

# HÖHENBERECHNUNG DER STERNSCHNUPPEN

VON

PROF. DR. E. WEISS,

W. M. K. A.

*Mit 14 Textfiguren.*

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 17. JULI 1904.

Gleichwie in vielen anderen Zweigen der Astronomie die Photographie eine stets wachsende Bedeutung gewinnt, ist sie namentlich auch in der Meteorastronomie berufen, die Genauigkeit der Beobachtungen dieser flüchtigen Phänomene auf jene Höhe zu heben, welche bei der Beobachtung anderer Erscheinungen erreicht wird.

Eine vorzügliche Gelegenheit, diese neue Beobachtungsmethode zu erproben und ihre Vorteile in helles Licht zu setzen, schien sich den Astronomen in 1899 zu eröffnen, wo man der Rückkehr des großen Leonidenstromes mit Zuversicht entgegenseh, der, abgesehen von früheren bis auf das Jahr 902 unserer Zeitrechnung zurückreichenden Erscheinungen, in 1799, 1832/33 und 1866 zu glänzenden Sternschnuppenfällen Veranlassung gegeben hatte. Ich faßte daher im Jahre 1897 den Plan, bei der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften die Organisation einer Expedition zur photographischen Aufnahme der bevorstehenden Leonidenerscheinung zu beantragen, bei welcher außer einer genauen Bestimmung der Lage und des Charakters des Radiationspunktes auch korrespondierende Beobachtungen ins Auge gefaßt wurden, von denen ich mir eine reiche Ausbeute und mancherlei interessante Resultate versprach.

Um die Berechnung der letzteren, der verfeinerten Beobachtungsmethode entsprechend, auf eine möglichst sichere Basis begründen zu können, unterzog ich zunächst die Methoden der Höhenberechnung der Meteore, welche bisher in Anwendung gekommen sind, einer kritischen Durchsicht und fand dabei sehr bald, daß keine derselben von ihrem Autor auf die einfachste Form gebracht worden sei, deren sie fähig ist, was ich bei der Bessel'schen, oder richtiger gesagt, Quételet-Bessel'schen Methode schon vor mehr als 30 Jahren nachgewiesen habe. Bei den älteren Methoden von Brandes und Olbers rührt dies hauptsächlich daher, daß als Unbekannte die Entfernung des Meteoros vom Zentrum der Erde oder anders ausgedrückt, jener Erdort eingeführt wird, in dessen Zenit das Meteor aufleuchtete oder verlösch. Auf den ersten Blick scheint dies allerdings das Zweckmäßigste zu sein, weil man die gesuchte Größe, nämlich die Höhe des Meteoros über der Erdoberfläche aus seiner Entfernung vom Erdzentrum durch einfaches Abziehen des Erdradius erhält. Bei näherer Betrachtung erkennt man aber sehr bald, daß es

naturgemäßer ist, die Entfernung des Meteores vom Beobachter als Unbekannte zugrunde zu legen. Um aus dieser die Höhe des Meteores zu erhalten, hat man jetzt freilich noch seine scheinbare Höhe zu berechnen, außer man hat die Positionen an einem Meteoroskope eingestellt, das Höhen und Azimute gibt. Diese Mehrarbeit wird aber schon dadurch reichlich aufgewogen, daß die Formeln viel einfacher, zum Teile sogar so einfach und durchsichtig werden, daß man schon aus dem bloßen Anblicke der Beobachtungen ohne jedwede Rechnung erkennt, ob die Methode in dem speziellen Falle ein sicheres Resultat ergibt. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß man die Rechnung durchaus nur mit Logarithmen von vier Dezimalen zu führen braucht, während wenigstens teilweise Logarithmen mit mehr Dezimalen in Anwendung kommen müssen, wenn man die Höhe des Meteores aus dessen Entfernung vom Erdzentrum ermittelt, weil diese stets nur einen kleinen Bruchteil des Erdradius erreicht und aus der Subtraktion dieses letzteren von der berechneten Distanz hervorgeht. Des weiteren sind bei manchen Methoden die Koordinaten der Beobachtungsorte gegen einander in einer für die Rechnung wenig zweckmäßigen Form eingeführt und bei den meisten derselben auch die Voraussetzungen nicht näher präzisiert, auf welche sie gegründet sind.

Ich habe mich nun in den folgenden Blättern bemüht, die wichtigsten der bisher bekannten Methoden der Höhenberechnung der Meteore auf ihre einfachste Form zurückzuführen, ihr gegenseitiges Verhalten in Bezug auf die Sicherheit des gewonnenen Resultates zu charakterisieren und die Voraussetzungen klarzulegen, auf denen sie aufgebaut sind. Den Bekannten habe ich außerdem noch ein paar neue Berechnungsvorschriften beigelegt, die sich durch Einfachheit auszeichnen und auch die Vorarbeiten unter Beibehaltung voller Strenge möglichst zu vereinfachen gesucht.

Der Zweck, den ich dabei im Auge hatte war der, zu zahlreicheren korrespondierenden Beobachtungen und Höhenberechnungen von Meteoren anzuregen. Ich bin nämlich der Überzeugung, daß es bei der großen Anzahl von Radiationspunkten, die nicht nur im Laufe eines Jahres nacheinander auftreten, sondern häufig auch in ein und derselben Nacht tätig sind, nur korrespondierende Beobachtungen ermöglichen werden, zu einer einwandfreien Bestimmung der Zahl und Position der tatsächlich vorhandenen Radianen zu gelangen und daß auch nur durch korrespondierende Beobachtungen die in neuerer Zeit wieder in den Vordergrund der Diskussion getretene Frage über das Vorhandensein von Radianen, die wochenlang ihren Ort am Himmel nahezu unverändert beibehalten, ihre endgültige Lösung finden wird. Ebenso dürften hinreichend zahlreiche Höhenbestimmungen von Meteoren das Material zu interessanten und wichtigen Untersuchungen verschiedener Art darbieten. In Betreff dieses Punktes, beschränke ich mich hier darauf hinzuweisen, daß einige größere Beobachtungsreihen des Laurentius- und Leonidenstromes anzudeuten scheinen, daß deren Metcore zu verschiedenen Zeiten in verschiedenen Höhen aufleuchten und verschwinden, was, wenn es sich durch weitere Beobachtungen bestätigen sollte wohl nur von temporären Veränderungen in den Zuständen der höchsten Schichten unserer Atmosphäre herrühren kann.

Zum Schlusse möchte ich noch bemerken, daß ich die Genauigkeit der Entwicklungen insbesondere bei den Vorbereitungsrechnungen weiter getrieben habe, als es für visuelle Beobachtungen erforderlich gewesen wäre, in der Erwartung, daß die Photographie binnen kurzem bei korrespondierenden Beobachtungen kräftig eingreifen wird.

## § 1.

### Berechnung der Koordinaten der Beobachtungsorte gegeneinander.

#### I. Berechnung, bezogen auf das System des Äquators.

Seien  $\varphi$ ,  $\varphi'$  und  $\varphi_1$ ,  $\varphi_1'$  die scheinbaren und geozentrischen Polhöhen und  $\rho$ ,  $\rho'$  die Radien der Beobachtungsorte  $O$  und  $O_1$ , sowie in einem durch die Polarachse und den Mittelpunkt der Erde gelegten

rechtwinkligen Koordinatensysteme, dessen  $x$ -Achse in der Meridianebene von  $O$  liegt, die Koordinaten von  $O$ :  $\xi, \eta, \zeta$  und die von  $O_1$ :  $\xi', \eta', \zeta'$ , so hat man die Winkel in der  $XY$ -Ebene, d. h. in der des Äquators von Süd über West zählend:

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \varphi_1 & \xi' &= \rho' \cos \varphi'_1 \cos \lambda \\ \eta &= 0 & \eta' &= -\rho' \cos \varphi'_1 \sin \lambda \\ \zeta &= \rho \sin \varphi_1 & \zeta' &= \rho' \sin \varphi'_1, \end{aligned}$$

wenn  $\lambda$  die Längendifferenz von  $O_1$  gegen  $O$  östlich positiv genommen vorstellt.

Bezeichnet man ferner mit  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, R, D, S$  die relativen Koordinaten von  $O_1$ , bezogen auf  $O$ , wo, wie leicht ersichtlich,  $R$  die Entfernung der beiden Beobachtungsorte, so wie  $D$  und  $S$  Deklination und Stundenwinkel des von  $O$  aus gesehenen Ortes  $O_1$  sind, so hat man:

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \xi' - \xi = R \cos D \cos S = \rho' \cos \varphi'_1 \cos \lambda - \rho \cos \varphi_1 \\ \eta_0 &= \eta' - \eta = R \cos D \sin S = -\rho' \cos \varphi'_1 \sin \lambda \\ \zeta_0 &= \zeta' - \zeta = R \sin D = \rho' \sin \varphi'_1 - \rho \sin \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Legt man aber die  $x$ -Achse des Koordinatensystems in den Meridian des Ortes  $O_1$ , und sucht man die Koordinaten von  $O$  bezogen auf  $O_1$ , welche  $R', D'$  und  $S'$  genannt werden mögen, so hat man in gleicher Weise:

$$\left. \begin{aligned} R' \cos D' \cos S' &= \rho \cos \varphi_1 \cos \lambda - \rho' \cos \varphi'_1 \\ R' \cos D' \sin S' &= +\rho \cos \varphi_1 \sin \lambda \\ R' \sin D' &= \rho \sin \varphi_1 - \rho' \sin \varphi'_1. \end{aligned} \right\} \quad (1^*)$$

Da selbstverständlich  $R'=R$ , folgt aus den letzten Gleichungen der Systeme (1) und (1<sup>\*</sup>) unmittelbar  $D'=-D$  und sodann aus einer entsprechenden Kombination der beiden ersten Gleichungen dieser Systeme:

$$\begin{aligned} R^2 \cos^2 D \sin(S'-S) &= -(\rho^2 \cos^2 \varphi_1 - 2\rho\rho' \cos \varphi_1 \cos \varphi'_1 \cos \lambda + \rho'^2 \cos^2 \varphi'_1) \sin \lambda \\ R^2 \cos^2 D \cos(S'-S) &= -(\rho^2 \cos^2 \varphi_1 - 2\rho\rho' \cos \varphi_1 \cos \varphi'_1 \cos \lambda + \rho'^2 \cos^2 \varphi'_1) \cos \lambda \\ \text{d. h. } \operatorname{tg}(S'-S) &= \operatorname{tg} \lambda \\ S'-S &= 180 + \lambda. \end{aligned}$$

Der Quadrant, in dem  $S'-S$  liegt, ist dadurch unzweideutig bestimmt, daß  $R^2 \cos^2 D$  und  $\rho^2 \cos^2 \varphi_1 - 2\rho\rho' \cos \varphi_1 \cos \varphi'_1 \cos \lambda + \rho'^2 \cos^2 \varphi'_1$  wesentlich positive Größen sind. Es bestehen daher zwischen  $R, D, S$  und  $R', D', S'$  die einfachen Relationen:

$$\left. \begin{aligned} S' &= 180 + S + \lambda \\ D' &= -D \\ R' &= R. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Sind die Seehöhen  $k$  und  $k'$  der Beobachtungsorte so bedeutend, daß man deren Berücksichtigung für wünschenswert erachtet, so geschieht dies am einfachsten dadurch, daß man in die Gleichungen (1)  $\rho+k$  und  $\rho'+k'$  statt  $\rho$  und  $\rho'$  einsetzt. Sie lauten dann:

$$\left. \begin{aligned} R \cos D \sin S &= -(\rho' + k') \cos \varphi'_1 \sin \lambda \\ R \cos D \cos S &= (\rho' + k') \cos \varphi'_1 \cos \lambda - (\rho + k) \cos \varphi_1 \\ R \sin D &= (\rho' + k') \sin \varphi'_1 - (\rho + k) \sin \varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



Die Berechnung dieses Gleichungssystemes ist in doppelter Beziehung unbequem; erstens, weil in ihm die geozentrischen Polhöhen vorkommen, und zweitens, weil die beiden letzten Gleichungen sich aus der Differenz zweier großer Zahlen zusammensetzen, die sich der Hauptsache nach aufheben. Dies ist allerdings von geringer Bedeutung, wenn man es nur mit zwei Beobachtungsorten zu tun hat, wo die Rechnung bloß einmal durchzuführen ist. Sind aber Beobachtungen an einer größeren Anzahl von Stationen angestellt, so wird die Berechnung aller vorkommenden Kombinationen recht zeitraubend. Man begnügt sich daher in der Regel mit einer genäherten Berechnung, die wohl in den meisten Fällen, insbesondere aber für Überschlagsrechnungen völlig ausreicht.

Vernachlässigt man nämlich den Unterschied zwischen scheinbarer und geozentrischer Breite, sowie die Seehöhen der Beobachtungsorte; setzt man ferner  $\rho = \rho' =$  dem Erdradius für die Breite  $\frac{\varphi + \varphi'}{2}$  und überdies  $\cos \lambda = 1$ , so vereinfachen sich die vorstehenden Gleichungen zunächst in:

$$\begin{aligned} R \cos D \sin S &= -\rho \cos \varphi' \sin \lambda \\ R \cos D \cos S &= \rho (\cos \varphi' - \cos \varphi) = -\rho \sin \frac{\varphi' + \varphi}{2} \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} \\ R \sin D &= \rho (\sin \varphi' - \sin \varphi) = +2\rho \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2} \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2}, \end{aligned}$$

die man mit demselben Grade der Annäherung noch weiter abkürzen kann in:

$$\left. \begin{aligned} R \cos D \sin S &= -\rho \lambda \cos \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi) \\ R \cos D \cos S &= -\rho (\varphi' - \varphi) \sin \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi) \\ R \sin D &= +\rho (\varphi' - \varphi) \cos \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi). \end{aligned} \right\} (4)$$

Das Gleichungssystem (3) läßt sich aber durch einige einfache Transformationen so umgestalten, daß es mit derselben Leichtigkeit wie (4) die strengen Werte von  $R$ ,  $S$  und  $D$  liefert.

Die  $k$  und  $k'$  genannten Seehöhen der Beobachtungsorte sind gegenüber dem Erdradius stets sehr klein. Ebenso ist auch  $\lambda$  stets ein kleiner Bogen. Es kann daher in der ersten der Gleichungen 3 das Glied  $k' \cos \varphi'_1 \sin \lambda$  unbedenklich vernachlässigt, und in der zweiten  $k' \cos \varphi'_1 \cos \lambda$  durch  $k' \cos \varphi'_1$  ersetzt werden. Ebenso unbedenklich können in den mit  $k$  und  $k'$  multiplizierten Gliedern die geozentrischen mit den scheinbaren Polhöhen vertauscht, und dann die Ausdrücke  $k' \cos \varphi'_1 - k \cos \varphi_1$  und  $k' \sin \varphi'_1 - k \sin \varphi_1$  in  $(k' - k) \cos \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi)$  und  $(k' - k) \sin \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi)$  gekürzt werden. Endlich kann, wenn  $\lambda$  in Graden ausgedrückt und  $\sin \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2} \sin 1^\circ$  gesetzt wird, mit einer selbst für  $\lambda = 10^\circ$  noch völlig ausreichenden Annäherung angenommen werden:

$$\rho' \cos \varphi'_1 \cos \lambda = \rho' \cos \varphi'_1 - \frac{1}{2} \sin^2 1^\circ \cdot \rho' \cos \varphi'_1 \cdot \lambda^2 = \rho' \cos \varphi'_1 - 0.0001523 \cdot \rho' \cos \varphi'_1 \cdot \lambda^2.$$

Führt man diese Umänderungen in das Gleichungssystem (3) ein, so verwandelt es sich in:

$$\left. \begin{aligned} R \cos D \sin S &= -\rho' \cos \varphi'_1 \sin \lambda \\ R \cos D \cos S &= +\rho' \cos \varphi'_1 - 0.0001523 \cdot \rho' \cos \varphi'_1 \cdot \lambda^2 - \rho \cos \varphi_1 + (k' - k) \cos \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi) \\ R \sin D &= +\rho' \sin \varphi'_1 - \rho \sin \varphi_1 + (k' - k) \sin \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi). \end{aligned} \right\} (5)$$

Es crübrigt uns jetzt noch, die in den Gleichungen (5) enthaltenen geozentrischen Größen durch die scheinbaren zu ersetzen. Dazu liefern uns die Gleichungen der Ellipse, wenn man die Abplattung  $\frac{a-b}{a}$  des Erdsphäroides mit  $\alpha$  bezeichnet, unschwer die Relationen:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{[1-2(2\alpha-3\alpha^2+2\alpha^3\dots)\sin^2\varphi]a^2}{1-(2\alpha-\alpha^2)\sin^2\varphi} = \left[1-\alpha\sin^2\varphi + \frac{5}{2}\alpha^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\dots\right]^2 a^2 \\ \rho\sin\varphi_1 &= \frac{(1-\alpha)^2}{\sqrt{1-(2\alpha-\alpha^2)\sin^2\varphi}} \cdot a\sin\varphi = \left[1-(1+\cos^2\varphi)\alpha + \frac{1}{2}(3\cos^2\varphi-1)\cos^2\varphi\alpha^2\dots\right] a\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-(2\alpha-\alpha^2)\sin^2\varphi}} \cdot a\cos\varphi = \left[1+\alpha\sin^2\varphi + \frac{1}{2}(3\sin^2\varphi-1)\sin^2\varphi\alpha^2\dots\right] a\cos\varphi. \end{aligned}$$

Geht man auf Logarithmen über und ersetzt man unter Einem die Potenzen der trigonometrischen Funktionen durch Funktionen der vielfachen Winkel, so erhält man:

$$\begin{aligned} \log\rho &= -M\left[\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{8}\dots\right)-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{4}\dots\right)\cos 2\varphi + \left(\frac{3}{8}\dots\right)\cos 4\varphi\dots\right] + \log a \\ \log\rho\sin\varphi_1 &= -M\left[\left(\frac{3}{2}\alpha+\frac{7}{8}\alpha^2\dots\right)+\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{4}\dots\right)\cos 2\varphi - \left(\frac{1}{8}\alpha^2\dots\right)\cos 4\varphi\dots\right] + \log a + \log\sin\varphi \\ \log\rho\cos\varphi_1 &= +M\left[\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{8}\alpha^2\dots\right)-\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{\alpha^2}{4}\dots\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{1}{8}\alpha^2\dots\right)\cos 4\varphi\dots\right] + \log a + \log\cos\varphi, \end{aligned} \tag{6}$$

wo  $M$  den Modul des Logarithmensystemes vorstellt.

Für Bessel's Erdsphäroid:

$$a = 6377 \cdot 397 \text{ km}, \quad \alpha = \frac{1}{299 \cdot 15} = 0 \cdot 0033428$$

haben wir demnach:

$$\begin{aligned} \log\rho &= 3 \cdot 8039182 + 0 \cdot 0007271 \cos 2\varphi - 0 \cdot 0000018 \cos 4\varphi\dots \\ \log\rho\sin\varphi_1 &= 3 \cdot 8024616 - 0 \cdot 0007271 \cos 2\varphi + 0 \cdot 0000006 \cos 4\varphi\dots + \log\sin\varphi \\ \log\rho\cos\varphi_1 &= 3 \cdot 8053700 - 0 \cdot 0007271 \cos 2\varphi + 0 \cdot 0000006 \cos 4\varphi\dots + \log\cos\varphi. \end{aligned} \tag{6^*}$$

Für Clarke's Erdsphäroid:

$$a = 6378 \cdot 249 \text{ km}, \quad \alpha = \frac{1}{293 \cdot 465} = 0 \cdot 0034076$$

findet sich:

$$\begin{aligned} \log\rho &= 3 \cdot 8039622 + 0 \cdot 0007412 \cos 2\varphi - 0 \cdot 0000019 \cos 4\varphi\dots \\ \log\rho\sin\varphi_1 &= 3 \cdot 8024773 - 0 \cdot 0007412 \cos 2\varphi + 0 \cdot 0000006 \cos 4\varphi\dots + \log\sin\varphi \\ \log\rho\cos\varphi_1 &= 3 \cdot 8054421 - 0 \cdot 0007412 \cos 2\varphi + 0 \cdot 0000006 \cos 4\varphi\dots + \log\cos\varphi. \end{aligned} \tag{6^{**}}$$

Das Gleichungssystem 6\* hat die Form:

$$\log(\rho \sin \varphi_1) = \log A + \log \sin \varphi$$

$$\log(\rho \cos \varphi_1) = \log B + \log \cos \varphi$$

$$\log \rho = C,$$

wo  $A$ ,  $B$ ,  $C$  Funktionen der geographischen Breite sind, die sich mit derselben nur sehr langsam ändern und infolge dessen leicht tabuliert werden können, wie die folgende Tafel zeigt, welche dieselben von  $\varphi = 30^\circ$  bis  $\varphi = 60^\circ$  mit Bessels Erdsphäroid berechnet enthält.

$\varphi$	$\log \rho$	$\Delta$	$\log A$	$\Delta$	$\log B$
30°	3·80429	— 3	3·80219	+ 2	8·80501
31	26	2	12	2	03
32	24	2	14	2	05
33	22	3	16	3	07
34	19	2	19	2	10
35	17	3	21	3	12
36	14	2	24	2	15
37	12	3	26	2	17
38	10	3	28	3	19
39	07	2	31	2	22
40	05	3	33	3	24
41	02	2	36	2	27
42	3·80400	3	38	3	29
43	3·80397	2	41	2	32
44	95	3	43	3	24
45	92	3	46	3	37
46	89	2	49	2	40
47	87	3	51	3	42
48	84	2	54	2	45
49	82	3	56	3	47
50	79	2	59	2	50
51	77	3	61	3	52
52	74	2	64	2	55
53	72	3	66	2	57
54	69	2	68	3	59
55	67	2	71	2	62
56	65	3	73	3	64
57	62	2	76	2	67
58	60	2	78	2	69
59	58	— 2	80	+ 2	71
60	3·80356		3·80282		3·80573

Zieht man es vor, mit den Clarke'schen Werten zu rechnen, so hat man den Zahlen der obigen Tafel in Einheiten der 5. Dezimale hinzuzufügen:

von $\varphi = 30^\circ$ bis $\varphi = 45^\circ$	$\Delta \log \rho: +5$	von $\varphi = 30^\circ$ bis $\varphi = 43^\circ$	$\Delta \log A: +1$
» $\varphi = 46$ » $\varphi = 60$	+4	» $\varphi = 44$ » $\varphi = 60$	+2
von $\varphi = 30^\circ$ bis $\varphi = 51^\circ$	$\Delta \log B: +7$		
» $\varphi = 52$ » $\varphi = 60$	+8.		

Schreibt man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \rho \cos \varphi_1 &= f_c \\ \rho \sin \varphi_1 &= f_s \\ 0.0001523 f_c &= z, \end{aligned}$$

so werden die Gleichungen (5)

$$\left. \begin{aligned} R \cos D \sin S &= -f'_c \sin \lambda \\ R \cos D \cos S &= f'_c - z' \lambda^2 - f_c + (k' - k) \cos \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi) \\ R \sin D &= f'_s - f_s + (k' - k) \sin \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi), \end{aligned} \right\} (5^*)$$

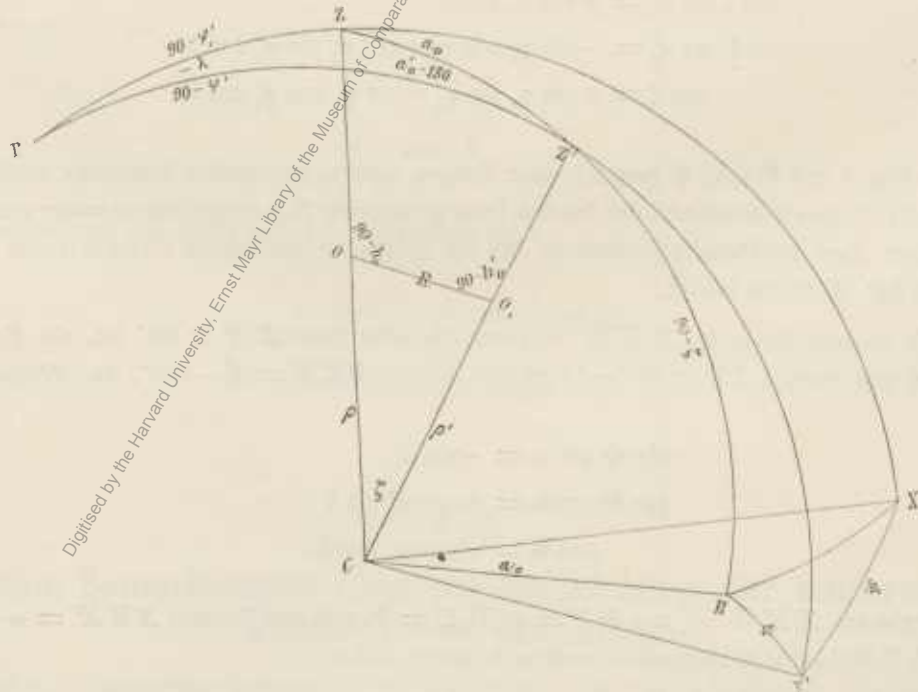
in denen die auf den zweiten Ort sich beziehenden Werte von  $f'_c$  und  $f'_s$  der Unterscheidung halber mit einem Akzente versehen wurden. Legt man sich nun eine Hilfstafel an, welche für die vorhandenen Beobachtungsorte die Quantitäten:

$$\log f'_c, f_c, f_s \text{ und } z$$

ergibt, so läßt das Formelsystem (5), resp. (5\*) bei voller Strenge an Kürze und Bequemlichkeit der Berechnung kaum etwas zu wünschen übrig.

## II. Berechnung der Koordinaten der Erdorte gegeneinander im System des Horizontes.

Sei (Fig. 1)  $C$  das Zentrum der Erde, und stellen  $P Z Z'$  die Projektionen des Poles und der geo-



zentrischen Zenite der Beobachtungsorte  $O$  und  $O_1$  auf die Himmelskugel vor; bezeichnet man ferner mit  $a_0, h_0$  Azimut und Höhe von  $O_1$  aus  $O$  gesehen, mit  $a'_0, h'_0$  dieselben Größen für  $O$  von  $O_1$  aus



gesehen, sowie mit  $\zeta$  den Winkel, den die Zenitlinien am Mittelpunkte der Erde miteinander einschließen, und behält man im übrigen die bereits gebrauchten Bezeichnungen bei, so liefert das Dreieck  $O O_1 C$  die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} R \cos h_0 &= \rho' \sin \zeta \\ R \sin h_0 &= \rho' \cos \zeta - \rho \\ R \cos h'_0 &= \rho \sin \zeta \\ R \sin h'_0 &= \rho \cos \zeta - \rho' \\ h_0 + h'_0 + \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Größen  $a_0$ ,  $a'_0$  und  $\zeta$  ergeben sich am einfachsten aus dem sphärischen Dreiecke  $P, Z, Z'$  mittelst der Gauß'schen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} (a'_0 + a_0) \sin \frac{1}{2} \zeta &= -\sin \frac{1}{2} (\varphi'_1 - \varphi_1) \cos \frac{1}{2} \lambda \\ \cos \frac{1}{2} (a'_0 + a_0) \sin \frac{1}{2} \zeta &= +\cos \frac{1}{2} (\varphi'_1 + \varphi_1) \sin \frac{1}{2} \lambda \\ \sin \frac{1}{2} (a'_0 - a_0) \cos \frac{1}{2} \zeta &= +\cos \frac{1}{2} (\varphi'_1 - \varphi_1) \cos \frac{1}{2} \lambda \\ \cos \frac{1}{2} (a'_0 - a_0) \cos \frac{1}{2} \zeta &= -\sin \frac{1}{2} (\varphi'_1 + \varphi_1) \sin \frac{1}{2} \lambda \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

oder auch aus den Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \sin \zeta \sin a_0 &= -\cos \varphi'_1 \sin \lambda \\ \sin \zeta \cos a_0 &= -\sin \varphi'_1 \cos \varphi_1 + \cos \varphi'_1 \sin \varphi_1 \cos \lambda \\ \sin \zeta \sin a'_0 &= +\cos \varphi_1 \sin \lambda \\ \sin \zeta \cos a'_0 &= -\sin \varphi_1 \cos \varphi'_1 + \cos \varphi_1 \sin \varphi'_1 \cos \lambda \\ \cos \zeta &= +\sin \varphi_1 \sin \varphi'_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi'_1 \cos \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (8^*)$$

Von den in Fig. 1 mit  $\Psi$  und  $\Phi$  bezeichneten Bögen, welche wir später brauchen, stellt der eine den Winkel vor, den die in den Meridianen der beiden Orte gelegenen X-Achsen miteinander einschließen, der andere den Winkel, den die Durchschnittslinie des die Zenite verbindenden Höhenkreises und des Horizontes von  $O$  mit der X-Achse bildet.

Nennen wir in dem Dreiecke  $X' Z' \Pi$ , in dem die eine Seite  $Z' X' = 90^\circ$  ist, als Entfernung des Zenites vom Pole, die andere  $Z' \Pi = 90^\circ - \zeta$  und der Winkel  $\Pi Z' X' = a'_0 - 180^\circ$ , den Winkel  $Z' \Pi X' = \omega$ , so haben wir:

$$\begin{aligned} \sin \Phi \sin \omega &= -\sin a'_0 \\ \sin \Phi \cos \omega &= +\cos a'_0 \sin \zeta \\ \cos \Phi &= -\cos a'_0 \cos \zeta. \end{aligned}$$

In dem Dreiecke  $X X' \Pi$  ist nun  $\Pi X = a_0$ ,  $\Pi X' = \Phi$  und der Winkel  $X \Pi X' = \omega - 90^\circ$ , da der Höhenkreis  $Z, Z', \Pi$  auf seinem Horizonte senkrecht steht; daher:

$$\begin{aligned} \cos \Psi &= \cos a_0 \cos \Phi + \sin a_0 \sin \Phi \sin \omega \\ \cos \Psi &= -(\sin a_0 \sin a'_0 + \cos a_0 \cos a'_0 \cos \zeta). \end{aligned}$$



Die Lösung der umgekehrten Aufgabe, nämlich  $\lambda$ ,  $\varphi_1$  und  $\varphi'_1$  aus  $\zeta$ ,  $a_0$  und  $a'_0$  zu suchen, vermitteln die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sin \lambda \cos \varphi_1 &= +\sin a'_0 \sin \zeta \\ \sin \lambda \sin \varphi_1 &= +\cos a'_0 \sin a_0 - \sin a'_0 \cos a_0 \cos \zeta \\ \sin \lambda \cos \varphi'_1 &= -\sin a_0 \sin \zeta \\ \sin \lambda \sin \varphi'_1 &= -\cos a_0 \sin a'_0 + \sin a_0 \cos a'_0 \cos \zeta \\ \cos \lambda &= -\cos a_0 \cos a'_0 - \sin a_0 \sin a'_0 \cos \zeta \end{aligned} \right\} (9)$$

oder auch wie oben die entsprechenden Gauß'schen Gleichungen. Für den Winkel  $\Psi$  findet man in diesem Systeme aus dem Dreiecke  $PXX'$ , dessen Seiten  $PX = 180 - \varphi_1$  und  $PX' = 180 - \varphi'_1$  den Winkel  $-\lambda$  einschließen:

$$\cos \Psi = \cos \varphi_1 \cos \varphi'_1 + \sin \varphi_1 \sin \varphi'_1 \cos \lambda$$

und gewinnt damit weiter die Relation:

$$\cos \Psi = -(\sin a_0 \sin a'_0 + \cos a_0 \cos a'_0 \cos \zeta) = \cos \varphi_1 \cos \varphi'_1 + \sin \varphi_1 \sin \varphi'_1 \cos \lambda. \quad (10)$$

Betrachtet man  $\lambda$  und  $\varphi_1 - \varphi'_1$ , und demgemäß auch  $\zeta$  als Größen erster Ordnung, läßt man  $\rho = \rho'$  sein und schreibt man um die durch diese Vereinfachungen verursachten Fehler gleichmäßiger zu verteilen  $\frac{1}{2}(\varphi'_1 + \varphi_1)$  statt  $\varphi'_1$  und  $\varphi_1$ , so kürzen sich die Gleichungen (8\*) in:

$$\left. \begin{aligned} \zeta \sin a'_0 &= \lambda \cos \frac{1}{2}(\varphi'_1 + \varphi_1) = -\zeta \sin a_0 \\ \zeta \cos a'_0 &= \varphi'_1 - \varphi_1 = -\zeta \cos a_0 \\ a'_0 &= 180 - a_0 \end{aligned} \right\} (8^{**})$$

und die Gleichungen (7) in:

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= h'_0 = -\frac{1}{2} \zeta \\ R &= \rho \sin \zeta. \end{aligned} \right\} (7^*)$$

Durch Verbindung von (8\*\*) mit (7\*) ergibt sich noch

$$\begin{aligned} R \sin a'_0 &= \rho \lambda \cos \frac{1}{2}(\varphi'_1 + \varphi_1) \\ R \cos a'_0 &= \rho(\varphi'_1 - \varphi_1). \end{aligned}$$

## § 2.

### Allgemeine Bemerkungen über die Berechnung der Entfernung des Meteores vom Beobachter.

Bei fehlerfreien Beobachtungen treffen die Visurlinien  $OM$  und  $O_1M$  (Fig. 2) von den beiden Standorten sowohl am Punkte des Aufleuchtens als auch an dem des Verlöschens des Meteores zusammen. Diese Visurlinien liegen daher mit der Verbindungslinie  $OO_1$  der beiden Orte in einer Ebene.

Bezeichnet man die Entfernungen  $OM$ ,  $O_1M$  und  $O_1O$  der Reihe nach mit  $r$ ,  $r'$  und  $R$ , und die Winkel  $MOO'$  und  $MO_1O'$ , welche die Visurlinien von  $O$  und  $O_1$  zum Meteore mit der Verbindungslinie

Fig. 2.

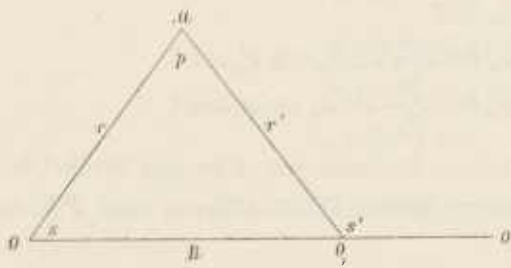
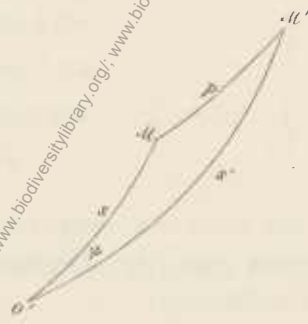


Fig. 3.



der beiden Orte, resp. ihrer Verlängerung einschließen, mit  $s$  und  $s'$ , sowie den Winkel  $OMO_1$ , das heißt die beobachtete Parallaxe des Meteores mit  $p$ , so ergibt das Dreieck  $OO_1M$ :

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{R \sin s'}{\sin p} \\ r' &= \frac{R \sin s}{\sin p} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Projizieren wir nun aus  $O$  als Zentrum die Linien  $OO_1$  und  $OM$ , sowie die Richtung  $O_1M$  auf eine Kugeloberfläche nach  $O'$ ,  $M$  und  $M'$  (Fig. 3), so liegen bei fehlerfreien Beobachtungen diese drei Punkte in einer durch das Zentrum der Kugel gehenden Ebene, und demgemäß auf einem größten Kugelkreise. Fallen, wie in Fig. 3, die  $O'$  mit  $M$  und mit  $M'$  verbindenden Bogen  $O'M$  und  $O'M'$ , welche, wie leicht ersichtlich, identisch sind, mit den  $s$  und  $s'$  genannten Winkeln, nicht zusammen, sondern bilden sie einen Winkel  $\psi$  miteinander, so rührt dies von Beobachtungs- und Auffassungsfehlern her. Der Bogen  $MM'$  stellt die beobachtete Parallaxe  $p$  vor, welche, wie man sowohl aus dieser als auch aus der vorherigen Figur erkennt, bei fehlerfreien Beobachtungen  $s' - s$  gleichkommt.

Die Visurlinien zum Anfangs- oder Endpunkte der Bahn werden sich, wie soeben erörtert wurde, schon der Beobachtungsfehler wegen nicht treffen, sondern aneinander vorüberstreichen. Dazu kommt aber noch, daß bei so unvermutet auftretenden Lichterscheinungen, wie ich an eigens zu diesem Zwecke angestellten Beobachtungsreihen nachgewiesen habe, selbst zwischen geschulten Beobachtern Auffassungsunterschiede auftreten, die ganz den Charakter tragen, als ob sie das Meteor nicht an denselben, sondern an verschiedenen Punkten seiner Bahn, oder mit anderen Worten nicht gleichzeitig hätten aufleuchten und verschwinden sehen.<sup>1</sup> Noch auffallendere und merkwürdigere Auffassungsunterschiede und Täuschungen treten bei Wahrnehmungen großer Feuerkugeln durch ungeübte Beobachter auf. So kommt es nicht selten vor, daß von mehreren Personen, die ein solches Meteor an demselben Orte bemerkten, die einen als zweifellos sicher angeben, es sei links, die anderen, es sei rechts von einer charakteristischen Sterngruppe herabgefallen. Dazu gesellen sich oft noch merkwürdige Sinnestäuschungen, zunächst in Bezug auf die Entfernung, in welcher das Meteor niederfiel. Dies geht häufig so weit, daß Personen, die es wenige Schritte von sich wollen in den Boden einschlagen gesehen haben, darüber beleidigt sind, wenn man ihnen bemerkt, dies sei ein Irrtum, da das Meteor erst in einer Entfernung von vielen Kilometern niedergegangen sei. Noch interessanter aber ist der Umstand, daß häufig auch der Gehör- und Gefühlssinn in die Täuschung einbezogen werden. In dieser Richtung besonders bemerkenswert war die große Feuerkugel, welche nach G. v. Niessl's Rechnungen am 3. Oktober 1901, um  $7\frac{1}{2}$  h abends mittl. Wiener Zeit, über dem Dorfe Jessewitz, etwa 55 Kilometer südlich von Prag, erlosch. Ein Beobachter derselben in Wien

<sup>1</sup> Beiträge zur Kenntnis der Sternschnuppen, II. Abhandlung (Sitzgsber. d. kais. Akad. d. Wiss. LXII. Bd., II. Abt., S. 277 ff.).

versicherte, es habe ihn eine warme Luftwelle gestreift, als der Feuerball knapp an ihm vorüberschoß, während ein anderer deutlich das Krachen bei dessen Aufschlagen auf das Dach eines gegenüberliegenden Hauses gehört haben will. Ja bei Beobachtungen von Perseidenmeteoron, von denen helle, wenn sie mit Hinterlassen eines Schweifes scheinbar gegen das Zenit aufsteigen, öfter Raketen täuschend ähneln, konnte selbst ich mich mehrmals des Irrtums nicht erwehren, daß ich dabei ein Zischen, wie beim Aufsteigen einer Rakete vernommen habe.

Unter diesen Umständen läßt sich, soweit ich es überblicken kann, eine Höhenberechnung von Meteoron nur unter einer der folgenden Annahmen durchführen.

A. Man betrachtet als Ort des Meteoron den Durchschnittspunkt der an einem Orte beobachteten Visurlinie mit einer Ebene, in welcher das Meteor an anderen Orte gesehen wurde.

B. Man sucht die kürzeste Verbindungslinie zwischen den an beiden Orten beobachteten korrespondierenden Visurlinien und betrachtet deren Mitte oder deren Durchschnittspunkte mit den Visurlinien als Position des Meteoron.

C. Man bewirkt das Durchschneiden der Visurlinien durch das Drehen einer derselben in die Ebene, welche durch die andere und die Verbindungslinie beider Orte gegeben ist.

D. Man führt das Durchschneiden der Visurlinien durch Anbringen von Korrekturen an die beobachteten Positionen herbei.

Die Diskussion dieser vier Hauptgruppen, die zum Teile in mehrere Unterabteilungen zerfallen, führt in der Tat an allen mir bekannten Vorschriften für Berechnung von Meteorhöhen vorbei, welche, nebenbei bemerkt, sämtlich den beiden ersten Gruppen angehören. Die unter C und D aufgeführten Berechnungsmethoden, von denen sich die unter C subsumierten durch ihre Einfachheit auszeichnen, sind meines Wissens neu.

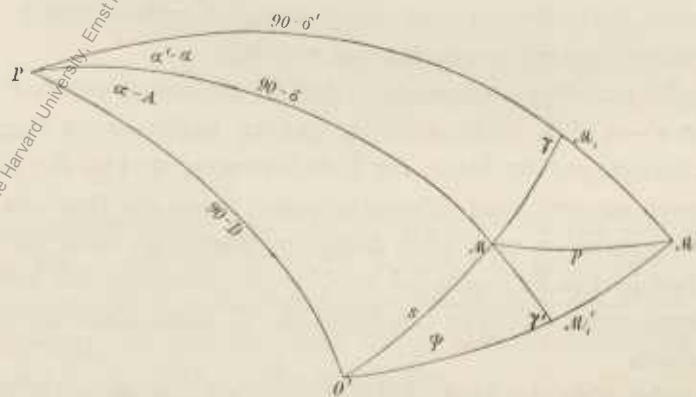
§ 3.

A. Berechnung der Entfernung des Meteoron aus dem Durchschnittspunkte der an einem Orte beobachteten Visurlinie mit einer am anderen beobachteten Ebene.

I. Aus dem Durchschnitte mit dem am anderen Orte beobachteten Stundenkreise.

Es seien in Fig. 4, wo  $P$  den Pol des Äquators vorstellt,  $O'$ ,  $M$  und  $M'$  dieselben Punkte, wie in Fig. 3, deren Rektaszensionen und Deklinationen wir mit  $A$ ,  $D$ ;  $\alpha$ ,  $\delta$  und  $\alpha'$ ,  $\delta'$  bezeichnen.

Fig. 4.



Verlängert man den Bogen  $O'M$  bis zu seinem Durchschnitte  $M_1$  mit dem Stundenkreise  $PM'$ , in welchem das Meteor in  $O_1$  gesehen wurde und verlegt man den beobachteten Punkt  $M'$  nach  $M_1$ , mit anderen Worten, substituiert man, um ein Durchschneiden der Visurlinien zu erzielen, für den beob-



achteten Bogen  $O'M' = s'$  den Bogen  $O'M_1$  und demgemäß auch den Bogen  $MM_1$  für die beobachtete Parallaxe  $MM' = p$ , so folgt als Entfernung  $r$  des Meteoros vom Beobachter in  $O$  nach den Gleichungen (11):

$$r = \frac{R \sin O'M_1}{\sin MM_1}.$$

Verlängert man aber den Stundenkreis  $PM$  bis zu seinem Durchschnitte  $M'_1$  mit  $O'M'$  und läßt man wieder  $O'M'_1$  statt  $O'M = s$  und  $M'_1M'$  statt  $MM'$  gelten, so resultiert in gleicher Weise:

$$r' = \frac{R \sin O'M'_1}{\sin M'_1M'}.$$

Bezeichnet man ferner, Kürze halber, den Winkel  $P M_1 O'$  mit  $\gamma$ , so erhält man aus den sphärischen Dreiecken  $POM_1$  und  $PMM_1$ :

$$\begin{aligned} \sin O'M_1 \cdot \sin \gamma &= \cos D \sin (\alpha' - A) \\ \sin MM_1 \cdot \sin \gamma &= \cos \delta \sin (\alpha' - \alpha). \end{aligned}$$

Auf dieselbe Art erhält man aus den Dreiecken  $P M'_1 M'$  und  $O'MM'_1$ , wenn man den Winkel  $P M'_1 O' = \gamma'$  setzt:

$$\begin{aligned} \sin O'M'_1 \cdot \sin \gamma' &= \cos D \sin (\alpha - A) \\ \sin M'_1M' \cdot \sin \gamma' &= \cos \delta' \sin (\alpha' - \alpha) \end{aligned}$$

und damit sofort die gesuchten Distanzen:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{\sin (\alpha' - A)}{\cos \delta} \cdot \frac{R \cos D}{\sin (\alpha' - \alpha)} \\ r' &= \frac{\sin (\alpha - A)}{\cos \delta'} \cdot \frac{R \cos D}{\sin (\alpha' - \alpha)}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Für den Endpunkt der Meteorbahn gelten natürlich dieselben Formeln. Man hat in ihnen für die  $\alpha$  und  $\delta$  nur die Koordinaten des Endpunktes statt denen des Anfangspunktes einzusetzen;  $R$ ,  $A$  und  $D$  bleiben ungeändert.

Diese Berechnungsart wurde dem Wesen nach von Olbers vorgeschlagen und zuerst von Benzenberg in seinem Werke »Bestimmung der geographischen Länge durch Sternschnuppen S. 136 und später auch von Brandes in den »Unterhaltungen für Freunde der Physik und Astronomie« S. 15 ff. mitgeteilt. Der Gedanke, welcher der Methode zugrunde liegt, wurde aber dadurch unkenntlich, daß Olbers nicht die Entfernung des Meteoros vom Beobachter, sondern vom Erdzentrum als Unbekannte wählte. Infolgedessen sind auch seine Formeln so weitläufig geworden, daß man aus ihnen nicht unmittelbar ersieht, unter welchen Bedingungen die Rechnung gute Resultate liefert, während man aus den obigen Formeln sofort erkennt, daß ihr leider schwerwiegende Mängel anhaften.

In dieser Beziehung ist vor allem zu bemerken, daß die Sicherheit der Bestimmung von  $r$  und  $r'$  der Hauptsache nach nur von  $\alpha' - \alpha$ , d. h. nicht von der ganzen beobachteten Parallaxe, sondern nur von jenem Teile derselben abhängt, der im Sinne der Rektaszension wirkte. Sie liefert daher nur in dem Falle ein den Beobachtungen entsprechend sicheres Resultat, wenn die Parallaxe in Deklination erheblich kleiner war als die in Rektaszension und wird desto unsicherer, je mehr die Parallaxe in Deklination überwog. Eine weitere Unsicherheit bedingen bei der Unvollkommenheit der Meteorbeobachtungen auch noch die im Nenner vorkommenden Faktoren  $\cos \delta$  und  $\cos \delta'$ , wenn einer der Beobachtungspunkte sich in der Nähe des Poles befand.

Diese Verhältnisse zeigt aber der bloße Anblick der Beobachtungen, so daß man schon ohne jede weitere Rechnung erkennt, ob nach dieser Methode ein verlässliches Resultat erhofft werden kann. Man kann auch, wenn man nach ihr rechnet, auf eine einfachere Weise als durch Differentialformeln sich ein ungefähres Bild von der erreichten Genauigkeit verschaffen.

Aus Fig. 4 ersieht man nämlich leicht, daß das charakteristische Merkmal der Methode darin besteht, daß die beobachteten Rektaszensionen unverändert beibehalten, hingegen die beobachteten Poldistanzen  $PM = 90 - \delta$  und  $PM' = 90 - \delta'$  durch  $PM_1 = 90 - \delta_0$  und  $PM_1 = 90 - \delta'_0$ , d. h. durch jene ersetzt werden, welche in den Rektaszensionen  $\alpha$  und  $\alpha'$  auf den größten Kreisen  $O'M'$  und  $O'M$  stattfinden. Die Bedingung, daß drei Punkte in einem größten Kreise liegen, lautet bekanntlich:

$$\operatorname{tg} d_1 \sin (a_3 - a_2) - \operatorname{tg} d_2 \sin (a_3 - a_1) + \operatorname{tg} d_3 \sin (a_2 - a_1) = 0. \quad (13)$$

Berechnet man daher  $\delta_0$  und  $\delta'_0$  aus:

$$\left. \begin{aligned} \sin (\alpha' - A) \operatorname{tg} \delta_0 &= \sin (\alpha - A) \operatorname{tg} \delta' + \sin (\alpha' - \alpha) \operatorname{tg} D \\ \sin (\alpha - A) \operatorname{tg} \delta'_0 &= \sin (\alpha' - A) \operatorname{tg} \delta - \sin (\alpha - \alpha') \operatorname{tg} D \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

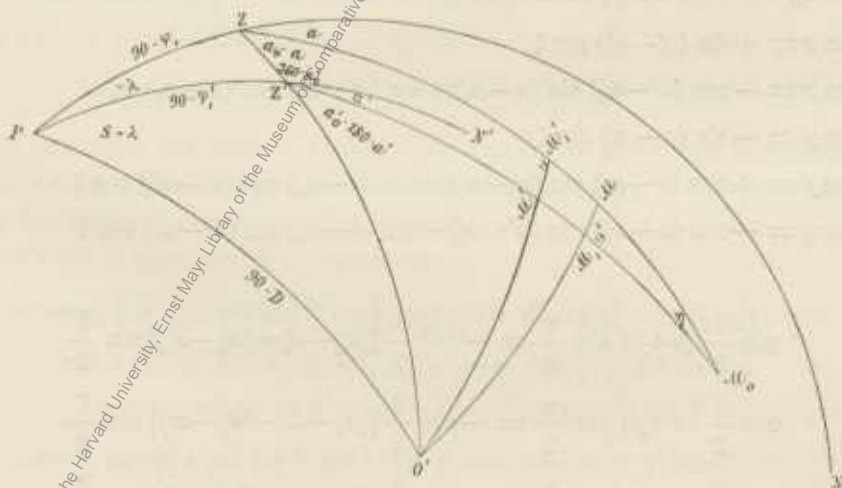
und vergleicht man diese Werte mit den beobachteten  $\delta$  und  $\delta'$ , so gibt die Größe der Abweichungen einen Maßstab zur Beurteilung der Güte der verwendeten Beobachtungen ab. Man kann übrigens diese Rechnung ersparen, wenn man Karten in Äquatoral-Horizontalprojektion, wie sie jetzt allgemein zum Einzeichnen von Meteorbahnen verwendet werden, zur Disposition hat: man braucht dann nur die  $O'M$  und  $O'M'$  verbindenden Geraden bis zu ihrem Durchschnitte mit den Deklinatioskreisen von  $M'$  und  $M$  verlängern und die dort stehenden Deklinationen von der Karte abzulesen.

## II. Berechnung der Entfernung des Meteores aus dem Durchschnitte der Visurlinie eines Ortes mit dem am anderen beobachteten Höhenkreise.

Legt man den Betrachtungen das Koordinatensystem des Horizontes zugrunde, so kann man auch für dieses eine der vorigen ganz analoge Berechnungsmethode herleiten.

Seien zu diesem Zwecke (Fig. 5)  $P$  der Weltpol,  $Z$  und  $Z'$  die geozentrischen Zenite,  $O'$ ,  $M$  und  $M'$  die Orte, an welchen die Visurlinie von  $O$  nach  $O_1$  und die notierten Anfangs- und Endpunkte der

Fig. 5.



Meteorbahn das Himmelsgewölbe treffen, so sind  $ZM$  und  $Z'M'$  die von den geozentrischen Zeniten an gezählten Zenitdistanzen  $90 - h$  und  $90 - h'$ ,  $NZM$  und  $N'Z'M'$  die Azimute  $a$  und  $a'$  der beobachteten Meteorpositionen, sowie  $S$  und  $D$  Stundenwinkel und Deklination des Ortes  $O_1$  gesehen aus  $O$ . Die übrigen in der Figur eingetragenen Bezeichnungen haben dieselbe Bedeutung wie in Fig. 1, abgesehen von den Hilfswinkeln  $v$  und  $v'$ , die später gebraucht werden.

Verlängert man die Höhenkreise  $ZM$  und  $Z'M'$ , so stellt ihr Durchschnittspunkt  $M_0$  den Punkt vor, an welchem die Schnittlinie der Ebenen der in  $O$  und  $O'$  beobachteten Höhenkreise, von unserem Projektionsmittelpunkte, dem Zentrum der Erde, aus gesehen, die Sphäre trifft.

Der Bogen  $O'M$  begegnet dem Höhenkreise  $Z'M'$  in  $M_1$ . Läßt man daher, um ein Durchschneiden der Visurlinien herbeizuführen,  $O'M_1$  an die Stelle von  $O'M' = s'$  und  $M_1M$  an die von  $p$  treten und verfügt man ebenso über die in derselben Weise erhaltenen Bogen  $O'M'_1$  und  $M'_1M'$  indem man sie als  $s$  und  $p$  in Anspruch nimmt, so hat man nach (11) wieder unmittelbar:

$$r = \frac{R \sin O'M_1}{\sin MM_1}$$

$$r' = \frac{R \sin O'M'_1}{\sin M'M'_1}$$

Nennt man  $ZM_0 = x$  und  $Z'M_0 = y$ , so ist  $MM_0 = x - MZ = x + h - 90$ ,  $M'M_0 = y + h' - 90$  und aus den Dreiecken  $O'M_1Z'$  und  $M_0M_1M$ :

$$\sin O'M_1 \sin v' = \sin (a' - a'_0) \cos h'_0$$

$$\sin MM_1 \sin v' = -\cos (x + h) \sin \eta$$

Ebenso haben wir aus den Dreiecken  $O'M'_1Z$  und  $M'_0M'_1M'$ :

$$\sin O'M'_1 \sin v = \sin (a_0 - a) \cos h_0$$

$$\sin M'M'_1 \sin v = -\cos (y + h') \sin \eta$$

wobei, wie leicht ersichtlich, die sphärischen Winkel bei  $M_1$ ,  $M_0$  und  $M'_1$  mit  $v'$ ,  $\eta$  und  $v$  bezeichnet sind. Man hat nun sofort:

$$r = \frac{R \sin (a' - a'_0) \cos h'_0}{\cos (x + h) \sin \eta}$$

$$r' = \frac{R \sin (a_0 - a) \cos h_0}{\cos (y + h') \sin \eta}$$
(15)

Zur Bestimmung von  $x$ ,  $y$  und  $\eta$  liefert uns das Dreieck  $ZZ'M_0$  die Relationen.

$$\sin \eta \sin x = +\sin (a' - a'_0) \sin \zeta$$

$$\sin \eta \cos x = -\cos (a' - a'_0) \sin (a - a_0) + \sin (a' - a'_0) \cos (a - a_0) \cos \zeta$$

$$\sin \eta \sin y = -\sin (a - a_0) \sin \zeta$$

$$\sin \eta \cos y = +\cos (a - a_0) \sin (a' - a'_0) - \sin (a - a_0) \cos (a' - a'_0) \cos \zeta$$

$$\cos \eta = \cos (a - a_0) \cos (a' - a'_0) - \sin (a - a_0) \sin (a' - a'_0) \cos \zeta$$
(16)

oder auch:

$$\sin \frac{1}{2} (x + y) \sin \frac{\eta}{2} = -\cos \frac{1}{2} [(a_0 - a) + (a'_0 - a')] \sin \frac{\zeta}{2}$$

$$\cos \frac{1}{2} (x + y) \sin \frac{\eta}{2} = -\cos \frac{1}{2} [(a_0 - a) - (a'_0 - a')] \cos \frac{\zeta}{2}$$

$$\sin \frac{1}{2} (x - y) \cos \frac{\eta}{2} = +\sin \frac{1}{2} [(a_0 - a) + (a'_0 - a')] \sin \frac{\zeta}{2}$$

$$\cos \frac{1}{2} (x - y) \cos \frac{\eta}{2} = -\sin \frac{1}{2} [(a_0 - a) - (a'_0 - a')] \cos \frac{\zeta}{2}$$
(16\*)

Die soeben skizzierte Methode rührt der Hauptsache nach von Brandes her, und ist in Benzenberg's Buche »Über die Bestimmung der geographischen Längen durch Sternschnuppen« S. 49 veröffentlicht. Ich habe aber aus den eingangs erörterten Gründen die Entwicklungen nicht auf die Entfernung des Meteores vom Mittelpunkt der Erde, sondern auf dessen Entfernung vom Beobachter basiert. Man



erhält übrigens die Formeln von Brandes sofort aus den obigen Ausdrücken, wenn man nach den Gleichungen (7)  $R \cos h_0$  und  $R \cos h'_0$  durch  $\rho' \sin \zeta$  und  $\rho \sin \zeta$  ersetzt, und dann für  $\sin(a - a'_0) \cos h'_0$  und  $\sin(a - a_0) \cos h_0$  ihre Werte aus (16) einträgt. Man findet dann:

$$\left. \begin{aligned} r &= -\frac{\rho \sin x}{\cos(h+x)} \\ r' &= -\frac{\rho' \sin y}{\cos(h'+y)}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Mag man aber nach diesen oder den Formeln (15) rechnen, so leiden beide an denselben Mängeln wie die analogen Formeln der früheren Methode, was man einfacher aus den genäherten Ausdrücken ersieht, die wir weiter unten (16\*) ableiten werden, nur mit dem Unterschiede, daß jetzt bloß der im Azimute wirkende Teil der Parallaxe zur Rechnung herangezogen wird und der in Höhe nicht zur Geltung kommt, so daß man auch hier im allgemeinen nie das beste Resultat erhält, das aus den Beobachtungen gezogen werden kann.

Durch ein ziemlich weitläufiges Umsetzen der drei in den Formeln 15 und 17 vorkommenden Gruppen von Horizontalkoordinaten in Äquatorkoordinaten ist es mir auch gelungen, relativ sehr einfache Ausdrücke herzustellen, welche, wenn die Positionen des Meteoroiden im  $AR$  und Deklination gegeben sind, ein Verwandeln dieser in Azimut und Höhe zu umgehen gestatten.

Beginnen wir damit, aus dem Gleichungssysteme (16) mittelst der Relationen (8\*), (9) und (10) die auf den Horizont bezogenen Koordinaten der Erdorte gegeneinander, nämlich  $a_0$ ,  $a'_0$  und  $\zeta$  fortzuschaffen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sin \eta \sin x &= -\sin a' (\sin \varphi_1 \cos \varphi'_1 - \cos \varphi_1 \sin \varphi'_1 \cos \lambda) - \cos a' \cos \varphi_1 \sin \lambda \\ \sin \eta \cos x &= (\cos a \cos a' \sin \varphi_1 + \sin a \sin a' \sin \varphi'_1) \sin \lambda + \\ &\quad + \sin a \cos a' \cos \lambda - \cos a \sin a' (\cos \varphi_1 \cos \varphi'_1 + \sin \varphi_1 \sin \varphi'_1 \cos \lambda) \\ \sin \eta \sin y &= +\sin a (\sin \varphi'_1 \cos \varphi_1 - \cos \varphi'_1 \sin \varphi_1 \cos \lambda) - \cos a \cos \varphi'_1 \sin \lambda \\ \sin \eta \cos y &= (\cos a \cos a' \sin \varphi'_1 + \sin a \sin a' \sin \varphi_1) \sin \lambda + \\ &\quad + \sin a \cos a' (\cos \varphi_1 \cos \varphi'_1 + \sin \varphi_1 \sin \varphi'_1 \cos \lambda) - \cos a \sin a' \cos \lambda. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir nun die beiden ersten Gleichungen mit  $\cos h'$ , die beiden letzten mit  $\cos h$ , und verwandeln wir die Azimute und Höhen nach den bekannten Formeln in Stundenwinkel und Deklination, wobei wir die an den Orten  $O$  und  $O_1$  zu den Ortssternzeiten  $t$  und  $t'$  beobachteten Äquatorkoordinaten, resp. mit  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $s$  und  $\alpha'$ ,  $\delta'$ ,  $s'$  bezeichnen, so resultiert:

$$\begin{aligned} \sin \eta \sin x \cos h' &= \cos \varphi_1 \cos \varphi'_1 \cos \delta' (\operatorname{tg} \delta' \sin \lambda - \operatorname{tg} \varphi_1 \sin s' + \operatorname{tg} \varphi'_1 \sin (s' - \lambda)) \\ \sin \eta \cos x \cos h' &= -\cos a \cos a' (\sin \varphi_1 \cos \varphi'_1 \sin \delta' \sin \lambda + \cos \varphi_1 \cos \varphi'_1 \cos \delta' \sin s' + \\ &\quad + \sin \varphi_1 \sin \varphi'_1 \cos \delta' \sin (s' - \lambda)) - \sin a (\cos \varphi' \sin \delta' \cos \lambda - \sin \varphi' \cos \delta' \cos (s' - \lambda)) \\ \sin \eta \sin y \cos h &= \cos \varphi_1 \cos \varphi'_1 \cos \delta (\operatorname{tg} \delta \sin \lambda - \operatorname{tg} \varphi_1 \sin (s + \lambda) + \operatorname{tg} \varphi'_1 \sin s) \\ \sin \eta \cos y \cos h &= +\cos a' (-\cos \varphi_1 \sin \varphi'_1 \sin \delta \sin \lambda + \cos \varphi_1 \cos \varphi'_1 \cos \delta \sin s + \\ &\quad + \sin \varphi_1 \sin \varphi'_1 \cos \delta \sin (s + \lambda)) + \sin a' (\cos \varphi \sin \delta \cos \lambda - \sin \varphi \cos \delta \cos (s + \lambda)). \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt diese Ausdrücke noch zu  $\sin \eta \cos h' \cos (x+h)$  und  $\sin \eta \cos h \cos (y+h')$  zusammen und ändern wir unter einem die Höhen und Azimute wieder in Stundenwinkel und Deklination um, so gelangen wir weiter zu:

$$\begin{aligned} \sin \eta \cos h' \cos (h+x) &= -\cos \varphi'_1 \cos \delta \cos \delta' [\operatorname{tg} \delta' \sin (s+\lambda) - \operatorname{tg} \delta \sin s' + \operatorname{tg} \varphi'_1 \sin (s' - s - \lambda)] \\ \sin \eta \cos h \cos (h'+y) &= -\cos \varphi_1 \cos \delta \cos \delta' [\operatorname{tg} \delta' \sin s - \operatorname{tg} \delta \sin (s' - \lambda) - \operatorname{tg} \varphi_1 \sin (s' - s - \lambda)]. \end{aligned}$$

Ferner folgt aus den Dreiecken  $P'O'Z$  und  $P'O'Z'$  (Fig. 5), wenn man bedenkt, daß  $ZO' = 90 - h_0$  und  $Z'O' = 90 - h'_0$  ist und wenn man wie in § 1 den Stundenwinkel  $ZPO'$  und die Poldistanz  $PO'$  der Visurlinie von  $O$  nach  $O_1$ ,  $S$  und  $90 - D$  setzt:

$$\begin{aligned}\sin a'_0 \cos h'_0 &= -\cos D \sin (S + \lambda) \\ \cos a'_0 \cos h'_0 &= +\cos \varphi'_1 \sin D - \sin \varphi'_1 \cos D \cos (S + \lambda) \\ \sin a_0 \cos h_0 &= +\cos D \sin S \\ \cos a_0 \cos h_0 &= -\cos \varphi_1 \sin D + \sin \varphi_1 \cos D \cos S.\end{aligned}$$

Trägt man dies in die Gleichungen:  $\sin (a' - a'_0) \cos h'_0$  und  $\sin (a - a_0) \cos h_0$  ein, multipliziert man hierauf die erste mit  $\cos h'$ , die zweite mit  $\cos h$  und verwandelt man dann den Rest der noch auf den Horizont sich beziehenden Koordinaten in Äquatorkoordinaten, so bekommt man:

$$\begin{aligned}\sin (a' - a'_0) \cos h'_0 \cos h' &= \cos \delta' \cos D \cos \varphi'_1 [\operatorname{tg} D \sin s' - \operatorname{tg} \delta' \sin (S + \lambda) + \operatorname{tg} \varphi'_1 \sin (S + \lambda - s')] \\ \sin (a - a_0) \cos h_0 \cos h &= -\cos \delta \cos D \cos \varphi_1 [\operatorname{tg} D \sin s - \operatorname{tg} \delta \sin S - \operatorname{tg} \varphi_1 \sin (s - S)].\end{aligned}$$

Damit haben wir alle zur Reduktion nötigen Ausdrücke gewonnen. Stellen wir sie übersichtlich zusammen und bemerken wir noch, daß wegen  $\lambda = l' - \alpha$

$$\begin{aligned}s + \lambda &= l' - \alpha & S + \lambda &= l' - A \\ s' - \lambda &= l - \alpha' & s - S &= A - \alpha \\ s' - s - \lambda &= \alpha - \alpha' & S + \lambda - s' &= \alpha' - A\end{aligned}$$

ist, so lauten sie;

$$\left. \begin{aligned}\sin \eta \sin x \cos h' &= \cos \varphi_1 \cos \varphi'_1 \cos \delta' [\operatorname{tg} \delta' \sin (l' - l) - \operatorname{tg} \varphi_1 \sin (l' - \alpha') + \operatorname{tg} \varphi'_1 \sin (l - \alpha')] \\ \sin (a' - a'_0) \cos h'_0 \cos h' &= \cos \varphi'_1 \cos D \cos \delta' [\operatorname{tg} D \sin (l' - \alpha') - \operatorname{tg} \delta' \sin (l' - A) + \operatorname{tg} \varphi'_1 \sin (\alpha' - A)] \\ \sin \eta \cos (h + x) \cos h' &= -\cos \varphi'_1 \cos \delta \cos \delta' [\operatorname{tg} \delta' \sin (l' - \alpha) - \operatorname{tg} \delta \sin (l' - \alpha') + \operatorname{tg} \varphi'_1 \sin (\alpha - \alpha')] \\ \sin \eta \sin y \cos h &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_1 \cos \delta (\operatorname{tg} \delta \sin (l - l) - \operatorname{tg} \varphi_1 \sin (l' - \alpha) + \operatorname{tg} \varphi'_1 \sin (l - \alpha)) \\ \sin (a - a_0) \cos h_0 \cos h &= -\cos \varphi_1 \cos D \cos \delta [\operatorname{tg} D \sin (l - \alpha) - \operatorname{tg} \delta \sin (l - A) + \operatorname{tg} \varphi_1 \sin (\alpha - A)] \\ \sin \eta \cos (h' + y) \cos h &= -\cos \varphi_1 \cos \delta' \cos \delta [\operatorname{tg} \delta' \sin (l - \alpha) - \operatorname{tg} \delta \sin (l - \alpha') + \operatorname{tg} \varphi_1 \sin (\alpha - \alpha')].\end{aligned}\right\} (18)$$

Wir können nun die Gleichungen (15), auf den Äquator übertragen, unmittelbar hinschreiben; sie sind:

$$\left. \begin{aligned}r &= -\frac{R \sin (a' - a'_0) \cos h'_0}{\sin \eta \cos (h + x)} = -\frac{R \cos D}{\cos \delta} \cdot \frac{\operatorname{tg} D \sin (l' - \alpha') - \operatorname{tg} \delta' \sin (l' - A) + \operatorname{tg} \varphi'_1 \sin (\alpha' - A)}{\operatorname{tg} \delta \sin (l' - \alpha) - \operatorname{tg} \delta' \sin (l' - \alpha) + \operatorname{tg} \varphi'_1 \sin (\alpha' - \alpha)} \\ r' &= +\frac{R \sin (a - a_0) \cos h_0}{\sin \eta \cos (h' + y)} = +\frac{R \cos D}{\cos \delta'} \cdot \frac{\operatorname{tg} D \sin (l - \alpha) - \operatorname{tg} \delta \sin (l - A) + \operatorname{tg} \varphi_1 \sin (\alpha - A)}{\operatorname{tg} \delta' \sin (l - \alpha) - \operatorname{tg} \delta \sin (l - \alpha') + \operatorname{tg} \varphi_1 \sin (\alpha - \alpha')}\end{aligned}\right\} (19)$$

Durch Einführen der größten Kreise, welche durch die Punkte  $(\alpha', \delta')$ ,  $(\varphi', l')$  und  $(\alpha, \delta)$ ,  $(\varphi, l)$  gehen, mittels der bekannten Relationen:

$$\left. \begin{aligned}\sin (\varrho' - \alpha') \operatorname{tg} J' &= \operatorname{tg} \delta' & \sin (\varrho - \alpha) \operatorname{tg} J &= \operatorname{tg} \delta \\ \sin (\varrho' - l') \operatorname{tg} J' &= \operatorname{tg} \varphi'_1 & \sin (\varrho - l) \operatorname{tg} J &= \operatorname{tg} \varphi_1\end{aligned}\right\} (20)$$

reduzieren sich diese Gleichungen auf:

$$\left. \begin{aligned}r &= -\frac{R \cos D}{\cos \delta} \cdot \frac{\sin (\varrho' - A) \operatorname{tg} J' - \operatorname{tg} D}{\sin (\varrho' - \alpha) \operatorname{tg} J' - \operatorname{tg} \delta} \\ r' &= +\frac{R \cos D}{\cos \delta'} \cdot \frac{\sin (\varrho - A) \operatorname{tg} J - \operatorname{tg} D}{\sin (\varrho - \alpha') \operatorname{tg} J - \operatorname{tg} \delta'}\end{aligned}\right\} (19^*)$$

Verwendet man in den Ausdrücken (19) statt der geozentrischen die scheinbaren Polhöhen, so läßt sich der dadurch in  $r$  und  $r'$  begangene Fehler wegen der geringen Abweichungen  $\Delta\varphi$  und  $\Delta\varphi'$  zwischen beiden mit völlig hinreichender Annäherung durch  $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)\Delta\varphi$  und  $\left(\frac{dr'}{d\varphi'}\right)\Delta\varphi'$  darstellen. Diese Differentiation liefert:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right) &= \frac{R \cos D \sin(t' - \alpha')}{\cos \delta \cos^2 \varphi_1} \cdot \frac{\text{tg } \delta \sin(A - \alpha') - \text{tg } \delta' \sin(A - \alpha) + \text{tg } D \sin(\alpha' - \alpha)}{[\text{tg } \delta \sin(t' - \alpha') - \text{tg } \delta' \sin(t' - \alpha) + \text{tg } \varphi_1 \sin(\alpha' - \alpha)]^2} \\ \left(\frac{dr'}{d\varphi}\right) &= \frac{R \cos D \sin(t - \alpha)}{\cos \delta' \cos^2 \varphi_1} \cdot \frac{\text{tg } \delta \sin(A - \alpha') - \text{tg } \delta' \sin(A - \alpha) + \text{tg } D \sin(\alpha' - \alpha)}{[\text{tg } \delta \sin(t - \alpha') - \text{tg } \delta' \sin(t - \alpha) + \text{tg } \varphi_1 \sin(\alpha' - \alpha)]^2} \end{aligned} \right\} (21)$$

Der Zähler beider Differentialquotienten annulliert sich nach (13), wenn die Punkte  $(\alpha, \delta)$ ,  $(\alpha', \delta')$  und  $(A, D)$  in einem größten Kreise liegen. Da dies wenigstens näherungsweise richtig sein muß, wenn die Beobachtungen ein brauchbares Resultat ergeben sollen, kann man in (19) und (20) ohne Bedenken die geozentrischen mit den scheinbaren Breiten vertauschen.

Mittels des Gleichungssystems (18) können wir auch die Formeln (17), auf Äquatorealkoordinaten reduziert, ohneweiters aufschreiben; sie lauten:

$$\left. \begin{aligned} r &= -\frac{\rho \sin x}{\cos(h+x)} = \frac{\rho \cos \varphi_1}{\cos \delta} \cdot \frac{\text{tg } \varphi_1 \sin(t' - \alpha') - \text{tg } \varphi_1 \sin(t - \alpha') + \text{tg } \delta' \sin(t - t')}{\text{tg } \delta \sin(t' - \alpha') - \text{tg } \varphi_1 \sin(\alpha - \alpha') + \text{tg } \delta' \sin(\alpha - t')} \\ r' &= -\frac{\rho' \sin y}{\cos(h'+y)} = \frac{\rho' \cos \varphi_1'}{\cos \delta'} \cdot \frac{\text{tg } \varphi_1' \sin(t - \alpha) - \text{tg } \varphi_1' \sin(t' - \alpha) + \text{tg } \delta \sin(t' - t)}{\text{tg } \delta' \sin(t - \alpha) - \text{tg } \varphi_1' \sin(\alpha' - \alpha) + \text{tg } \delta \sin(\alpha' - t)} \end{aligned} \right\} (22)$$

Diese Gleichungen werden durch die oben angewendeten Hilfsgrößen (20) ebenfalls übergeführt in die einfacheren:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{\rho \cos \varphi_1}{\cos \delta} \cdot \frac{\sin(\delta' - t) \text{tg } J' - \text{tg } \varphi_1}{\sin(\delta' - \alpha) \text{tg } J' - \text{tg } \delta} = \frac{\rho \cos \varphi_1}{\cos \delta} \cdot \frac{\sin(\delta' - t) \text{tg } J' - \sin(\delta - t) \text{tg } J}{\sin(\delta' - \alpha) \text{tg } J' - \sin(\delta - \alpha) \text{tg } J} \\ r' &= \frac{\rho' \cos \varphi_1'}{\cos \delta'} \cdot \frac{\text{tg } \varphi_1' - \sin(\delta - t') \text{tg } J}{\text{tg } \delta' - \sin(\delta - \alpha') \text{tg } J} = \frac{\rho' \cos \varphi_1'}{\cos \delta'} \cdot \frac{\sin(\delta' - t') \text{tg } J' - \sin(\delta - t') \text{tg } J}{\sin(\delta' - \alpha') \text{tg } J' - \sin(\delta - \alpha') \text{tg } J} \end{aligned} \right\} (22^*)$$

Man kann sie noch weiter zusammenziehen in:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{\rho \cos \varphi_1}{\cos \delta} \cdot \frac{\sin(N+t)}{\sin(N+\alpha)} \\ r' &= \frac{\rho' \cos \varphi_1'}{\cos \delta'} \cdot \frac{\sin(N+t')}{\sin(N+\alpha')} \end{aligned} \right\} (22^{**})$$

wenn man den Winkel  $N$  bestimmt aus:

$$\left. \begin{aligned} n \sin(N + \delta') &= \sin(\delta' - \delta) \text{tg } J \\ n \cos(N + \delta') &= \cos(\delta' - \delta) \text{tg } J - \text{tg } J'. \end{aligned} \right\} (23)$$

Die Formeln (19) und (22\*\*) sind trotz ihrer Einfachheit in praktischer Beziehung nur von einer geringen Bedeutung, da man, um aus  $r$  und  $r'$  die Entfernungen des Meteores von der Erdoberfläche zu ermitteln, auch die scheinbaren Höhen desselben nötig hat. Man kommt daher entschieden rascher zum Ziele, wenn man unter Einem außer den Höhen auch die Azimute berechnet, was nur einen geringen Mehraufwand an Arbeit erfordert und sich dann an die Formeln (15) und (16\*) hält. Ich habe sie dessen ungeachtet hier eingefügt, weil sie mir in theoretischer Beziehung insofern ein gewisses Interesse zu beanspruchen scheinen, als man von vorneherein wohl nicht erwarten konnte, daß sich die Bestimmung der Lage des Durchschnittspunktes einer Visurlinie mit einem an einem zweiten Orte beobachteten



Höhenkreise in Äquatorkoordinaten auf so einfache Ausdrücke, wie es namentlich (22\*\*) sind, auch dann noch werde zurückführen lassen, wenn man die Divergenz der Zenite berücksichtigt.

Wir haben uns bis jetzt mit der strengen Auflösung der Aufgabe beschäftigt; es erübrigt uns daher noch die Vereinfachungen zu besprechen, welche eintreten, wenn man Näherungen einführt.

Der Winkel  $\zeta$ , den die Zenitlinien der beiden Beobachtungsorte einschließen, kann wenige Grade nicht übersteigen. Faßt man ihn daher als eine Größe 1. Ordnung auf, so ist mit Vernachlässigung von Größen 2. Ordnung nach (7\*):  $h_0 = h'_0 = -\frac{1}{2}\zeta$ . Man kann daher  $\cos \zeta = \cos h_0 = \cos h'_0 = 1$  annehmen und hat weiter nach (8\*\*):  $a'_0 = 180^\circ + a_0$ .

Führt man dies in das Gleichungssystem (16) ein, so reduziert es sich auf:

$$\begin{aligned} \sin \eta \sin x &= +\sin (a' - a'_0) \sin \zeta \\ \sin \eta \cos x &= +\sin (a - a') \\ \sin \eta \sin y &= -\sin (a - a_0) \sin \zeta \\ \sin \eta \cos y &= \sin (a - a') \\ \cos \eta &= \cos (a - a') \quad \eta = \pm (a - a'). \end{aligned}$$

Daraus erkennt man unmittelbar, daß die Bestimmung von  $x$  und  $y$  und damit die von  $r$  und  $r'$  desto unsicherer wird, je kleiner  $a - a'$ , d. i. die Parallaxe im Azimut ist.

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (15) verwandeln sie sich in die folgenden:

$$\begin{aligned} r &= -\frac{R \sin (a' - a'_0)}{\sin (a - a') \cos h - \sin (a - a'_0) \sin \zeta \sin h} \\ r' &= +\frac{R \sin (a - a_0)}{\sin (a - a') \cos h' + \sin (a - a_0) \sin \zeta \sin h'} \end{aligned}$$

oder alles auf  $a_0$  reduzierend:

$$\begin{aligned} r &= +\frac{R \sin (a' - a_0)}{\sin (a - a') \cos h + \sin (a' - a_0) \sin h \sin \zeta} \\ &= +\frac{R \sin (a - a_0)}{\sin (a - a') \cos h' + \sin (a - a_0) \sin h' \sin \zeta} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} r \\ r' \end{aligned}} \right\} (24)$$

Geht man noch einen Schritt weiter, indem man die Zenitlinien einander parallel laufen läßt, d. h. setzt man auch  $\sin \zeta = 0$ , was ein Vernachlässigen von Größen erster, statt eines von Größen zweiter Ordnung bedeutet, so erhält man die ihrem Baue nach den Gleichungen (12) ganz analogen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sin (a' - a_0)}{\cos h} \cdot \frac{R}{\sin (a - a')} \\ r' &= \frac{\sin (a - a_0)}{\cos h'} \cdot \frac{R}{\sin (a - a')} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} r \\ r' \end{aligned}} \right\} (24^*)$$

Die letzte Vereinfachung auch im Gleichungssysteme (17) und dem daraus abgeleiteten (22) anzubringen, ist nicht tunlich, weil dadurch der Projektionsmittelpunkt in unendliche Ferne rückt und damit die Zähler  $\rho \sin x$  und  $\rho' \sin y$  die unbestimmte Form  $\infty \cdot 0$  annehmen.

Zum Schlusse möchte ich noch an die beiden bisher diskutierten Berechnungsvorschriften folgende Bemerkungen knüpfen.

Der Umstand, daß die Bestimmung der Entfernung des Meteoros von den Beobachtungsorten viel unsicherer wird, als es das Problem bedingt, hier, wenn die Parallaxe im Azimut, dort, wenn sie in AR

nur einen kleinen Bruchteil der Gesamtparallaxe beträgt, ist nicht so sehr als ein Mangel der Methoden zu betrachten, sondern rührt in letzter Instanz nur daher, daß man den Durchschnittspunkt der Visurlinie mit einer Ebene gesucht hat, deren Lage für eine sichere Bestimmung desselben nicht geeignet ist und infolgedessen durch eine entsprechende Änderung dieser Ebene gehoben werden kann. Man erhält daher in vielen Fällen, in denen die erste Methode versagt, mit der zweiten mindestens noch leidliche Resultate und umgekehrt. Diese Methoden können daher, ihrer großen Einfachheit wegen, mit Vorteil zu Überschlagsrechnungen gebraucht werden, namentlich um die Identität von Meteoren sicherzustellen, ehe man zu einer weitläufigeren Rechnung schreitet. Verwandelt man nämlich die gegebenen Rektaszensionen und Deklinationen in Höhe und Azimut, so hat man alle nötigen Daten gegeben, sowohl nach den Ausdrücken (12) als auch (24\*) die genäherte Entfernung des Meteoros vom Beobachter und aus dieser, wie weiter unten (§ 4) gezeigt werden wird, durch Multiplikation mit dem Sinus der scheinbaren Höhe, die genäherte Entfernung von der Erdoberfläche zu ermitteln. Man hat dazu nur die einfachen Formeln:

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{R \cos D}{\sin(\alpha' - \alpha)} \cdot \frac{\sin(\alpha' - A) \sin h}{\cos \delta} \\ H' &= \frac{R \cos D}{\sin(\alpha' - \alpha)} \cdot \frac{\sin(\alpha - A) \sin h'}{\cos \delta'} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{R}{\sin(\alpha - \alpha')} \cdot \sin(\alpha' - \alpha_0) \operatorname{tg} h \\ H' &= \frac{R}{\sin(\alpha - \alpha')} \cdot \sin(\alpha - \alpha_0) \operatorname{tg} h' \end{aligned} \right\} \quad (25^*)$$

durchzurechnen, je nachdem die Parallaxe in AR oder die im Azimut die größere ist. Bei der Berechnung der Bahnen großer Feuerkugeln, wo in der Regel nur sehr rohe Positionsangaben von ungeübten Beobachtern vorliegen, werden übrigens diese Formeln im allgemeinen stets ausreichen.

### III. Berechnung der Entfernung des Meteoros aus dem Durchschnittspunkte der Visurlinien an einem Orte, mit der am anderen beobachteten Bahnebene.

Die Bahnen der Sternschnuppen erscheinen in der Regel als Teile eines größten Kreises, was darauf hindeutet, daß das gesehene Bahnstück von einer geraden Linie im allgemeinen nicht merklich abweicht. Dies vorausgesetzt, ist die Ebene, in der das Meteor sich bewegte, durch die beobachteten Anfangs- und Endpunkte gegeben. Man kann nun wie früher einen Höhen- oder Deklinationskreis, so auch diese Ebene zugrunde legen und die Durchschnittspunkte der am anderen Orte notierten Visurlinien mit dieser Ebene ermitteln.

Dieser Gedanke wurde zuerst von Quételet zur Aufstellung von Formeln für die Höhenberechnung von Meteoren verwertet, aber in einer anderen Form ausgesprochen.<sup>1</sup> Er betrachtet nämlich die Schnittlinie der zwei Ebenen, welche durch die Beobachtungen an beiden Orten festgelegt werden, als die Bahn der Sternschnuppe, und bestimmt deren Entfernungen aus den Durchschnittspunkten der Visurlinien mit dieser Bahn. Quételet hat aber die Entwicklungen nur ganz flüchtig angesetzt, zum Teil nur angedeutet, nirgends aber die Formeln so weit fortgeführt, daß eine Berechnung nach denselben unmittelbar vorgenommen werden könnte.<sup>2</sup> Seine Idee wurde daher nie beachtet.

<sup>1</sup> A. Quételet, Sur les étoiles filantes. Correspondance mathématique et physique, tome IX, p. 189 ff.

<sup>2</sup> Auch Versehen haben sich dabei eingeschlichen, z. B. gleich anfangs in den Formeln 2 (S. 190), wo  $\sin \delta'$  und  $\sin \delta''$  statt  $\operatorname{tg} \delta'$  und  $\operatorname{tg} \delta''$  steht.

Etwa zwei Jahre später machte Bessel in den Vorbemerkungen zu seiner berühmten Abhandlung »über Sternschnuppen«<sup>1</sup> schwerwiegende Bedenken gegen Berechnungsmethoden geltend, die auf der Voraussetzung fußen, daß das Erscheinen und Verschwinden einer Sternschnuppe von Beobachtern an verschiedenen Orten gleichzeitig, d. h. an den gleichen Punkten ihrer Bahn wahrgenommen werde und griff, um Rechnungsvorschriften abzuleiten, die von dieser Annahme unabhängig sind, augenscheinlich ohne die Arbeit von Quételet zu kennen und ohne daß dies, soviel mir bekannt, bisher bemerkt worden wäre, auf dessen Gedanken zurück. Wie aus der Einleitung zu seiner Abhandlung unschwer zu erkennen ist, leitete ihn bei der Entwicklung seiner Methode die Idee, daß bei Berechnungen nach ihr durch die Beobachtungsfehler weniger Meteore zu scheinbar ansteigenden umgestaltet würden, als bei Berechnungen die unter der Annahme der Gleichzeitigkeit durchgeführt werden, was sich indes in der Praxis nicht bestätigt hat. Von den Formeln, zu denen Bessel gelangt, erfordern aber namentlich jene, welche zur Beurteilung des Einflusses von Beobachtungsfehlern auf das Resultat dienen, sehr weitläufige und zeitraubende Rechnungen, was er auch selbst zugesteht.

Im Jahre 1869 erbrachte ich durch eigens zu diesem Zwecke angestellte Beobachtungen, wie schon eingangs erwähnt, den Nachweis, daß Bessel's Zweifel in der Tat berechtigt seien und sogar schon an ein- und demselben Orte zwischen den einzelnen Beobachtern Auffassungsunterschiede beim Notieren der Anfangs- und Endpunkte einer Meteorbahn auftraten, die ganz so wirken, als ob ihnen das Meteor an verschiedenen Teilen seiner Bahn erschienen und verschwunden wäre. Als eine Folge davon, hatte sich auch ergeben, daß die Richtung der Bewegung, mit anderen Worten, die Bahnlage mit einer geringeren Unsicherheit behaftet sei, als die beobachteten Anfangs- und Endpunkte.

Ich entschloß mich daher, ohne erst eine eingehendere Untersuchung der Unsicherheiten vorzunehmen, welche durch die Quételet-Besselsche Annahme in das Problem eingeführt werden, bei den von mir veranlaßten korrespondierenden Sternschnuppenbeobachtungen diese Methode zur Höhenberechnung zu verwenden, schlug aber bei der Entwicklung der hiezu erforderlichen Rechnungsvorschriften ein anderes Verfahren ein als Bessel und gelangte dabei zu wesentlich einfacheren Formeln, welche in meiner Abhandlung<sup>2</sup> »Beiträge zur Kenntnis der Sternschnuppen II« niedergelegt sind. Auf eine einfachere Art, wie in jener Abhandlung, gewinnt man diese Formeln folgendermaßen.

Legt man durch den Beobachtungsort  $O$  als Ursprung ein Rektaszensionen und Deklinationen lieferndes Koordinatensystem, so seien in demselben die zur Ortssternzeit  $t$  beobachteten Koordinaten:

1. des Anfangspunktes  $M_1$  der Bahn:  $x_1, y_1, z_1; r_1, \alpha_1, \delta_1;$
2. des Endpunktes  $M_2$  derselben:  $x_2, y_2, z_2; r_2, \alpha_2, \delta_2.$

Ebenso seien in einem, dem vorigen parallelen, aber durch den zweiten Ort  $O_1$  als Ursprung gelegten, die zur dortigen Sternzeit  $t'$  wahrgenommenen Koordinaten:

3. des Anfangspunktes  $M'_1$  der Bahn:  $x'_1, y'_1, z'_1; r'_1, \alpha'_1, \delta'_1,$
4. des Endpunktes  $M'_2$ :  $x'_2, y'_2, z'_2; r'_2, \alpha'_2, \delta'_2.$

Endlich seien die Koordinaten von  $O_1$  gegen  $O$ :  $\xi, \eta, \zeta; R, A, D$ , dann sind, bezogen auf  $O$  als Anfangspunkt:

5. die Koordinaten von  $M'_1$ :  $X_1 = x'_1 + \xi, Y_1 = y'_1 + \eta, Z_1 = z'_1 + \zeta,$
6. die Koordinaten von  $M'_2$ :  $X_2 = x'_2 + \xi, Y_2 = y'_2 + \eta, Z_2 = z'_2 + \zeta.$

Zwischen den  $x, y, z$  und den  $r, \alpha, \delta$  bestehen mit Unterdrückung der Indices die Relationen:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \delta \cos \alpha \\ y &= r \cos \delta \sin \alpha \\ z &= r \sin \delta. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Astr. Nachr. Bd. XVI, S. 321 ff.

<sup>2</sup> Sitzgsber. d. kais. Akad. d. Wiss., mathem.-naturw. Kl., LXII. Bd., II. Abt., S. 277 ff.



Ferner geht bekanntlich eine Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

durch die drei Punkte:

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3),$$

wenn die Koeffizienten  $A, B, C, D$  bestimmt werden aus:

$$A = (y_1 z_2 - y_2 z_1) + (y_2 z_3 - y_3 z_2) + (y_3 z_1 - y_1 z_3).$$

$$B = (z_1 x_2 - z_2 x_1) + (z_2 x_3 - z_3 x_2) + (z_3 x_1 - z_1 x_3).$$

$$C = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3).$$

$$D = -[(y_1 z_2 - y_2 z_1)x_3 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)y_3 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)z_3].$$

Schließlich lauten die Gleichungen einer durch die Punkte  $(x_1, y_1, z_1)$ ;  $(x_2, y_2, z_2)$  gelegten geraden Linie:

$$\begin{cases} (z_1 - z_2)x = (x_1 - x_2)z + (x_2 z_1 - x_1 z_2) \\ (z_1 - z_2)y = (y_1 - y_2)z + (y_2 z_1 - y_1 z_2). \end{cases}$$

Dies vorausgeschickt, erhält man durch Einsetzen der oben angegebenen Koordinaten der beobachteten Anfangs- und Endpunkte, nach einigen leicht ersichtlichen Abkürzungen:

a) Als Gleichung der durch den Ursprung  $O$  des Koordinatensystems und die in demselben beobachteten Punkte  $M_1$  und  $M_2$  der Meteorbahn gelegten Ebene:

$$x \cdot (\sin \alpha_1 \operatorname{tg} \delta_2 - \sin \alpha_2 \operatorname{tg} \delta_1) - y \cdot (\cos \alpha_1 \operatorname{tg} \delta_2 - \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \delta_1) + z \cdot \sin (\alpha_2 - \alpha_1) = 0. \quad (26_1)$$

b) Als Gleichungen der von  $O$  aus beobachteten Visurlinie  $OM_1$  zum Anfangspunkte  $M_1$  der Meteorbahn:

$$\begin{cases} x = z \cos \alpha_1 \operatorname{ctg} \delta_1 \\ y = z \sin \alpha_1 \operatorname{ctg} \delta_1 \end{cases} \quad (26_2)$$

c) Als Gleichungen der Visurlinie  $OM_2$ :

$$\begin{cases} x = z \cos \alpha_2 \operatorname{ctg} \delta_2 \\ y = z \sin \alpha_2 \operatorname{ctg} \delta_2. \end{cases} \quad (26_3)$$

d) Als Gleichung der am zweiten Beobachtungsort  $O_1$  gesehenen Bahnebene  $O_1 M'_1 M'_2$  des Meteoroiden, bezogen auf  $O$  als Anfangspunkt:

$$\begin{cases} (\sin \alpha'_1 \operatorname{tg} \delta'_2 - \sin \alpha'_2 \operatorname{tg} \delta'_1)x - (\cos \alpha'_1 \operatorname{tg} \delta'_2 - \cos \alpha'_2 \operatorname{tg} \delta'_1)y + \sin (\alpha'_2 - \alpha'_1)z = \\ = R \cos D [\sin (\alpha'_1 - A) \operatorname{tg} \delta'_2 - \sin (\alpha'_2 - A) \operatorname{tg} \delta'_1 + \sin (\alpha'_2 - \alpha'_1) \operatorname{tg} D]. \end{cases} \quad (26'_1)$$

e) Als Gleichungen der von  $O_1$  aus beobachteten Visurlinie zum Anfangspunkte  $M'_1$  der Meteorbahn, wieder bezogen auf  $O$  als Ursprung:

$$\begin{cases} x = z \cdot \operatorname{ctg} \delta'_1 \cos \alpha'_1 - R \sin D (\cos \alpha'_1 \operatorname{ctg} \delta'_1 - \operatorname{ctg} D \cos A) \\ y = z \cdot \operatorname{ctg} \delta'_1 \sin \alpha'_1 - R \sin D (\sin \alpha'_1 \operatorname{ctg} \delta'_1 - \operatorname{ctg} D \sin A). \end{cases} \quad (26'_2)$$

f) Als Gleichungen der Visurlinie  $O_1 M'_2$ , bezogen auf  $O$ :

$$\begin{cases} x = z \cdot \operatorname{ctg} \delta'_2 \cos \alpha'_2 - R \sin D (\cos \alpha'_2 \operatorname{ctg} \delta'_2 - \operatorname{ctg} D \cos A) \\ y = z \cdot \operatorname{ctg} \delta'_2 \sin \alpha'_2 - R \sin D (\sin \alpha'_2 \operatorname{ctg} \delta'_2 - \operatorname{ctg} D \sin A). \end{cases} \quad (26'_3)$$

Nach diesen Vorbereitungen erhält man durch passende Kombination der Gleichungen a) bis f) fast ohne jede weitere Rechnung alle gesuchten Größen, nämlich durch Verbindung von d) mit b) und c) die Durchschnittspunkte der Visurlinien  $OM_1$  und  $OM_2$  mit der in  $O_1$  beobachteten Bahnebene  $O_1 M'_1 M'_2$ , mit anderen Worten, die Entfernungen  $r_1$  und  $r_2$  der Anfangs- und Endpunkte der Meteorbahn von  $O$  und

durch Verbindung von  $a)$  mit  $e)$  und  $f)$  in ähnlicher Weise aus den mit  $X, Y, Z$  bezeichneten Koordinaten die Entfernungen von  $r'_1$  und  $r'_2$  derselben Punkte von  $O_1$ :

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{\operatorname{tg} \delta'_1 \sin(\alpha'_2 - A) - \operatorname{tg} \delta'_2 \sin(\alpha'_1 - A) + \operatorname{tg} D \sin(\alpha'_1 - \alpha'_2)}{\operatorname{tg} \delta'_1 \sin(\alpha'_2 - \alpha_1) - \operatorname{tg} \delta'_2 \sin(\alpha'_1 - \alpha_1) + \operatorname{tg} \delta_1 \sin(\alpha'_1 - \alpha'_2)} \cdot \frac{R \cos D}{\cos \delta_1} \\ r_2 &= \frac{\operatorname{tg} \delta'_1 \sin(\alpha'_2 - A) - \operatorname{tg} \delta'_2 \sin(\alpha'_1 - A) + \operatorname{tg} D \sin(\alpha'_1 - \alpha'_2)}{\operatorname{tg} \delta'_1 \sin(\alpha'_2 - \alpha_2) - \operatorname{tg} \delta'_2 \sin(\alpha'_1 - \alpha_2) + \operatorname{tg} \delta_2 \sin(\alpha'_1 - \alpha'_2)} \cdot \frac{R \cos D}{\cos \delta_2} \\ r'_1 &= \frac{\operatorname{tg} \delta_1 \sin(\alpha_2 - A) - \operatorname{tg} \delta_2 \sin(\alpha_1 - A) + \operatorname{tg} D \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg} \delta_1 \sin(\alpha_2 - \alpha'_1) - \operatorname{tg} \delta_2 \sin(\alpha_1 - \alpha'_1) + \operatorname{tg} \delta'_1 \sin(\alpha_1 - \alpha'_2)} \cdot \frac{R \cos D}{\cos \delta'_1} \\ r'_2 &= \frac{\operatorname{tg} \delta_1 \sin(\alpha_2 - A) - \operatorname{tg} \delta_2 \sin(\alpha_1 - A) + \operatorname{tg} D \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg} \delta_1 \sin(\alpha_2 - \alpha'_2) - \operatorname{tg} \delta_2 \sin(\alpha_1 - \alpha'_2) + \operatorname{tg} \delta'_2 \sin(\alpha_1 - \alpha'_2)} \cdot \frac{R \cos D}{\cos \delta'_2} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Durch Einführen der größten Kreise, welche durch die Meteorbahnen  $M_1M_2$  und  $M'_1M'_2$  gehen, kann man diese Formeln noch weiter zusammenziehen. Man hat dazu die Größen  $\Omega, J$  und  $\Omega', J'$  zu berechnen, nach:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\Omega - \alpha_1) \operatorname{tg} J &= \operatorname{tg} \delta_1 & \sin(\Omega' - \alpha'_1) \operatorname{tg} J' &= \operatorname{tg} \delta'_1 \\ \sin(\Omega - \alpha_2) \operatorname{tg} J &= \operatorname{tg} \delta_2 & \sin(\Omega' - \alpha'_2) \operatorname{tg} J' &= \operatorname{tg} \delta'_2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

und erhält dann:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{R \cos D}{\cos \delta_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} J' \sin(\Omega' - A) - \operatorname{tg} D}{\operatorname{tg} J' \sin(\Omega' - \alpha_1) - \operatorname{tg} \delta_1} \\ r_2 &= \frac{R \cos D}{\cos \delta_2} \cdot \frac{\operatorname{tg} J' \sin(\Omega' - A) - \operatorname{tg} D}{\operatorname{tg} J' \sin(\Omega' - \alpha_2) - \operatorname{tg} \delta_2} \\ r'_1 &= \frac{R \cos D}{\cos \delta'_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} J \sin(\Omega - A) - \operatorname{tg} D}{\operatorname{tg} J \sin(\Omega - \alpha'_1) - \operatorname{tg} \delta'_1} \\ r'_2 &= \frac{R \cos D}{\cos \delta'_2} \cdot \frac{\operatorname{tg} J \sin(\Omega - A) - \operatorname{tg} D}{\operatorname{tg} J \sin(\Omega - \alpha'_2) - \operatorname{tg} \delta'_2} \end{aligned} \right\} \quad (27^*)$$

Die Nenner dieser Ausdrücke lassen sich wie in (22\*) dadurch noch weiter vereinfachen, daß man die in ihnen vorkommenden Tangenten der Deklinationen durch ihre Werte aus (28) ersetzt. Sie nehmen dann sämtlich die Form an:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} J' \sin(\Omega' - \alpha_m) - \operatorname{tg} J \sin(\Omega - \alpha_m) &= \\ &= (\operatorname{tg} J' \sin \Omega' - \operatorname{tg} J \sin \Omega) \cos \alpha_m + (-\operatorname{tg} J' \cos \Omega' + \operatorname{tg} J \cos \Omega) \sin \alpha_m = n \sin(\alpha_m + N), \end{aligned}$$

wenn als Hilfsgrößen  $n$  und  $N$  berechnet werden:

$$\left. \begin{aligned} n \sin(N + \Omega') &= \sin(\Omega' - \Omega) \operatorname{tg} J \\ n \cos(N + \Omega') &= \cos(\Omega' - \Omega) \operatorname{tg} J - \operatorname{tg} J' \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Man erhält dann endlich:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{R \cos D}{n} \cdot \frac{\operatorname{tg} J' \sin(\Omega' - A) - \operatorname{tg} D}{\sin(\alpha_1 + N) \cos \delta_1} \\ r_2 &= \frac{R \cos D}{n} \cdot \frac{\operatorname{tg} J' \sin(\Omega' - A) - \operatorname{tg} D}{\sin(\alpha_2 + N) \cos \delta_2} \\ r'_1 &= \frac{R \cos D}{n} \cdot \frac{\operatorname{tg} J \sin(\Omega - A) - \operatorname{tg} D}{\sin(\alpha'_1 + N) \cos \delta'_1} \\ r'_2 &= \frac{R \cos D}{n} \cdot \frac{\operatorname{tg} J \sin(\Omega - A) - \operatorname{tg} D}{\sin(\alpha'_2 + N) \cos \delta'_2} \end{aligned} \right\} \quad (27^{**})$$

Schließlich bemerke ich, daß man diese Gleichungen ebenso einfach erhält, wenn man die Entfernungen  $r_1, r_2, r'_1, r'_2$  der vier an den beiden Orten beobachteten Meteorpositionen unter der Bedingung bestimmt, daß dieselben in einer geraden Linie liegen, was ja eigentlich die Grundidee der Methode ist.

Die Rechnung nach den Formeln (27\*\*) gestaltet sich, wie man auf den ersten Blick erkennt, sehr einfach. Man ersieht aus ihnen auch unmittelbar, daß eine geringe Größe von  $u$  eine Unsicherheit in der Bestimmung aller Entfernungen des Meteoroiden nach sich zieht, daß hingegen bloß die davon betroffene Entfernung berührt wird, wenn eine der Größen  $\sin(\alpha_m + N)$  klein ausfällt. Der erste Fall tritt ein, wenn die beiden beobachteten Bahnebenen einen geringen Winkel miteinander bilden; der andere, wenn die Visurlinie die Trasse unter einem sehr spitzen Winkel schneidet.

Die Ausdrücke (27\*\*) bieten daher auch ein Mittel dar, die Sicherheit der gewonnenen Zahlen annähernd zu beurteilen, ohne daß man nötig hat, zu diesem Behufe erst den Maximaleinfluß eines Fehlers von  $\epsilon^\circ$  in jeder Meteorposition zu berechnen, dessen Berechnung speziell bei dieser Methode wohl nur ausnahmsweise im richtigen Verhältnisse zu dem dazu erforderlichen Zeitaufwande stehen dürfte. Man kann übrigens noch auf eine andere Art einen ungefähren Maßstab für die Sicherheit des Resultates gewinnen.

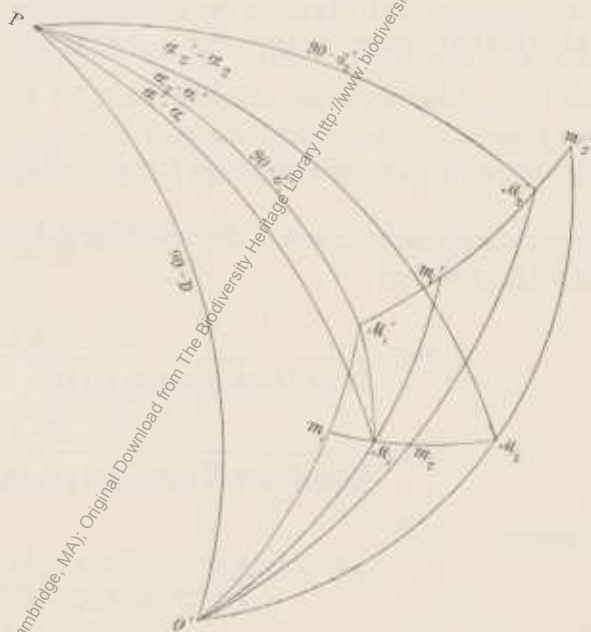
Stellen (Fig. 6), auf die Sphäre übertragen,  $P$  den Weltpol,  $M_1, M_2$  und  $M'_1, M'_2$  die in  $O$  und  $O_1$  beobachteten Punkte der Meteorbahn und  $O'$  die Position von  $O_1$  aus  $O$  gesehen, vor, so kann man das Wesen unserer Methode dahin definieren, daß man die Durchschnittspunkte  $m'_1$  und  $m'_2$  der größten Kreise  $O'M_1$  und  $O'M_2$  mit der in  $O_1$  beobachteten Bahnebene  $M'_1M'_2$  sucht und zur Berechnung von  $r_1$  und  $r_2$  die in  $O_1$  beobachteten Punkte  $M'_1$  und  $M'_2$  durch  $m'_1$  und  $m'_2$  ersetzt. In gleicher Weise substituiert man zur Berechnung von  $r'_1$  und  $r'_2$  für die in  $O$  beobachteten Punkte  $M_1$  und  $M_2$  die Punkte  $m_1$  und  $m_2$ . Die Koordinaten  $a_1, d_1$  und  $a_2, d_2$  von  $m_1$  und  $m_2$  bestimmen sich aus der Bemerkung, daß  $m_1$  auf den größten Kreisen  $O'M'_1$  und  $M_1M_2$  und  $m_2$  auf  $O'M'_2$  und  $M_1M_2$  liegt, nach (13) durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} d_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) - \operatorname{tg} \delta_1 \sin(\alpha_2 - a_1) + \operatorname{tg} \delta_2 \sin(\alpha_1 - a_1) &= 0 \\ \operatorname{tg} d_1 \sin(A - \alpha'_1) - \operatorname{tg} \delta'_1 \sin(A - a_1) + \operatorname{tg} D \sin(\alpha'_1 - a_1) &= 0 \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} d_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) - \operatorname{tg} \delta_1 \sin(\alpha_2 - a_2) + \operatorname{tg} \delta_2 \sin(\alpha_1 - a_2) &= 0 \\ \operatorname{tg} d_2 \sin(A - \alpha'_2) - \operatorname{tg} \delta'_2 \sin(A - a_2) + \operatorname{tg} D \sin(\alpha'_2 - a_2) &= 0. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Ebenso finden sich die Koordinaten  $a'_1, d'_1$  und  $a'_2, d'_2$  von  $m'_1$  und  $m'_2$  als die Durchschnittspunkte des Kreises  $M'_1M'_2$  mit  $O'M_1$  und  $O'M_2$  durch die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} d'_1 \sin(\alpha'_2 - \alpha'_1) - \operatorname{tg} \delta'_1 \sin(\alpha'_2 - a'_1) + \operatorname{tg} \delta'_2 \sin(\alpha'_1 - a'_1) &= 0 \\ \operatorname{tg} d'_1 \sin(A - \alpha_1) - \operatorname{tg} \delta_1 \sin(A - a'_1) + \operatorname{tg} D \sin(\alpha_1 - a'_1) &= 0 \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} d'_2 \sin(\alpha'_2 - \alpha'_1) - \operatorname{tg} \delta'_1 \sin(\alpha'_2 - a'_2) + \operatorname{tg} \delta'_2 \sin(\alpha'_1 - a'_2) &= 0 \\ \operatorname{tg} d'_2 \sin(A - \alpha_2) - \operatorname{tg} \delta_2 \sin(A - a'_2) + \operatorname{tg} D \sin(\alpha_2 - a'_2) &= 0. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (30^*)$$

Fig. 6.





Der Unterschied zwischen den so erhaltenen Positionen  $m_1, m_2, m'_1$  und  $m'_2$  von den beobachteten  $M_1, M_2, M'_1$  und  $M'_2$  liefert ein anschauliches Bild über die Beträge, um welche man die Beobachtungen ändern muß, um sie von Beobachtungs- und Auffassungsfehlern zu befreien und damit von ihrer inneren Übereinstimmung.

Die rechnermäßige Ermittlung der Koordinaten von  $m_1, m_2$  u. s. w. wäre kaum weniger zeitraubend und mühsam als die Berechnung der Einflüsse von Beobachtungsfehlern. Man kann sie aber mittelst Karten in Äquatoreal-Horizontalprojektion sehr einfach und bequem umgehen, indem man [wie bei den Gleichungen (14)] die Lage der Durchschnittspunkte der als gerade Linien erscheinenden größten Kreise  $M_1M_2, M'_1M'_2, O'M_1, O'M_2, O'M'_1$  und  $O'M'_2$  auf der Karte abliest.

Der Vollständigkeit wegen setze ich auch die Ausdrücke her, welche zur Berechnung des Maximaleinflusses eines in den einzelnen Positionen begangenen Fehlers von  $\epsilon^\circ$  erforderlich sind, verweise aber in Bezug auf deren ziemlich weitläufige Entwicklung auf meine oben angezogene Abhandlung.

Versteht man unter  $L$  und  $L'$  die scheinbaren Längen der in  $O$  und  $O_1$  gesehenen Meteorbahnen und setzt man Kürze halber:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{\sin L}{R \cos D \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) [\operatorname{tg} J \sin(\Omega - A) - \operatorname{tg} D]} \\ P' &= \frac{\sin L'}{R \cos D \cos \delta'_1 \cos \delta'_2 \sin(\alpha'_1 - \alpha'_2) [\operatorname{tg} J' \sin(\Omega' - A) - \operatorname{tg} D]} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} dr_1 &= \pm [r_1 \sqrt{r_1^2 P^2 - 1} \pm r'_1 \cdot r_1 P] \\ dr_2 &= \pm [r_2 \sqrt{r_2^2 P^2 - 1} \pm r'_2 \cdot r_2 P] \\ dr'_1 &= \pm [r'_1 \sqrt{r_1'^2 P^2 - 1} \pm r_1 \cdot r'_1 P] \\ dr'_2 &= \pm [r'_2 \sqrt{r_2'^2 P^2 - 1} \pm r_2 \cdot r'_2 P]. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Um den Maximaleinfluß zu erhalten, den ein Fehler von  $\epsilon^\circ$  verursachen kann, hat man über die Zeichen innerhalb der Klammern so zu verfügen, daß die Ausdrücke eine Summe ihrer Teile werden.

In den Formeln (32) ist in  $dr_1$  zur Vereinfachung (Fig. 6)  $m'_1M'_1 = 0$  und  $m'_1M'_2 = M'_1M'_2 = L'$  gesetzt worden. Dies kommt einer Vernachlässigung des Einflusses des Fehlers gleich, der am zweiten Orte in der Beobachtung des Endpunktes der Meteorbahn begangen wurde. Die Formeln geben daher im allgemeinen den Maximaleinfluß etwas zu klein an, was indes wohl kaum je von Belang sein kann. Auch in den Ausdrücken für  $dr_2, dr'_1$  und  $dr'_2$  sind ähnliche Vereinfachungen eingeführt worden. Die Formeln von Bessel überschätzen den Maximaleinfluß in vielen Fällen nicht unerheblich, wie in meiner schon mehrfach genannten Abhandlung auseinandergesetzt wurde.

Perspektivischen Gesetzen zufolge müssen die an beiden Orten beobachteten Bahnen durch den Radiationspunkt hindurchgehen. Da nun bei dieser Methode die Lage der Bahnebene eine maßgebende Rolle spielt, liegt der Gedanke nahe, daß sich in jenen Fällen, wo der Radiationspunkt genau bekannt ist, die Sicherheit des Resultates in der Regel erhöhen ließe, wenn die beobachteten Positionen vor ihrer Verwendung zur Höhenberechnung derart korrigiert würden, daß sich beide Bahnen tatsächlich im Radianten schneiden. Die einfachste Art, dies zu erreichen, besteht wohl darin, daß man die Bahnen um ihren Mittelpunkt  $(\alpha_m, \delta_m)$  in den Radianten dreht, d. h. so weit dreht, daß Radiant, Anfangs- und Endpunkt der Bahn in einen größten Kreis zu liegen kommen.

Ist (Fig. 7)  $N$  die Mitte der Meteorbahn, so liefern die Dreiecke  $PM_1N$  und  $PM_2N$  die Relationen:

$$\cos \delta_1 \sin (\alpha_m - \alpha_1) = \sin \frac{L}{2} \sin x$$

$$\cos \delta_1 \cos (\alpha_m - \alpha_1) = \cos \frac{L}{2} \cos \delta_m + \sin \frac{L}{2} \sin \delta_m \cos x$$

$$\sin \delta_1 = \cos \frac{L}{2} \sin \delta_m - \sin \frac{L}{2} \cos \delta_m \cos x$$

$$\cos \delta_2 \sin (\alpha_m - \alpha_2) = -\sin \frac{L}{2} \sin x$$

$$\cos \delta_2 \cos (\alpha_m - \alpha_2) = \cos \frac{L}{2} \cos \delta_m - \sin \frac{L}{2} \sin \delta_m \cos x$$

$$\sin \delta_2 = \cos \frac{L}{2} \sin \delta_m + \sin \frac{L}{2} \cos \delta_m \cos x,$$

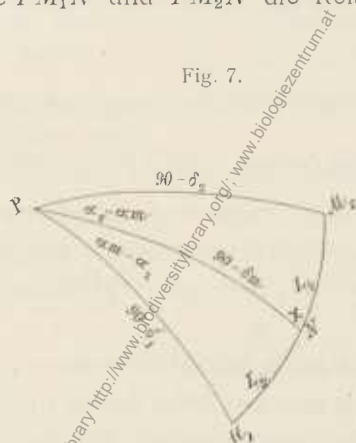


Fig. 7.

woraus auf leicht ersichtliche Weise folgt:

$$\cos \delta_1 \sin (\alpha_m - \alpha_1) + \cos \delta_2 \sin (\alpha_m - \alpha_2) = 0$$

$$\cos \delta_1 \cos (\alpha_m - \alpha_1) + \cos \delta_2 \cos (\alpha_m - \alpha_2) = 2 \cos \frac{L}{2} \cos \delta_m$$

$$\sin \delta_1 + \sin \delta_2 = 2 \cos \frac{L}{2} \sin \delta_m$$

und daraus auf bekannte Art zur Berechnung von  $L$ ,  $\alpha_m$  und  $\delta_m$ :

$$2 \cos \frac{L}{2} \cos \delta_m \sin (\alpha_m - N) = \cos \delta_1 \sin (\alpha_1 - N) + \cos \delta_2 \sin (\alpha_2 - N)$$

$$2 \cos \frac{L}{2} \cos \delta_m \cos (\alpha_m - N) = \cos \delta_1 \cos (\alpha_1 - N) + \cos \delta_2 \cos (\alpha_2 - N)$$

$$2 \cos \frac{L}{2} \sin \delta_m = \sin \delta_1 + \sin \delta_2.$$

Sehr bequeme Ausdrücke resultieren, wenn man  $N = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$  annimmt und dann die Summen der Differenzen der rechts stehenden trigonometrischen Funktionen, durch die ihnen gleichgeltenden Produkte ausdrückt. Man erhält dann:

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{L}{2} \cos \delta_m \sin \left( \alpha_m - \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \right) &= -\sin \frac{\delta_2 + \delta_1}{2} \sin \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \\ \cos \frac{L}{2} \cos \delta_m \cos \left( \alpha_m - \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \right) &= +\cos \frac{\delta_2 + \delta_1}{2} \cos \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \\ \cos \frac{L}{2} \sin \delta_m &= +\sin \frac{\delta_2 + \delta_1}{2} \cos \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Die Länge  $L$  der Meteorbahn findet sich aus diesen Gleichungen im allgemeinen nicht sicher, da  $L$  in der Regel eine mäßige Größe hat. Man verwendet daher zu ihrer Berechnung zweckmäßiger die Gleichung:

$$\sin^2 \frac{L}{2} = \sin^2 \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1), \quad (34)$$

welche aus der gewöhnlich üblichen:

$$\cos L = \sin \delta_2 \sin \delta_1 + \cos \delta_2 \cos \delta_1 \cos (\alpha_2 - \alpha_1)$$

auf eine sehr einfache Weise sich ableiten und für die hier erforderliche Genauigkeit sogar etwas einfacher durch die Anlage einer Tafel berechnen läßt, die mit dem Argumente  $x$ ,  $\sin^2 \frac{x}{2}$  und  $\log \sin^2 \frac{x}{2}$  gibt. Da wir auf Gleichungen von derselben Form noch mehrmals stoßen werden, ist der Abhandlung eine solche Tafel als Tafel II beigegeben, welche von  $x = 0^\circ$  bis  $x = 90^\circ$  läuft. Für  $x > 90^\circ$  kann man sie, von der Relation:  $\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{180-x}{2}$  Gebrauch machend, ebenfalls verwenden; es erschien deshalb nicht nötig, sie auf größere Werte als  $x = 90^\circ$  fortzuführen.

Hat man auf diese Art  $\alpha_m$  und  $\delta_m$  gefunden und sei  $a_r$  und  $d_r$  die Position des Radianten, so findet man den Knoten und die Neigung des durch  $(\alpha_m, \delta_m)$  und  $(a_r, d_r)$  gehenden größten Kreises, sowie den Abstand  $E$  der Bahnmitte  $(\alpha_m, \delta_m)$  vom Knoten aus den nachstehenden Formeln, deren Ableitung so einfach ist, daß sie füglich übergangen werden kann:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} (\Omega - \alpha_m) &= \frac{\operatorname{tg} \delta_m \sin (\alpha_m - a_r)}{\operatorname{tg} d_r - \cos (\alpha_m - a_r) \operatorname{tg} \delta_m} \\ \sin E \sin J &= \sin \delta_m \\ \sin E \cos J &= \cos \delta_m \sin (\Omega - \alpha_m) \\ \cos E &= \cos \delta_m \cos (\Omega - \alpha_m). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Bei den Hilfsgrößen  $\Omega$  und  $J$  kann man über den Quadranten der einen, sagen wir des Neigungswinkels  $J$ , frei verfügen. Es empfiehlt sich indes, nach einem gewissen System vorzugehen und wie bei Planetenbahnen  $J$  von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  zu zählen, so zwar, daß man  $J \leq 90^\circ$  annimmt, je nachdem  $\alpha_m - a_r \leq 180^\circ$  ist.

Trägt man nun von  $(\alpha_m, \delta_m)$  die halbe Bahnlänge  $\frac{L}{2}$  nach vorwärts und rückwärts auf dem Bogen  $E$  ab, so erhält man die Anfangs- und Endpunkte der in den Radianten gedrehten Bahn, die mit  $[\alpha]$  und  $[\delta]$  bezeichnet werden mögen, aus:

$$\left. \begin{aligned} \cos [\delta] \cos (\Omega - [\alpha]) &= \cos \left( E \pm \frac{L}{2} \right) \\ \cos [\delta] \sin (\Omega - [\alpha]) &= \sin \left( E \pm \frac{L}{2} \right) \cos J \\ \sin [\delta] &= \sin \left( E \pm \frac{L}{2} \right) \sin J. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Hat man die Quadranten von  $J$  und  $\Omega$  nach der obigen Vorschrift bestimmt, so geben die oberen Zeichen die Koordinaten des Anfangs-, die unteren Zeichen die des Endpunktes der Bahn und diese, sowie die auf gleiche Weise für den anderen Ort ermittelten Koordinaten sind für die weiteren Rechnungen statt der beobachteten zu benützen.

Die für die Beobachtungen am ersten Orte mit  $\Omega$  und  $J$  bezeichneten Hilfsgrößen, sowie die gleichnamigen Größen  $\Omega'$  und  $J'$  für den zweiten Ort, fallen, wie man leicht erkennt, mit dem oben [unter (28)] ebenso bezeichneten zusammen, sind also für die Gleichungen (27\*) nicht mehr zu berechnen.

Diese Methode liefert, wie die beiden früher besprochenen, unsichere Resultate, wenn die Visurlinien die am anderen Orte beobachtete Bahnebene unter einem spitzen Winkel schneiden, nur mit dem Unterschiede, daß man, wenn hier dieser Fall eintritt, nicht wie bei jenen Methoden, die Ebene wechseln kann, mit der man den Durchschnitt der Visurlinien bestimmt. Eine vorhandene Unsicherheit läßt sich



also hier nicht beheben. Dazu kommt noch, daß man zur Bestimmung der Lage der Bahnebene den am zweiten Orte gesehenen Anfangs- und Endpunkt benötigt, folglich zur Bestimmung des Durchschnittes einer Visurlinie mit dieser Ebene, mit den Fehlern in drei Positionen zu rechnen hat, während man zur Lösung des Problems eigentlich nur zweier Positionen, der beiden Anfangs- oder der beiden Endpunkte, bedarf, daß man also eine Unsicherheit hineinträgt, die vermieden werden kann.

Damit sind jedoch die Mängel der Methode nicht erschöpft. Die am zweiten Orte beobachteten Positionen des Meteoroiden gehen streng genommen in die Berechnung gar nicht ein, sondern werden durch die von ihnen bestimmte Ebene ersetzt, deren Lage gegen die am anderen Orte beobachteten Visuren selbst bei sehr großen Parallaxen so ungünstig sein kann, daß das Resultat sehr unsicher, zuweilen sogar illusorisch wird.

Die Parallaxe, die der Natur der Sache nach einen der Hauptfaktoren für die Bemessung der Sicherheit des Resultates bilden sollte, kommt überhaupt hier nur, wenn sie klein ist, und auch da nur insofern zur Geltung, als in diesem Falle die beiderseits beobachteten Bahnebenen des Meteoroiden keinen großen Winkel miteinander einschließen können. Im Zusammenhange damit steht noch Folgendes.

Die Visurlinien zu den Anfangs- und Endpunkten eines an einem Orte beobachteten Meteoroiden werden die Bahnebenen eines an einem anderen Orte gesehenen, welches man den Zeitangaben zufolge als gleichzeitig erschienen ansehen kann, im allgemeinen auch dann treffen, wenn die Meteoroiden nicht identisch waren. Dadurch verleitet, hat man vielfach bloß aus dem nahen Zusammenstimmen der Beobachtungszeiten auf die Identität von Meteoroiden geschlossen, wo eine genauere Prüfung der Sachlage diese Annahme als unhaltbar erwiesen hätte. So liegen bei durchaus einwandfreien Beobachtungen (Fig. 6) die drei Punkte  $O'$ ,  $M_1$ ,  $M_1'$  und  $O'$ ,  $M_2$ ,  $M_2'$  je auf einem größten Kreise. Die Winkel  $M_1'O'M_1$  und  $M_2'O'M_2$ , welche die Differenz der Positionswinkel der Dreiecke  $O'PM_1$  und  $O'PM_1'$ , respektive  $O'PM_2$  und  $O'PM_2'$  am Punkte  $O'$  vorstellen, setzen sich, wie schon früher erörtert wurde, aus Beobachtungsfehlern und Auffassungsunterschieden zusammen und können, falls die letzteren zwischen zwei Beobachtern einen namhaften Wert erreichen, auch recht erheblich werden, ohne daß die Bahnlage dadurch wesentlich entstellt würde.

Welche Größe für diese Winkel noch zulässig sei, läßt sich von vorneherein nicht allgemein festsetzen, da gleich große Fehler je nach den Umständen einen sehr verschiedenen Einfluß ausüben. Beim Durchblicken der von Ermann im 17. und 19. Bande der Astron. Nachr., S. 315—318 und S. 27, 28, sowie der von J. F. Schmidt in seiner schönen Schrift »Resultate aus zehnjährigen Beobachtungen über Sternschnuppen« S. 122—138, nach dieser Methode ausgeführten Berechnungen bemerkt man aber, daß noch Höhen von Meteoroiden bestimmt werden, bei denen die vorgenannten Winkel auf  $30^\circ$  und  $40^\circ$ , ja sogar auf mehr als  $60^\circ$  steigen. Daß solche Differenzen das Maß des Zulässigen weit übersteigen, steht wohl außer Frage. Man kann aus ihnen nur entnehmen, daß die Meteoroiden nicht identisch waren oder daß die Beobachtungen durch Fehler entstellt sind, die sie zu einer Höhenberechnung untauglich machen.

Dies wäre auch sofort hervorgetreten, wenn die Höhen nicht bloß aus der Kombination der Visurlinien am ersten Orte mit der Bahnebene des zweiten, sondern auch aus der Verbindung der Visurlinien am zweiten, mit der Bahnebene des ersten Ortes ermittelt worden wären, was aber außer bei den von mir in meiner schon mehrfach angezogenen Abhandlung bearbeiteten korrespondierenden Beobachtungen bei keiner mir bekannten größeren Beobachtungsreihe geschehen ist. Denn die von Bessel mit  $\rho$  und  $\rho'$  bezeichneten Entfernungen sind nicht die Entfernungen des Meteoroiden vom zweiten Orte mit den an demselben beobachteten Bahnpunkten  $M_1'$  und  $M_2'$  (Fig. 6), sondern die Entfernungen, in denen sich das Meteoroiden vom zweiten Orte befunden hätte, wenn es in  $m_1'$  und  $m_2'$  gesehen worden wäre. So folgt beispielsweise für das zwischen Berlin und Breslau am 14. November 1836 unter Nr. 33 (Astr. Nachr., Bd. 17) beobachtete Meteoroiden, bei dem die Differenz der Positionswinkel (nach Bessel's Bezeichnung  $p-\pi$  und  $p'-\pi'$ ) für den Anfangspunkt  $66^\circ 57'$  und für den Endpunkt  $53^\circ 28'$  beträgt, aus den Visurlinien

in Berlin mit der Bahnebene in Breslau als Anfangs- und Endhöhe  $143 \text{ km}$  und  $97 \text{ km}$ ,<sup>1</sup> während dafür die Visurlinien in Breslau, verbunden mit der Bahnebene in Berlin,  $50 \text{ km}$  und  $21 \text{ km}$  ergeben!

Einfacher kann man sich, wie schon einmal erwähnt wurde, dadurch ein Bild von der Zuverlässigkeit der Beobachtungen verschaffen, wenn man einer Karte in Äquatorial-Horizontalprojektion die Position der Punkte  $m_1, m_2, m'_1$  und  $m'_2$  entnimmt, die statt der tatsächlich notierten der Rechnung zugrunde gelegt werden. So hätte das obige Meteor, den Beobachtungen in Berlin zufolge, in Breslau seinen Lauf statt von  $191^\circ + 37^\circ$  bis  $201^\circ + 25^\circ$ , von  $88^\circ + 53^\circ$  bis  $148^\circ + 58^\circ$  nehmen müssen, in Berlin hingegen, den Breslauer Beobachtungen zufolge, statt von  $137^\circ + 3^\circ$  bis  $150^\circ \pm 0^\circ$ , von  $161^\circ - 3^\circ$  bis  $168^\circ - 4^\circ$ . In gleicher Weise müßte das ebenfalls in Berlin und Breslau am 10. August 1839 als Nr. 38 beobachtete Meteor (Astr. Nachr., 19. Bd.), bei dem die Differenz der Positionswinkel sich beim Anfangs- und Endpunkte auf  $34^\circ 6'$  und  $40^\circ 0'$  belief, nach den Breslauer Beobachtungen sich in Berlin von  $318^\circ + 6^\circ$  nach  $306^\circ - 9^\circ$  statt von  $336^\circ 4' + 26^\circ 5'$  nach  $327^\circ 4' + 17^\circ 4'$  bewegt haben und nach den Berliner Beobachtungen in Breslau von  $299^\circ + 54^\circ$  nach  $286^\circ + 41^\circ$  statt von  $277^\circ + 25^\circ$  nach  $268^\circ + 5^\circ$  geflogen sein. Mag man nun auch die Auffassungsunterschiede zwischen zwei Beobachtern noch so hoch anschlagen, so sind solche von einer derartigen Größe sicher ganz und gar ausgeschlossen; sie würden übrigens, kämen sie wirklich vor, jede Höhenberechnung illusorisch machen. Noch deutlicher aber erhellt die Wirkung, welche Verschiebungen von einer ähnlichen Größe auf die Höhenberechnungen ausüben, aus folgender Betrachtung.

In Fig. 6 stellt der Bogen  $M_1M'_1$  die beobachtete Parallaxe des Anfangspunktes und der (in der Figur nicht ausgezogene) Bogen  $M_2M'_2$  die des Endpunktes dar, während der Rechnung, an deren Statt entweder die Bogen  $m_1M'_1$  und  $m_2M'_2$  oder  $M_1m'_1$  und  $M_2m'_2$  zugrunde gelegt werden. Wenn nun unter anderem in Schmidt's oben angezogener Abhandlung beim Meteor Nr. 28 die beobachteten Parallaxen des Anfangs- und Endpunktes von  $6^\circ 6'$  und  $9^\circ 5'$  auf  $130^\circ 8'$  und  $139^\circ 4'$  erhöht, bei Nr. 31 hingegen von  $20^\circ 7'$  und  $20^\circ 2'$  auf  $6^\circ 9'$  und  $9^\circ 0'$  herabgesetzt und bei Nr. 34 statt  $41^\circ 6'$  und  $45^\circ 9'$ ,  $51^\circ 0'$  und  $24^\circ 2'$  verwendet werden, darf man sich da wundern, daß man im ersten Falle auf unwahrscheinlich geringe, im zweiten auf exorbitant große Höhen stößt und im dritten das Meteor in ein aufsteigendes sich verwandelt? Ähnliche Bemerkungen ließen sich wohl auch an die von Ermann berechneten Beobachtungsreihen knüpfen, wenn sie so detailliert mitgeteilt wären, wie dies Schmidt tut; jedenfalls aber bedürfen alle diese Rechnungen einer durchgreifenden Revision, wenn auf die Resultate derselben Schlüsse gebaut werden sollen. Für die den Laurentiusstrom und den Leoniden angehörenden Meteore habe ich zwar eine solche Revision für den ersten Teil meiner Abhandlung »Beiträge zur Kenntnis der Sternschnuppen«<sup>2</sup> durchgeführt, mich aber darauf beschränkt, jene Höhenangaben auszuschneiden, bei denen mir die Identität der Meteorc ausgeschlossen oder das Resultat sehr unsicher schien, ohne aber zu untersuchen, ob nicht eine andere als die angewendete Berechnungsmethode brauchbare Werte liefern könnte, was noch nachzutragen wäre.

Kehren wir nach dieser Abschweifung zur Besprechung der Mängel der Methode zurück, so ist es als ein weiterer wunder Punkt derselben zu bezeichnen, daß Berechnungen nach ihr auch dann unsicher ausfallen, wenn die Bahn des Meteorc wegen ihrer Nähe am Radianten an einem Orte optisch sehr verkürzt erscheint, weil dann selbst sehr geringe Beobachtungsfehler die Bahnlage wesentlich zu verfälschen vermögen. Taucht aber ein Meteor an einem Orte im Radiationspunkte selbst auf, d. h. gehört es zu den sogenannten stationären, dann wird die Berechnung überhaupt untunlich, da in diesem Falle bei fehlerfreien Beobachtungen die Bahnebene am zweiten Orte mit der Visurlinie am ersten zusammenfällt

<sup>1</sup> Statt dieser Höhen gibt Ermann die Anfangshöhe zu  $23 \cdot 05 \pm 1 \cdot 80 \epsilon$  und die Endhöhe zu  $16 \cdot 30 \pm 0 \cdot 82 \epsilon$  geographische Meilen oder, auf Kilometer umgerechnet, zu  $171 \pm 13 \cdot 4 \epsilon$  und  $121 \pm 6 \cdot 1 \epsilon$  an. Woher die starke Differenz stammt, läßt sich nicht näher verfolgen, da die dazu nötigen Zwischenzahlen fehlen; nur so viel sei bemerkt, daß die von mir gefundenen Positionswinkel noch mit denen von Ermann übereinstimmen, und daß die Endhöhe  $16 \cdot 30$  vielleicht ein Druckfehler statt  $13 \cdot 60$  ist.

<sup>2</sup> Sitzsber. d. kais. Akad. d. Wiss., mathem.-naturw. Kl., LVII. Bd., II. Abt., S. 328—330.



so daß es nur von Beobachtungsfehlern herrührt, wenn ein Durchschnittspunkt vorhanden ist. Wird dieses Moment übersehen, so ist die gefundene Höhe nur aus Beobachtungsfehlern errechnet und infolgedessen natürlich ganz illusorisch. Dies tritt besonders klar zu Tage, wenn man den Konsequenzen nachgeht, zu denen man geführt würde, wollte man einem solchen Resultate eine Realität zusprechen.

Bei einem stationären Meteore fällt die Visurlinie zum Anfangspunkte mit der zum Endpunkte zusammen: diese beiden Visurlinien geben daher nur einen Durchschnittspunkt mit der Bahnebene am anderen Orte, und es wird demgemäß die Anfangs- und Endhöhe des Meteores gleich gefunden. Da jedoch jedes herabfallende Meteor an einem Erdorte als ein stationäres gesehen werden muß, würde daraus folgen, daß alle Meteore der Erdoberfläche parallel laufen. Dieses Verhalten zeigen natürlich die im 17. Bande der Astr. Nachr., S. 317, berechneten Höhen für die in Berlin und Breslau am 14. November 1896 und 10. August 1839 beobachteten Meteore Nr. 26 und Nr. 18, von denen das erste in Berlin, das zweite in Breslau stationär war. Die Meteore waren, übrigens nebenbei bemerkt, überhaupt nicht identisch, wenn nicht Beobachtungsfehler vorgekommen sind, die das gewöhnliche Maß weit überschreiten.

Aus den vorstehenden Darlegungen erhellt, daß diese Methode der Höhenberechnung von Meteoriten nicht jenen Wert besitzt, den man ihr bisher allgemein beigemessen hat, indem die vielfachen Momente, welche die Berechnung nach ihr unsicher und illusorisch machen, die Anwendung derselben sehr beschränken, und die verschiedenen Nebenumstände, die man zu beachten hat, viel Umsicht und Überlegung erfordern.

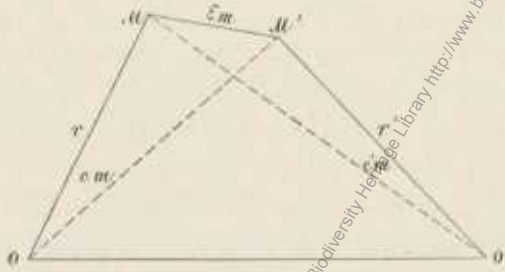
Diesen Übelständen steht allerdings der schon oben hervorgehobene, nicht gering zu schätzende Vorzug gegenüber, daß bei den gewöhnlichen Beobachtungsmethoden die Bahnlage sicherer beobachtet wird als der Anfangs- und Endpunkt. Bei Berücksichtigung aller einschlägigen Verhältnisse halte ich indes dafür, daß dieser Vorteil die Mängel bei weitem nicht aufwiegt, wenn die Beobachtungsfehler und Auffassungsunterschiede von gleicher Größenordnung sind, wie dies beim Einzeichnen der Meteorbahnen in Sternkarten oder Einstellen derselben an Meteoroskopien der Fall ist. Berechtigten hingegen gute Gründe zu der Annahme, daß die Beobachtungsfehler weit geringer sind als die Auffassungsunterschiede, mit anderen Worten, daß die Bahnlage viel genauer wiedergegeben ist, als der Anfangs- und Endpunkt, dann halte ich auch heute noch die Anwendung dieser Methode für angezeigt. Dies dürfte nicht selten bei photographischen Aufnahmen zutreffen, so die wenigen bisher gelungenen dargetan haben, daß die Lichtstärke eines Meteores während seiner Sichtbarkeit keineswegs so konstant sei, als man nach den Beobachtungen mit freiem Auge anzunehmen geneigt ist, daß vielmehr in der Regel an einzelnen Stellen der Bahn Lichtknoten sowie Anschwellungen und Abschwächungen der Helligkeit vorhanden sind. Es steht daher, insbesondere bei schwachen Meteorspuren zu befürchten, daß infolge von Unterschieden in der Durchsichtigkeit der Luft und in der Sensibilität der Platten, die Anfangs- und Endpunkte der an mehreren Orten aufgenommenen Bahnen sich nicht decken, während die Bahnlage davon unberührt bleibt.



B. Berechnung der Entfernung eines Meteores aus der kürzesten Verbindungslinie der korrespondierenden Gesichtslinien.

Zum Ausgangspunkte der Berechnung der Entfernung eines Meteores kann man auch die beiden Punkte wählen, in denen sich die Gesichtslinien am nächsten kommen. Seien (Fig. 8)  $M$  und  $M'$  diese

Fig. 8.



Punkte und behalten wir die früheren Bezeichnungen, jedoch mit der Vereinfachung bei, daß wir die unteren Indizes weglassen, da von nun an wieder bloß die Anfangs- oder Endpunkte in Betracht kommen, nennen wir also die Koordinaten von

- $M$ , bezogen auf  $O$  als Anfangspunkt  $x, y, z; r, \alpha, \delta$
- die von  $M'$ , » »  $O_1$  » »  $x', y', z'; r', \alpha', \delta'$
- » »  $O_1$  » »  $O$  » »  $\xi, \eta, \zeta; R, A, D,$

so ist die Entfernung  $MM' = E$  gegeben durch

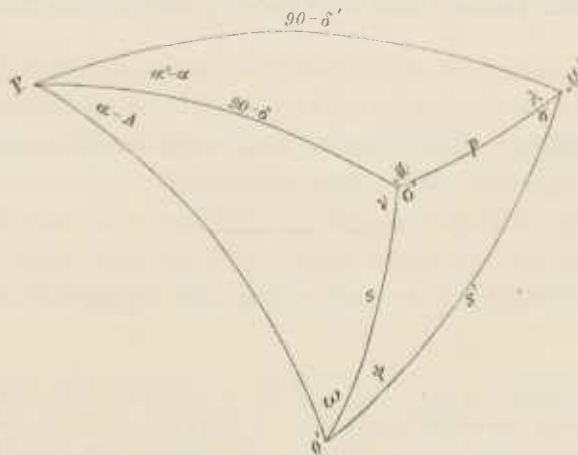
$$E^2 = (x' + \xi - x)^2 + (y' + \eta - y)^2 + (z' + \zeta - z)^2 = r^2 - 2rr' \cos p + r'^2 - 2rR \cos s + 2r'R \cos s' + R^2, \quad (37^*)$$

wobei gesetzt wurde:

$$\left. \begin{aligned} \cos p &= \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha) \\ \cos s &= \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (\alpha - A) \\ \cos s' &= \sin \delta' \sin D + \cos \delta' \cos D \cos (\alpha' - A). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Die Bogen  $p, s$  und  $s'$  haben eine einfache geometrische Bedeutung. Sei (Fig. 9)  $P$  der Pol des

Fig. 9.



Äquators,  $O'$  der Ort, an dem sich  $O_1$ , von  $O$  aus gesehen, am Himmel projiziert,  $M$  der in  $O$  und  $M'$  der in  $O_1$  notierte Anfangs- oder Endpunkt der Meteorbahn, so liefern die Dreiecke  $PO'M, PO'M', PMM'$

und  $O'MM'$  die nachstehenden Relationen, welche ich so vollständig hersetze, wie wir sie des Folgenden wegen benötigen.

$$\begin{aligned} \sin s \sin w &= \cos \delta \sin (\alpha - A) \\ \sin s \cos w &= \sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos (\alpha - A) \\ \sin s \sin v &= \cos D \sin (\alpha - A) \\ \sin s \cos v &= \sin D \cos \delta - \cos D \sin \delta \cos (\alpha - A) \\ \cos s &= \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (\alpha - A) \end{aligned} \quad (38 a)$$

$$\begin{aligned} \sin s' \sin w' &= \cos \delta' \sin (\alpha' - A) \\ \sin s' \cos w' &= \sin \delta' \cos D - \cos \delta' \sin D \cos (\alpha' - A) \\ \sin s' \sin \lambda &= \cos D \sin (\alpha' - A) \\ \sin s' \cos \lambda' &= \sin D \cos \delta' - \cos D \sin \delta' \cos (\alpha' - A) \\ \cos s' &= \sin \delta' \sin D + \cos \delta' \cos D \cos (\alpha' - A) \end{aligned} \quad (38 b)$$

$$\begin{aligned} \sin p \sin \theta &= \cos \delta' \sin (\alpha' - \alpha) \\ \sin p \cos \theta &= \sin \delta' \cos \delta - \cos \delta' \sin \delta \cos (\alpha' - \alpha) \\ \sin p \sin \lambda &= \cos \delta \sin (\alpha' - \alpha) \\ \sin p \cos \lambda &= \sin \delta \cos \delta' - \cos \delta \sin \delta' \cos (\alpha' - \alpha) \\ \cos p &= \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha) \end{aligned} \quad (38 c)$$

$$\begin{aligned} \sin p \sin \sigma &= \sin s \sin \psi \\ \sin p \cos \sigma &= \cos s \sin s' - \sin s \cos s' \cos \psi \\ \sin p \sin \sigma' &= \sin s' \sin \psi \\ \sin p \cos \sigma' &= \cos s' \sin s - \sin s' \cos s \cos \psi \\ \cos p &= \cos s \cos s' + \sin s \sin s' \cos \psi \end{aligned} \quad (38 d)$$

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{2}{\sin s \sin s'} \cdot \sqrt{\sin \frac{s+s'+p}{2} \sin \frac{s+s'-p}{2} \sin \frac{s-s'+p}{2} \sin \frac{-s+s'+p}{2}} \\ \cos s &= \cos s' \cos p + \sin s' \sin p \cos \sigma \\ \cos s' &= \cos s \cos p + \sin s \sin p \cos \sigma' \\ \sin s \sin \sigma &= \sin s' \sin \sigma' \\ \psi &= w' - w \\ \sigma &= \lambda' - \lambda \\ \nu + \theta + \sigma' &= 360^\circ \end{aligned} \quad (38 e)$$

$\lambda'$  und  $w'$  sind die Positionswinkel  $PM'O'$  und  $PO'M'$  in dem gleichbezeichneten sphärischen Dreiecken und  $\theta$  der Winkel  $PMM'$ ; die Bedeutung der übrigen Größen ist aus der Figur ersichtlich.

Aus diesen Relationen erkennt man sofort, daß  $p$  die beobachtete Parallaxe des Meteores bedeutet und  $s$  und  $s'$  die Winkel sind, welche die Visurlinien von  $O$  und  $O_1$  zum Meteore mit der Verbindungslinie der beiden Orte oder ihrer Verlängerung einschließen, also dieselben Winkel, welche bereits im Eingange des § 3 mit den gleichen Buchstaben bezeichnet wurden.

Die Entfernung  $E$  (37\*) erreicht ihr Minimum  $E_m$ , wenn die Differentialkoeffizienten von  $dr$  und  $dr'$  sich annullieren, also für:

$$\begin{aligned} r - r' \cos p - R \cos s &= 0 \\ r' - r \cos p + R \cos s' &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichungen wird:

$$E_m^2 = R(R + r' \cos s' - r \cos s). \quad (37)$$

Die Gleichungen (39), nach  $r$  und  $r'$  aufgelöst, ergeben

$$\left. \begin{aligned} r \sin^2 p &= R(\cos s - \cos s' \cos p) \\ r' \sin^2 p &= R(\cos s \cos p - \cos s'). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Durch Heranziehen der Relationen (38e) gelangt man für  $r$  und  $r'$  zu den weiteren bemerkenswerten Ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} r \sin p &= R \sin s' \cos \sigma \\ r' \sin p &= -R \sin s \cos \sigma'. \end{aligned} \right\} \quad (40 a)$$

Bei fehlerfreien Beobachtungen ist, wie Fig. 9 lehrt,  $\sigma = 0^\circ$  und  $\sigma' = 180^\circ$ . Aus den vorstehenden Gleichungen erkennt man daher, daß  $r \sin p$  und  $r' \sin p$  nur sehr wenig davon berührt werden, auch wenn  $\sigma$  und  $\sigma'$  ziemlich stark von ihren wahren Werten abweichen. Nach der letzten Gleichung (38d) gilt dasselbe von  $p$ . Auch dieses erleidet nur eine geringfügige Änderung, selbst wenn sich  $\psi$ , das ebenfalls Null sein soll, auf mehrere Gerade beläuft. Für  $\psi = 0$  ist  $p = s' - s$ . Setzen wir daher

$$p = s' - s + \Delta p$$

und betrachten wir  $\Delta p$  als eine Größe 1. Ordnung, so erhalten wir aus (40) nach der Taylor'schen Reihe:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{R \sin s'}{\sin(s' - s)} \left[ 1 - \frac{\sin s + \sin s' \cos(s' - s)}{\sin s' \sin(s' - s)} \Delta p \right] \\ r' &= \frac{R \sin s}{\sin(s' - s)} \left[ 1 - \frac{\sin s' + \sin s \cos(s' - s)}{\sin s \sin(s' - s)} \Delta p \right] \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Nach (38d) haben wir weiter:

$$\cos p = \cos(s' - s) \cos \Delta p = \cos(s' - s) - 2 \sin s \sin s' \sin^2 \frac{\psi}{2}$$

und damit:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{2 \sin s \sin s'}{\sin(s' - s)} \sin^2 \frac{\psi}{2} \\ r &= \frac{R \sin s'}{\sin(s' - s)} \left[ 1 - \frac{2 \{ \sin s + \sin s' \cos(s' - s) \} \sin s}{\sin^2(s' - s)} \sin^2 \frac{\psi}{2} \right] \\ r' &= \frac{R \sin s}{\sin(s' - s)} \left[ 1 - \frac{2 \{ \sin s' + \sin s \cos(s' - s) \} \sin s'}{\sin^2(s' - s)} \sin^2 \frac{\psi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Schreiben wir  $\sin \frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2} \sin 1^\circ$ , drücken wir also  $\psi$  in Graden aus und setzen wir, um unnütz große Zahlen zu vermeiden, die Konstante für  $\Delta p$  so an, daß dieses in Bogenminuten erscheint, so resultiert:

$$\left. \begin{aligned} \Delta p &= 0.524 \frac{\sin s \sin s'}{\sin(s' - s)} \psi^2 = \overline{9.7190} \frac{\sin s \sin s'}{\sin(s' - s)} \psi^2 \\ r &= \frac{R \sin s'}{\sin(s' - s)} \left[ 1 - \frac{1}{6570} \left\{ \cos(s' - s) + \frac{\sin s}{\sin s'} \right\} \frac{\sin s \sin s'}{\sin^2(s' - s)} \cdot \psi^2 \right] \\ r' &= \frac{R \sin s}{\sin(s' - s)} \left[ 1 - \frac{1}{6570} \left\{ \cos(s' - s) + \frac{\sin s'}{\sin s} \right\} \frac{\sin s \sin s'}{\sin^2(s' - s)} \cdot \psi^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (41^*)$$

$$\log \frac{1}{6570} = 6.1827 - 10.$$



Ist  $s' - s$ , welches genähert die Parallaxe repräsentiert, nicht allzu gering, oder, anders ausgedrückt, sind die Entfernungen des Meteoroiden der Standlinie gegenüber nicht sehr groß, so verfälschen selbst ziemlich erhebliche Werte von  $\psi$  weder die Parallaxe  $p$  noch auch die Entfernungen  $r$  und  $r'$  wesentlich und es üben infolgedessen mäßige Auffassungsunterschiede im Notieren der Anfangs- und Endpunkte einer Meteorbahn zwischen den Beobachtern keinen so schädlichen Einfluß aus, als Bessel annahm. Diese Schlußfolgerung werden wir später auch praktisch bestätigt finden.

Wenden wir uns nun  $E_m$  zu, so können wir dieses mit Hilfe der Gleichungen (40), (40a) und (38c) auf mannigfache Art umformen, unter anderem:

$$\begin{aligned}
 E_m^2 &= \frac{R^2}{\sin^2 p} [\sin^2 p \sin^2 s' - (\cos s - \cos s' \cos p)^2] = \\
 &= \frac{R^2}{\sin^2 p} [\sin^2 s \sin^2 s' - (\cos s \cos s' - \cos p)^2] = \\
 &= \frac{4R^2}{\sin^2 p} \sin \frac{s'+s+p}{2} \sin \frac{s'+s-p}{2} \sin \frac{s'-s+p}{2} \sin \frac{-s'+s+p}{2} = \frac{R^2 \sin s \sin s' \sin^2 p - r^2 \sin^2 p}{\sin^2 p} \quad (37^*) \\
 E_m &= R \sin s' \sin \sigma = \frac{r \sin s \sin \psi}{\cos \sigma} = \frac{r \sin p \operatorname{tg} \sigma}{\cos \sigma'} = \frac{R \sin s \sin s' \sin \psi}{\sin p}
 \end{aligned}$$

u. s. w.

Für  $\sin \psi = \sin(n' - n)$  läßt sich aus einer entsprechenden Kombination der beiden ersten Gleichungen der Systeme (38a) und (38b) noch ein Ausdruck ableiten, der ein interessantes Streiflicht auf die Bedeutung von  $E_m$  wirft. Es ist nämlich:

$$\sin s \sin s' \sin \psi = \cos \delta \cos \delta' \cos D [\operatorname{tg} \delta \sin(\alpha' - A) - \operatorname{tg} \delta' \sin(\alpha - A) + \operatorname{tg} D \sin(\alpha - \alpha')].$$

Wird dies in den an letzter Stelle für  $E_m$  aufgeschriebenen Wert substituiert, so geht dieses über in

$$E_m = \frac{R \cos \delta \cos \delta' \cos D}{\sin p} [\operatorname{tg} \delta \sin(\alpha' - A) - \operatorname{tg} \delta' \sin(\alpha - A) + \operatorname{tg} D \sin(\alpha - \alpha')]. \quad (37^{**})$$

Aus der Vergleichung des dreigliedrigen Faktors mit der Formel (13) ersieht man, daß er verschwindet, wenn die Punkte  $(A, D)$ ,  $(\alpha, \delta)$  und  $(\alpha', \delta')$ , d. h.  $O'$ ,  $M$  und  $M'$  auf einem größten Kreise liegen was bei fehlerfreien Beobachtungen der Fall ist.

Die Winkel  $e_m$  und  $e'_m$  (Fig. 8), in denen man von  $O$  und von  $O_1$  aus den kürzesten Abstand  $E_m$  der Visurlinien erblickt, geben einen sehr guten Maßstab für die Güte der Beobachtungen ab. Ihre Berechnung gestaltet sich sehr einfach, da die kürzeste Verbindungslinie zweier Geraden bekanntlich auf beiden senkrecht steht; sie ergeben sich deshalb aus den Formeln:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} e_m &= \frac{E_m}{r} = \frac{\sin s \sin \psi}{\cos \sigma} \\
 \operatorname{tg} e'_m &= \frac{E_m}{r'} = \frac{\sin s' \sin \psi}{\cos \sigma'}
 \end{aligned}$$

Bei dieser Berechnung kommt es bloß darauf an, eine allgemeine Vorstellung von der Sicherheit der Beobachtungen zu erlangen: man kann daher ohne Bedenken  $\cos \sigma = +1$  und  $\cos \sigma' = -1$  setzen und überdies, da  $\psi$  und demgemäß  $e_m$  und  $e'_m$  wenige Grade nicht übersteigen dürfen, sollen die Höhenbestimmungen nicht illusorisch werden, die trigonometrischen Funktionen dieser Winkel mit dem Bogen vertauschen, also schreiben:

$$\begin{aligned}
 e_m &= \psi \sin s \\
 e'_m &= \psi \sin s'
 \end{aligned} \quad (42)$$

Die Berechnung von  $\phi$  kann umgangen werden, indem man für  $\sin \phi$  aus (38 e) seinen Wert einsetzt und darin aus den eben angegebenen Gründen unter dem Wurzelzeichen in allen Faktoren, abgesehen vom vorletzten, für  $p$  seinen Näherungswert  $s' - s$  substituiert. Man erhält dann:

$$\left. \begin{aligned} e_m &= \frac{2 \sqrt{\sin s \sin \frac{1}{2} (s - s' + p) \sin (s' - s)}}{\sqrt{\sin s'}} \\ e'_m &= \frac{2 \sqrt{\sin s' \sin \frac{1}{2} (s - s' + p) \sin (s' - s)}}{\sqrt{\sin s}} \end{aligned} \right\} (42^*)$$

Wird endlich noch  $\sin \frac{1}{2} (s - s' + p)$  durch seinen Bogen in Graden ausgedrückt und die Konstante so angesetzt, daß  $e_m$  und  $e'_m$  in Graden erscheinen, so verwandeln sich die Ausdrücke (42\*) in:

$$\begin{aligned} e_m &= 10 \cdot 7 \sqrt{(s + p - s') \sin (s' - s) \cdot \frac{\sin s}{\sin s'}} \cdot 10 \cdot 7 \sqrt{\frac{\sin s}{r} \cdot (s + p - s') R} \\ e'_m &= 10 \cdot 7 \sqrt{(s + p - s') \sin (s' - s) \cdot \frac{\sin s'}{\sin s}} = 10 \cdot 7 \sqrt{\frac{\sin s'}{r'} \cdot (s + p - s') R} \\ \log 10 \cdot 7 &= 1 \cdot 0296. \end{aligned}$$

Die Mitte der kürzesten Distanz  $E_m$  der beiden Visurlinien kann als der wahrscheinlichste Ort der Sternschnuppe angesehen werden. Seine Koordinaten  $x_m, y_m, z_m$  lauten:

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{x + x' + \xi}{2} = \frac{r \cos \delta \cos \alpha + r' \cos \delta' \cos \alpha' + R \cos D \cos A}{2} \\ y_m &= \frac{y + y' + \eta}{2} = \frac{r \cos \delta \sin \alpha + r' \cos \delta' \sin \alpha' + R \cos D \sin A}{2} \\ z_m &= \frac{z + z' + \zeta}{2} = \frac{r \sin \delta + r' \sin \delta' + R \sin D}{2}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Polarkoordinaten dieses Punktes am Orte  $O$  mit  $r_m, \alpha_m, \delta_m$  und am Orte  $O_1$  für diesen als Ursprung mit  $r'_m, \alpha'_m, \delta'_m$ , so haben wir einerseits:

$$\begin{aligned} x_m &= r_m \cos \delta_m \cos \alpha_m \\ y_m &= r_m \cos \delta_m \sin \alpha_m \\ z_m &= r_m \sin \delta_m \end{aligned}$$

andererseits:

$$\begin{aligned} x_m &= r'_m \cos \delta'_m \cos \alpha'_m + \xi \\ y_m &= r'_m \cos \delta'_m \sin \alpha'_m + \eta \\ z_m &= r'_m \sin \delta'_m + \zeta \end{aligned}$$

und erhalten damit:

$$\left. \begin{aligned} 2r_m \cos \delta_m \cos \alpha_m &= r \cos \delta \cos \alpha + r' \cos \delta' \cos \alpha' + R \cos D \cos A \\ 2r_m \cos \delta_m \sin \alpha_m &= r \cos \delta \sin \alpha + r' \cos \delta' \sin \alpha' + R \cos D \sin A \\ 2r_m \sin \delta_m &= r \sin \delta + r' \sin \delta' + R \sin D \\ 2r'_m \cos \delta'_m \cos \alpha'_m &= r \cos \delta \cos \alpha + r' \cos \delta' \cos \alpha' - R \cos D \cos A \\ 2r'_m \cos \delta'_m \sin \alpha'_m &= r \cos \delta \sin \alpha + r' \cos \delta' \sin \alpha' - R \cos D \sin A \\ 2r'_m \sin \delta'_m &= r \sin \delta + r' \sin \delta' - R \sin D. \end{aligned} \right\} (43)$$

Sollen die Beobachtungen zu einer Höhenbestimmung des Meteores brauchbar sein, so müssen:  $\alpha_m - \alpha$ ,  $\delta_m - \delta$ ;  $\alpha'_m - \alpha'$  und  $\delta'_m - \delta'$  jedenfalls so kleine Bogen sein, daß man sie als Größen 1. Ordnung ansehen und deren Cosinus der Einheit gleichsetzen darf. Die vorstehenden Gleichungen liefern unter dieser Voraussetzung, auf die allgemein bekannte Art behandelt:

$$\begin{aligned}
 2r_m \cos \delta_m \sin (\alpha_m - \alpha) &= r' \cos \delta' \sin (\alpha' - \alpha) + R \cos D \sin (A - \alpha) \\
 2r_m \sin (\delta_m - \delta) &= r' [\sin \delta' \cos \delta - \cos \delta' \sin \delta \cos (\alpha' - \alpha)] + \\
 &\quad + R [\sin D \cos \delta - \cos D \sin \delta \cos (A - \alpha)] \\
 2r_m &= r + r' [\sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha)] + \\
 &\quad + R (\sin D \sin \delta + \cos D \cos \delta \cos (A - \alpha)) \\
 2r'_m \cos \delta'_m \sin (\alpha'_m - \alpha) &= -r \cos \delta \sin (\alpha' - \alpha) - R \cos D \sin (A - \alpha') \\
 2r'_m \sin (\delta'_m - \delta) &= r [\sin \delta \cos \delta' - \cos \delta \sin \delta' \cos (\alpha' - \alpha)] - \\
 &\quad - R [\sin D \cos \delta' - \cos D \sin \delta' \cos (A - \alpha')] \\
 2r'_m &= r' + r [\sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha)] - \\
 &\quad - R [\sin D \sin \delta' + \cos D \cos \delta' \cos (A - \alpha')].
 \end{aligned}
 \tag{43*}$$

Werden zur Reduktion dieser Ausdrücke die (38 a) bis (38 e) zusammengestellten Relationen herangezogen und auch die Gleichungen (40 a) und (49) berücksichtigt, so gewinnt man aus der ersten Gruppe sukzessive:

$$\begin{aligned}
 2r_m \cos \delta_m \sin (\alpha_m - \alpha) &= r' \sin p \sin \theta - R \sin s \sin v = -R \sin s (\sin \theta \cos \sigma' + \sin v) = \\
 &= -R \sin s [\sin \theta \cos \sigma' - \sin (\theta + \sigma')] = R \sin s \sin \sigma' \cos \theta = R \sin s' \sin \sigma \cos \theta = \\
 &= r \sin p \operatorname{tg} \sigma \cos \theta = \frac{r \sin s \sin \psi \cos \theta}{\cos \sigma} \\
 2r_m \sin (\delta_m - \delta) &= r' \sin p \cos \theta + R \sin s \cos v = -R \sin s (\cos \theta \cos \sigma' - \cos v) = \\
 &= -R \sin s \sin \sigma' \sin \theta = -\frac{r \sin s \sin \psi \sin \theta}{\cos \sigma} \\
 2r_m &= r + r' \cos p + R \cos s = 2r.
 \end{aligned}$$

Daraus geht hervor, daß  $r_m = r$  ist, was sehr begreiflich wird, wenn man sich erinnert, daß  $r$  einen Minimalwert vorstellt. Nimmt man schließlich noch  $\cos \sigma = 1$  an und vertauscht man die Sinus mit dem Bogen, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 r_m &= r \\
 (\alpha_m - \alpha) \cos \delta &= \frac{1}{2} \sin s \sin \psi \cos \theta \\
 \delta_m - \delta &= -\frac{1}{2} \sin s \sin \psi \sin \theta.
 \end{aligned}
 \tag{44 a}$$

Genau auf dieselbe Art liefert die zweite Hälfte der Formeln

$$\begin{aligned}
 r'_m &= r' \\
 (\alpha'_m - \alpha') \cos \delta' &= \frac{1}{2} \sin s' \sin \psi \cos \lambda \\
 \delta'_m - \delta' &= \frac{1}{2} \sin s' \sin \psi \sin \lambda.
 \end{aligned}
 \tag{44 b}$$



Die Abstände  $e_\mu$  und  $e'_\mu$  der Punkte  $(\alpha_m, \delta_m)$  und  $(\alpha'_m, \delta'_m)$  von den beobachteten  $(\alpha, \delta)$  und  $(\alpha', \delta')$  im Bogen größten Kreises sind demnach:

$$e_\mu = \frac{1}{2} \sin s \sin \psi = \frac{1}{2} e_m$$

$$e'_\mu = \frac{1}{2} \sin s' \sin \psi = \frac{1}{2} e'_m$$

wie vorauszusehen war.

Um die Sicherheit des Resultates beurteilen zu können, sollten eigentlich zunächst die Differentialquotienten von  $r$  und  $r'$  nach den beobachteten Koordinaten ermittelt und mit Hilfe dieser der Maximal-einfluß berechnet werden, den ein in jeder Position begangener Fehler auszuüben vermag. Da es uns aber bei diesen Untersuchungen lediglich darum zu tun ist, einen beiläufigen Maßstab für die Sicherheit der erhaltenen Zahlen zu gewinnen, können wir uns die Arbeit wesentlich erleichtern, wenn wir uns den oben erwiesenen Satz zunutze machen, daß bei verlässlichen Beobachtungen  $p$  von  $s' - s$  nur um eine geringe Quantität abweicht. Setzen wir daher in den Ausdrücken 40,  $p = s' - s$ , so vereinfachen sich dieselben in die nachstehenden:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{\sin s'}{\sin (s' - s)} R \\ r' &= \frac{\sin s}{\sin (s' - s)} R. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Es ist nun sehr einfach:

$$\left. \begin{aligned} dr &= \frac{\sin s' \cos (s' - s) ds - \sin s ds'}{\sin^2 (s' - s)} = r \operatorname{ctg} (s' - s) ds - r' \operatorname{cosec} (s' - s) ds' \\ dr' &= r \operatorname{cosec} (s' - s) ds - r' \operatorname{ctg} (s' - s) ds. \end{aligned} \right\} \quad (46^*)$$

Da ein Fehler in der Position des Anfangs- oder Endpunktes höchstens mit seinem ganzen Bctrage in  $s$  eingehen kann, so erhält man, unter der Annahme, daß in beiden Orten derselbe Fehler von  $\varepsilon^\circ$  vorfiel, den Maximaleinfluß desselben aus:

$$\left. \begin{aligned} dr &= [\pm r \operatorname{ctg} (s' - s) \pm r' \operatorname{cosec} (s' - s)] \varepsilon^\circ \\ dr' &= [\pm r \operatorname{cosec} (s' - s) \pm r' \operatorname{ctg} (s' - s)] \varepsilon^\circ, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

wo die Zeichen der Ausdrücke in den Klammern so zu wählen sind, daß sie eine Summe ihrer Teile werden. In diesen Gleichungen kann man auch  $s' - s$  durch  $p$  ersetzen.

Die Entfernungen  $r$  und  $r'$  lassen sich auf doppelte Art zur Berechnung der Höhe des Meteoros über der Erdoberfläche verwenden. Man kann aus  $\alpha_m, \delta_m$  und  $\alpha'_m, \delta'_m$  die scheinbaren Höhen jenes Punktes über den Horizonten von  $O$  und  $O_1$  berechnen, den wir als wahrscheinlichsten Ort des Meteoros angenommen haben und daraus nach weiter unten (§ 4, 62) entwickelten Formeln, dessen wahre Höhe ermitteln. Dazu hat man zuerst  $r$  und  $r'$  nach den Ausdrücken (38a) bis (38c), (44a), (44b), (40) und die Unsicherheit des Resultates nach (46) zu berechnen. Die sodann aus  $r$  und  $r'$  errechneten Höhen müssen, wie leicht ersichtlich, vollständig miteinander übereinstimmen. Will man auf diese Kontrolle verzichten, so kann man sich darauf beschränken, entweder nur aus  $r, \alpha_m$  und  $\delta_m$  oder nur aus  $r', \alpha'_m$  und  $\delta'_m$  die Höhe zu berechnen, wodurch sich ein nicht unbedeutendes Zeitersparnis ergibt.

Man kann aber auch aus  $r$  und  $r'$  mit den unmittelbar beobachteten Koordinaten  $\alpha \delta$  und  $\alpha' \delta'$  die Höhenberechnung vornehmen, und erst aus den beiden so erhaltenen Höhen das Mittel nehmen.

Für das Schlußresultat ist es gleichgültig, ob man dieses oder jenes Verfahren einschlägt. Ich selbst halte das letztere für das zweckmäßiger: es hat jedenfalls den Vorteil für sich, daß es auf einfachere Rechnungsvorschriften und damit rascher zum Ziele führt. Die durchzurechnenden Formeln beschränken sich nämlich auf die folgenden:

$$\begin{aligned}
 \cos p &= \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha) \\
 \cos s &= \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (\alpha - A) \\
 \cos s' &= \sin \delta' \sin D + \cos \delta' \cos D \cos (\alpha' - A) \\
 e_m &= 2 \sqrt{\frac{\sin s}{\sin s'} \cdot \sin p \sin \frac{s+p-s'}{2}} \\
 e'_m &= 2 \sqrt{\frac{\sin s'}{\sin s} \cdot \sin p \sin \frac{s+p-s'}{2}} \\
 r &= \frac{\cos s - \cos s' \cos p}{\sin^2 p} R \\
 r' &= \frac{\cos s \cos p - \cos s'}{\sin^2 p} R \\
 dr &= \pm [r \operatorname{ctg} p \pm r' \operatorname{cosec} p] e^{\epsilon^\circ} \\
 dr' &= \pm [r' \operatorname{cosec} p \pm r \operatorname{ctg} p] e^{\epsilon^\circ}.
 \end{aligned} \tag{47}$$

Hat man für zwei Beobachtungsstationen, also für ein gegebenes  $D$ , mehrere Höhenbestimmungen auszuführen, so kann man sich die Berechnung der Cosinus der  $s$  genannten Winkel durch Anlegen einer Hilfstafel noch beträchtlich erleichtern. Dieselben haben alle die Form:

$$\cos s = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos x$$

und gehen durch Einführen der Größen  $N$  und  $n$  mittels der Relationen:

$$\begin{aligned}
 n \sin N &= \sin D \\
 n \cos N &= \cos D \cos x
 \end{aligned}$$

über in:

$$\cos s = n \cos (\delta - N).$$

Für jede Höhenberechnung werden vier  $s$  erfordert, zwei für den Anfang und zwei für das Ende. Es lohnt sich daher schon für eine geringe Anzahl korrespondierender Meteore eine solche Tafel anzulegen, welche sich ihrer Einfachheit wegen für die hier erforderliche Genauigkeit mit einem Zeitaufwande von wenigen Stunden herstellen läßt. Man kann übrigens  $p$ ,  $s$  und  $s'$  auch mit Hilfe der bereits einmal (34) erwähnten, der Abhandlung beigegebenen Tafel II berechnen, wodurch ebenfalls eine kleine Zeitersparnis erzielt wird.

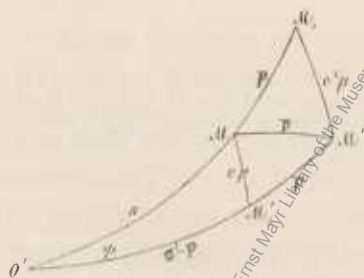
Bei der Berechnung von Meteorbahnen nach dieser Methode, wird wenigstens indirekt vorausgesetzt, daß zwischen den Beobachtern keine Auffassungsunterschiede vorkommen. Dies ist zweifellos ein Nachteil, der indes, wie oben nachgewiesen wurde, von keiner bedeutenden Tragweite ist. Dagegen besitzt diese Methode den früher besprochenen gegenüber mancherlei Vorzüge. In dieser Richtung ist vor allem hervorzuheben, daß die Sicherheit des Resultates den Differentialformeln (46) gemäß in letzter Instanz bloß von der beobachteten Parallaxe abhängt: je größer diese ist, desto größer fällt auch die Sicherheit des Resultates aus. Die gegenseitige Lage der an beiden Stationen beobachteten Bahnebenen spielt hier keine Rolle; ebensowenig übt auch eine Verkürzung der Bahnen wegen Nähe am Radianten einen schädlichen Einfluß aus. Es werden deshalb dieser Umstände wegen keine sonst guten Beobachtungen zu einer Höhenberechnung unbrauchbar, wie denn überhaupt hier das natürliche Verhältnis hergestellt ist, daß ein Resultat im allgemeinen desto sicherer wird, je geringer der Prozentsatz der zu befürchtenden Fehler gegen die beobachteten Quantitäten ist, aus denen es hervorgehen soll.

Die Idee, die Punkte der größten Annäherung der Visurlinien zur Berechnung der Sternschnuppenhöhen heranzuziehen, rührt von Brandes her, der sie im ersten Hefte der von ihm herausgegebenen »Unterhaltungen für Freunde der Physik und Astronomie« aussprach. Er gab auch Formeln hiefür an, nach denen ein großer Teil der im Jahre 1823 von ihm organisierten umfassenden Reihe korrespondierender Beobachtungen bearbeitet wurde. Brandes legte aber bei seinen Betrachtungen nicht die Entfernung des Meteoroides vom Beobachter, sondern die vom Erdzentrum als Unbekannte zu Grunde und führt außerdem die Koordinaten der Erdorte in einer für die weitere Behandlung des Problems wenig geeigneten Form ein. Seine Formeln sind dadurch derart kompliziert ausgefallen, daß die Berechnung einer Meteorbahn nach denselben mindestens ebensoviel wenn nicht mehr Zeit erfordert, als die Berechnung einer Kometenbahn aus drei Beobachtungen. Dieser Umstand, verbunden mit der relativ geringen Verbreitung der Zeitschrift in der die Methode veröffentlicht wurde und dem noch schwerer wiegenden, daß Bessel etwa 15 Jahre später in seiner oben angezogenen Abhandlung sich gegen die Berechnung der Höhen von Sternschnuppen nach Methoden aussprach, welche einen bei den beobachteten Anfangs- und Endpunkten etwa auftretenden Auffassungsunterschied unberücksichtigt lassen, sind wohl die Ursache, daß die Methode außer von ihrem Urheber nie mehr in Verwendung kam und nach und nach ganz in unverdiente Vergessenheit geriet.

### C. Berechnung der Entfernung des Meteoroides durch das Drehen einer Visurlinie in die Ebene, welche durch die andere Visurlinie und die Richtung zum zweiten Orte gegeben ist.

Es ist schon mehrmals darauf hingewiesen worden, daß bei fehlerfreien Beobachtungen die Punkte  $O'$ ,  $M$  und  $M'$  (Fig. 10) in einem größten Kreise liegen. Um dies herbeizuführen und damit eine Höhenberechnung des Meteoroides zu ermöglichen, kann man den Bogen  $MM'$

Fig. 10.



d. i. die beobachtete Parallaxe einmal um den Punkt  $M$  in die Ebene  $O'M$  nach  $M_1$  und ein zweites Mal um den Punkt  $M'$  in die Ebene  $O'M'$  nach  $M'_1$  drehen und statt der Bogen  $O'M'$  und  $O'M$  die Bogen  $O'M_1$  und  $O'M'_1$  der Berechnung der Entfernung der Sternschnuppe von den Orten  $O$  und  $O_1$  zu Grunde legen.

Bei diesem Vorgange bleibt die beobachtete Parallaxe un geändert, und es läßt sich deshalb der Grundgedanke der Methode dahin charakterisieren, daß man die von einem Orte, etwa  $O$  aus beobachtete Visurlinie  $OM$  (Fig. 2) unter Beibehaltung der beobachteten Parallaxe zu einem ebenen Dreiecke zusammensetzt.

Dieser so nahe liegende Gedanke wurde sonderbarer Weise eigentlich noch nie zu Höhenberechnungen von Meteoroiden verwendet, obwohl sich Anklänge daran bereits in Benzenbergs Werk »Über die Bestimmung der geographischen Länge durch Sternschnuppen« S. 38 finden. Die dort angegebenen Formeln sind indes nur dem Falle angepaßt, daß die Beobachtungen in Höhe und Azimut vorliegen und daß überdies die Divergenz der Zenite vernachlässigt werden kann. Sie sind daher, ohne die Genauigkeit des Resultates durch Vernachlässigungen bei der Rechnung zu beeinträchtigen, nur bei so rohen Beobachtungen zu verwenden, wie es die von großen Feuerkugeln in der Regel sind, oder bloß bei so kurzen Standlinien, wie sie Brandes und Benzenberg bei ihren ersten epochemachenden Versuchen benützten, die Höhe des Erscheinens und Verschwindens der Sternschnuppen durch eigens zu diesem Zwecke angestellte Beobachtungen zu ermitteln.



Die Formeln, welche nach dieser Auffassung des Problems anzuwenden sind, lassen sich durch Zurückgreifen auf die Auseinandersetzungen am Anfange des § 2 unmittelbar anschreiben und lauten:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{R \sin O'M_1}{\sin MM_1} = \frac{R \sin (s+p)}{\sin p} \\ r' &= \frac{R \sin O'M'_1}{\sin M'M'_1} = \frac{R \sin (s'-p)}{\sin p} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Zur Berechnung des Einflusses von Beobachtungsfehlern vereinfachen wir uns die Ausdrücke für  $r$  und  $r'$  auch hier dadurch, daß wir in ihnen statt  $p$  seinen Näherungswert  $s$  einsetzen. Sie gehen dadurch in die Ausdrücke (45) über, so daß auch hier dieselben Formeln zur Berechnung für  $dr$  und  $dr'$  Geltung haben, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} dr &= \pm [r \operatorname{ctg} (s'-s) \pm r' \operatorname{cosec} (s'-s)] \epsilon \\ dr' &= \pm [r \operatorname{cosec} (s'-s) \pm r' \operatorname{ctg} (s'-s)] \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (48^*)$$

Für die Abstände  $e_p = MM'_1$  und  $e'_p = M_1M'$  (Fig. 10) folgt aus den Dreiecken  $O'MM'_1$  und  $O'M_1M'$ :

$$\begin{aligned} \cos e_p &= \cos s \cos (s'-p) + \sin s \sin (s'-p) \cos \psi = \frac{\cos p \sin (s'-p) + \sin p \cos s}{\sin s'} \\ \cos e'_p &= \cos s' \cos (s+p) + \sin s' \sin (s+p) \cos \psi = \frac{\cos p \sin (s+p) - \sin p \cos s'}{\sin s} \end{aligned}$$

nachdem man für  $\cos \psi$  seinen Wert aus (38d) eingetragen hat. Daraus findet sich wieder ohne Mühe:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{1}{2} e_p &= \frac{\sin \frac{1}{2} (s+s'-p)}{\sin s'} \cdot \sin p \sin \frac{s+p-s'}{2} \\ \sin^2 \frac{1}{2} e'_p &= \frac{\sin \frac{1}{2} (s+s'+p)}{\sin s} \cdot \sin p \sin \frac{s+p-s'}{2} \end{aligned}$$

Macht man auch hier von dem schon mehrfach benützten Näherungswerte  $p = s' - s$  im Zähler des ersten Faktors Gebrauch, so kommt man auf die Gleichungen (42\*) zurück und findet somit:

$$\begin{aligned} e_p &= e_m \\ e'_p &= e'_m \end{aligned}$$

Die Punkte  $O', M$  und  $M'$  (Fig. 11) können auch durch eine Drehung der Ebenen  $O'M'$  und  $O'M$  um  $O'$  in einen größten Kreis gebracht werden. Stoßen dabei die beobachteten Punkte  $M$  und  $M'$  einmal auf  $m$ , das andere Mal auf  $m'$  und basiert man die weiteren Rechnungen auf diese Punkte statt auf die beobachteten, so erhält man für die Entfernungen  $r$  und  $r'$  unmittelbar:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{R \sin s'}{\sin (s'-s)} \\ r' &= \frac{R \sin s}{\sin (s'-s)} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

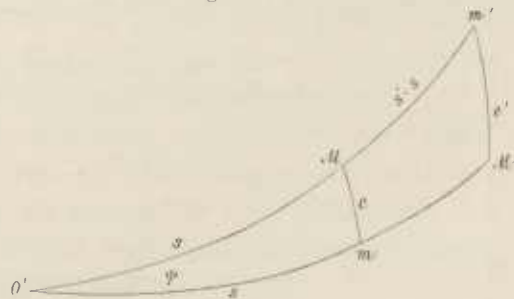


Fig. 11.

d. i. jene Ausdrücke, von denen wir zur Berechnung der Fehlereinflüsse bei den beiden letzten Methoden ausgingen. Infolgedessen sind nicht nur die Werte für  $dr$  und  $dr'$ , sondern auch die für die Winkel

$e = mM$  und  $e' = m'M'$  dieselben, welche wir früher für die analogen Winkel  $e_m, e'_m$  und  $e_p, e'_p$  erhielten. Es ist nämlich jetzt:

$$\cos e = \cos^2 s + \sin^2 s \cos \psi = \frac{\sin s \cos p + \cos s \sin (s' - p)}{\sin s'}$$

$$\cos e' = \cos^2 s' + \sin^2 s' \cos \psi = \frac{\sin s' \cos p - \cos s' \sin (s' - s)}{\sin s},$$

woraus sich auf dieselbe Art wie früher das oben Behauptete ergibt.

Die Formeln (48) und (49) kann man noch auf mehrfache Weise variieren, ohne im Resultate Änderungen hervorzubringen, welche die Ordnung der Beobachtung und Auffassungsfehler übersteigen. So kann man unter anderem die Bogen  $s+p$  und  $s'-p$  in den Zählern von (48) durch  $s'$  und  $s$  ersetzen und erhält dann:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{R \sin s'}{\sin p} \\ r' &= \frac{R \sin s}{\sin p} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Dieselbe Relation ergibt sich auch, wenn man in 40 a für  $\cos \sigma$  und  $\cos \sigma'$  ihre Näherungswerte  $+1$  und  $-1$  einführt, oder aus (49), wenn man im Nenner  $s'-s$  mit  $p$  vertauscht.

Die Differentialformeln für  $r$  und  $r'$  und die Ausdrücke für den Winkelabstand der beobachteten und bei der Rechnung benützten Positionen sind auch für die Ausdrücke (50) dieselben wie früher für (48) und (49).

Die vorstehenden Entwicklungen haben zu dem unerwarteten, sehr bemerkenswerten Ergebnisse geführt, daß die Berechnung der Entfernung eines Meteoros durch Zusammensetzen der beobachteten Winkel zu ebenen Dreiecken Resultate liefert, die sich nur um Größen von der Ordnung der Beobachtungsfehler von jenen unterscheiden, die man aus dem geringsten Abstände der Visurlinien erhält. Es erübrigt uns daher noch die Frage zu erörtern, ob vielleicht nicht trotzdem eine dieser Berechnungsarten den Vorzug verdiene.

Die Ausdrücke für den Abstand der Orte, welche der Rechnung zugrunde gelegt werden, von den beobachteten und die Ausdrücke, welche den Einfluß von Beobachtungsfehlern auf das Resultat angeben, sind, wie wir gesehen haben, für die genannten Methoden einander gleich und können darüber nichts entscheiden.

Untersuchen wir daher zu diesem Behufe die Formeln für die Entfernungen  $r$  und  $r'$  und versehen wir die Entfernungen die sich bei der Berechnung aus dem kürzesten Abstände der Visurlinie ergeben, mit dem Index  $m$ , jene welche aus der Benützung der beobachteten Parallaxen erhalten werden (Formeln 48) mit dem Index  $p$ , lassen wir jene, welche die Formeln (49) liefern, ohne Index und erteilen wir den aus den Relationen (50) hervorgehenden den Index  $\pi$ , so lauten die betreffenden Ausdrücke:

$$1) \quad r_m = \frac{\cos s - \cos s' \cos p}{\sin^2 p} \cdot R \quad r'_m = \frac{\cos s \cos p - \cos s'}{\sin^2 p} \cdot R \quad (40)$$

$$2) \quad r_p = \frac{\sin (s+p)}{\sin p} \cdot R \quad r'_p = \frac{\sin (s'-p)}{\sin p} \cdot R \quad (48)$$

$$3) \quad r_\pi = \frac{\sin s'}{\sin p} \cdot R \quad r'_\pi = \frac{\sin s}{\sin p} \cdot R \quad (50)$$

$$4) \quad r = \frac{\sin s'}{\sin (s'-s)} \cdot R \quad r' = \frac{\sin s}{\sin (s'-s)} \cdot R \quad (49)$$

Wird nun zunächst das rechnerische Moment ins Auge gefaßt, so ist klar, daß in dieser Beziehung die letzten drei Formeln vor der ersten den Vorzug verdienen, nicht nur weil sie einfacher und rascher zu berechnen sind, sondern auch weil sich bei der ersten der Zähler nicht selten aus der Differenz zweier Zahlen zusammensetzt, die sich der Hauptsache nach aufheben, was bekanntlich Inkonvenienzen verschiedener Art nach sich zieht. Von den 3 letzten ist die vierte insofern die einfachste, als bei ihr die Berechnung von  $p$  entfällt, wenn man darauf verzichtet, die Winkel kennen zu lernen, unter denen an den Beobachtungsorten der kürzeste Abstand der Visurlinien erscheint. Dies ist indes nicht anzuraten, weil diese Winkel und der Unterschied zwischen  $s'-s$  und  $p$  häufig das sicherste Kriterium zur Entscheidung darbieten, ob zwei Meteore identisch sind oder nicht. Außerdem geben diese Größen, zusammengehalten mit dem Grade der Übereinstimmung, den die aus beiden Orten gerechneten Höhen zeigen, genug Daten an die Hand, die Sicherheit des Resultates auch ohne Berechnung der Differentialformeln abzuschätzen.

Zur Beurteilung der Beziehung, in welcher die nach diesen vier Ausdrücken erlangten Entfernungen zueinander stehen, greifen wir darauf zurück, daß die Differenz  $s+p = \Delta p$  eine Größe erster Ordnung darstellt. Entwickeln wir, dies vorausgesetzt, nach steigenden Potenzen von  $\Delta p$  und bleiben wir bei der ersten stehen, so findet sich:

$$\begin{array}{l}
 1 \left\{ \begin{array}{l} r_m = \frac{R \sin s'}{\sin(s'-s)} - \frac{R \sin s}{\sin^2(s'-s)} \cdot \Delta p - \frac{R \sin s' \cos(s'-s)}{\sin^2(s'-s)} \Delta p. \\ r'_m = \frac{R \sin s}{\sin(s'-s)} - \frac{R \sin s'}{\sin^2(s'-s)} \cdot \Delta p - \frac{R \sin s \cos(s'-s)}{\sin^2(s'-s)} \Delta p. \end{array} \right. \\
 2 \left\{ \begin{array}{l} r_p = \frac{R \sin s'}{\sin(s'-s)} - \frac{R \sin s}{\sin^2(s'-s)} \Delta p. \\ r'_p = \frac{R \sin s}{\sin(s'-s)} - \frac{R \sin s'}{\sin^2(s'-s)} \Delta p. \end{array} \right. \\
 3 \left\{ \begin{array}{l} r_\pi = \frac{R \sin s'}{\sin(s'-s)} \dots \dots \dots - \frac{R \sin s' \cos(s'-s)}{\sin^2(s'-s)} \Delta p. \\ r'_\pi = \frac{R \sin s}{\sin(s'-s)} \dots \dots \dots - \frac{R \sin s \cos(s'-s)}{\sin^2(s'-s)} \Delta p. \end{array} \right. \\
 4 \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{R \sin s'}{\sin(s'-s)} \\ r' = \frac{R \sin s}{\sin(s'-s)}. \end{array} \right.
 \end{array} \tag{51}$$

Die Parallaxe, oder was auf dasselbe hinauskommt,  $s'-s$  übersteigt selten  $90^\circ$  und  $\Delta p$  ist wesentlich positiv, indem die Summe zweier Seiten eines Dreieckes stets größer ist als die dritte. Es liefert deshalb in der Regel die erste Methode für die Entfernungen die kleinsten und die vierte die größten Werte, während aus den beiden anderen Mittelwerte folgen. Ist aber  $s'-s > 90^\circ$ , so führen umgekehrt die Formeln (2) auf die kleinsten, (3) auf die größten Werte, während (1) und (4) Mittelwerte ergeben.

Anhaltspunkte zu einer auch nur einigermaßen sicheren Entscheidung, welche Werte der  $r$  vorzuziehen seien, lassen sich aus den obigen Formeln wohl kaum ableiten. Ich selbst bediene mich bei Höhenberechnungen meistens der zweiten Methode, nämlich jener, bei welcher die Entfernungen aus den beobachteten Parallaxen berechnet werden, und zwar aus dem Grunde, weil sie die Beobachtungsdaten am unmittelbarsten verwendet und in den weitaus meisten Fällen einen Mittelwert ergibt.



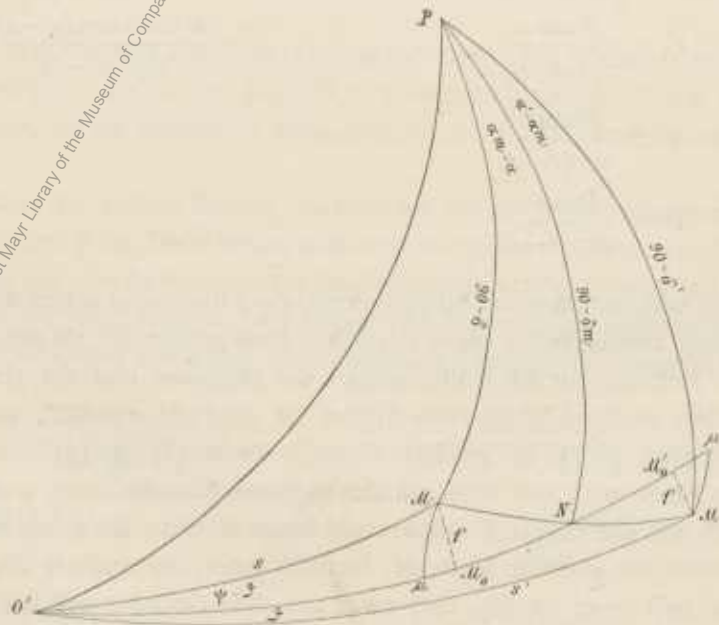
### D. Berechnung der Entfernung eines Meteores durch Korrigieren der beobachteten Positionen.

Die an zwei Orten beobachteten Anfangs- und Endpunkte einer Meteorbahn sollen bekanntlich vier Bedingungen erfüllen. Es sollen nämlich die Anfangspunkte mit der Verbindungslinie der beiden Orte in einer Ebene liegen oder, mit anderen Worten, es sollen die Anfangspunkte der Bahn mit der Projektion der Verbindungslinie beider Orte am Himmel Teile eines größten Kreises bilden. Dasselbe gilt natürlich auch von den Endpunkten. Ferner müssen nach perspektivischen Gesetzen beide Bahnen sich im Radiationspunkte schneiden: es sollen also auch die Anfangs- und Endpunkte jeder Bahn mit dem Radiationspunkte in einem größten Kreise sich befinden, was zwei weitere Bedingungsgleichungen liefert.

Diese Bedingungen lassen sich durch Korrigieren der beobachteten Positionen auf mannigfache Art erfüllen. Der theoretisch einwandfreieste Vorgang bestände darin, die Korrekturen  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\delta$  u. s. w. derart zu bestimmen, daß die Summe der Quadrate der Distanzen der beobachteten und berechneten Orte den kleinsten Wert erhält, was auf die Bestimmung des Minimums von 8 Größen mit 4 Nebenbedingungen hinauslaufen würde. Die dazu erforderlichen Operationen wären aber selbstverständlich so weitläufig und zeitraubend, daß die Berechnung einer größeren Anzahl von korrespondierenden Beobachtungen nach dieser Methode nicht ernstlich ins Auge gefaßt werden kann. Das Problem vereinfacht sich wohl erheblich, wenn der Radiationspunkt, dem das Meteor angehört, nicht mit der nötigen Sicherheit bekannt ist, indem in diesem Falle nur die Erfüllung der beiden ersten Bedingungen angestrebt werden kann. Die Rechnung ist aber auch mit dieser Vereinfachung noch viel zu kompliziert, um eine allgemeine Anwendung zu ermöglichen.

Unter diesen Verhältnissen dürfte es wohl am einfachsten sein, die beobachteten Anfangs- und Endpunkte  $M$ ,  $M'$  (Fig. 12) um ihre Mitte  $M$  in die Ebene  $O'N$  zu drehen und durch die Punkte  $\mu$  und  $\mu'$  zu ersetzen.

Fig. 12.



Um die Formeln zur Berechnung der Koordinaten dieser Punkte zu erlangen, bedürfen wir keiner neuen Entwicklungen, sondern brauchen nur auf die Ausdrücke (33) bis (36) zurückzugreifen und die dortigen Koordinaten mit den ihnen hier entsprechenden zu vertauschen. Wir haben dazu statt  $\alpha_1$ ,  $\delta_1$ ,

$\alpha_2, \delta_2$  die Koordinaten  $\alpha, \delta$  und  $\alpha', \delta'$  von  $M$  und  $M'$  einzuführen und statt  $L$  die Parallaxe  $MM' = p$ , und erhalten so aus (33) für die Koordinaten  $\alpha_m, \delta_m$  von  $N$  unmittelbar:

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{p}{2} \cos \delta_m \sin \left( \alpha_m - \frac{\alpha' + \alpha}{2} \right) &= - \sin \frac{\delta' + \delta}{2} \sin \frac{\delta' - \delta}{2} \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2} \\ \cos \frac{p}{2} \cos \delta_m \cos \left( \alpha_m - \frac{\alpha' + \alpha}{2} \right) &= + \cos \frac{\delta' + \delta}{2} \cos \frac{\delta' - \delta}{2} \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2} \\ \cos \frac{p}{2} \sin \delta_m &= + \sin \frac{\delta' + \delta}{2} \cos \frac{\delta' - \delta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Als Probegleichung kann man ihnen zur Seite stellen:

$$\sin^2 \frac{p}{2} = \sin^2 \frac{\delta' - \delta}{2} + \cos \delta' \cos \delta \sin^2 \frac{\alpha' - \alpha}{2} \quad (53)$$

Der weitere Gang der Rechnung gestaltet sich ebenfalls sehr ähnlich. Wir haben zunächst die Bestimmungsstücke  $\Omega$  und  $J$  des größten Kreises zu suchen, der durch  $N$  und  $O'$  hindurchgeht. Diese Stücke liefern uns:

$$\left. \begin{aligned} \sin (\Omega - \alpha_m) \operatorname{tg} J &= \operatorname{tg} \delta_m \\ \cos (\Omega - \alpha_m) \operatorname{tg} J &= \frac{\operatorname{tg} D - \operatorname{tg} \delta_m \cos (\alpha_m - A)}{\sin (\alpha_m - A)} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Was die Wahl des Quadranten des Neigungswinkels  $J$  betrifft, ist es am zweckmäßigsten  $J \leq 90^\circ$  zu nehmen, je nachdem  $\alpha_m - A \leq 180^\circ$  ist.

Auf diesem größten Kreise haben wir nun von  $N$  aus die halbe Parallaxe ( $\frac{1}{2} MM'$ ) nach vorwärts und rückwärts aufzutragen, wodurch wir zu den Punkten  $\mu$  und  $\mu'$  gelangen. Zur Bestimmung der AR und Deklination derselben benötigen wir die Abstände  $E_0$  und  $E$  der Punkte  $O'$  und  $N$  vom Knoten, die wir den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sin E_0 \sin J &= \sin D \\ \sin E_0 \cos J &= \cos D \sin (\Omega - A) \\ \cos E_0 &= \cos D \cos (\Omega - A) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin E \sin J &= \sin \delta_m \\ \sin E \cos J &= \cos \delta_m \sin (\Omega - \alpha_m) \\ \cos E &= \cos \delta_m \cos (\Omega - \alpha_m) \end{aligned} \right\} \quad (55a)$$

entnehmen. Von diesen Gleichungen ist übrigens bloß je eine jeder Gruppe zu rechnen; sie sind nur vollständig hergesetzt, um sich je nach der Größe von  $E_0$  und  $E$  die geeignetste zu ihrer Berechnung auswählen zu können und den Quadranten derselben ohne längere Überlegung sofort zu erkennen.

Die Koordinaten von  $\mu$  und  $\mu'$ , die wir kurzweg mit  $\alpha_0, \delta_0$  bezeichnen wollen, ergeben sich aus:

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta_0 \cos (\Omega - \alpha_0) &= \cos \left( E \pm \frac{p}{2} \right) \\ \cos \delta_0 \sin (\Omega - \alpha_0) &= \sin \left( E \pm \frac{p}{2} \right) \cos J \\ \sin \delta_0 &= \sin \left( E \pm \frac{p}{2} \right) \sin J \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Die oberen Zeichen liefern die Koordinaten des in  $O$ , die unteren die Koordinaten des in  $O_1$  bei der Rechnung statt des beobachteten zu verwendenden Anfangs- oder Endpunktes. Wir haben weiter:

$$\left. \begin{aligned} s &= E_0 - E - \frac{p}{2} \\ s' &= E_0 - E + \frac{p}{2} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

und damit schließlich:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{R \sin s'}{\sin (s' - s)} = \frac{R \sin s'}{\sin p} \\ r' &= \frac{R \sin s}{\sin (s' - s)} = \frac{R \sin s}{\sin p} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Die aus  $r$ ,  $\alpha_0$ ,  $\delta_0$  berechneten Höhen des Meteores über der Erdoberfläche müssen mit den aus  $r'$ ,  $\alpha'_0$ ,  $\delta'_0$  erhaltenen vollständig übereinstimmen. Verzichtet man auf diese Schlußkontrolle, so entfällt ein Teil der Rechnungen von (56) und (58) sowie die Berechnung einer scheinbaren Höhe.

Diese Berechnungsart hat mit der im früheren Paragraphen Besprochenen das gemein, daß die gegenseitige Lage der Visurlinien auf die Genauigkeit des Resultates keinen Einfluß ausübt und dafür in erster Linie wieder die Parallaxe maßgebend ist. Sie gibt übrigens, wie wir später sehen werden, fast genau dieselben Resultate wie die in den beiden vorangehenden Abschnitten behandelten Methoden, und es wirken deshalb auch Beobachtungsfehler hier in ähnlicher Weise.

Unter Umständen kann es erwünscht sein, die kleinsten Änderungen zu kennen, durch deren Anbringen die an den beiden Standpunkten beobachteten Visurlinien des Aufleuchtens und Verlöschens der Sternschnuppe zum Durchschnitt gelangen. Man erhält dieselben, wenn man in Fig. 12 (wo die Buchstaben  $O$ ,  $M$ ,  $M'$ ,  $N$  und  $\psi$  dieselbe Bedeutung haben wie früher), die einander gleichen Senkrechten  $MM_0$  und  $M'M'_0$  auf den größten Kreis  $O'N$  fällt. Bezeichnet man sie mit  $f$  und den Winkel  $M'O'N$  mit  $\vartheta$ , so ist:

$$\sin f = \sin s' \sin \vartheta = \sin s \sin (\psi - \vartheta),$$

da  $\psi$  und  $\vartheta$  wenige Grade nicht übersteigen dürfen, kann man  $\cos \psi$  und  $\cos \vartheta$  der Einheit und deren Sinusse den Bogen gleichsetzen und erhält dann zur Bestimmung von  $\vartheta$  und  $f$  die einfachen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \frac{\sin s}{(\sin s + \sin s')} \cdot \psi \\ f &= \frac{\sin s \sin s'}{\sin s + \sin s'} \cdot \psi. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Wurden in den Dreiecken  $P'O'M$  und  $P'O'M'$  nebst  $s$  und  $s'$  auch die Positionswinkel  $w' = PO'M'$  und  $w = PO'M$  berechnet, so ist  $\psi = w' - w$ . Ist dies nicht der Fall, so entnehmen wir  $\sin \psi$  den Formeln (38 e) und führen darin, wie früher in den ersten drei Faktoren unter dem Wurzelzeichen für  $p$  seinen Näherungswert  $s' - s$  ein, wodurch sich (59) mit Beibehalten der Sinusse umwandelt in:

$$\sin f = \sqrt{2 \sin s \sin s' \operatorname{tg} \frac{1}{2} (s' - s) \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (s' + s) \sin \frac{1}{2} (s + p - s')}. \quad (59^*)$$



§ 4.

Berechnung der Höhe des Meteores über der Erdoberfläche, der Länge seiner Bahn und seines Einfallwinkels.

Sei  $C$  in (Fig. 13) der Krümmungsmittelpunkt für den Beobachtungsort  $O$  und  $\rho_k$  der Krümmungsradius; sei ferner  $z$  die beobachtete Zenitdistanz des Meteores,  $OM = r$  dessen Entfernung vom Beobachter und  $MN = H$  dessen Höhe über der Erdoberfläche, so folgt aus dem Dreiecke  $OCM$ , wie leicht ersichtlich:

$$\rho_k + H = \rho_k \sqrt{1 + \frac{2\rho_k r \cos z + r^2}{\rho_k^2}}$$

und durch Entwicklung des Wurzelausdruckes bis zum vierten Gliede inklusive, was stets ausreicht:

$$H = r \cos z + \frac{(r^2 - r^2 \cos^2 z)(\rho_k - r \cos z)}{2\rho_k^2} \quad (60)$$

In der Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist die Normale  $N$  eines Punktes  $x, y$  gegeben durch:

$$N = \frac{b\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2} = \frac{\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}}{a}$$

und somit der Radius des Krümmungskreises:

$$\rho_k = \frac{[a^4 - (a^2 - b^2)x^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4 b} = \frac{[b^4 + (a^2 - b^2)y^2]^{\frac{3}{2}}}{ab^4} = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Führt man darin die Abplattung:  $\alpha = \frac{a-b}{a}$  des Erdsphäroides ein, so resultiert:

$$\rho_k = a(1-\alpha)^2 [1 - (2\alpha - \alpha^2) \sin^2 \varphi]^{\frac{3}{2}} = a \left[ 1 + (3 \sin^2 \varphi - 2) \alpha + \frac{1}{2} (2 - 15 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) \alpha^2 \dots \right]$$

oder durch Übergang auf die Funktionen der vielfachen Winkel:

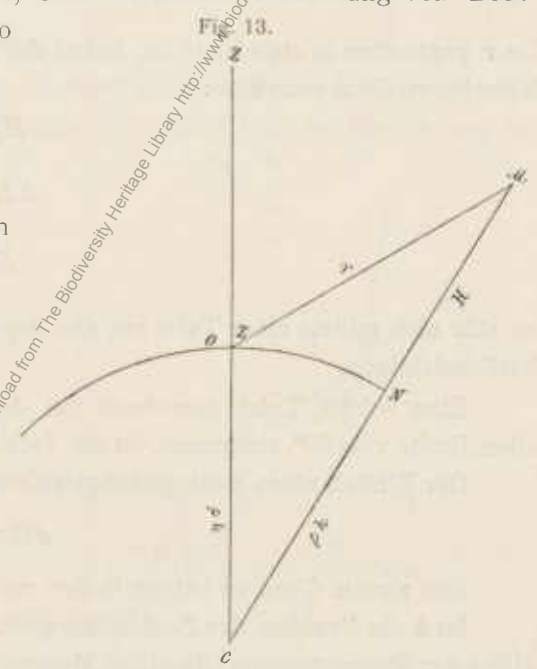
$$\rho_k = a \left[ \left( 1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16} \dots \right) - \left( \frac{3}{2} \alpha \dots \right) \cos 2\varphi + \left( \frac{15}{16} \alpha^2 \dots \right) \cos 4\varphi \dots \right] \quad (61)$$

Mit den im § 2 gegebenen Werten für das Bessel'sche und Clarke'sche Erdsphäroid ist in Kilometern ausgedrückt:

$$\left. \begin{aligned} \rho_k &= 6366 \cdot 74 - 31 \cdot 98 \cos 2\varphi + 0 \cdot 07 \cos 4\varphi \dots \dots \dots (\text{Bessel}) \\ \rho_k &= 6367 \cdot 38 - 32 \cdot 60 \cos 2\varphi + 0 \cdot 07 \cos 4\varphi \dots \dots \dots (\text{Clarke}). \end{aligned} \right\} \quad (61^*)$$

Der Krümmungsradius weicht übrigens vom Erdradius  $\rho$  an diesem Punkte

$$\rho = a \left[ \left( 1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{5\alpha^2}{16} \dots \right) + \left( \frac{1}{2} \alpha \dots \right) \cos 2\varphi - \left( \frac{5}{16} \alpha^2 \dots \right) \cos 4\varphi \dots \right]$$



bei der geringen Abplattung der Erde, namentlich in unseren Breiten, um eine so geringfügige Quantität ab, daß man beide ohne Bedenken miteinander vertauschen könnte. Es ist nämlich:

$$\rho_k = \rho - a \left[ 2\alpha \cos 2\varphi + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{5}{4} \alpha^2 \cos 4\varphi \dots \right].$$

In Kilometern ausgedrückt, findet sich:

$$\rho_k = \rho - 42.6 \cos 2\varphi \dots \dots \dots (\text{Bessel})$$

$$\rho_k = \rho - 43.5 \cos 2\varphi \dots \dots \dots (\text{Clarke})$$

Da  $r$  gegenüber  $\rho_k$  stets klein ist, liefert das zweite Glied der Gleichung (60) zum ersten bloß eine kleine Korrektur. Setzt man also:

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= r \cos z \\ \Delta H &= \frac{(r^2 - H_0^2)(\rho_k - H_0)}{2\rho_k^2} \\ H &= H_0 + \Delta H, \end{aligned} \right\} (62)$$

so läßt sich mittels einer Tafel mit den Argumenten  $r$  und  $H_0$  das Korrektionsglied  $\Delta H$  mit Leichtigkeit berücksichtigen.

Eine solche Tafel, berechnet mit dem Werte  $\rho_k = 6373 \text{ km}$ , welcher im Clarke'schen Sphäroide einer Breite von  $50^\circ$  entspricht, ist als Tafel I beigegeben.

Der Einfluß eines Beobachtungsfehlers auf die berechnete Höhe ergibt sich aus:

$$dH = \cos z dr - r \sin z dz.$$

Das zweite Glied ist jedoch in den meisten Fällen so unbedeutend, daß es übergangen werden kann.

Ist  $k$  die Seehöhe des Beobachtungsortes, so ersieht man aus einer einfachen Zeichnung, daß die Höhe der Sternschnuppe über dem Meeresniveau

$$H_1 = H + k$$

ist, und daß, wenn die Seehöhe des Ortes, in dessen Zenit sie aufleuchtete oder erlosch, mit  $k'$  bezeichnet wird, deren Höhe  $H$  über der Erdoberfläche ausgedrückt wird durch:

$$H = H_1 + k - k'.$$

Wünscht man außer der Höhe des Meteores auch die Orte zu erfahren, in deren Zenit es beim Aufleuchten oder Erlöschen stand, was allerdings nur für große Feuerkugeln von Interesse ist, so erreicht man dies wohl auf folgende Art am einfachsten.

In einem durch den Mittelpunkt der Erde gelegten rechtwinkligen Koordinatensysteme, dessen Z-Axe durch den Pol hindurchgeht, und dessen X-Axe auf den Frühlingspunkt hinzielt, sind unter Anwendung der allgemein üblichen Bezeichnungen die Koordinaten des Beobachtungsortes:

$$\xi = \rho \cos \varphi_1 \cos t$$

$$\eta = \rho \cos \varphi_1 \sin t$$

$$\zeta = \rho \sin \varphi_1.$$

Ebenso sind in einem, diesem parallel, aber durch den Beobachtungsort gelegten Koordinatensysteme die Koordinaten des Meteores:

$$x = r \cos \delta \cos \alpha$$

$$y = r \cos \delta \sin \alpha$$

$$z = r \sin \delta$$

und demgemäß die Koordinaten  $E, \varphi'_1, l'_1$ , des Meteoroiden bezogen auf den Mittelpunkt der Erde:

$$\begin{aligned} E \cos \varphi'_1 \cos l' &= \rho \cos \varphi_1 \cos l + r \cos \delta \cos \alpha \\ E \cos \varphi'_1 \sin l' &= \rho \cos \varphi_1 \sin l + r \cos \delta \sin \alpha \\ E \sin \varphi'_1 &= \rho \sin \varphi_1 + r \sin \delta \end{aligned} \quad (63^*)$$

oder einfacher:

$$\begin{aligned} E \cos \varphi'_1 \sin \lambda &= -r \cos \delta \sin (l - \alpha) \\ E \cos \varphi'_1 \cos \lambda &= +r \cos \delta \cos (l - \alpha) + \rho \cos \varphi_1 \\ E \sin \varphi'_1 &= r \sin \delta + \rho \sin \varphi_1. \end{aligned} \quad (63)$$

Hiebei wurde für den Unterschied der Ortssternzeiten  $l' - l$ , deren Längendifferenz  $\lambda$  eingesetzt. Die Entfernung des Meteoroiden von der Erdoberfläche ist  $E - \rho$ ; man kann sich daher jetzt die Berechnung der Höhe des Meteoroiden nach den Formeln (62) ersparen.

Ebenso kann in den Gleichungen (63) die scheinbare Breite statt der geozentrischen genommen werden, indem der dadurch begangene Fehler jedenfalls geringer ist als die durch die Ungenauigkeit der Beobachtungen erzeugte Unsicherheit.

Wird endlich auch die Länge der Meteorbahn und der Winkel erfordert, den sie an ihrem Anfangspunkte mit der Vertikale bildete, so ist noch folgendes hinzuzufügen.

Wird (Fig. 14) die Länge der Meteorbahn  $M_1, M_2$  mit  $l$  bezeichnet, wo  $M_1$  und  $M_2$  die von  $O$  aus gesehenen Punkte des Aufleuchtens und Erlöschens vorstellen und mit  $\rho$  der Erdradius, den wir für die zum Anfangs- und Endpunkte der Bahn vom Zentrum  $C$  der Erde gezogenen Linien als gleich voraussetzen und haben die übrigen in der Figur eingetragenen Bezeichnungen die leicht ersichtliche Bedeutung, so erhalten wir zunächst die Bahnlänge aus:

$$l = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos L} = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2 \frac{L}{2}}$$

wo die scheinbare Länge  $L$  derselben nach (34) sich am bequemsten und sichersten unter Zuhilfenahme der Tafel II aus der Formel:

$$\sin^2 \frac{L}{2} = \sin^2 \frac{1}{2} (\delta_2 - \delta_1) + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)$$

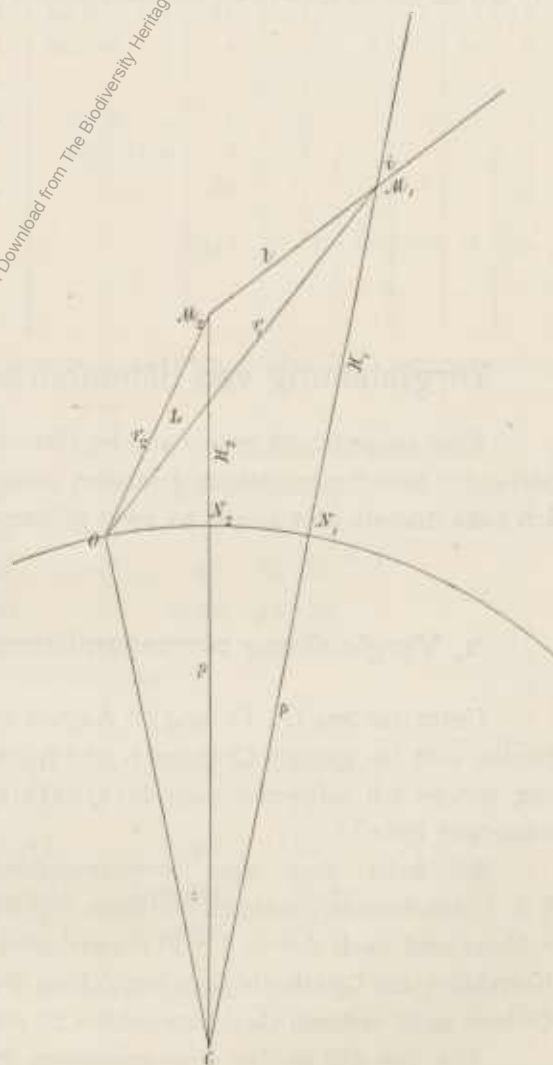
berechnen läßt: Für den Einfallswinkel  $M_2 M_1 C = i$  liefert das Dreieck  $M_1 M_2 C$

$$\cos i = \frac{(\rho + H_1)^2 - (\rho + H_2)^2 + l^2}{2(\rho + H_1)l} = \frac{H_1 - H_2}{l} + \frac{(l + H_1 - H_2)(l - H_1 + H_2)}{2(\rho + H_1)l}$$

oder mit hinreichender Annäherung:

$$\cos i = \frac{H_1 - H_2}{l}$$

Fig. 14.





Das durchzurechnende Formelsystem lautet demnach:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \frac{1}{2} L &= \sin^2 \frac{1}{2} (\delta_2 - \delta_1) + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) \\ l &= \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4 r_1 r_2 \sin^2 \frac{1}{2} L} \\ \cos i &= \frac{H_1 - H_2}{l} \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

$i$  ist der Winkel, den die Meteorbahn mit der Vertikale einschließt und daher der Winkel  $i_0$  unter dem sie gegen den Horizont geneigt ist:  $i_0 = 90 - i$ .

Für die am zweiten Orte  $O'$  beobachtete Bahn gelten natürlich dieselben Formeln; man hat in ihnen nur die an jenem Orte notierten Koordinaten einzusetzen.

## § 5.

### Vergleichung von Höhenberechnungen nach verschiedenen Methoden.

Eine ausgedehnte systematische Untersuchung der Unterschiede, welche in den nach verschiedenen Methoden berechneten Höhen auftreten, schien mir in mancher Beziehung von Interesse und Wichtigkeit. Ich habe deshalb eine solche an zwei größeren Beobachtungsreihen durchgeführt.

#### 1. Vergleichung correspondierender Beobachtungen der Augustperiode 1869.

Unter den am 11., 12. und 13. August 1869 von mir veranlaßten correspondierenden Beobachtungen fanden sich im ganzen 53 Doppel- und 3 dreifache Beobachtungen einer und derselben Sternschnuppe vor, welche ich seinerzeit nach der Quetlet-Bessel'schen Methode in der Form, die ich ihr gegeben, berechnet habe.<sup>1</sup>

Ich habe nun diese correspondierenden Meteore auch noch nach der am Anfange von § 3, C auseinandergesetzten Methode, für die ich den Namen Höhenberechnung aus der Parallaxe vorschlage und nach der in § 3, D entwickelten berechnet, welche letztere ich als Höhenberechnung durch Korrektion auf Gleichzeitigkeit bezeichne. Des leichteren Verständnisses wegen und um ein eventuelles Ordnen nach anderen Gesichtspunkten zu erleichtern, schicke ich folgendes voraus.

Aus den 458 an den oben genannten drei Tagen beobachteten und 21 von Kapitän Tupmann am 11. August im Mittelmeere eingezeichneten Meteorbahnen habe ich die nachstehenden 10 Radiationspunkte abgeleitet, denen ich auch die Zahl der an jedem Abende aus ihnen kommenden correspondierenden Sternschnuppen beigefügt habe.

<sup>1</sup> Beiträge zur Kenntnis der Sternschnuppen. II. Abh. (Sitzb. d. kais. Akad. d. Wiss. LXII. Bd. II. Abt. S. 314—341).

1869.

Nummer	August 11.			August 12.			August 13.			Korresp. Meteore			
	Position	Zahl der Meteore	Zahl in %	Position	Zahl der Meteore	Zahl in %	Position	Zahl der Meteore	Zahl in %	August			Summe
										11.	12.	13.	
I	49°9+55°6	93	46	49°5+56°7	40	32	49°1+61°6	24	16	13	6	3	22
II	77°3+53°8	29	14	72°1+54°4	17	14	69°9+52°6	17	10	5	2	—	7
III	293°8+54°2	18	9	292 +52	2	2	297°4+47°6	8	5	2	1	1	4
IV	11°8+25°1	14	7	10°4+25°5	12	9	9°2+25°0	19	12	—	—	4	4
V	346°8+53°3	10	5	344°4+48°5	11	9	344°8+52°4	31	20	1	1	3	5
VI	334°2—5°5	6	3	340°4—4°6	10	8	340°6—	11	7	2	2	3	7
VII	296°6+6°2	6	3	298 +8	4	3	300 +1	5	3	2	—	—	2
VIII	46°6+23°6	8	4	41°4+24°1	7	6	—	—	—	1	—	—	1
IX	Nordpol	3	1	Nordpol	12	10	Nordpol	5	3	—	—	1	1
X	—	—	—	—	—	—	4—18°9	9	6	—	—	1	1
Spor.	—	14	7	—	11	9	—	25	17	—	1	1	2
Summe	—	201	—	—	126	—	—	152	—	26	13	17	56

Die geographischen Koordinaten der Beobachtungsorte wurden folgendermaßen angenommen, wobei die Längen von Paris gezählt sind:

	λ	φ
Melk (Stiftskirche) . . . . .	12° 59' 49"	+48° 13' 27"
Semmering (Bahnhof) . . . . .	13 29 36	47 38 8
Wien (alte Sternwarte) . . . . .	14 2 36	48 12 36
Brünn (Technik) . . . . .	14 16 30	+49 11 39

Für die relativen Koordinaten der Beobachtungsorte findet sich daraus:

Kombination	S	D	log R	R
Wien—Melk . . . . .	91° 26'	+ 0° 48'	1·8898	77·6
Wien—Semmering . . . . .	41 3	—34 21	1·8812	76·1
Wien—Brünn . . . . .	191 35	+40 42	2·0446	110·8
Melk—Semmering . . . . .	332 47	—35 47	1·8800	75·9
Melk—Brünn . . . . .	228 53	+29 41	2·1523	142·0
Semmering—Brünn . . . . .	203 38	+39 2	2·2614	182·5.

Die Distanzen sind in Kilometern gegeben.

Die Position der Radianten I und II sowie am 13. August die des Radianten V schienen mir wegen der Zahl der Meteore, die ihnen entströmten und wegen der ziemlich symmetrischen Verteilung derselben hinreichend sicher bestimmt, um die Ebenen der Meteorbahnen durch ein Legen durch diese Radianten verbessern zu können, was mit Hilfe der Gleichungen 33 bis 36 von § 3, A III ausgeführt wurde. Infolge dessen sind in den umstehenden Zusammenstellungen die Höhenberechnungen in zwei Gruppen getrennt, von denen die mit  $A^*$  bezeichnete jene Meteore enthält, bei denen die beobachteten Bahnen vor deren Verwendung zur Höhenberechnung so um ihre Mitte gedreht wurden, daß sie durch den Radianten hindurchgehen, während bei der mit  $B^*$  bezeichneten Gruppe die beobachteten Bahnen unmittelbar als Grundlage für die weiteren Rechnungen dienen.

Die erste Hälfte (I) der folgenden Zusammenstellungen enthält auf zwei einander gegenüberstehenden Seiten in der ersten und letzten Kolonne die laufende Nummer, welche das Meteor in der oben angezogenen Publikation trägt und darunter in römischen Ziffern den Radianten dem es angehört. Ein der Nummer beigefügter Asterisk zeigt an, daß in den der Tabelle folgenden Bemerkungen eine weitere Notiz über das Meteor sich findet. In der zweiten Kolonne stehen die Orte an denen es beobachtet wurde ( $B =$  Brünn,  $M =$  Melk,  $S =$  Semmering,  $W =$  Wien) und in der dritten die notierte Größe. Ein derselben angehängter Asterisk bedeutet, daß das Meteor einen Schweif zurückließ. Die vierte Kolonne mit der Überschrift  $M$  enthält in der ersten Partie ( $A^*$ ) in der Horizontalzeile, welcher ein  $B$  voransteht, die beobachteten Koordinaten des Meteor, wozu ich bemerke, daß sie an Meteoroskopen eingestellt wurden, die Azimut und Höhe gaben. Bei der Umrechnung dieser Koordinaten auf AR und Deklination wurden nur Zehntel des Grades angesetzt, diese Zehntel aber hier in Minuten verwandelt, um eine Gleichförmigkeit mit den weiteren Angaben zu erzielen, wodurch sich der Umstand, der sonst befremden müßte, erklärt, daß in dieser Horizontalzeile alle Minuten durch 6 teilbar sind.

Die darauf folgende Horizontalzeile  $R$  gibt die Positionen an, welche durch die Drehung in den Radianten gewonnen wurden. Diese Zeile fehlt in der zweiten Partie ( $B^*$ ). Die Zeile  $G$  enthält die Positionen, welche bei der Korrektur der Bahnen auf Gleichzeitigkeit sich ergaben. Beim Berechnen der letzteren [nach den Formeln (52) bis (58)] gieng ich jedoch in der ersten Partie ( $A^*$ ) nicht von den beobachteten, sondern von den in den Radianten gedrehten Orten aus, um die nach den anderen Methoden ermittelten Höhen mit den aus der Quételet-Bessel'schen erhaltenen direkt vergleichen zu können.

In der zweiten Hälfte (II) der Zusammenstellungen enthält, wieder auf zwei gegenüberstehenden Seiten, die zweite Kolonne die Beobachtungszeit, welche für alle Meteore auf den Meridian von Wien reduziert ist, und die dritte die Methode der Berechnung. Dabei bedeutet  $B$  die Quételet-Bessel'sche,  $P$  die Methode der Höhenberechnung aus der Parallaxe (§ 3, C, Formeln 48 und 48\*) und  $G$  die Höhenberechnung durch Korrektur auf Gleichzeitigkeit (§ 3, D, 52 bis 58).

Die 4. Kolonne enthält die am Anfangs- und Endpunkte der Bahn beobachtete Parallaxe, wobei in der ersten Partie ( $A^*$ ) wieder von den in den Radianten gedrehten Bahnen ausgegangen wurde.

Von den folgenden 12 Kolonnen bedürfen wohl nur die mit  $f_1$  und  $f_2$  überschriebenen einer Erläuterung. Sie geben den Maximizeinfluß an, den ein Fehler von  $1^\circ$  in den Positionen auf die berechneten Höhen auszuüben vermag, wobei jedoch die  $f$  nach der Formel:  $f = \cos z dr$ , also mit Außerachtlassen des Teiles  $r \sin z dz$  berechnet sind.

Bei den Rechnungen nach der Methode der Parallaxe wurden auch hier in der Abteilung  $A^*$  die in den Radianten gedrehten statt der beobachteten Positionen verwendet. Die 4 letzten Kolonnen enthalten unter »mittlere Höhe« das arithmetische Mittel der aus den Beobachtungen am 1. und 2. Orte erhaltenen Höhen und unter das  $F$  das Mittel aus  $f_1$  und  $f_2$ .

In meiner Abhandlung sind die auf Distanzen sich beziehenden Quantitäten noch in geographischen Meilen angegeben. Ich habe sie hier auf das jetzt allgemein gebräuchliche metrische Maß umgesetzt und dabei eine geographische Meile = 7.42044 Kilometer angenommen. Dabei ist jedoch daran zu erinnern daß sich in meiner Abhandlung die Distanzen und Fehlermaxima bloß auf eine Dezimale der geographischen



Meile angegeben finden, weshalb bereits die Einheiten der Kilometer nicht zu verbürgen sind. Ich habe aber trotzdem, der Konformität wegen, alles auf Zehnteile des Kilometers angesetzt.

Endlich sei noch erwähnt, daß ich bei dieser Gelegenheit die früheren Rechnungen zum Teil revidiert und dabei, abgesehen von einigen Druckfehlern,<sup>1</sup> nur in zwei Fällen auf Differenzen von einigem Belange gestoßen bin, welche unter den am Schlusse beigefügten Bemerkungen namhaft gemacht sind.

---

<sup>1</sup> Von diesen Druckfehlern sind folgende von Bedeutung:

S. 318, Nr. 3, die Anfangs-Rektaszension in Melk ist  $357^{\circ}3$  statt  $35^{\circ}3$ .

S. 326, Nr. 7 ist das Zeichen der AR-Korrekturen für Melk zu ändern.

S. 328, Nr. 54, ist das Zeichen der Korrektur in AR und Dekl. für Wien zu ändern.

S. 329, Nr. 28, das Zeichen der Deklinationskorrektur des Anfangspunktes in Wien zu ändern.

S. 336, Nr. 48, die Höhenangaben sind teilweise vertauscht. Sie sollen lauten: Wien  $67^{\circ}0$ ,  $37^{\circ}0$ , Brünn  $44^{\circ}5$ ,  $20^{\circ}5$ .

## I.

Nummer	Beobachtungs- ort	Größe	M	1. Ort			
				Anfang		Ende	
				$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
<b>A*</b>							
1869 August 11							
I	W . . . . 2	1*	B	84° 30'	69° 42'	109° 12'	+ 70° 6'
I	B . . . . 1	♀*	R	85 4	69 5	109 21	70 45
			G	82 6	66 59	99 1	68 10
3	M . . . . 3	1*	B	9 36	18 12	357 18	3 48
I	B . . . . 13	.	R	8	19 12	358 45	2 50
			G	9 13	17 30	359 5	2 17
4	W . . . . 23	2*	B	188 24	70 36	205 36	64 12
II	B . . . . 14	.	R	188 57	70 52	204 58	64 0
			G	174 40	75 33	202 28	69 43
5 <sup>a</sup>	W . . . . 24	2*	B	256 42	65 48	255 0	55 30
II	M . . . . 5	1*	R	255 30	65 49	255 53	55 29
			G	253 49	66 0	258 44	54 41
5 <sup>b</sup>	W . . . . 24	2*	B	256 42	65 48	255 0	55 30
II	B . . . . 15	.	R	255 30	65 49	255 53	55 29
			G	257 48	66 59	249 47	52 12
5 <sup>c</sup>	M . . . . 5	1*	B	2 42	79 0	308 6	74 36
II	B . . . . 15	.	R	3 9	79 49	310 19	74 2
			G	4 18	79 4	308 34	74 17
6	M . . . . 7	2*	B	40 30	33 24	35 6	23 24
I	B . . . . 16	1	R	39 20	33 47	36 10	23 4
			G	40 15	31 30	37 11	19 18
7*	M . . . . 9	♀*	B	32 48	29 12	24 0	10 0
I	B . . . . 17	♀	R	32 4	29 30	24 40	9 47
			G	32 43	28 9	25 2	9 11
8	W . . . . 29	1*	B	265 6	48 6	260 0	29 24
I	B . . . . 19	♀	R	266 33	47 48	258 52	29 37
			G	270 38	50 36	262 4	32 47
9	W . . . . 32	2*	B	28 36	25 0	26 48	20 24
I	M . . . . 11	2	R	28 38	24 58	26 45	20 24
			G	29 48	+ 27 57	26 12	+ 19 8

I.

2. Ort				Scheinbare Höhe				Nummer
Anfang		Ende		1. Ort		2. Ort		
$\alpha'$	$\delta'$	$\alpha'$	$\delta'$	Anfang	Ende	Anfang	Ende	
<b>A*</b>								
1869 August 11.								
7° 36'	+ 61° 30'	341° 42'	+ 58° 36'	33° 0'	29° 30'	57° 42'	70° 42'	I
7 34	61 41	341 55	58 18	32 12	29 54	57 36	70 36	I
3 59	+ 63 23	333 58	+ 60 3	31 28	29 4	59 20	73 51	
332 12	— 6 0	328 48	— 17 0	45 0	39 0	34 42	23 42	3
333 50	6 44	327 8	16 14	46 48	37 42	34 6	24 42	I
332 39	— 5 7	326 56	— 15 40	45 15	37 19	35 39	25 4	
314 12	+ 27 54	257 54	+ 16 12	32 0	30 0	65 12	47 42	4
310 37	30 44	301 24	13 41	32 12	29 24	66 24	47 30	II
303 40	29 10	295 58	11 23	34 18	33 55	61 28	42 41	
2 42	79 0	308 6	74 36	48 0	45 0	57 0	62 0	5 <sup>a</sup>
3 9	79 49	310 19	74 2	48 0	45 18	56 12	62 30	II
11 6	81 28	308 30	75 47	47 55	46 37	54 17	61 6	
298 6	29 0	282 54	3 42	49 0	45 0	57 42	29 42	5 <sup>b</sup>
295 24	30 24	285 18	2 57	48 0	45 18	57 12	30 48	II
293 49	29 51	289 49	4 53	49 41	40 45	55 53	33 38	
298 6	29 0	282 54	3 42	57 0	62 0	57 42	29 42	5 <sup>c</sup>
295 24	30 24	285 18	2 57	56 12	62 30	57 12	30 48	II
294 29	30 34	285 51	+ 2 53	56 55	62 14	56 10	29 18	
351 42	8 6	339 12	— 18 42	37 0	34 0	45 42	21 42	6
353 12	7 19	337 28	17 52	38 0	33 0	44 48	22 54	I
351 46	9 16	334 21	14 15	36 41	30 30	47 7	26 32	
352 6	5 36	337 30	17 0	40 0	32 0	43 12	23 42	7*
351 52	5 43	337 43	17 8	39 42	32 18	43 24	23 48	I
351 1	6 55	337 24	— 16 31	40 3	31 18	45 25	24 12	
295 18	25 10	283 30	+ 12 0	46 0	32 0	51 42	34 24	8
293 52	26 16	284 53	11 6	46 42	31 18	51 42	34 36	I
290 12	24 16	281 43	8 19	50 16	35 38	47 59	30 30	
43 0	23 12	37 24	12 24	42 36	40 36	31 0	27 0	9
41 8	23 47	39 10	11 51	42 36	40 42	32 42	25 24	I
39 46	+ 20 55	39 45	+ 12 45	43 42	39 51	31 35	25 42	



Nummer	Beobachtungs- ort	Größe	M	I. Ort			
				Anfang		Ende	
				$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
10	W . . . 34	2	B	21° 12'	+ 61° 24'	359° 36'	+ 60° 0'
I	M . . . 12	1	R	21 11	60 57	359 23	60 26
			G	21 33	61 5	359 43	60 47
11	W . . . 37	1	B	261 18	46 54	259 42	36 30
II	B . . . 21	.	R	260 41	46 56	260 15	36 28
			G	265 46	52 13	258 2	34 54
14	W . . . 46	1*	B	262 30	68 30	254 6	45 36
I	M . . . 18	1	R	265 48	68 4	252 16	45 50
			G	265 49	68 5	252 13	45 50
15	W . . . 47	2	B	319 36	66 0	302 12	59 12
I	B . . . 26	3	R	319 47	65 55	301 53	59 16
			G	312 39	65 33	295 11	58 1
18	W . . . 58	4*	B	234 42	45 48	237 18	36 36
I	B . . . 30	.	R	236 31	45 54	235 45	36 30
			G	238 10	50 28	235 10	35 48
19	W . . 59	1*	B	80 54	46 0	84 12	40 24
I	M . . 24	1	R	79 25	45 13	85 38	41 8
			G	77 28	45 31	85 49	41 7
20a	W . . 60	2*	B	278 0	52 48	274 42	38 48
II	M . . 26	1	R	278 24	52 45	274 22	38 49
			G	282 18	51 5	278 39	35 59
20b*	W . . 60	2*	B	278 0	52 48	274 42	38 48
II	B . . 33	.	R	278 24	52 30	274 22	38 49
			G	281 51	55 2	—	—
20c*	M . . 26	1	B	3 18	65 6	327 36	58 0
II	B . . 33	.	R	2 30	66 43	329 39	56 46
			G	2 7	65 50	—	—
21	W . . 61	2*	B	311 48	73 42	299 24	67 18
II	B . . 34	.	R	312 12	73 38	299 8	67 22
			G	317 33	74 10	291 24	65 40
23	W . . 65	4*	B	66 30	39 48	73 24	33 6
I	B . . 36	.	R	67 21	40 14	72 36	32 43
			G	65 12	43 18	70 12	36 14
24*	M . . 38	2	B	5 48	41 0	350 6	26 24
I	B . . 40	3	R	6 0	40 55	349 54	26 28
			G	4 46	+ 42 1	348 26	+ 27 36

2. Ort				Scheinbare Höhe				Nummer
Anfang		Ende		1. Ort		2. Ort		
$\alpha'$	$\delta'$	$\alpha'$	$\delta'$	Anfang	Ende	Anfang	Ende	
44° 0'	+ 43° 6'	41° 54'	+ 37° 6'	61° 30'	72° 0'	43° 0'	41° 0'	10
43 57	43 7	42 12	37 6	61 30	71 48	42 54	41 0	I
43 15	42 59	41 49	36 53	61 23	71 28	43	41 1	
294 24	33 24	280 18	4 36	41 0	34 0	54 42	24 42	11
292 20	34 8	282 3	3 58	40 30	34 18	53 36	25 18	II
286 45	30 4	284 4	5 14	46 4	32 1	47 35	27 16	
29 42	79 48	265 54	80 24	48 0	34 0	54 0	50 0	14
29 41	79 47	265 50	80 24	49 0	33	54 0	50 0	I
29 48	79 47	266 3	80 23	49 7	33 7	54 4	50 3	
322 48	11 54	309 54	8 42	69 0	6 0	49 42	41 42	15
320 11	15 44	312 36	4 58	68 54	64 42	52 30	38 6	I
323 9	15 54	316 15	5 36	67 8	61 27	53 36	41 33	
266 24	42 0	257 42	19 24	21 30	16 0	36 12	15 42	18
266 15	42 18	257 50	19 23	22 54	15 6	36 6	15 48	I
262 55	38 21	258 28	19 59	26 33	14 17	32 8	16 36	
76 0	37 12	81 30	27 36	30 30	25 0	27 0	17 0	19
75 20	36 53	82 8	27 54	30 48	24 42	27 12	16 48	I
77 4	36 38	82 0	27 55	32 8	24 38	26 2	16 57	
3 18	65 6	327 36	58 0	47 0	38 0	71 0	75 0	20a
2 30	66 43	329 54	56 40	47 6	37 42	69 42	76 30	II
5 17	69 27	328 20	61 10	48 48	38 54	66 58	73 27	
314 6	14 36	—	—	47 0	38 0	45 24	—	20b*
314 6	14 36	—	—	47 6	37 42	—	—	II
311 10	13 4	—	—	49 58	—	42 45	—	
314 6	14 36	—	—	71 0	75 0	45 24	—	20c*
314 6	14 36	—	—	69 42	76 30	—	—	II
314 56	14 18	—	—	70 38	—	45 45	—	
331 0	24 18	320 42	2 0	60 0	59 0	61 42	37 12	21
332 50	23 19	318 59	2 54	60 0	58 42	61 30	37 30	II
331 6	23 7	323 4	3 43	60 54	55 51	60 33	39 40	
30 36	21 6	27 18	2 48	36 30	28 0	47 42	33 42	23
31 44	21 20	26 13	3 3	36 12	28 18	46 48	34 36	I
34 21	18 53	29 2	+ 0 53	39 21	32 2	43 47	30 38	
329 54	11 0	324 18	— 8 54	79 0	68 0	46 12	25 42	24*
332 56	9 31	321 18	7 26	78 48	68 0	45 18	25 48	I
334 8	+ 8 41	322 42	— 8 28	80 50	68 42	45 20	25 12	

Nummer	Beobachtungs- ort	Größe	M	1. Ort			
				Anfang		Ende	
				$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
1869 August 12.							
28	W . . 7	3	B	13° 0'	+ 70° 42'	342° 0'	+ 68° 24'
II	M . . 13	3	R	13 53	71 46	341 18	69 34
			G	19 4	72 44	343 18	71 0
29*	M . . 21	1*	B	10 12	68 0	326 36	69 0
I	S . . 28	1*	R	11 11	69 1	327 16	67 59
			G	359 58	69 0	324 16	67 21
30	W . . 15	3.4	B	80 36	78 18	220 24	70 48
I	M . . 24	3	R	66 25	79 34	211 42	70 6
			G	73 2	79 13	207 38	69 29
31	W . . 16	1.2*	B	358 24	42 54	356 18	32 36
I	M . . 25	2 *	R	2 6	41 26	352 57	33 56
			G	3 28	43 52	352 35	33 9
35	W . . 25	2*	B	261 0	55 6	254 42	41 42
I	M . . 31	2	R	260 45	55 10	254 54	41 30
			G	261 32	54 58	256 19	40 59
36	W . . 28	4	B	46 42	34 42	44 54	25 6
I	S . . 40	4	R	46 13	34 45	45 20	25 3
			G	45 3	36 28	44 31	26 16
38	W . . 37		B	45 54	31 18	42 12	23 42
II	S . . 41	4	R	46 22	31 5	41 46	23 55
			G	45 30	32 26	42 27	22 38
39	W . . 39	2	B	7 42	31 24	357 42	23 24
I	M . . 34	2*	R	7 36	32 19	358 48	22 34
			G	6 0	+ 30 39	358 18	+ 20 12
1869 August 13.							
43	W . . 22	2*	B	264° 12'	+ 45° 30'	254° 36'	+ 35° 30'
V	B . . 5	3	R	265 19	44 38	253 30	36 16
			G	264 53	44 25	251 26	35 0
47	S . . 24	2	B	68 42	34 24	75 48	31 48
V	B . . 9	4	R	69 35	35 29	74 54	30 45
			G	68 22	38 41	73 56	+ 32 47
49	W . . 60	2	B	356 18	6 12	351 6	- 1 0
I	S . . 26	3	R	355 32	6 38	351 52	1 27
			G	356 22	+ 5 38	354 3	- 4 40



2. Ort				Scheinbare Höhe				Nummer
Anfang		Ende		1. Ort		2. Ort		
$\alpha'$	$\delta'$	$\alpha'$	$\delta'$	Anfang	Ende	Anfang	Ende	
1869 August 12.								
37° 30'	+ 46° 48'	29° 24'	+ 42° 0'	54° 30'	65° 30'	36° 0'	38° 0'	28
37 44	46 36	29 9	42 13	53 48	66 6	35 42	38 6	II
35 9	46 11	27 13	41 36	52 45	63 25	36 58	39 8	
209 54	82 54	213 12	74 6	58 0	69 0	44 48	41 6	29*
203 59	82 44	215 57	74 11	57 0	69 54	43 54	41 48	I
171 41	82 50	212 28	75 3	61 36	70 45	41 23	41 16	
64 24	62 42	72 0	68 24	41 30	41 0	36 0	37 0	30
61 57	63 32	74 33	67 25	43 24	38 24	37 18	35 24	I
58 54	63 41	70 52	67 58	43 17	37 9	38 41	37 10	
22 30	35 30	11 0	25 12	64 30	60 30	44 0	45 0	31
21 7	36 29	12 21	24 19	61 6	63 24	45 36	43 36	I
19 16	34 13	12 52	25 3	61 30	62 53	45 23	43 44	
330 48	77 12	281 36	62 6	46 30	36 30	61 0	59 0	35
331 51	76 6	279 19	62 39	46 18	36 30	61 54	57 54	I
331 55	76 35	277 26	63 27	46 56	36 4	61 39	57 1	
59 54	41 36	60 24	33 36	36 30	31 30	31 54	26 36	36
58 37	41 26	61 35	33 45	36 54	31 12	32 30	25 54	I
59 35	39 36	62 16	32 27	38 41	32 33	30 56	24 38	
68 12	39 54	65 6	30 36	40 0	37 30	30 24	26 30	38
67 38	40 1	65 38	30 31	39 36	37 54	30 48	26 0	II
68 11	38 34	65 11	31 55	41 0	36 35	29 45	27 23	
28 18	22 18	27 36	12 42	66 30	63 30	47 0	40 0	39
29 30	22 5	26 28	12 54	67 54	62 36	46 12	41 0	I
30 24	+ 23 28	27 15	+ 15 11	66 47	60 17	46 42	42 8	
1869 August 13.								
281° 18'	+ 15° 18'	276° 48'	+ 0° 42'	50° 0'	39° 0'	42° 30'	28° 0'	43
283 33	13 40	274 37	1 47	50 12	38 42	42 54	27 36	V
283 53	13 49	276 27	2 51	50 21	36 36	42 56	28 44	
22 0	14 24	23 54	3 24	21 54	15 54	37 30	27 30	47
20 17	13 50	25 37	3 58	22 6	15 36	38 6	27 6	V
22 27	11 14	26 58	2 13	25 24	18 4	35 50	25 53	
45 0	34 42	44 42	24 30	46 0	40 0	41 6	35 6	49
45 16	34 42	44 28	24 30	46 48	39 42	40 54	35 12	I
44 42	+ 35 56	42 47	+ 28 7	45 24	35 51	41 58	38 28	

Nummer	Beobachtungs- ort	Größe	M	1. Ort			
				Anfang		Ende	
				$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
50 I	W . . . 62	3	B	201° 24'	+ 55° 36'	200° 42'	+ 50° 18'
	B . . . 13	4*	R	199 51	55	202 5	50 22
			G	198 4	59 11	202 5	50 31
54* I	W . . . 82	2	B	48 42	61 30	stat.	—
	B . . . 16	2·3	R	49 6	61 36	stat.	—
			G	50 18	60 51	50 45	60 33
56 V	W . . . 92	3	B	196 24	60 18	199 54	56 42
	B . . . 18	4	R	199 39	60 25	196 53	56 37
			G	193 17	+ 64 10	195 29	+ 58 12

B\*

1869 August 11.

2 VII	W . . . 15	3	B	50° 18'	+ 59° 24'	74° 54'	+ 53° 0'
	B . . . 6	1*	G	56 38	58 46	74 49	53 56
12 VII	W . . . 41	5	B	17 12	86 24	99 18	77 18
	B . . . 22	.	G	290 12	87 30	98 13	77 1
13* VI	M . . . 16	3	B	17 42	31 18	33 54	+ 35 36
	B . . . 24	.	G	17 16	32 8	—	—
16 III	M . . . 20	2	B	22 6	3 24	30 54	— 7 30
	B . . . 27	2	G	23 0	1 58	32 51	— 10 11
17 VI	W . . . 56	2	B	211 24	58 18	200 18	+ 54 36
	B . . . 29	.	G	210 47	61 20	200 2	55 41
22* VIII	W . . . 64	1·2	B	286 48	69 0	266 30	64 30
	M . . . 30	.	G	—	—	—	—
25 III	W . . . 77	1*	B	230 30	72 18	214 30	72 36
	B . . . 44	2	G	230 38	72 13	214 39	72 40
26 V	W . . . 81	2*	B	275 24	62 48	258 12	60 48
	M . . . 44	1	G	281 4	+ 62 0	266 10	+ 60 49

2. Ort				Scheinbare Höhe				Nummer
Anfang		Ende		1. Ort		2. Ort		
$\alpha'$	$\delta'$	$\alpha'$	$\delta'$	Anfang	Ende	Anfang	Ende	
268° 24'	+ 48° 36'	254° 54'	+ 30° 36'	19° 0'	14° 0'	44° 30'	25° 30'	50
264 53	49 45	257 41	29 41	18 12	14 18	42 48	26 36	I
261 20	46 47	257 34	+ 29 36	21 27	14 41	38 45	25 32	
8 6	16 0	1 30	- 3 18	55 30	—	53 30	36 30	54*
9 2	16 43	0 37	4 3	55 12	—	54 0	36 6	I
8 7	17 4	359 23	3 35	54 42	54 24	55 0	36 33	
326 18	9 30	321 30	8 0	20 0	17 0	44 30	26 30	56
326 21	9 29	321 28	8 1	20 12	16 6	44 42	26 42	V
321 48	+ 7 40	319 56	- 8 53	23 28	17 51	40 12	24 30	

B\*

1869 August 1.

358° 24'	+ 26° 18'	22° 18'	+ 38° 24'	38° 0'	26° 0'	53° 42'	46° 42'	2
357 47	26 39	23 3	37 42	37 29	26 42	54 27	45 31	VII
321 6	16 36	341 30	18 36	51 0	41 0	54 12	59 12	12
325 33	+ 16 32	340 49	+ 18 40	49 50	40 46	55 32	59 27	VII
327 18	- 1 54	—	—	56 0	48 0	37 42	—	13*
327 53	- 2 25	—	—	56 50	—	37 12	—	VI
350 12	- 17 30	358 36	- 29 42	33 0	19 0	22 42	9 42	16
349 21	- 16 2	357 3	26 40	31 50	16 20	24 34	13 25	III
306 30	+ 4 48	293 42	+ 8 24	23 0	17 0	34 42	30 42	17
303 52	3 17	292 47	7 46	25 30	17 54	32 6	29 40	VI
(30 12	66 24	30 6	78 42)	53 40	45 0	—	—	22*
—	—	—	—	—	—	—	—	VIII
307 30	50 24	315 6	46 36	36 0	33 30	58 12	61 42	25
307 35	50 28	315 3	46 40	36 1	33 36	58 16	61 42	III
37 18	77 36	72 48	79 6	44 0	36 0	57 0	50 0	26
47 29	+ 79 25	93 23	+ 79 3	46 10	39 14	54 23	46 16	V



Nummer	Beobachtungs- ort	Größe	M	1. Ort			
				Anfang		Ende	
				$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
1869 August 12.							
27 VI	M . . . 12 S . . . 18	1 1	B G	330° 18' 335 10	+ 19° 6' 19 51	321° 0' 326 51	+ 24° 3'0 26 1
32 VI	M . . . 27 S . . . 31	2 2*	B G	18 48 19 20	0 30 0 19	31 12 29 24	0 0 0 43
33 ?	W . . . 22 M . . . 29	2* 2	B G	49 30 50 36	57 30 57 38	75 6 76 45	54 0 53 44
34 III	M . . . 30 S . . . 37	2 2	B G	354 42 354 27	40 18 40 22	359 42 3 9	37 12 37 19
37 V	W . . . 29 M . . . 33	2 neb	B G	394 24 304 20	13 0 + 13 22	294 54 294 53	3 24 + 3 40
1869 August 13.							
40 IX	W . . . 7 S . . . 8	3* 3*	B G	358° 54' 355 14	+ 29° 6' 32 48	358° 6' 356 1	+ 16° 42' 18 25
41 VI	W . . . 8 S . . . 9	3 3	B G	330 30 334 0	39 36 35 54	287 0 288 44	66 48 66 37
42 ?	W . . . 11 B . . . 2	1'2* 2'3*	B G	31 28 28 19	48 36 52 26	56 6 54 57	48 24 52 36
44 X	S . . . 51 B . . . 6	4 3	B G	52 30 50 41	44 18 50 50	96 6 96 41	63 6 63 23
45 IV	W . . . 39 B . . . 7	3* 3	B G	74 0 74 20	47 6 46 24	80 48 81 41	46 6 44 14
46* VI	W . . . 44 B . . . 8	3 3	B G	224 0 225 22	86 48 85 47	174 42 186 10	77 6 72 33
49 IV	W . . . 55 B . . . 11	2* 3'4*	B G	301 0 303 43	50 24 51 18	259 6 263 30	41 30 45 5
51 IV	W . . . 70 S . . . 28	5 3	B G	340 24 338 48	10 24 + 11 29	329 48 324 27	1 6 + 3 17

2. Ort				Scheinbare Höhe				Nummer
Anfang		Ende		1. Ort		2. Ort		
<i>a'</i>	<i>δ'</i>	<i>a'</i>	<i>δ'</i>	Anfang	Ende	Anfang	Ende	
1869 August 12.								
321° 48'	+ 66° 0'	284° 24'	+75° 6'	57° 0'	65° 0'	70° 48'	60° 12'	27
311 27	64 20	272 20	70 24	56 8	65 22	73 17	60 16	VI
23 6	8 12	34 12	12 0	23 0	15 0	26 54	22 30	32
22 39	8 31	36 2	11 14	23 13	17 22	28 12	21 28	VI
56 12	36 12	69 54	35 36	44 30	30 30	28 30	20 0	33
55 28	35 57	68 42	35 49	44 1	29 39	28 45	20 48	?
328 36	73 36	359 0	82 0	71 0	66 0	64 6	54 30	34
329 8	73 49	340 34	81 22	71 52	64 43	63 48	56 10	III
334 36	15 12	336 42	4 18	46 30	33 30	57 0	46 0	37
334 36	+ 14 50	336 43	+ 4 1	46 40	33 28	56 36	45 45	V
1869 August 13.								
30° 54'	+ 48° 54'	25° 48'	+ 35°	50° 0'	41° 30'	40° 24'	35° 18'	40
33 3	44 16	26 16	33 3	54 46	44 5	36 19	33 54	IX
17 24	48 18	65 36	77 54	75 0	67 0	48 6	41 42	41
16 52	52 54	68 36	78 14	70 22	67 42	50 2	41 34	VI
339 6	12 42	0 36	28 36	43 0	29 0	40 12	50 12	42
342 39	10 12	3 57	25 37	45 57	32 9	45 30	46 45	?
341 0	10 48	327 36	25 48	32 48	27 36	49 30	66 30	44
345 59	6 20	328 0	25 40	38 4	27 47	44 20	66 27	X
33 30	25 30	43 36	25 0	26 0	22 0	35 30	28 30	45
32 54	26 3	42 6	26 29	25 20	20 14	37 15	31 19	IV
315 54	25 0	292 48	33 30	47 0	35 30	62 30	56 30	46*
317 1	25	299 7	+ 34 55	46 40	32 50	62 17	60 30	VI
317 0	6 24	312 42	- 17 24	67 0	37 0	44 30	20 30	48
315 14	6 1	308 33	- 20 10	68 43	41 40	43 8	16 23	IV
41 12	56 42	64 0	+ 70 12	52 0	41 0	55 24	47 18	51
42 18	+ 55 0	62 20	+ 64 27	52 52	41 40	54 18	46 45	IV

Nummer	Beobachtungs-ort	Größe	M	1. Ort			
				Anfang		Ende	
				$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\delta$
52*	W . . . 74	3	B	0° 36'	+ 4° 24'	10° 30'	+ 2° 0'
VI	S . . . 31	3	G	1 51	2 46	9 26	3 12
53	S . . . 33	2	B	115 12	70 12	109 48	63 30
III	B . . . 15	2·3	G	120 54	71 37	113 32	65 28
55	W . . . 90	4	B	1 18	32 48	359 24	38 36
IV	S . . . 36	4	G	2 51	+ 51 48	1 29	+ 37 20

II.

Nr.	Mittlere Wiener Zeit	M	Parall.	Anfangsentfernung		Endentfernung	
				1. Ort	2. Ort	1. Ort	2. Ort
				in Kilometern			

A.\*

1869 August 11.

1	11 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup> 1 <sup>s</sup>	B	30° 48'	167·0	141·7	121·7	92·8
		P	45 45	196·0	120·1	150·4	76·0
		G		195·6	120·5	149·9	77·2
3	12 34 28	B	42 36	231·5	247·8	187·0	250·8
		P	36 36	172·0	207·8	166·1	235·7
		G		172·2	207·9	168·1	235·5
4	12 38 40	B	70 26	93·5	48·2	77·9	51·2
		P	80 32	110·8	72·0	92·6	76·4
		G		111·3	73·0	93·3	77·1
5a	12 41 25	B	28 52	149·9	128·4	138·0	100·2
		P	28 2	160·2	146·9	164·4	137·1
		G		160·1	146·9	164·2	137·1
5b	12 41 25	B	42 54	144·0	135·8	132·8	154·3
		P	57 40	156·8	144·7	104·1	122·4
		G		156·8	144·7	104·7	122·8
5c	12 41 25	B	56 14	103·9	126·9	78·6	179·6
		P	72 40	150·0	151·3	80·5	143·4
		G		150·0	151·3	80·6	143·4



2. Ort				Scheinbare Höhe				Nummer
Anfang		Ende		1. Ort		2. Ort		
$\alpha'$	$\delta'$	$\alpha'$	$\delta'$	Anfang	Ende	Anfang	Ende	
28° 30'	+ 21° 0'	37° 6'	+ 24° 48'	45° 0'	40° 0'	47° 54'	45° 12'	52*
27 20	22 45	38 7	23 28	43 6	41 29	49 55	43 35	VI
337 48	27 48	347 0	20 42	34 12	30 30	67 0	61 30	53
340 22	27 16	349 31	19 51	34 11	31 8	66 38	60 37	III
46 42	52 48	53 12	57 12	73 0	79 0	55 18	52 42	55
46 4	+ 54 16	52 48	+ 59 4	71 40	77 10	55 56	53 11	IV

II.

Anfangshöhe				Endhöhe				Mittlere Höhe				Nr.
1. Ort	2. Ort	$f_1$	$f_2$	1. Ort	2. Ort	$f_1$	$f_2$	Anfang	$F$	Ende	$F$	

in Kilometern

A.\*

1869 August 11.

90.5	120.2	8.2	11.1	61.6	87.9	3.7	5.9	105.4	9.7	74.6	4.8	1
106.5	101.7	5.2	8.6	76.3	77.7	2.2	4.7	104.1	6.9	74.0	3.5	
—	—	—	—	—	—	—	—	104.0	—	74.1	—	
170.7	142.5	28.2	16.3	116.5	109.1	17.8	11.1	156.6	22.3	112.8	14.5	3
126.7	118.8	6.3	5.9	102.0	102.1	6.5	4.3	122.8	6.1	102.5	5.4	
—	—	—	—	—	—	—	—	123.2	—	103.4	—	
50.5	44.5	1.5	3.7	38.6	37.8	0.7	3.0	47.5	2.6	38.2	1.9	4
59.7	65.9	1.1	2.3	45.9	56.5	0.8	1.3	62.8	1.7	51.2	1.1	
—	—	—	—	—	—	—	—	64.2	—	52.5	—	
111.3	106.9	17.1	3.0	98.7	89.0	12.6	15.6	109.1	20.1	93.8	14.1	5a
120.0	122.6	7.7	8.7	117.9	121.9	7.5	9.4	121.3	8.2	119.9	8.4	
—	—	—	—	—	—	—	—	119.7	—	120.4	—	
107.6	114.3	7.4	6.7	95.0	80.1	6.7	5.2	110.9	7.1	87.6	6.0	5b
117.5	121.8	4.9	5.6	74.4	63.4	2.6	1.9	119.6	5.3	68.9	2.3	
—	—	—	—	—	—	—	—	120.3	—	68.8	—	
86.8	106.9	23.7	17.1	69.7	93.5	21.5	14.1	96.9	20.4	81.6	17.8	5c
125.1	127.6	4.2	4.2	71.4	74.5	2.7	2.3	126.3	4.2	73.0	2.5	
—	—	—	—	—	—	—	—	126.2	—	71.4	—	

Nr.	Mittlere Wiener Zeit	M	Parall.	Anfangsentfernung		Endentfernung	
				1. Ort	2. Ort	1. Ort	2. Ort
				in Kilometern			
6	12 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup> 58 <sup>s</sup>	B	50° 4'	231·5	159·5	161·8	146·2
		P	70 20	180·1	147·9	116·2	128·8
		G		180·3	148·2	115·2	130·4
7*	12 48 7	B	44 43	230·8	189·2	146·2	175·1
		P	53 39	194·2	176·5	136·5	170·8
		G		194·2	176·6	136·5	170·8
8	12 52 2	B	30 22	178·8	192·9	169·9	193·7
		P	30 30	207·1	214·4	190·8	218·2
		G		207·6	214·6	191·6	218·4
9	12 59 16	B	11 27	173·6	274·6	154·3	210·0
		P	14 30	262·6	273·7	142·5	207·5
		G		207·1	268·9	142·8	207·1
10	13 1 39	B	22 26	146·9	195·2	89·8	133·6
		P	35 34	150·7	191·7	91·2	130·8
		G		150·1	191·0	91·2	130·8
11	13 6 28	B	26 59	169·9	179·6	167·0	204·1
		P	38 41	238·7	232·8	154·3	177·5
		G		240·1	234·4	154·8	177·6
14	13 21 19	B	28 50	160·3	150·6	132·1	94·2
		P	34 54	159·7	149·4	133·6	96·0
		G		159·4	149·4	133·6	96·1
15	13 21 57	B	50 11	143·2	113·5	85·3	83·1
		P	54 56	120·6	137·8	100·0	131·8
		G		120·9	137·9	100·4	132·0
18	13 40 56	B	21 17	268·6	236·0	262·7	233·0
		P	25 50	299·3	251·7	254·0	223·3
		G		298·6	254·5	254·0	223·5
19	13 47 42	B	8 54	210·7	320·6	166·2	227·8
		P	13 34	304·0	364·8	162·0	225·1
		G		304·8	362·7	161·8	225·0
20a	13 49 53	B	40 56	99·4	57·9	92·8	42·3
		P	39 53	117·9	96·6	119·6	78·2
		G		117·8	96·7	119·3	78·8
20b*	13 49 53	B	47 38	115·0	132·8	109·8	—
		P	—	127·5	143·7	—	—
		G		128·3	144·1	—	—

Anfangshöhe				Endhöhe				Mittlere Höhe				Nr.
1. Ort	2. Ort	$f_1$	$f_2$	1. Ort	2. Ort	$f_1$	$f_2$	Anfang	$F$	Ende		
in Kilometern												
144.7	112.8	15.6	7.4	89.8	58.6	7.4	3.0	128.8	11.5	74.2	5.2	6
112.5	105.1	3.7	4.4	64.0	51.2	1.7	1.2	108.8	4.1	57.6	1.5	
—	—	—	—	—	—	—	—	109.2	—	59.3	—	
149.9	131.3	17.8	9.6	81.6	72.7	6.7	3.7	140.6	13.7	77.2	5.2	7*
125.8	122.5	5.0	5.6	73.8	70.8	5.1	2.1	124.1	5.3	72.3	3.6	
—	—	—	—	—	—	—	—	126.8	—	71.9	—	
132.1	152.9	9.6	9.6	89.8	112.0	5.9	7.4	142.5	9.6	100.9	6.7	8
152.5	169.6	9.9	11.1	101.1	126.4	6.9	7.4	161.0	10.5	113.8	7.1	
—	—	—	—	—	—	—	—	161.1	—	113.4	—	
118.7	152.1	26.7	23.0	101.7	92.8	18.5	11.1	135.4	24.8	97.3	14.8	9
138.8	152.0	28.2	22.4	93.8	91.8	15.7	10.3	145.4	25.3	92.8	13.0	
—	—	—	—	—	—	—	—	144.8	—	92.4	—	
129.9	133.6	19.3	18.5	85.3	88.3	7.4	7.2	131.8	18.9	86.8	7.8	10
132.8	132.9	13.4	10.2	86.6	86.6	5.8	3.9	132.8	11.8	86.6	4.9	
—	—	—	—	—	—	—	—	132.1	—	86.6	—	
112.0	145.4	8.9	11.1	95.7	89.8	8.2	7.4	128.7	10.0	92.8	7.8	11
157.7	188.7	11.2	13.8	88.2	78.0	5.0	3.7	173.2	12.5	83.1	4.4	
—	—	—	—	—	—	—	—	175.0	—	83.4	—	
121.7	122.4	39.3	78.6	72.7	72.0	17.8	34.1	122.1	59.0	72.4	26.0	14
121.4	121.5	7.9	8.5	73.8	73.8	3.4	5.0	121.5	8.2	73.8	4.2	
—	—	—	—	—	—	—	—	121.6	—	73.9	—	
133.6	90.5	7.4	4.5	77.2	53.4	4.5	3.0	112.0	6.0	65.3	3.8	15
111.2	111.5	4.7	3.9	90.6	82.2	2.7	2.3	111.4	4.3	86.4	2.5	
—	—	—	—	—	—	—	—	111.6	—	88.5	—	
106.9	141.7	8.9	14.1	71.7	67.5	5.9	6.7	124.3	11.5	70.1	6.3	18
122.3	151.4	9.9	15.1	71.0	64.3	4.7	5.0	136.9	12.5	67.7	4.9	
—	—	—	—	—	—	—	—	139.0	—	67.3	—	
109.8	152.1	37.8	32.4	71.2	69.2	19.3	10.4	131.0	35.2	70.2	14.9	19
161.0	174.9	38.5	33.4	69.3	68.7	11.9	8.2	168.0	36.0	69.0	10.1	
—	—	—	—	—	—	—	—	167.1	—	69.1	—	
73.5	54.2	5.2	9.6	55.6	40.8	3.0	6.7	63.8	7.4	48.2	4.9	20a
86.9	90.7	3.7	4.8	73.8	76.0	2.8	4.7	88.8	4.3	74.9	3.8	
—	—	—	—	—	—	—	—	89.1	—	75.5	—	
84.6	95.0	—	—	67.5	—	—	—	89.8	—	(67.5)	—	20b*
93.7	103.2	3.9	3.8	—	—	—	—	98.5	3.9	—	—	
—	—	—	—	—	—	—	—	98.6	—	—	—	



Nr.	Mittlere Wiener Zeit	M	Parall.	Anfangsentfernung		Endentfernung	
				1. Ort	2. Ort	1. Ort	2. Ort
				in Kilometern			
20c*	13 <sup>h</sup> 49 <sup>m</sup> 53 <sup>s</sup>	B	60° 21'	124·7	158·8	91·3	—
		P	—	120·4	156·0	—	—
		G	—	119·3	156·0	—	—
21	13 50 44	B	51 34	117·2	123·2	105·4	124·7
		P	65 54	127·2	127·5	87·1	112·3
		G	—	127·2	127·6	87·5	112·5
23	13 57 17	B	35 36	125·4	175·9	88·3	127·6
		P	52 32	186·6	172·4	122·3	127·2
		G	—	187·0	172·9	122·6	127·5
24*	14 18 37	B	42 53	—	—	—	—
		P	43 50	151·6	208·7	90·4	193·0
		G	—	152·1	208·7	90·5	192·5
1869 August 12.							
28	11 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> 49 <sup>s</sup>	B	27° 34'	116·5	178·1	88·3	136·5
		P	36 34	123·4	162·2	90·8	128·3
		G	—	123·5	162·0	91·4	128·7
29*	11 54 56	B	38 6	181·4	162·2	102·6	176·3
		P	31 16	117·0	156·2	98·8	140·4
		G	—	118·0	155·7	98·9	140·4
30	12 0 7	B	16 6	204·1	117·2	102·4	69·0
		P	39 26	253·3	276·6	115·0	115·0
		G	—	253·2	276·3	115·0	115·0
31	12 3 49	B	15 36	207·8	294·6	166·2	204·8
		P	19 26	208·9	255·1	164·8	210·5
		G	—	206·4	253·0	164·9	210·4
35	12 47 42	B	32 44	181·1	83·8	113·5	56·4
		P	25 37	143·5	119·7	166·5	120·8
		G	—	143·5	119·7	166·3	120·7
36	12 53 41	B	11 50	259·0	400·7	184·8	255·3
		P	16 38	251·6	304·8	179·6	228·8
		G	—	253·2	303·4	180·0	228·5
38	13 24 31	B	19 24	169·9	258·2	136·5	159·5
		P	22 10	154·6	202·4	146·5	188·2
		G	—	(155·2)	202·1	146·7	188·0
39	13 38 41	B	22 45	157·3	181·8	126·1	150·6
		P	28 2	152·0	191·1	125·1	161·4
		G	—	152·3	191·0	125·4	161·1

Anfangshöhe				Endhöhe				Mittlere Höhe				Nr.
1. Ort	2. Ort	$f_1$	$f_2$	1. Ort	2. Ort	$f_1$	$f_2$	Anfang	$F$	Ende		
in Kilometern												
117·2	114·3	—	—	89·0	—	—	—	115·8	—	(89·0)	—	20c*
114·0	112·0	4·1	2·8	—	—	—	—	113·0	3·5	—	—	
—	—	—	—	—	—	—	—	112·8	—	—	—	
101·7	108·3	6·7	4·5	90·5	76·4	5·9	3·0	105·0	5·6	83·5	4·5	21
110·5	112·4	4·0	4·0	74·5	68·9	2·5	1·6	111·5	4·0	71·7	2·1	
—	—	—	—	—	—	—	—	111·5	—	72·5	—	
74·9	129·1	9·6	5·2	42·3	73·5	3·7	2·2	102·0	7·4	57·9	3·0	23
111·9	127·2	5·8	7·1	58·8	73·1	2·1	2·5	119·6	6·5	66·0	2·3	
—	—	—	—	—	—	—	—	120·0	—	65·9	—	
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	24*
148·8	149·8	8·1	5·7	83·8	86·4	6·1	2·5	149·3	6·9	85·1	4·3	
—	—	—	—	—	—	—	—	150·0	—	84·4	—	
1869 August 12												
94·2	105·4	8·9	8·2	80·1	86·1	5·9	5·2	99·8	8·6	83·1	5·6	28
99·9	96·0	8·2	5·9	83·0	79·2	5·0	3·5	98·0	7·1	81·1	4·4	
—	—	—	—	—	—	—	—	98·7	—	81·9	—	
154·1	113·2	20·8	8·2	96·5	118·2	9·6	15·2	133·7	14·5	107·4	12·4	29*
98·3	109·2	8·0	6·5	93·0	92·7	7·0	4·8	103·8	7·3	92·9	5·9	
—	—	—	—	—	—	—	—	104·0	—	93·4	—	
141·7	72·0	19·3	43·0	63·8	40·1	4·5	12·6	106·9	31·2	52·0	8·6	30
176·6	171·2	22·5	19·8	72·0	67·3	3·5	3·3	173·9	21·2	69·7	3·4	
—	—	—	—	—	—	—	—	176·2	—	70·0	—	
182·5	213·7	28·9	28·2	149·1	143·2	16·3	13·4	198·1	28·6	146·2	14·9	31
181·2	184·8	25·8	21·0	147·9	146·9	17·2	13·1	183·0	23·4	147·4	15·2	
—	—	—	—	—	—	—	—	183·5	—	147·3	—	
132·1	74·2	46·0	65·7	68·3	48·2	15·6	16·3	103·2	55·7	58·3	16·0	35
104·5	105·9	5·6	7·0	100·3	102·6	6·5	9·4	105·2	6·3	101·5	8·0	
—	—	—	—	—	—	—	—	105·6	—	101·6	—	
158·8	208·5	34·1	40·1	97·9	115·8	17·1	11·9	183·7	37·1	106·9	14·5	36
154·2	168·8	28·0	25·1	94·8	103·2	12·7	10·6	161·5	26·7	99·0	11·7	
—	—	—	—	—	—	—	—	161·2	—	98·7	—	
109·8	135·6	17·1	27·4	84·6	71·2	8·9	9·6	122·7	22·3	77·9	9·3	38
99·7	106·0	12·1	9·6	91·0	84·7	9·2	6·5	102·9	10·9	87·9	7·9	
—	—	—	—	—	—	—	—	102·8	—	88·6	—	
146·2	132·1	14·1	10·4	112·0	100·2	8·9	6·7	139·2	12·3	106·1	7·8	39
141·1	139·3	13·8	10·8	111·3	107·0	9·0	6·6	140·2	12·3	109·2	7·8	
—	—	—	—	—	—	—	—	140·3	—	109·2	—	

Nr.	Mittlere Wiener Zeit	M	Parall.	Anfangsentfernung		Endentfernung	
				1. Ort	2. Ort	1. Ort	2. Ort
				in Kilometern			
1869 August 13.							
43	12 <sup>h</sup> 4 <sup>m</sup> 11 <sup>s</sup>	B	34° 40'	172·9	194·4	149·9	175·9
		P	39 38	169·4	194·1	140·4	173·3
		G		170·7	194·1	141·0	173·4
47	12 49 27	B	49 7	233·7	192·9	221·1	167·0
		P	53 32	239·4	178·5	223·8	163·0
		G		239·8	179·2	224·0	163·5
49	13 13 16	B	53 35	79·4	77·2	75·7	57·9
		P	57 11	81·6	86·8	81·5	76·8
		G		81·6	86·6	81·8	77·0
50	13 16 25	B	38 24	159·5	101·7	152·1	92·0
		P	46 1	171·3	101·4	152·9	92·6
		G		171·0	102·3	152·9	92·7
54*	13 53 7	B	53 2	—	—	—	—
		P	75 23	124·3	124·0	75·7	102·2
		G		124·3	123·8	75·7	102·3
56	14 7 10	B	98 30	72·7	70·5	80·1	60·1
		P	105 12	87·6	54·6	74·6	55·7
		G		88·4	55·1	74·9	55·8
B.*							
1869 August 11.							
2	12 <sup>h</sup> 5 <sup>m</sup> 26 <sup>s</sup>	B	51° 26'	132·8	103·1	207·0	122·4
		P	38 30	139·8	105·4	173·6	111·2
		G		139·8	105·4	173·6	111·3
12	13 1 23	B	71 26	100·9	122·4	80·1	73·5
		P	77 38	98·0	90·8	99·0	75·4
		G		98·3	91·2	98·6	75·2
13*	13 16 48	B	58 11	—	—	—	—
		P	—	118·5	162·5	—	—
		G		118·5	162·5	—	—
16	13 25 43	B	37 48	187·0	229·3	188·5	230·0
		P	37 34	185·4	231·8	191·9	232·4
		G		185·4	231·6	192·6	232·5



Anfangshöhe				Endhöhe				Mittlere Höhe				Nr.
1. Ort	2. Ort	$f_1$	$f_2$	1. Ort	2. Ort	$f_1$	$f_2$	Anfang	$F$	Ende		
in Kilometern												
1869 August 13.												
133·6	133·6	8·2	7·4	95·0	83·8	5·9	3·7	133·6	7·8	89·4	4·8	43
131·0	133·7	8·1	7·1	88·7	82·9	4·8	3·5	132·3	7·6	85·8	4·2	
—	—	—	—	—	—	—	—	131·5	—	85·1	—	
91·3	121·0	3·0	6·7	63·1	77·9	2·2	3·7	106·2	4·9	70·5	3·0	47
94·3	111·7	5·8	5·1	63·9	75·9	5·1	3·2	103·0	5·5	69·9	4·2	
—	—	—	—	—	—	—	—	106·5	—	73·0	—	
57·9	50·5	2·2	5·2	49·0	33·3	1·5	2·2	54·2	3·7	41·2	1·9	49
59·7	57·1	2·1	1·9	52·4	44·6	1·6	1·5	58·4	2·0	48·5	1·6	
—	—	—	—	—	—	—	—	58·2	—	48·1	—	
51·2	69·7	2·2	4·5	39·3	41·6	1·5	3·0	60·5	3·4	40·5	2·3	50
55·6	69·3	2·1	4·7	39·4	42·0	1·2	2·4	62·5	3·4	40·7	1·8	
—	—	—	—	—	—	—	—	64·6	—	40·5	—	
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	54*
102·5	100·7	4·2	4·3	62·2	60·8	5·0	4·8	101·6	4·3	61·5	5·3	
—	—	—	—	—	—	—	—	101·8	—	61·6	—	
25·2	49·7	1·5	3·7	23·0	27·5	0·7	1·5	37·5	2·6	25·3	1·1	56
30·9	38·4	0·4	1·2	21·2	25·3	0·4	0·9	34·7	0·8	23·3	0·7	
—	—	—	—	—	—	—	—	35·7	—	23·4	—	
B.*												
1869 August 11.												
82·4	83·1	11·1	6·7	92·0	89·8	17·8	10·4	82·8	8·9	90·9	14·1	2
87·0	85·2	2·7	3·7	78·0	81·3	3·0	5·1	86·1	3·2	79·7	4·1	
—	—	—	—	—	—	—	—	86·1	—	79·8	—	
78·6	99·4	1·5	8·2	52·7	63·1	0·7	3·0	89·0	4·9	57·9	1·9	12
76·5	73·9	1·8	1·9	64·4	64·8	1·1	1·8	75·2	1·9	64·6	1·5	
—	—	—	—	—	—	—	—	75·4	—	64·8	—	
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	13*
99·5	100·7	3·8	2·6	—	—	—	—	100·1	3·2	—	—	
—	—	—	—	—	—	—	—	99·5	—	—	—	
103·9	89·0	5·9	4·5	63·8	43·0	3·7	2·2	96·5	5·2	53·4	3·0	16
102·7	93·0	5·9	4·1	65·0	43·2	3·6	1·8	97·9	5·0	54·1	2·7	
—	—	—	—	—	—	—	—	99·7	—	56·8	—	

Nr.	Mittlere Wiener Zeit	M	Parall.	Anfangsentfernung		Endentfernung	
				1. Ort	2. Ort	1. Ort	2. Ort
				in Kilometern			
17	13 <sup>h</sup> 38 <sup>m</sup> 44 <sup>s</sup>	B	88° 36'	96·5	94·2	101·7	72·7
		P	85 8	86·7	70·6	97·5	61·5
		G		87·0	70·0	97·6	61·5
22*	13 57 17	B	—	172·1	—	161·0	—
		P	—	—	—	—	
		G	—	—	—	—	
25	14 27 48	B	38 54	173·6	123·9	146·9	92·8
		P	48 54	175·1	122·6	147·0	94·0
		G		175·1	122·5	147·0	93·6
26	14 35 32	B	35 14	126·9	126·1	112·8	111·3
		P	40 4	133·4	118·6	118·6	104·1
		G		133·4	118·7	118·6	104·4
1869 August 12.							
27	11 <sup>h</sup> 23 <sup>m</sup> 18 <sup>s</sup>	B	47° 14'	57·1	69·7	43·8	65·3
		P	53 38	99·8	86·5	81·3	84·7
		G		100·0	86·9	81·8	85·2
32	12 14 57	B	8 50	411·8	333·2	227·1	217·4
		P	12 24	368·3	313·7	297·0	246·0
		G		368·6	313·7	295·5	246·9
33	12 38 37	B	21 56	127·6	181·8	145·4	203·3
		P	18 46	124·8	177·9	146·8	200·9
		G		124·9	177·8	147·2	200·7
34	12 40 6	B	35 32	118·0	132·1	103·1	92·8
		P	44 48	120·4	127·3	94·8	103·0
		G		120·3	127·3	95·0	103·1
37	12 55 7	B	29 22	157·3	146·2	116·5	92·0
		P	41 43	158·3	138·7	116·5	90·8
		G		158·2	138·7	116·5	90·8
1869 August 13.							
40	11 <sup>h</sup> 21 <sup>m</sup> 22 <sup>s</sup>	B	31° 24'	136·5	186·3	136·5	167·0
		P	30 46	102·7	142·8	118·4	147·9
		G		104·0	142·2	119·4	147·9

Anfangshöhe				Endhöhe				Mittlere Höhe				Nr.
1. Ort	2. Ort	$f_1$	$f_2$	1. Ort	2. Ort	$f_1$	$f_2$	Anfang	$F$	Ende	$F$	
in Kilometern												
38·6	54·2	1·5	5·9	30·4	37·1	0·7	3·7	46·4	3·7	33·8	2·2	17
34·4	40·5	0·5	0·8	29·2	31·6	0·4	1·3	37·5	0·7	30·4	0·9	
—	—	—	—	—	—	—	—	38·0	—	30·6	—	
141·0	—	14·8	—	115·0	—	10·4	—	(141·0	14·8	(115·0	10·4)	22*
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
103·9	105·4	10·4	20·0	82·4	81·6	6·7	12·6	104·7	15·2	82·0	9·7	25
104·6	104·4	4·2	6·5	82·3	83·0	2·4	4·2	104·5	5·4	82·7	3·3	
—	—	—	—	—	—	—	—	104·5	—	82·5	—	
94·2	106·1	6·7	5·9	66·8	85·3	4·5	4·5	100·2	6·3	76·1	4·5	26
93·0	99·7	4·8	5·1	70·4	80·0	3·1	4·1	96·4	5·0	75·2	3·6	
—	—	—	—	—	—	—	—	96·9	—	75·8	—	

1869 August 12.

48·2	66·0	5·9	3·0	39·3	57·1	3·7	2·2	57·1	4·5	48·2	3·0	27
83·9	81·6	3·1	3·6	73·7	73·6	2·5	2·5	82·8	3·4	73·7	2·5	
—	—	—	—	—	—	—	—	83·3	—	74·4	—	
172·1	157·3	51·9	43·0	62·3	86·1	11·9	14·8	164·7	47·5	74·2	13·4	32
152·3	151·8	30·0	35·8	83·3	98·0	11·3	16·8	152·1	32·9	90·6	14·1	
—	—	—	—	—	—	—	—	154·2	—	94·4	—	
89·8	89·0	9·6	6·7	74·9	72·7	9·6	6·7	89·4	8·2	73·8	8·2	33
88·1	86·9	9·6	6·4	75·6	71·4	9·3	6·3	87·5	8·0	73·5	7·8	
—	—	—	—	—	—	—	—	87·4	—	74·0	—	
112·0	118·7	7·4	9·6	94·2	75·7	4·5	5·2	115·4	8·6	85·0	4·9	34
114·0	114·8	6·3	6·0	86·7	84·2	3·9	3·4	114·4	6·2	85·5	3·7	
—	—	—	—	—	—	—	—	114·4	—	86·0	—	
115·8	123·2	14·8	14·1	64·5	66·8	5·2	5·2	119·5	14·5	65·7	5·2	37
115·9	116·8	7·1	8·3	65·0	65·6	2·6	3·5	116·4	7·7	65·3	3·1	
—	—	—	—	—	—	—	—	116·3	—	65·1	—	

1869 August 13.

105·4	122·4	11·1	10·4	91·3	97·9	8·9	8·2	113·9	10·8	94·6	8·6	40
79·0	93·5	5·9	4·9	79·1	86·7	5·7	4·8	86·3	5·4	82·9	5·3	
—	—	—	—	—	—	—	—	85·3	—	83·7	—	



Nr.	Mittlere Wiener Zeit	M	Parall.	Anfangsentfernung		Endentfernung	
				1. Ort	2. Ort	1. Ort	2. Ort
				in Kilometern			
41	11 <sup>h</sup> 23 <sup>m</sup> 32 <sup>s</sup>	B	34° 20'	123·2	128·4	97·9	135·0
		P	33 12	109·5	134·9	98·3	136·1
		G		110·3	134·9	98·3	136·0
42	11 36 57	B	55 55	247·1	256·7	365·8	215·9
		P	46 32	117·3	118·2	152·5	111·9
		G		117·5	118·6	152·3	112·6
44	12 16 40	B	69 16	164·0	111·3	171·4	88·3
		P	82 16	168·2	148·7	171·8	89·1
		G		169·7	150·5	171·8	89·1
45	12 31 45	B	38 30	170·7	115·8	167·0	98·7
		P	36 22	177·1	127·5	182·7	123·3
		G		177·2	127·6	182·8	123·7
46*	12 47 9	B	65 8	109·1	83·8	108·3	52·4
		P	63 14	111·5	92·0	121·4	75·8
		G		111·3	92·1	121·7	76·6
48	12 56 41	B	46 0	87·6	158·1	34·9	115·8
		P	76 38	113·6	153·8	47·4	111·1
		G		113·6	153·8	47·8	111·3
51	13 30 53	B	65 32	76·4	53·4	65·3	31·2
		P	90 24	70·9	69·6	55·4	50·6
		G		71·0	69·6	56·0	51·0
52*	13 43 40	B	31 46	—	—	77·9	117·2
		P	34 20	148·1	132·5	131·6	126·9
		G		144·1	129·0	131·2	126·2
53	13 49 39	B	77 24	168·4	115·8	126·9	101·7
		P	84 50	172·8	107·1	162·7	98·1
		G		173·2	107·3	163·1	98·2
55	13 58 36	B	38 0	95·0	116·5	83·8	112·8
		P	39 16	107·0	122·4	98·7	119·8
		G		107·1	122·4	98·6	119·9

Anfangshöhe				Endhöhe				Mittlere Höhe				Nr.
1. Ort	2. Ort	$f_1$	$f_2$	1. Ort	2. Ort	$f_1$	$f_2$	Anfang	$F$	Ende	$F$	
in Kilometern												
118.7	96.5	9.6	5.2	90.5	90.5	5.9	4.5	107.6	7.4	90.5	5.2	41
105.8	101.1	6.8	5.1	90.7	91.3	6.4	4.5	103.5	6.0	91.0	5.5	
—	—	—	—	—	—	—	—	104.0	—	91.2	—	
170.7	138.0	41.6	28.9	184.8	167.7	56.4	43.0	154.4	35.3	176.3	49.7	42
81.0	77.0	2.7	2.5	75.2	86.4	2.5	4.2	79.0	2.6	80.8	3.4	
—	—	—	—	—	—	—	—	85.1	—	82.3	—	
90.5	85.3	1.5	5.2	80.9	80.9	1.5	3.7	87.9	3.4	80.9	2.6	44
92.7	113.7	3.6	3.1	81.3	81.9	2.0	2.9	103.2	3.4	81.6	2.5	
—	—	—	—	—	—	—	—	106.1	—	81.8	—	
76.4	60.8	4.5	9.6	67.5	47.5	3.7	5.9	68.6	7.1	57.5	4.8	45
79.4	74.8	3.3	4.5	70.6	59.8	2.9	4.0	77.1	3.9	65.2	3.5	
—	—	—	—	—	—	—	—	77.9	—	65.5	—	
79.4	74.0	2.2	6.7	63.1	43.8	1.5	1.0	76.7	4.5	53.5	2.3	46*
82.0	81.7	2.0	2.5	71.2	63.3	1.5	2.6	81.9	2.3	67.3	2.1	
—	—	—	—	—	—	—	—	81.5	—	66.8	—	
80.9	112.0	13.4	3.0	20.7	41.6	2.2	0.7	96.5	8.2	31.2	1.5	48
104.8	108.7	5.2	3.8	28.6	39.7	1.3	0.4	106.8	4.5	34.2	0.9	
—	—	—	—	—	—	—	—	106.2	—	32.0	—	
60.1	43.8	3.7	6.7	43.0	23.0	1.5	2.2	52.0	5.2	33.0	1.9	51
56.1	57.4	1.5	1.6	36.5	37.2	0.6	0.7	56.8	1.6	36.9	0.7	
—	—	—	—	—	—	—	—	56.7	—	37.3	—	
—	—	—	—	50.5	33.8	—	—	—	—	67.2	13.0	52*
105.6	98.8	6.2	6.7	85.4	90.7	4.8	5.3	102.2	6.5	88.1	5.1	
—	—	—	—	—	—	—	—	99.3	—	87.6	—	
96.5	106.9	2.2	4.5	65.3	89.8	0.7	3.0	101.7	3.4	77.6	1.9	53
98.7	98.8	2.5	3.2	84.1	86.5	2.0	2.7	98.8	2.9	85.3	2.4	
—	—	—	—	—	—	—	—	98.8	—	85.8	—	
90.5	96.5	11.9	5.2	82.4	89.8	10.4	5.2	93.5	8.6	86.1	7.8	55
102.5	100.9	5.6	4.7	97.0	95.7	5.3	4.2	101.7	5.2	96.4	4.8	
—	—	—	—	—	—	—	—	101.7	—	96.4	—	

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Downloaded from The Biodiversity Heritage Library. http://www.biodiversitylibrary.org/; www.bioloszentrum.de

## Bemerkungen.

Nr. 7. In Wien wurde das Meteor selbst nicht gesehen, sondern nur sein lang anhaltender Schweif, dessen Mitte als Nr. 26 in  $\alpha = 7^{\circ}36'$  und  $\delta = +26^{\circ}54'$  eingestellt wurde. Mit dem bekannten Radiationspunkte (I) konnte die Bahnlage für Wien ermittelt werden, die jedoch mit der in Brünn gesehenen so nahe zusammenfällt, daß eine Berechnung nach der Quételet-Bessel'schen Methode illusorisch wird. Aus der Kombination Wien—Melk ergibt sich in ziemlich guter Übereinstimmung mit den obigen Werten für die Entfernungen und Höhen nach den Beobachtungen in Melk:

$$\begin{array}{ll} r = 254.5 \text{ km} & r_2 = 165.8 \text{ km} \\ H = 165.5 & H_2 = 90.5 \end{array}$$

Nr. 20. Obwohl in Brünn nur der Anfangspunkt beobachtet wurde, kann damit doch die Bahnlage berechnet werden, da der Radiant (II) bekannt ist. Es ließen sich daher nach der Quételet-Bessel'schen Methode auch aus den Kombinationen Wien—Brünn und Melk—Brünn, allerdings bloß einseitig, Endhöhen ableiten, die, um dies anzudeuten, eingeklammert sind.

Nr. 24. läßt sich wegen zu ungünstiger Bahnlage nach der Quételet-Bessel'schen Methode nicht berechnen.

Nr. 29. Bei der Drehung der Melker Beobachtungen in den Radianten ist ein Versehen vorgefallen. In der Abhandlung soll S. 327 statt der dort stehenden Werte  $\Omega = 83^{\circ}14'$   $\log \operatorname{tg} J = 0.4380$  gesetzt werden, mit welchen die Rechnung hier von neuem durchgeführt ist.

Nr. 54. Dieses Meteor kann als stationär in Wien nach der Quételet-Bessel'schen Methode nicht berechnet werden.

Nr. 13. In Brünn bloß der Anfangspunkt notiert: eine Berechnung nach der Quételet-Bessel'schen Methode infolgedessen nicht ausführbar.

Nr. 22. In Melk bloß die Bahnlage, nicht der Anfangs- und Endpunkt beobachtet. Das Meteor läßt sich daher nur, jedoch auch bloß einseitig, nach der Quételet-Bessel'schen Methode berechnen.

Nr. 46. Bei der Berechnung der Entfernungen und Höhen für Brünn hatte sich ein Fehler eingeschlichen, der hier verbessert ist.

Nr. 52. Die Anfangshöhe in Wien wegen zu geringen Winkels zwischen Visurlinie und Bahntrasse nach der Quételet-Bessel'schen Methode nicht zu berechnen.

---

Die Diskussion der voranstehenden Tabellen ist in mancher Beziehung sehr instruktiv.

Bei den Bahnen der ersten Abteilung ( $A^*$ ) hatte ich erwartet, daß durch die Korrektur der in den Radianten gedrehten Bahnen ( $R$ ) auf Gleichzeitigkeit ( $G$ ) diese sich den beobachteten in der Regel wieder nähern würden. Dies ist nun nicht der Fall; sie entfernen sich im Gegenteile häufig noch um sehr bedeutende Quantitäten in derselben Richtung von ihnen, wie z. B. Nr. 1, 5a, 9, 15, 18 u. s. w. Dabei bemerkt man auch, daß die Korrektur auf Gleichzeitigkeit im allgemeinen größere Änderungen beansprucht als die Drehung in den Radianten. Dies mag wohl zum Teile dem Umstande zuzuschreiben sein, daß man bei starken Fehlern die Identität der Meteore und den Radianten nicht mehr erkennt, ist aber zum Teile jedenfalls auch persönlichen Auffassungsunterschieden des Aufleuchtens und Verlöschtens der Meteore zuzuschreiben.

Vergleichen wir die Höhenberechnungen nach der Quételet-Bessel'schen Methode mit den Höhenberechnungen aus der beobachteten Parallaxe und fassen wir zuerst die rechnermäßige Unsicherheit des Resultates ins Auge, so steht bei größeren Parallaxen (über  $30^\circ$ ) die erstgenannte Methode der anderen häufig sehr weit nach. Wenn wir selbst von den Meteoren Nr. 7 (Wien—Brünn), 24, 52 und 54 absehen, wo die Quételet-Bessel'sche Methode überhaupt versagt, übersteigt die Maximaländerung, die ein Fehler von  $1^\circ$  in der ermittelten Höhe hervorzubringen vermag, bei der Berechnung nach ihr diejenige, die ein gleicher Fehler bei der Berechnung aus der Parallaxe erzeugen kann, noch in den »mittleren Höhen« bei nachstehenden 11 Meteoren etwa um das Dreifache und mehr:

Nummer	Anfang			Ende		
	Par.	Max. Einfl.		Par.	Max. Einfl.	
		B	P		B	P
3	42°6	22·3 km	6·1 km	36°6	14·5 km	5·4 km
5 <sup>c</sup>	56·2	20·4	4·2	72·7	17·8	2·5
6	50·1	11·5	4·1	70·	5·2	1·5
14	28·8	59·0	8·2	34·9	26·0	4·2
35	32·7	55·7	6·3	—	—	—
56	98·5	2·6	0·8	—	—	—
2	51·4	8·9	3·2	38·5	14·1	4·1
17	88·6	3·7	0·7	85·1	2·2	0·9
25	38·9	15·2	5·4	48·9	9·7	3·3
42	55·9	35·3	2·6	46·5	49·7	3·4
51	65·5	5·2	1·6	90·4	1·9	0·7

Bei kleineren Parallaxen, etwa bis  $30^\circ$ , halten sich die Maximaländerungen bei beiden Methoden öfters beiläufig die Wage und es werden hin und wieder wie bei Nr. 8 und 9 die bei der Berechnung aus der Parallaxe sogar eine Kleinigkeit größer.

Aufsteigende Meteore kommen bei der Quételet-Bessel'schen Methode zwei vor: Nr. 2 und Nr. 42. Das letztere gehört auch bei der Berechnung aus der Parallaxe zu den ansteigenden, verwandelt sich aber bei der Korrektur auf Gleichzeitigkeit in ein fallendes. Bei der Berechnung durch Korrektur auf Gleichzeitigkeit wird 5<sup>a</sup> ein ansteigendes Meteor; es beschränkt sich aber das Ansteigen bei einer großen Unsicherheit des Resultates auf die sehr geringe Größe von  $0·7$  km, kann also unberücksichtigt bleiben. Da nun, wie weiter unten erörtert werden wird, die Identität der Meteore Nr. 42 sehr fraglich ist, kann man das Ergebnis dieser Reihe korrespondierender Beobachtungen dahin zusammenfassen, daß bei der Berechnung aus der beobachteten Parallaxe und durch Korrektur auf Gleichzeitigkeit, unter den 55 Meteoren kein ansteigendes sich vorfindet und bei der Berechnung nach der Quételet-Bessel'schen Methode nur eines unter ihnen vorkommt, welches ein mäßiges Aufsteigen zu zeigen scheint.

In der folgenden Tabelle sind die Differenzen übersichtlich zusammengestellt, welche sich bei der Bestimmung der Höhe der Anfangs- und Endpunkte nach der Quételet-Bessel'schen und nach der Parallaxenmethode ergeben, je nachdem man die Höhen aus den Beobachtungen am ersten oder zweiten Orte ableitet; ferner die Differenzen, welche in den mittleren Anfangs- und Endhöhen einerseits zwischen



der Quételet-Bessel'schen und der Parallaxenmethode, andererseits zwischen der letztgenannten und der Methode der Reduktion auf Gleichzeitigkeit stattfinden.

A\*

Nummer	Diff. (1. Ort—2. Ort)				Diff. (B—P)		Diff. (P—G)	
	Anfang		Ende		Anfang	Ende	Anfang	Ende
	B	P	B	P				
1	— 29·7 km	+ 4·8 km	— 26·0 km	+ 4·6 km	+ 1·3 km	+ 0·6 km	+ 0·1 km	— 0·1 km
3	+ 28·2	+ 7·9	+ 7·4	+ 0·8	+ 33·3	+ 10·3	— 0·4	— 0·9
4	+ 6·0	— 6·2	+ 0·8	— 10·6	— 15·3	— 13·0	— 1·4	— 1·3
5 <sup>a</sup>	+ 4·4	— 2·6	+ 9·7	— 4·0	— 12·2	— 26·1	+ 1·6	— 0·5
5 <sup>b</sup>	— 6·7	— 4·3	+ 14·9	+ 11·0	8·7	+ 18·7	— 0·7	+ 0·1
5 <sup>c</sup>	— 20·1	— 2·5	— 23·8	— 3·1	— 29·4	(+ 8·6)	+ 0·1	+ 1·6
6	+ 31·9	+ 7·4	+ 31·2	+ 12·8	(+ 20·0)	(+ 16·6)	— 0·4	— 1·7
7	+ 18·6	+ 3·3	+ 8·9	+ 3·0	+ 16·5	+ 4·9	— 2·7	+ 0·4
8	— 20·8	— 17·1	— 22·2	— 25·5	(— 18·5)	(— 12·9)	— 0·1	+ 0·4
9	— 33·4	— 13·2	+ 8·9	+ 0·0	(— 10·0)	+ 4·5	+ 0·6	+ 0·4
10	— 3·7	— 0·1	— 3·0	— 0·0	— 1·0	+ 0·2	+ 0·7	0·0
11	— 33·4	— 31·0	+ 5·9	+ 10·2	[— 44·5]	+ 9·7	— 1·8	— 0·3
14	— 0·7	— 0·1	+ 0·7	0·0	+ 0·6	— 1·4	— 0·1	— 0·1
15	+ 43·1	— 0·3	+ 23·8	+ 8·4	(+ 0·6)	— 21·1	— 0·2	— 2·1
18	— 34·8	— 29·1	+ 5·2	+ 6·7	(— 12·6)	+ 2·4	— 2·1	+ 0·4
19	— 42·3	— 13·9	+ 2·9	+ 0·6	[— 37·0]	+ 1·0	+ 0·9	— 0·1
20 <sup>a</sup>	+ 19·3	— 3·8	+ 14·8	— 2·2	— 25·0	— 26·7	— 0·3	— 0·6
20 <sup>b</sup>	— 10·4	— 9·5	—	—	— 8·7	—	— 0·1	—
20 <sup>c</sup>	+ 2·9	+ 2·0	—	—	+ 2·8	—	+ 0·2	—
21	— 6·6	— 1·9	+ 14·1	+ 5·6	— 6·5	+ 11·8	0·0	— 0·8
23	— 54·2	— 15·3	— 31·2	— 14·3	[— 17·6]	[— 8·1]	— 0·5	+ 0·1
24	—	— 1·0	—	— 2·6	—	—	— 0·7	+ 0·7
28	— 11·2	+ 3·9	— 6·0	+ 3·8	+ 1·8	+ 2·0	— 0·7	— 0·8
29	+ 40·9	— 10·9	— 21·7	+ 0·3	(+ 29·9)	+ 14·5	— 0·2	+ 0·5
30	+ 69·7	+ 5·4	+ 23·7	+ 4·7	[— 67·0]	(— 17·7)	— 2·3	— 0·3
31	— 31·2	— 3·6	+ 5·9	+ 1·0	+ 15·1	— 1·2	— 0·5	+ 0·1
35	+ 57·9	— 1·4	+ 20·1	— 2·3	[— 2·0]	(— 43·2)	— 0·4	— 0·1
36	— 49·7	— 14·6	— 17·9	— 8·4	(+ 22·2)	+ 7·9	+ 0·3	+ 0·3
38	— 25·7	— 6·3	+ 13·4	+ 6·3	+ 19·8	— 10·0	+ 0·1	— 0·7
39	+ 14·1	+ 1·8	+ 11·8	+ 4·3	— 1·0	— 3·1	— 0·1	0·0
43	0·0	— 2·7	+ 11·2	+ 5·8	+ 1·3	+ 3·6	+ 0·8	+ 0·7
47	29·7	— 17·4	— 14·8	— 12·0	(+ 3·2)	+ 0·6	— 3·5	— 3·1
49	+ 7·4	+ 2·6	+ 5·7	+ 7·8	— 4·2	— 7·3	+ 0·2	+ 0·4
50	— 18·5	— 13·7	+ 2·3	— 2·6	— 2·0	— 0·2	— 2·1	+ 0·2
54	—	+ 1·8	—	+ 1·4	—	—	— 0·2	— 0·1
56	— 24·5	— 7·5	— 4·5	— 4·1	+ 2·8	+ 2·0	— 1·0	— 0·1

B\*

Nummer	Diff. (1. Ort—2. Ort)				Diff. (B—P)		Diff. (P—G)	
	Anfang		Ende		Anfang	Ende	Anfang	Ende
	B	P	B	P				
2	— 0.7 km	+ 1.8 km	+ 2.2 km	— 3.3 km	— 3.3 km	+ 11.2 km	0.0 km	— 0.1 km
12	— 20.8	+ 2.6	— 10.4	— 0.4	+ 13.8	— 6.7	— 0.2	— 0.2
13	—	— 1.2	—	—	—	—	+ 0.6	—
16	+ 14.9	+ 9.7	+ 20.8	+ 21.8	— 1.4	— 7.7	— 1.8	— 2.7
17	— 15.6	— 6.1	— 6.7	— 2.4	+ 8.9	+ 3.4	— 0.5	— 0.2
25	— 1.5	+ 0.2	+ 0.8	— 0.7	+ 0.2	0.7	0.0	+ 0.2
26	— 11.9	— 6.7	— 18.5	— 9.6	+ 3.8	+ 0.9	— 0.5	— 0.6
27	— 17.8	+ 2.3	— 17.8	+ 0.1	— 25.7	— 25.5	— 0.5	— 0.7
32	+ 14.8	+ 0.5	— 23.8	— 14.7	+ 12.6	— 16.4	— 2.1	— 3.8
33	+ 0.8	+ 1.2	+ 2.2	+ 4.2	+ 1.9	+ 0.3	+ 0.1	— 0.5
34	— 6.7	— 0.8	+ 18.5	+ 2.5	+ 1.0	— 0.5	0.0	— 0.5
37	— 7.4	— 0.9	— 2.3	— 0.6	+ 3.1	+ 0.4	+ 0.1	+ 0.2
40	— 17.0	— 14.5	— 6.6	— 7.6	+ 27.6	+ 11.7	+ 1.0	— 0.8
41	+ 22.2	+ 4.7	0.0	— 0.6	+ 4.1	— 0.5	— 0.5	— 0.2
42	+ 32.7	+ 4.0	+ 17.1	— 11.2	[+ 75.4]	[+ 95.5]	[— 6.1]	[— 1.5]
48	+ 5.2	— 21.0	0.0	— 0.6	— 15.3	— 0.7	— 2.9	— 0.2
45	+ 15.6	+ 4.6	+ 20.0	+ 10.8	— 8.5	— 7.7	— 0.8	— 0.3
46	+ 5.4	+ 0.3	+ 19.3	+ 7.9	— 5.2	— 13.8	+ 0.4	+ 0.5
44	— 31.1	— 3.9	— 20.9	11.1	— 10.3	— 3.0	+ 0.6	+ 2.2
51	+ 16.3	— 1.3	+ 20.0	— 0.7	— 4.8	— 3.9	+ 0.1	— 0.4
52	—	+ 6.8	— 33.3	— 5.3	—	(— 20.9)	+ 2.9	+ 0.5
53	— 10.4	— 0.1	— 24.5	— 2.4	+ 2.9	— 7.7	0.0	— 0.5
55	— 6.0	+ 1.6	— 7.4	+ 1.3	— 8.2	— 10.3	0.0	0.0

Die zahlreichen, unerwartet großen Differenzen, die bei der Quételet-Bessel'schen Methode zwischen den Höhen sich zeigen, je nachdem man sie aus den Beobachtungen am ersten oder zweiten Orte berechnet, bekunden deutlich, daß diese Methode zu keinem verlässlichen Resultate führt, so lange die Beobachtungen mit so großen Fehlern behaftet sind, wie die bisherigen Meteorbeobachtungen mit freiem Auge und bestätigen in vollem Maße das, was bei der Besprechung dieser Methode auseinandergesetzt wurde. Bei der Höhenberechnung aus der beobachteten Parallaxe kommen wohl hin und wieder Differenzen von ähnlicher Größe, aber fast ausnahmslos nur bei mäßigen Parallaxen, etwa nur bis  $30^\circ$ , vor (wie bei Nr. 8, 11, 18), wo die Resultate wegen der großen, Grade betragenden Beobachtungsfehler der Natur der Sache nach mit einer bedeutenden Unsicherheit behaftet sein müssen. Übrigens sind auch bei dieser Methode die Differenzen noch immer bedeutend genug, um darzutun, daß unsere Kenntnis über die Höhe des Erscheinens und Verschwindens der Meteore noch auf sehr schwachen Füßen ruht und weitere zahlreiche korrespondierende Beobachtungen sehr wünschenswert wären, um für eine Reihe von hochinteressanten und wichtigen Untersuchungen eine sichere Basis zu schaffen.

Eine weitere, sehr beachtenswerte Erscheinung, die bei einer näheren Betrachtung nicht entgehen kann, ist die, daß die Unterschiede zwischen den aus dem ersten und zweiten Orte berechneten Höhen in beiden Methoden bei den in den Radianten gedrehten Positionen (Gruppe A\*) erheblich größer ausfallen als bei jenen, wo man die Beobachtungen der Rechnung unmittelbar zu Grunde legte (Gruppe B\*). Die Ursache dafür kann wohl nur darin gesucht werden, daß das Drehen in den Radianten die Ungleichzeitigkeit der Wahrnehmungen vergrößert. Es wird dadurch sehr problematisch, ob durch diese theoretisch zweifellos berechtigte Operation das Resultat an Sicherheit gewinnt.

Die Unsicherheit der Höhenbestimmungen nach der Quételet-Bessel'schen Methode spiegelt sich auch in den großen Unterschieden ab, die sich in den nach ihr und der Parallaxenmethode berechneten mittleren Höhen vorfinden und es selbst bei dem nicht unbedeutendem Materiale sehr schwierig machen, der Frage näher zu treten, wie die Mittelwerte der nach beiden Methoden erhaltenen Höhen einer größeren Anzahl korrespondierender Beobachtungen sich gegen einander verhalten. Um hierbei zu einem mindestens einigermaßen befriedigende Resultate zu gelangen, wollen wir uns zuerst über die Zuverlässigkeit der auffallendsten Differenzen zu orientieren suchen.

Einige der Beobachtungen verdienen ein so geringes Vertrauen, daß sie auf jeden Fall ausgeschaltet werden müssen. Es sind dies:

- Nr. 11. Die großen Differenzen, die nach beiden Methoden in den Anfangshöhen vorkommen, zeugen von ungewöhnlich großen Auffassungsunterschieden, wie dies auch die bedeutenden Korrekturen andeuten, welche zur Reduktion auf Gleichzeitigkeit erfordert werden. Bei der sehr mäßigen Parallaxe sind daher die berechneten Höhen ganz unzuverlässig.
- Nr. 19. Bei der sehr geringen Parallaxe von nur  $8^\circ 9'$  steigt die Unsicherheit der aus den Wiener Beobachtungen berechneten Anfangshöhen bei beiden Methoden auf  $34\%$  respektive  $24\%$  und auch bei den Melker Höhen in runder Summe auf  $20\%$ .<sup>1</sup>
- Nr. 23. Die ausnahmsweise großen Differenzen die in beiden Methoden, sowohl in den Anfangs- als auch in den Endpunkten auftreten, sind bei der immerhin erheblichen Parallaxe von  $35^\circ 6'$  respektive  $52^\circ 55'$  so auffallend, daß ich die Identität der Meteore zu bezweifeln geneigt bin.
- Nr. 30. Wegen der äußerst ungünstigen Lage der Melker Visurlinie zum Anfangspunkte gegen die Bahntrasse beläuft sich die Unsicherheit der Melker Anfangshöhe auf  $59\%$ , während die aus den Beob-

<sup>1</sup> Unter Unsicherheit des Resultates in Prozenten ist hier und im folgenden der Quotient der Maximaländerung der Höhe durch einen Beobachtungsfehler von  $1^\circ$  in die Höhe, auf Prozente umgerechnet, angesetzt, also im obigen Falle (nach § 319, Zeile 9 und 8

von unten) der Betrag der Quotienten  $\frac{3780}{109 \cdot 8} \cdot \frac{3850}{161 \cdot 0}$  u. s. w.



achtungen in Wien geschlossene nur mit einer Unsicherheit von 14% behaftet ist. Schließt man aus diesem Grunde die Melkerhöhe aus, so sinkt die Differenz  $B-P$  von  $-67.0 \text{ km}$  auf  $-32.2 \text{ km}$ , also auf mehr als die Hälfte herab, was die Unverläßlichkeit derselben wohl hinreichend kennzeichnet.

Nr. 35. Nach der Quételet-Bessel'schen Methode ist die Unsicherheit der Melker Anfangshöhe so groß, daß im ungünstigsten Falle ein Fehler von  $1^\circ$  sie um  $65.3 \text{ km}$  ändern, und von  $74.2 \text{ km}$  auf  $8.9 \text{ km}$  reduzieren oder auf  $139.5 \text{ km}$  heben könnte.

Nr. 42. Bei der Größe der Parallaxe von  $55.9$ , respektive  $46.5$  sind trotz der für die Anwendung der Quételet-Bessel'schen Methode nicht günstigen Bahnlage die Riesendifferenzen  $B-P$  schlechterdings unbegreiflich und lassen wohl kaum eine andere Erklärung zu, als die, daß die Meteore nicht identisch sind.

Die Differenzen  $B-P$ , welche aus den eben auseinandergesetzten Gründen ausfallen, sind durch Einsetzen in eckige Klammern gekennzeichnet. Außer diesen kommt aber noch eine Reihe von Meteoren vor, bei denen die Unsicherheit zwar nicht so groß ist, daß sie ein unbedingtes Ausschließen erfordern würde, aber immerhin so bedeutend, daß es gerechtfertigt erscheint, ihnen nur das halbe Gewicht zuzuerkennen. Dies trifft folgende Meteore.

Nr. 5c. Die Unsicherheit der Anfangshöhe aus Melk beträgt 27%, die der Anfangshöhe aus Brünn bloß 16%; läßt man die Melk weg, so sinkt die Differenz  $B-P$  von  $-29.4 \text{ km}$  auf  $-19.4 \text{ km}$  herab. Läßt man hingegen auch beim Endpunkte die erheblich unsicherere Höhe von Melk weg, so steigt die Differenz  $B-P$  von  $+8.6 \text{ km}$  auf  $+20.5 \text{ km}$ .

Nr. 8. Die bedeutenden in beiden Methoden auftretenden Differenzen entstammen wohl nur einer großen Ungleichzeitigkeit der Beobachtungen, auf welche auch die erheblichen Reduktionen auf Gleichzeitigkeit hinweisen und rechtfertigen das Erteilen eines geringeren Gewichtes.

Nr. 9. Bei der geringen Größe der Parallaxe des Anfangspunktes ( $11.4$ ) ist die Unsicherheit des Resultates beider Methoden erheblich und macht die großen Differenzen begreiflich.

Nr. 15. Die ungewöhnlich große Differenz der Anfangshöhen bei der Quételet-Bessel'schen Methode welche die Hälfte der kleineren Höhe beträgt ist sehr auffallend und nur durch bedeutende Beobachtungsfehler zu erklären.

Nr. 18. Auch hier ist die große Differenz bei der Anfangshöhe auffallend, wenn auch wegen der weit kleineren Parallaxe in minderen Grade.

Nr. 30. Die Unsicherheit des Endpunktes aus Melk beträgt 31%, aus Wien bloß 8%; das Weglassen von Melk würde die Differenz  $B-P$  von  $-17.7 \text{ km}$  auf  $-5.9 \text{ km}$  herabbringen, weswegen sie bloß halbes Gewicht erhielt.

Nr. 35. Die Endhöhen zwar nicht so unsicher wie die Anfangshöhen, indes bei der geringen Parallaxe ( $25.6$ ) und der ungünstigen Bahnlage doch noch so unzuverlässig, daß sie kein höheres Gewicht als 0.5 verdienen.

Nr. 36. Infolge der geringen Größe der Parallaxe ( $11.8$ ) ist die Höhe des Anfangspunktes in Wien nach beiden Methoden um 30% unsicher.

Nr. 47. Wegen der bei beiden Methoden vorhandenen starken Differenzen, die nicht leicht begreiflich sind wurde das Gewicht der Anfangshöhe auf 0.5 herabgesetzt.

Außerdem habe ich bei allen hier nicht besprochenen Nummern, wo der Unterschied der Höhenangaben der beiden Orte  $30 \text{ km}$  erreichte oder überstieg, d. h. bei den Anfangspunkten von Nr. 6 und 29 und den Endpunkten von Nr. 6 und 52 den Differenzen ebenfalls nur halbes Gewicht zuerkannt, mit Ausnahme von Nr. 31, wo die Differenz von  $31 \text{ km}$  bei der bedeutenden Höhe des Meteoroides bloß  $\frac{1}{6}$  derselben austrägt.



Diejenigen Nummern, welche nach diesen Überlegungen das Gewicht 0·5 zu erhalten haben, sind in runde Klammern eingeschlossen.

Bei Nr. 14 steigt bei den Beobachtungen in Melk die Unsicherheit der Anfangs- und Endhöhen bei der Quételet-Bessel'schen Methode auf 64% und 47% und bleibt selbst im Mittel noch 48% und 36%. Da die Resultate trotzdem so vortrefflich harmonisieren, müssen die Beobachtungen vorzüglich sein, so daß mir kein genügender Grund vorhanden zu sein schien, sie bloß mit halbem Gewichte mitstimmen zu lassen. Ein ähnliches Verhältnis findet auch bei der Endhöhe von Nr. 19 statt.

Nimmt man nach diesen Feststellungen das arithmetische Mittel, so erhält man für die Differenzen:  $B-P$

## Gruppe A\*.

Anfang

Aug. 11.....	— 3·2 km	aus 18 Meteoren	mit Gew.	15·0
» 12.....	+12·4	» 6	» »	5·0
» 13.....	— 0·1	» 5	» »	4·5

---

Mittel..... + 0·6 km aus 29 Meteoren mit Gew. 24·5

Ende

Aug. 11.....	— 1·1 km	aus 18 Meteoren	mit Gew.	16·5
» 12.....	— 2·9	» 8	» »	7·0
» 13.....	— 0·3	» 5	» »	5·0

---

Mittel..... — 1·4 km aus 31 Meteoren mit Gew. 28·5

## Gruppe B\*.

Anfang

Aug. 11.....	+ 3·7 km	aus 6 Meteoren	mit Gew.	6·0
» 12.....	— 1·4	» 5	» »	5·0
» 13.....	— 1·9	» 9	» »	9·0

---

Mittel..... — 0·1 km aus 20 Meteoren mit Gew. 20·0

Ende

Aug. 11.....	+ 1·2 km	aus 6 Meteoren	mit Gew.	6·0
» 12.....	— 8·3	» 5	» »	5·0
» 13.....	— 4·9	» 10	» »	9·5

---

Mittel..... — 3·9 km aus 21 Meteoren mit Gew. 20·5

und im Mittel aus beiden Gruppen:

Anfangshöhe  $B-P$ : +0·2 km aus 49 Meteoren mit Gew. 44·5

Endhöhe : —2·5 » 52 » » » 49·0.

Beide Gruppen weisen daher sowohl jede für sich, als auch zusammengenommen darauf hin, daß, wenn man bloß Beobachtungen berücksichtigt, deren Unverlässlichkeit nicht schon aus dem Mangel an innerer Übereinstimmung ersichtlich ist, bei einer größeren Anzahl von Höhenbestimmungen, die Quételet-Bessel'sche und die Parallaxenmethode trotz der großen Verschiedenheiten, die in vielen Fällen zwischen den nach ihnen erhaltenen Höhen vorkommen, auf gleiche Mittelwerte führen.

Die Vergleichung der Höhenberechnungen aus der Parallaxe mit denen aus der Reduktion auf Gleichzeitigkeit führt zu dem interessanten und beachtenswerten Ergebnisse, daß beide stets fast genau dasselbe Resultat liefern. Sieht man von dem jedenfalls verfehlten Meteore Nr. 42 ab, so kommen der absoluten Größe nach unter den Differenzen  $P-G$  vor:

	Anfang	Ende	Zusammen
Von 0.0 km bis 1.0 km:	46 = 79.3%	47 = 85.5%	93 = 82.3%
» 1.1 » 2.0 :	4 = 6.9	3 = 5.5	7 = 6.2
» 2.1 » 3.0 :	7 = 12.1	3 = 5.5	10 = 8.8
» 3.1 » 3.8 :	1 = 1.7	2 = 3.6	3 = 2.7
<hr/>			
Von 0.0 » 3.8 :	58 = 100.0%	55 = 100.1%	113 = 100.0%

Hiezu muß noch bemerkt werden, daß sich die drei größten Differenzen von 3.1, 3.5 und 3.8 km bei den Meteoren Nr. 47 und Nr. 32 (Endhöhe) finden, die zu jenen gehören, bei denen die Differenzen der Höhen zwischen den beiden Stationen zu den größten gehören, die bei Höhenberechnungen aus der Parallaxe vorkommen.

Endlich ist auch der Umstand hervorzuheben, daß die aus den beiden Methoden sich ergebenden Entfernungen der Meteore von den Beobachtungsorten noch weniger voneinander abweichen wie die Höhen, was insoferne von Interesse ist, als die Entfernungen größer sind wie die Höhen und infolgedessen zu erwarten war, daß sie auch größere Differenzen zeigen würden. Bildet man nämlich in ähnlicher Weise wie oben die Differenzen der Höhen, so jetzt die Differenzen der Entfernungen, so kommen der absoluten Größe nach unter den Differenzen der  $r$  vor

Gruppe A*		Gruppe B*		
Anfang	Ende	Anfang	Ende	
Von 0.0 km bis 1.0 km:	60 = 83.3%	64 = 94.1%	41 = 89.1%	43 = 97.7%
» 1.1 » 2.0 :	6 = 8.3	4 = 5.9	3 = 6.5	1 = 2.3
» 2.1 » 2.8 :	4 = 5.6	—	—	—
über 2.8 km:	2 = 2.8	—	2 = 4.3	—
<hr/>				
Zusammen	72 = 100.0%	68 = 100.0%	46 = 99.9%	44 = 100.0%

oder im Mittel beider Gruppen:

Anfang	Ende	
Von 0.0 km bis 1.0 km:	101 = 85.6%	107 = 95.5%
» 1.0 » 2.0 :	9 = 7.6	5 = 4.5
» 2.1 » 2.8 :	4 = 3.4	—
über 2.8 :	4 = 3.4	—
<hr/>		
Zusammen	118 = 100.0%	112 = 100.0%

Die eigentümliche Erscheinung, daß die Differenzen der nach den beiden Methoden berechneten Entfernungen sich kleiner herausstellen als die der Höhen wird dadurch bedingt, daß bei der Korrektur der Beobachtungen auf Gleichzeitigkeit auch die beobachteten Höhen eine Änderung erfahren.

Bildet man schließlich das arithmetische Mittel der Differenzen der Höhen zwischen  $P$  und  $G$ , so findet man:

Gruppe A*				Gruppe B*			
Anfang		Ende		Anfang		Ende	
Aug. 11 . . .	—0·33 km (22 St.)	—0·22 km (20 St.)		—0·53 km ( 7 St.)	—0·60 km ( 6 St.)		
» 12 . . . . .	—0·48 ( 8 »)	—0·25 ( 8 »)		—0·48 ( 5 »)	—1·06 ( 5 »)		
» 13 . . . . .	—0·97 ( 6 »)	—0·33 ( 6 »)		+0·08 (10 »)	+0·08 (10 »)		
Mittel . . .	—0·47 km (36 St.)	—0·26 km (34 St.)		—0·24 km (22 St.)	—0·39 km (21 St.)		

Das Zusammenfassen beider Gruppen ergibt

$P-G$  für die Anfangshöhen . . . . —0·38 km aus 58 Meteoren,  
 » » Endhöhen . . . . . —0·30 » 55 »

Es scheint darnach, daß die Höhenberechnung aus der Parallaxe die Höhen im Durchschnitte um eine Kleinigkeit niedriger ergibt als die Korrektion auf Gleichzeitigkeit; jedenfalls aber geben beide Methoden so gut wie vollkommen identische Resultate. Nach den Untersuchungen in § 3 C (Gleich. 51) liefern nicht nur die der Methode der Höhenberechnung aus der Parallaxe verwandten beiden anderen Berechnungsarten (Nr. 3 und 4) sondern auch die Höhenberechnung aus dem Minimum der Distanz (Nr. 1) Resultate, die bis auf Größen von der Ordnung der Beobachtungsfehler miteinander übereinstimmen. Man erhält daher aus allen in § 3 unter  $B$ ,  $C$  und  $D$  erörterten Methoden der Höhenberechnung von Meteoren Resultate, die sich bis auf Größen von der Ordnung der Beobachtungsfehler decken.

## 2. Vergleichung korrespondierender Beobachtungen aus dem Jahre 1823.

Den Bemühungen von Brandes ist es gelungen, im Jahre 1823 eine stattliche Anzahl korrespondierender Beobachtungen zu sammeln, deren Berechnung er im ersten Teile der von ihm herausgegebenen »Unterhaltungen für Freunde der Physik und Astronomie«, S. 24 ff mitteilt. Seinen Angaben zufolge wurde die Berechnung bei dem größeren Teile der Beobachtungen nach der von ihm bei dieser Gelegenheit erdachten Methode aus den beiden einander am nächsten liegenden Punkten der Gesichtslinien (§ 3 B), zum Teile aber auch nach der Methode von Olbers (§ 3 A I) durchgeführt. Bei ziemlich vielen Meteoren sind leider nur die Anfangs- oder Endpunkte notiert; von den übrigen, bei denen beide Punkte beobachtet wurden, hat (mit Ausnahme der 4 am 2. und 7. Mai gesehenen) auch Prof. Feldt die Höhen nach Bessel's Formeln ermittelt und letzterer die Resultate dieser Arbeit in seiner schon mehrfach zitierten Abhandlung (Astr. Nachr. B. XVI, S. 339—344) veröffentlicht.

Für die Koordinaten der hier in Betracht kommenden Orte gibt Brandes folgende Werte an, bei denen die Längen von Breslau und östlich positiv gezählt sind.

	$\lambda$	$\varphi$
Breslau . . . . .	0° 0'	+51° 7'
Dresden . . . . .	—3 19	51 3
Leipe . . . . .	—1 10	50 59
Mirkau . . . . .	+0 5	51 10
Trebnitz . . . . .	+0 1·5	51 19
Neisse . . . . .	+0 18	50 28
Gleiwitz . . . . .	+1 40	+50 18.

Daraus hat Bessel die nachstehenden relativen Koordinaten für alle Paare von Beobachtungsortern berechnet, für welche korrespondierende Beobachtungen vorlagen. Ich habe die dortigen Bezeichnungen



mit den in dieser Abhandlung angewandten vertauscht und die gegenseitigen in Teilen des Äquatorialhalbmessers angegebenen Entfernungen der Stationen durch Multiplikation mit 6377·4 auf Kilometer reduciert.

Kombination	<i>S</i>	<i>D</i>	log <i>R</i>	<i>R</i>
Breslau—Gleiwitz . . . . .	300°	5'—22° 48'	2·1718	148·5 km
—Leipe . . . . .	82	32 — 6 27	1·9189	83·0
—Trebmitz . . . . .	185	41 + 38 39	1·3489	22·3
—Mirkau . . . . .	233	17 + 25 42	0·9059	8·1
—Neisse . . . . .	339	13 — 37 22	1·8771	75·4
—Dresden . . . . .	90	14 — 1 9	2·3655	32·0
Mirkau—Neisse . . . . .	345	44 — 38 19	1·8998	79·4
—Gleiwitz . . . . .	303	1 — 24 28	2·1687	147·5
Neisse—Gleiwitz . . . . .	277	42 — 6 53	1·9946	98·8

In der folgenden Zusammenstellung enthält auf zwei einander gegenüberstehenden Seiten die 3. Kolonne die auf den Meridian des erstgenannten Ortes bezogene Sternzeit der Beobachtung in Bogenmaß ausgedrückt und die 5. die Größe des Meteoros der ein Asterisk beigefügt ist, wenn es zu den geschweiften gehörte. In den 4 letzten Kolonnen stehen in der ersten Zeile neben *F* die von Feldt nach Bessel's Formeln berechneten Höhen nebst der Maximaländerung, die ein Beobachtungsfehler von 1° in ihnen herbeizuführen imstande ist, und in der zweiten Zeile neben *K* die Höhen, welche Brandes Methode ergibt. Dem *K* ist das Zeichen der Unsicherheit (:) beigefügt, wenn aus der Publikation von Brandes nicht mit Sicherheit zu ersehen ist, ob die Berechnung nach seiner Methode oder nach der von Olbers durchgeführt wurde. Die übrigen Kolonnen sind durch ihre Überschriften hinlänglich gekennzeichnet.

Die sowohl von Feldt als auch Brandes in geographischen Meilen angegebenen Höhen- und Fehlermaxima habe ich mittels des Verwandlungsfaktors 7·42044 auf Kilometer umgerechnet, und erwähne hiezu noch, daß Brandes die Höhenangaben nur auf Zehnteile der geographischen Meile ansetzt, so daß die Zehnteile des Kilometers bloß als Rechnungsergebnis zu betrachten sind.

Die der Zusammenstellung folgenden Bemerkungen sind außer einigen leicht kenntlichen Notizen von mir der Diskussion entnommen, welche Brandes über die Erscheinung des Meteoros und die Sicherheit des Resultates den Höhenberechnungen beigefügt.

Nummer	1823	Sternzeit	Ort	Gr.	Anfang	
					$\alpha$	$\delta$
6	August 4	294° 24'	Breslau . . . . .	—	284° 0'	+ 13° 30'
			Gleiwitz . . . . .	—	217 0	27 0
10	11	285 45	Breslau . . . . .	3	278 0	62 0
			Gleiwitz . . . . .	—	210 0	65 15
11	11	292 16	Breslau . . . . .	—	26 0	20 0
			Gleiwitz . . . . .	—	68 0	+ 53 0
12	11	297 2	Breslau . . . . .	—	300 30	— 1 20
			Gleiwitz . . . . .	—	252 18	+ 9 40
13	11	298 32	Breslau . . . . .	1*	241 0	30 0
			Gleiwitz . . . . .	1*	207 30	36 0
14	11	302 3	Breslau . . . . .	—	284 0	14 0
			Gleiwitz . . . . .	—	220 0	28 0
17	11	304 48	Breslau . . . . .	2*	283 0	16 30
			Gleiwitz . . . . .	2*	245 0	22 0
18	11	306 18	Breslau . . . . .	5	300 30	4 0
			Gleiwitz . . . . .	5	231 0	27 0
20	30	299 43	Breslau . . . . .	—	252 0	13 30
			Leipe . . . . .	—	290 0	27 9
21	August 30	316 46	Breslau . . . . .	3	247 0	68 0
			Leipe . . . . .	4	312 13	83 14
22	September 1	297 56	Breslau . . . . .	5	314 0	23 0
			Trebnitz . . . . .	5	309 0	15 0
23		304 12	Breslau . . . . .	3	290 0	37 30
			Leipe . . . . .	3	343 0	38 40
26	2	302 40	Breslau . . . . .	3	342 0	11 0
			Trebnitz . . . . .	3	330 0	5 0
30	2	306 11	Breslau . . . . .	3	237 0	48 0
			Dresden . . . . .	3	358 0	73 0
33	11	327 20	Neisse . . . . .	—	75 0	69 45
			Gleiwitz . . . . .	—	178 30	76 0
34	12	321 19	Neisse . . . . .	1	78 35	80 0
			Gleiwitz . . . . .	3	209 54	65 13
35	September 27	299 44	Mirkau . . . . .	1	65 0	56 30
			Gleiwitz . . . . .	3	121 0	+ 60 0

Ende		M	Anfangshöhe		Endhöhe		Nummer
$\alpha$	$\delta$		H	$f$	H		
298° 0'	— 1° 0'	F	87·5	9·1	57·0	2·0	6
211 45	+ 20 10	K	72·0	—	43·8	—	
259 0	58 30	F	220·6	20·8	250·3	28·0	10
213 0	53 0	K(:)	223·4	—	235·2	—	
21 0	13 30	.	—	—	—	—	11
120 0	+ 58 0	.	55·6	—	29·7	—	
288 0	— 20 0	F	125·1	8·3	60·2	2·4	12
241 30	— 3 40	K(:)	100·9	—	54·9	—	
246 30	+ 20 0	F	97·3	10·4	74·3	6·8	13
209 0	21 0	K(:)	103·9	—	66·0	—	
272 0	4 0	F	75·7	5·9	50·1	3·0	14
212 0	20 0	K(:)	71·2	—	33·4	—	
280 0	3 30	F	200·4	68·3	105·5	13·0	17
242 0	+ 20 0	K(:)	145·4	—	118·7	—	
303 0	— 1 0	F	70·7	2·8	63·7	2·2	18
233 0	+ 16 0	K	70·5	—	57·1	—	
257 0	16 0	F	79·5	$\infty$	101·1	$\infty$	20
293 0	25 30	K	78·6	—	93·5	—	
282 0	50 0	F	291·2	22·9	136·0	8·0	21
340 0	58 0	K	192·0	—	133·6	—	
317 30	19 0	F	91·2	25·0	94·4	24·6	22
315 0	10 0	K	60·1	—	126·9	—	
285 0	32 30	F	106·3	7·9	97·3	0·4	23
333 30	31 0	K	106·1	—	106·1	—	
354 0	13 0	F	[136·0]	83·2	[129·8]	122·1	26
344 0	8 0	K	38·6	—	60·1	—	
207 0	53 0	F	225·7	15·6	145·5	5·9	30
33 0	72 0	K	207·8	—	152·9	—	
87 0	54 45	F	153·3	14·8	84·1	5·9	33
143 20	6 0	K	135·0	—	62·3	—	
168 0	71 40	F	116·3	14·8	120·7	20·5	34
201 0	56 0	K	112·8	—	123·2	—	
75 0	51 30	F	108·2	9·2	81·7	7·1	35
121 0	+ 52 0	K	106·1	—	73·5	—	



Nummer	1823	Sternzeit	Ort	Gr.	Anfang	
					$\alpha$	$\delta$
38	September 27	306° 15'	Breslau . . . . .	3	337° 30'	+ 21° 30'
			Gleitwitz . . . . .	4*	250 0	04 0
40	September 27	315 32	Mirkau . . . . .	4	323 30	8 0
			Gleitwitz . . . . .	3'4	259 30	37 20
43	Oktober 7	321 23	Breslau . . . . .	—	9 0	28 0
			Neisse . . . . .	—	30 0	55 0
			Gleitwitz . . . . .	—	214 43	77 27
44	7	326 38	Breslau . . . . .	2'3	328 0	39 0
			Gleitwitz . . . . .	2'3	239 20	46 30
45	7	327 8	Breslau . . . . .	5'4	244 0	77 30
			Neisse . . . . .	5'4	178 0	71 0
46	7	327 39	Breslau . . . . .	4	10 0	9 30
			Gleitwitz . . . . .	—	297 0	+ 69 0
48	7	330 39	Breslau . . . . .	1'2	351 0	— 3 0
			Neisse . . . . .	1*	5 0	+ 15 0
50	8	310 20	Mirkau . . . . .	—	317 0	57 0
			Neisse . . . . .	—	210 0	53 0
			Gleitwitz . . . . .	—	215 0	52 30
54	8	325 22	Breslau . . . . .	3	313 0	40 0
			Neisse . . . . .	3	253 0	64 0
57	8	329 8	Breslau . . . . .	3	90 30	60 0
			Mirkau . . . . .	3	106 0	65 20
58	8	330 53	Breslau . . . . .	2	342 30	15 0
			Gleitwitz . . . . .	4	267 30	37 0
61	8	336 2	Breslau . . . . .	1	7 30	41 0
			Gleitwitz . . . . .	3	248 0	70 0
62	Oktober 9	323 36	Breslau . . . . .	2	307 0	11 30
			Gleitwitz . . . . .	3	256 30	+ 25 0

## Bemerkungen zu

Nr. 6. Kleines Meteor, das seine nicht völlig 37 km lange Bahn in einer längeren Zeit als 1<sup>s</sup> durchlief. Sehr gute Beobachtungen.

Nr. 10. In Gleitwitz als klein und schnell notiert. Brandes hält die Höhe des Endpunktes für genau, die des Anfangspunktes für unsicherer. Die Höhen verdienen aber sehr geringes Vertrauen, da die Parallaxe des Anfangs- und Endpunktes nur 4°6 und 8°1 beträgt.

Ende		M	Anfangshöhe		Endhöhe		Nummer
$\alpha$	$\delta$		H	$f$	H		
325° 0'	+ 10° 30'	F	101·3	2·6	84·1	3·3	38
243 0	+ 48 0	K	105·4	—	89·0	—	
326 0	— 3 0	F	103·3	3·9	87·0	3·7	40
265 0	+ 27 50	K	100·9	—	83·8	—	
21 0	35 0	F	147·5	44·5	82·6	4·6	43
73 0	75 0	K	102·4	—	81·5	—	
195 0	66 0		—	—	—	—	
332 0	24 30	F	89·6	7·3	60·5	15·1	44
236 40	43 0	K	97·9	—	74·9	—	
236 0	68 0	F	64·5	10·3	45·5	8·2	45
185 0	58 0	K(:)	102·4	—	54·9	—	
20 30	12 30	F	43·1	—	52·1	4·4	46
193 0	+ 83 0	K(:)	80·9	—	63·1	—	
310 0	— 7 0	F	109·6	11·5	115·6	16·1	48
290 0	+ 3 0	K	70·5	—	83·1	—	
348 0	23 0	F	—	—	85·5	6·5	50
9 0	58 30	K	—	—	87·4	—	
223 0	75 0		—	—	—	—	
299 0	37 0	F	—	10·8	100·6	7·0	54
257 0	58 0	K	—	—	105·4	—	
102 0	60 30	F	14·7	4·7	19·0	5·3	57
125 0	63 40	K	28·9	—	23·7	—	
325 0	7 0	F	97·8	4·7	99·8	6·2	58
268 0	30 0	K	94·2	—	103·9	—	
344 0	30 30	F	97·1	4·7	70·7	7·6	61
245 0	54 0	K	119·5	—	92·0	—	
297 0	7 30	F	121·8	20·2	82·5	7·7	62
246 0	+ 22 30	K	112·8	—	85·3	—	

den Beobachtungen.

Nr. 11. Nach Brandes eine sehr oberflächliche Beobachtung, die Bessel zu einer Höhenberechnung für zu ungenau hält. Da aber die Parallaxe die erhebliche Größe von  $46^{\circ}1$  und  $83^{\circ}3$  erreicht, verdienen die von Brandes berechneten Werte immerhin einiges Vertrauen.

Nr. 12. Sehr hell, langsam, geschweift. Brandes hält den Endpunkt für sehr genau, den Anfangspunkt fast um  $7\cdot5$  km unsicher. Bahnlänge  $61\cdot2$  km.

- Nr. 13. In Breslau wurde wahrscheinlich der wahre Anfangspunkt nicht gesehen. Die Höhen auf etwa  $7.5 \text{ km}$  genau.
- Nr. 14. Die Angaben scheinen vorzüglich genau.
- Nr. 17. Eine recht gute Beobachtung.
- Nr. 18. Eine gut übereinstimmende Beobachtung.
- Nr. 20. Kleines Meteor. Der Endpunkt sehr genau; beim Anfangspunkte Fehler bis  $3^\circ$  vorhanden. Bahnlänge  $17.1 \text{ km}$ .
- Nr. 21. Eine vorzügliche Beobachtung, da der Abstand der Gesichtslinien für den Anfangs- und Endpunkt bloß  $1.4 \text{ km}$  beträgt. Die Anfangshöhe von Brandes ist durch einen Rechenfehler entstellt, eine Nachrechnung ergab den obigen Wert.
- Nr. 22. Brandes hält die Höhen bis auf  $3.8 \text{ km}$  für sicher; sie sind aber viel unsicherer, weil die Parallaxe des Anfangs- und Endpunktes nur  $9^\circ$  beträgt.
- Nr. 23. Brandes schätzt die Fehler jeder beobachteten Koordinate auf etwa  $2^\circ$ .
- Nr. 26. Wegen guter Übereinstimmung hält Brandes die Höhen dieses langsamen Meteoroides nur um  $1.8 \text{ km}$ , resp.  $3.7 \text{ km}$  unsicher. Bei Parallaxen von nur  $13.3$ , resp.  $11.0$  ist indes die Sicherheit zweifellos sehr überschätzt. Die nach der Quételet-Bessel'schen Methode erhaltenen Höhen sind illusorisch.
- Nr. 30. Dauer  $2^s$ . Die Beobachtungen wenig befriedigend. Bahnlänge  $94.2 \text{ km}$ .
- Nr. 33. Ziemlich helles, langsames, geschweiftes Meteor. Die Beobachtungen sind von mäßiger Genauigkeit.
- Nr. 34. Sehr genaue Beobachtungen.
- Nr. 35. Der Anfangspunkt recht genau. Auch der Endpunkt scheint ziemlich gut bestimmt, obgleich in Gleiwitz nur die Richtung der Bahn angegeben ist.
- Nr. 38. Schweiß sehr schwach; die Beobachtungen des Endpunktes auf etwa  $2^\circ$  ungenau; die des Anfangspunktes etwas besser.
- Nr. 40. Die Gesichtslinien treffen beinahe völlig in einem Punkte zusammen.
- Nr. 43. Kleine hellweise Feuerkugel mit starkem Schweiß, der in Breslau durch  $10^s$  sichtbar blieb. Der Endpunkt in Neisse scheint unsicher. Aus diesem Grunde und weil die Bahnebenen in Breslau und Neisse für eine Berechnung nach der Quételet-Bessel'schen Methode ungünstig liegen, hat Feldt nur die Kombination Breslau—Gleiwitz benützt. Die Endhöhe ist aber durch einen Druckfehler entstellt; sie soll  $11.24$  statt  $14.24$  Meilen lauten. Brandes berechnet die Anfangshöhe aus Breslau—Neisse, die Endhöhe aus Breslau—Gleiwitz, welche letztere er bis auf  $0.7 \text{ km}$  sicher erachtet.
- Nr. 44. Nicht sehr gelungene Beobachtung.
- Nr. 45. Der Anfangspunkt ist sehr gut bestimmt; nicht so gut der Endpunkt.
- Nr. 46. In Breslau als ziemlich groß, aber von mattem Lichte angegeben. Die Übereinstimmung ziemlich gut.
- Nr. 48. Die Orte der Anfangs- und Endpunkte nur mäßig genau und die Fehler der Höhen  $7 \text{ km}$  bis  $8 \text{ km}$ . Bahnlänge  $119 \text{ km}$ .
- Nr. 50. Eine sehr große Sternschnuppe von  $5^s$  Dauer, deren Bahn in Neisse, besonders aber in Gleiwitz von einem größten Kreise stark abwich. Die  $40^\circ$  betragende Differenz der Positionswinkel, welche Feldt's Berechnung am Anfangspunkte zwischen Neisse und Mirkau ausweist, deutet darauf hin, daß an einem dieser Orte der Anfangspunkt nicht beobachtet ist und daß dies Neisse war, folgte schon Brandes aus der Kombination Mirkau—Gleiwitz. Die in Neisse und Gleiwitz beobachteten Bahnen liegen für eine Berechnung nach der Quételet-Bessel'schen Methode zu ungünstig und es läßt sich der Anfangspunkt bei dieser Kombination wegen der Kleinheit der

Parallaxe, die eben nur 3° beträgt, überhaupt nicht berechnen. Auch der Anfangspunkt Mirkau—Gleiwitz ist mit einer großen Unsicherheit behaftet. Aus diesem Grunde habe ich die Höhe des Anfangspunktes nicht angeführt.

Für die Höhe des Endpunktes findet Feldt:

aus Mirkau—Neisse . . . . .	13·26 ± 0·94 ε	Meilen
» Mirkau—Gleiwitz . . . . .	9·77 ± 0·79 ε	»
-----		
im Mittel . . . . .	11·52 ± 0·87 ε	Meilen.

Brandes hingegen aus:

Mirkau—Neisse . . . . .	12·6	Meilen
Mirkau—Gleiwitz . . . . .	11·9	»
Neisse—Gleiwitz . . . . .	10·8	»
-----		
im Mittel . . . . .	11·77	Meilen.

Oben sind diese Mittelwerte eingesetzt.

- Nr. 54. Sehr schnelles Meteor. Anfangspunkt gut; Endpunkt unsicher.
- Nr. 57. Nach Brandes sehr gute Beobachtungen, da die Gesichtslinien bloß 2·5 km voneinander abstehen. Die Parallaxe beträgt aber für den Anfangspunkt bloß 8°9 und auch für den Endpunkt nur 11°3; die Höhen sind deshalb trotzdem sehr unsicher.
- Nr. 58. Schnelles Meteor, bei dem die Beobachtungen eine ziemlich gute Übereinstimmung zeigen.
- Nr. 61. Mäßig gute Beobachtung.
- Nr. 62. Langsames Meteor; Endpunkt recht gut; Anfangspunkt minder.

In der vorstehenden Liste wurden Nr. 27 (Breslau—Freibnitz), Nr. 36 (Breslau—Mirkau) und Nr. 55 (Mirkau—Neisse) unterdrückt, weil die Kleinheit der Parallaxen jede Höhenangabe illusorisch erscheinen läßt. Auch Nr. 32, beobachtet in Neisse und Gleiwitz, wurde ausgelassen, weil der Lauf der Meteore zeigt, daß sie nicht identisch sind, obschon die Anfangs- und Endpunkte mit der Visurlinie zum zweiten Orte nahe in derselben Ebene liegen.

Feldt hat die Meteorhöhen nur aus den Durchschnittspunkten der Visurlinien des einen Ortes mit der Bahnebene des andern ermittelt, nicht auch umgekehrt aus den Visurlinien des letzteren Ortes mit der Bahnebene des ersteren. Ebenso hat Brandes die Höhen aus der Entfernung von der Mitte der kürzesten Verbindungslinie berechnet (§ 5 B 38, 44). Wir müssen uns daher hier damit begnügen, die Unterschiede aufzusuchen, den die nach beiden Methoden bestimmten Höhen zeigen. Sie lauten im Sinne F—K.

Nr.	Differenz (F—K)		Nr.	Differenz (F—K)		Nr.	Differenz (F—K)	
	Anfang	Ende		Anfang	Ende		Anfang	Ende
6	+ 15·5 km	+ 3·2 km	23	+ 0·2 km	— 8·8 km	45	— 37·9 km	— 9·4 km
10	— 2·8	+ 15·1	26	[+ 97·4]	[+ 69·7]	46	— 37·8	— 11·0
12	+ 24·2	+ 5·3	30	+ 17·9	— 7·4	48	+ 39·1	+ 32·5
13	— 6·6	+ 8·3	33	+ 18·3	+ 21·8	50	—	— 1·9
14	+ 4·5	+ 16·7	34	+ 3·5	— 2·5	54	— 6·3	— 4·8
17	[+ 55·0]	— 13·2	35	+ 2·1	+ 8·2	57	(— 14·2)	(— 4·7)
18	+ 0·2	+ 6·6	38	— 4·1	— 4·9	58	+ 3·6	— 4·1
20	(+ 0·9)	(+ 7·6)	40	+ 2·4	+ 3·2	61	— 22·4	— 21·3
21	+ 9·2	+ 2·4	43	[+ 45·1]	+ 12·1	62	+ 9·0	— 2·8
22	(+ 31·1)	(— 32·5)	44	— 8·3	(— 14·4)			



Von diesen Differenzen sind wieder einige so unverlässlich, daß sie das Resultat nur verderben würden, wenn man sie bei einer Untersuchung der Größe ihres Mittelwertes mitsprechen ließe. Es sind dies die nachstehenden, welche oben in eckige Klammern gesetzt und nicht weiter berücksichtigt wurden.

- Nr. 17. Die Differenz der Anfangshöhe könnte, nach der Quételet-Bessel'schen Methode berechnet, durch einen Beobachtungsfehler von nur  $1^\circ$  aus  $+55.0 \text{ km}$  in  $-13.3 \text{ km}$  verwandelt werden.
- Nr. 26. Daß die nach der Quételet-Bessel'schen Methode berechneten Höhen illusorisch seien, wurde schon oben erwähnt.
- Nr. 43. Von der Anfangshöhe gilt wieder das bei Nr. 17 Gesagte; ein Fehler von  $1^\circ$  kann sie von  $+45.1 \text{ km}$  auf  $+0.6 \text{ km}$  herabbringen.

Außerdem habe ich allen Differenzen, bei denen der Quotient  $\frac{100f}{H}$  größer als 25 ausfällt, bloß das Gewicht 0.5, den übrigen das Gewicht 1.0 gegeben. Die ersteren sind in runde Klammern gesetzt. Nach diesen Grundsätzen genommen, lauten die Durchschnittswerte:

$$\begin{array}{r}
 F-K \text{ für die Anfangshöhen } +1.5 \text{ km} \text{ aus 25 Meteoren mit Gew. } 23.5, \\
 \text{» » Endhöhen } +1.2 \text{ km} \text{ » 28 » » » 26.0.}
 \end{array}$$

Es führen daher auch diese Vergleichen zu dem Resultate, daß im Durchschnitte einer größeren Anzahl von Höhenberechnungen beide Methoden gleiche Werte ergeben.

Sieht man von dem ganz unzuverlässigen Meteor Nr. 26 ab, so kommen unter den übrigen 27 Meteoren 9, nämlich Nr. 10, 20, 22, 34, 48, 54, 58, 46 und 57 vor, welche, nach der Quételet-Bessel'schen Methode berechnet, mehr und minder steil aufsteigen. Nach Brandes Methode steigen bloß die sieben zuerst genannten auf; die beiden letztgenannten (Nr. 46 und 57) gehören nun zu den fallenden, während Nr. 23, das nach der früheren Methode herabsank, jetzt horizontal läuft. Es kommen also auch hier, wie bei den früheren Vergleichen, bei der Quételet-Bessel'schen Methode mehr Meteore vor, die durch die Beobachtungsfehler zu ansteigenden werden als bei den anderen Methoden: sie hält daher auch in dieser Richtung das nicht, was man sich von ihr versprach, und weshalb sie Bessel eigentlich erdachte.

### Schlußbemerkungen.

Aus den soeben mitgeteilten Vergleichen der Höhenberechnungen zweier größerer Beobachtungsreihen korrespondierender Meteore haben wir den Schluß gezogen, daß der Mittelwert zahlreicher Höhenbestimmungen derselbe bleibt, mag man nach der Quételet-Bessel'schen oder nach einer der anderen Methoden rechnen, die in § 3 unter *B*, *C* und *D* besprochen wurden. Wegen der vielen Nebenumstände, welche die Rechnung in ungünstigem Sinne zu beeinflussen vermögen, wird jedoch das Resultat nach der erstgenannten Methode in vielen Fällen weit unsicherer, als es in der Natur des Problems liegt und als es nach den anderen Methoden tatsächlich erhalten wird, die sämtlich bis auf Größen von der Ordnung der Beobachtungsfehler, also bis auf unverbürgbare Größen dasselbe Resultat liefern und auch die Unsicherheit der Beobachtungen und des Resultates auf einfache Weise zu erkennen gestatten. Unter diesen Methoden ziehe ich die der Höhenberechnung aus der beobachteten Parallaxe den übrigen vor, weil sie meines Erachtens nach die Beobachtungsdaten mit dem geringsten Zwange verwendet. Um nun das Maß der Arbeit zu übersehen, welches zu leisten ist, wenn man nach dieser Methode eine Sternschnuppenbeobachtung in möglichster Vollständigkeit berechnen will, möge hier noch eine übersichtliche Zusammenstellung aller dazu erforderlichen Formeln folgen. Ich bemerke noch, daß die

Bezeichnungen dieselben sind, die in der Abhandlung stets gebraucht wurden, daß die ungestrichelten Größen auf den ersten, die gestrichelten auf den zweiten Beobachtungsort sich beziehen und daß die Formeln zweimal, einmal für den Anfangs- und einmal für den Endpunkt, zu berechnen sind.

### I. Berechnung der Entfernungen des Meteores vom Beobachter.

$$\begin{aligned} \sin s \sin w &= \cos \delta \sin (\alpha - A) & \sin s' \sin w' &= \cos \delta' \sin (\alpha' - A) \\ \sin s \cos w &= \sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos (\alpha - A) & \sin s' \cos w' &= \sin \delta' \cos D - \cos \delta' \sin D \cos (\alpha' - A) \\ \cos s &= \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (\alpha - A) & \cos s' &= \sin \delta' \sin D + \cos \delta' \cos D \cos (\alpha' - A) \end{aligned}$$

Die letzten Gleichungen können als Probcgleichungen verwendet werden

$$\cos p = \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha)$$

oder

$$\sin^2 \frac{p}{2} = \sin^2 \frac{\delta' - \delta}{2} + \cos \delta \cos \delta' \sin^2 \frac{\alpha' - \alpha}{2}$$

Die Berechnung der Gleichung für  $p$  in der letzten Form wird durch Tafel II erleichtert.

$$r = \frac{R}{\sin p} \cdot \sin (s + p) \quad r' = \frac{R}{\sin p} \cdot \sin (s' - p).$$

### II. Berechnung der Unsicherheit.

$$\psi = w' - w$$

$$E_m = \frac{R}{\sin p} \cdot \sin s \sin s' \sin \psi = 0.01745 \cdot \frac{R}{\sin p} \cdot \sin s \sin s' \cdot \psi^\circ$$

$$e_m = \psi \sin s$$

$$e'_m = \psi \sin s'$$

$$f = \frac{\sin s \sin s'}{\sin s + \sin s'} \psi$$

$$dr = \pm [r \operatorname{ctg} p \pm r' \operatorname{cosec} p] \varepsilon$$

$$dr' = \pm [r \operatorname{cosec} p \pm r' \operatorname{ctg} p] \varepsilon$$

$E_m$  ist die kürzeste Distanz, in der die Visurlinien beider Orte an einander vorübergehen, und  $e_m$  und  $e'_m$  sind die Winkel, unter denen sie von den beiden Orten aus gesehen wird. Sollen  $dr$  und  $dr'$  die Maximaländerungen darstellen, die ein Fehler von  $\varepsilon^\circ$  hervorbringen kann, so sind die Zeichen so zu wählen, daß die Ausdrücke innerhalb der Klammer eine Summe ihrer Teile werden. Wählt man  $1^\circ$  zur Einheit von  $\varepsilon$ , so sind die Ausdrücke für  $dr$  und  $dr'$  mit 0.01745 ( $\log 0.01745 = 8.24186$ ) zu multiplizieren;  $f$  ist die geringste Änderung, die an jeden der beiden beobachteten Orte der Sternschnuppe angebracht werden muß, um die Visurlinien zum Durchschnitt zu bringen.

## III. Berechnung der Höhe des Meteores.

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (t - \alpha) \quad \cos z' = \sin \varphi' \sin \delta' + \cos \varphi' \cos \delta' \cos (t' - \alpha')$$

$$H_0 = r \cos z$$

$$H'_0 = r' \cos z'$$

$$\Delta H_0 = \frac{(r^2 - H_0^2)(\rho - H_0)}{2\rho^2}$$

$$\Delta H'_0 = \frac{(r'^2 - H_0'^2)(\rho - H'_0)}{2\rho^2}$$

$$\rho = 6373 \text{ km} = 3 \cdot 80434$$

$$H = H_0 + \Delta H_0$$

$$H' = H'_0 + \Delta H'_0$$

$$dH = \cos z dr$$

$$dH' = \cos z' dr'$$

$t$  und  $t'$  sind die Ortssternzeiten der Beobachtung.  $\Delta H_0$  und  $\Delta H'_0$  können Tafel I entnommen werden. Um die Ausdrücke für  $dH$  und  $dH'$  vollständig zu erhalten, wäre ihnen noch respektive  $-r \sin z dz$  und  $-r' \sin z' dz'$  hinzuzufügen.

## IV. Berechnung des Ortes, an dem das Meteor im Zenite stand.

$$E \cos \varphi_1'' \sin \lambda = -r \cos \delta \sin (t - \alpha)$$

$$E \cos \varphi_1'' \cos \lambda = +r \cos \delta \cos (t - \alpha) + \rho \cos \varphi_1$$

$$E \sin \varphi_1'' = +r \sin \delta + \rho \sin \varphi_1$$

$$H = E \sin \rho.$$

$\lambda$  ist die Länge des gesuchten Ortes vom Meridiane des ersten aus gezählt,  $\varphi_1''$  dessen geozentrische Breite und  $E$  die Entfernung des Meteores vom Mittelpunkte der Erde. Durch ähnliche Gleichungen erhält man auch aus der Beobachtung an der zweiten Station den Ort, in dem das Meteor dieser zufolge sich im Zenit befand. Statt der geozentrischen Polhöhen kann man auch die scheinbaren verwenden, wenn man sich mit einer im allgemeinen stets genügenden Annäherung begnügt.

Die Berechnung der Gleichungen III entfällt jetzt, wenn man sie nicht etwa zur Kontrolle benutzen will.

## V. Berechnung der Länge und des Einfallwinkels der Meteorbahn.

$$\cos L = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos (\alpha_2 - \alpha_1)$$

oder

$$\sin^2 \frac{1}{2} L = \sin^2 \frac{1}{2} (\delta_2 - \delta_1) + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$l = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2 \frac{1}{2} L}$$

$$\cos i = \frac{H_1 - H_2}{l}.$$

Die Größen mit dem Index 1 beziehen sich auf den Anfangspunkt, die mit dem Index 2 auf den Endpunkt der an dem einen Orte beobachteten Meteorbahn.  $L$  ist deren scheinbare,  $l$  deren wahre Länge,  $i$  deren Winkel mit der Zenitlinie. Die Berechnung von  $\sin^2 \frac{1}{2} L$  wird durch Benützung der Tafel II vereinfacht.

In dieser Vollständigkeit wird man wohl selten Ursache haben, eine Meteorbahn zu ermitteln: in der Regel wird es nur nötig sein, die Formelsysteme I und III und aus II die Gleichungen für  $dr$  und  $dr'$  zu berechnen.

Verzichtet man auf eine Bestimmung der Fehlereinflüsse, so reicht man aus mit den Ausdrücken:

$$\begin{aligned}\cos s &= \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (\alpha - A) \\ \cos s' &= \sin \delta' \sin D + \cos \delta' \cos D \cos (\alpha' - A) \\ \cos p &= \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha). \\ r &= \frac{R}{\sin p} \sin (s+p) & r' &= \frac{R}{\sin p} \sin (s'-p).\end{aligned}$$

Der Unterschied zwischen  $s' - s$  und  $p$ , welche Größen bei fehlerfreien Beobachtungen einander gleich sind, gibt einen, wenn auch nicht sehr verlässlichen Maßstab zur Beurteilung der Güte der Beobachtungen ab.

Handelt es sich endlich zunächst um eine Orientierung, so kann man sich auch der Berechnung von  $p$  entschlagen und  $r$  und  $r'$  suchen aus:

$$r = \frac{R}{\sin (s' - s)} \cdot \sin s' \qquad r' = \frac{R}{\sin (s' - s)} \cdot \sin s$$

Die Berechnung der obigen Kosinuse wird durch den Übergang auf die Sinus der halben Winkel unter Benützung der Tafel II vereinfacht. Hat man aber für eine Kombination zweier Orte eine größere Zahl korrespondierender Beobachtungen zu berechnen, so lohnt es der Mühe eine Hilfstafel anzulegen, welche mit dem Argumente  $x = \alpha - A$  die Größen  $\log n$  und  $N$  enthält, gerechnet nach den Formeln:

$$\begin{aligned}n \sin N &= \cos D \cos x \\ n \cos N &= \sin D.\end{aligned}$$

Es lautet dann:

$$\cos s = n \sin (\delta + N) \qquad \cos s' = n' \sin (\delta' + N').$$

Schließlich sei noch bemerkt, daß es sich wegen der überaus raschen Zunahme der Unsicherheit des Resultates bei einer Verkleinerung der Parallaxe empfehlen dürfte, Höhen die aus einer Parallaxe unter  $10^\circ$  erhalten wurden, bei weiteren Untersuchungen auszuschneiden, solchen aus Parallaxen von  $10^\circ$  bis  $25^\circ$  erschlossenen das halbe Gewicht beizulegen und erst solchen, bei denen die Parallaxe mehr als  $25^\circ$  betrug, die Gewichtseinheit zu geben.



$\Delta H$

Tafel

H	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
r												
10	0.01	0.00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
20	0.03	0.02	0.00	—	—	—	—	—	—	—	—	—
30	0.07	0.06	0.04	0.00	—	—	—	—	—	—	—	—
40	0.13	0.12	0.09	0.05	0.00	—	—	—	—	—	—	—
50	0.20	0.29	0.16	0.11	0.07	0.00	—	—	—	—	—	—
60	0.28	0.27	0.25	0.21	0.16	0.09	0.00	—	—	—	—	—
70	0.38	0.37	0.35	0.31	0.26	0.19	0.10	0.00	—	—	—	—
80	0.50	0.49	0.47	0.43	0.37	0.30	0.22	0.12	0.00	—	—	—
90	0.64	0.63	0.60	0.56	0.51	0.44	0.35	0.25	0.14	0.00	—	—
100	0.79	0.78	0.75	0.71	0.66	0.58	0.50	0.40	0.28	0.15	0.00	—
110	0.95	0.94	0.92	0.88	0.82	0.75	0.66	0.56	0.44	0.31	0.16	0.00
120	1.13	1.12	1.10	1.05	0.99	0.93	0.84	0.74	0.62	0.49	0.34	0.18
130	1.33	1.32	1.29	1.25	1.19	1.12	1.03	0.93	0.81	0.68	0.53	0.37
140	1.54	1.53	1.50	1.46	1.40	1.33	1.24	1.14	1.02	0.89	0.74	0.58
150	1.77	1.76	1.73	1.69	1.63	1.56	1.47	1.37	1.25	1.11	0.97	0.80
160	2.01	2.00	1.97	1.93	1.87	1.80	1.71	1.61	1.49	1.35	1.21	1.04
170	2.27	2.26	2.23	2.19	2.13	2.06	1.97	1.86	1.74	1.61	1.46	1.30
180	2.54	2.53	2.50	2.46	2.40	2.33	2.24	2.13	2.02	1.88	1.73	1.57
190	2.83	2.82	2.79	2.75	2.69	2.62	2.53	2.42	2.30	2.17	2.02	1.85
200	3.14	3.13	3.10	3.06	3.00	2.92	2.83	2.73	2.60	2.47	2.32	2.15
210	3.46	3.45	3.42	3.38	3.32	3.24	3.15	3.05	2.92	2.79	2.64	2.47
220	3.80	3.79	3.76	3.71	3.65	3.58	3.49	3.38	3.26	3.12	2.97	2.80
230	4.15	4.14	4.11	4.06	4.00	3.93	3.83	3.73	3.61	3.47	3.32	3.15
240	4.52	4.51	4.48	4.43	4.37	4.29	4.20	4.09	3.97	3.83	3.68	3.51
250	4.91	4.89	4.86	4.82	4.75	4.68	4.58	4.47	4.35	4.21	4.06	3.88
260	5.31	5.29	5.26	5.21	5.15	5.07	4.98	4.87	4.75	4.61	4.45	4.28
270	5.72	5.71	5.67	5.63	5.56	5.48	5.39	5.28	5.16	5.02	4.86	4.69
280	6.16	6.14	6.11	6.06	5.99	5.91	5.82	5.71	5.58	5.44	5.29	5.12
290	6.60	6.59	6.55	6.50	6.44	6.36	6.26	6.15	6.02	5.88	5.73	5.56
300	7.07	7.05	7.01	6.96	6.90	6.82	6.72	6.61	6.48	6.34	6.18	6.01
310	7.55	7.53	7.49	7.44	7.37	7.29	7.19	7.08	6.95	6.81	6.65	6.48
320	8.04	8.02	7.98	7.93	7.87	7.78	7.69	7.57	7.44	7.30	7.14	6.97
330	8.55	8.53	8.49	8.44	8.37	8.29	8.19	8.08	7.95	7.80	7.64	7.47
340	9.08	9.06	9.02	8.97	8.90	8.81	8.71	8.60	8.46	8.32	8.16	7.99
350	9.62	9.60	9.56	9.50	9.43	9.35	9.25	9.14	9.00	8.86	8.70	8.52
360	10.18	10.15	10.11	10.06	9.99	9.90	9.80	9.69	9.55	9.41	9.24	9.07
370	10.75	10.72	10.68	10.63	10.56	10.47	10.37	10.26	10.12	9.97	9.81	9.63
380	11.34	11.31	11.27	11.22	11.14	11.06	10.95	10.84	10.70	10.55	10.39	10.21
390	11.94	11.91	11.87	11.82	11.74	11.66	11.55	11.43	11.30	11.15	10.98	10.80
400	12.56	12.53	12.49	12.44	12.36	12.27	12.17	12.05	11.91	11.76	11.59	11.41
410	13.20	13.17	13.13	13.07	12.99	12.90	12.80	12.68	12.53	11.38	12.22	12.04
420	13.85	13.82	13.78	13.72	13.64	13.55	13.44	13.32	13.18	13.03	12.86	12.68
430	14.52	14.49	14.44	14.38	14.31	14.21	14.10	13.98	13.84	13.69	13.52	13.33
440	15.20	15.17	15.12	15.06	14.98	14.89	14.78	14.66	14.51	14.36	14.19	14.01
450	15.90	15.87	15.82	15.76	15.68	15.58	15.47	15.35	15.21	15.05	14.88	14.69

$$\Delta H = 0.5 \cdot \rho^{-2} \cdot (\rho - H)(\rho + H)(\rho - H)$$

I.

$\Delta H.$

120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	H
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	r
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	30
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	40
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	50
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	60
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	70
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	80
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	90
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	100
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	110
0'00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	120
0'19	0'00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	130
0'40	0'21	0'00	—	—	—	—	—	—	—	—	140
0'62	0'43	0'22	0'00	—	—	—	—	—	—	—	150
0'86	0'67	0'46	0'24	0'00	—	—	—	—	—	—	160
1'12	0'92	0'71	0'49	0'25	0'00	—	—	—	—	—	170
1'39	1'19	0'98	0'76	0'52	0'27	0'00	—	—	—	—	180
1'67	1'48	1'27	1'04	0'80	0'55	0'28	0'00	—	—	—	190
1'97	1'78	1'57	1'34	1'10	0'85	0'58	0'30	0'00	—	—	200
2'29	2'09	1'88	1'66	1'42	1'16	0'89	0'61	0'31	0'00	—	210
2'62	2'42	2'21	1'99	1'75	1'49	1'22	0'94	0'64	0'33	0'00	220
2'97	2'77	2'56	2'33	2'09	1'83	1'56	1'28	0'98	0'67	0'34	230
3'33	3'13	2'92	2'69	2'45	2'19	1'92	1'64	1'34	1'03	0'70	240
3'70	3'51	3'30	3'07	2'82	2'57	2'30	2'01	1'71	1'40	1'07	250
4'10	3'90	3'69	3'46	3'21	2'96	2'69	2'40	2'10	1'78	1'46	260
4'51	4'31	4'09	3'86	3'62	3'36	3'09	2'80	2'50	2'18	1'86	270
4'93	4'73	4'52	4'29	4'04	3'78	3'51	3'22	2'92	2'60	2'27	280
5'37	5'17	4'95	4'72	4'48	4'22	3'95	3'66	3'35	3'04	2'71	290
5'82	5'62	5'41	5'18	4'93	4'67	4'40	4'11	3'80	3'48	3'16	300
6'29	6'09	5'88	5'64	5'40	5'14	4'86	4'57	4'27	3'95	3'62	310
6'78	6'58	6'36	6'13	5'88	5'62	5'34	5'05	4'75	4'43	4'09	320
7'28	7'08	6'86	6'63	6'38	6'12	5'84	5'55	5'24	4'92	4'59	330
7'80	7'59	7'37	7'14	6'89	6'63	6'35	6'06	5'75	5'43	5'09	340
8'33	8'12	7'90	7'67	7'42	7'16	6'88	6'58	6'27	5'95	5'62	350
8'88	8'67	8'45	8'21	7'96	7'70	7'42	7'12	6'81	6'49	6'16	360
9'44	9'23	9'01	8'77	8'52	8'25	7'97	7'68	7'37	7'05	6'71	370
10'01	9'81	9'59	9'35	9'09	8'83	8'55	8'25	7'94	7'62	7'28	380
10'61	10'40	10'18	9'94	9'68	9'42	9'13	8'84	8'53	8'20	7'86	390
11'22	11'01	10'78	10'54	10'29	10'02	9'74	9'44	9'13	8'80	8'46	400
11'84	11'63	11'40	11'16	10'91	10'64	10'36	10'06	9'74	9'41	9'07	410
12'48	12'27	12'04	11'80	11'54	11'27	11'99	11'69	11'37	11'05	10'70	420
13'13	12'92	12'69	12'45	12'19	11'92	11'64	11'34	11'02	10'69	10'35	430
13'80	13'59	13'36	13'12	12'86	12'59	12'30	12'00	11'68	11'35	11'01	440
14'49	14'28	14'05	13'80	13'54	13'27	12'98	12'68	12'36	12'03	11'68	450

$\log(0.5 \cdot \rho^{-2}) = 2.09029 - 10$

$\rho = 6373 \text{ km.}$

Tafel II.

$x$	$\log \sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$\sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$x$	$\log \sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$\sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$
0° 0'	— ∞	—	—	—	6° 0'	7.438	23	0.00274	15
10	4.325	—	—	—	10	7.461	24	289	16
20	4.927	—	0.00001	—	20	7.485	22	305	16
30	5.280	—	002	—	30	7.507	22	321	17
40	5.530	—	003	—	40	7.529	21	338	17
50	5.723	—	005	—	50	7.550	21	355	18
1 0	5.882	134	0.00008	2	0	7.571	21	0.00373	18
10	6.016	116	010	3	10	7.592	20	391	18
20	6.132	102	013	4	20	7.612	19	409	19
30	6.234	91	017	4	30	7.631	19	428	19
40	6.325	83	021	5	40	7.650	19	447	20
50	6.408	76	026	5	50	7.669	18	467	20
2 0	6.484	69	0.00030	6	8 0	7.687	18	0.00487	20
10	6.553	65	036	6	10	7.705	18	507	21
20	6.618	60	041	6	20	7.723	17	528	21
30	6.678	56	048	6	30	7.740	17	549	22
40	6.734	52	054	7	40	7.757	16	571	22
50	6.786	50	061	8	50	7.773	16	593	23
3 0	6.836	47	0.00069	7	9 0	7.789	16	0.00616	23
10	6.883	44	076	9	10	7.805	16	639	23
20	6.927	43	085	8	20	7.821	15	662	24
30	6.970	43	093	9	30	7.836	15	686	24
40	7.010	39	102	10	40	7.851	15	710	24
50	7.049	37	112	10	50	7.866	15	735	25
4 0	7.086	35	0.00122	10	10 0	7.881	14	0.00760	25
10	7.121	34	132	11	10 0	7.8806	143	0.00760	25
20	7.155	33	143	11	10	7.8949	141	785	26
30	7.188	31	154	12	20	7.9090	139	811	26
40	7.219	31	166	12	30	7.9229	136	837	27
50	7.250	29	178	12	40	7.9365	134	864	27
5 0	7.279	29	0.00190	13	50	7.9499	132	891	28
10	7.308	27	203	13	11 0	7.9631	131	919	28
20	7.335	27	216	14	10	7.9762	128	947	28
30	7.362	26	230	14	20	7.9890	126	0.00975	29
40	7.388	25	244	15	30	8.0016	125	0.01004	29
50	7.413	25	00.0259	15	40	8.0141	123	033	30
					50	8.0264	121	0.01063	30

$x$	$\log \sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$x$	$\log \sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$x$	$\log \sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$
12° 0'	8.0385	119	0.01093	30	19° 0'	8.4352	75	0.02724
10	8.0504	118	0.01093	31	10	8.4427	75	0.02724
20	8.0622	116	0.01093	31	20	8.4502	74	0.02724
30	8.0738	115	0.01093	32	30	8.4576	73	0.02724
40	8.0853	113	0.01093	32	40	8.4649	72	0.02724
50	8.0966	111	0.01093	32	50	8.4721	72	0.02724
13° 0'	8.1077	110	0.01281	33	20	8.4793	72	0.03015
10	8.1187	109	0.01281	34	10	8.4865	71	0.03015
20	8.1296	108	0.01281	34	20	8.4936	69	0.03015
30	8.1404	106	0.01281	34	30	8.5006	69	0.03015
40	8.1510	104	0.01281	34	40	8.5075	69	0.03015
50	8.1614	104	0.01281	35	50	8.5144	69	0.03015
14° 0'	8.1718	102	0.01485	36	21	8.5213	68	0.03321
10	8.1820	101	0.01485	36	10	8.5281	67	0.03321
20	8.1921	100	0.01485	36	20	8.5348	67	0.03321
30	8.2021	99	0.01485	36	30	8.5415	67	0.03321
40	8.2120	98	0.01485	37	40	8.5482	65	0.03321
50	8.2218	96	0.01704	38	50	8.5547	65	0.03321
15° 0'	8.2314	95	0.01704	38	22	8.5612	65	0.03641
10	8.2409	95	0.01704	38	10	8.5677	64	0.03641
20	8.2504	93	0.01977	39	20	8.5741	64	0.03641
30	8.2597	92	0.01977	39	30	8.5805	63	0.03641
40	8.2689	92	0.01977	39	40	8.5868	63	0.03641
50	8.2781	90	0.01977	40	50	8.5931	62	0.03641
16° 0'	8.2871	89	0.01977	40	23	8.5993	62	0.03975
10	8.2960	89	0.01977	41	10	8.6055	61	0.03975
20	8.3049	88	0.02018	41	20	8.6116	61	0.03975
30	8.3137	86	0.02018	42	30	8.6177	61	0.03975
40	8.3223	86	0.02018	41	40	8.6238	60	0.03975
50	8.3309	85	0.02185	43	50	8.6298	60	0.03975
17° 0'	8.3394	84	0.02185	43	24	8.6358	59	0.04323
10	8.3478	83	0.02185	43	10	8.6417	59	0.04323
20	8.3561	83	0.02185	43	20	8.6476	58	0.04323
30	8.3644	82	0.02447	44	30	8.6534	58	0.04323
40	8.3726	81	0.02447	44	40	8.6592	58	0.04323
50	8.3807	80	0.02447	45	50	8.6650	57	0.04323
18° 0'	8.3887	79	0.02447	45	25	8.6707	57	0.04685
10	8.3966	79	0.02447	46	10	8.6764	56	0.04685
20	8.4045	78	0.02447	46	20	8.6820	56	0.04685
30	8.4123	77	0.02677	46	30	8.6876	56	0.04685
40	8.4200	76	0.02677	47	40	8.6932	55	0.04997
50	8.4276	76	0.02677	47	50	8.6987	55	0.04997

Digitized by the Harvard University, East Asian Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Downloaded from The Biodiversity Heritage Library. http://www.biodiversitylibrary.org/



$x$	$\log \sin^2 \frac{x}{2}$		$\sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$x$	$\log \sin^2 \frac{x}{2}$		$\sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$
26° 0'	8.7042	54	0.05060	64	33° 0'	8.9067	42	0.08066	80
10	8.7096	55	124	65	10	8.9109	43	146	80
20	8.7151	53	189	64	20	8.9152	42	226	80
30	8.7204	54	253	65	30	8.9194	42	306	80
40	8.7258	53	318	66	40	8.9236	41	386	81
50	8.7311	53	384	66	50	8.9277	42	467	81
27 0	8.7364	52	0.05450	66	34 0	8.9319	41	0.08548	82
10	8.7416	52	516	66	10	8.9360	41	630	82
20	8.7468	52	582	67	20	8.9401	41	712	82
30	8.7520	52	649	68	30	8.9442	40	794	82
40	8.7572	51	717	68	40	8.9482	41	876	83
50	8.7623	51	785	68	50	8.9523	40	0.08959	83
28 0	8.7674	50	0.05853	68	35 0	8.9563	40	0.09042	84
10	8.7724	50	921	69	10	8.9603	40	126	84
20	8.7774	50	0.05990	69	20	8.9643	39	210	84
30	8.7824	50	0.06059	70	30	8.9682	40	294	85
40	8.7874	49	129	70	40	8.9722	39	379	85
50	8.7923	49	199	70	50	8.9761	39	464	85
29 0	8.7972	49	0.06269	71	36 0	8.9800	38	0.09549	86
10	8.8021	48	240	71	10	8.9838	39	635	86
20	8.8069	48	311	71	20	8.9877	38	721	86
30	8.8117	48	382	72	30	8.9915	39	807	87
40	8.8165	48	454	72	40	8.9954	38	894	87
50	8.8213	47	526	73	50	8.9992	37	0.09981	87
30 0	8.8260	47	0.06699	73	37 0	9.0029	38	0.10068	88
10	8.8307	47	772	73	10	9.0067	38	156	88
20	8.8354	46	845	74	20	9.0105	37	244	88
30	8.8400	46	919	74	30	9.0142	37	332	89
40	8.8446	46	0.06993	74	40	9.0179	37	421	89
50	8.8492	46	0.07067	75	50	9.0216	37	510	89
31 0	8.8538	45	0.07142	75	38 0	9.0253	36	0.10599	90
10	8.8583	46	217	75	10	9.0289	37	689	90
20	8.8629	45	292	76	20	9.0326	36	779	90
30	8.8674	44	368	76	30	9.0362	36	869	91
40	8.8718	45	444	77	40	9.0398	36	0.10960	91
50	8.8763	44	521	77	50	9.0434	36	0.11051	92
32 0	8.8807	44	0.07598	77	39 0	9.0470	35	0.11143	91
10	8.8851	43	675	77	10	9.0505	36	234	92
20	8.8894	44	752	78	20	9.0541	35	326	93
30	8.8938	43	830	79	30	9.0576	35	419	92
40	8.8981	43	909	78	40	9.0611	35	511	93
50	8.9024	43	0.07987	79	50	9.0646	35	0.11604	94

$x$	$\log \sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$\sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$x$	$\log \sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$\sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$
40° 0'	9.0681	35	0.1170	9	47° 0'	9.2014	29	0.1590	11
10	9.0716	34	79	10	10	9.2043	29	0.1601	10
20	9.0750	34	89	9	20	9.2072	29	11	11
30	9.0784	35	0.1198	9	30	9.2101	28	22	11
40	9.0819	34	0.1207	10	40	9.2129	28	33	11
50	9.0853	34	17	9	50	9.2158	28	44	10
41 0	9.0887	33	0.1226	10	48 0	9.2186	29	0.1654	11
10	9.0920	34	36	10	10	9.2215	28	65	11
20	9.0954	33	46	9	20	9.2243	28	76	11
30	9.0987	33	55	10	30	9.2271	28	87	11
40	9.1020	34	65	10	40	9.2299	28	0.1698	11
50	9.1054	33	75	9	50	9.2327	28	0.1709	11
42 0	9.1087	32	0.1284	10	49 0	9.2355	27	0.1720	11
10	9.1119	33	0.1294	10	10	9.2382	28	31	11
20	9.1152	33	0.1304	10	20	9.2410	27	42	11
30	9.1185	32	14	10	30	9.2437	28	53	11
40	9.1217	32	24	9	40	9.2465	27	64	11
50	9.1249	33	33	10	50	9.2492	27	75	11
43 0	9.1282	32	0.1343	10	40 0	9.2519	27	0.1786	11
10	9.1314	31	53	10	10	9.2546	27	97	11
20	9.1345	32	63	10	20	9.2573	27	0.1808	12
30	9.1377	32	73	10	30	9.2600	27	20	11
40	9.1409	31	83	10	40	9.2627	26	31	11
50	9.1440	32	0.1393	10	50	9.2653	27	42	11
44 0	9.1472	31	0.1403	10	51 0	9.2680	26	0.1853	12
10	0.1503	31	14	11	10	9.2706	26	65	11
20	9.1534	31	24	10	20	9.2732	27	76	11
30	9.1565	31	34	10	30	9.2759	26	87	12
40	9.1596	30	44	10	40	9.2785	26	99	11
50	9.1626	31	54	11	50	9.2811	26	0.1910	12
45 0	9.1657	30	0.1465	10	52 0	9.2837	26	0.1922	11
10	9.1687	31	75	10	10	9.2863	25	33	12
20	9.1718	30	85	10	20	9.2888	26	45	11
30	9.1748	30	0.1495	11	30	9.2914	26	56	12
40	9.1778	30	0.1506	10	40	9.2940	25	68	11
50	9.1808	30	16	11	50	9.2965	26	79	12
46 0	9.1838	29	0.1527	10	53 0	9.2991	25	0.1991	12
10	9.1867	30	37	11	10	9.3016	25	0.2003	11
20	9.1897	29	48	10	20	9.3041	25	14	12
30	9.1926	30	58	11	30	9.3066	25	26	12
40	9.1956	29	69	10	40	9.3091	25	38	11
50	9.1985	29	0.1579	11	50	9.3116	25	0.2049	12

$x$	$\log \sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$\sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$x$	$\log \sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$\sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$
54° 0'	9.3141	25	0.2061	12	61° 0'	9.4109	22	0.2576	13
10	9.3166	24	73	12	10	9.4131	21	89	12
20	9.3190	25	85	12	20	9.4152	21	0.2601	13
30	9.3215	24	97	11	30	9.4173	22	14	13
40	9.3239	25	0.2108	12	40	9.4195	21	27	13
50	9.3264	24	20	12	50	9.4216	21	40	13
55 0	9.3288	24	0.2132	12	62 0	9.4237	21	0.2653	13
10	9.3312	24	44	12	10	9.4258	21	66	12
20	9.3336	25	56	12	20	9.4279	21	78	13
30	9.3361	24	68	12	30	9.4300	20	91	13
40	9.3385	23	80	12	40	9.4320	21	0.2704	13
50	9.3408	24	92	12	50	9.4340	22	17	13
56 0	9.3432	24	0.2204	12	63 0	9.4362	20	0.2730	13
10	9.3456	24	16	12	10	9.4382	21	43	13
20	9.3480	23	28	12	20	9.4403	20	56	13
30	9.3503	24	40	13	30	9.4423	21	69	13
40	9.3527	23	53	12	40	9.4444	20	82	13
50	9.3550	23	65	12	50	9.4464	20	95	13
57 0	9.3573	23	0.2277	12	64 0	9.4484	20	0.2808	13
10	9.3596	24	89	12	10	9.4504	21	21	13
20	9.3620	23	0.2301	13	20	9.4525	20	34	13
30	9.3643	23	14	12	30	9.4545	20	47	14
40	9.3666	23	26	12	40	9.4565	19	61	13
50	9.3689	22	38	12	50	9.4584	20	74	13
58 0	9.3711	23	0.2350	13	65 0	9.4604	20	0.2887	13
10	9.3734	23	63	12	10	9.4624	20	0.2900	13
20	9.3757	22	75	13	20	9.4644	20	13	13
30	9.3779	23	88	12	30	9.4664	19	26	14
40	9.3802	22	0.2400	12	40	9.4683	20	40	13
50	9.3824	23	12	13	50	9.4703	19	53	13
59 0	0.3847	22	0.2425	12	66 0	9.4722	20	0.2966	14
10	9.3869	22	37	13	10	9.4742	19	80	13
20	9.3891	22	50	12	20	9.4761	19	93	13
30	9.3913	22	62	13	30	9.4780	19	0.3006	14
40	9.3935	22	75	12	40	9.4799	20	20	13
50	9.3957	22	87	13	50	9.4819	19	33	13
60 0	9.3979	22	0.2500	13	67 0	9.4838	19	0.3046	14
10	9.4001	22	13	12	10	9.4857	19	60	13
20	9.4023	22	25	13	20	9.4876	19	73	14
30	9.4045	21	38	13	30	9.4895	19	87	13
40	9.4066	22	51	12	40	9.4914	18	0.3100	14
50	9.4088	21	0.2563	13	50	9.4932	19	0.3114	13

$x$	$\log \sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$\sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$x$	$\log \sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$\sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$
68° 0'	9.4951	19	0.3127	14	75° 0'	9.5689	16	0.3706	14
10	9.4970	19	41	13	10	9.5705	17	20	14
20	9.4989	18	54	14	20	9.5722	16	34	14
30	9.5007	19	68	13	30	9.5738	16	48	14
40	9.5026	18	81	14	40	9.5754	17	62	14
50	9.5044	19	95	13	50	9.5771	16	76	14
69 0	9.5063	18	0.3208	14	76 0	9.5787	16	0.3790	15
10	9.5081	18	22	13	10	9.5803	16	0.3805	14
20	9.5099	18	35	14	20	9.5819	16	19	14
30	9.5117	19	49	14	30	9.5835	16	33	14
40	9.5136	18	63	13	40	9.5851	16	47	14
50	9.5154	18	76	14	50	9.5867	16	61	14
70 0	9.5172	18	0.3290	14	77 0	9.5883	16	0.3875	14
10	9.5190	18	0.3304	13	10	9.5899	16	89	15
20	9.5208	18	17	14	20	9.5915	15	0.3904	14
30	9.5226	18	31	14	30	9.5930	16	18	14
40	9.5244	17	45	13	40	9.5946	16	32	14
50	9.5261	18	58	14	50	9.5962	15	46	14
71 0	9.5279	18	0.3372	14	78 0	9.5977	16	0.3960	15
10	9.5297	17	86	14	10	9.5993	16	75	14
20	9.5314	18	0.3400	14	20	9.6009	15	89	14
30	9.5332	18	14	13	30	9.6024	15	0.4003	14
40	9.5350	17	27	14	40	9.6039	16	17	15
50	9.5367	17	41	14	50	9.6055	15	32	14
72 0	9.5384	18	0.3455	14	79 0	9.6070	16	0.4046	14
10	9.5402	17	69	14	10	9.6086	15	60	15
20	9.5419	17	83	13	20	9.6101	15	75	14
30	9.5436	18	96	14	30	9.6116	15	89	14
40	9.5454	17	0.3510	14	40	9.6131	15	0.4103	14
50	9.5471	17	24	14	50	9.6146	15	17	15
73 0	9.5488	17	0.3538	14	80 0	9.6161	15	0.4132	14
10	9.5505	17	52	14	10	9.6176	15	46	14
20	9.5522	17	66	14	20	9.6191	15	60	15
30	9.5539	17	80	14	30	9.6206	15	75	14
40	9.5556	16	94	14	40	9.6221	15	89	15
50	9.5572	17	0.3608	14	50	9.6236	15	0.4204	14
74 0	9.5589	17	0.3622	14	81 0	9.6251	15	0.4218	14
10	9.5606	17	36	14	10	9.6266	14	32	15
20	9.5623	16	50	14	20	9.6280	15	47	14
30	9.5639	17	64	14	30	9.6295	15	61	14
40	9.5656	16	78	14	40	9.6310	14	75	15
50	9.5672	17	0.3692	14	50	9.6324	15	0.4290	14



$x$	$\log \sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$\sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$x$	$\log \sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$	$\sin^2 \frac{x}{2}$	$\Delta$
82° 0'	9·6339	14	0·4304	15	86° 0'	9·6676	13	0·4651	15
10	9·6353	15	19	14	10	9·6689	14	66	14
20	9·6368	14	33	14	20	9·6703	13	0·4680	15
30	9·6382	15	47	15	30	9·6716	14	95	14
40	9·6397	14	62	14	40	9·6730	13	0·4709	15
50	9·6411	14	76	15	50	9·6743	13	24	14
83 0	9·6425	15	0·4391	14	87 0	9·6756	14	0·4738	15
10	9·6440	14	0·4405	15	10	9·6770	13	53	14
20	9·6454	14	20	14	20	9·6783	13	67	15
30	9·6468	14	34	14	30	9·6796	13	82	14
40	9·6482	14	48	15	40	9·6809	13	96	15
50	9·6496	14	63	14	50	9·6822	13	0·4811	15
84 0	9·6510	14	0·4477	15	88 0	9·6835	13	0·4826	14
10	9·6524	14	92	14	10	9·6848	14	40	15
20	9·6538	14	0·4506	15	20	9·6862	13	55	14
30	9·6552	14	21	14	30	9·6875	12	69	15
40	9·6566	14	35	15	40	9·6887	13	84	14
50	9·6580	14	50	14	50	9·6900	13	98	15
85 0	9·6594	13	64	15	89 0	9·6913	13	0·4913	14
10	9·6607	14	79	14	10	9·6926	13	27	15
20	9·6621	14	93	15	20	9·6939	13	42	14
30	9·6635	14	0·4608	14	30	9·6952	12	56	15
40	9·6649	13	22	15	40	9·6964	13	71	14
50	9·6662	14	0·4637	14	50	9·6977	13	85	15
					90 0	9·6990	12	0·5000	15



Digitized by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology, Cambridge, MA). Original Download from the Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/ www.biodiversitylibrary.org/