punkte E im Raume zu kommen, wobei $B'E$ tangierend zur Peripherie des Äquators, also senkrecht zur geozentrischen Zenitlinie CZ des Ortes B' ist. Verzeichnen wir den Frühlingsnachtgleichenpunkt in Υ, so ist der Winkel zwischen dem Meridiane des Ortes und dem Deklinationskreise durch Υ gleich dem Stundenwinkel des Frühlingsnachtgleichenpunktes, d. i. die Sternzeit θ. Somit ist die Rektaszension von E, d. i. $\Upsilon E = \theta - 90$. Früher war die Länge des Punktes E (Antiapex) eingeführt und diese bei kreisförmiger Erdbahn gleich $\odot + 90$ gefunden worden. Wir werden deshalb unmittelbar von den dortigen Formeln für die Ekliptik hier auf den Äquator übergehen können, indem wir dort $\odot$ durch $\theta - 180$ ersetzen; denn in diesem Falle wird aus $\odot + 90 \ldots \theta - 90$. Ferner haben wir noch für v die jetzige lineare Geschwindigkeit des Punktes B', welche v' heiße, einzu-

[1] Weitere von dieser Konferenz angenommene Konstanten sind:

Sonnen-Parallaxe $= 8''80$.
Nutations-Konstante $= 9''21$.
Präzessions-Konstante $= 50''2453 + 0''0002225\, t$, worin t die Anzahl der seit 1850.0 verflossenen Jahre bezeichnet.

führen und dann einfach in den Formeln (9) für $\lambda'-\lambda\ldots\alpha'-\alpha$ und für $\beta'-\beta\ldots\delta'-\delta$ zu schreiben. Nennen wir analog zu $k=\dfrac{v}{V\sin 1''}$:

Fig. 25.



$$k'=\frac{v'}{V\sin 1''}=\frac{v'}{v}\,k,$$

so haben wir als tägliche Aberration für den Äquatorort B':

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=k'\cos(\theta-\alpha)\sec\delta\\ \delta'-\delta&=k'\sin(\theta-\alpha)\sin\delta.\end{aligned}\right\}$$

Für einen Ort B'' der Erdoberfläche in demselben Meridian $B'\Pi$ mit der geozentrischen Breite φ' und dem Abstande ρ vom Erdzentrum ist die Geschwindigkeit eine andere als am Äquator. Nennen wir dieselbe v'', die Radien der Kreise am Äquator und im Parallel a' und a'', ferner die Rotationsdauer der Erde t (= Sterntag), so ist:

$$v'=\frac{2a'\pi}{t},\quad v''=\frac{2a''\pi}{t}=\frac{2\rho\cos\varphi'.\pi}{t}=v'\,\frac{\rho}{a'}\cos\varphi'$$

somit, wenn ρ mit a' gemessen wird:

$$v''=v'\rho\cos\varphi'\quad\text{und}\quad k''=\frac{v''}{V\sin 1''}=k'\rho\cos\varphi'.$$

Daher folgt als tägliche Aberration für den Erdort B'':

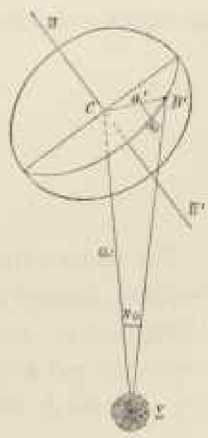
$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=k'\rho\cos\varphi'\cos(\theta-\alpha)\sec\delta\\ \delta'-\delta&=k'\rho\cos\varphi'\sin(\theta-\alpha)\sin\delta.\end{aligned}\right\}$$

Um k' zu finden, haben wir, wenn wir den Sterntag t als Zeiteinheit nehmen, wegen $v'=2a'\pi$ und $v=\dfrac{2a\pi}{\tau\sqrt{1-e^2}}$ in $k'=\dfrac{v'}{v}\,k$:

$$\frac{v'}{v}=\frac{a'}{a}\,\tau\sqrt{1-e^2}=\sin\pi_\odot\,\tau\sqrt{1-e^2},$$

worin $\pi_\odot$ die Äquatorealhorizontalparallaxe der Sonne in ihrer mittleren Entfernung von der Erde ist und durch Fig. 26 erläutert wird. Also, wenn k' als Funktion von k substituiert wird:

Fig. 26.



$$\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=k\rho\cos\varphi'\sin\pi_\odot\tau\sqrt{1-e^2}\cos(\theta-\alpha)\sec\delta\\ \delta'-\delta&=k\rho\cos\varphi'\sin\pi_\odot\tau\sqrt{1-e^2}\sin(\theta-\alpha)\sin\delta\end{aligned}$$

und, da der Faktor rechts jetzt über 60mal kleiner als bei der jährlichen Aberration ist, kann noch mit ausreichender Genauigkeit $\rho=1$ und φ' gleich der geographischen Breite (φ) des Ortes B'' gesetzt, d. h. die Erde als Kugel betrachtet werden. Nimmt man $\pi_\odot=8''\!.848$ nach Newcomb, $\tau=366\cdot25637$ nach Bessel und $e=0\cdot01677$ an, so lauten schließlich die Formeln der täglichen Aberration in Rektaszension und Deklination für einen Erdort mit der Breite φ:

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=0''\!.321\cos\varphi\cos(\theta-\alpha)\sec\delta\\ \delta'-\delta&=0''\!.321\cos\varphi\sin(\theta-\alpha)\sin\delta.\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

Dieselben sind völlig strenge, da wegen der Kleinheit des Faktors auf der rechten Seite Glieder 2. Ordnung nicht in Betracht zu ziehen sind. $\theta-\alpha$ ist der Stundenwinkel des Sternes zur Zeit der

Beobachtung. Man erkennt deshalb, daß für einen Stern im Meridiane ($\theta - \alpha = 0$ oder 180) die tägliche Aberration in Deklination verschwindet und man nur diejenige in Rektaszension zu berücksichtigen hat. Man sieht ferner, daß, wenn der Beobachtungsort im Erdpole läge ($\varphi = \pm 90$), beide Aberrationswerte verschwinden, wie natürlich, da dort die Rotationsgeschwindigkeit gleich Null zu setzen ist.

Die tägliche Aberrations-Ellipse.

Nennen wir

$$\left.\begin{aligned}(\alpha' - \alpha)\cos\delta &= \xi' \\ \delta' - \delta &= \eta',\end{aligned}\right\}$$

so folgt aus (21) nach Eliminierung der im Laufe eines Tages veränderlichen Größe θ

$$\frac{\xi'^2}{(0\cdot321\ \cos\varphi)^2} + \frac{\eta'^2}{(0\cdot321\ \cos\varphi\ \sin\delta)^2} = 1$$

als Gleichung der Sternbahn an der Sphäre. In einem Sterntage beschreibt also jeder Stern zufolge der täglichen Aberration eine kleine Ellipse, deren halbe große Axe für eine bestimmte geographische Breite konstant und gleich $0''321 \cos\varphi$, die halbe kleine Axe aber eine Funktion von δ und gleich $0''321 \cos\varphi \sin\delta$ ist. Erstere liegt senkrecht zum Deklinationskreise des Sternes, letztere in demselben. Für $\delta = 90°$, d. h. wenn der Stern im Äquatorpole steht, wird aus der Ellipse ein Kreis; für $\delta = 0$, d. h. wenn der Stern sich im Äquator befindet, geht dagegen die Ellipse in eine gerade Linie über. Die tägliche Aberrationsellipse ist, verglichen mit der jährlichen Aberrationsellipse, zufolge des Verhältnisses der halben großen Axen, d. i. von $0''321 : 20''4451$, etwa 64 mal kleiner als die letztere.

2. Tägliche Aberration in Azimut und Zenitdistanz.

Bei Beobachtungen mit dem Universalinstrumente wird zuweilen auch die tägliche Aberration im Azimute und in der Zenitdistanz gebraucht. Deshalb werde diese noch abgeleitet. Heißt das Azimut des Sternes a, die Zenitdistanz z, so kann man setzen:

$$\left.\begin{aligned} a' - a &= da = f_1(d\alpha, d\delta) \\ z' - z &= dz = f_2(d\alpha, d\delta),\end{aligned}\right\}$$

worin f_1 und f_2 Funktionszeichen sind und $d\alpha$, $d\delta$ die Werte der Formeln (21) haben. Weiter kann geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} da &= \left(\frac{da}{d\alpha}\right) d\alpha + \left(\frac{da}{d\delta}\right) d\delta \\ dz &= \left(\frac{dz}{d\alpha}\right) d\alpha + \left(\frac{dz}{d\delta}\right) d\delta.\end{aligned}\right\}$$

Die darin vorkommenden partiellen Differentialquotienten ergeben sich am einfachsten aus Fig. 27, in welcher einmal die Rektaszension des Sternes um $d\alpha$ (Verschiebung von S nach S'), das andere Mal die Deklination um $d\delta$ (Verschiebung von S nach S'') geändert gedacht wird und der Einfluß dieser Änderungen auf a und z leicht ersichtlich ist. Hier sind $d\alpha = \sphericalangle S\Pi S'$ und $d\delta = SS''$ als Zuwächse gezeichnet. Fällen wir von S' eine Senkrechte $S'M$ auf ZS, so ist dieselbe gleich $-da \sin z$ (negativ, weil da in der Figur eine Abnahme des Azimutes a darstellt); ferner ist $SM = -dz$ (ebenfalls negativ, weil beim Übergange von S nach S' die Zenitdistanz abnimmt). Fällen wir dagegen von S'' die Senkrechte $S''N$ auf ZS, so ist diese gleich $+ da \sin z$ und $SN = -dz$. Anderseits ist $SS' = + d\alpha \cos\delta$.

Nennen wir noch den Winkel am Sterne zwischen Vertikal- und Deklinationskreis, d. i. $\sphericalangle ZS\Pi = q$ und betrachten die kleinen Dreiecke $SS'M$ und $SS''N$ als eben und geradlinig, so folgt aus dem ersten:

$$-da \sin z = d\alpha \cos\delta \cos q$$
$$-dz = d\alpha \cos\delta \sin q,$$

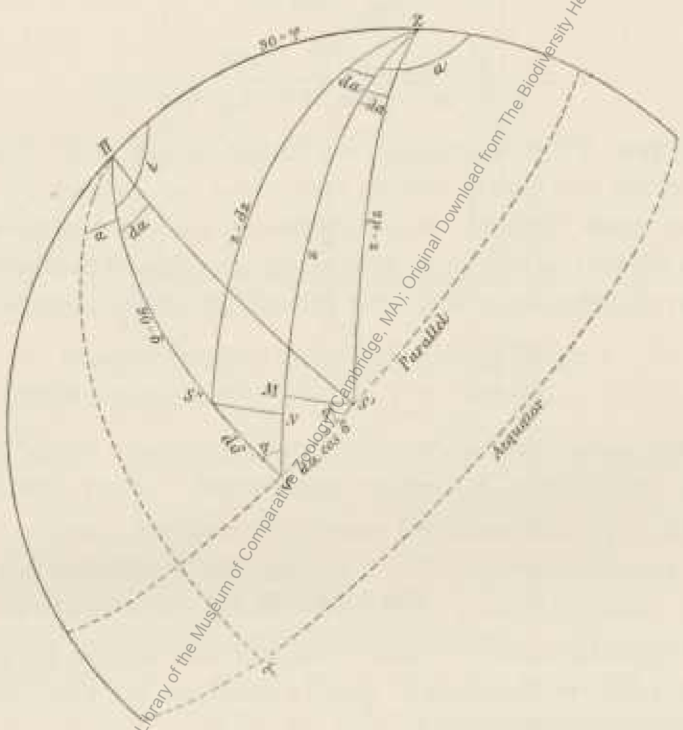
aus dem zweiten:

$$da \sin z = d\delta \sin q$$
$$-dz = d\delta \cos q.$$

Somit erhalten wir:

$$\frac{da}{d\alpha} = -\frac{\cos\delta\cos q}{\sin z},\quad \frac{dz}{d\alpha} = -\cos\delta\sin q,\quad \frac{da}{d\delta} = \frac{\sin q}{\sin z},\quad \frac{dz}{d\delta} = -\cos q.$$

Fig. 27.



Dies substituiert und $0''321 \cos\varphi = m$, sowie $\theta - \alpha = t$ gesetzt, resultiert:

$$da = -\frac{\cos\delta\cos q}{\sin z} m \cos t \sec\delta + \frac{\sin q}{\sin z} m \sin t \sin\delta$$
$$= \frac{m}{\sin z}(-\cos q \cos t + \sin q \sin t \sin\delta);$$

aber aus $\Delta ZS\Pi$ ist:

$$\cos(180-a) = -\cos q \cos t + \sin q \sin t \cos(90-\delta) = -\cos a,$$

daher

$$da = -\frac{m}{\sin z}\cos a.$$

Ferner

$$dz = -\cos\delta \sin q . m \cos t \sec\delta - \cos q . m \sin t \sin\delta$$
$$= -m(\sin q \cos t + \cos q \sin t \sin\delta);$$

aber es folgt gleichfalls aus $\Delta ZS\Pi$

$$\sin(180-a)\cos z = \sin q \cos t + \cos q \sin t \sin \delta = \sin a \cos z,$$

daher

$$dz = -m \sin a \cos z.$$

Somit

$$\begin{array}{l} a'-a = -0''.321 \cos\varphi \cos a \operatorname{cosec} z \\ z'-z = -0''.321 \cos\varphi \sin a \cos z. \end{array} \qquad (22)$$

Im Meridiane ist $a = 0$ oder 180, und die tägliche Aberration in Zenitdistanz verschwindet ebenso, wie diejenige in Deklination. Dagegen ist die Aberration im Azimut in ihrem Maximum, beziehungsweise Minimum.

Die Geschwindigkeit des Lichtes.

Aus

$$k' = \frac{v'}{V \sin 1''}$$

folgt

$$V = \frac{v'}{k' \sin 1''} = \frac{2a'\pi}{k \sin 1'' \sin \pi_{\odot}\, \tau \sqrt{1-e^2}},$$

wenn die Lichtgeschwindigkeit V für den Sterntag als Einheit gesucht wird. Will man aber dieselbe für eine Sternzeitsekunde oder für eine mittlere Zeitsekunde haben, so ist rechts noch durch die Anzahl der Zeitsekunden, welche auf einen Sterntag, beziehungsweise auf einen mittleren Tag gehen, d. i. durch 86400^s, beziehungsweise $86164^s.1$ zu dividieren. Führen wir also die aus Beobachtungen durch mindestens ein Jahr gewonnene Aberrationskonstante k ein und nehmen die obigen numerischen Werte, so folgt:

$V = 297853$ Kilometer in 1 Sternzeitsekunde
$V = 298668$ » » 1 mittleren Zeitsekunde.

Mit dem letzteren, aus astronomischen Beobachtungen erhaltenen Werte[1] stimmen die experimentell ermittelten von Fizeau (315000 *km*), Foucault (298000 *km*), Cornu (300400 *km*) und Michelsen (299944 *km*) gut überein.

Die Lichtzeit.

Man bezeichnet vornehmlich mit »Lichtzeit« diejenige Zeit, welche das Licht braucht, um von der Sonne zur Erde in deren mittlerer Entfernung ($= a$) zu gelangen. Dieselbe heiße Z; sie ist gleich dem Wege, dividiert durch die Geschwindigkeit, also

$$Z = \frac{a}{V} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{k \sin 1'' \sin \pi_{\odot}\, \tau \sqrt{1-e^2}}{2\pi},$$

daher wegen $\sin \pi_{\odot} = \dfrac{a'}{a}$ und, wenn statt des Sterntages die mittlere Zeitsekunde als Einheit angenommen wird:

$$Z = \frac{86164^s.1\, k \sin 1'' \tau \sqrt{1-e^2}}{2\pi} = 8^m\, 17^s.78.\ ^2$$

Das Licht der Sonne braucht also zu seiner Reise bis zur Erde 8·3 Zeitminuten. Würde somit in einem bestimmten Augenblicke das Licht der Sonne durch irgendeine Katastrophe verlöscht, so würden wir die Sonne noch 8·3 Minuten leuchten sehen und erst hierauf von dieser Katastrophe Kenntnis erhalten.

[1] Derselbe wird für die von der internationalen Pariser Konferenz 1896 angenommenen Größen $k = 20''.47$ und $\pi_{\odot} = 8''.80$ unter Beibehaltung der übrigen Daten gleich 299932 Kilometer.

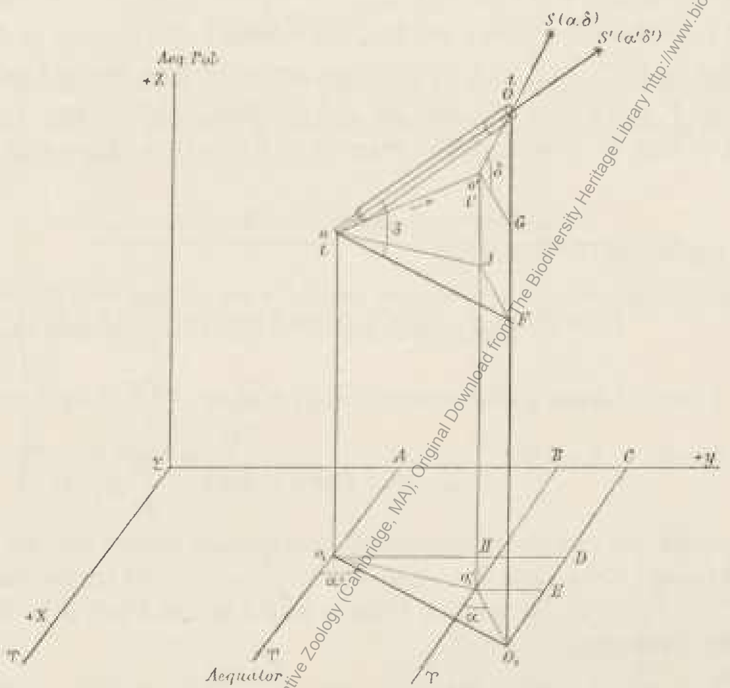
[2] Für $k = 20''.47$ würde folgen: $Z = 8^m 18^s.38$.

IV. Ableitung der jährlichen und täglichen Aberration nach Bessel.

Diese Ableitung legt orthogonale Koordinaten der Betrachtung zu Grunde, während wir bislang Polarkoordinaten verwendeten, und findet sich ihrem Wesen nach in den »Abhandlungen von Friedrich Wilhelm Bessel«, herausgegeben von R. Engelmann. Bd. I, Abh. 40, 44 und 45.

In Fig. 28 liegt der Koordinatenanfangspunkt im Sonnenmittelpunkte Σ. Die positive z-Axe weist nach dem Nordpol des Äquators, die positive x-Axe nach dem Frühlingsnachtgleichenpunkte ♈ und die

Fig. 28.



positive y-Axe nach einem Punkte des Äquators, dessen Rektaszension gleich 90° ist. O sei das Objektiv des Fernrohrs, o das Okular desselben (oder genauer der Fadenkreuzungspunkt im Objektiv-Fokus) zur Zeit t. o' wäre der Ort des Okulares zur Zeit t'; dabei sei $t'-t$ diejenige Zeit, in welcher das Licht die Strecke Oo' zurücklegt. oo' stellt also die Bewegung des Beobachtungsortes dar und besteht aus zwei Teilen, aus der Bewegung desselben um die Sonne und aus seiner Rotationsbewegung um eine zur z-Axe parallele Richtung. Die erstere liegt in der Ekliptik und führt zur jährlichen Aberration, die zweite geht parallel zum Äquator vor sich und gibt die tägliche Aberration. Oo ist die Richtung nach dem scheinbaren Orte des Sternes S' $(\alpha'\delta')$, Oo' die Richtung nach dem wahren Sternorte S $(\alpha\delta)$.

Nennen wir die rechtwinkeligen Koordinaten des Okulares o zur Zeit $t\ldots xyz$, des Okularortes o' zur Zeit $t'\ldots x'y'z'$, ferner die Koordinaten des Objektives O in Bezug auf $o\ldots\xi\eta\zeta$, in Bezug auf $o'\ldots\xi'\eta'\zeta'$, so ist nach der Zeichnung für:

o bez. Σ	o' bez. Σ	
$x = o_1A = CD$	$x' = o'_1B = CE$	$x' - x = DE$
$y = \Sigma A$	$y' = \Sigma B$	$y' - y = AB$
$z = oo_1 = O_1F$	$z' = o'o'_1 = O_1G$	$z' - z = GF$
O bez. o	**O bez. o'**	
$\xi = O_1D$	$\xi' = O_1E$	$\xi - \xi' = DE$
$\eta = o_1D = AC$	$\eta' = o'_1E = BC$	$\eta - \eta' = AB$
$\zeta = OF$	$\zeta' = OG$	$\zeta - \zeta' = GF,$

somit, wenn die Geschwindigkeitskomponenten der Bewegung oo' mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ bezeichnet werden,

$$\left.\begin{aligned}\xi-\xi' &= x'-x = \Delta x = \frac{dx}{dt}(t'-t)\\ \eta-\eta' &= y'-y = \Delta y = \frac{dy}{dt}(t'-t)\\ \zeta-\zeta' &= z'-z = \Delta z = \frac{dz}{dt}(t'-t).\end{aligned}\right\}$$

Ferner heiße die Länge des Fernrohrs l, die Geschwindigkeit des Lichtes in der Richtung Oo' wieder V, so ist $Oo = l$ und $Oo' = V(t'-t)$. Um ξ zu erhalten, projiziert man zuerst l auf den Äquator und dann diese Projektion ($= l\cos\delta' = oF = o_1 O_1$) auf die x-Axe. Man erhält dann: $\xi = l\cos\delta'\cos\alpha'$, analog $\eta = l\cos\delta'\sin\alpha'$ und $\zeta = l\sin\delta'$. Ebenso findet man: $\xi' = V(t'-t)\cos\delta\cos\alpha$, $\eta' = V(t'-t)\cos\delta\sin\alpha$ und $\zeta' = V(t'-t)\sin\delta$.

Dies substituiert, ergibt die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}l\cos\delta'\cos\alpha' - V(t'-t)\cos\delta\cos\alpha &= \frac{dx}{dt}(t'-t)\\ l\cos\delta'\sin\alpha' - V(t'-t)\cos\delta\sin\alpha &= \frac{dy}{dt}(t'-t)\\ l\sin\delta' - V(t'-t)\sin\delta &= \frac{dz}{dt}(t'-t).\end{aligned}\right\}$$

Dividiert man auf beiden Seiten mit $t'-t$ und setzt $\frac{l}{t'-t} = L$, so lauten die Grundgleichungen der Aberration bezüglich des Äquators:

$$\left.\begin{aligned}L\cos\delta'\cos\alpha' &= V\cos\delta\cos\alpha + \frac{dx}{dt}\\ L\cos\delta'\sin\alpha' &= V\cos\delta\sin\alpha + \frac{dy}{dt}\\ L\sin\delta' &= V\sin\delta \qquad\quad + \frac{dz}{dt}\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&\cos\alpha \quad -\sin\alpha & (1)\\ &\sin\alpha \qquad \cos\alpha & (2)\\ && (3)\end{aligned}$$

Multipliziert man mit den rechts stehenden Faktoren und addiert, so gibt (1). cos α+2). sin α:

$$L\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha) = V\cos\delta + \frac{dx}{dt}\cos\alpha + \frac{dy}{dt}\sin\alpha \tag{4}$$

und — (1). sin α + (2). cos α:

$$L\cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha) = \qquad -\frac{dx}{dt}\sin\alpha + \frac{dy}{dt}\cos\alpha. \tag{5}$$

Setzen wir weiter abkürzend

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}\cos\alpha + \frac{dy}{dt}\sin\alpha &= M\\ -\frac{dx}{dt}\sin\alpha + \frac{dy}{dt}\cos\alpha &= N\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

so ist auch

$$\left.\begin{aligned} L\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha) &= V\cos\delta + M \\ L\cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha) &= N, \end{aligned}\right\}$$

somit

$$tg\,(\alpha'-\alpha) = \frac{N}{V\cos\delta + M}$$

oder, wenn wir im Nenner $V\cos\delta$ herausheben und die sehr kleine Größe $\frac{1}{V}$ mit C bezeichnen:

$$tg\,(\alpha'-\alpha) = C\sec\delta\,\frac{N}{1+CM\sec\delta} = CN\sec\delta\,(1+CM\sec\delta)^{-1}.$$

Entwickeln wir rechts den Ausdruck in der Klammer in eine Reihe und führen die angezeigte Multiplikation aus, indem wir nur bis inklusive Glieder von Kleinheit 2. Ordnung, d. i. mit C^2, gehen, ferner auch links in gleicher Weise verfahren, so folgt:

$$\underline{(\alpha'-\alpha)\sin 1'' = CN\sec\delta - C^2MN\sec^2\delta.} \tag{7}$$

Um auch die Formel in Deklination zu erhalten, verwenden wir die Gleichungen (4) und (3), erstere, indem wir mit $\cos(\alpha'-\alpha)$ beiderseits dividieren. Wir haben dann:

$$\begin{aligned} L\cos\delta' &= V\cos\delta\sec(\alpha'-\alpha) + M\sec(\alpha'-\alpha) & \cos\delta \quad & -\sin\delta \\ L\sin\delta' &= V\sin\delta + \frac{dz}{dt} & \sin\delta \quad & \cos\delta. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir mit den rechts angesetzten Größen und addieren wir, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} L\cos(\delta'-\delta) &= V\cos^2\delta\sec(\alpha'-\alpha) + V\sin^2\delta + M\sec(\alpha'-\alpha)\cos\delta + \frac{dz}{dt}\sin\delta \\ L\sin(\delta'-\delta) &= V\sin\delta\cos\delta\,[1-\sec(\alpha'-\alpha)] - M\sec(\alpha'-\alpha)\sin\delta + \frac{dz}{dt}\cos\delta, \end{aligned}\right\}$$

also, wenn wir die zweite Gleichung durch die erste und dann noch Zähler und Nenner mit V dividieren, ferner $\frac{1}{V} = C$ setzen:

$$tg(\delta'-\delta) = \frac{\sin\delta\cos\delta\,[1-\sec(\alpha'-\alpha)] - CM\sec(\alpha'-\alpha)\sin\delta + C\frac{dz}{dt}\sin\delta}{\cos^2\delta\sec(\alpha'-\alpha) + \sin^2\delta + CM\sec(\alpha'-\alpha)\cos\delta + C\frac{dz}{dt}\cos\delta}.$$

Nun ist

$$\cos(\alpha'-\alpha) = 1 - \frac{(\alpha'-\alpha)^2\sin^2 1''}{2}$$

und wegen (7):

$$\cos(\alpha'-\alpha) = 1 - \frac{1}{2}C^2N^2\sec^2\delta$$

bis inkl. Gl. 2. Ordg.

daher

$$\sec(\alpha'-\alpha) = 1 + \frac{1}{2}C^2N^2\sec^2\delta$$

und

$$1-\sec(\alpha'-\alpha) = -\frac{1}{2}C^2N^2\sec^2\delta.$$

Dies substituiert, gibt bis inklusive Glieder von Kleinheit 2. Ordnung:

$$tg(\delta'-\delta) = \frac{-\frac{1}{2}\,C^2N^2tg\delta - CM\sin\delta + C\frac{dz}{dl}\cos\delta}{1+\frac{1}{2}\,C^2N^2 + CM\cos\delta + C\frac{dz}{dt}\sin\delta}$$

oder

$$tg\,(\delta'-\delta) = \left[C\left(-M\sin\delta + \frac{dz}{dt}\cos\delta\right) - C^2\frac{1}{2}N^2tg\delta\right]\left[1 + C\left(M\cos\delta + \frac{dz}{dt}\sin\delta\right) + C^2\frac{1}{2}N^2\right]^{-1}$$

und rechts und links nur bis inklusive Glieder 2. Ordnung entwickelt:

$$\underline{(\delta'-\delta)\sin 1'' = C\left(-M\sin\delta + \frac{dz}{dt}\cos\delta\right) -}$$

$$\underline{-\frac{1}{2}\,C^2N^2tg\delta - C^2\left(-M\sin\delta + \frac{dz}{dt}\cos\delta\right)\left(M\cos\delta + \frac{dz}{dt}\sin\delta\right).}$$

Um die Geschwindigkeitskomponenten des Beobachtungsortes zu erhalten, verfahren wir folgend. In Fig. 29 sei B der Beobachtungsort (Ort des Okulares o). Seine äquatorealen Koordinaten setzen

Fig. 29.

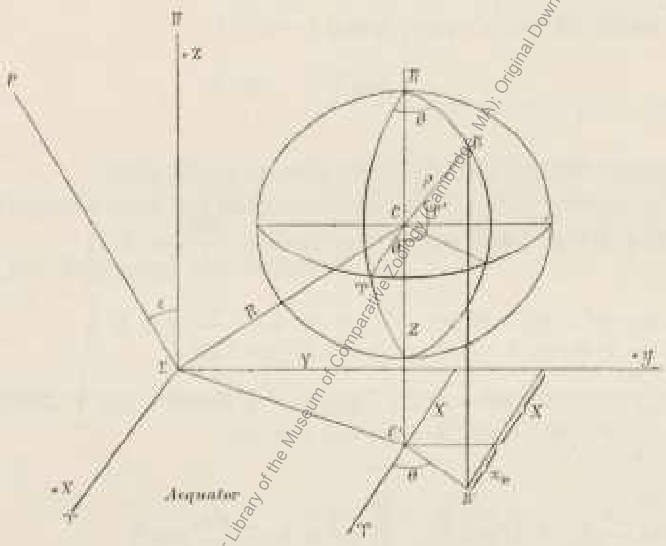
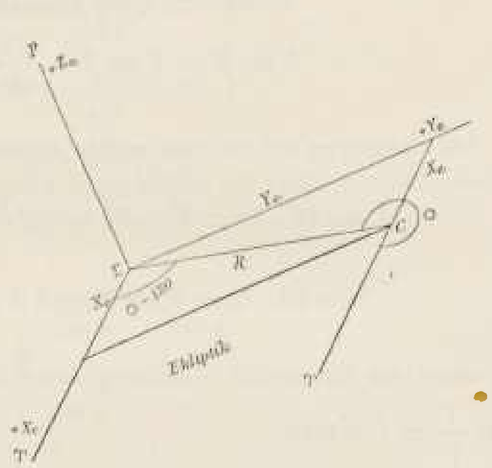


Fig. 30.



sich zusammen aus den Koordinaten von B in Bezug auf das Erdzentrum $C\,(x_0y_0z_0)$ und den Koordinaten des Erdzentrums C in Bezug auf die Sonne Σ (XYZ). Somit ist:

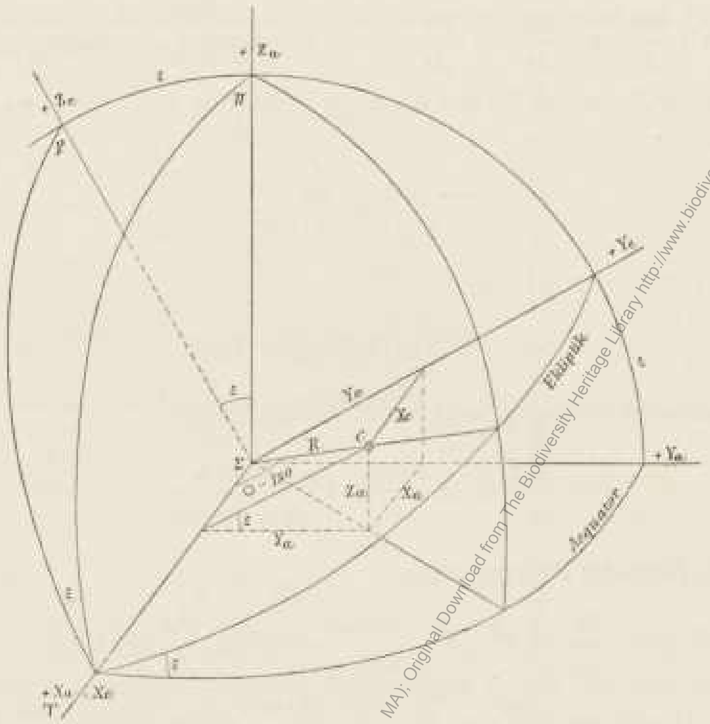
$$\left.\begin{aligned} x &= X + x_0 \\ y &= Y + y_0 \\ z &= Z + z_0 \end{aligned}\right\}$$

Heißt $BC\ldots\rho$, die geozentrische Breite von $B\ldots\varphi'$, die Sternzeit im Momente $t\ldots\theta$, so ist bekanntlich

$$\begin{aligned} x_0 &= \rho\cos\varphi'\cos\theta \\ y_0 &= \rho\cos\varphi'\sin\theta \\ z_0 &= \rho\sin\varphi' \end{aligned}$$

XYZ beziehen sich ebenfalls auf den Äquator. Bezüglich der Ekliptik lauten diese Koordinaten (Fig. 30) $X = R\cos(\odot - 180) = -R\cos\odot$, $Y = R\sin(\odot - 180) = -R\sin\odot$ und $Z = 0$, wenn wir C in der Ekliptik annehmen. Nennen wir diese $X_e Y_e Z_e$, dagegen jene bezüglich des Äquators $X_a Y_a Z_a$, so ersehen wir sofort aus Fig. 31, daß

Fig. 31.



$$X_a = X_e \qquad \text{somit} \qquad X = -R\cos\odot$$
$$Y_a = Y_e \cos\varepsilon \qquad\qquad Y = -R\sin\odot\cos\varepsilon$$
$$Z_a = Y_e \sin\varepsilon \qquad\qquad Z = -R\sin\odot\sin\varepsilon$$

ist. Daher

$$\left.\begin{aligned} x &= -R\cos\odot + \rho\cos\varphi'\cos\theta \\ y &= -R\sin\odot\cos\varepsilon + \rho\cos\varphi'\sin\theta \\ z &= -R\sin\odot\sin\varepsilon + \rho\sin\varphi'. \end{aligned}\right\}$$

Differentiieren wir nun diese Gleichungen nach t, um $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ zu erhalten, wobei R (wegen der Elliptizität der Erdbahn), $\odot$ (wegen der jährlichen Bewegung von C) und θ (wegen der täglichen Rotation von B) als veränderlich zu betrachten sind. Wir finden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= R\sin\odot\frac{d\odot}{dt}\sin 1'' - \cos\odot\frac{dR}{dt} - \rho\cos\varphi'\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\sin 1'' \\ \frac{dy}{dt} &= -R\cos\odot\cos\varepsilon\frac{d\odot}{dt}\sin 1'' - \sin\odot\cos\varepsilon\frac{dR}{dt} + \rho\cos\varphi'\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\sin 1'' \\ \frac{dz}{dt} &= -R\cos\odot\sin\varepsilon\frac{d\odot}{dt}\sin 1'' - \sin\odot\sin\varepsilon\frac{dR}{dt}. \end{aligned}\right\}$$

Würde die Erdbahn als Kreis aufgefaßt werden, so wäre $\frac{dR}{dt} = o$ zu setzen. Das erste und zweite Glied auf der rechten Seite hat die Periode eines Jahres; sie geben demnach die jährliche Aberration. Das dritte Glied hingegen hat die Periode eines Tages und gibt die tägliche Aberration.

Jährliche Aberration in α und δ.

Um diese zu finden, lassen wir in den Geschwindigkeitskomponenten das 3. Glied der rechten Seite weg. Zunächst führen wir $\frac{d\odot}{dt}$ und $\frac{dR}{dt}$ auf $\frac{du}{dt}$, die Veränderung der wahren Anomalie u, zurück. Es war, wenn P die Länge der Sonne im Perihel der Erde heißt (Fig. 20), $P = \odot + u$, somit, da P als Konstante zu betrachten ist:

$$\frac{d\odot}{dt} = \frac{du}{dt}.$$

Ferner ist aus Fig. 19: $GT' = GT\, tg i$ oder

$$dR = R\, du \sin 1''\, tg i$$

und wenn $tg i$ aus Formel (13) eingesetzt und mit dt dividiert wird:

$$\frac{dR}{dt} = R\frac{du}{dt}\sin 1'' \frac{e\sin u}{1+e\cos u}.$$

Substituiert, folgt für die jährliche Erdbewegung:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= R\sin\odot\frac{du}{dt}\sin 1'' - R\frac{e\sin u}{1+e\cos u}\cos\odot\frac{du}{dt}\sin 1'' \\
\frac{dy}{dt} &= -R\cos\odot\cos\varepsilon\frac{du}{dt}\sin 1'' - R\frac{e\sin u}{1+e\cos u}\sin\odot\cos\varepsilon\frac{du}{dt}\sin 1'' \\
\frac{dz}{dt} &= -R\cos\odot\sin\varepsilon\frac{du}{dt}\sin 1'' - R\frac{e\sin u}{1+e\cos u}\sin\odot\sin\varepsilon\frac{du}{dt}\sin 1''.
\end{aligned}\right\}$$

Weiter benötigen wir $\frac{du}{dt}$, die Geschwindigkeit der Änderung der wahren Anomalie. Dazu benützen wir die aus Fig. 19 in Anwendung des 2. Kepler'schen Gesetzes hervorgegangene Beziehung

$$\frac{du}{dt}\sin 1'' = \frac{2\pi}{\tau}\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{R^2},$$

worin τ die siderische Umlaufszeit der Erde ist, oder, da der Parameter p der elliptischen Erdbahn gleich $a(1-e^2)$, somit $\sqrt{p} = \sqrt{a}\,.\,\sqrt{1-e^2}$ ist:

$$R\frac{du}{dt}\sin 1'' = \frac{2\pi}{\tau}\frac{a^2\sqrt{p}}{\sqrt{a}}\frac{1}{R} = \frac{2\pi}{\tau}a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}\frac{1+e\cos u}{p},$$

also

$$R\frac{du}{dt}\sin 1'' = \frac{2\pi}{\tau}a^{\frac{3}{2}}\frac{1+e\cos u}{\sqrt{p}}.$$

Nach dem 3. Kepler'schen Gesetze ist ferner, wenn τ_1 die siderische Umlaufszeit eines zweiten Planeten mit der mittleren Sonnenentfernung a_1 bezeichnet:

$$\tau^2 : \tau_1^2 = a^3 : a_1^3$$

und in strengerer Form, wenn m und m_1 die Massen der Erde und des anderen Planeten im Vergleiche zur Masse der Sonne sind:

$$\tau^2(1+m) : \tau_1^2(1+m_1) = a^3 : a_1^3.$$

Analog für einen dritten Planeten mit τ_2, a_2 und m_2 u. s. w. Daher

$$\frac{a^3}{\tau^2(1+m)} = \frac{a_1^3}{\tau_1^2(1+m_1)} = \frac{a_2^3}{\tau_2^2(1+m_2)} = \ldots = \text{konstant.}$$

Man nennt nun allgemein die Wurzel dieser Konstante, multipliziert mit 2π, die Gauss'sche Konstante. Wir wollen sie mit $\varkappa$ bezeichnen, also

$$\varkappa = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\tau\sqrt{1+m}}\, 2\pi$$

und hieraus für oben:

$$\frac{2\pi}{\tau} = \frac{\varkappa\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Da aber die Geschwindigkeitskomponenten mit der sehr kleinen Größe $C = \frac{1}{V}$ multipliziert erscheinen, ist es weiter gestattet, die Masse der Erde im Vergleich zu jener der Sonne zu vernachlässigen und zu setzen:

$$\frac{2\pi}{\tau} = \frac{\varkappa}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Daher

$$R\frac{du}{dt}\sin 1'' = \frac{\varkappa(1+e\cos u)}{\sqrt{p}}.$$

Führen wir nun diesen Ausdruck in unsere Gleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten ein. Wir erhalten

$$\frac{dx}{dt} = \sin\odot\,\frac{\varkappa(1+e\cos u)}{\sqrt{p}} - \frac{e\sin u}{1+e\cos u}\cos\odot\,\frac{\varkappa(1+e\cos u)}{\sqrt{p}}$$

$$= \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}(\sin\odot + e\sin\odot\cos u - e\cos\odot\sin u),$$

also

$$\underline{\frac{dx}{dt} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}(\sin\odot + e\sin P)}$$

ferner

$$\frac{dy}{dt} = -\cos\odot\cos\varepsilon\,\frac{\varkappa(1+e\cos u)}{\sqrt{p}} - \frac{e\sin u}{1+e\cos u}\sin\odot\cos\varepsilon\,\frac{\varkappa(1+e\cos u)}{\sqrt{p}}$$

$$= -\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\cos\varepsilon\,(\cos\odot + e\cos\odot\cos u + e\sin\odot\sin u),$$

daher

$$\underline{\frac{dy}{dt} = -\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\cos\varepsilon\,(\cos\odot + e\cos P)}$$

endlich

$$\frac{dz}{dt} = -\cos\odot\sin\varepsilon\,\frac{\varkappa(1+e\cos u)}{\sqrt{p}} - \frac{e\sin u}{1+e\cos u}\sin\odot\sin\varepsilon\,\frac{\varkappa(1+e\cos u)}{\sqrt{p}}$$

$$= -\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\sin\varepsilon\,(\cos\odot + e\sin\odot\cos u + e\sin\odot\sin u),$$

somit

$$\underline{\frac{dz}{dt} = -\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\sin\varepsilon\,(\cos\odot + e\cos P).}$$

Wenn wir diese Komponenten in unsere Gleichungen substituieren, so ist zu bemerken, daß die Glieder mit $e \sin P$ und $e \cos P$ für denselben Stern konstante Werte geben, die allgemein nicht zur periodischen Erscheinung der Aberration, sondern zur mittleren Position des Sternes hinzugeschlagen werden. Wir lassen sie deshalb in den Geschwindigkeitskomponenten weg und verwenden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\varkappa}{\sqrt{p}} \sin \odot \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\varkappa}{\sqrt{p}} \cos \odot \cos \varepsilon \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{\varkappa}{\sqrt{p}} \cos \odot \sin \varepsilon. \end{aligned}\right\}$$

Kehren wir nun zu den Formeln (7) und (8) dieses Abschnittes für $\alpha'-\alpha$ und $\delta'-\delta$ zurück. Dieselben erscheinen zunächst als Funktionen der Größen M und N, welche die Komponenten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ enthalten. Substituieren wir letztere, so finden wir, wenn wir noch setzen

$$\underline{C \frac{\varkappa}{\sqrt{p}} = k \sin 1'',}$$

wobei die Konstante k, wie wir später sehen werden, unsere frühere Aberrationskonstante ist:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{\varkappa}{\sqrt{p}} \sin \odot \cos \alpha - \frac{\varkappa}{\sqrt{p}} \cos \odot \cos \varepsilon \sin \alpha = \frac{k \sin 1''}{C} (\sin \odot \cos \alpha - \cos \odot \sin \alpha \cos \varepsilon) \\ N &= -\frac{\varkappa}{\sqrt{p}} \sin \odot \sin \alpha - \frac{\varkappa}{\sqrt{p}} \cos \odot \cos \varepsilon \cos \alpha = -\frac{k \sin 1''}{C} (\sin \odot \sin \alpha + \cos \odot \cos \alpha \cos \varepsilon) \end{aligned}\right\}$$

Das Glied 1. Ordnung in $\alpha'-\alpha$ lautet:

$$\frac{C}{\sin 1''} N \sec \delta = \underline{-k (\sin \odot \sin \alpha + \cos \odot \cos \alpha \cos \varepsilon) \sec \delta,}$$

welcher Ausdruck mit Formel (17) übereinstimmt.

Das Glied 2. Ordnung in $\alpha'-\alpha$ lautet:

$$\begin{aligned} -\frac{C^2}{\sin 1''} MN \sec^2 \delta &= k^2 \sin 1'' (\sin^2 \odot \sin \alpha \cos \alpha - \sin \odot \cos \odot \sin^2 \alpha \cos \varepsilon + \\ &\qquad + \sin \odot \cos \odot \cos^2 \alpha \cos \varepsilon - \cos^2 \odot \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \varepsilon) \sec^2 \delta \\ &= k^2 \sin 1'' \sec^2 \delta \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin^2 \odot + \frac{1}{2} \sin 2\odot \cos \varepsilon \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos^2 \odot \cos^2 \varepsilon \right) \\ &= k^2 \sin 1'' \sec^2 \delta \left[\frac{1}{2} \sin 2\alpha (\sin^2 \odot - \cos^2 \odot \cos^2 \varepsilon) + \frac{1}{2} \sin 2\odot \cos \varepsilon \cos 2\alpha \right]. \end{aligned}$$

Aber

$$\sin^2 \odot - \cos^2 \odot \cos^2 \varepsilon = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\odot) - \frac{1}{2}(1 + \cos 2\odot) \cos^2 \varepsilon = \frac{1}{2}[\sin^2 \varepsilon - \cos 2\odot (1 + \cos^2 \varepsilon)],$$

somit

$$-\frac{C^2}{\sin 1''} MN \sec^2 \delta = k^2 \sin 1'' \sec^2 \delta \left\{ \frac{1}{4} \sin 2\alpha [\sin^2 \varepsilon - \cos 2\odot (1 + \cos^2 \varepsilon)] + \frac{1}{2} \sin 2\odot \cos \varepsilon \cos 2\alpha \right\}$$

und wenn, wie früher, das konstante Glied (mit $\sin 2\alpha \sin^2 \varepsilon$) weggelassen, beziehungsweise in den mittleren Sternort aufgenommen gedacht wird:

$$\text{Gl. 2. Ordg. in } \alpha'-\alpha = \underline{-\frac{k^2}{4} \sin 1'' (1 + \cos^2 \varepsilon) \sin 2\alpha \cos 2\odot \sec^2 \delta + \frac{k^2}{2} \sin 1'' \cos \varepsilon \cos 2\alpha \sin 2\odot \sec^2 \delta}$$

wie oben in Formel (18).

Ferner haben wir als Glied 1. Ordnung in $\delta'-\delta$:

$$\frac{C}{\sin 1''}\left(-M\sin\delta+\frac{dz}{dt}\cos\delta\right)=\frac{C}{\sin 1''}\left[\frac{k\sin 1''}{C}(-\sin\odot\cos\alpha+\cos\odot\sin\alpha\cos\varepsilon)\sin\delta-\right.$$

$$\left.-\frac{k\sin 1''}{C}\cos\odot\sin\varepsilon\cos\delta\right]$$

$$=k(-\sin\odot\cos\alpha+\cos\odot\sin\alpha\cos\varepsilon)\sin\delta-k\cos\odot\sin\varepsilon\cos\delta$$

$$=k\cos\odot(\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon-\cos\delta\sin\varepsilon)-k\sin\odot\cos\alpha\sin\delta,$$

welcher Ausdruck mit Formel (17) koinzidiert.

Die Glieder 2. Ordnung in $\delta'-\delta$ lauten:

$$-\frac{1}{2}\frac{C^2}{\sin 1''}N^2\,tg\,\delta-\frac{C^2}{\sin 1''}\left(-M\sin\delta+\frac{dz}{dt}\cos\delta\right)\left(M\cos\delta+\frac{dz}{dt}\sin\delta\right).$$

Unter diesen kommt nur das Glied mit $tg\,\delta$ in Betracht, da es in der Nähe von $\delta=90°$ stark anzuwachsen vermag. Das andere Glied 2. Ordnung hat den Faktor $k^2\sin 1''=(20\cdot 4451)^2\sin 1''=0''\!.002$ und kann in seinen einzelnen Ausdrücken diesen Wert nicht überschreiten, weshalb es füglich wegzulassen ist. Es bleibt also:

$$-\frac{1}{2}\frac{C^2}{\sin 1''}N^2\,\mathrm{tg}\,\delta=-\frac{1}{2}\frac{C^2}{\sin 1''}\mathrm{tg}\,\delta\frac{k^2\sin^2 1''}{C^2}(\sin\odot\sin\alpha+\cos\odot\cos\alpha\cos\varepsilon)^2$$

$$=-\frac{k^2}{2}\sin 1''\,\mathrm{tg}\,\delta\,(\sin^2\odot\sin^2\alpha+2\sin\odot\cos\odot\sin\alpha\cos\alpha\cos\varepsilon+\cos^2\odot\cos^2\alpha\cos^2\varepsilon)$$

$$=-\frac{k^2}{2}\sin 1''\,\mathrm{tg}\,\delta\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2\odot)\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)+\sin 2\odot\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos\varepsilon+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(1+\cos 2\odot)\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\cos^2\varepsilon\right]$$

$$=-\frac{k^2}{2}\sin 1''\,\mathrm{tg}\,\delta\left[\frac{1}{4}(1-\cos 2\odot-\cos 2\alpha+\cos 2\odot\cos 2\alpha)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}(1+\cos 2\odot+\cos 2\alpha+\cos 2\odot\cos 2\alpha)\cos^2\varepsilon+\frac{1}{2}\sin 2\odot\sin 2\alpha\cos\varepsilon\right]$$

und, wenn die konstanten Glieder wie vordem weggelassen werden, folgt als

$$\text{Gl. 2. Ordg. in }\delta'-\delta=-\frac{k^2}{8}\sin 1''\,\mathrm{tg}\,\delta\,[\cos 2\odot(-1+\cos^2\varepsilon)+\cos 2\odot\cos 2\alpha(1+\cos^2\varepsilon)]-$$

$$-\frac{k^2}{4}\sin 1''\,\mathrm{tg}\,\delta\sin 2\odot\sin 2\alpha\cos\varepsilon$$

$$\text{Gl. 2. Ordg. in }\delta'-\delta=\frac{k^2}{8}\sin 1''\,[\sin^2\varepsilon-(1+\cos^2\varepsilon)\cos 2\alpha]\cos 2\odot\,\mathrm{tg}\,\delta-$$

$$-\frac{k^2}{4}\sin 1''\cos\varepsilon\sin 2\alpha\sin 2\odot\,\mathrm{tg}\,\delta$$

wie oben in Formel (19).

Tägliche Aberration in α und δ.

Wir haben jetzt als Geschwindigkeitskomponenten einzuführen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\rho\cos\varphi'\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\sin 1'' \\ \frac{dy}{dt} &= +\rho\cos\varphi'\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\sin 1'' \\ \frac{dz}{dt} &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Die letzte Komponente ist gleich Null, weil sie in die Richtung der Umdrehungsaxe der Erde fällt und die Rotationsbewegung des Beobachtungsortes in einer dazu senkrechten Ebene vor sich geht. Da jetzt die Aberrationskonstante über 60mal kleiner als bei der jährlichen Bewegung resultiert, so sind die Glieder 2. Ordnung von vorneherein zu vernachlässigen und wir haben:

$$\begin{aligned}\alpha'-\alpha &= \frac{C}{\sin 1''}\sec\delta\left(-\frac{dx}{dt}\sin\alpha+\frac{dy}{dt}\cos\alpha\right) \\ &= \frac{C}{\sin 1''}\sec\delta\left(\rho\cos\varphi'\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\sin 1''\sin\alpha+\rho\cos\varphi'\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\sin 1''\cos\alpha\right) \\ &= \rho\cos\varphi' C\frac{d\theta}{dt}\cos(\theta-\alpha)\sec\delta,\end{aligned}$$

ferner in Berücksichtigung von $\frac{dz}{dt}=0$:

$$\begin{aligned}\delta'-\delta &= -\frac{C}{\sin 1''}\left(\frac{dx}{dt}\cos\alpha+\frac{dy}{dt}\sin\alpha\right)\sin\delta \\ &= -\frac{C}{\sin 1''}\left(-\rho\cos\varphi'\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\sin 1''\cos\alpha+\rho\cos\varphi'\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\sin 1''\sin\alpha\right)\sin\delta \\ &= \rho\cos\varphi' C\frac{d\theta}{dt}\sin(\theta-\alpha)\sin\delta.\end{aligned}$$

Es ist nun, wenn wir wieder den Sterntag als Zeiteinheit annehmen, da der Beobachtungsort in derselben einen ganzen Umkreis vollendet:

$$\frac{d\theta}{dt} = 360^\circ.60'.60'' = \frac{2\pi}{\sin 1''} = \frac{\tau}{\sin 1''}\cdot\frac{2\pi}{\tau}.$$

Aber es war

$$\frac{2\pi}{\tau} = \frac{\varkappa}{a^{\frac{3}{2}}}, \qquad \varkappa = \frac{k\sin 1''\sqrt{p}}{C},$$

daher

$$\frac{2\pi}{\tau} = \frac{k\sin 1''\, a^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-e^2}}{a^{\frac{3}{2}}\, C} = \frac{k\sin 1''\sqrt{1-e^2}}{aC},$$

somit

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\tau k\sqrt{1-e^2}}{aC}.$$

Messen wir ρ mit dem Äquatorealhalbmesser der Erde a' und nehmen diesen als Einheit an, so ist $\frac{a'}{a} = \frac{1}{a} = \sin \pi_\odot$, also

$$C\frac{d\theta}{dt} = k \sin \pi_\odot \tau \sqrt{1-e^2},$$

somit schließlich, wenn $\theta-\alpha = t$ (Stundenwinkel) gesetzt wird:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\alpha'-\alpha = k\rho \cos\varphi' \sin\pi_\odot\tau\sqrt{1-e^2} \cos t \sec\delta} \\ \underline{\delta'-\delta = k\rho\cos\varphi' \sin\pi_\odot\tau\sqrt{1-e^2} \sin t \sin\delta} \end{array}\right\}$$

wie oben.

Jährliche Aberration in λ und β.

Jetzt wählen wir an Stelle des Äquators die Ekliptik als xy-Ebene; die z-Axe weist dann nach dem Ekliptikpole. Bei diesem System lauten die Koordinaten des Erdmittelpunktes in Bezug auf die Sonne

$$\left.\begin{array}{l} X = -R\cos\odot \\ Y = -R\sin\odot \\ Z = 0. \end{array}\right\}$$

Ferner sind die Koordinaten des Beobachtungsortes in Bezug auf den Erdmittelpunkt, wenn λ_z und β_z die Länge und Breite des geozentrischen Zenites bezeichnen (hergeleitet durch Koordinatentransformation aus $\alpha_z = \theta$ und $\delta_z = \varphi'$):

$$\left.\begin{array}{l} \rho\cos\beta_z\cos\lambda_z \\ \rho\cos\beta_z\sin\lambda_z \\ \rho\sin\beta_z, \end{array}\right\}$$

so daß die ekliptikalen rechtwinkeligen Koordinaten des Beobachtungsortes in Bezug auf die Sonne sein werden:

$$\left.\begin{array}{l} x = -R\cos\odot + \rho\cos\beta_z\cos\lambda_z \\ y = -R\sin\odot + \rho\cos\beta_z\sin\lambda_z \\ z = \rho\sin\beta_z. \end{array}\right\}$$

Für die jährliche Aberration haben wir rechts die Glieder mit ρ wegzulassen und erhalten als ekliptikale Geschwindigkeitskomponenten:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = R\sin\odot\frac{d\odot}{dt}\sin 1'' - \cos\odot\frac{dR}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = -R\cos\odot\frac{d\odot}{dt}\sin 1'' - \sin\odot\frac{dR}{dt} \\ \frac{dz}{dt} = 0. \end{array}\right\}$$

Aber es war:

$$\frac{d\odot}{dt} = \frac{du}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dR}{dt} = R\frac{du}{dt}\sin 1''\frac{e\sin u}{1+e\cos u},$$

daher

$$\frac{dx}{dt} = R\frac{du}{dt}\sin 1''\left(\sin\odot - \frac{e\sin u}{1+e\cos u}\cos\odot\right) = R\frac{du}{dt}\sin 1''\frac{1}{1+e\cos u}(\sin\odot + e\sin P)$$

$$\frac{dy}{dt} = R\frac{du}{dt}\sin 1''\left(-\cos\odot - \frac{e\sin u}{1+e\cos u}\sin\odot\right) = -R\frac{du}{dt}\sin 1''\frac{1}{1+e\cos u}(\cos\odot + e\cos P).$$

Ferner hatten wir

$$R\frac{du}{dt}\sin 1'' = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}(1+e\cos u),$$

somit ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}(\sin\odot + e\sin P) \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}(\cos\odot + e\cos P) \\ \frac{dz}{dt} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Diese Komponenten gehen auch aus jenen für den Äquator hervor, wenn man dort einfach $\varepsilon = 0$ setzt. Lassen wir wieder die konstanten Glieder weg, so folgt, wenn wir abermals $C\frac{\varkappa}{\sqrt{p}} = k\sin 1''$ einführen,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{k}{C}\sin 1''\sin\odot \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{k}{C}\sin 1''\cos\odot. \end{aligned}\right\}$$

Substituieren wir dies beispielsweise in das erste Glied von $(\alpha'-\alpha)\sin 1''$, wobei wir für $\alpha\alpha'\ldots\lambda\lambda'$ und für $\delta\delta'\ldots\beta\beta'$ schreiben, so wird aus

$$(\alpha'-\alpha)\sin 1'' = C\sec\delta\left(-\frac{dx}{dt}\sin\alpha + \frac{dy}{dt}\cos\alpha\right)$$

$$(\lambda'-\lambda)\sin 1'' = C\sec\beta\left(-\frac{k}{C}\sin 1''\sin\odot\sin\lambda - \frac{k}{C}\sin 1''\cos\odot\cos\lambda\right),$$

also

$$\lambda'-\lambda = -k\cos(\odot-\lambda)\sec\beta$$

wie oben. Es erscheint aber einfacher, sofort in die äquatorealen Formeln $\varepsilon = 0$ einzusetzen, um ebenfalls die gewünschten Beziehungen zu erhalten. Tun wir dies zum Beispiel in dem Gliede 1. Ordnung von $\delta'-\delta$, so wird

$$\beta'-\beta = k\cos\odot(\sin\lambda\sin\beta - 0) - k\sin\odot\cos\lambda\sin\beta$$

$$\beta'-\beta = -k\sin(\odot-\lambda)\sin\beta$$

u. s. w.

Man könnte ebenso leicht die Geschwindigkeitskomponenten der täglichen Rotation bezüglich der Ekliptik bilden, also die tägliche Aberration in Länge und Breite ableiten. Doch wird diese, wo sie Berücksichtigung erfährt, stets nur bezüglich des Äquators oder des Horizontes gebraucht.

Schon aus der vollkommenen Übereinstimmung der nach Bessel's Methode gefundenen Aberrationsformeln mit den früheren geht hervor, daß die hier eingeführte Konstante k mit unserer früheren Aberrationskonstante identisch, somit

$$k = C\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\frac{1}{\sin 1''} = \frac{v}{V}\frac{1}{\sin 1''}, \text{ also wegen } C = \frac{1}{V}:\ v = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}$$

sein muß. Wir können dies aber auch direkt aus unseren Geschwindigkeitskomponenten bezüglich des Äquators oder der Ekliptik herleiten. Wählen wir den ersten, scheinbar komplizierteren Weg, so ist bekanntlich, weil v die Resultierende aus den Komponenten darstellt:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

und, wenn wir in den Komponenten ganz allgemein auch die Erdmasse m beibehalten, also für $\varkappa \ldots \varkappa\sqrt{1+m}$ einführen, so wird

$$v^2 = \frac{\varkappa^2(1+m)}{p}\left[(\sin\odot + e\sin P)^2 + \cos^2\varepsilon(\cos\odot + e\cos P)^2 + \sin^2\varepsilon(\cos\odot + e\cos P)^2\right]$$

$$= \frac{\varkappa^2(1+m)}{p}\left[(\sin\odot + e\sin P)^2 + (\cos\odot + e\cos P)^2\right].$$

Nebenbei sei bemerkt, daß dies derselbe Ausdruck ist, als wenn wir die Komponenten bezüglich der Ekliptik verwendet hätten. Weiter ist

$$v^2 = \frac{\varkappa^2(1+m)}{p}(\sin^2\odot + 2e\sin\odot\sin P + e^2\sin^2 P + \cos^2\odot + 2e\cos\odot\cos P + e^2\cos^2 P)$$

$$= \frac{\varkappa^2(1+m)}{p}\left[1 + 2e\cos(\odot - P) + e^2\right]$$

und wenn wir für $1 \ldots 2-1$ und für $\odot - P \ldots u$ schreiben

$$v^2 = \frac{\varkappa^2(1+m)}{p}\left[2(1+e\cos u) - (1-e^2)\right].$$

Es ist aber

$$R = \frac{p}{1+e\cos u} \qquad p = a(1-e^2),$$

also

$$1+e\cos u = \frac{p}{R} \qquad 1-e^2 = \frac{p}{a},$$

somit

$$v^2 = \varkappa^2(1+m)\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right).$$

Dies ist der bekannte Ausdruck für das Quadrat der Geschwindigkeit einer sich um die Sonne in einem Kegelschnitte bewegenden Masse m in jenem Orte der Bahn, welcher durch den Radiusvektor R charakterisiert erscheint. Für die Kreisbewegung oder, wenn wie oben aus anderen Gründen die Glieder mit $e\sin P$ und $e\cos P$ weggelassen werden, ist $e = 0$ zu nehmen, wodurch $R = p = a$ wird, folglich

$$v^2 = \frac{\varkappa^2(1+m)}{p}$$

und sobald m wieder vernachlässigt wird:

$$v = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}},$$

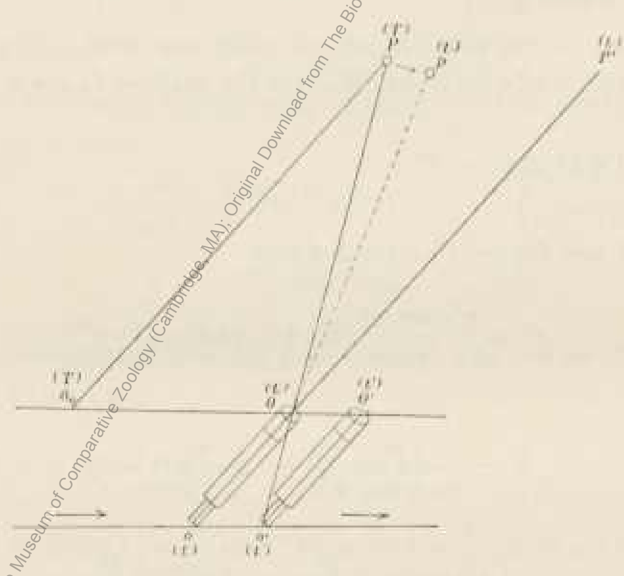
was zu zeigen war.

V. Aberration bei Gestirnen mit Eigenbewegung.

Wenn das beobachtete Gestirn eine Eigenbewegung besitzt, wie dies zum Beispiel bei den Planeten und Kometen der Fall ist, so erhält man durch Anbringung der in den vorigen Kapiteln besprochenen Aberration, der sogenannten Fixsternaberration, an den scheinbaren, d. i. beobachteten Ort noch nicht den wahren Ort des Planeten oder Kometen, da ein solches Gestirn während der Fortpflanzungsdauer des Lichtes von ihm bis zum Fernrohr nicht unbeweglich, wie ein Fixstern verblieben ist, sondern seinen Ort im Raume verändert hat. Gauss führt in seiner Theoria motus corporum coelestium (deutsch von C. Haase, 1865, p. 83—87) drei Methoden an, bei Irrsternen die Aberration strenge zu berücksichtigen, welche im folgenden erörtert werden sollen.

Zur Beobachtungszeit t wäre die Richtung des Sehrohres oO (Fig. 32), und wir erblicken den Planeten (oder Kometen) an seinem scheinbaren Orte P'. Zur Zeit t' sei die Richtung des Fernrohrs $o'O'$.

Fig. 32.



Dann ist $\sphericalangle\, Oo'O'$ der Aberrationswinkel im früheren Sinne oder die sogenannte Fixsternaberration. Bringen wir diesen Winkel an die Richtung OP' an, so kommen wir auf die Richtung OP, in welcher wir aber den Planeten nur dann vorfinden würden, wenn er während der Zeit der Fortpflanzung des Lichtes von P nach O stillgestanden wäre. Mittlerweile habe er sich jedoch nach p weiter bewegt, so daß die wahre Richtung nach demselben zur Zeit t nicht durch die Richtung OP, sondern durch Op charakterisiert erscheint. Sagen wir, daß der Planet zur Zeit T $(< t)$ in P gewesen sei, so ist $t-T$ die Zeit, in welcher das Licht den Abstand des Planeten vom Objektive durchlief. Heißt dieser Δ, und wird derselbe mit der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne gemessen, wie dies allgemein geschieht, ferner berücksichtigt, daß letztere vom Lichte in $497^{s}78$ Zeitsekunden durchlaufen wird, so ist:

$$t-T = 497^{s}78\Delta$$

und wir sehen aus der Zeichnung unmittelbar, wenn O_0O der Weg des Objektives in $t-T$, also O_0P parallel zu oO ist, daß die beobachtete (scheinbare) Richtung nach dem Planeten (OP') parallel zur wahren Richtung nach dem Planeten für eine frühere Zeit T ist, die aus t gefunden wird durch die Beziehung:

$$T = t-(t-T) = t-497^{s}78\Delta.$$

Bezeichnen wir nun die scheinbaren Koordinaten des Planeten mit Strichen, die wahren ohne diese, und fügen denselben, je nachdem sie für t oder T gelten, diese Buchstaben an, so haben wir zum Beispiel für Rektaszension und Deklination das Schema:

Zeit	Scheinbarer Ort	Wahrer Ort
$T (= t - 497^s.78\,\Delta)$	—	$\alpha_T (= \alpha'_t)\ \delta_T (= \delta'_t)$
t (Beobachtungszeit)	$\alpha'_t\ \delta'_t$	$\alpha_t\ \delta_t$

und erhalten hieraus folgende drei Methoden der Ermittlung der wahren Planeten-Koordinaten aus den scheinbaren (a) und umgekehrt (b).

1. Methode.

a) Der beobachtete Ort $\alpha'_t\ \delta'_t$ wird unverändert beibehalten, die Beobachtungszeit t wird aber mittelst der Lichtzeit ($497^s.78\ \Delta$) auf die frühere Zeit T reduziert und dann $\alpha'_t\ \delta'_t$ als wahrer Ort für die letztere Zeit ($t - 497^s.78\,\Delta$) betrachtet.

b) Man zieht von t (Beob. Zeit, für welche man den scheinbaren Ort haben will) die Lichtzeit ab, interpoliere für $T = t - 497^s.78\,\Delta$ den wahren Ort aus der für den Planeten oder Kometen gerechneten Ephemeride und betrachte diesen als scheinbaren Ort für die Beobachtungszeit t.

2. Methode.

a) Die Beobachtungszeit t wird unverändert beibehalten, aber an $\alpha'_t\ \delta'_t$, welche identisch mit $\alpha_T\ \delta_T$ sind, füge man den Zuwachs von α und δ im Zeitraume $t - T$ an, wodurch man $\alpha_t\ \delta_t$, d. i. die wahren Größen für t erhält, verfährt also so, als wenn man den scheinbaren Ort für eine Zeit $= t + 497^s.78\ \Delta$ wissen wollte.

b) Man nehme für t den wahren Ort, reduziere diesen um das Intervall $t - T$ auf eine frühere Zeit und betrachte den so erhaltenen wahren Ort als scheinbaren Ort zur Zeit t.

Diese zweite Methode würde also in analytischer Form lauten, wenn $d\alpha$ und $d\delta$ die stündlichen Änderungen der Rektaszension und Deklination bedeuten:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \alpha' + \frac{497 \cdot 78}{3600}\,\Delta . d\alpha \\ \delta &= \delta' + \frac{497 \cdot 78}{3600}\,\Delta . d\delta\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}\alpha' &= \alpha - \frac{497 \cdot 78}{3600}\,\Delta . d\alpha \\ \delta' &= \delta - \frac{497 \cdot 78}{3600}\,\Delta . d\delta .\end{aligned}\right\}$$

Würde man hierin für Δ die jeweilige Entfernung der Sonne von der Erde (R) setzen, so erhielte man unmittelbar die Aberration der Sonne in Rektaszension und Deklination.

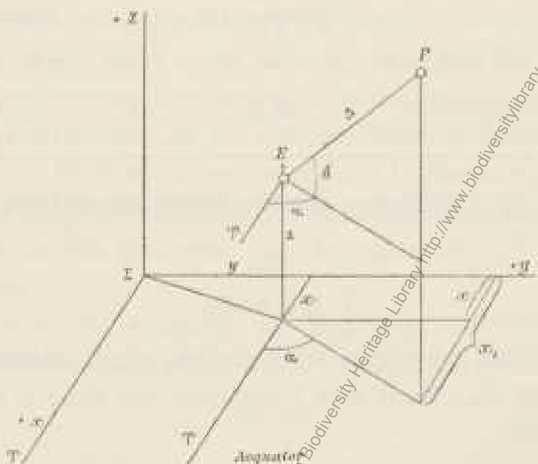
3. Methode.

a) Man befreit zunächst $\alpha'_t\ \delta'_t$ von der Fixsternaberration, wodurch man auf den Planetenort P kommt, welcher der wahre Ort für T ist und nehme dazu den Erdort für t, als ob er zu jener Zeit gehörte. Diese Methode, welche eine Kenntnis von Δ nicht voraussetzt, wird namentlich bei ersten Bahnbestimmungen angewendet.

b) Man berechne den heliozentrischen Ort der Erde für t, den heliozentrischen Ort des Planeten aber für T. Dann leite man aus diesen Daten in bekannter Weise den geozentrischen Planetenort ab, verbessere diesen wegen Fixsternaberration und erhält derart den gesuchten scheinbaren Planetenort für die Zeit t.

Behandeln wir nun dieses Problem nach Bessel analytisch. Nennen wir die äquatorealen orthogonalen Koordinaten des Planeten P (Fig. 33) bezüglich des Sonnenmittelpunktes x_1, y_1, z_1, während jene

Fig. 33.



der Erde x, y, z heißen, bezeichnen wir ferner mit α und δ die wahre Rektaszension und Deklination des Planeten, mit Δ die geozentrische Entfernung desselben (PE), so ist

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x+\Delta \cos\delta \cos\alpha \\ y_1 &= y+\Delta \cos\delta \sin\alpha \\ z_1 &= z+\Delta \sin\delta. \end{aligned}\right\}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten der Bewegung des Planeten in Bezug auf die Sonne lauten dann: $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$ und $\frac{dz_1}{dt}$, während jene der Erde in ihrer jährlichen Bewegung waren: $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}\cdot$

Da P in Bewegung ist, während früher S (Fixstern) unbeweglich war, so haben wir nur die Gesetze der relativen Bewegung anzuwenden, um wieder P bezüglich der Erde als unbeweglich zu betrachten und die früheren, für Fixsterne geltenden Formeln sofort benützen zu können, d. h. wir haben jetzt an Stelle von $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ die Unterschiede der Geschwindigkeitskomponenten: $\frac{dx}{dt}-\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy}{dt}-\frac{dy_1}{dt}, \frac{dz}{dt}-\frac{dz_1}{dt}$ zu setzen. Die nach Bessel's Methode gefundenen Gleichungen (7) und (8) gehen dann über in:

$$\left.\begin{aligned} (\alpha'-\alpha)\sin 1'' &= C\left[-\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)\sin\alpha+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)\cos\alpha\right]\sec\delta+\text{Glieder 2. Ordnung,} \\ (\delta'-\delta)\sin 1'' &= C\left[-\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)\cos\alpha\sin\delta-\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)\sin\alpha\sin\delta+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right)\cos\delta\right]+\text{Gl. 2. Ordg.} \end{aligned}\right\}$$

Es folgt aber aus der obigen Koordinatenbezeichnung:

$$\left.\begin{aligned} x-x_1 &= -\Delta\cos\delta\cos\alpha \\ y-y_1 &= -\Delta\cos\delta\sin\alpha \\ z-z_1 &= -\Delta\sin\delta, \end{aligned}\right\}$$

somit

$$\left.\begin{aligned}
&1. \quad \frac{dx}{dt}-\frac{dx_1}{dt}=\Delta\cos\delta\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}\sin 1''+\Delta\sin\delta\cos\alpha\frac{d\delta}{dt}\sin 1''-\cos\delta\cos\alpha\frac{d\Delta}{dt}\\
&2. \quad \frac{dy}{dt}-\frac{dy_1}{dt}=-\Delta\cos\delta\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}\sin 1''+\Delta\sin\delta\sin\alpha\frac{d\delta}{dt}\sin 1''-\cos\delta\sin\alpha\frac{d\Delta}{dt}\\
&3. \quad \frac{dz}{dt}-\frac{dz_1}{dt}=\qquad\qquad -\Delta\cos\delta\frac{d\delta}{dt}\sin 1''\quad -\sin\delta\frac{d\Delta}{dt}
\end{aligned}\right\}$$

Bilden wir nun $-1. \sin\alpha+2. \cos\alpha$, so erhalten wir für den Faktor von C in $(\alpha'-\alpha)\sin 1''$:

$$-\Delta\cos\delta\frac{d\alpha}{dt}\sin 1'',$$

ferner, indem wir bilden $-1. \cos\alpha\sin\delta-2. \sin\alpha\sin\delta+3. \cos\delta$, für den Faktor von C in $(\delta'-\delta)\sin 1''$:

$$-\Delta\frac{d\delta}{dt}\sin 1''$$

und es wird, indem wir die Glieder 2. Ordnung ganz außeracht lassen, da bei Planeten und zumeist auch bei Kometen die Deklination den Betrag von 90° nicht erreicht, wegen $C=\frac{1}{V}$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha'-\alpha &= -\frac{\Delta}{V}\frac{d\alpha}{dt}\\
\delta'-\delta &= -\frac{\Delta}{V}\frac{d\delta}{dt},
\end{aligned}\right\}$$

daher wegen $\Delta=V(t-T)$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha' &= \alpha-(t-T)\frac{d\alpha}{dt}\\
\delta' &= \delta-(t-T)\frac{d\delta}{dt},
\end{aligned}\right\}$$

d. h. der scheinbare Ort des Planeten oder Kometen zur Zeit t $(\alpha'\delta')$ ist gleich dem wahren Orte zur Zeit t $(\alpha\delta)$ weniger der Änderung der Größen α und δ im Zeitraume $t-T$, mit einem Worte: Er ist gleich dem wahren Orte zur Zeit $t-(t-T)=T$. Dies fällt mit der obigen 1. und 2. Methode der Berücksichtigung der Aberration bei Irrsternen zusammen.

Wir können aber auch noch anders verfahren und anstatt, wie oben $\frac{dx}{dt}-\frac{dx_1}{dt}$ etc. zu ermitteln, die früheren Ausdrücke mit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, welche der Fixsternaberration angehören, belassen und denselben nur die Glieder mit $-\frac{dx_1}{dt}$, $-\frac{dy_1}{dt}$, $-\frac{dz_1}{dt}$ anfügen. Bezeichnen wir also die Fixsternaberration in Rektaszension mit $[\alpha'-\alpha]$, in Deklination mit $[\delta'-\delta]$, so ist auch

$$\left.\begin{aligned}
\alpha'-\alpha &= [\alpha'-\alpha]+\frac{C}{\sin 1''}\left(\frac{dx_1}{dt}\sin\alpha-\frac{dy_1}{dt}\cos\alpha\right)\sec\delta\\
\delta'-\delta &= [\delta'-\delta]+\frac{C}{\sin 1''}\left(\frac{dx_1}{dt}\cos\alpha\sin\delta+\frac{dy_1}{dt}\sin\alpha\sin\delta-\frac{dz_1}{dt}\cos\delta\right).
\end{aligned}\right\}$$

Wir differentiieren jetzt x_1, y_1, z_1, indem wir die Koordinaten x, y, z der Erde als konstant betrachten und haben

$$\frac{dx_1}{dt} = -\Delta \cos\delta \sin\alpha \frac{d\alpha}{dt} \sin 1'' - \Delta \sin\delta \cos\alpha \frac{d\delta}{dt} \sin 1'' + \cos\delta \cos\alpha \frac{d\Delta}{dt}$$

u. s. w. Diese Geschwindigkeitskomponenten substituieren wir und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= [\alpha' - \alpha] + \frac{1}{V \sin 1''}\left(-\Delta \cos\delta \frac{d\alpha}{dt} \sin 1''\right) \sec\delta \\ \delta' - \delta &= [\delta' - \delta] + \frac{1}{V \sin 1''}\left(-\Delta \frac{d\delta}{dt} \sin 1''\right) \end{aligned}\right\}$$

also

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - [\alpha' - \alpha] &= \alpha - (t - T)\frac{d\alpha}{dt} \\ \delta' - [\delta' - \delta] &= \delta - (t - T)\frac{d\delta}{dt}, \end{aligned}\right\}$$

welche Gleichungen der 3. Methode der Berücksichtigung der Aberration bei Planeten und Kometen entsprechen. Sie besagen nämlich, daß, sobald wir den scheinbaren Ort (α', δ') von der Fixsternaberration befreien, wir den wahren Ort des Planeten oder Kometen für die Zeit T erhalten, wie er aber erschiene, wenn die Erde konstant im Orte zur Zeit t verharren würde.

VI. Die kosmische Aberration.

Bislang haben wir jene Bewegungen des Beobachtungsortes in Betracht gezogen, die von der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne und von der Rotation der Erde um ihre Axe herrühren und dieselben zur Geschwindigkeit des Lichtes in Beziehung gebracht, hiermit aber noch nicht alle Bewegungen erschöpft. Die Erde hat noch eine translatorische Bewegung im Raume, die ihr mit der Sonne und dem ganzen Sonnensysteme gemeinsam ist. Und da letztere sich im Kosmos, wahrscheinlich um einen bis jetzt unbekannten Zentralpunkt abspielt, so können wir die dadurch hervorgerufene Aberration der Sterne als kosmische Aberration[1] bezeichnen.

Zur Kenntnis der Bewegung unseres Sonnensystems im Raume gelangt man, indem man zahlreiche Fixsternbeobachtungen der Gegenwart mit anderen, die in Zeit weit zurückliegen, vergleicht und derart die Eigenbewegungen der einzelnen Sterne ermittelt. Dabei wird man gewisse regellose Eigenbewegungen, die nach allen Richtungen hin und in den verschiedensten, wenn auch minimalen, Beträgen auftreten, von anderen unterscheiden, die sich gesetzmäßig hinsichtlich Größe und Richtung darstellen und nur daher rühren, daß wir mit der Sonne unseren Ort im Raume verändern. Erstere Eigenbewegungen sind als wirkliche, letztere dagegen als scheinbare oder parallaktische zu betrachten. Diese letzteren sind es nun, welche es möglich machen, die Richtung und Größe der Bewegung unseres Sonnensystems abzuleiten. Es wird dies alsbald klar werden durch das folgende Bild.

Denken wir uns, wir befänden uns im Schiffe auf einem großen Waldsee, der nach allen Seiten von Bäumen umgeben wäre. Von der Größe und Richtung unserer Bewegung mit dem Schiffe hätten wir unmittelbar keine Kenntnis. Wir würden diese aber erlangen, wenn wir nach verschiedenen Richtungen hin die Winkelabstände hervorragender Baumstämme messen und beachten würden, wie dieselben sich

[1] Dieselbe wird auch mehrfach säkulare oder systematische Aberration genannt.

im Laufe der Zeit verändern. Begreiflicherweise müssen jene Bäume, auf welche wir uns losbewegen, allmählich auseinandertreten, die entgegengesetzt liegenden näher aneinanderrücken. Senkrecht zu unserer Bewegungsrichtung könnte naturgemäß eine Veränderung der scheinbaren Abstände nicht wahrgenommen werden. Kennen wir nun noch die mittlere Entfernung der Bäume, d. i. des Waldes vom Schiffe, so sind wir in der Lage, nach einfachen geometrischen Prinzipien nicht allein die Richtung unserer Fortbewegung, sondern auch ihre Größe zu bestimmen.

Analog ist es mit dem Fixsternwalde, den wir vom Erdschiffe aus beobachten. Der Ort des Himmels, wo die Sterne im Laufe der Zeit auseinander zu treten scheinen, ist jener, auf welchen die Erde mit der Sonne losgeht. Dieser Apex der Bewegung unseres Sonnensystems liegt nach zahlreichen, wenn auch noch keineswegs abgeschlossenen Untersuchungen in der Nähe von λ Herculis, und der Weg, den unser Sonnensystem in einem Jahre nach diesem Sterne hin zurücklegt, beträgt nach Gyldén 6·3 Sonnenweiten, wobei unter Sonnenweite die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde verstanden wird. Es folgt hieraus pro Zeitsekunde ein Weg von nahe 4 geographischen Meilen,[1] ein Betrag, der bekanntlich auch der Erde für sich in ihrer Bewegung um die Sonne zukommt.

Wir wollen nun die Geschwindigkeitskomponenten der Erdbewegung ganz allgemein einführen. Zugleich behandeln wir unsere Grundgleichungen nach Bessel in etwas anderer Weise als früher, indem wir auf die rechten Seiten der Ausdrücke für $\alpha'-\alpha$ und $\delta'-\delta$ die scheinbaren Größen α' und δ' bringen.[2] Es war

$$\begin{array}{lll|ccc}
V\cos\delta\cos\alpha &= L\cos\delta'\cos\alpha' - \dfrac{dx}{dt} & & \cos\alpha' & \sin\alpha' & \cos\delta'\cos\alpha' \quad (1)\\[2ex]
V\cos\delta\sin\alpha &= L\cos\delta'\sin\alpha' - \dfrac{dy}{dt} & & \sin\alpha' & -\cos\alpha' & \cos\delta'\sin\alpha' \quad (2)\\[2ex]
V\sin\delta &= L\sin\delta' - \dfrac{dz}{dt} & & & & \sin\delta' \quad (3)
\end{array}$$

Multiplizieren wir mit den rechts angesetzten Faktoren und addieren die Produkte, so ergibt $(1).\cos\alpha'+(2).\sin\alpha'$ und $(1).\sin\alpha'-(2).\cos\alpha'$:

$$V\cos\delta\cos(\alpha'-\alpha) = L\cos\delta' - \left(\frac{dx}{dt}\cos\alpha' + \frac{dy}{dt}\sin\alpha'\right) \tag{4}$$

$$V\cos\delta\sin(\alpha'-\alpha) = -\frac{dx}{dt}\sin\alpha' + \frac{dy}{dt}\cos\alpha' \tag{5}$$

und, wenn man abkürzend setzt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}\cos\alpha' + \frac{dy}{dt}\sin\alpha' &= M'\\
-\frac{dx}{dt}\sin\alpha' + \frac{dy}{dt}\cos\alpha' &= N'
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha'-\alpha) = \frac{N'}{L\cos\delta' - M'}. \tag{7}$$

[1] Dieser Wert wird zwar durch einige der neuesten Untersuchungen über die lineare Eigenbewegung unseres Sonnensystems bestätigt und liegt ziemlich in der Mitte zwischen den extremen Bestimmungen dieser Art, muß aber trotzdem wegen seiner Abhängigkeit von den noch wenig bekannten Fixsternentfernungen als unsicher bezeichnet werden.

[2] Diese Darstellung schließt sich wesentlich an die Ausführungen H. Seeliger's im 109. Bande der Astronomischen Nachrichten, p. 273—280, an.

Um die Größe $L = \frac{l}{t'-t}$ im Nenner durch die Lichtgeschwindigkeit V auszudrücken, bilden wir $(1).\cos\delta'\cos\alpha' + (2).\cos\delta'\sin\alpha' + (3).\sin\delta'$ und gestatten uns hierbei, nur Glieder 1. Ordnung beizubehalten. Dann wird

$$V[\cos\delta\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha)+\sin\delta\sin\delta'] = V = L - \left(M'\cos\delta' + \frac{dz}{dt}\sin\delta'\right),$$

also

$$L = V + \left(M'\cos\delta' + \frac{dz}{dt}\sin\delta'\right).$$

Dies substituiert folgt

$$\operatorname{tg}(\alpha'-\alpha) = \frac{N'}{V\cos\delta' + M'\cos^2\delta' + \frac{dz}{dt}\sin\delta'\cos\delta' - M'}.$$

und

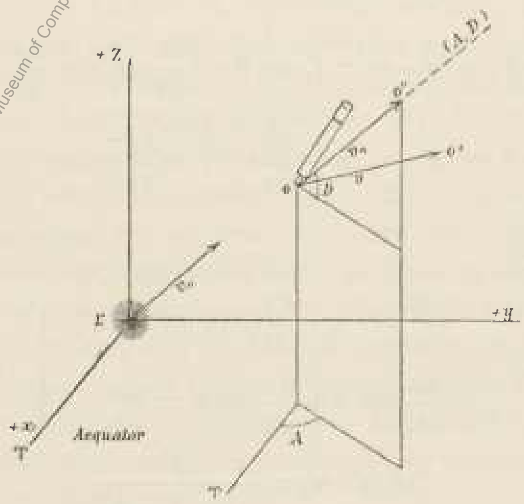
$$\operatorname{tg}(\alpha'-\alpha) = \frac{1}{V\cos\delta'}\cdot\frac{N'}{1-\frac{1}{V\cos\delta'}\left(M'\sin^2\delta' - \frac{dz}{dt}\sin\delta'\cos\delta'\right)}.$$

Somit, wenn man wie früher auf beiden Seiten nur bis inklusive Glieder 2. Ordnung geht und wieder $\frac{1}{V} = C$ setzt:

$$\alpha'-\alpha = \frac{C}{\sin 1''}\sec\delta'.N' + \frac{C^2}{\sin 1''}\sec^2\delta'\left(M'N'\sin^2\delta' - N'\frac{dz}{dt}\sin\delta'\cos\delta'\right). \qquad (8)$$

Nennen wir nun die Geschwindigkeit der Bewegung des Sonnensystems, die in Ermangelung ihrer genauen Kenntnis als geradlinig und gleichförmig angenommen werde, v_0, und wäre dieselbe nach einem

Fig. 34.



Orte des Himmels mit der Rektaszension A und Deklination D gerichtet (Fig. 34), so lauten die von dieser Bewegung des Okulars o nach o'' herrührenden Geschwindigkeitskomponenten

$$v_0\cos D\cos A$$
$$v_0\cos D\sin A$$
$$v_0\sin D,$$

welche jetzt denjenigen von der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne anzufügen sind. Daher ist nun allgemein einzuführen, indem $\frac{\varkappa}{\sqrt{p}} = v$ war:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= v \sin \odot + v_0 \cos D \cos A \\
\frac{dy}{dt} &= -v \cos \odot \cos \varepsilon + v_0 \cos D \sin A \\
\frac{dz}{dt} &= -v \cos \odot \sin \varepsilon + v_0 \sin D.
\end{aligned}\right\}$$

Setzen wir abermals

$$\left.\begin{aligned}
-k \sin \odot &= h \cos H \\
-k \cos \odot \cos \varepsilon &= h \sin H \\
-k \cos \odot \sin \varepsilon &= i,
\end{aligned}\right\}$$

ferner

$$\frac{v_0}{V \sin 1''} = k_0,$$

so folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{\sin 1''}{C}(-h \cos H + k_0 \cos D \cos A) \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{\sin 1''}{C}(h \sin H + k_0 \cos D \sin A) \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{\sin 1''}{C}(i + k_0 \sin D).
\end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} \cos \alpha' & -\sin \alpha' \\ \sin \alpha' & \cos \alpha' \\ & \end{matrix}$$

Multiplizieren wir die erste und zweite Gleichung mit den rechts stehenden Faktoren und addieren so finden wir in Anwendung der Beziehungen (6)

$$\left.\begin{aligned}
M' &= \frac{\sin 1''}{C}[-h \cos (H+\alpha') + k_0 \cos D \cos (A-\alpha')] \\
N' &= \frac{\sin 1''}{C}[h \sin (H+\alpha') + k_0 \cos D \sin (A-\alpha')]
\end{aligned}\right\}$$

und durch Substitution in (8)

$$\underline{\alpha' - \alpha = h \sin (H+\alpha') \sec \delta' + k_0 \cos D \sin (A-\alpha') \sec \delta' + \text{Glieder 2. Ordnung.}} \qquad (9)$$

Das Glied 1. Ordnung in $\alpha' - \alpha$ setzt sich also allgemein aus zwei Teilen zusammen, einem ersten, der von der jährlichen Bewegung der Erde herrührt und einem zweiten, der durch die translatorische Bewegung des Sonnensystems hervorgerufen wird. Das zweite Glied allein würde die Aberration des Sternes, gesehen vom Sonnenmittelpunkte aus, geben. Dasselbe erscheint für denselben Stern konstant[1] und wird insofern in dessen mittlere Position aufgenommen gedacht, also nicht weiter berücksichtigt.

Das Glied 2. Ordnung hingegen lautet:

$$\begin{aligned}
\text{Gl. 2. Ordnung} = {} & \sin 1'' \operatorname{tg}^2 \delta' [-h \cos (H+\alpha') + k_0 \cos D \cos (A-\alpha')] [h \sin (H+\alpha') + k_0 \cos D \sin (A-\alpha')] \\
& - \sin 1'' \operatorname{tg} \delta' [h \sin (H+\alpha') + k_0 \cos D \sin (A-\alpha')] (i + k_0 \sin D)
\end{aligned}$$

---

[1] Vergl. die Schlußbemerkungen dieses Kapitels.

und, wenn wir die konstanten Glieder wieder weglassen

$$\text{Gl. 2. Ordnung} = \sin 1'' \operatorname{tg}^2\delta' [-h^2 \sin(H+\alpha')\cos(H+\alpha') + \\ + hk_0 \cos D \cos(A-\alpha')\sin(H+\alpha') - hk_0 \cos D \sin(A-\alpha')\cos(H+\alpha')] \\ - \sin 1'' \operatorname{tg}\delta' [hi \sin(H+\alpha') + k_0 i \cos D \sin(A-\alpha') + hk_0 \sin D \sin(H+\alpha')].$$

Hierin wird das Glied mit $tg\,\delta'$ immer zu vernachlässigen sein, nicht so das größere mit $tg^2\delta'$, namentlich, wenn wir die Aberration der dem Äquatorpole nahen Sterne in Betracht ziehen. Wir haben also:

$$\text{Gl. 2. Ordnung in } \alpha'-\alpha = -\frac{h^2}{2}\sin 1'' \sin 2(H+\alpha')\operatorname{tg}^2\delta' - hk_0 \sin 1'' \cos D \sin(A-H-2\alpha')\operatorname{tg}^2\delta'. \tag{10}$$

In diesem Ausdrucke könnte auch für $tg^2\delta' \ldots \sec^2\delta'-1$ und unter Vernachlässigung des niemals anwachsenden Gliedes mit dem Faktor 1 einfach $\sec^2\delta'$ geschrieben werden. Wir haben dann als erstes Glied denselben Ausdruck, wie früher, wenn wir von den gestrichelten Größen absehen, nur mit entgegengesetztem Zeichen. Dies erklärt sich jedoch sofort. Denn setzen wir einmal $\alpha'-\alpha = F_1(\alpha\delta)$, das andere Mal $\alpha'-\alpha = F_2(\alpha'\delta')$, so ist

$$\alpha'-\alpha = F_1(\alpha'-\Delta\alpha, \delta'-\Delta\delta) = F_1(\alpha'\delta') - \frac{dF}{d\alpha}\Delta\alpha - \frac{dF}{d\delta}\Delta\delta \ldots$$

und

$$\alpha'-\alpha = F_2(\alpha+\Delta\alpha, \delta+\Delta\delta) = F_2(\alpha\delta) + \frac{dF}{d\alpha}\Delta\alpha + \frac{dF}{d\delta}\Delta\delta \ldots,$$

woher sich der Zeichenwechsel im Gliede 2. Ordnung ergibt.

Das periodische Glied, welches von der Bewegung des Sonnensystems herrührt und strenge nicht außeracht gelassen werden darf, lautet somit in Rektaszension:

$$\Delta(\alpha'-\alpha) = -hk_0 \sin 1'' \cos D \sin(A-H-2\alpha')\operatorname{tg}^2\delta'. \tag{11}$$

Um den allgemeinen Ausdruck für $\delta'-\delta$ zu finden, verwenden wir (4) und (3):

$$\begin{array}{lll} 1. & V\cos\delta = L\cos\delta' \sec(\alpha'-\alpha) - M'\sec(\alpha'-\alpha) & \cos\delta' \quad \sin\delta' \\ 2. & V\sin\delta = L\sin\delta' - \dfrac{dz}{dt} & \sin\delta' \quad -\cos\delta'. \end{array}$$

(1).$\cos\delta'$+(2).$\sin\delta'$, ferner (1).$\sin\delta'$—(2).$\cos\delta'$ gibt

$$\left.\begin{array}{l} V\cos(\delta'-\delta) = L\cos^2\delta' \sec(\alpha'-\alpha) + L\sin^2\delta' - M'\sec(\alpha'-\alpha)\cos\delta' - \dfrac{dz}{dt}\sin\delta' \\ V\sin(\delta'-\delta) = L\sin\delta'\cos\delta'[\sec(\alpha'-\alpha)-1] - M'\sec(\alpha'-\alpha)\sin\delta' + \dfrac{dz}{dt}\cos\delta', \end{array}\right\}$$

daher

$$tg(\delta'-\delta) = \frac{\sin\delta'\cos\delta'[\sec(\alpha'-\alpha)-1] - \dfrac{1}{L}M'\sec(\alpha'-\alpha)\sin\delta' + \dfrac{1}{L}\dfrac{dz}{dt}\cos\delta'}{\cos^2\delta'\sec(\alpha'-\alpha) + \sin^2\delta' - \dfrac{1}{L}M'\sec(\alpha'-\alpha)\cos\delta' - \dfrac{1}{L}\dfrac{dz}{dt}\sin\delta'}. \tag{12}$$

Nun ist

$$\cos(\alpha'-\alpha) = 1 - \frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)^2 \sin^2 1'',$$

somit

$$\sec(\alpha'-\alpha) = 1 + \frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)^2 \sin^2 1'' = 1 + \frac{1}{2}C^2 N'^2 \sec^2\delta' \quad \text{(bis inkl. Gld. 2. Ordg.)}$$

Da $\frac{1}{L}$ von derselben Ordnung wie $C=\frac{1}{V}$ ist, so haben wir für das Produkt $\frac{1}{L}\sec(\alpha'-\alpha)$ einfach $\frac{1}{L}$ zu setzen, weil wir Glieder von Kleinheit 3. Ordnung nicht mehr mitnehmen, und erhalten:

$$(\delta'-\delta)\sin 1'' = \frac{\sin\delta'\cos\delta'\,\frac{C^2}{2}N'^2\sec^2\delta' - \frac{1}{L}M'\sin\delta' + \frac{1}{L}\frac{dz}{dt}\cos\delta'}{1+\frac{C^2}{2}N'^2\sec^2\delta'\cos^2\delta' - \frac{1}{L}M'\cos\delta' - \frac{1}{L}\frac{dz}{dt}\sin\delta'}$$

somit

$$(\delta'-\delta)\sin 1'' = \left(\frac{C^2}{2}N^2\,tg\,\delta' - \frac{1}{L}M'\sin\delta' + \frac{1}{L}\frac{dz}{dt}\cos\delta'\right)\left(1-\frac{C^2}{2}N'^2 + \frac{1}{L}M'\cos\delta' + \frac{1}{L}\frac{dz}{dt}\sin\delta'\ldots\right)$$

$$= \frac{C^2}{2}N'^2\,tg\,\delta' - \frac{1}{L}M'\sin\delta' + \frac{1}{L}\frac{dz}{dt}\cos\delta',$$

wobei die Glieder 2. Ordnung mit den Faktoren $\sin\delta'\cos\delta'$, $\cos^2\delta'$ und $\sin^2\delta'$, welche auch bei Polsternen nicht anzuwachsen vermögen, weggelassen wurden.

Schreiben wir abkürzend $M'\cos\delta' + \frac{dz}{dt}\sin\delta' = P$, so wird

$$L = V + P = V\left(1+\frac{P}{V}\right),\quad \frac{1}{L} = \frac{1}{V}\left(1-\frac{P}{V}\right) = C - C^2P,$$

somit

$$(\delta'-\delta)\sin 1'' = -CM'\sin\delta' + C\frac{dz}{dt}\cos\delta' + C^2M'P\sin\delta' - C^2P\frac{dz}{dt}\cos\delta' + \frac{C^2}{2}N'^2\,tg\,\delta'$$

und unter Weglassung der Glieder 2. Ordnung mit $\sin\delta'$ und $\cos\delta'$,

$$\delta'-\delta = -\frac{C}{\sin 1''}M'\sin\delta' + \frac{C}{\sin 1''}\frac{dz}{dt}\cos\delta' + \frac{1}{2}\frac{C^2}{\sin 1''}N'^2\,tg\,\delta',$$

daher

$$\delta'-\delta = [h\cos(H+\alpha') - k_0\cos D\cos(A-\alpha')]\sin\delta' + (i+k_0\sin D)\cos\delta'$$
$$+\frac{1}{2}\sin 1''\,[h\sin(H+\alpha') + k_0\cos D\sin(A-\alpha')]^2\,tg\,\delta'.$$

Mit Berücksichtigung der Glieder 1. Ordnung allein lautet also $\delta'-\delta$:

$$\underline{\delta'-\delta = h\cos(H+\alpha')\sin\delta' + i\cos\delta' - k_0\,[\cos D\cos(A-\alpha')\sin\delta' - \sin D\cos\delta']} \qquad (13)$$

Hierin geben die beiden ersten Glieder rechts wieder unseren Ausdruck für die jährliche Aberration. Das dritte Glied rührt von der Bewegung des Sonnensystems her, erweist sich als konstant und wird deshalb außeracht gelassen.

Die Glieder 2. Ordnung in $\delta'-\delta$ dagegen lauten, wenn wir das konstante Glied mit k_0^2 fortlassen:

$$\underline{\text{Gl. 2. Ordg. in } \delta'-\delta = \frac{h^2}{2}\sin 1''\sin^2(H+\alpha')\,tg\,\delta' + hk_0\sin 1''\cos D\sin(A-\alpha')\sin(H+\alpha')\,tg\,\delta'} \qquad (14)$$

Hierin ist das erste Glied wieder unser früheres Glied 2. Ordnung für die jährliche Aberration; nur tritt es jetzt mit entgegengesetztem Zeichen auf. Das periodische Glied hingegen, das von der Bewegung unseres Sonnensystems herrührt, lautet in Deklination:

$$\underline{\Delta(\delta'-\delta) = hk_0\sin 1''\cos D\sin(A-\alpha')\sin(H+\alpha')\,tg\,\delta'.} \qquad (15)$$

Um ein Urteil über die Größe von $\Delta(\alpha'-\alpha)$ und $\Delta(\delta'-\delta)$ bei Polsternen zu gewinnen, auf welche Korrektionen 2. Ordnung zuerst H. Seeliger a. a. O. aufmerksam gemacht hat, führen wir die folgenden numerischen Werte ein. Wir setzen

$$h = 20'', \quad A = 260°, \quad D = +30°, \quad k_0 = 20''\gamma,$$

worin h den abgerundeten Maximalwert der jährlichen Aberration $(=k)$ und γ einen unbestimmt gelassenen Faktor, der nach Gyldén nahezu gleich Eins, nach anderen kleiner, beziehungsweise größer ist, darstellt. Wir erhalten dann für $\sin(A-H-2\alpha') = 1$ $[H = 170°-2\alpha']$, beziehungsweise $\sin(H+\alpha') = 1$ $[H = 90-\alpha']$:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta(\alpha'-\alpha) \text{ Max.} = -20''20''\gamma \sin 1'' \cos 30° \, tg^2\delta' = -0''0017\,\gamma\, tg^2\delta' \\ \Delta(\delta'-\delta) \text{ Max.} = +20''20''\gamma \sin 1'' \cos 30° \sin(260°-\alpha')\, tg\delta' = +0''0017\,\gamma\, tg\delta' \sin(260°-\alpha') \end{array}\right\}$$

Führen wir weiter die genäherten scheinbaren Positionen für die Polsterne α und λ ursae minoris ein und zwar:

	α urs. min.	λ urs. min.
$\alpha' =$	$1^h\ 16^m$	$19^h\ 40^m$
$\delta' =$	$+88°41'$	$+88°57'$,

welche dem Berliner astronomischen Jahrbuche für den 1. Jänner 1883 entnommen sind.

Dann ergibt sich

	α urs. min.	λ urs. min.
$\Delta(\alpha'-\alpha) =$	$-0^s21\,\gamma$	$-0^s33\,\gamma$
$\Delta(\delta'-\delta) =$	$-0''06\,\gamma$	$-0''05\,\gamma$,

welche Beträge strenge nicht vernachlässigt werden dürfen und, weil dies allgemein doch geschieht, eine zu große Genauigkeit in den Positionsangaben der Polsterne illusorisch erscheinen lassen.

Ferner ist noch eine Bemerkung über die obigen Glieder 1. Ordnung mit k_0 zu machen, die gewöhnlich zufolge ihrer Konstanz nicht berücksichtigt zu werden pflegen. Dieselben lauteten in

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha'-\alpha: & k_0 \cos D \sin(A-\alpha') \sec\delta' \\ \delta'-\delta: & -k_0 [\cos D \cos(A-\alpha') \sin\delta' - \sin D \cos\delta']. \end{array}\right\}$$

In diesen Ausdrücken können wohl k_0, A und D als konstant, nicht aber so die scheinbaren Koordinaten des Sternes α' und δ' betrachtet werden. Letztere ändern sich um kleine Beträge von Tag zu Tag wegen Präzession, Nutation und jährlicher Aberration. Wird aber die Rechnung mit einem festen Werte für α' und δ' geführt, während dies für eine spezielle Zeit und Beobachtung mit $\alpha'+d\alpha'$ und $\delta'+d\delta'$ geschehen sollte, so frägt es sich um den Einfluß der Vernachlässigungen $d\alpha'$ und $d\delta'$ in $\alpha'-\alpha$ und $\delta'-\delta$, soweit nur Glieder 1. Ordnung in Betracht gezogen werden. Fassen wir dieselben als Differentiale auf, so folgt:

$$\left.\begin{array}{l} d(\alpha'-\alpha) = -k_0 \cos D \cos(A-\alpha') \sec\delta'\, d\alpha' \sin 1'' + k_0 \cos D \sin(A-\alpha')\, tg\delta' \sec\delta'\, d\delta' \sin 1'' \\ d(\delta'-\delta) = -k_0 \cos D \sin(A-\alpha') \sin\delta'\, d\alpha' \sin 1'' - k_0 [\cos D \cos(A-\alpha') \cos\delta' + \sin D \sin\delta']\, d\delta' \sin 1'', \end{array}\right\}$$

wobei $d \sec\delta' = tg\delta' \sec\delta'\, d\delta' \sin 1''$ gesetzt wurde. Nimmt man für α ursae minoris und die Berliner obere Kulmination am 1. Jänner 1883: $\alpha' = 1^h 16^m 25^s$, $\delta' = +88°41'29''$, im übrigen aber wieder die obigen Werte an, so erhält man

$$d(\alpha'-\alpha) = [7\cdot 2524]\,\gamma\, d\alpha' - [9\cdot 1480]\,\gamma\, d\delta'$$
$$d(\delta'-\delta) = [5\cdot 8654]\,\gamma\, d\alpha' - [5\cdot 6771]\,\gamma\, d\delta',$$

worin $d\alpha'$ und $d\delta'$ in Bogensekunden gedacht und die eckigen Klammern die Logarithmen der betreffenden Faktoren sind. Geht man nun vom angeführten Datum aus, so resultiert für

		$d\alpha'$	$d\delta'$	$d(\alpha'-\alpha)$	$d(\delta'-\delta)$
1. April . . .	1883	$-897''$	$-14''0$	$+0^s02\,\gamma$	$-0''07\,\gamma$
1. Juli . . .	1883	-90	$-32\cdot0$	$+0\cdot29\,\gamma$	$-0\cdot01\,\gamma$
1. Oktober . .	1883	$+914$	$-10\cdot8$	$+0\cdot21\,\gamma$	$+0\cdot01\,\gamma$
1. Jänner . .	1884	$+395$	$+16\cdot6$	$-0\cdot11\,\gamma$	$+0\cdot03\,\gamma$,

welche Korrektionsgrößen gleichfalls nicht unbedeutend sind und strenge in Rechnung gezogen werden sollten.

Endlich sei noch der periodischen Bewegung der Sonne, die durch die Anziehung der Planeten auf die Sonne hervorgerufen wird und welche die von der Sonnenbewegung im Raume abhängigen Aberrationsglieder variabel gestattet, gedacht. Nennen wir die Masse der Sonne M, diejenige des Planeten μ, den Abstand beider voneinander ρ, so lautet die gegenseitige Anziehung nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz $\frac{M\mu}{\rho^2}$. Dabei ist die Beschleunigung (Wirkung auf die Masseneinheit) der Sonne $\frac{\mu}{\rho^2}$ jene des Planeten $\frac{M}{\rho^2}$, das heißt, die Sonne mit der größeren Masse erhält die kleinere, der Planet mit der kleineren Masse die größere Beschleunigung. Deshalb verhalten sich auch die Dimensionen der Ellipsen, welche beide Himmelskörper um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt beschreiben, umgekehrt wie ihre Massen. Fassen wir nun den einflußreichsten Planeten unseres Sonnensystems, d. i. Jupiter ins Auge und messen dessen Masse durch diejenige der Sonne, wobei $\frac{\mu}{M} = m$ und $M = 1$ genommen wird, so muß die Bewegung Jupiters proportional der Sonnenmasse 1, jene der Sonne proportional der Jupitermasse m vor sich gehen, und ebenso ist es mit den hieraus entspringenden Aberrationskonstanten für Jupiter und die Sonne. Heißt erstere k_1, so lautet letztere mk_1. Um k_1 zu finden, genügt es, die Planetenbahnen als Kreise zu betrachten. Bezeichnet man die Umlaufszeiten von Jupiter und Erde mit τ_1 und τ, die Radien ihrer Bahnen mit a_1 und a, ferner die linearen Bahngeschwindigkeiten beider mit v_1 und v, so ist

$$v_1 = \frac{2a_1\pi}{\tau_1} \qquad v = \frac{2a\pi}{\tau},$$

somit

$$\frac{v_1}{v} = \frac{a_1}{a} \cdot \frac{\tau}{\tau_1}.$$

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetze hat man aber

$$\frac{\tau^2}{\tau_1^2} = \frac{a^3}{a_1^3},$$

also

$$\frac{v_1}{v} = \frac{a_1}{a} \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a_1^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_1}}.$$

Wird wieder die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde, d. i. a, gleich Eins gesetzt, so folgt

$$\frac{v_1}{v} = \frac{1}{\sqrt{a_1}}$$

und

$$k_1 = \frac{v_1}{V \sin 1''} = \frac{v}{\sqrt{a_1}} \frac{1}{V \sin 1''} = \frac{k}{\sqrt{a_1}}.$$

Die Aberrationskonstante der Sonnenbewegung lautet daher:

$$m \,.\, \frac{k}{\sqrt{a_1}}.$$

Wird $m = \frac{1}{1050}$, $a_1 = 5 \cdot 20$ genommen, so beträgt die durch die Anziehung Jupiters erzeugte Aberration $0''.0086$, welche selbst beim Polarsterne nur auf wenige Hundertstel Sekunden anwachsen und deshalb vollständig vernachlässigt werden kann.— Ebenso ist es auch bei den Änderungen der Aberration, welche die Störungen der Planeten auf unsere Erdbewegung hervorrufen, der Fall.