

ÜBER DIE WAHRSCHEINLICHE BAHNFORM UND DEN URSPRUNG DER KOMETEN

VON

C. HILLEBRAND.

Mit 4 Textfiguren.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 20. JUNI 1907.

Die Tatsache, daß die überwiegende Mehrzahl der Kometen Bahnen von ausgesprochen parabolischen Charakter beschreibt, fordert naturgemäß die Frage heraus, wie dieselbe in Hinblick auf den Ursprung der Kometen zu interpretieren sei, und das um so mehr, als diese Bahnform als charakteristisch für sämtliche Kometen angenommen werden kann, da ja höchstwahrscheinlich auch die Bahnen der kurzperiodischen Kometen nur durch Planetenstörungen verursachte Umformungen von Bahnen sind, die ursprünglich denselben Charakter hatten.

Für die Beurteilung dieser auffallenden Erscheinung ist der Umstand von wesentlicher Bedeutung, daß im allgemeinen Kometen nur in beträchtlicher Nähe der Sonne der Beobachtung zugänglich sind, das heißt, daß nur Kometen mit kleiner Periheldistanz überhaupt und auch diese nur in der Umgebung des Perihels selbst sichtbar sind. Dadurch wird einerseits das Beobachtungsmaterial von vornherein auf eine bestimmte Gruppe von Kometen beschränkt, andererseits die Sicherheit desselben in einer ganz bestimmten Weise beeinflusst. Da nämlich der parabolische Charakter einer Kometenbahn nichts anderes besagt, als daß das relativ kurze Perihelstück durch parabolische Elemente vollständig befriedigend dargestellt wird und daß durch eine Variation der Exzentrizität diese Darstellung keine Verbesserung erfährt, so folgt aus diesem letzteren Umstand, daß die Abweichung der Bahn von der strengen Parabel in nicht allzu engen Grenzen zu liegen braucht, ohne merkliche Änderungen in dem sichtbaren Teil der Bahn zu bedingen. So würde es bei der Annahme von elliptischen Bahnformen durchaus keiner übermäßig großen Apheldistanz bedürfen, um die typische Form der Perihelstücke resultieren zu lassen, jedenfalls keine, die auf einen interstellaren Ursprung hinweisen würde.

In der Tat besteht darin auch eine ganz ungezwungene Erklärung der fraglichen Erscheinung: Nimmt man für die Apheldistanzen Größen an, die etwa mit der zehnfachen Neptundistanz verglichen werden können, die also gegenüber den Entfernungen der nächsten Fixsterne noch als verschwindend klein anzusehen sind, so werden sich unter Berücksichtigung der genannten Sichtbarkeitsbedingungen bereits Bahnstücke von ausgesprochen parabolischem Charakter ergeben. Die Zugehörigkeit der Kometen zu unserem Sonnensystem ist demnach von diesem Gesichtspunkt aus eine durchaus annehmbare Hypothese.

Nichtsdestoweniger ist man aber dabei nicht stehen geblieben, und zwar hauptsächlich deshalb, weil das ganz regellose Vorkommen aller möglichen Bahnlagen, die in gar keiner Beziehung zu den Bewegungsverhältnissen im Sonnensystem zu stehen scheinen — im Gegensatz zu den planetarischen Bewegungen — wieder eher auf einen interstellaren Ursprung hinweist. Nimmt man aber letzteres an, so muß die weitaus überwiegende Mehrheit der Kometen, die in die Attraktionssphäre der Sonne gelangen, Bahnen von ausgesprochen hyperbolischem Charakter beschreiben. Das geht unmittelbar aus dem weiter unten angezogenen Prinzip der Erhaltung der kinetischen Energie hervor. Was aber nicht so unmittelbar zu beantworten ist, das ist die Frage, ob dasselbe Verhältnis auch besteht bezüglich der Bahnen, die die Sichtbarkeitsbedingung, das heißt: die Bedingung der kleinen Periheldistanz erfüllen. Würde sich etwa herausstellen, daß innerhalb dieser Gruppe von Kometen die Wahrscheinlichkeit von Bahnen parabolischen Charakters in einem Maße überwiegt, das über einer bestimmten Grenze liegt, so würde der interstellare Ursprung nicht nur als möglich, sondern wegen der erwähnten regellosen Verteilung der Lagen der Bahnebenen sogar als sehr wahrscheinlich erwiesen sein.

Es handelt sich also schließlich darum — unter Zugrundelegung irgend eines plausiblen Gesetzes über das Vorkommen der interstellaren Geschwindigkeiten — von jenen Bahnen, deren Periheldistanz unter einer gewissen Grenze liegt, das Verhältnis der Zahl der merklich parabolischen zu der der ausgesprochen hyperbolischen Bahnen zu ermitteln.

Die Behandlung dieses Problems hat insofern eine merkwürdige Wandlung durchgemacht, als die Bearbeiter desselben abwechselnd zu entgegengesetzten Resultaten gelangt sind.

Der erste, der sich mit dieser Frage beschäftigte, war Laplace (Sur les Comètes, Connaissance des temps 1816 — Oeuvres compl. 1904, t. XIII, p. 88). Er kommt unter der Voraussetzung, daß sämtliche Geschwindigkeiten der Größe und Richtung nach gleich wahrscheinlich sind, zu dem Schlusse, daß die sichtbaren Bahnen parabolischen Charakters die ausgesprochen hyperbolischen der Zahl nach bei weitem übertreffen müßten. Schiaparelli hat nun bezüglich dieser Laplace'schen Untersuchung aufmerksam gemacht, daß bei derselben ein Entwicklungsfehler unterlaufen ist, dessen Rektifizierung — unter Beibehaltung der dortigen Annahmen — das entgegengesetzte Resultat zur Folge hat (siehe Schiaparelli, Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen, Note VII). Demgemäß würde man also den Ursprung der Kometen in den Bereich unseres Sonnensystems zu verlegen haben. v. Seeliger bemerkt nun zu dieser Frage (Über die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von hyperbolischen Kometenbahnen, Astronomische Nachrichten Nr. 2968) daß die Annahme der gleichen Wahrscheinlichkeit der Geschwindigkeiten bis zu Größen, die über alle beliebigen Grenzen hinausliegen, doch kaum ein richtiges Bild der tatsächlichen Verhältnisse geben kann. Seeliger's Analyse führt zu dem bemerkenswerten Ergebnisse, daß unter Voraussetzung gewisser endlicher Geschwindigkeitsgrenzen, selbst wenn sie weit über die erfahrungsgemäßen Maxima der kosmischen Geschwindigkeiten hinausgehen, wieder das ursprüngliche Laplace'sche Resultat erhalten wird: das starke Überwiegen der merklich parabolischen Bahnen. (Es hat nachträglich Schiaparelli darauf aufmerksam gemacht, daß schon von Gauß Bemerkungen desselben Inhaltes gemacht wurden.)

Aber auch dieses Ergebnis bleibt nicht bestehen, wenn man einen Umstand in Rechnung zieht, den die bisher erwähnten Untersuchungen unberücksichtigt lassen: die Eigenbewegung des Sonnensystems. Da das angenommene Verteilungsgesetz nun nicht mehr für die relativen Geschwindigkeiten gelten kann, wodurch a priori schon ein Zusammenhang mit dem Sonnensystem statuiert würde, sondern für die interstellaren, so werden für die ersteren wesentlich geänderte Verhältnisse auftreten können. Über das Graduelle dieser Änderung entscheidet die Größenordnung der Sonnengeschwindigkeit in Bezug auf jenen Raum, für welchen das Verteilungsgesetz gilt. Da man nun diese Geschwindigkeit beträchtlich größer annehmen muß als jene Grenze der relativen Geschwindigkeiten, bei welcher die ausgesprochen hyperbolischen Bahnen beginnen, so brauchen, wie aus den folgenden Überlegungen unmittelbar hervorgeht, die bisherigen Betrachtungen keine erste Näherung zu bedeuten, ja es werden tatsächlich durch diesen Umstand die Resultate abermals in das Gegenteil verkehrt.

Auch mit dieser Seite der Frage hat sich bereits Schiaparelli beschäftigt, ohne aber über eine einleitende geometrische Betrachtung hinauszugehen (siehe Schiaparelli l. c.). In einer später veröffentlichten Notiz (Bulletin astron., t. VII, p. 285) gibt Schiaparelli in aller Kürze nur die Konsequenzen der Eigenbewegung des Sonnensystems an, an deren Spitze angeführt wird, daß unter diesen Umständen wieder die hyperbolischen Bahnen dominieren müßten, und zwar umso mehr, je größer diese Eigenbewegung angenommen wird.

Eine eingehende Behandlung unter Rücksichtnahme auf die Sonnenbewegung hat diese Frage erst durch M. L. Fabry erfahren in seiner ausführlichen und gründlich angelegten Arbeit: *Étude sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes*, Marseille 1893, in welcher die von Schiaparelli angekündigten Konsequenzen ihre vollinhaltliche, auf analytischen Grundlagen basierende Bestätigung finden. Sie enthält, abgesehen von einer eingehenden Darstellung des historischen Entwicklungsganges, die Behandlung eines ganzen Komplexes von Fragen, die mit dem Hauptproblem in Zusammenhang stehen. Was dieses selbst anbetrifft: Die Ermittlung des Verhältnisses der Zahl jener sichtbaren Bahnen, die von einem gegebenen Punkt ausgehen und parabolischen oder hyperbolischen Charakter besitzen, so wird dasselbe mit gewissen den Kalkül erleichternden und in der Natur der Sache begründeten Vereinfachungen durchgeführt, und zwar direkt zur Bestimmung des Verhältnisses der Gesamtzahlen, das heißt, jener Zahlen, die sämtlichen Eintrittspunkten in die Wirkungssphäre der Sonne entsprechen.

Die in dieser Arbeit gewonnenen Resultate können wohl dem Wesen nach als vollkommen zutreffend bezeichnet werden. Wenn nun in der vorliegenden Untersuchung auch auf diese Frage wieder zurückgegangen wird, so geschieht dies deshalb, da hierbei gezeigt werden soll, daß sich diese Seite des Problems einer strengeren Analyse unterziehen läßt, welche insbesondere die Möglichkeit bietet, die Abhängigkeit der fraglichen Zahlenverhältnisse von der Lage zum Apex der Sonnenbewegung in schärferer Weise zum Ausdruck zu bringen und damit eine nicht unwesentliche Ergänzung in der Entwicklung der hier maßgebenden Konsequenzen darzulegen. Andererseits soll aber hier die diese Untersuchungen ergänzende Frage behandelt werden, wie es denn mit der Möglichkeit, respektive Wahrscheinlichkeit steht, den elliptischen Charakter von Bahnen zu erkennen, deren Apheldistanz wohl die der sicher als elliptisch erkannten Bahnen übertrifft, aber noch immer sehr klein im Verhältnis zu den Entfernungen der nächsten Fixsterne ist.

Der Vollständigkeit halber seien im ersten Punkte die bekannten grundlegenden Beziehungen wiedergegeben.

I.

Wenn man einer Masse, die unter der alleinigen Wirkung der Attraktion der Sonne steht, in der Distanz r von dieser eine relative Geschwindigkeit g erteilt, welche mit dem Radiusvektor den Winkel φ einschließt, so sind die halbe große Achse a und die Exzentrizität ε des Kegelschnitts, den die Masse um die Sonne beschreiben wird, gegeben durch

$$g^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}, \quad r^2 g^2 \sin^2 \varphi = a(1 - \varepsilon^2).$$

Dabei wird außer den gewöhnlichen astronomischen Einheiten als Zeiteinheit der Betrag von 58·1325... mittleren Sonnentagen gewählt, das heißt die Zeit, in der die Erde in ihrer mittleren Geschwindigkeit die Längeneinheit zurücklegen würde, so daß diese Geschwindigkeit als Einheit angenommen ist.

Führt man die Periheldistanz $q = a(1 - \varepsilon)$ ein, so folgt nach einigen leichten Umformungen aus den beiden Gleichungen

$$\cos^2 \varphi = \left(1 - \frac{2q}{r(r+q)} \right) \cdot \left(1 - \frac{q^2}{r^2} \right)$$

ein Resultat, dem folgendes zu entnehmen ist:

In einer gegebenen Distanz r von der Sonne gehört zu jeder Richtung φ eine ganz bestimmte relative Geschwindigkeit g , wenn der resultierende Kegelschnitt eine vorgelegte Periheldistanz q haben soll; den geometrischen Ort sämtlicher einem bestimmten q zugehöriger Geschwindigkeitsendpunkte erhält man durch die Substitution von

$$\xi = g \cos \varphi \quad \eta = g \sin \varphi$$

in die letzte Gleichung, wodurch diese die Form annimmt

$$\frac{\xi^2}{\frac{2q}{r(r+q)}} - \frac{\eta^2}{\frac{2(r-q)}{rq}} = 1$$

das ist die Gleichung einer Hyperbel. Da nun um die Richtung r die Verhältnisse symmetrisch liegen, so ist der Ort der Endpunkte sämtlicher Geschwindigkeiten, aus welchen dieselbe Periheldistanz q resultiert, ein einmantliges Rotationshyperboloid, dessen halbe Querachse

$$= \sqrt{\frac{2q}{r(r+q)}}$$

ist, dessen imaginäre Achse (die Achse der Rotation) den absoluten Betrag

$$2\sqrt{\frac{2(r-q)}{rq}}$$

hat und nach der Sonne gerichtet ist.

Bezeichnet man mit 2α den Öffnungswinkel des Asymptotenkegels, so ist

$$\sin \alpha = \frac{q}{r}$$

Daraus folgt unmittelbar, daß zu einer kleineren Periheldistanz eine kleinere Querachse und ein kleinerer Öffnungswinkel gehört, das heißt aber nichts anderes, als daß die Geschwindigkeiten, welche kleineren Periheldistanzen entsprechen, innerhalb dieses der Größe q entsprechenden Hyperboloides liegen müssen. Versteht man nun unter q jene Periheldistanz, die der erfahrungsmäßigen Grenze der Sichtbarkeit entspricht, so bedeuten sämtliche innerhalb des so definierten Rotationshyperboloides fallenden Geschwindigkeitspunkte die Gesamtheit der von jenem Orte ausgehenden sichtbaren Bahnen. Es wird sich nun darum handeln, die Relativzahlen der Bahnen verschiedenen Charakters innerhalb dieses hyperbolischen Raumes zu ermitteln. Setzt man die halbe Querachse

$$\sqrt{\frac{2q}{r(r+q)}} = g_0,$$

so wird jede Geschwindigkeit $g \leq g_0$ die Sichtbarkeitsbedingung erfüllen; man kann also bei der Ermittlung der Häufigkeitszahlen über sämtliche Richtungen summieren; für Geschwindigkeiten $g > g_0$ wird aber die Maximalabweichung φ von der Richtung r durch die Hyperbelgleichung gegeben, aus welcher wie oben folgt

$$\cos^2 \varphi = \left(1 - \frac{g_0^2}{g^2} \right) \left(1 - \frac{q^2}{r^2} \right)$$

wodurch die Grenzen für die Summierungen für $g > g_0$ definiert sind.

Es wird hier, um überflüssige Weitläufigkeiten zu vermeiden, am Platze sein, die Größenordnung der in Frage kommenden Quantitäten festzustellen.

Unter r hat man sich den Radius der Wirkungssphäre der Sonne zu denken. Da die kleinste bekannte Fixsterndistanz etwa 275000 Erdbahnhalmmesser beträgt, so wird die Größenordnung von r durch die Zahl 100000 repräsentiert werden können. Man kann weiter nach den erfahrungsmäßigen Sichtbarkeitsbedingungen der Kometen für die Maximal-Periheldistanz q eine Zahl zwischen 2 und 3 annehmen, so daß

$$g_0 = \frac{2 \dots}{r}$$

das heißt: einige Einheiten der fünften Stelle betragen wird oder, wenn man in naher Übereinstimmung mit der obigen Bezeichnung $\frac{q}{r} = \alpha$ setzt, daß g_0 von der Ordnung α ist.

Die der Distanz r entsprechende parabolische Geschwindigkeit $g' = \sqrt{\frac{2}{r}}$ ist demgemäß beträchtlich größer als g_0 , von der Ordnung $\sqrt{\alpha}$ und steht mit g_0 in der Relation

$$g_0 = g' \sqrt{\frac{q}{r+q}}$$

Nun wird aber bei der vorliegenden Untersuchung nicht diese Geschwindigkeit als Grenzbetrag eine Rolle spielen, sondern jene, bei welcher das zugehörige hyperbolische Perihelstück der Bahn in merklicher Weise vom parabolischen abzuweichen beginnt. Das wird nun eine Geschwindigkeit sein, die bedeutend größer sein kann als g' . Eine Festsetzung über diese Grenzggeschwindigkeit g_1 der merklich parabolischen Bahnen zu treffen ist ohne eine gewisse Willkürlichkeit nicht möglich, weil die Genauigkeit der Bestimmung der Elemente, respektive die Empfindlichkeit der scheinbaren Bahn gegen die Variation der Elemente unter anderem auch von der geozentrischen Distanz abhängt und für letztere ja a priori kein Grenzbetrag angebbar ist. Laplace nimmt an, daß eine Hyperbel, deren reelle Halbachse nicht unter 100 liegt, noch als merklich parabolisch angesehen werden kann. Das würde für die sichtbaren Bahnen Exzentrizitäten bis zu 1.02 etwa bedeuten und für große Distanzen r eine relative Geschwindigkeit $g_1 = 0.1$, so daß die Größenordnung von g_1 durch eine Zahl zwischen $\sqrt[4]{\alpha}$ und $\sqrt[5]{\alpha}$ bestimmt erscheint.

Bei der wichtigen Rolle, die diesem Grenzbetrag g_1 in der vorliegenden Frage zukommt, scheint es mir doch geboten, etwas näher auf die Bestimmung der Grenzen, innerhalb welcher Exzentrizitätsänderungen unkonstatierbar sind, einzugehen. Das einzig Richtige wäre natürlich, die bisher bestimmten Kometenbahnen daraufhin zu untersuchen. Nun wird es immerhin möglich sein, auch mit Umgehung einer derartigen weitläufigen Untersuchung diese Grenzen für einen gewissen Bereich von Beobachtungsverhältnissen anzugeben, der eine solche Wahrscheinlichkeit besitzt, daß man außerhalb liegende Fälle als Ausnahmen betrachten kann, durch welche das Gesamtergebn nicht mehr beeinflusst wird.

Es soll zu diesem Behufe zunächst untersucht werden, welche Wahrscheinlichkeit einer gegebenen Annäherung eines Kometen an die Erde zukommt.

2.

Da bei der angegebenen Aufgabe eine völlig strenge Behandlung selbstverständlich überflüssig wäre, auch zu sehr weitläufigen Operationen führen würde, so soll zunächst die Erdbahn als kreisförmig, die Kometenbahn als parabolisch vorausgesetzt werden, ferner zur weiteren Vereinfachung angenommen werden, daß die Apsidenlinie der Kometenbahn in die Knotenlinie fällt, wodurch Verhältnisse statuiert werden, die bezüglich der Lage der Apsiden einer Annäherung am günstigsten sind, so daß den erhaltenen Wahrscheinlichkeiten die Bedeutung von oberen Grenzen zugesprochen werden kann.

Es seien v und r wahre Anomalie und Radiusvektor des Kometen, a der Radius der Erdbahn und φ der Winkelabstand der Erde vom Knoten, so ist bei dem Neigungswinkel i der beiden Bahnen die geozentrische Distanz ρ des Kometen gegeben durch $\rho^2 = r^2 + a^2 - 2ar (\cos v \cos \varphi + \sin v \sin \varphi \cos i)$.

Es handelt sich nun darum, festzustellen, unter welchen Umständen ρ unter einem gegebenen Betrag sinken kann.

Es soll zunächst angenommen werden, daß die Periheldistanz q der Kometenbahn größer als die Entfernung der Erde von der Sonne ist. In diesem Falle wird im Perihel der kürzeste Abstand der beiden Bahnen stattfinden und eine gegebene wenig von $q-a$ verschiedene Annäherung ρ in dessen Umgebung fallen. Man kann demnach hier kleine Werte von v und φ voraussetzen. Es wird nämlich die Größenordnung von v und φ durch $\frac{\rho}{a}$ bestimmt, allerdings in verschiedener Weise je nach der Größenordnung des Neigungswinkels i , so daß von letzterer die Art der Behandlung der Aufgabe abhängt. Da nämlich

$$\cos v \cos \varphi + \sin v \sin \varphi \cos i = 1 - 2 \left[\cos^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{v-\varphi}{2} + \sin^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{v+\varphi}{2} \right]$$

ist, so kann

$$\rho^2 = (r-a)^2 + 4ar \left[\cos^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{v-\varphi}{2} + \sin^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{v+\varphi}{2} \right]$$

gesetzt werden, worin jedes Glied der rechten Seite dieselbe Größenordnung wie ρ haben muß. Da zunächst $r-a = q-a + a \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}$ diese Bedingung erfüllen soll, so ergibt sich außer dem selbstverständlichen Resultat, daß $q-a$ und ρ von der gleichen Ordnung sind, daß v mindestens die Ordnung $\sqrt{\frac{\rho}{a}}$ haben muß. Ist nun i weder nahe an 0° noch an 180° , so daß weder $\sin \frac{i}{2}$ noch $\cos \frac{i}{2}$ kleine Beträge sind, so müssen $v-\varphi$ und $v+\varphi$ und daher die Winkel v und φ selbst tatsächlich von der Ordnung $\frac{\rho}{a}$ sein. Ist hingegen i nahe an Null, so daß $\sin^2 \frac{i}{2}$ in derselben Art klein ist, so braucht nur $v-\varphi$ diese Bedingung zu erfüllen, das heißt: v und φ sind von der Ordnung $\sqrt{\frac{\rho}{a}}$, ihre Differenz aber von der Ordnung $\frac{\rho}{a}$. Dasselbe gilt bezüglich der Summe, wenn i nahe an 180° ist.

Es soll zunächst der erste Fall behandelt werden. Aus den für die Parabel geltenden Relationen

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = \frac{kt}{\sqrt{2} q^{3/2}}, \quad r = q \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} \right),$$

wo t die seit der Perihelpassage verflossene Zeit bezeichnet, folgt, wenn

$$n = \frac{k\sqrt{2}}{q^{3/2}}$$

gesetzt wird:

$$v = nt \left(1 - \frac{1}{6} n^2 t^2 + \dots \right), \quad r = q \left[1 + \frac{n^2}{4} t^2 \left(1 - \frac{1}{6} n^2 t^2 + \dots \right) \right].$$

Da v und daher nt von der Ordnung $\frac{\rho}{a}$ sind, so kann, wenn man nicht über Größen zweiter Ordnung hinausgeht, $v = nt$ und $r = q + \frac{1}{4} q n^2 t^2$ gesetzt werden.

Ist ferner m die tägliche siderische Bewegung der Erde, M die Anomalie zur Zeit der Perihelpassage des Kometen, so ist $\tau = M + mt$, wo M und mt wieder Größen erster Ordnung sind. Die Substitution dieser Größen in ρ^2 ergibt bei Einhaltung der festgesetzten Genauigkeitsgrenze:

$$\rho^2 = a^2 + q^2 - 2aq \cos M + 2aq \sin M (m - n \cos i) t + aq (m^2 + n^2 - 2mn \cos i) t^2 + \frac{1}{2} q (q - a) n^2 t^2.$$

Setzt man $\frac{q-a}{a} = \tau$ und beachtet, daß dies eine Größe erster Ordnung ist, so erhält man weiter

$$\frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2 - \sin^2 M = 2 \sin M (m - n \cos i) t + (m^2 + n^2 - 2mn \cos i) t^2.$$

Soll nun bei einer vorgelegten parabolischen Bahn eine bestimmte Annäherung ρ tatsächlich eintreten, so muß diese Gleichung reelle Lösungen t haben, das heißt, es muß

$$\sin^2 M \cdot (m - n \cos i)^2 + (m^2 + n^2 - 2mn \cos i) \left(\frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2 - \sin^2 M \right) \geq 0 \text{ sein.}$$

Das bedeutet eine Bedingung, der die Größe M genügen muß. Es wird dadurch ein bestimmter Bereich der Erdbahn abgegrenzt, innerhalb welchem die Erde im Moment der Perihelpassage des Kometen stehen muß, damit die geforderte Annäherung ρ zu Stande kommt. Es sei Φ dieser Bereich — in Teilen des Radius ausgedrückt — dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einem gegebenen Momente die Erde innerhalb desselben steht $\frac{1}{2\pi} \Phi$, und das ist zugleich die Wahrscheinlichkeit, daß bei dieser parabolischen Bahn eine Annäherung ρ stattfindet. Eine Ausdehnung dieses Kalküls auf sämtliche i und sämtliche in Betracht kommenden Werte q wird dann die Wahrscheinlichkeit der Annäherung ρ überhaupt ergeben.

Die Grenzwerte für M erhält man, wenn man die obige Diskriminante gleich Null setzt, woraus

$$\sin^2 M_1 = \left(\frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2 \right) \cdot \frac{m^2 + n^2 - 2mn \cos i}{n^2 \sin^2 i}$$

folgt.

Der erwähnte Bereich wird demnach definiert durch $\pm M_1$, daher ist $\Phi = 2M_1$ und die Wahrscheinlichkeit w der Annäherung $= \frac{M_1}{\pi}$, oder, da man den Sinus mit dem Bogen vertauschen kann:

$$w = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2} \cdot \frac{1}{n \sin i} \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos i}.$$

Nun ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Pol der Kometenbahn die Länge Λ und die Breite i hat, $= \frac{1}{4\pi} \sin i \, di \, d\Lambda$, daher die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens der Neigung i : $\frac{1}{2} \sin i \, di$. Es wird demnach die Wahrscheinlichkeit V der Annäherung ρ bei sämtlichen Bahnen einer gewissen Perihel-
distanz q , deren Neigungen zwischen i_1 und i_2 liegen

$$= \frac{1}{2} \int_{i_1}^{i_2} w \sin i \, di \text{ sein, oder}$$

$$V = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2} \int_{i_1}^{i_2} \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2} - 2 \frac{m}{n} \cos i} \, di.$$

Das hier auftretende Integral ist ein elliptisches Integral zweiter Gattung, zu dessen Auswertung die bekannte Reihenentwicklung der Carnot'schen Formel herangezogen werden soll.

Es ist zunächst

$$m = \frac{k}{a^{3/2}}, \quad n = \frac{k\sqrt{2}}{q^{3/2}} = m \cdot \frac{\sqrt{2}}{(1+\sigma)^{3/2}}.$$

Setzt man

$$\frac{m}{n} = \mu, \quad \text{so ist } \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{3}{2}\sigma + \dots \right).$$

Wenn

$$\sqrt{1 + \mu^2 - 2\mu \cos i} = [(1 - \mu e^{i\sqrt{-1}})(1 - \mu^{-1}e^{-i\sqrt{-1}})]^{1/2}$$

nach Potenzen der Exponentialfunktion entwickelt wird, so erhält man eine Cosinusreihe, deren Koeffizienten Potenzreihen nach μ sind. Die Konvergenz ist bei dem angegebenen Werte von μ allerdings keine starke, die Entwicklung genügt aber dem vorliegenden Zwecke vollkommen, bei dem es sich in letzter Linie ja doch nur um die Feststellung der Größenordnung der einzelnen Resultate handelt.

Es ist

$$\sqrt{1 + \mu^2 - 2\mu \cos i} = B_0 - B_1 \cos i - B_2 \cos 2i - B_3 \cos 3i - \dots,$$

wo

$$B_0 = 1 + \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu^2}{8}\right)^2 + \left(\frac{\mu^3}{16}\right)^2 + \left(\frac{5\mu^4}{128}\right)^2 + \dots$$

$$B_1 = \frac{\mu}{2} - \frac{1}{2.8} \mu^3 - \frac{1}{8.16} \mu^5 - \frac{1.5}{16.128} \mu^7 - \dots$$

$$B_2 = \frac{1}{8} \mu^2 - \frac{1}{2.16} \mu^4 - \frac{1.5}{8.128} \mu^6 - \dots$$

$$B_3 = \frac{1}{16} \mu^3 - \frac{1.5}{2.128} \mu^5 - \dots$$

$$B_4 = \frac{5}{128} \mu^4 - \dots \quad \text{u. s. w.}$$

Es ist also

$$V = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\rho}{a^2} \sqrt{1 - \frac{a^2}{\rho^2} \sigma^2} \int_{i_1}^{i_2} (B_0 - B_1 \cos i - B_2 \cos 2i - \dots) di.$$

Was die Integrationsgrenzen betrifft, so sollen i_1 und i_2 Winkel sein, welche von 0, respektive π um Beträge von der Ordnung $\sqrt{\frac{\rho}{a}}$ abweichen. Es sei i_1 ein derartiger Betrag, so wird

$$V = \frac{1}{2\pi} \frac{\rho}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{\rho^2} \sigma^2} \int_{i_1}^{\pi - i_1} (B_0 - B_1 \cos i - B_2 \cos 2i - \dots) di$$

gesetzt werden können, so daß

$$V = \frac{1}{\pi} \frac{\rho}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{\rho^2} \sigma^2} \left[B_0 \left(\frac{\pi}{2} - i_1 \right) - \frac{1}{2} B_2 \sin 2i_1 - \frac{1}{4} B_4 \sin 4i_1 - \dots \right]$$

wird.

Um nun die totale Wahrscheinlichkeit der Annäherung ρ für sämtliche Bahnen, für welche $q > a$ ist, zu erhalten, hat man V mit der Wahrscheinlichkeit des Vorkommens der Periheldistanz q zu multiplizieren und von $q = a$ bis $q = a + \rho$ zu integrieren.

Die Anfangsgeschwindigkeiten, die ein bestimmtes q ergeben, bilden das früher erwähnte Rotationshyperboloid, das von jenem Kugelflächenstück abgeschlossen wird, welches der Grenze der merklich

parabolischen Bahnen entspricht. Die Querachse desselben ist $2 \frac{k}{r} \sqrt{2q}$. Bei der außerordentlich geringen Krümmung der Meridianhyperbel kann in der vorliegenden Betrachtung dafür ein Kreiszylinder vom Radius $\frac{k}{r} \sqrt{2q}$ substituiert werden und man kann ferner annehmen, daß der Querschnitt dieses Zylinders so klein ist, daß in jedem einzelnen die Dichte der Geschwindigkeitspunkte konstant ist. (Ausnahmefälle, in denen diese Annahme unzulässig ist, sind hier von keinem wesentlichen Einfluß.) Unter diesen Voraussetzungen ist die Zahl der Geschwindigkeiten, aus welchen Periheldistanzen zwischen q und $q + dq$ resultieren, dem entsprechenden unendlich schmalen Kreisring proportional, dessen Radius $\frac{k}{r} \sqrt{2q}$ und dessen Fläche $\frac{2\pi k^2}{r^2} dq$ beträgt.

Die Zahl sämtlicher in Betracht kommenden Geschwindigkeiten ist der Größe $\frac{2\pi k^2}{r^2} q_0$ proportional, wo q_0 die größte beobachtbare Periheldistanz bedeutet. Setzt man diese gleich $2a$, so ist die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer bestimmten Periheldistanz q gleich $\frac{dq}{2a}$.

Die Wahrscheinlichkeit der Annäherung ρ für sämtliche außerhalb der Erdbahn gelegene Kometenbahnen ist daher

$$W'_a = \frac{1}{2a} \int_a^{\rho+a} V dq$$

ausschließlich der Bahnen geringer Neigung.

Da man für die in V auftretende Grenze i_1 einen Betrag wählen wird, der selbst von q abhängt, soll die Durchführung der Integration später erfolgen.

Bei kleiner Neigung, das heißt, wenn i von der Ordnung $\sqrt{\frac{\rho}{a}}$ ist, sind v und φ derselben Ordnung, während $v - \varphi$ erster Ordnung bleibt. Vernachlässigt man in ρ^2 wieder alle Größen höherer als zweiter Ordnung, so erhält man aus

$$\rho^2 = (r-a)^2 + 4ar \sin^2 \frac{v-\varphi}{2} + 4ar \sin v \sin \varphi \sin^2 \frac{i}{2},$$

da man hier noch 4. Potenzen von v mitnehmen muß,

$$\frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2 = 2\sigma \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} + \operatorname{tg}^4 \frac{v}{2} + \sin^2 (v-\varphi) + \sin v \sin \varphi \sin^2 i.$$

Es handelt sich nun wieder um die Bedingungsgleichung für reelle Lösungen bei einem gegebenen $\rho > a\sigma$.

Da

$$m = \frac{n}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \sigma \right)$$

ist, so besteht zwischen φ und v die Beziehung

$$\varphi = M + \frac{1 + \frac{3}{2} \sigma}{\sqrt{2}} v.$$

Ferner ist

$$v - \varphi = v \left(1 - \frac{1 + \frac{3}{2} \sigma}{\sqrt{2}} \right) - M = \left(\frac{\rho}{a} \right)$$

wenn mit $\left(\frac{\rho}{a} \right)$ eine Größe von der Ordnung $\frac{\rho}{a}$ bezeichnet wird.

Setzt man

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \sigma = A, \text{ so ist } \varphi = M + (1 - A) v \text{ und } v = \frac{M + \left(\frac{\rho}{a} \right)}{A}.$$

Man kann daher für v^2 die Größe $\frac{M^2}{A^2}$ substituieren, wenn dieselbe mit einem Faktor erster Ordnung verbunden ist.

In der obigen Gleichung, für die man auch schreiben kann:

$$\frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2 = \frac{1}{16} v^4 + \frac{\sigma}{2} v^2 + (v - \varphi)^2 + v \varphi \sin^2 i,$$

soll diese Substitution nur im ersten Gliede der rechten Seite vorgenommen werden, da der Nenner 16 den Faktor A , der ungefähr $= \frac{2}{7}$ ist, kompensiert. Im letzten Gliede kann man $\varphi = v$ setzen, da der Fehler $v(v - \varphi) \sin^2 i$ höher als zweiter Ordnung ist.

Man erhält daher

$$\frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2 = \frac{M^2}{16 A^2} + \frac{\sigma}{2} v^2 + (A v - M)^2 + v^2 \sin^2 i.$$

Sollen nun für ein gegebenes ρ reelle Werthe v resultieren, so muß

$$A^2 M^2 + \left(A^2 + \frac{\sigma}{2} + \sin^2 i + \frac{M^2}{16 A^2} \right) \left(\frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2 - M^2 \right) \geq 0$$

sein, woraus sich für die Grenzwerte M die Gleichung ergibt

$$M^2 \left(\frac{M^2}{16 A^2} + \frac{\sigma}{2} + \sin^2 i \right) = A^2 \left(\frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2 \right),$$

wobei Größen höherer Ordnung wieder weggelassen wurden. Man erhält schließlich

$$M = 2 A \sqrt{-(\sigma + 2 \sin^2 i) + \sqrt{(\sigma + 2 \sin^2 i)^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2}}.$$

Da in A die Größe σ unterdrückt werden kann, so ist dabei

$$2 A = 0.585787 \dots$$

M ist also tatsächlich in diesem Falle von der Ordnung $\sqrt{\frac{\rho}{a}}$. Die Wahrscheinlichkeit der Annäherung ρ bei einer vorgelegten Kometenbahn von kleiner Neigung ist daher

$$w = \frac{2 A}{\pi} \sqrt{-(\sigma + 2 \sin^2 i) + \sqrt{(\sigma + 2 \sin^2 i)^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2}}$$

und für alle Neigungen zwischen 0 und i_1 bei konstanter Periheldistanz $q: \frac{1}{2} \int_0^{i_1} \sin i \, di$, wofür man hier auch setzen kann $\frac{1}{4} \int_0^{i_1} \sin^2 i \, di$; bezeichnet man demnach $\tau + 2 \sin^2 i = \zeta$, so wird daraus

$$\begin{aligned} & \frac{A}{4\pi} \int_0^{i_1} \sqrt{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2}} \, d\zeta = \\ &= -\frac{A}{12\pi} \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2} \right)^{3/2} + \frac{A}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2}{\sqrt{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2}}} \Big|_0^{i_1} \\ &= -\frac{A}{12\pi} \left(-\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2} \right)^{3/2} + \frac{A}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2}{\sqrt{-\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2}}} \\ & \quad - \frac{A}{6\pi} \sqrt{\frac{\rho}{a} - \tau} \cdot \left(\frac{\rho}{a} + 2\tau \right) \end{aligned}$$

Ist andererseits die Neigung nahe an 180° , d. h. $180^\circ - i$ von der Ordnung $\sqrt{\frac{\rho}{a}}$, so gilt dasselbe für v und φ ; dann ist aber $v + \varphi$ erster Ordnung, d. h. $v + \varphi = M + (2-A)v = \left(\frac{\rho}{a}\right)$.

Behandelt man mit Berücksichtigung dieser Relation die Gleichung

$$\rho^2 = (r-a)^2 + 4ar \sin^2 \frac{v+\varphi}{2} = 4ar \sin v \sin \varphi \sin^2 \left(90^\circ - \frac{i}{2} \right)$$

oder

$$\frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2 = 2\tau \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} + \sin^2 (v + \varphi) - \sin v \sin \varphi \sin^2 i$$

in analoger Weise wie im früheren Fall, so findet man für die Grenzwerte M

$$M = 2(2-A) \sqrt{-(\tau + 2 \sin^2 i) + \sqrt{(\tau + 2 \sin^2 i)^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2}}.$$

Nimmt man hier als Grenzen für i 180° und $180^\circ - i$, so ergibt sich als Wahrscheinlichkeit für beide Bereiche — nahe an 0 und nahe an 180° —

$$\begin{aligned} V = & -\frac{1}{6\pi} \left(-\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2} \right)^{3/2} + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2}{\sqrt{-\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \tau^2}}} \\ & - \frac{1}{3\pi} \sqrt{\frac{\rho}{a} - \tau} \cdot \left(\frac{\rho}{a} + 2\tau \right). \end{aligned}$$

Der Grenzwert i_1 ist nun ganz willkürlich, er muß nur die Bedingung erfüllen, daß die $i < i_1$ von der Ordnung $\sqrt{\frac{\rho}{a}}$ sind. Zur Vereinfachung der weiteren Ausführung soll eine derartige Wahl getroffen werden, daß $\zeta_1^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2$ ein vollständiges Quadrat wird. Setzt man

$$\sin^2 i_1 = \sqrt{N(N+1)} \cdot \frac{\rho}{a} + N\sigma,$$

wo N eine beliebige Zahl ist, so wird auch diese zweite Bedingung erfüllt, denn es ist dann tatsächlich

$$\zeta_1 = 2 \sqrt{N(N+1)} \frac{\rho}{a} + (2N+1)\sigma \text{ und}$$

$$\zeta_1^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2 = \left[(2N+1) \frac{\rho}{a} + 2 \sqrt{N(N+1)} \sigma \right]^2,$$

daher

$$-\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2} = (2N+1 - 2\sqrt{N(N+1)}) \left(\frac{\rho}{a} - \sigma \right).$$

Es soll nun zunächst auf Grund dieser Feststellung die Integration für W'_a durchgeführt werden. Man hat also in V für i_1 einen Wert einzuführen, der definiert ist durch

$$\sin^2 i_1 = N_1 \frac{\rho}{a} + N_2 \sigma, \quad \text{wo } N_1 > N_2.$$

Wenn in V konsequenterweise Größen zweiter Ordnung vernachlässigt werden, so kann man zunächst bei der Ermittlung der Koeffizienten B die Größe $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ setzen und erhält nun für diese bestimmte numerische Werte:

$$B_0 = 1.129 \quad B_2 = 0.108 \quad B_4 = 0.016 \quad B_6 = 0.005 \dots$$

und ebenso

$$V = \frac{1}{2} B_0 \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2} - \frac{1}{\pi} (B_0 + B_2 + \dots) \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2} \sqrt{N_1 \frac{\rho}{a} + N_2 \sigma}.$$

Setzt man weiter

$$\frac{a}{\rho} \sigma = x \quad \frac{N_2}{N_1} = \nu,$$

so ist

$$V = \frac{1}{2} B_0 \frac{\rho}{a} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\pi} \sqrt{N_1} (B_0 + B_2 + \dots) \left(\frac{\rho}{a} \right)^{3/2} \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1+\nu x}$$

und

$$\begin{aligned} W'_a &= \frac{1}{2} \frac{\rho}{a} \int_0^1 V dx = \\ &= \frac{1}{4} B_0 \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2\pi} \sqrt{N_1} (B_0 + B_2 + \dots) \left(\frac{\rho}{a} \right)^{5/2} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1+\nu x} dx. \end{aligned}$$

Entwickelt man $\sqrt{1+\nu x}$ nach Potenzen von νx , so sind die einzelnen Glieder integrabel und man erhält nach bekannten Integrationsformeln

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1+\nu x} dx = \frac{\pi}{2} \left(2 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} \nu^2 - \frac{5}{128} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \nu^4 - \dots \right) + \\ + \frac{\nu}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5} \nu^2 + \frac{7}{128} \cdot \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \nu^4 + \dots \right) = (\nu),$$

daher

$$W'_a = \frac{\pi}{16} B_0 \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 - \frac{1}{2\pi} (\nu) \sqrt{N_1} (B_0 + B_2 + \dots) \left(\frac{\rho}{a} \right)^{5/2}.$$

Nimmt man nun in dem obigen Ausdruck für den Grenzwert i_1 $N=1$, so daß $N_1 = \sqrt{2}$, $N_2 = 1$ und $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ wird, demnach $\sin^2 i_1 = \sqrt{2} \frac{\rho}{a} + \sigma$, so wird $(\nu) = 0.8934\dots$ und es resultiert schließlich mit Rücksicht auf die Werte B :

$$W'_a = 0.2217 \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 - 0.2127 \left(\frac{\rho}{a} \right)^{5/2}.$$

Was den Fall der kleinen Neigungen anbelangt, so kann in dem zugehörigen Ausdruck für V

$$-\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2} = N' \left(\frac{\rho}{a} - \sigma \right)$$

gesetzt werden, wo

$$N' = 2N + 1 - 2\sqrt{N(N+1)}$$

ist. Dann ist für die obere Grenze der Wert

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{N'}} \left(\frac{\rho}{a} + \sigma \right) \sqrt{\frac{\rho}{a} - \sigma} - \frac{1}{6\pi} N'^{3/2} \left(\frac{\rho}{a} - \sigma \right)^{3/2} = \\ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho}{a} - \sigma} \left[\frac{\rho}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{N'}} - \frac{1}{3} N'^{3/2} \right) + \sigma \left(\frac{1}{\sqrt{N'}} + \frac{1}{3} N'^{3/2} \right) \right]$$

und, wenn wieder $\frac{a\sigma}{\rho} = x$ gesetzt wird:

$$V = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{3/2} \sqrt{1-x} \left[\frac{1}{\sqrt{N'}} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} N'^{3/2} + x \left(\frac{1}{\sqrt{N'}} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} N'^{3/2} \right) \right].$$

Die entsprechende Wahrscheinlichkeit für sämtliche äußeren Kometenbahnen kleiner Neigung ist dann

$$W''_a = \frac{1}{2} \frac{\rho}{a} \int_0^1 V dx = \\ = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{3/2} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{N'}} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} N'^{3/2} \right) \int_0^1 \sqrt{1-x} dx + \left(\frac{1}{\sqrt{N'}} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} N'^{3/2} \right) \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx \right\} \\ = \frac{1}{6\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{N'}} \left(1 - \frac{2}{3} \sqrt{N'} - \frac{1}{15} N'^2 \right) \left(\frac{\rho}{a} \right)^{5/2}.$$

Wenn N wieder gleich der Einheit ist, demnach $N' = 3 - 2\sqrt{2}$, so wird daraus:

$$W''_a = 0.1190 \left(\frac{\rho}{a} \right)^{5/2}.$$

Es ist daher die totale Wahrscheinlichkeit der Annäherung ρ eines äußeren Kometen

$$W_a = W'_a + W''_a = 0.2217 \left(\frac{\rho}{a} \right)^2 - 0.0937 \left(\frac{\rho}{a} \right)^{5/2}.$$

3.

Der nun zu behandelnde Fall $q < a$ hat für die vorliegende Betrachtung insofern erhöhtes Interesse, als dabei Annäherungen an solche Stellen der Kometenbahn möglich sind, an welchen die Abweichungen der Parabel von den benachbarten Kegelschnitten größere Beträge annehmen können, so daß diesem Fall die für das Erkennen einer elliptischen, respektive hyperbolischen Bahn empfindlicheren Verhältnisse angehören. Es treten hier auch, wie unmittelbar einleuchtet, wesentlich andere Annäherungsbedingungen auf, denen zufolge sich dieser Fall nicht so einfach erledigen läßt wie der frühere.

Es ist zunächst klar, daß die Beschränkung $a - q < \rho$ hier nicht mehr notwendig ist, da bei genügend kleiner Neigung bei jedem Wert $q < a$ jede beliebige Annäherung möglich ist. Dann fällt aber auch die Notwendigkeit der Kleinheit von v und demnach auch von φ , denn die Bedingung, daß

$$a - r = a - q - q \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}$$

eine GröÙe erster Ordnung sein muß, wird bei endlichen $a - q$ durch endliche, beziehungsweise auch sehr große v erfüllt.

Es kann zunächst gezeigt werden, daß, während für $a - q < \rho$ ähnliche Verhältnisse wie früher stattfinden, für $a - q > \rho$ nur mehr Neigungen möglich sind, deren Größenordnung mindestens durch $\sqrt{\frac{\rho}{a}}$ gegeben ist.

Der Minimalabstand p eines beliebigen Punktes der Kometenbahn von der Erdbahn ist offenbar gegeben durch

$$p^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos \beta,$$

wo β die heliozentrische Breite des betreffenden Punktes bedeutet.

Da

$$\sin \beta = \sin i \sin v = 2 \sin i \frac{\operatorname{tg} \frac{v}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}}$$

ist, so ist

$$\cos \beta = q \sqrt{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}\right)^2 - 4 \sin^2 i \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}}.$$

Setzt man $\operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} = \Theta$, so wird

$$p^2 = q^2 (1 + \Theta)^2 + a^2 - 2aq \sqrt{(1 + \Theta)^2 - 4 \Theta \sin^2 i}.$$

Diese Minimaldistanz p hat für das Perihel den extremen Wert $\pm (q - a)$. Da nun

$$\frac{d(p^2)}{d\Theta} = 2q^2 (1 + \Theta) - 2aq \frac{1 + \Theta - 2 \sin^2 i}{\sqrt{(1 + \Theta)^2 - 4 \Theta \sin^2 i}},$$

daher für $v = 0$

$$\left(\frac{d(p^2)}{dt}\right)_0 = 2q(q - a \cos 2i),$$

so folgt für äußere Kometen das selbstverständliche Resultat, daß diese Ableitung beständig positiv ist, das Perihel demnach ein Minimum bedeutet. Für $q < a$ hängt das Vorzeichen von dem Wert von i ab, es kann daher diese Stelle sowohl Maximum als Minimum sein. Setzt man in diesem Falle

$$\frac{q}{a} = \cos 2i_0,$$

so wird für $i > i_0$ die Distanz p vom Perihel an beständig zunehmen, für $i < i_0$ dagegen wird p zunächst abnehmen, ein Minimum erreichen und von da ab beständig wachsen. Ist daher die geforderte Annäherung eine größere als die Distanz im Perihel, das heißt $\rho < a - q$, so kann dieselbe nur bei zunächst abnehmenden Minimaldistanzen p erreicht werden, also bei Neigungen, die kleiner als i_0 sind; da nun

$$\sin i_0 = \sqrt{\frac{a-q}{2a}}$$

ist, so sind das Neigungen, die von der angegebenen Größenordnung sind, solange $a-q$ eine Größe erster Ordnung ist. Ist aber $a-q$ nullter Ordnung, dann muß auch v nullter Ordnung sein und dann ergibt der Ausdruck für ρ^2 unmittelbar, daß entweder $v - \varphi$ und i oder $v + \varphi$ und $\pi - i$ erster Ordnung sein müssen, das heißt, daß auf jeden Fall $\sin i$ erster Ordnung ist. Für $a-q < \rho$ kommen daher nur Neigungen in Betracht, für welche $\sin^2 i$ erster oder höherer Ordnung ist.

Man kann übrigens für p eine für manche Diskussionen noch bequemere Form herstellen. Es ist

$$p^2 = q^2 (1 + \Theta)^2 + a^2 - 2aq (1 + \Theta) \sqrt{1 - \frac{4\Theta}{(1 + \Theta)^2} \sin^2 i}.$$

Da nun

$$\frac{4\Theta}{(1 + \Theta)} \sin^2 i = \sin^2 v \sin^2 i = \sin^2 \beta$$

jedenfalls zweiter Ordnung sein muß, so kann man nach dieser Größe entwickeln und erhält

$$p^2 = [q(1 + \Theta) - a]^2 + 4aq \frac{\Theta}{(1 + \Theta)} \sin^2 i + 4aq \frac{\Theta^2}{(1 + \Theta)^3} \sin^4 i + \dots$$

Für den Fall, als $a-q$ und daher auch Θ und $\sin^2 i$ erster Ordnung oder Θ zweiter und i nullter Ordnung ist, ergibt sich bis auf Größen vierter Ordnung

$$p^2 = (a-q)^2 - 2q(a \cos 2i - q)\Theta + q(q - a \sin^2 2i)\Theta^2,$$

p wird ein Minimum für $\Theta = \frac{a \cos 2i - q}{q - a \sin^2 2i}$, woraus nur für $i < i_0$ reelle Werte v sich ergeben.

Eine vorgelegte Minimaldistanz p wird erreicht werden bei

$$\Theta = \frac{a \cos 2i - q}{q - a \sin^2 2i} + \sqrt{\left(\frac{a \cos 2i - q}{q - a \sin^2 2i}\right)^2 + \frac{p^2 - (a-q)^2}{q(q - a \sin^2 2i)}}.$$

Da Θ positiv sein muß, so werden zwei Lösungen nur dann stattfinden, wenn $p < a-q$ und $i < i_0$, konform den obigen Überlegungen.

Setzt man $p = \rho$, so wird das dadurch bestimmte Θ den Bereich angeben, innerhalb dessen eine Annäherung ρ überhaupt möglich ist, und damit auch ein Maß für die Größenordnung der Wahrscheinlichkeit derselben sein, von welchem Umstand sofort Gebrauch gemacht werden soll.

Betrachtet man bei der vorliegenden Gruppe der inneren Kometen zunächst den Fall $a-q < \rho$, so kann derselbe in ganz analoger Weise wie der der äußeren Kometen durchgeführt werden, es wird nur entsprechend dem größeren Annäherungsbereich auch eine größere Wahrscheinlichkeit resultieren. Es läßt sich aber leicht von vornherein einsehen, daß dieser Unterschied nur in dem zweiten von $\left(\frac{\rho}{a}\right)^{3/2}$ abhängigen Gliede zum Ausdruck kommen kann.

Ist nämlich $\sin i$ nullter Ordnung, so kann

$$\Theta = \frac{q - a \cos 2i}{q - a \sin^2 2i} \left[\sqrt{1 + \frac{p^2 - (a-q)^2}{q(a \cos 2i - q)} (q - a \sin^2 2i) - 1} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2 - (a-q)^2}{q(q - a \cos 2i)}$$

näherungsweise gesetzt werden. Setzt man wieder $\sigma = \frac{a-q}{a}$, so findet sich in ähnlicher Weise

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \frac{1}{2 \sin i} \sqrt{\frac{p^2}{a^2} - \sigma^2} \left(1 - \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{1 + 2 \sin^2 i}{2 \sin^2 i} \right)$$

Der entsprechende Fall eines äußeren Kometen unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen von σ , der Unterschied der beiden Bereiche v ist daher gegeben durch

$$\frac{1 + 2 \sin^2 i}{4 \sin^2 i} \sqrt{\frac{p^2}{a^2} - \sigma^2}, \text{ das heißt durch eine Größe zweiter Ordnung.}$$

Ist aber $\sin^2 i$ und daher Θ erster Ordnung, so ist, wie aus der Formel für Θ unmittelbar abzulesen ist, der Unterschied in Θ derselben und in v von der Ordnung $\sqrt{\frac{\rho}{a}}$.

Im ersten Falle ist der Bereich der i nullter, im zweiten erster Ordnung, die Summierung über sämtliche q , für welche der Absolutwert $(q-a) < \rho$ ist, fügt noch eine Potenz hinzu, so daß der Unterschied im ersten Falle erst auf $\left(\frac{\rho}{a}\right)^3$, im zweiten auf $\left(\frac{\rho}{a}\right)^{5/2}$ sich erstreckt.

Die folgenden Ausführungen bestätigen diese Überlegung.

Es soll also zunächst die Wahrscheinlichkeit der Annäherung ρ für sämtliche q , für welche $a-q \leq \rho$ ist, ermittelt werden. Hier sind sämtliche Werte i möglich und man wird wie im vorigen Fall den Bereich der kleinen Neigungen und der nullter Ordnung getrennt zu behandeln haben.

Der Grenzwert i_1 soll wieder in der Form

$$\sin^2 i_1 = N_1 \frac{\rho}{a} + N_2 \sigma$$

vorausgesetzt werden, wo N_1 und N_2 noch zu bestimmende numerische Größen sind.

Für die Wahrscheinlichkeit W_i bei Neigungen zwischen i_1 und $\pi - i_1$ erhält man denselben Ausdruck wie für W'_i . Behält man die früheren Bezeichnungen bei und setzt für die identischen Größen gleich ihre numerischen Werte, so wird,

$$W_i = 0.2217 \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 0.2002 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{3/2} \sqrt{N_1} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1+\sigma x} dx.$$

Für kleine Neigungen wird man aber Ausdrücke erhalten, die etwas verschieden sind, da σ das Zeichen wechselt. Es ist zunächst

$$w = \frac{2A}{\pi} \sqrt{\sigma - 2 \sin^2 i + \sqrt{(\sigma - 2 \sin^2 i)^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2}}.$$

Setzt man hier $\sigma - 2 \sin^2 i = \zeta$, so ist die Wahrscheinlichkeit für sämtliche $i < i_1$

$$I = - \frac{A}{12\pi} \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2} \right)^{3/2} + \frac{A}{4\pi} \frac{\frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2}{\sqrt{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2}}} \Bigg|_{i=0}^{i=i_1}$$

i_1 hat nur die Bedingung zu erfüllen, daß $\sin^2 i_1$ erster Ordnung ist. Man wird letztere Größe wieder so wählen, daß $\xi^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2$ ein vollständiges Quadrat wird. Das wird hier durch

$$\sin^2 i_1 = \sqrt{N(N-1)} \frac{\rho}{a} + N\sigma$$

erreicht, wodurch

$$\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2} = N' \left(\frac{\rho}{a} - \sigma \right)$$

wird, wenn

$$N' = 2N - 1 - 2\sqrt{N(N-1)}$$

ist.

Setzt man nun $N=2$, so wird $\sin^2 i_1 = \sqrt{2} \frac{\rho}{a} + 2\sigma$, ξ_1 und N' erhalten aber die früheren Werte.

Nach Einführung der Grenzen wird

$$V = -\frac{A}{4\pi} \left[\frac{1}{3} N'^{3/2} \left(\frac{\rho}{a} - \sigma \right)^{3/2} - N'^{-1/2} \left(\frac{\rho}{a} + \sigma \right) \sqrt{\frac{\rho}{a} - \sigma} \right] + \frac{A}{4\pi} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\rho}{a} + \sigma \right)^{3/2} - \left(\frac{\rho}{a} - \sigma \right) \sqrt{\frac{\rho}{a} + \sigma} \right].$$

Für den Bereich $\pi - i_1$ bis π erhält man denselben Ausdruck nur für den Faktor A : $2-A$. Addiert man beide V und integriert über sämtliche q , welche zwischen $a-\rho$ und a liegen, so ist die totale Wahrscheinlichkeit in diesen Bereichen

$$W_i'' = \frac{1}{2} \frac{\rho}{a} \int_0^1 V dx, \text{ wo wieder } x = \frac{a\sigma}{\rho} \text{ ist, oder}$$

$$W_i''' = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{3/2} \int_0^1 \left(\frac{4}{3} x \sqrt{1+x} - \frac{2}{3} \sqrt{1+x} - \frac{N'^{3/2}}{3} + (1-x)^{3/2} + N'^{-1/2} x \sqrt{1-x} + N'^{-1/2} \sqrt{1-x} \right) dx,$$

woraus schließlich folgt

$$W_i''' = 0.1822 \left(\frac{\rho}{a} \right)^{3/2}.$$

Bei der Ermittlung von W_i'' für die angenommenen Grenzwerte hat man nur für die noch auszuführende Integration

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1+\nu x} dx$$

ein etwas anderes Verfahren einzuschlagen, da hier die Entwicklung von $\sqrt{1+\nu x}$ nicht mehr tunlich ist. Es ist nämlich hier wie früher $N_1 = \sqrt{2}$, aber $N_2 = 2$, so daß $\nu = \sqrt{2}$ ist. Setzt man aber $x = 1 - \xi$, so wird dieses Integral

$$= \sqrt{2} \sqrt{1+\nu} \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{1}{2}\xi} \cdot \sqrt{1 - \frac{\nu}{1+\nu}\xi} \sqrt{\xi} d\xi,$$

eine Form, die wieder konvergente Entwicklungen zuläßt. Führt man dies durch und setzt gleich $\nu = \sqrt{2}$, so wird das Integral zunächst

$$\sqrt{2} \sqrt{1+\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{\xi} d\xi (1 - 0.54289\xi - 0.00092\xi^2 - 0.00050\xi^3 - 0.00041\xi^4 - \dots).$$

Die Ausführung ergibt schließlich den Wert 0·99675, woraus

$$W'_i = 0\cdot2217 \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 0\cdot1870 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{5/2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit der Annäherung ρ für sämtliche innere Bahnen, deren Perihelie zwischen $a - \rho$ und ρ liegen, ist demnach

$$W_i = W'_i + W''_i = 0\cdot2217 \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 0\cdot0048 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{5/2}.$$

4.

Wesentlich anders verhält sich die Sache bei Perihelabständen, die größer sind als die geforderte Annäherung, das heißt, wenn $a - q > \rho$ ist, da hier nur mehr Neigungen innerhalb gewisser kleiner Grenzen in Betracht kommen.

Es soll zuerst der Fall behandelt werden, daß $a - q$ noch immer eine kleine GröÙe erster Ordnung ist. Nach dem früher Gesagtem muß jedenfalls $\sin i < \sqrt{\frac{\sigma}{2}}$. Die tatsächliche Grenze der hier in Frage kommenden Neigungen wird dadurch gegeben sein, daß die entsprechende kleinste Minimaldistanz p der geforderten Annäherung ρ gleich ist.

Aus

$$p^2 = (a - q)^2 - 2q (a \cos 2i - q) \Theta + q (q - a \sin^2 2i) \Theta^2$$

erhält man für den Minimalwert p_0

$$p_0^2 = (a - q)^2 - q \frac{(a \cos 2i - q)^2}{q - a \sin^2 2i}$$

wobei natürlich $i < i_0$ ist.

Entwickelt man bis Größen 3. Ordnung, so ist

$$\frac{p_0^2}{a^2} = 4 \sin^2 i [\sigma - \sin^2 i - (\sigma - 2 \sin^2 i)^2]$$

oder, da

$$\sigma - \sin^2 i \text{ wegen } \sin i < \sqrt{\frac{\sigma}{2}}$$

nicht höher als erster Ordnung sein kann,

$$\frac{p_0}{a} = 2 \sin i \sqrt{\sigma - \sin^2 i} - \sin i \frac{(\sigma - 2 \sin^2 i)^2}{\sqrt{\sigma - \sin^2 i}}.$$

Setzt man darin $p_0 = \rho$, so bezeichnet das dadurch bestimmte i die Grenze der Neigungen, außerhalb welcher die Annäherung ρ überhaupt nicht mehr stattfinden kann. Bei Vernachlässigung des Gliedes zweiter Ordnung ergibt sich als erste Näherung für diesen Grenzwert i_1

$$\sin i_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \rho^2}}.$$

Als weitere Näherung würde sich ergeben

$$\sin i_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \rho^2}} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{\sigma^2 - \rho^2}}.$$

Wenn man zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit den Realitätsbereich in der Parabelbahn selbst feststellt, so erhält man zunächst wieder dieselben Relationen wie im vorhergehenden Fall bei kleinen Neigungen, daher auch für die Grenzwerte, innerhalb welchen die Größe M liegen muß, die frühere Gleichung

$$M^2 = 4 A^2 (\sigma - 2 \sin^2 i) + 4 A^2 \sqrt{(\sigma - 2 \sin^2 i)^2 + \frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2}.$$

Von hier ab unterscheidet sich aber dieser Fall von dem vorigen. Da hier $\frac{\rho^2}{a^2} - \sigma^2$ eine negative Größe ist, so geben beide Vorzeichen der Wurzel reelle Werte für M , entsprechend den beiden in diesem Falle getrennten Bereiche, die zu beiden Seiten des Perihels und zu diesem symmetrisch gelegen sind. Bezeichnet man die beiden positiven Werte von M mit M'' und M' , so ist $M'' - M'$ der Bereich innerhalb welchem die Erde zur Zeit der Perihelpassage des Kometen stehen muß, wenn die Annäherung ρ stattfinden soll. Da ein gleich großer Bereich für negative M existiert, so ist die Wahrscheinlichkeit bei dem vorgelegtem i und q

$$M = \frac{M'' - M'}{\pi}$$

$$M'' = 2A \sqrt{\sigma - 2 \sin^2 i + \sqrt{(\sigma - 2 \sin^2 i)^2 - \left(\sigma^2 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)}}$$

$$M' = 2A \sqrt{\sigma - 2 \sin^2 i - \sqrt{(\sigma - 2 \sin^2 i)^2 - \left(\sigma^2 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)}}$$

woraus sich ergibt

$$w = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} A \sqrt{\sigma - 2 \sin^2 i - \sqrt{\sigma^2 - \frac{\rho^2}{a^2}}}.$$

Für die entsprechende Neigung $\pi - i$ erhält man denselben Ausdruck, nur mit dem Faktor $2 - A$, so daß für die symmetrisch gelegenen Bahnebenen

$$w = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\sigma - 2 \sin^2 i - \sqrt{\sigma^2 - \frac{\rho^2}{a^2}}}$$

ist.

Wie man sieht, ist der Maximalwert i_1 gegeben durch

$$2 \sin^2 i_1 = \sigma - \sqrt{\sigma^2 - \frac{\rho^2}{a^2}}$$

übereinstimmend mit dem obigen Resultat bei der gleichen Annäherung.

Die Wahrscheinlichkeit für sämtliche in Betracht kommenden Neigungen

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{i_1} w \sin i \, di$$

oder mit genügender Näherung

$$V = \frac{1}{4} \int_0^{i_1} v d(\sin^2 i) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{i_1} \sqrt{\sigma - 2 \sin^2 i - \sqrt{\sigma^2 - \frac{\rho^2}{a^2}}} d(\sin^2 i) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{3\pi} \left(\sigma - 2 \sin^2 i - \sqrt{\sigma^2 - \frac{\rho^2}{a^2}} \right)^{3/2} \Big|_0^{i_1} = \frac{\sqrt{2}}{3\pi} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \frac{\rho^2}{a^2}} \right)^{3/2}.$$

Die totale Wahrscheinlichkeit W erhält man durch Summierung über jene q , die in die vorliegende Gruppe von Kometenbahnen gehören. Die obere Grenze derselben ist $a - \rho$, die untere ist willkürlich, aber der Bedingung unterworfen, daß $a - q$ noch eine GröÙe derselben Ordnung wie ρ ist. Nennt man dieselbe vorläufig q_1 und $\sigma_1 = \frac{a - q_1}{a}$,

so ist

$$W_1 = \frac{1}{2a} \int_{q_1}^{a-\rho} V dq = \frac{1}{2} \int_{\frac{\rho}{a}}^{\sigma_1} V d\sigma = \frac{1}{3\pi\sqrt{2}} \int_{\frac{\rho}{a}}^{\sigma_1} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \frac{\rho^2}{a^2}} \right)^{3/2} d\sigma.$$

Die Integration läßt sich tatsächlich ausführen, man erhält, wie leicht verifiziert werden kann,

$$W_1 = \frac{1}{3\pi\sqrt{2}} \left[-\frac{\rho^2}{a^2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \frac{\rho^2}{a^2}} \right)^{5/2} + \frac{1}{5} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \frac{\rho^2}{a^2}} \right)^{5/2} \right] \Big|_{\frac{\rho}{a}}^{\sigma_1}.$$

Die obere Grenze σ_1 wird man gleich $n \frac{\rho}{a}$ setzen können, wo n eine Zahl bedeutet, welche wenige Einheiten beträgt. Es wird dann

$$W_1 = \frac{1}{3\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{5/2} [0.8 + 0.2 (n - \sqrt{n^2 - 1})^{5/2} - (n - \sqrt{n^2 - 1})^{1/2}].$$

Für $n = 3$ erhält man

$$W_1 = 0.0295 \left(\frac{\rho}{a} \right)^{5/2}.$$

Für $n = 10$ — eine Annahme, bei der die hier gemachten Voraussetzungen eigentlich nicht mehr ganz zutreffen — ergibt sich

$$W_1 = 0.0432 \left(\frac{\rho}{a} \right)^{5/2}.$$

5.

Für die Parabelbahnen, die sich an die bisher untersuchten anschließen, die also noch kleinere Periheldistanzen haben, so daß $a - q > \rho$ ist, dabei aber einen von Null um endliche Größen abweichenden Wert hat, wird man eine andere Entwicklung anzuwenden haben, weil hier die Voraussetzung der kleinen v und φ nicht mehr zutrifft. Da $a - r = a - q - q \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}$ eine GröÙe erster Ordnung sein muß, so kann hier v keine kleine GröÙe mehr sein. Der Fall, daß q selbst eine kleine GröÙe ist, soll hier noch ausgeschlossen sein.

Es liegt nun nahe, die Parabelgleichung für die Umgebung von $r = a$ zu entwickeln. Die zugehörige Anomalie ist gegeben durch

$$\cos^2 \frac{v_0}{2} = \frac{q}{a}$$

oder

$$\sin v_0 = 2 \sqrt{\frac{q}{a}} \sqrt{1 - \frac{q}{a}}.$$

Da bei der parabolischen Bewegung

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k}{\sqrt{p}} \sin v, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{k^2}{r^2} \cos v \dots$$

ist, so ist weiter

$$r = a + t \cdot \frac{k}{\sqrt{p}} \sin v_0 + \frac{1}{2} t^2 \cdot \frac{k^2}{a^2} \cos v_0 + \dots$$

Berücksichtigt man den eben erhaltenen Wert für v_0 und setzt den in der Zeit t von der Erde zurückgelegten Bogen

$$mt = \frac{k}{a^{3/2}} t = \tau,$$

so wird

$$\frac{r-a}{a} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{q}{a}} \cdot \tau - \frac{1}{2} \left(1 - 2 \frac{q}{a} \right) \tau^2 + \dots,$$

wo τ erster Ordnung ist.

Ebenso ist wegen

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k \sqrt{p}}{r^2} \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} = - \frac{2 k^2}{r^3} \sin v, \quad v = v_0 + \sqrt{2} \sqrt{\frac{q}{a}} \cdot \tau - 2 \sqrt{\frac{q}{a}} \sqrt{1 - \frac{q}{a}} \cdot \tau^2 + \dots$$

Aus

$$\rho^2 = (a-r)^2 + 4ar \left(\cos^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{v-\varphi}{2} + \sin^2 \frac{i}{2} \sin^2 \frac{v+\varphi}{2} \right)$$

geht nun hervor, daß entweder i und $v-\varphi$ oder $180-i$ und $v+\varphi$ von der ersten Ordnung sein müssen.

Betrachtet man zunächst wieder den Fall der kleinen i , so kann man unter Einhaltung der bisherigen Genauigkeit setzen

$$\frac{\rho^2}{a^2} = 2 \left(1 - \frac{q}{a} \right) \tau^2 + \sin^2 (v-\varphi) + \sin^2 i \sin^2 \frac{v+\varphi}{2}$$

und das ist weiter

$$= 2 \left(1 - \frac{q}{a} \right) \tau^2 + \sin^2 (v-\varphi) + \sin^2 i \sin^2 v_0,$$

da sich φ von v und v von v_0 nur um Größen erster Ordnung unterscheidet.

Da $\varphi = M + \tau$ ist und $\sin (v-\varphi) = \sin (v_0-M) + \mu \tau$ gesetzt werden kann, wenn

$$\mu = \sqrt{\frac{2q}{a}} - 1$$

ist, so ist weiter

$$\frac{\rho^2}{a^2} = 2 \left(1 - \frac{q}{a} \right) \tau^2 + \mu^2 \tau^2 + 2 \mu \tau \sin (v_0-M) + \sin^2 (v_0-M) + \sin^2 i \sin^2 v_0.$$

Für die Grenzwerte M innerhalb deren für ein vorgelegtes ρ reelle Werte τ resultieren, erhält man daraus die Gleichung

$$\left(2 \frac{a-q}{a} + \mu^2\right) \left(\frac{\rho^2}{a^2} - \sin^2(v_0 - M) - \sin^2 i \sin^2 v_0\right) + \mu^2 \sin^2(v_0 - M) = 0,$$

woraus folgt:

$$v_0 - M = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{a}{a-q} \mu^2} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - \sin^2 i \sin^2 v_0}.$$

Der Grenzwert i_1 der Neigungen, über welchen die Annäherung ρ nicht mehr möglich ist, ist gegeben durch

$$\sin i_1 = \frac{\rho}{a \sin v_0} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\sqrt{q(a-q)}}$$

also tatsächlich eine Größe erster Ordnung.

Der ganze Bereich der M wird mit Rücksicht auf den symmetrisch gelegenen bei $-v_0$ gleich dem vierfachen Betrag von $v_0 - M$ sein und die entsprechende Wahrscheinlichkeit, wenn für μ wieder substituiert wird,

$$w = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2q}{a}} \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - \sin^2 i \sin^2 v_0}}.$$

Ist im anderen Falle die Neigung nahe bei 180° und setzt man dieselbe gleich $\pi - i$, wo i wieder erster Ordnung ist, setzt man weiter

$$\sin(v + \tau) = \sin(v_0 + M) + \mu' \tau,$$

wo

$$\mu' = \sqrt{\frac{2q}{a}} + 1,$$

so findet man auf dieselbe Weise

$$\frac{\rho^2}{a^2} = 2 \left(1 - \frac{q}{a}\right) \tau^2 + \mu'^2 \tau^2 + 2 \mu' \tau \sin(v_0 + M) + \sin^2(v_0 + M) + \sin^2 i \sin^2 v_0$$

und als Grenzwerte der reellen Lösungen

$$\left(2 \frac{a-q}{a} + \mu'^2\right) \left(\frac{\rho^2}{a^2} - \sin^2(v_0 + M) - \sin^2 i \sin^2 v_0\right) + \mu'^2 \sin^2(v_0 + M) = 0,$$

woraus

$$v_0 + M = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{a}{a-q} \mu'^2} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - \sin^2 i \sin^2 v_0}$$

folgt und für das entsprechende

$$w = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sqrt{\frac{a}{a-q}} \sqrt{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2q}{a}} \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - \sin^2 i \sin^2 v_0}}.$$

Da

$$\sqrt{1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2q}{a}}} + \sqrt{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2q}{a}}} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{q}{a}}}$$

ist, so ist die Wahrscheinlichkeit bezüglich der beiden einander entsprechenden Bahnen i und $180^\circ - i$:

$$w = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{\frac{a}{a-q}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{q}{a}}} \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - \sin^2 i \sin^2 v_0}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für sämtliche Neigungen von 0 bis i_1 ist

$$V = \frac{1}{4} \int_0^{i_1} w d(\sin^2 i) = \frac{1}{4\pi\sqrt{3}} \frac{a}{q} \left(\frac{a}{a-q}\right)^{3/2} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{q}{a}}} \left(\frac{\rho}{a}\right)^3$$

wobei für $\sin^2 v_0$ der obige Wert eingesetzt wurde.

Die Wahrscheinlichkeit für sämtliche hieher gehörigen Periheldistanzen

$$W = \frac{1}{2a} \int_{q_1}^{q_2} V dq$$

oder, wenn man $\frac{q}{a} = x$ setzt,

$$W = \frac{1}{8\pi\sqrt{3}} \left(\frac{\rho}{a}\right)^3 \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(1-x)^{3/2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9} x}} dx.$$

Da $x < 1$, und zwar um endliche Beträge, so wird die Entwicklung der Wurzelgröße und Berücksichtigung der ersten Glieder eine ausreichende Annäherung geben. Man findet

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9} x}} = \sqrt{2} \left[1 - \frac{1}{3^2} x - \frac{5}{2 \cdot 3^4} x^2 - \frac{21}{2 \cdot 3^6} x^3 - \dots \right].$$

Die Integration der einzelnen Glieder gibt:

$$\int \frac{1}{x} \frac{dx}{(1-x)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x}} + \log \frac{1 - \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}}, \quad \int \frac{dx}{(1-x)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x}}$$

$$\int \frac{x dx}{(1-x)^{3/2}} = \frac{4}{\sqrt{1-x}} - \frac{2x}{\sqrt{1-x}}, \quad \int \frac{x^2 dx}{(1-x)^{3/2}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{1-x}} (8 - 4x - x^2)$$

u. s. w., so daß schließlich erhalten wird

$$W = 0.0325 \left(\frac{\rho}{a}\right)^3 \left[\log \frac{1 - \sqrt{1-x_1}}{1 + \sqrt{1-x_1}} + \frac{1.4519}{\sqrt{1-x_1}} (1 + 0.0635 x + 0.0061 x^2 + \dots) \right]$$

worin noch die Grenzen einzuführen sind.

Der vorliegende Fall umfaßt nun Periheldistanzen, die zwischen 0 und a liegen und von diesen Grenzen um Beträge, die größer als erster Ordnung sind, abweichen. Man wird dieser Bedingung dadurch entsprechen können, daß man $x_1 = n \frac{\rho}{a}$ setzt, wo n die frühere Bedeutung hat, und von x_1 bis $1 - x_1$ integriert. Der logarithmische Teil wird dann

$$\log \frac{1 - \sqrt{x_1}}{1 + \sqrt{x_1}} + \log \frac{(1 + \sqrt{1-x_1})^2}{x_1},$$

woraus die Entwicklung mit genügender Annäherung

$$\log \frac{1}{x_1} + \log 4 - 2\sqrt{x_1} - \frac{1}{2}x_1$$

ergibt.

Der algebraische Teil besteht aus einem Gliede $\frac{1}{\sqrt{x_1}}$, wodurch dieselbe Größenordnung wie in den vorigen Fällen resultiert, und einer Potenzreihe nach $\sqrt{x_1}$; die Vereinigung mit dem ersten Teil ergibt

$$W_2 = 0.0325 \left(\frac{\rho}{a}\right)^3 \left[\frac{1.553}{\sqrt{x_1}} - 0.066 + \log \frac{1}{x_1} - 2.110\sqrt{x_1} - 1.318x_1 \right]$$

oder, wenn $x_1 = n \frac{\rho}{a}$ gesetzt wird,

$$W_2 = 0.050 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{\rho}{a}\right)^{5/2} \left[1 + 0.644 \sqrt{n \frac{\rho}{a}} \log \frac{1}{n \frac{\rho}{a}} - 0.042 \sqrt{n \frac{\rho}{a}} - \right. \\ \left. - 1.359 n \frac{\rho}{a} - 0.849 \left(n \frac{\rho}{a}\right)^{3/2} \right].$$

Für $n = 3$ erhält man

$$W_2 = 0.029 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{5/2} \left[1 + \sqrt{\frac{\rho}{a}} \left(2.567 \log \frac{a}{\rho} - 1.298 \right) - 4.076 \frac{\rho}{a} - \dots \right],$$

wobei der Koeffizient von $\log \frac{a}{\rho}$ für den Briggs'schen Logarithmus gilt.

Für $n = 10$ erhält man

$$W_2 = 0.016 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{5/2} \left[1 + \sqrt{\frac{\rho}{a}} \left(2.036 \log \frac{a}{\rho} - 4.822 \right) - 13.585 \frac{\rho}{a} - \dots \right].$$

Die Wahrscheinlichkeit für sämtliche Bahnen von $q = a - \rho$ bis $q = n \frac{\rho}{a}$ ist demnach bei Beschränkung auf das erste Glied

$$W = 0.059 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{5/2}$$

woraus schon hervorgeht, daß der Beitrag der noch restierenden Bahnen $q < n \frac{\rho}{a}$ sich nur in den Gliedern höherer Ordnung äußern kann.

6.

Zieht man schließlich noch die Bahnen mit kleiner Periheldistanz in Betracht, bei welchen also q von derselben Größenordnung wie ρ ist, so sieht man zunächst, daß v nahe an 180° liegen muß, da $a - r = a - q - q \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}$ eine Größe erster Ordnung sein soll, $\frac{\pi}{2} - \frac{v}{2}$ daher mindestens mit $\sqrt{\frac{\rho}{a}}$ vergleichbar sein muß. Es ist auch von vornherein klar, daß für genügend kleine q wieder sämtliche Neigungen möglich sein müssen. Über die in diesem Falle eintretenden Verhältnisse gibt wieder die Betrachtung der Minimalabstände p sofort Aufschluß.

Es war

$$p^2 = q^2 (1 + \Theta)^2 + a^2 - 2aq \sqrt{(1 + \Theta)^2 - 4\Theta \sin^2 i} \text{ und } \Theta = \tan^2 \frac{v}{2}.$$

Führt man den kleinen Winkel $v' = \pi - v$ ein, so wird

$$p^2 = \frac{q^2}{\sin^4 \frac{v'}{2}} + a^2 - \frac{2aq}{\sin^2 \frac{v'}{2}} \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{v'}{2} \cos^2 \frac{v'}{2} \sin^2 i};$$

da $(v')^2$ erster Ordnung ist, so ist $\frac{q}{\sin^2 \frac{v'}{2}}$ nullter Ordnung. In erster Annäherung ist

$$p^2 = \left(\frac{q}{\sin^2 \frac{v'}{2}} - a \right)^2 + 4aq \sin^2 i.$$

Für $\sin^2 \frac{v'}{2} = \frac{q}{a}$ erhält man den kleinsten Wert $p_0 = 2 \sin i \sqrt{aq}$.

Wenn nun eine Annäherung ρ überhaupt möglich sein soll, so muß $\rho \geq p_0$ oder $\rho \geq 2 \sin i \sqrt{aq}$ sein. Ist daher $q \leq \frac{\rho^2}{4a}$, so wird diese Bedingung für jedes i erfüllt sein, das heißt, von $q_1 = \frac{\rho^2}{4a}$ ab sind wieder alle Neigungen möglich, während bei größeren Periheldistanzen eine Grenze i_1 existiert, die gegeben ist durch $\sin i_1 = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{aq}}$, ein Wert, der mit dem früheren Grenzwert für den Fall kleiner q identisch ist.

Allerdings ist nun das Wiederauftreten sämtlicher Neigungen kaum von aktueller Bedeutung, da der zugehörige Grenzwert q_1 bei einigermaßen starker Annäherung Beträge annimmt, die kleiner sind als der Sonnenradius. Nimmt man etwa $\rho = 0.01 a$ an, so wird $q_1 = 0.000025 a$, während der Halbmesser der Sonne ungefähr $0.00465 a$ ist. Für diese letztere Periheldistanz würden erst bei $\rho = 0.14$ sämtliche Neigungen möglich werden. Dasselbe gilt überhaupt für größere Beträge von i : so würde für $i = 45^\circ$ bei q gleich den Sonnenradius eine Annäherung von nur $0.1 a$ erforderlich sein. Hingegen wird für $\rho = 0.01 a$ und dem Minimalbetrag $q = 0.00465 a$ der Grenzwert $i_1 = 4^\circ 5'$ sein. Faßt man zunächst nur bedeutendere Annäherungen ins Auge, so kann man demnach auch hier kleine Neigungen voraussetzen, so zwar, daß etwa $\sin^2 i$ als Größe erster Ordnung zu betrachten ist. (Für den symmetrischen Fall $180^\circ - i$ gelten natürlich analoge Schlüsse.)

Auf Grund dieser Überlegung gestaltet sich die Behandlung dieses Falles verhältnismäßig einfach. Führt man zunächst statt der Winkel v, v_0, φ und M die kleinen Supplementwinkel v', v'_0, φ' und M' ein, so ist wie oben

$$\frac{\rho^2}{a^2} = \left(\frac{r-a}{a} \right)^2 + \cos^2 \frac{i}{2} \sin^2 (v' - \varphi') + \sin^2 \frac{i}{2} \sin^2 (v' + \varphi')$$

und

$$r = v'_0 - \sqrt{2} \sqrt{\frac{q}{a}} \cdot \tau, \quad \varphi' = M' - \tau$$

$$r - a = a \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{q}{a}} \cdot \tau + \dots$$

Wegen der Kleinheit von q kann hier $\left(\frac{r-a}{a} \right)^2 = 2\tau^2$ gesetzt werden. τ ist wieder erster Ordnung,

deshalb kann bei einem Faktor derselben Ordnung v' durch v'_0 ersetzt werden. Das ist aber hier durchwegs der Fall. Bei kleinem i ist

$$v' - \varphi' = v'_0 - M' + \tau - \sqrt{2} \sqrt{\frac{q}{a}} \tau$$

erster Ordnung, daher auch $v'_0 - M'$, so daß bei der Quadrierung der veränderliche Teil von v' höherer als zweiter Ordnung wird; im letzten Gliede ist des Faktors $\sin^2 \frac{i}{2}$ wegen $v' = v'_0$ zu setzen. Analoges gilt für Neigungen nahe an 180° , so daß hier während der Dauer der Annäherung die Änderung der wahren Anomalie des Kometen vernachlässigt werden kann und nur die Änderung des Radius in Frage kommt.

Im Falle kleiner Neigungen kann deshalb hier gesetzt werden:

$$\frac{\rho^2}{a^2} = 2\tau^2 + (M' - \tau - v'_0)^2 + (v'_0 + M')^2 \sin^2 \frac{i}{2}$$

Die Grenzen der M' für reelle Lösungen τ erfolgen aus

$$3 \left[\frac{\rho^2}{a^2} - (M' - v'_0)^2 - (M' + v'_0)^2 \sin^2 \frac{i}{2} \right] + (M' - v'_0)^2 = 0$$

oder mit Rücksicht auf die Kleinheit von i

$$M'^2 - 2M'v'_0 \left(1 - 3 \sin^2 \frac{i}{2} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho^2}{a^2} - v'^2_0,$$

so daß

$$M' = v'_0 \left(1 - 3 \sin^2 \frac{i}{2} \right) + \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - 4 \frac{\rho}{a} \sin^2 i},$$

wobei unter der Wurzel $v'^2_0 = 4 \frac{q}{a}$ gesetzt wurde. Man sieht, daß hier wieder der früher angegebene Grenzwert von i erhalten wird.

Ist die Neigung nahe an 180° und setzt man dieselbe gleich $\pi - i$, so erhält man zunächst

$$\frac{\rho^2}{a^2} = 2\tau^2 + (M' - v'_0)^2 \sin^2 \frac{i}{2} + (v'_0 + M' - \tau)^2$$

und für die Grenzwerte der M'

$$M' = -v'_0 \left(1 - 3 \sin^2 \frac{i}{2} \right) + \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - 4 \frac{q}{a} \sin^2 i}.$$

Der Gesamtbereich der M' für gegebene i und q ist das Achtfache der Wurzelgröße und die Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - 4 \frac{q}{a} \sin^2 i}.$$

Ferner ist

$$V = \frac{1}{4} \int_0^{i_1} w d(\sin^2 i) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{a}{q} \cdot \left(\frac{\rho}{a} \right)^3$$

und die totale Wahrscheinlichkeit

$$W_3 = \frac{1}{2a} \int_{q_0}^{q_1} V dq = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\rho}{a} \right)^3 \log \frac{q_1}{q_0}.$$

Setzt man für die untere Grenze q_0 den Sonnenhalbmesser, für $q_1 = n \frac{\rho}{a}$, so ergibt sich

$$W_3 = 0.075 \left(\frac{\rho}{a} \right)^3 \left(2.332 + \log n + \log \frac{\rho}{a} \right),$$

worin unter $\log$ der Briggs'sche Logarithmus verstanden ist. Der Beitrag dieser Gruppe von Bahnen ist demnach tatsächlich höherer Ordnung, die auch durch die Zahlenwerte der Klammergröße nicht geändert wird. Für $n = 3$ oder $n = 10$ wird

$$W_3 = 0.075 \left(\frac{\rho}{a} \right)^3 \left(2.409 + \log \frac{\rho}{a} \right)$$

respektive

$$= 0.075 \left(\frac{\rho}{a} \right)^3 \left(3.332 + \log \frac{\rho}{a} \right).$$

Der eben erhaltene Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit bei kleinen Periheldistanzen gilt auch für beliebige Neigungen, daher auch für den Fall, als ρ so groß ist, daß für die noch in Betracht kommenden Periheldistanzen $4a < \rho^2$ ist und somit i alle Werte von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ annehmen kann. Die Bedingung der Annäherung ist dann

$$\frac{\rho^2}{a^2} = 3\tau^2 + M'^2 + v_0'^2 - 2M'v_0' \cos i - 2(M' - v_0' \cos i)\tau,$$

im Grenzwerte M' folgen aus

$$M' - v_0' \cos i = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - v_0'^2 \sin^2 i},$$

so daß wie früher erhalten wird

$$w = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - \frac{4q}{a}} \sin i.$$

$V = \frac{1}{2} \int_0^{i_1} w \sin i \, di$ ist hier streng durchzuführen, es ist dann

$$V = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\rho}{a} \int_0^{i_1} \sqrt{1 - h^2 \sin^2 i} \cdot \sin i \, di,$$

wo $h^2 = \frac{4aq}{\rho^2}$ ist, oder

$$V = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\rho}{a} \left\{ \cos i \sqrt{1 - h^2 \sin^2 i} + \frac{1 - h^2}{h} \log \left[h \cos i + \sqrt{1 - h^2 \sin^2 i} \right] \right\} \Big|_0^{i_1}.$$

Ist $q' = \frac{\rho^2}{4a}$, so hat man für sämtliche $q \leq q'$ als obere Grenze $\frac{\pi}{2}$ zu nehmen, so daß in diesem

Falle

$$V = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\rho}{a} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - h^2}{h} \log \left(\frac{1 + h}{1 - h} \right) \right]$$

wird. Ferner ist

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2a} \int_0^{q'} V \, dq = \frac{1}{8} \cdot \frac{\rho^2}{a^2} \int_0^1 V \, d(h^2) = \\ &= \frac{1}{8\pi} \frac{\rho^3}{a^3} \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8\pi} \frac{\rho^3}{a^3} \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^1 (1 - h^2) \log \left(\frac{1 + h}{1 - h} \right) \, dh. \end{aligned}$$

Nun ist das letzte Integral für unbestimmte Grenzen gleich

$$\frac{1}{3} \cdot (2-h) (1+h)^2 \log (1+h) + \frac{1}{3} (2+h) (1-h)^2 \log (1-h) - \frac{1}{3} h^2$$

und für die Grenzen 0 und 1 $= \frac{1}{3} (4 \log 2 - 1)$, woraus

$$W = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} (1 + 2 \log 2) \left(\frac{\rho}{a}\right)^3$$

wird.

Wenn hingegen $q > q'$, also $h > 1$ ist, so ist die obere Grenze i_1 gegeben durch $\sin i_1 = \frac{1}{h}$; dann ergibt sich für V der Wert

$$V = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\rho}{a} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-h^2}{h} \log \left(\frac{h+1}{h-1} \right) \right]$$

und für W :

$$W = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\rho}{a}\right)^3 \int_1^{h_1} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-h^2}{h} \log \left(\frac{h+1}{h-1} \right) \right] d(h^2); \quad h_1^2 = \frac{4a q_1}{\rho^2}$$

wo q_1 wieder die obere Grenze der als klein anzusehenden Periheldistanzen ist, also wie oben $= n\rho$ gesetzt werden kann, wenn n eine Zahl von wenigen Einheiten bedeutet.

Da das unbestimmte Integral

$$\int (1-h^2) \log \left(\frac{h+1}{h-1} \right) dh = \frac{1}{3} (2-h) (h+1)^2 \log (h+1) + \frac{1}{3} (2+h) (h-1)^2 \log (h-1) - \frac{1}{3} h^2$$

ist, so wird

$$W = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\rho}{a}\right)^3 \left\{ h_1^2 + \left(1 - \frac{h_1}{2}\right) (h_1+1)^2 \log (h_1+1) + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{h_1}{2}\right) (h_1-1)^2 \log (h_1-1) - 1 - 2 \log 2 \right\}.$$

Vereinigt man diesen Ausdruck mit dem soeben für 0 bis q' gefundenen, so erhält man

$$W_3 = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{\rho}{a}\right)^3 h_1^2 \left\{ 1 + \left(1 - \frac{h_1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{h_1}\right)^2 \left[\log h_1 + \log \left(1 + \frac{1}{h_1}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 + \frac{h_1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{h_1}\right)^2 \left[\log h_1 + \log \left(1 - \frac{1}{h_1}\right) \right] \right\}.$$

Entwickelt man nach der kleinen Größe $\frac{1}{h_1}$, so fallen die Glieder nullter Ordnung weg und es bleibt, abgesehen von Größen höherer Ordnung innerhalb der großen Klammer, nur

$$\frac{2}{h_1^2} \log h_1,$$

so daß

$$W_3 = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\rho}{a}\right)^3 \log h_1^2 = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\rho}{a}\right)^3 \log \frac{4a q_1}{\rho^2}.$$

Nimmt man wie oben als untere Grenze der Periheldistanzen den Sonnenhalbmesser q_0 , so ergibt sich als Wahrscheinlichkeit für sämtliche q zwischen q_0 und q_1

$$W_3 = \frac{1}{8\rho} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{\rho}{a}\right)^3 \log \frac{q_1}{q_0}$$

übereinstimmend mit dem früher unter der beschränkten Annahme der kleinen Neigungen gefundenen Wert. Es ist demnach auf jeden Falle die Wahrscheinlichkeit für kleine Periheldistanzen von höherer Ordnung.

7.

Das Ergebnis der bisherigen Untersuchungen ist folgendes: Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Kometenannäherung unter einer bestimmten Grenze ρ stattfindet, ist für die einzelnen Gruppen von Bahnen:

$$W_a = 0.2217 \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 0.094 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{5/2} \text{ für } q \text{ von } a + \rho \text{ bis } a$$

$$W_i = 0.2217 \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 0.005 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{5/2} \text{ für } q \text{ von } a \text{ bis } a - \rho$$

$$W_1 = 0.030 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{5/2} \text{ für } q \text{ von } a - \rho \text{ bis } a - 3\rho$$

$$W_2 = 0.029 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{5/2} \text{ für } q \text{ von } a - 3\rho \text{ bis } 3\rho.$$

Da diese Ausdrücke nicht die Wahrscheinlichkeit innerhalb der betreffenden Gruppe, sondern die absolute Wahrscheinlichkeit geben, so stellt ihre Summe die totale Wahrscheinlichkeit vor, als welche man schließlich erhält

$$W = 0.443 \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 0.040 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{5/2}.$$

Dieses Resultat ist natürlich nur für kleine ρ gültig, wie aus der Art der Entwicklung hervorgeht, etwa für $\rho < 0.1 a$. Für etwas größere ρ fallen die beiden letzten Gruppen bezüglich der in Frage kommenden Größenordnungen wohl zusammen, wodurch übrigens in den hier berücksichtigten Gliedern nichts geändert wird. Man könnte höchstens noch die in W_2 und W_3 mit etwas größeren Koeffizienten versehenen Glieder $\left(\frac{\rho}{a}\right)^3$ mitnehmen, für welche gefunden wurde:

$$0.029 \left(2.567 \log \frac{1}{\rho} - 1.298\right),$$

respektive

$$0.075 (2.409 + \log \rho),$$

welche vereinigt ein Glied

$$0.123 \left(\frac{\rho}{a}\right)^3$$

geben, durch dessen Berücksichtigung die Resultate nicht wesentlich geändert werden.

Nach dieser Endformel ergeben sich für eine Reihe von $\frac{\rho}{a}$ die nachfolgenden Wahrscheinlichkeiten:

$\frac{\rho}{a}$	W	$\frac{\rho}{a}$	W
0.01	1: 25000	0.13	1: 132
0.02	1: 5600	0.14	1: 115
0.03	1: 2600	0.15	1: 100
0.04	1: 1400	0.16	1: 87
0.05	1: 930	0.17	1: 77
0.06	1: 650	0.18	1: 69
0.07	1: 470	0.19	1: 62
0.08	1: 360	0.20	1: 56
0.09	1: 290	0.21	1: 50
0.10	1: 230	0.22	1: 46
0.11	1: 190	0.23	1: 42
0.12	1: 160	0.24	1: 38
	0.25	1: 35	

Von einem Vergleich dieser Angaben mit den Verhältnissen der bisher bekannten Kometenbahnen mußte vorläufig wegen der Langwierigkeit der diesbezüglichen Untersuchungen abgesehen werden. Vermutlich würden sich daraus etwas größere empirische Wahrscheinlichkeiten ergeben, da ja mit der größeren Annäherung auch die Auffindungsbedingungen günstiger werden, ein Umstand, der teilweise wohl wieder dadurch kompensiert wird, daß die hier gefundenen Zahlen wegen der besonderen Lage der Bahnen größer sind, als bei den tatsächlichen Verhältnissen.

8.

Von Belang für die Beurteilung der berechneten Bahnform eines Kometen wird die Frage sein, welches Stück der Bahn geozentrischen Distanzen entspricht, die unter einer gegebenen Grenze liegen, was darauf hinauskommt, das Verhalten von ρ in der Umgebung seines Minimalbetrages zu untersuchen.

Aus den Differentialformeln für die parabolische Bewegung

$$\frac{dv}{dt} = k\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{q}}{r^2}, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{2k^2 \sin v}{r^3}, \dots$$

erhält man für die Umgebung eines Ausgangsortes r_0, v_0 :

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{a}{q}} \cdot \frac{a}{r_0} \tau - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \cdot \left(\frac{a}{r_0}\right)^3 \tau^2 + \dots$$

wo wie früher $\tau = \frac{k}{a^{3/2}} t$ gesetzt wurde. Man erhält aus diesem ebenso:

$$\frac{r}{a} = \frac{r_0}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a}{q}} \sin v_0 \cdot \tau + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 \cos v_0 \tau^2 + \dots$$

Ist ferner φ_0 der der Ausgangsstelle entsprechende Erdort, so ist $\varphi = \varphi_0 + \tau$.

Führt man nun in

$$\rho^2 = a^2 + r^2 - 2ar (\cos v \cos \varphi + \sin v \sin \varphi \cos i)$$

für

$$r^2, \quad r \cos v = q \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} \right), \quad r \sin v = 2q \operatorname{tg} \frac{v}{2}$$

diese Reihenentwicklungen ein, ebenso für

$$\cos \varphi = \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cdot \tau - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 \cdot \tau^2 + \dots$$

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \tau - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_0 \cdot \tau^2 - \dots$$

so erhält man die geozentrische Distanz in der Form:

$$\left(\frac{\rho}{a} \right)^2 = \left(\frac{\rho_0}{a} \right)^2 + A\tau + B\tau^2 + \dots$$

wo

$$\left(\frac{\rho_0}{a} \right)^2 = 1 + \frac{q^2}{a^2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2} \right)^2 - 2 \frac{q}{a} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2} \right) \cos \varphi_0 - 4 \frac{q}{a} \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \sin \varphi_0 \cos i,$$

$$\begin{aligned} A &= 2 \sqrt{2} \sqrt{\frac{q}{a}} \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2} \right)^{3/2} + 2 \frac{q}{a} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2} \right) \sin \varphi_0 \\ &\quad + 2 \sqrt{2} \sqrt{\frac{q}{a}} \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2}} \cdot \cos \varphi_0 - \\ &\quad - 4 \frac{q}{a} \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \cos \varphi_0 \cos i - 2 \sqrt{2} \sqrt{\frac{a}{q}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2}} \cdot \sin \varphi_0 \cos i \\ B &= \frac{a}{q} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{q}{a} \left[\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2} \right) \cos^2 \varphi_0 + \left(\frac{a}{q} \right)^3 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2} \right) \cos \varphi_0 - 2 \sqrt{2} \left(\frac{a}{q} \right)^{3/2} \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2}} \cdot \sin \varphi_0 \right] + \\ &\quad + 2 \frac{q}{a} \cos i \left[\left(1 + \frac{a^3}{q^3} \right) \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \sin \varphi_0 - \sqrt{2} \cdot \left(\frac{a}{q} \right)^{3/2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2}} \cos \varphi_0 \right]. \end{aligned}$$

Soll nun ρ_0 ein Minimum, so muß $A=0$ sein, durch welche Bedingung bei einer vorgelegten Kometenbahn jedem Erdort eine bestimmte Stelle derselben für den Eintritt des Minimums sowie eine bestimmte Minimaldistanz zugeordnet wird. Die zu behandelnde Aufgabe wird darin bestehen, von einer Minimaldistanz ρ_0 ab, deren Wahrscheinlichkeit über einer gewissen Grenze liegt, jenen Bogen der Kometenbahn zu bestimmen, für welchen die geozentrischen Distanzen unter einer gegebenen Größe $\rho > \rho_0$ bleiben.

Da der Zusammenhang der fraglichen Größen durchaus kein einfacher ist, so wird es sich empfehlen gewisse einschließende Grenzfälle numerisch zu behandeln, umsomehr, als es nur darauf ankommen wird einen ungefähren Begriff von der Ausdehnung dieser Bahnstücke zu gewinnen.

Man wird für diesen Zweck schon den obigen Bedingungsgleichungen Formen geben können, die für die numerische Auswertung bequemer sind. Da es sich immerhin um kleinere Beträge für ρ_0 handeln wird, so kann man annehmen, daß φ_0 von v_0 , respektive $-v_0$, je nachdem $i \leq 90^\circ$ ist, auch nur um kleine Beträge verschieden sein wird. Setzt man daher $\varphi = \pm v_0 + \xi$ und berücksichtigt nur erste Potenzen von ξ , so wird diese Genauigkeit für die vorliegenden Zwecke völlig ausreichen. Die Entwicklung der beiden Bedingungsgleichungen: Minimaldistanz $= \rho_0$ und $A=0$ ergibt nach einigen leichten Reduktionen:

$$i < 90^\circ$$

$$\rho_0^2 = 1 - 2q \sec^2 \frac{v_0}{2} + q^2 \sec^4 \frac{v_0}{2} + q R_1 \sin^2 \frac{i}{2} + q R_2 \sin^2 \frac{i}{2} \cdot \xi$$

$$0 = A_1 - A_2 q + A_3 \sin^2 \frac{i}{2} + A_4 \sin^2 \frac{i}{2} \cdot \xi + A_5 \sin^2 \frac{i}{2} \cdot q^{3/2};$$

$$i > 90^\circ$$

$$\rho_0^2 = 1 - 2q \sec^2 \frac{v_0}{2} + q^2 \sec^4 \frac{v_0}{2} + q R_1 \cos^2 \frac{i}{2} - q R_2 \cos^2 \frac{i}{2} \cdot \xi$$

$$0 = A_1 - A_2 q + A_3 \cos^2 \frac{i}{2} - A_4 \cos^2 \frac{i}{2} \cdot \xi - A_5 \cos^2 \frac{i}{2} \cdot q^{3/2}.$$

Die Größen R und A hängen nur von v_0 ab, und zwar ist

$$R_1 = 8 \sin v \operatorname{tg} \frac{v}{2} \quad R_2 = 8 \cos v \operatorname{tg} \frac{v}{2}$$

$$A_1 = \frac{1}{4} \sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \quad A_2 = \frac{1}{4} \sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \sec^2 \frac{v}{2} \quad A_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sin v$$

$$A_4 = \frac{1}{2} \sqrt{2} (\cos v - \sin^2 v) \quad A_5 = \operatorname{tg} \frac{v}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} \right),$$

wobei wie in allen folgenden numerischen Entwicklungen $a = 1$ gesetzt wurde.

Die nachstehende Tabelle soll einen Überblick über den Gang dieser Größen geben:

v	R_1	R_2	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0°	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.707	0.000
10°	0.122	0.689	0.031	0.031	0.123	0.675	0.087
20°	0.483	1.326	0.062	0.064	0.242	0.582	0.171
30°	1.072	1.856	0.095	0.102	0.354	0.436	0.249
40°	1.872	2.231	0.129	0.146	0.455	0.249	0.316
50°	2.858	2.398	0.165	0.201	0.542	0.040	0.365
60°	4.000	2.309	0.204	0.272	0.612	-0.177	0.385
70°	5.264	1.916	0.248	0.369	0.664	-0.383	0.357
80°	6.611	1.166	0.297	0.506	0.696	-0.563	0.248
90°	8.000	0.000	0.354	0.707	0.707	-0.707	0.000
100°	9.389	-1.656	0.421	1.020	0.696	-0.809	-0.501
110°	10.736	-3.908	0.505	1.535	0.664	-0.866	-1.485
120°	12.000	-6.928	0.612	2.449	0.612	-0.884	-3.464
130°	13.142	-11.028	0.758	4.235	0.542	-0.869	-7.718

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann ist

$$\rho^2 = \rho_0^2 + B\tau^2 \text{ oder } \tau = \sqrt{\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{B}},$$

woraus sich die zugehörigen Anomalien und damit auch jenes Bahnstück finden läßt, in welchem die geozentrische Distanz unterhalb eines gegebenen Betrages ρ bleibt.

Macht man nun eine bestimmte Annahme über ρ_0 , so läßt sich nach der früheren Untersuchung die Wahrscheinlichkeit $1 - W$ angeben, daß ρ_0 nicht erreicht wird, das heißt, es läßt sich angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Annäherung $< \rho$ außerhalb der Umgebung ρ_0 des Kometen verläuft, mit welcher Wahrscheinlichkeit daher die Folgerungen bezüglich der Genauigkeit der Elementenbestimmung — so weit sie von den Distanzverhältnissen abhängt — nicht erreicht werden.

Da die auf die vorliegende Frage Bezug nehmenden allgemeinen Relationen nur schwer einen Einblick in die dabei auftretenden Verhältnisse gestatten, so sollen nun tatsächlich bestimmte Annahmen gemacht und für diese die Art der Annäherung ermittelt werden. Es soll $\rho_0 = \frac{1}{4}$ gesetzt werden; das bedeutet nach dem Früheren eine Umgebung des Himmelskörpers, deren Erreichung unter 35 Fällen 1mal zu erwarten ist. Es sei ferner nach jenem Stück der Kometenbahn gefragt, welches geozentrischen Entfernungen kleiner als $\frac{1}{2}$ entspricht.

In diesem Falle ist

$$\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} = 0.433.$$

Da ferner $\sin \xi \leq \rho_0$ sein muß, so erhält man als obere Grenze der ξ : $14^\circ 29'$.

Ebenso erhält man für jede Periheldistanz q gewisse Grenzen, in welche man die Anomalie des Kometen von vornherein einschließen kann, durch die unmittelbar einzusehende Bedingung daß $\cos^2 \frac{v_0}{2}$ zwischen $\frac{q}{1 + \rho_0}$ und $\frac{\rho}{1 - \rho_0}$ liegen muß.

Man erhält daraus für

$q = \frac{5}{4}$	als Grenzen der v	0°
$q = 1$	» » » v	$0^\circ \dots\dots 53^\circ 8'$
$q = \frac{3}{4}$	» » » v	$0^\circ \dots\dots 78^\circ 28'$
$q = \frac{1}{2}$	» » » v	$70^\circ 32' \dots 101^\circ 32'$
$q = \frac{1}{4}$	» » » v	$109^\circ 28' \dots 126^\circ 52'.$

Wenn man nun tatsächlich die verschiedenen Umstände der zu untersuchenden Annäherung ermitteln wollte, so könnte man die Gebiete v noch weiter einengen, respektive gewisse Teile der Bahn von vornherein ausschließen, in welchen ein Minimum von der vorgeschriebenen Größe $\rho_0 = \frac{1}{4}$ nicht eintreten kann.

Aus den beiden Bedingungsgleichungen folgt nämlich:

Für $i < 90^\circ$

$$\sin^2 \frac{i}{2} = \frac{A_2 q - A_1}{A_3 + A_5 q^{3/2} + A_4 \xi}$$

und

$$\sin^2 \frac{i}{2} = \frac{\rho_0^2 - (1 - r_0)^2}{q (R_1 + R_2 \xi)};$$

Für $> 90^\circ$

$$\cos^2 \frac{i}{2} = \frac{A_2 q - A_1}{A_3 - A_5 q^{3/2} - A_4 \xi}$$

und

$$\cos^2 \frac{i}{2} = \frac{\rho_0^2 - (1 - r_0)^2}{q (R_1 - R_2 \xi)}.$$

Da ξ absolut genommen höchstens gleich $\frac{1}{4}$ sein kann, so wird man durch Einführung von $\xi = \pm \frac{1}{4}$ für jedes v_0 aus beiden Bedingungsgleichungen Grenzen für i angeben können. Nur dann, wenn beide so erhaltenen Bereiche für i einen gemeinsamen reellen Teil haben, kommt die betreffende Ausgangsanomalie v_0 überhaupt in Frage.

Von einer derartigen Untersuchung soll aber hier abgesehen werden, umsomehr, als es sich schließlich nur um die Dauer einer derartigen Annäherung handeln wird und ihre Abhängigkeit von den einzelnen Umständen, ganz abgesehen davon, ob im einzelnen Falle gerade ein derartiges Minimum zu Stande kommen kann.

9.

Die Frage wird also dahingehen, die Werte der Koeffizienten B für die einzelnen, von vornherein in Frage kommenden Gebiete festzustellen. Man kann zum Zwecke der numerischen Auswertung dieser Größe für den Fall eines bestimmten ρ_0 eine bequemere Darstellung angeben. Es ist

$$\begin{aligned} 2B &= \frac{d^2(\rho^2)}{d\tau^2} = \\ &= -\frac{d^2(r^2)}{d\tau^2} - 2 \cos \varphi \frac{d^2(r \cos v)}{d\tau^2} - 2 \sin \varphi \cos i \frac{d^2(r \sin v)}{d\tau^2} \\ &\quad + 4 \sin \varphi \frac{d(r \cos v)}{d\tau} - 4 \varphi \cos i \frac{d(r \sin v)}{d\tau} \\ &\quad + 2r \cos v \cos \varphi + 2r \sin v \sin \varphi \cos i. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{d^2(r^2)}{d\tau^2} &= 2 \sqrt{2q} \operatorname{tg} \frac{v}{2} & \frac{d^2(r^2)}{d\tau^2} &= \frac{2 \cos^2 \frac{v}{2}}{q} = \frac{2}{r} \\ \frac{d(r \cos v)}{d\tau} &= -\frac{\sin v}{\sqrt{2q}} & \frac{d^2(r \cos v)}{d\tau^2} &= -\frac{\cos v}{r^2} \\ \frac{d(r \sin v)}{d\tau} &= \sqrt{\frac{2}{q}} \cos^2 \frac{v}{2} & \frac{d^2(r \sin v)}{d\tau^2} &= -\frac{\sin v}{r^2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\rho^2)}{d\tau^2} &= \frac{2}{r} + 2 \left(\frac{1}{r^2} + r \right) (\cos \varphi \cos v + \sin \varphi \sin v \cos i) + \\ &\quad + 2 \sqrt{\frac{2}{q}} \left(\sin \varphi \sin v - 2 \cos \varphi \cos^2 \frac{v}{2} \cos i \right). \end{aligned}$$

Da aber

$$\cos \varphi \cos v + \sin \varphi \sin v \cos i = \frac{1+r^2}{2r} - \frac{\rho^2}{2r},$$

so wird

$$\frac{d^2(\rho^2)}{d\tau^2} = \frac{1}{r} \left[3 + r^3 + \left(\frac{1}{r^2} + r \right) (1 - \rho^2) \right] + 2 \sqrt{\frac{2}{q}} \left(\sin \varphi \sin v - 2 \cos \varphi \cos^2 \frac{v}{2} \cos i \right).$$

Für einen gegebenen Minimalwert ρ_0 hängt der erste Teil nur mehr von r ab. Bezeichnet man denselben mit R , so erhält man für $\rho = \frac{1}{4}$ innerhalb der in Frage kommenden Grenzen $r = 0.75$ bis $r = 1.25$:

r	R	r	R
0.75	7.727 ₁₂₅	1.00	5.875 ₃₇
0.76	7.602 ₁₂₀	1.01	5.838 ₃₅
0.77	7.482 ₁₁₄	1.02	5.803 ₃₃
0.78	7.368 ₁₀₇	1.03	5.770 ₃₂
0.79	7.261 ₁₀₂	1.04	5.738 ₃₀
0.80	7.159 ₉₉	1.05	5.708 ₂₉
0.81	7.060 ₉₄	1.06	5.679 ₂₈
0.82	6.966 ₈₉	1.07	5.651 ₂₆
0.83	6.877 ₈₄	1.08	5.625 ₂₄
0.84	6.792 ₇₈	1.09	5.601 ₂₂
0.85	6.716 ₇₆	1.10	5.579 ₂₁
0.86	6.640 ₇₃	1.11	5.558 ₂₀
0.87	6.567 ₇₀	1.12	5.538 ₁₉
0.88	6.497 ₆₇	1.13	5.519 ₁₈
0.89	6.430 ₆₂	1.14	5.501 ₁₆
0.90	6.368 ₆₀	1.15	5.485 ₁₅
0.91	6.308 ₅₈	1.16	5.470 ₁₄
0.92	6.250 ₅₅	1.17	5.456 ₁₃
0.93	6.195 ₅₃	1.18	5.443 ₁₂
0.94	6.142 ₅₁	1.19	5.431 ₁₁
0.95	6.091 ₄₈	1.20	5.420 ₁₀
0.96	6.043 ₄₅	1.21	5.410 ₉
0.97	5.998 ₄₃	1.22	5.401 ₈
0.98	5.955 ₄₁	1.23	5.393 ₇
0.99	5.914 ₃₉	1.24	5.386 ₆
1.00	5.875	1.25	5.380

Bezüglich der beiden letzten Glieder kann man sich eine Vereinfachung erlauben: φ kann sich von v höchstens um den Betrag von etwa 14° unterscheiden. Setzt man als einen mittleren Wert $\varphi = v$, so können sich die wahren Werte von B von den so ermittelten nur um Größen unterscheiden, die für die vorliegende Frage ganz belanglos sind. Man wird demnach setzen können

$$\frac{d^2(\rho^2)}{d\tau^2} = R - S_1 - S_2 \cos i$$

wo

$$S_1 = 2 \sqrt{\frac{2}{q}} \sin^2 v, S_2 = 4 \sqrt{\frac{2}{q}} \cos v \cos^2 \frac{v}{2} \text{ ist.}$$

Mit Hilfe dieser Größen sind nun für die oben angegebenen Periheldistanzen die Koeffizienten B und jene τ berechnet worden, die dem Anwachsen der geozentrischen Distanz vom Minimum $\frac{1}{4}$ bis $\rho = \frac{1}{2}$ entsprechen. Übrigens ist in jenen Fällen, in welchen wegen der Größe von τ dieses Verfahren keine genügende Annäherung darstellt, der Wert τ direkt ermittelt worden.

$$(1) q = \frac{5}{4}.$$

Es kommt hier nur $v = 0$ in Frage. Dann ist

$$R = 5.380 \quad S_1 = 0.000 \quad S_2 = 5.060.$$

Neigungen sind sämtliche möglich. Es findet sich für

i	$2B$	τ
0°	0.320	0.913
30°	0.998	0.616
60°	2.850	0.361
90°	5.380	0.264
120°	7.910	0.217
150°	9.762	0.196
180°	10.440	0.189

$$(2) q = 1 \quad v = 0^\circ \dots 53^\circ 8'.$$

$$v = 0 \quad R = 5.875 \quad S_1 = 0.000 \quad S_2 = 5.657$$

$$i = 0^\circ \dots 180^\circ$$

i	$2B$	τ
0°	0.218	1.150
30°	0.978	0.618
60°	3.046	0.350
90°	5.875	0.251
120°	8.704	0.207
150°	10.774	0.186
180°	11.532	0.179

$$v = 10 \quad R = 5.846 \quad S_1 = 0.085 \quad S_2 = 5.528$$

$$i = 0^\circ \dots 180^\circ$$

i	$2B$	τ
0°	0.233	0.979
30°	0.974	0.620
60°	3.082	0.353
90°	5.846	0.255
120°	8.610	0.209
150°	10.718	0.187
180°	11.459	0.182

$$v = 20^\circ \quad R = 5.767 \quad S_1 = 0.331 \quad S_2 = 5.155$$

$$i = 0^\circ \dots 47^\circ 7'$$

i	$2B$	τ
$0^\circ \quad 0'$	0.281	0.902
$47^\circ \quad 7'$	1.920	0.260
$132^\circ \quad 53'$	9.609	0.198
$180^\circ \quad 0'$	11.253	0.183

$$v = 30^\circ \quad R = 5.646 \quad S_1 = 0.707 \quad S_2 = 4.571$$

$$i = 0^\circ \dots 30^\circ 5'$$

i	$2B$	τ
$0^\circ \quad 0'$	0.368	0.779
$30^\circ \quad 5'$	0.985	0.331
$149^\circ \quad 55'$	10.307	0.191
$180^\circ \quad 0'$	10.924	0.190

$$v = 40^\circ \quad R = 5.515 \quad S_1 = 1.169 \quad S_2 = 3.826$$

$$i = 0^\circ \dots 22^\circ 57'$$

i	$2B$	τ
$0^\circ \quad 0'$	0.520	0.623
$22^\circ \quad 57'$	0.822	0.338
$157^\circ \quad 3'$	10.208	0.192
$180^\circ \quad 0'$	10.510	0.189

$$v = 50^\circ \quad R = 5.404 \quad S_1 = 1.660 \quad S_2 = 2.987$$

$$i = 0^\circ \dots 19^\circ 6'$$

i	$2B$	τ
$0^\circ \quad 0'$	0.757	0.444
$19^\circ \quad 6'$	0.921	0.244
$160^\circ \quad 54'$	9.887	0.195
$189^\circ \quad 0'$	10.051	0.194

$$(3) \quad q = \frac{3}{4} \quad v = 0^\circ 0' \dots 78^\circ 28'$$

$$v = 0^\circ \quad R = 7.727 \quad S_1 = 0.000 \quad S_2 = 6.532$$

$$i = 0^\circ \dots 180^\circ$$

i	$2B$	τ
0°	1.195	0.560
30°	2.070	0.426
60°	4.461	0.290
90°	7.727	0.221
120°	10.993	0.185
150°	13.384	0.167
180°	14.259	0.153

$$v = 10^\circ \quad R = 7.652 \quad S_1 = 0.098 \quad S_2 = 6.384$$

$$i = 0^\circ \dots 180^\circ$$

i	$2B$	τ
0°	1.170	0.845
30°	2.015	0.431
60°	4.362	0.293
90°	7.554	0.223
120°	10.842	0.186
150°	13.289	0.168
180°	14.134	0.166

$$v = 20^\circ \quad R = 7.448 \quad S_1 = 0.373 \quad S_2 = 5.953$$

$$i = 0^\circ \dots 47^\circ 7'$$

i	$2B$	τ
$0^\circ \quad 0'$	1.122	0.990
$47^\circ \quad 7'$	3.021	0.270
$132^\circ \quad 53'$	11.875	0.178
$180^\circ \quad 0'$	13.774	0.165

$$v = 30^\circ \quad R = 7.119 \quad S_1 = 0.816 \quad S_2 = 5.278$$

$$i = 0^\circ \dots 30^\circ 5'$$

i	$2B$	τ
$0^\circ 0'$	1.025	0.974
$30^\circ 5'$	1.738	0.464
$149^\circ 55'$	12.500	0.173
$180^\circ 0'$	13.213	0.168

$$v = 40^\circ \quad R = 6.724 \quad S_1 = 1.349 \quad S_2 = 4.418$$

$$i = 0^\circ \dots 22^\circ 57'$$

i	$2B$	τ
$0^\circ 0'$	0.957	0.873
$22^\circ 57'$	1.306	0.536
$157^\circ 3'$	12.142	0.176
$180^\circ 0'$	12.491	0.174

$$v = 50^\circ \quad R = 6.291 \quad S_1 = 1.917 \quad S_2 = 3.449$$

$$i = 0^\circ \dots 19^\circ 6'$$

i	$2B$	τ
$0^\circ 0'$	0.925	0.757
$19^\circ 6'$	1.115	0.579
$160^\circ 54'$	11.467	0.186
$180^\circ 0'$	11.657	0.184

$$v = 60^\circ \quad R = 5.875 \quad S_1 = 2.449 \quad S_2 = 2.449$$

$$i = 0^\circ \dots 16^\circ 49'$$

i	$2B$	τ
$0^\circ 0'$	0.977	0.619
$16^\circ 49'$	1.082	0.589
$163^\circ 11'$	10.668	0.216
$180^\circ 0'$	10.773	0.215

$$v = 70^\circ \quad R = 5.544 \quad S_1 = 2.884 \quad S_2 = 1.499$$

$$i = 0^\circ \dots 15^\circ 28'$$

i	$2B$	τ
$0^\circ 0'$	1.161	0.347
$15^\circ 28'$	1.315	0.411

i	$2B$	τ
$164^{\circ} 32'$	9.773	0.241
$180^{\circ} 0'$	9.927	0.239

$$(4) \quad q = \frac{1}{2} \quad v = 70^{\circ} 32' \dots 101^{\circ} 32'$$

$$v = 70^{\circ} \quad R = 7.727 \quad S_1 = 3.532 \quad S_2 = 1.836$$

$$i = 0^{\circ} \dots 15^{\circ} 28'$$

i	$2B$	τ
$0^{\circ} 0'$	2.359	0.765
$15^{\circ} 28'$	2.438	0.752

$164^{\circ} 32'$	13.016	0.149
$180^{\circ} 0'$	13.095	0.135

$$v = 80^{\circ} \quad R = 6.701 \quad S_1 = 3.879 \quad S_2 = 0.815$$

$$i = 0^{\circ} \dots 14^{\circ} 44'$$

i	$2B$	τ
$0^{\circ} 0'$	2.007	0.629
$14^{\circ} 44'$	2.034	0.626

$165^{\circ} 16'$	11.368	0.182
$180^{\circ} 0'$	11.395	0.180

$$v = 90^{\circ} \quad R = 5.875 \quad S_1 = 4.000 \quad S_2 = 0.000$$

$$i = 0^{\circ} \dots 14^{\circ} 31'$$

i	$2B$	τ
$0^{\circ} 0'$	1.875	0.486
$14^{\circ} 31'$		

$165^{\circ} 29'$	9.875	0.225
$180^{\circ} 0'$		

$$v = 100^{\circ} \quad R = 5.410 \quad S_1 = 3.875 \quad S_2 = -0.574$$

$$i = 0^{\circ} \dots 14^{\circ} 44'$$

i	$2B$	τ
$0^{\circ} 0'$	2.109	0.276
$14^{\circ} 44'$	2.190	0.271

$165^{\circ} 16'$	8.730	0.275
$180^{\circ} 0'$	8.711	0.275

$$(5) \quad q = \frac{1}{4} \quad v = 109^\circ 28' \dots 126^\circ 52'$$

$$v = 110^\circ \quad R = 7.602 \quad S_1 = 4.995 \quad S_2 = -1.272$$

$$i = 0^\circ \dots 15^\circ 28'$$

i	$2B$	τ
$0^\circ \quad 0'$	3.879	0.573
$15^\circ 28'$	3.833	0.577
$164^\circ 32'$	11.371	0.132
$180^\circ \quad 0'$	11.325	0.133

$$v = 120^\circ \quad R = 5.875 \quad S_1 = 4.243 \quad S_2 = -1.414$$

$$i = 0^\circ \dots 16^\circ 49'$$

i	$2B$	τ
$0^\circ \quad 0'$	3.046	0.386
$16^\circ 49'$	2.985	0.390
$163^\circ 11'$	8.765	0.238
$180^\circ \quad 0'$	8.704	0.239

Eine Übersicht der hier ermittelten Werte für τ läßt erkennen, daß in der überwiegenden Zahl von Fällen τ zwischen 0.10 und 0.45 liegt und daß auch hierin die kleineren Werte vorherrschen. Es sind nur wenige Gruppen, die darüber hinaus, und nur einzelne Fälle geben $\tau > 0.6$. Da diese hauptsächlich dann auftreten, wenn die Neigung klein ist, aber sämtliche Neigungen a priori möglich sind, so kommt ihnen auch eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit innerhalb der betreffenden Gruppe zu.

Setzt man beispielsweise $\tau = 0.5$, was in Bogenmaß ausgedrückt ungefähr $\tau = 30^\circ$ entsprechen würde, so ist der Bereich der Fälle, in welchen dieser Betrag überschritten wird und zwar um Größen, die hier in's Gewicht fallen können, ein sehr kleiner, von den Fällen, in welchen sämtliche Neigungen in Betracht kommen, etwa 0.06 des ganzen Bereiches und ähnlich in den übrigen, so daß etwa 0.1 der Fälle den Betrag überschreiten.

IO.

Die bisherigen Untersuchungen sollten die Aufgabe lösen, eine Vorstellung von der Wahrscheinlichkeit und dem Verlauf einer Kometenannäherung zu geben, von dem ja wesentlich die Genauigkeit der Elementenbestimmung, daher auch die Möglichkeit, Abweichungen von der Parabel zu erkennen, abhängt.

Man wird sich nun als nächste Aufgabe die Frage vorlegen: Wie groß sind diese Abweichungen, wenn man statt des beobachteten Bogens einer parabelnahen Bahn ein demselben möglichst naheliegendes Parabelstück supponiert? In einem konkreten Fall wird es sich um einen Parabelbogen handeln, der geozentrische Orte ergibt, die sich den Beobachtungen am besten anschließen, so zwar, daß die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird. Diese »beste« Parabelbahn kann natürlich hier nicht herangezogen werden, da deren Festlegung von einer Mannigfaltigkeit von Umständen abhängt, die in einer allgemeinen Betrachtung wohl kaum in ihren Einflüssen zu übersehen ist. Man wird aber trotzdem den Bereich unmerk-

licher Abweichungen in gewisse Grenzen einschließen können: ersetzt man das Bahnstück durch einen Parabelbogen, der nach irgend einem Modus ersterem sehr nahe kommt und sucht nun jene Bedingungen, unter welchen die Abweichungen der wahren Bahn von dieser Parabel unmerklich sind, so werden diese Bedingungen auch gewiß für jene Parabel ausreichend sein, welche die beobachteten Orte am besten darstellt, d. h., die Abweichungen von letzterer werden dann sicher der Beobachtung nicht zugänglich sein und man hat somit wenigstens Grenzen erhalten, innerhalb deren das Erkennen einer elliptischen oder hyperbolischen Bahn mit Bestimmtheit als unter einer gewissen Wahrscheinlichkeit liegend anzunehmen ist.

Es sei die wahre Bahn eines Kometen eine parabelnahe Ellipse von der Periheldistanz q und der Exzentrizität $1-\eta$ und η so klein, daß nur die erste Potenz zu berücksichtigen ist. Dann ist

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{v}{2}} \left(1 - \frac{\eta}{2} \right).$$

Mit r_0, v_0 soll jener Punkt der Bahn bezeichnet werden, in welchem die größte Annäherung an die Erde stattfindet. Für diese Bahn soll nun eine Parabel substituiert werden, die durch folgende Bestimmungen festgelegt wird:

Man denke sich zunächst in der ursprünglichen Bahnebene eine Parabel, die durch einen Punkt geht, der in der Normalen von (r_0, v_0) liegt und von diesem um den Betrag ζ entfernt ist, der auch als kleine Größe erster Ordnung betrachtet werden soll. Bezeichnet man alle Größen, die sich auf die Parabelpunkte beziehen, durch Akzente, so ist

$$r'_0 \cos \frac{v'_0}{2} = \zeta \cos \frac{v_0}{2}.$$

und der Winkel zwischen beiden Radien

$$\sphericalangle(r'_0, r_0) = \frac{\zeta}{q} \sin \frac{v_0}{2} \cos^2 \frac{v_0}{2}.$$

Die Tangente in diesem Parabelpunkt soll mit der Tangente in (r_0, v_0) den ebenfalls kleinen Winkel ε einschließen. Dadurch ist die Parabel definiert. Der Winkel der Normale der Parabel mit r'_0 ist $\frac{v'_0}{2} = \sphericalangle(r'_0, r_0) + \varepsilon$ und muß gleich $\frac{v'_0}{2}$ sein. Ist nun ω der Unterschied der beiden Perihellängen, so ist andererseits $v'_0 + \omega = v_0 + \sphericalangle(r'_0, r_0)$, wodurch für die Bestimmung der Apsidenlinie der parabolischen Bahn erhalten wird

$$\omega = -(-\sphericalangle(r'_0, r_0) + 2\varepsilon)$$

oder

$$\omega = -\left(-\frac{\zeta}{q} \sin \frac{v_0}{2} \cos^2 \frac{v_0}{2} + 2\varepsilon\right),$$

daher

$$\frac{1}{2} \Delta v_0 = \frac{v'_0 - v_0}{2} = -\sphericalangle(r'_0, r_0) + \varepsilon = -\frac{\zeta}{q} \sin \frac{v_0}{2} \cos^2 \frac{v_0}{2} + \varepsilon.$$

Ist ferner $q + \gamma$ die Periheldistanz der Parabel, so ist

$$r'_0 = (q + \gamma) \sec^2 \left(\frac{v_0}{2} + \frac{1}{2} \Delta v_0 \right)$$

oder

$$r_0 + \zeta \cos \frac{v_0}{2} = \frac{q}{\cos^2 \frac{v_0}{2}} \left(1 + \frac{\gamma}{q} \right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \cdot \Delta v_0 \right),$$

woraus mit Berücksichtigung des obigen Wertes für r_0 folgt

$$\zeta \cos \frac{v_0}{2} = \frac{q}{\cos^2 \frac{v_0}{2}} \left(\frac{\eta}{q} + \frac{\eta}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2} + \Delta v_0 \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \right).$$

Substituiert man für Δv_0 , so erhält man für die Änderung der Periheldistanz

$$\frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{q} \left(1 + \sin^2 \frac{v_0}{2} \right) \cos \frac{v_0}{2} - \frac{\eta}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2} - 2\varepsilon \operatorname{tg} \frac{v_0}{2},$$

wodurch die Elemente der neuen Bahnkurve bestimmt erscheinen.

Was nun die Bewegungen in beiden Bahnen anbelangt, so sind die Geschwindigkeiten in den entsprechenden Ausgangspunkten

$$g_0 = k \sqrt{\frac{2}{r_0} - \frac{\eta}{q}}$$

und

$$g'_0 = k \sqrt{\frac{2}{r'_0}},$$

demnach unter konsequenter Vernachlässigung von Größen zweiter Ordnung

$$g'_0 - g_0 = \frac{k}{\sqrt{2q}} \left(\frac{\eta}{2} - \frac{\zeta}{q} \cos^5 \frac{v_0}{2} \right) \sec \frac{v_0}{2}.$$

Die gleichzeitig in der Umgebung dieser Punkte zurückgelegten Wege werden sich um den Betrag $(g'_0 - g_0) t = \sigma$ unterscheiden, wenn t die Zwischenzeit ist und Größen von der Ordnung ηt^2 vernachlässigt werden. Es ist daher

$$\sigma = \frac{\tau}{\sqrt{2q}} \left(\frac{\eta}{2} - \frac{\zeta}{q} \cos^5 \frac{v_0}{2} \right) \sec \frac{v_0}{2}.$$

Denkt man sich nun auch die Perihelzeit so variiert, daß im Moment des Eintreffens des Kometen in r_0 der parabolische Komet um den linearen Betrag λ von dem entsprechenden Punkt entfernt ist, so ist die Abweichung an der Ausgangsstelle durch die Komponenten ζ und λ , entsprechend der Normalen- und Tangentenrichtung, gegeben, nach der Zeit t aber durch $\zeta + l\varepsilon$, wenn l die Länge des zurückgelegten Bogens bedeutet, und $\lambda + \sigma$. Für l kann hier gesetzt werden $\frac{\tau \sqrt{2}}{q}$.

Wenn nun schließlich auch die Bahnebene variiert wird, und zwar in der Weise, daß um eine Knotenlinie, die von r_0 um den Winkel N absteht, eine Drehung der Ebene um den kleinen Betrag ν ausgeführt wird, so tritt noch eine Komponente senkrecht zur Bahnebene hinzu, die in r_0 den Betrag $\nu r_0 \sin N$, nach der Zeit t den Betrag $\nu r \sin (N - \Delta v)$ hat.

Es wird sich nun darum handeln zu untersuchen, ob diese fünf Variationsclemente ζ , λ , ε , ν , N so bestimmt werden können, daß die scheinbaren geozentrischen Abweichungen unterhalb eines angebbaren Betrages liegen, wenn man sich auf ein bestimmtes Annäherungsgebiet in der Umgebung der Minimaldistanz beschränkt.

Es ist zunächst klar, daß für zwei Orte die scheinbare Abweichung immer zum Verschwinden gebracht werden kann und daß noch ein Element willkürlich bestimmt werden kann; es wird daher ebenso möglich sein, für einen bestimmten Moment die geozentrischen Orte zur Koinzidenz zu bringen und eine bestimmte Richtung der scheinbaren Abweichung von diesem Ort aus herzustellen und für ein fünftes Element noch irgend eine Bedingung zu erfüllen. Es fragt sich nun, ob es mit diesen Mitteln möglich ist sowohl den linearen Betrag s der Abweichung als auch den Winkel zwischen s und ρ , von dem ja mit die

scheinbare Größe von s abhängt, innerhalb des Annäherungsgebietes unter gewissen angebbaren Grenzen zu halten.

Es kann dies zunächst von dem Winkel (s, ρ) gezeigt werden.

Die Richtungsänderung der Abweichung s ist nichts anderes als die scheinbare Bahn des zweiten Kometen, vom ersten aus gesehen. Gemäß dem Lambert'schen Satze von der Krümmung der scheinbaren Bahn kann dieselbe wegen der nahezu gleichen heliozentrischen Distanzen als ein größter Kreis angesehen werden. Nach dem eben Gesagten kann dieser größte Kreis so bestimmt werden, daß er durch einen gegebenen Punkt in einer gegebenen Richtung hindurchgeht. Das fünfte Element soll so bestimmt werden, daß die scheinbare Bogenlänge für eine gegebene Zwischenzeit einen vorgelegten Wert hat.

Die scheinbare Bahn der Erde, vom Kometen aus gesehen, hat nun eine Krümmung nach Maßgabe der Differenz der heliozentrischen Distanzen, die im Maximum ρ betragen können. Denkt man sich in dieser scheinbaren Bahn jene drei Erdorte fixiert, die der größten Annäherung ρ_0 und den beiden Grenzen ρ des ganzen Annäherungsgebietes entsprechen, so kann man die scheinbare Bahn des parabolischen Kometen (immer vom wahren Kometen aus gemeint) zu diesem Bogen der scheinbaren Erdbahn nach dem Früheren in folgende Beziehung bringen: Es soll der mittlere Kometenort mit dem mittleren Erdort koinzidieren, es soll der entsprechende Bogen der scheinbaren Kometenbahn parallel dem Stücke des größten Kreises zwischen dem ersten und dritten Erdorte verlaufen und es sollen schließlich diese beiden Bogenstücke zwischen dem ersten und dritten Erdorte einerseits und dem ersten und dritten Orte des parabolischen Kometen andererseits einander gleich sein. Dann können die entsprechenden Orte, d. h. die Richtungen von s und ρ nur um Beträge von der Ordnung der Krümmung der scheinbaren Bahn voneinander abweichen.

Eine derartige parabolische Bahn ist demnach immer herzustellen; es handelt sich nur mehr darum, von welcher Größenordnung die lineare Abweichung s der simultanen Kometenorte in beiden Bahnen ist.

II.

Die drei Komponenten der Abweichung im Ausgangsort nach der Normalen der Bahn, der Normalen auf der Bahnebene und der Tangente sind ζ , $\nu r_0 \sin N$, λ und die lineare Abweichung

$$s_0 = \sqrt{\zeta^2 + \nu^2 r_0^2 \sin^2 N + \lambda^2}.$$

Die sphärischen Koordinaten des Erdortes bezüglich desselben Systems seien A_0 und D_0 , wo D_0 den Winkelabstand von der Normalebene, A_0 die Länge in dieser, gezählt von der Normalrichtung der Kurve, bedeutet.

Die Bedingung der Koinzidenz ist daher

$$s_0 \cos D_0 \cos A_0 = \zeta$$

$$s_0 \cos D_0 \sin A_0 = \nu r_0 \sin N$$

$$s_0 \sin D_0 = \lambda.$$

Für einen der Grenzorte werden die analogen Verschiebungskomponenten sein

$$\zeta + l\varepsilon, \nu r \sin(N - \Delta v), \lambda + \tau, \text{ die resultierende Verschiebung sei } s \text{ und der scheinbare Erdort } A, D.$$

Nach den obigen Forderungen soll der Bogen zwischen den beiden parabolischen Kometenorten der Länge nach gleich dem Bogen zwischen dem mittleren und dem äußeren Erdort und parallel dem Verbindungsbogen der beiden äußeren Erdorte sein. Man wird demnach für den vorliegenden Zweck der Bestimmung von s oder s_0 auch diesen Ort mit dem scheinbaren Erdort identifizieren und daher setzen können

$$s \cos D \cos A = \zeta + l\varepsilon$$

$$s \cos D \sin A = \nu r \sin(N - \Delta v)$$

$$s \sin D = \lambda + \tau.$$

Es genügen daher diese beiden Systeme den geforderten Bedingungen sowohl bezüglich der Lage als auch der Größe des scheinbaren Bogens, woraus hervorgeht, daß man über eines der Variationselemente noch willkürlich verfügen kann.

Vor der weiteren Behandlung dieser Bedingungsgleichungen soll noch einmal bemerkt werden, daß es sich hier nicht um die präzise Ermittlung jener parabolischen Bahn handeln kann, welche den angegebenen Bedingungen streng genügt, die zudem auch nicht die beste Annäherung zu bedeuten braucht; es soll nur gezeigt werden, daß man durch Substitution eines parabolischen Bogens, der ungefähr den obigen Bedingungen entspricht, die scheinbaren Abweichungen unter eine bestimmte, natürlich von η abhängige Größe bringen kann. Man wird sich daher gewisse Vernachlässigungen erlauben können, die entweder sehr nahe zutreffen oder doch durch geringe Variationen des betrachteten Annäherungsgebietes realisiert werden können.

Derartige Vereinfachungen ergeben sich aus dem Umstande, daß bei kleineren geozentrischen Distanzen die Geschwindigkeit des Kometen beträchtlich größer ist als die der Erde. Das hat zur Folge, daß im Moment der Minimaldistanz die Erde nur in geringer Entfernung von der Normalebene des betreffenden Bahnpunktes stehen kann oder daß man den Moment des Eintrittes der Erde in die Normalebene des simultanen Bahnpunktes als Ausgangsepoche wählen kann, ohne daß die entsprechende Distanz von der Minimaldistanz ρ_0 wesentlich abweicht, das heißt aber, daß man D_0 und daher auch $\lambda = 0$ setzen kann. Die weiteren Schlüsse werden dadurch in ihrem Wesen nicht tangiert, sondern nur formal vereinfacht.

Aus demselben Grunde wird sich auch die relative Bewegung hauptsächlich in einer Änderung von D äußern und nur mit einem relativ kleinen Betrag in A eingehen, selbst wenn sich die Bahnen der Erde und des Kometen unter einem größeren Winkel kreuzen.

Unter der obigen Annahme können folgende Relationen benützt werden

$$v r_0 \sin N = \zeta \operatorname{tg} A_0$$

$$v r \sin (N - \Delta v) = (\zeta + l\varepsilon) \operatorname{tg} A$$

und zur Bestimmung von s

$$s \cos D \cos A = \zeta + l\varepsilon$$

$$s \sin D = \tau = \eta \frac{\tau}{2\sqrt{2q}} \sec \frac{v_0}{2} - \zeta \frac{\tau}{q\sqrt{2q}} \cos^4 \frac{v_0}{2}$$

Durch Elimination von ζ erhält man daraus

$$s \sin D \left(1 + \cot D \cos A \cdot \frac{\tau}{q\sqrt{2q}} \cos^4 \frac{v_0}{2} \right) = \eta \frac{\tau}{2\sqrt{2q}} \sec \frac{v_0}{2} \left(1 + 2 \frac{l}{q} \frac{\varepsilon}{\eta} \cdot \cos^5 \frac{v_0}{2} \right).$$

Da ein Element willkürlich ist, so soll

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \eta \cot D \cos A \sec^2 \frac{v_0}{2}$$

gesetzt werden — da D niemals sehr klein werden kann, so bleibt ε von derselben Größenordnung wie η dadurch werden die beiden Klammergrößen identisch und

$$s = \eta \cdot \frac{\tau}{\sin D} \cdot \frac{\sec \frac{v_0}{2}}{2\sqrt{2q}}$$

wodurch der gewünschte Zusammenhang zwischen η und der linearen Abweichung der für die Bahn η substituierten Parabelbahn gegeben ist. Es handelt sich, wie man sieht, nur mehr darum, welche Beträge

der Faktor $\frac{\tau}{\sin D}$ annehmen kann.

oder

$$\frac{\tau}{\sin D} < 2c \frac{\tau^2 \left(\tau^2 + \frac{1}{16c^2} \right)}{\left(\tau^2 + \frac{9}{16c^2} \right) \left(\tau^2 + \frac{1}{16c^2} \right)}.$$

Nun hat eine Funktion von der Form

$$f(x) = \frac{x(x+a)}{(x+b)(x+c)}$$

zur Ableitung

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{(b+c-a)x^2 + 2bcx + abc}{(x+b)^2(x+c)^2}$$

das ist im vorliegenden Falle eine wesentlich positive Größe. Der obige Ausdruck wächst beständig mit τ und konvergiert gegen die obere Grenze $2c = 2\sqrt{\frac{2}{r_0}}$. Nun ist der kleinste Wert, den r_0 bei der angenommenen Annäherung erhalten kann $\frac{3}{4}$, woraus folgt, daß auf jeden Fall

$$\frac{\tau}{\sin D} < 3.281.$$

Der obige Faktor von τ :

$$\frac{\tau}{\sin D} \cdot \frac{\sec \frac{v_0}{2}}{2\sqrt{2q}}$$

ist daher

$$< 2\sqrt{\frac{2}{r_0}} \cdot \frac{\sec \frac{v_0}{2}}{2\sqrt{2q}},$$

das ist aber $= 1$.

Bei der getroffenen Anordnung des die wahre Bahn vertretenden Parabelbogens ist daher die lineare Abweichung s an der Grenze des Annäherungsgebietes, in Einheiten des Erdbahnhabmessers ausgedrückt, stets kleiner als die Abweichung der Exzentrizität der wahren Bahn von der Einheit.

Für einen vorgelegten Wert τ wird man aber die Grenze noch enger ziehen können. Setzt man

$$\frac{\tau^2 \left(\tau^2 + \frac{5}{16c^2} \right)}{\left(\tau^2 + \frac{9}{16c^2} \right) \left(\tau^2 + \frac{1}{16c^2} \right)} = C,$$

so wird man erhalten $s < \eta C$. Da bei der hier behandelten Annäherung r_0 zwischen $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{4}$, c^2 daher

zwischen $\frac{5}{3}$ und $\frac{3}{5}$ liegt, so erhält man für diese beiden Grenzwerte r_0

$\tau =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°
$C = \begin{cases}$	0.000	0.265	0.515	0.664	0.760	0.823
$\end{cases}$	0.000	0.129	0.327	0.475	0.583	0.664

12.

Bei der hier getroffenen Anordnung der parabolischen Bahn wird die Abweichung s_0 im Moment der größten Annäherung durch den Erdort gehen, die scheinbare Abweichung daher Null sein. An den beiden äußeren Orten, entsprechend $\rho = \frac{1}{2}$, ist dann der Winkel zwischen ρ und s nahezu gleich dem sphärischen Perpendikel p vom mittleren Erdort auf dem durch die beiden äußeren gelegten größten Kreis. Ist P das Perpendikel vom mittleren Sonnenort auf demselben Kreis (alles vom Kometen aus gesehen), so kann man nach dem Lambert'schen Theorem setzen

$$\sin p = \frac{1}{2} \tau^2 \left(\frac{1}{r_0^3} - 1 \right) \frac{r_0}{\rho_0} \sin P$$

Nun ist klar, daß P kleiner sein muß als der spitze Winkel zwischen den Richtungen $\odot - \odot$ und $\odot - \odot$ (abgesehen von Größen höherer Ordnung) daher

$$\sin P \leq \frac{1}{2} r_0 \rho_0 \sqrt{(r_0 + \rho_0 + 1)(r_0 + \rho_0 - 1)(r_0 + 1 - \rho_0)(\rho_0 + 1 - r_0)},$$

oder

$$\sin p \leq \frac{\tau^2}{4} \left(\frac{1}{r_0} - r_0^2 \right) \sqrt{[(r_0 + \rho_0)^2 - 1][1 - (r_0 - \rho_0)^2]} = \frac{\tau^2}{4} \cdot D$$

ein Maximalwert, der naturgemäß für $r_0 = 1$ und $r_0 = 1 \pm \rho_0$ verschwindet. Es werden daher innerhalb des in Frage kommenden Gebietes, absolut genommen, zwei Maxima stattfinden. Eine Tabulierung von D giebt hierüber am einfachsten mit hinlänglicher Genauigkeit einen Aufschluß. Es findet sich für

$r = 0.75$	$D = 0.000$	$r = 1.00$	$D = 0.000$
0.80	0.163	1.05	0.074
0.85	0.166	1.10	0.144
0.90	0.130	1.15	0.193
0.95	0.071	1.20	0.199
1.00	0.000	(1.22)	(0.175)
		1.25	0.000

Man wird daher als Maxima annehmen können

$$D = 0.17 \text{ in der Nähe von } r = 0.85$$

$$D = 0.20 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad r = 1.20$$

und

$$\sin p \leq \frac{\tau^2}{4} D,$$

wo für D einer dieser Werte zu setzen ist, je nachdem $r \leq 1.00$ ist.

Nach diesen Grenzbestimmungen ist es nun möglich, auch die scheinbare Abweichung in Grenzen, abhängig von τ , einzuschließen, das heißt für ein gegebenes τ den Maximalbetrag des geozentrischen Bogens zwischen dem wahren und parabolischen Kometenort anzugeben.

Ist, wie bisher, s die lineare Abweichung in der geozentrischen Distanz ρ , p der Winkel zwischen s und ρ , so ist die scheinbare Abweichung

$$\alpha = \frac{s}{\rho} \sin p.$$

Nun ist

$$\rho = \frac{1}{2}, \quad s < \eta C', \quad \sin p < \frac{\tau^2}{4} D,$$

somit

$$\alpha < \frac{\tau^2}{2} C' \cdot D \cdot \eta.$$

Setzt man $\frac{\tau^2}{2} C' = C$, so ist für

$\tau =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	
$C = \left\{ \right.$	0.000	0.004	0.031	0.091	0.185	0.314	$r = 0.75$
	0.000	0.002	0.020	0.065	0.142	0.253	$= 1.25$

Da das erste Maximum von D nahe an $r = 0.75$, das zweite sehr nahe an $r = 1.25$ fällt, die Größe C sich auch nicht rasch ändert, so wird man die Maximalbeträge des ganzen Koeffizienten von $\eta: CD = K$ durch Multiplikation der beiden Reihen mit 0.17 respektive 0.20 mit genügender Annäherung erhalten, so daß für

$\tau =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	
$K = \left\{ \right.$	0.0000	0.0007	0.0052	0.0151	0.0308	0.0520	
	0.0000	0.0004	0.0040	0.0130	0.0284	0.0504	

und die scheinbare Abweichung

$$\alpha < K \eta \text{ ist.}$$

Je nach der Annahme, die man bezüglich der Sicherheit einer Kometenposition, das heißt über den wahrscheinlichen Fehler der Normalorte einer Reihe von Kometenbeobachtungen macht, wird man einen Schluß ziehen können auf jene Abweichung η der wahren Bahn von der Parabel, die eben noch der Beobachtung zugänglich ist.

Nimmt man etwa an, daß bei einem derartigen der Rechnung zu Grunde gelegten Kometenort eine Bogensekunde gerade noch verbürgt werden kann, eine Präzision, die wahrscheinlich zu hoch gegriffen ist, so ist der eben noch bestimmbare Grenzbetrag

$$\eta = \frac{1}{K}$$

Da nun in der überwiegenden Zahl von Fällen der Annäherung $\rho_0 = \frac{1}{4}$, $\tau < 20^\circ$, also $K < 0.005$, so findet man als den kleinsten der Beobachtung noch zugänglichen Wert

$$\eta = 0.001.$$

Da aber weiter die Wahrscheinlichkeit, daß die Annäherung $\rho_0 = \frac{1}{4}$ nicht erreicht wird, nach dem früheren gleich $\frac{34}{35}$ ist, so wird das nahezu auch die Wahrscheinlichkeit sein, daß eine Ellipse von der Exzentrizität 0.999 mit Sicherheit als von der Parabel verschieden nicht mehr erkannt werden kann. Das kann auch in folgender Weise ausgedrückt werden:

Die mittlere Entfernung a dieses Kometen ist $= \frac{q}{\eta}$ und die Apheldistanz bei kleinem η nahe $= 2 \frac{q}{\eta}$.

Nimmt man als mittleren Wert der beobachtbaren Kometen $q = 1$, der zugleich eine erfahrungsgemäße Häufungsstelle bedeutet, so ist die mittlere Entfernung $a = 1000$, die Umlaufzeit zirka 25.000 Jahre und die Apheldistanz $q' = 2000$. Verlegt man demnach den Ursprung der Kometen in eine Entfernung von der Sonne, die ungefähr dem 70fachen der Neptundistanz gleichkommt, so wird man mit

Rücksicht auf die Ausnahmefälle der großen τ in rund 30 Fällen aller Wahrscheinlichkeit nach nur Ein Mal in der Lage sein, eine derartige Bahn von einer Parabel unterscheiden zu können.

Es ist hier allerdings nur ein zwischen bestimmten ρ ein geschlossenes Bahnstück berücksichtigt worden, jedoch können die über $\rho = \frac{1}{2}$ hinausliegenden Positionen an den Ergebnissen keine wesentliche Änderung hervorbringen, da im nächsten Verlauf ρ und s als sich proportional ändernde Größen angenommen werden können, die Präzision der Beobachtungen aber im Allgemeinen bedeutend herabgemindert wird. Diese Zahlen sind überhaupt mit ziemlich großen Freiheiten in der analytischen Behandlung gewonnen worden, die aber durch das Ausreichen von approximativen Resultaten gerechtfertigt erscheinen. Die tatsächlichen Verhältnisse dürften zweifellos zu Gunsten beträchtlich kleinerer Apheldistanzen ausfallen, schon aus dem Grunde, weil die dem individuellen Fall angepaßte, der scheinbaren Bahn möglichst nahe liegende Parabel jedenfalls geringere scheinbare Abweichungen aufweisen wird als die hier supponierte, durch die nur gezeigt werden sollte, welche parabolische Annäherung auf jeden Fall erzielt werden kann.

13.

Es soll nun mit dem zweiten Teile des Problems begonnen werden, in welchem es sich um die Frage handeln wird: Welche Wahrscheinlichkeit haben ausgesprochen hyperbolische Bahnen unter Voraussetzung des interstellaren Ursprunges der Kometen? Man kann zunächst auf Grund der bisherigen Untersuchungen dem Begriff der merklich hyperbolischen Bahnen eine bestimmtere Fassung geben. Da die bisherigen Betrachtungen vom Vorzeichen von η ganz unabhängig sind, so wird man ebenso annehmen können, daß unter 30 Bahnen von der Exzentrizität 1.001 aller Wahrscheinlichkeit nach nur eine einzige als Hyperbel erkannt werden würde. Da es sich hier aber um alle möglichen Exzentrizitäten > 1 handelt, so wird man jene, deren Erkenntwerden die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{30}$ besitzt, noch zu den merklich parabolischen zählen können und die Grenze der letzteren jedenfalls bei einer Exzentrizität zu suchen haben, die von 1 um mehrere Einheiten der dritten Stelle abweicht. Da man aber in überaus großen Entfernungen eine hyperbolische Geschwindigkeit in Einheiten der Erdgeschwindigkeit nahe $= \sqrt{\frac{\eta}{q}}$ setzen kann, so wird dieser Grenze eine Geschwindigkeit in großen Entfernungen entsprechen, die durch einige Einheiten der zweiten Stelle ausgedrückt erscheint.

Es sei O der betrachtete Punkt an der Grenze der Wirkungssphäre der Sonne, OS die Richtung gegen letztere, also die Achse des eingangs besprochenen Rotationshyperboloides, ferner sei durch OM Größe und Richtung einer relativen Geschwindigkeit g repräsentiert; wenn AO Größe und Richtung der Geschwindigkeit des Sonnensystems bedeutet, die mit u bezeichnet werden soll, so ist $AM = c$ die absolute Geschwindigkeit, aus welcher dieses g resultiert. Sind ϑ und φ die sphärischen Koordinaten von g bezüglich der Fundamentalrichtungen OS und OA , so wird man die Zahl der Geschwindigkeiten deren Endpunkte in dem Volumelement

$$g^2 \sin \varphi d\varphi d\vartheta dg$$

liegen, finden, wenn man dasselbe mit der Dichte der Endpunkte der c multipliziert. Was nun letztere anbetrifft, so soll vorausgesetzt werden, daß innerhalb einer bestimmten Grenze bezüglich der absoluten Bewegung jede Geschwindigkeitsrichtung und -größe gleich wahrscheinlich ist. Denkt man sich von einem Punkt aus sämtliche Geschwindigkeiten der Größe und Richtung nach aufgetragen und den Raum um diesen Punkt in unendlich dünne konzentrische Kugelschichten von äquidistanten Begrenzungsflächen geteilt, so folgt aus dieser Annahme, daß die Endpunkte dieser Vektoren in jeder Schichte gleichmäßig verteilt und in jeder Schichte in der gleichen Anzahl vertreten sind, das heißt aber nichts anderes, als daß die Dichte derselben dem Quadrat der Geschwindigkeit selbst umgekehrt proportional ist. Man

kann dieselbe daher $= \frac{D'}{c^2}$ setzen, wo D' eine Konstante bedeutet. Die dem Volumelement entsprechende

Zahl der Geschwindigkeiten ist also

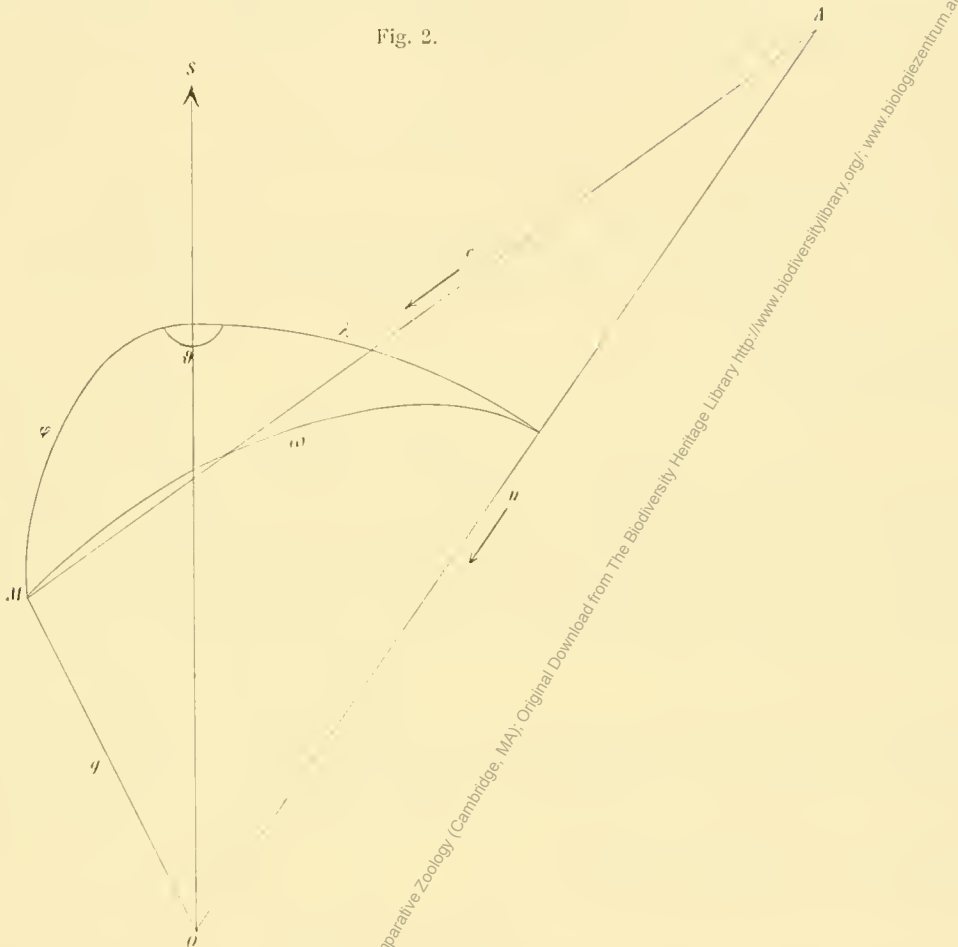
$$\frac{D' g^2 \sin \varphi d\varphi d\vartheta dg}{u^2 + g^2 - 2ug \cos \omega}$$

wo ω der Winkel zwischen u und g ist, demnach

$$\cos \omega = \cos \varphi \cos \lambda \sin \vartheta + \sin \lambda \cos \vartheta,$$

wenn mit λ der Winkel SOA bezeichnet wird.

Fig. 2.



Integriert man diesen Ausdruck innerhalb des Rotationshyperboloides bis zu einem bestimmten Werte von g , so erhält man die Zahl der beobachtbaren Bahnen bis zu einer g entsprechenden Größe der reellen, respektive großen Achse der dadurch erzeugten Kegelschnitte. Es soll nun die Integration zunächst unter der Voraussetzung durchgeführt werden, daß jedem in Frage kommenden Werte von g und ω ein zulässiger Wert von c entspricht. Dazu ist es notwendig, eine ungefähre Annahme über die obere Grenze der im Fixsternsystem vorkommenden Geschwindigkeiten zu machen. Das bedeutet natürlich eine gewisse Willkürlichkeit. Setzt man dieselbe etwa dem Zehn- bis Zwanzigfachen der Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, so dürfte damit den tatsächlichen Verhältnissen in ausreichender Weise Rechnung getragen sein. Es sei C diese obere Grenze. Es soll also zunächst nur über solche g summiert werden, für welche

$$\sqrt{u^2 + g^2 - 2ug \cos \omega} < C$$

ist; dann sind die Integrationsgrenzen nur durch das Hyperboloid und den Maximalwert g bestimmt.

Diese Bedingung wird aber dann immer erfüllt sein, wenn

$$u + g < C.$$

Da die Geschwindigkeit u des Sonnensystems nicht viel von der Einheit (Geschwindigkeit der Erde in der Bahn) verschieden ist, so wird nach den oben angegebenen Größenverhältnissen diese Ungleichung

jedenfalls bestehen, wenn es sich um relative Geschwindigkeiten handelt, welche merklich parabolische Perihelbögen erzeugen.

Setzt man noch $\frac{g}{u} = \beta$, so hat man unter dieser Voraussetzung den Ausdruck

$$u D' \frac{\beta^2 \sin \varphi d\varphi d\beta}{1 + \beta^2 - 2\beta (\cos \varphi \cos \lambda + \sin \varphi \sin \lambda \cos \vartheta)}$$

bezüglich ϑ von 0 bis 2π zu integrieren. Man findet nach der Formel

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{a - b \cos \vartheta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

wenn $a > b$, eine Bedingung, die wegen $1 + \beta^2 > 2\beta \cos(\varphi - \lambda)$ immer erfüllt ist:

$$\frac{-u D \beta^2 d\beta d(\cos \varphi)}{\sqrt{(1 + \beta^2)^2 - 4\beta^2 \sin^2 \lambda - 4\beta (1 + \beta^2) \cos \lambda \cos \varphi + 4\beta^2 \cos^2 \varphi}}$$

wenn $2\pi D' = D$ gesetzt wird.

Nach der Formel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log \left[\sqrt{a + bx + cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \right]$$

(für positive c) erhält man als Resultat der unbestimmten Integration nach φ

$$-\frac{u}{2} D \beta d\beta \log \left[\sqrt{(1 + \beta^2)^2 - 4\beta^2 \sin^2 \lambda - 4\beta (1 + \beta^2) \cos \lambda \cos \varphi + 4\beta^2 \cos^2 \varphi} + 2\beta \cos \varphi - (1 + \beta^2) \cos \lambda \right].$$

Die Integrationsgrenzen sind verschieden zu bestimmen, je nach den in Frage kommenden Werten von g , respektive β . Bezeichnet man wie in Nr. 1 die halbe Querachse des Hyperboloides mit g_0 , respektive $\frac{g_0}{u} = \beta_0$, so ist für alle $\beta \leq \beta_0$ über die ganze Kugeloberfläche zu integrieren, man hat als Grenzen für φ 0 und π einzuführen, wodurch man erhält

$$u D \beta d\beta \log \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right).$$

Demnach ist die Zahl der Geschwindigkeiten von 0 bis β_0

$$N(0, \beta_0) = u D \int_0^{\beta_0} \beta d\beta \log \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) = \left[\beta_0 - \frac{1 - \beta_0^2}{2} \log \left(\frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0} \right) \right] u D.$$

β_0 ist eine sehr kleine Größe. Es ist klar, daß dieser Ausdruck dritter Ordnung in β_0 sein muß. Vernachlässigt man höhere Potenzen, so wird sehr nahe gesetzt werden können:

$$N(0, \beta_0) = \frac{2}{3} u D \beta_0^3.$$

Es soll nun die Integration fortgesetzt werden von β_0 an bis zu jenem Wert β_1 , der der Grenzgeschwindigkeit der merklich parabolischen Bahnen entspricht. Für diese Werte $\beta > \beta_0$ hat man φ von Null bis zu jenem Werte φ_0 zu nehmen, der dem Durchschnitt der Kugeloberfläche β mit dem Rotationshyperboloid entspricht.

Dieser Winkel φ_0 ist nach Nr. 1 gegeben durch

$$\cos \varphi_0 = \sqrt{1 - \frac{q^2}{r^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\beta_0^2}{\beta^2}}.$$

Für die untere Grenze $\varphi = 0$ erhält man

$$\frac{1}{2} u D \beta d \beta \log [(1 - \cos \lambda) (1 + \beta)^2].$$

Die Einführung der oberen Grenze verursacht insofern eine Schwierigkeit, als dadurch eine Funktion von β resultiert, die in geschlossener Weise nach dieser Größe nicht mehr integriert werden kann und es nun notwendig ist, eine integrable Entwicklung von genügend rascher Konvergenz zu finden.

Es werde das Argument des Logarithmus für φ_0 mit F bezeichnet, so daß

$$F = \sqrt{(1 + \beta^2)^2 - 4 \beta^2 \sin^2 \lambda - 4 \beta (1 + \beta^2) \cos \lambda \cos \varphi_0 + 4 \beta^2 \cos^2 \varphi_0 + 2 \beta \cos \varphi_0 - (1 + \beta^2) \cos \lambda}.$$

Setzt man weiter

$$1 - 2 \beta \cos \lambda + \beta^2 = X, \quad (1 + \beta^2) \cos \lambda - 2 \beta = Y,$$

$$4 \beta \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = \tau,$$

so sieht man zunächst, daß das analoge Argument für die untere Grenze $= X - Y$ ist und daß weiter

$$F = \sqrt{X^2 + 2 \tau Y + \tau^2} - Y - \tau.$$

Wie schon in Nr. 1 bemerkt wurde, ist $\frac{q}{r} = \alpha$ eine sehr kleine Größe und β_0 von derselben Ordnung. Da aber $\beta^2 \sin^2 \varphi_0 = \beta_0^2 (1 - \alpha^2) - \beta_0^2 \alpha^2$ ist, so ist $\beta \sin \varphi_0$ von derselben Ordnung und wegen $\varphi_0 < 90^\circ$ und $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} < \sin \varphi_0$ auch τ von der Ordnung α . Nimmt man mit Rücksicht auf die Näherung der früheren Integration vorläufig auch noch τ^3 mit, so ergibt sich

$$\begin{aligned} F &= X + \tau \cdot \frac{Y}{X} + \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{X^2 - Y^2}{X^3} - \frac{\tau^3}{6} \cdot Y \cdot \frac{X^2 - Y^2}{X^5} - Y - \tau = \\ &= (X - Y) \left[1 - \tau \cdot \frac{1}{X} + \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{X + Y}{X^3} - \frac{\tau^3}{2} \cdot Y \cdot \frac{X + Y}{X^5} \right]. \end{aligned}$$

Da $X - Y$ das Argument für die untere Grenze ist, so fällt beim Übergang auf die logarithmische Funktion dieser Faktor weg und man kann schon mit Berücksichtigung der unteren Grenze setzen

$$F = 1 - \tau \cdot \frac{1}{X} + \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{X + Y}{X^3} - \frac{\tau^3}{2} Y \cdot \frac{X + Y}{X^5}.$$

Entwickelt man $\log F$ wieder bis Größen dritter Ordnung, so erhält man nach leichten Reduktionen

$$\log F = -\tau \cdot \frac{1}{X} + \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{Y}{X^3} + \frac{\tau^3}{6} \cdot \frac{X^2 - 3 Y^2}{X^5}.$$

Man sieht nun sofort, daß man schon das zweite Glied vernachlässigen kann; es enthält den Faktor $\beta^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$, durch Multiplikation mit $\beta d \beta$ und Integration wird ein Ausdruck von der Ordnung $\beta^1 \sin^1 \varphi$, das heißt α^1 erhalten werden, der nach der früheren Festsetzung zu vernachlässigen ist.

Die Zahl der Geschwindigkeiten zwischen β_0 und β_1 wird daher gegeben sein durch

$$N(\beta_0, \beta_1) = \frac{1}{2} u D \int_{\beta_0}^{\beta_1} \frac{\tau \beta d \beta}{X}.$$

Die Entwicklung von $\frac{1}{X}$ nach Potenzen von β ergibt

$$\frac{1}{X} = 1 + \frac{\sin 2\lambda}{\sin \lambda} \beta + \frac{\sin 3\lambda}{\sin \lambda} \beta^2 + \frac{\sin 4\lambda}{\sin \lambda} + \dots$$

Summiert man über beide Seiten des Hyperboloides (die der Sonne zugekehrte und davon abgewendete), so annullieren sich die Koeffizienten der ungeraden Potenzen. Es ist daher

$$N(\beta_0, \beta_1) = 2u D \int_{\beta_0}^{\beta_1} \beta d\beta \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \left[\beta + \frac{\sin 3\lambda}{\sin \lambda} \beta^3 + \frac{\sin 5\lambda}{\sin \lambda} \beta^5 + \frac{\sin 7\lambda}{\sin \lambda} \beta^7 + \dots \right].$$

Nun kann man offenbar das Glied mit β^7 vernachlässigen; da β_1 eine Zahl ist, die durch einige Einheiten der zweiten Stelle gegeben ist, so wird β_1^4 von derselben Ordnung wie α sein; $\beta d\beta \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$ ergibt durch die Integration eine Größe von der Ordnung α^2 , daher stellt das Glied mit β^7 eine Größe höherer Ordnung als α^3 dar. Nach den obigen Relationen kann man für das erste Glied setzen

$$2\beta^2 d\beta \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = \beta^2 d\beta \left(1 - \sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{1-\frac{\beta_0^2}{\beta^2}} \right).$$

Die Integration und konsequente Einhaltung der Genauigkeitsgrenze ergibt

$$2 \int_{\beta_0}^{\beta_1} \beta^2 d\beta \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = \beta_0^2 \beta_1 \left[1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\beta_0}{\beta_1} + \frac{1}{3} \beta_1^2 \left(\frac{\alpha}{\beta_0} \right)^2 \right].$$

Man erhält ebenso für das zweite Glied

$$2 \int_{\beta_0}^{\beta_1} \beta^4 d\beta \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \beta_1^3 \beta_0^2 \left[1 + \frac{3}{5} \beta_1^2 \left(\frac{\alpha}{\beta_0} \right)^2 \right]$$

und

$$2 \int_{\beta_0}^{\beta_1} \beta^6 d\beta \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \beta_0^2 \beta_1^5.$$

Führt man diese Ausdrücke in N ein und bedenkt, daß durch Vertauschung von $180^\circ - \lambda$ mit λ nichts geändert wird, so erhält man als Gesamtzahl für beide Richtungen des Hyperboloides

$$N(\beta_0, \beta_1) = u D \left\{ \beta_0^2 \beta_1 \left[1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\beta_0}{\beta_1} + \frac{1}{3} \beta_1^2 \left(\frac{\alpha}{\beta_0} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \beta_0^2 \beta_1^3 \left[1 + \frac{3}{5} \beta_1^2 \left(\frac{\alpha}{\beta_0} \right)^2 \right] \frac{\sin 3\lambda}{\sin \lambda} + \frac{1}{5} \beta_0^2 \beta_1^5 \frac{\sin 5\lambda}{\sin \lambda} \right\}.$$

Addiert man den oben gefundenen Wert für $N(0, \beta_0)$ dazu, so wird die Zahl sämtlicher Geschwindigkeiten zwischen 0 und β_1 und demnach die Zahl sämtlicher merklich parabolischer Bahnen

$$N(0, \beta_1) = u D \beta_0^2 \beta_1 \left\{ 1 + \frac{1}{3} \beta_1^2 \left(\frac{\alpha}{\beta_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \beta_1^2 \left[1 + \frac{3}{5} \beta_1^2 \left(\frac{\alpha}{\beta_0} \right)^2 \right] \frac{\sin 3\lambda}{\sin \lambda} + \frac{1}{5} \beta_1^4 \cdot \frac{\sin 5\lambda}{\sin \lambda} \right\}.$$

Es soll hier noch bemerkt werden, daß diese Formel auch gültig ist für kleine λ , respektive $\lambda = 0$. Es ist in letzterem Falle

$$N(0, \beta_1)_{\lambda=0} = u D \beta_0^2 (\beta_1 + \beta_1^3 + \beta_1^5) + u D \alpha^2 \left(\frac{1}{3} \beta_1^3 + \frac{3}{5} \beta_1^5 \right).$$

Soll die Summierung bis zu einer Grenze β ausgedehnt werden, für welche die bisherige Voraussetzung bezüglich der Größenordnung nicht mehr zutrifft, wie es bei der Ermittlung der Zahl sämtlicher

möglichen Bahnen der Fall ist, so kann man dieselbe durch die Grenze β_1 in zwei Teile zerlegen: für die Werte von 0 bis β_1 ist das zugehörige N bereits durch den letzten Ausdruck gegeben; für die Werte $\beta > \beta_1$ bis zu einer beliebigen endlichen Grenze hat man aber ein anderes Entwicklungs-, respektive Integrationsverfahren einzuschlagen. Dasselbe ergibt sich durch den Umstand, daß für diesen Teil der Summe der Winkel φ eine kleine GröÙe ist.

Wie aus dem Grenzwerte

$$\cos \varphi_0 = \sqrt{1 - \alpha^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\beta_0^2}{\beta^2}}$$

hervorgeht, ist φ von der Ordnung

$$\sqrt{\frac{\beta_0^2}{\beta^2} + \alpha^2}.$$

Da β_0 und α von der Ordnung β_1^4 sind, so ist für die untere Grenze β_1 die GröÙe dieses Winkels mit β_1^3 , für eine beliebige, endliche obere Grenze aber mit β_1^4 vergleichbar.

Als Resultat der Integration nach φ hatte man erhalten:

$$- \frac{n}{2} D\beta d\beta \log F,$$

wo

$$F = \sqrt{(1 + \beta^2)^2 - 4\beta \sin^2 \lambda - 4\beta(1 + \beta^2) \cos \lambda \cos \varphi + 4\beta^2 \cos^2 \varphi + 2\beta \cos \varphi - (1 + \beta^2) \cos \lambda},$$

worin für φ die Grenzen 0 und φ_0 einzuführen sind, oder, wenn $\cos \varphi = 1 - \sigma$ gesetzt wird, $\sigma = 0$ und

$\sigma = \frac{\beta_0^2}{\beta^2} + \frac{q^2}{r^2}$, so daß die obere Grenze von der sechsten oder höheren Ordnung in β_1 ist. Da, wie man

sofort sehen wird, die Berücksichtigung von σ^2 mehr als ausreicht bei den oben festgesetzten Genauig-

keitsgrenzen, so wird $\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2} \sigma - \frac{1}{8} \sigma^2$ und

$$F = \sqrt{(1 - 2\beta \cos \lambda + \beta^2)^2 + 2\beta \sigma [(1 + \beta^2) \cos \lambda - 2\beta] + \frac{1}{2} \beta \sigma^2 \cos \lambda (1 + \beta^2) + 2\beta - (1 + \beta^2) \cos \lambda - \beta \sigma - \frac{1}{4} \beta \sigma^2}.$$

Setzt man nun für den Moment wie oben

$$X = 1 - 2\beta \cos \lambda + \beta^2, \quad Y = (1 + \beta^2) \cos \lambda - 2\beta$$

und weiter

$$X - Y = (1 - \cos \lambda)(1 + \beta)^2 = q, \quad X + Y = (1 + \cos \lambda)(1 - \beta)^2 = p,$$

so wird

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{X^2 - 2\beta \sigma Y + \frac{1}{2} \beta \sigma^2 (Y + 2\beta) - Y - \beta \sigma - \frac{1}{4} \beta \sigma^2} \\ &= X \left[1 + \beta \sigma \frac{Y}{X^2} + \frac{1}{4} \beta \sigma^2 \frac{Y + 2\beta}{X^2} - \frac{1}{2} \beta \sigma^2 \frac{Y^2}{X^4} \right] - Y - \beta \sigma - \frac{1}{4} \beta \sigma^2 \\ &= q - q \frac{\beta \sigma}{X} - \frac{1}{4} q \frac{\beta \sigma^2}{X} + \frac{1}{2} q p \frac{\beta^2 \sigma^2}{X^3}. \end{aligned}$$

Nun ist q nichts anderes als der Wert von F für die untere Grenze, fällt also wegen der Funktion $\log F$ bei der Einsetzung der Grenzen weg. Substituiert man daher für F einfach die Funktion

$$1 - \sigma \cdot \frac{\beta}{X} - \frac{1}{4} \frac{\beta \sigma^2}{X} \left(1 - \frac{2\beta p}{X^2} \right),$$

so sind dabei die Grenzwerte von φ schon berücksichtigt.

Entwickelt man den Logarithmus bis inklusive β^2 , so wird

$$dN = \frac{n}{2} D \beta^2 d\beta \left[\frac{\sigma}{X} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sigma^2}{X} \left(1 + \frac{2\beta}{X} - \frac{2\beta p}{X^2} \right) \right].$$

Die frühere Formel wurde bis Größen von der Ordnung β_1^6 inklusive fortgeführt, abgesehen von einem Faktor von der Ordnung β_0^2 , der naturgemäß hier überall auftreten wird und für die relativen Anzahlen der einzelnen Bahngruppen irrelevant ist. Bei Einhaltung der gleichen Genauigkeit genügt die Berücksichtigung des ersten Gliedes. Für die untere Grenze β_1 ist σ von der Ordnung β_1^6 , also $\beta^2 \sigma$ von der Ordnung β_0^2 ; sieht man wieder von diesem Faktor ab, so hat man für

$$\frac{\sigma d\beta}{X} \left(1 + \frac{2\beta}{X} - \frac{2\beta p}{X^2} \right),$$

als die Größenordnungen nach der Integration 7, respektive 8.

Für die obere Grenze β , welche mit β_1^{-1} verglichen werden kann, ist σ von der Ordnung β_0^2 , so daß zur Beurteilung der fraglichen Glieder der Ausdruck dient:

$$\beta^2 d\beta \cdot \frac{\sigma}{X} \left(1 + \frac{2\beta}{X} - \frac{2\beta p}{X^2} \right)$$

da nun $\frac{1}{X} \sim 2$, $\frac{\beta}{X} \sim 1$ und $\frac{p}{X} \sim 0$ Ordnung sind, so sind die Ordnungen wieder 7 und 8, also wieder zu vernachlässigen. Es genügt demnach auf jeden Fall

$$dN = \frac{n}{2} D \beta^2 \frac{\sigma}{X} d\beta$$

zu setzen, oder

$$dN = \frac{n}{2} D \frac{d\beta}{1 - 2\beta \cos \lambda + \beta^2} \left(\beta_0^2 + \beta^2 \cdot \frac{q^2}{r^2} \right).$$

Die Integration dieses Ausdruckes läßt sich in bekannter Weise ausführen.

Das unbestimmte Integral ist

$$N = \frac{n}{2} D \left\{ \left[\beta_0^2 + \frac{q^2}{r^2} (2 \cos^2 \lambda - 1) \right] \frac{1}{\sin \lambda} \arctg \left(\frac{\beta - \cos \lambda}{\sin \lambda} \right) + \frac{q^2}{r^2} [\beta + \cos \lambda \log (1 - 2\beta \cos \lambda + \beta^2)] \right\}.$$

Darin ist nun die untere Grenze β_1 , die Maximalgeschwindigkeit der Bahnen mit merklich parabolischem Charakter, einzuführen, andererseits als obere Grenze ein β , das von der zulässigen absoluten Maximalgeschwindigkeit abhängt. Diese letztere macht für den Endraum des Hyperboloides ein anderes als das bisherige Integrationsverfahren erforderlich, deshalb soll für den Moment von der Einführung der Grenzen Abstand genommen werden.

Der eben gefundene Ausdruck für N ist aus der Integration nach φ zwischen den Grenzen 0 und φ_0 entstanden, bezieht sich daher nur auf die gegen die Sonne gerichtete Hälfte des Hyperboloides; für die entgegengesetzte hat man von $\pi - \varphi_0$ bis π zu integrieren und erhält auf die gleiche Weise wie oben

$$N' = \frac{n}{2} D \left\{ \left[\beta_0^2 + \frac{q^2}{r^2} (2 \cos^2 \lambda - 1) \right] \frac{1}{\sin \lambda} \arctg \left(\frac{\beta + \cos \lambda}{\sin \lambda} \right) + \frac{q^2}{r^2} [\beta - \cos \lambda \log (1 + 2\beta \cos \lambda + \beta^2)] \right\}.$$

Die Vereinigung der beiden Werte ergibt:

$$N + N' = \frac{u}{2} D \left\{ \left[\frac{z_0^2}{r^2} + \frac{q^2}{r^2} (2 \cos^2 \lambda - 1) \right] \frac{1}{\sin \lambda} \arctg \left(\frac{2 \beta \sin \lambda}{1 - \beta^2} \right) + \frac{q^2}{r^2} \left[2 \beta + \cos \lambda \log \frac{1 - 2 \beta \cos d + \lambda^2}{1 + 2 \beta \cos d + \lambda^2} \right] \right\}.$$

ist jedoch nur für einen beschränkten Teil der Werte β anzuwenden, da in den beiden Hälften des Hyperboloides die oberen Grenzen für β verschieden sind.

Fig. 3.

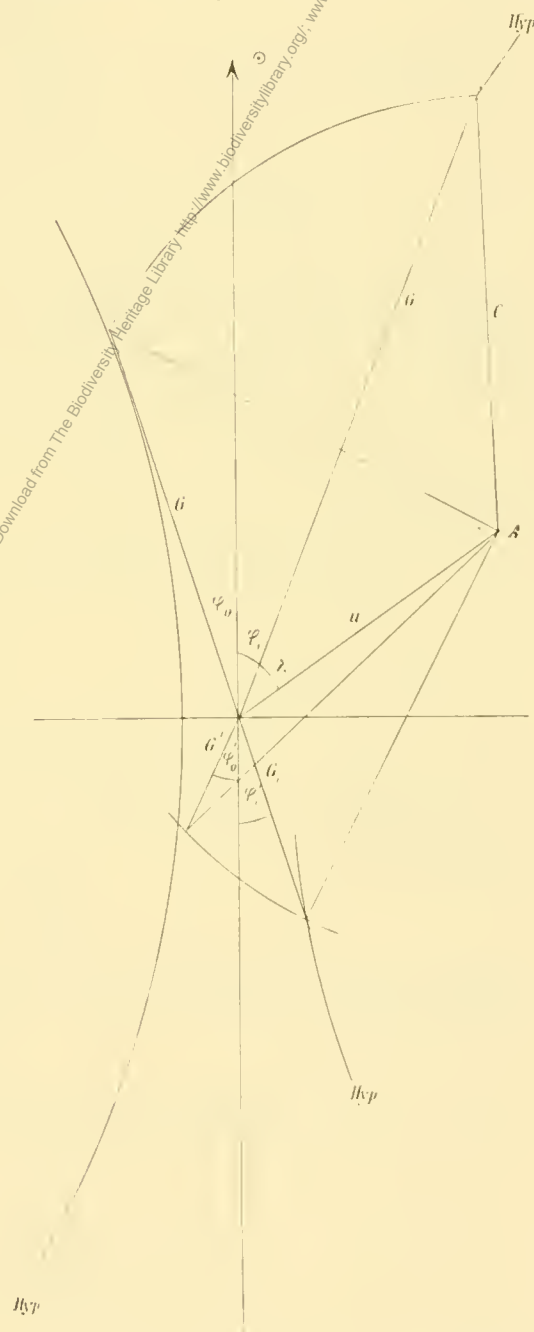
15.

Die entwickelten Ausdrücke für N und N' würden unmittelbar für jede beliebige Grenze β anzuwenden sein, wenn die Häufigkeit der absoluten Geschwindigkeiten c eine kontinuierliche Funktion $\frac{D'}{c^2}$ für alle möglichen Werte c wäre. Anders gestalten sich aber die Verhältnisse bei der Annahme, daß über einen gewissen Betrag C keine Geschwindigkeiten mehr vorkommen. Dem Wesen nach ist eine derartige Annahme völlig gerechtfertigt, wenn auch tatsächlich eine andere Abnahme der Häufigkeit stattfinden wird, zu deren Feststellung aber eine Statistik notwendig wäre, für welche gegenwärtig noch kaum eine Grundlage vorhanden ist. Das Wesentliche der Resultate kann keinesfalls dadurch geändert werden.

Statuiert man aber ein derartiges diskontinuierliches Aufhören der absoluten Geschwindigkeiten bei einem Maximalwert C , so sind die beiden Seiten des Hyperboloides von Teilen einer Kugeloberfläche vom Radius C begrenzt, deren Mittelpunkt in A liegt, so daß von einem bestimmten g ab das Hyperboloid nur mehr teilweise von Geschwindigkeitspunkten — nach dem Dichtigkeitsgesetz $\frac{D'}{c^2}$ — erfüllt ist.

Die obigen Formeln sind daher nur bis zu diesem g — dem kleinsten der Geschwindigkeit C entsprechenden Werte — anwendbar.

Diese Grenzwerte, bis zu welchen noch über den ganzen durch das Hyperboloid begrenzten Raum integriert werden kann, seien G für den gegen die Sonne gerichteten Teil, G' für den entgegengesetzten. Sie genügen, wie unmittelbar ersichtlich ist, den Gleichungen



$$C^2 = G^2 + u^2 - 2 Gu \cos (\lambda + \varphi_0)$$

und

$$C'^2 = G'^2 + u^2 + 2 G' u \cos (\lambda - \varphi'_0).$$

Zwei ähnliche Gleichungen bestimmen die oberen Grenzen der g , respektive g' überhaupt. Seien dieselben G_1 und G'_1 , so ist

$$C^2 = G_1^2 + u^2 - 2 G_1 u \cos (\lambda - \varphi_1)$$

und

$$C'^2 = G_1'^2 + u^2 + 2 G_1' u \cos (\lambda + \varphi'_1).$$

Setzt man $\frac{G}{u} = B$ und $\frac{C}{u} = \Gamma$ so ist

$$\Gamma^2 = B^2 + 1 - 2 B \cos (\lambda + \varphi_0)$$

$$\Gamma'^2 = B_1^2 + 1 - 2 B_1 \cos (\lambda - \varphi_1)$$

$$\Gamma^2 = B'^2 + 1 + 2 B' \cos (\lambda - \varphi'_0)$$

$$\Gamma'^2 = B_1'^2 + 1 - 2 B_1' \cos (\lambda - \varphi'_1).$$

$\varphi_0 \dots \varphi'_1$ sind die durch die Hyperbel bestimmten Grenzwinkel, welche selbst von den zugehörigen G respektive B abhängen. Letzterer Umstand macht die Auflösung der Gleichungen etwas umständlich, die jedoch bis zur verlangten Genauigkeit leicht durch ein Näherungsverfahren geleistet werden kann.

Da $\cos^2 \varphi_0 = (1 - \alpha^2) \left(1 - \frac{\beta_0^2}{\beta^2} \right)$ wenn $\alpha = \frac{q}{\beta}$ ist, so kann man in den obigen Gleichungen bis auf Größen 7. Ordnung

$$\cos \varphi_0 = 1 \text{ und } \sin \varphi_0 = \alpha \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{1}{B^2}} \text{ setzen.}$$

Es wird demnach

$$B^2 - 2 B \cos \lambda = \Gamma^2 - 1 + 2 \alpha B \sin \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{1}{B^2}}.$$

Das Glied mit α ist dritter Ordnung, woraus einerseits folgt, daß bei gänzlicher Unterdrückung von φ_0 erhalten wird

$$(B) = \cos \lambda + \sqrt{\Gamma^2 - \sin^2 \lambda},$$

eine Größe, die von B um Größen dritter Ordnung abweicht, andererseits, daß in dem Glied mit α bis auf Größen siebenter Ordnung B durch die bekannte Größe (B) ersetzt werden kann. Man erhält dann aus der obigen Gleichung

$$\begin{aligned} B &= + \cos \lambda + \sqrt{\Gamma^2 - \sin^2 \lambda - 2 \alpha (B) \sin \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \frac{1}{(B)^2}}} \\ &= \cos \lambda + \sqrt{\Gamma^2 - \sin^2 \lambda} \left[1 - \alpha \frac{(B) \sin \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \frac{1}{(B)^2}}}{\Gamma^2 - \sin^2 \lambda} \right] \end{aligned}$$

oder

$$B = (B) - \alpha (B) \sin \lambda \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \frac{1}{(B)^2}}}{\sqrt{\Gamma^2 - \sin^2 \lambda}}$$

Ebenso findet man für dieselbe Seite die obere Grenze überhaupt

$$B_1 = (B) + \alpha (B) \sin \lambda \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta_0}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{(B)^2}}}{\sqrt{\Gamma^2 - \sin^2 \lambda}}$$

Für die der Sonne abgewendete Seite ergibt sich

$$B' = (B') - \alpha (B') \sin \lambda \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta_0}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{(B')^2}}}{\sqrt{\Gamma^2 - \sin^2 \lambda}}$$

$$B'_1 = (B') + \alpha (B') \sin \lambda \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta_0}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{(B')^2}}}{\sqrt{\Gamma^2 - \sin^2 \lambda}}$$

wobei $(B') = -\cos \lambda + \sqrt{\Gamma^2 - \sin^2 \lambda}$.

Bei einer Weiterführung der Annäherung erhält man beispielsweise für B' noch die Zusatzglieder

$$- \alpha^2 (B') \frac{\sin^2 \lambda}{\Gamma^2 - \sin^2 \lambda} + \frac{1}{2} \beta_0^2 \frac{1 + \frac{\alpha^2}{(B')^2}}{(B')(\Gamma^2 - \sin^2 \lambda)^{3/2}} [\Gamma^2 (1 + (B')) \sin^2 \lambda]$$

die also tatsächlich nur Größen 7. und höherer Ordnung enthalten.

Man kann diesen Grenzwerten für β noch eine einfachere Form geben. Substituiert man in die von α abhängigen Glieder für (B) , respektive (B') die betreffenden Werte, so erhält man im ersten Falle

$$\alpha \sin \lambda \cos \lambda \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta_0}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{(B)^2}}}{\sqrt{\Gamma^2 - \sin^2 \lambda}} + \alpha \sin \lambda \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_0}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{(B)^2}}$$

$$= \frac{\alpha \sin \lambda \cos \lambda}{\Gamma} + \alpha \sin \lambda \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0}{\alpha}\right) \cdot \frac{1}{(B)^2} \right].$$

Da nun

$$(B) = \Gamma \left[\frac{\cos \lambda}{\Gamma} + \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \lambda}{\Gamma^2}} \right]$$

und

$$\frac{1}{(B)^2} = \frac{1}{\Gamma^2} \left[1 - 2 \frac{\cos \lambda}{\Gamma} + \frac{\sin^2 \lambda}{\Gamma^2} - \dots \right],$$

so kann man in diesem von α abhängigen Gliede $\frac{1}{(B)^2}$ durch $\frac{1}{\Gamma^2}$ ersetzen und findet schließlich, wenn man

$\frac{1}{\Gamma}$ von der Ordnung β_1 voraussetzt,

$$\left. \begin{matrix} B \\ B_1 \end{matrix} \right\} = (B) \mp \alpha \sin \lambda \left(1 + \frac{\cos \lambda}{\Gamma} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{1}{\Gamma^2} \right)$$

und auf ganz analoge Weise

$$\left. \begin{matrix} B' \\ B'_1 \end{matrix} \right\} = (B') \mp \alpha \sin \lambda \left(1 - \frac{\cos \lambda}{\Gamma} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{1}{\Gamma^2} \right).$$

Die oben erhaltenen Ausdrücke für N und N' lassen sich nur bis zu den Werten B und B' ausdehnen; die beiden Endräume zwischen B und B_1 einerseits und B' und B'_1 andererseits sind schon teilweise durch die Kugeloberfläche C begrenzt, involvieren daher andere Integrationsbedingungen.

16.

Führt man in N und N' für β die Grenzen ein, so läßt sich, da die untere Grenze für beide Ausdrücke dieselbe ist, für diese der Ausdruck für $N + N'$ anwenden. Mit Rücksicht auf die Größenordnung dieses Grenzwertes β_1 kann man wieder Reihenentwicklungen vornehmen, in welchen schon wenige Glieder den Genauigkeitsgrenzen Genüge leisten. Man kann zunächst

$$\arctan \left(\frac{2\beta_1 \sin \lambda}{1 - \beta_1^2} \right) = 2\beta_1 \sin \lambda (1 + \beta_1^2 + \beta_1^4) - \frac{2^3}{3} \beta_1^3 \sin^3 \lambda (1 + 3\beta_1^2) + \frac{2^5}{5} \beta_1^5 \sin^5 \lambda$$

setzen. Ordnet man nach Potenzen von β_1 , so ergibt sich

$$\arctan \left(\frac{2\beta_1 \sin \lambda}{1 - \beta_1^2} \right) = 2 \left\{ \beta_1 \sin \lambda + \frac{1}{3} \beta_1^3 \sin 3\lambda + \frac{1}{5} \beta_1^5 \sin 5\lambda \right\}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{1 - 2\beta_1 \cos \lambda + \beta_1^2}{1 + 2\beta_1 \cos \lambda + \beta_1^2} \right) &= \log \left(\frac{1 - 2\frac{\beta_1}{1 + \beta_1^2} \cos \lambda}{1 + 2\frac{\beta_1}{1 + \beta_1^2} \cos \lambda} \right) \\ &= -2 \left\{ 2\beta_1 \cos \lambda (1 - \beta_1^2 + \beta_1^4) + \frac{1}{3} 2^3 \beta_1^3 \cos^3 \lambda (1 - 3\beta_1^2) + \frac{1}{5} 2^5 \beta_1^5 \cos^5 \lambda \right\} \\ &= -4 \left\{ \beta_1 \cos \lambda + \frac{1}{3} \beta_1^3 \cos 3\lambda + \frac{1}{5} \beta_1^5 \cos 5\lambda \right\}. \end{aligned}$$

Der Wert von $N + N'$ für die untere Grenze ist daher

$$\begin{aligned} (N + N')_{\beta_1} &= nD \left\{ [\beta_0^2 + \alpha^2 (2 \cos^2 \lambda - 1)] \frac{1}{\sin \lambda} \left[\beta_1 \sin \lambda + \frac{1}{3} \beta_1^3 \sin 3\lambda + \frac{1}{5} \beta_1^5 \sin 5\lambda \right] - \right. \\ &\quad \left. - \alpha^2 \cdot 2 \cos \lambda \left[\beta_1 \cos \lambda + \frac{1}{3} \beta_1^3 \cos 3\lambda + \frac{1}{5} \beta_1^5 \cos 5\lambda \right] + \alpha^2 \beta_1 \right\} \end{aligned}$$

oder nach einigen leichten Reduktionen

$$(N + N')_{\beta_1} = nD \beta_0^2 \left[\beta_1 + \frac{1}{3} \beta_1^3 \cdot \frac{\sin 3\lambda}{\sin \lambda} + \frac{1}{5} \beta_1^5 \cdot \frac{\sin 5\lambda}{\sin \lambda} \right] + nD \alpha^2 \beta_1^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \beta_1^2 \frac{\sin 3\lambda}{\sin \lambda} \right].$$

Da die oberen Grenzen für die beiden Seiten des Hyperboloides verschieden sind, so hat man zunächst die Werte für N und N' getrennt zu ermitteln, wobei sich aber sofort eine sehr einfache Vereinigung ergibt.

Man wird hier den Umstand benützen können, daß Γ und daher auch die Werte B große Zahlen sind, deren reziproke Werte von der Größenordnung β_1 angenommen werden können. Dann wird man im ersten Gliede zweckmäßigerweise setzen

$$\arctan \left(\frac{B - \cos \lambda}{\sin \lambda} \right) = \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\sin \lambda}{B - \cos \lambda} \right).$$

Da nun

$$B - \cos \lambda = \sqrt{\Gamma^2 - \sin^2 \lambda} - \alpha \sin \lambda \left[1 + \frac{\cos \lambda}{\Gamma} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \frac{1}{\Gamma^2} \right]$$

ist, so wird, wenn $\frac{1}{\Gamma} = \gamma_1$ gesetzt wird, wo also γ_1 von der Ordnung β_1 ist, die Arc. tang. Funktion

$$= \frac{\gamma_1 \sin \lambda}{\sqrt{1 - \gamma_1^2 \sin^2 \lambda} - \alpha \gamma_1 \sin \lambda}$$

sein, da man den bei α stehenden Klammerausdruck hier mit der Einheit identifizieren kann. Aus demselben Grunde ist weiter

$$\frac{\sin \lambda}{B - \cos \lambda} = \frac{\gamma_1 \sin \lambda}{\sqrt{1 - \gamma_1^2 \sin^2 \lambda}} + \alpha \gamma_1^2 \sin^2 \lambda$$

und

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin \lambda}{B - \cos \lambda} \right) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma_1 \sin \lambda}{\sqrt{1 - \gamma_1^2 \sin^2 \lambda}} \right) + \alpha \gamma_1^2 \sin^2 \lambda.$$

Dieser Ausdruck ändert sich aber nicht, wenn statt $\lambda: 180^\circ - \lambda$ gesetzt wird, er wird deshalb auch für den oberen Grenzwert der anderen Seite gelten.

Bemerkt man noch, daß

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma_1 \sin \lambda}{\sqrt{1 - \gamma_1^2 \sin^2 \lambda}} \right) = \operatorname{arc} \sin (\gamma_1 \sin \lambda)$$

ist, so erhält man

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{B - \cos \lambda}{\sin \lambda} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{B' + \cos \lambda}{\sin \lambda} \right) = \pi - 2 \operatorname{arc} \sin (\gamma_1 \sin \lambda) - 2 \alpha \gamma_1^2 \sin^2 \lambda.$$

Dem zweiten Gliede β entspricht

$$B + B' = 2\Gamma \sqrt{1 - \gamma_1^2 \sin^2 \lambda} - 2\alpha \sin \lambda \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \gamma_1^2 \right]$$

offenbar die quantitativ den Ausschlag gebende Größe des ganzen Ausdruckes.

Das letzte logarithmische Glied bedeutet hier nur eine kleine Korrektonsgröße. Setzt man nämlich für den Augenblick $B = B_0 + b \cos \lambda$, wo

$$B_0 = \sqrt{\Gamma^2 - \sin^2 \lambda} - \alpha \sin \lambda \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \gamma_1^2 \right]$$

$b = 1 - \alpha \gamma \sin \lambda$ ist, so wird

$$1 - 2B \cos \lambda + B^2 = 1 + b(b-2) \cos^2 \lambda + B_0^2 + 2B_0(b-1) \cos \lambda$$

oder, da $b-1 = -\alpha \gamma \sin \lambda$,

$$\log \left(\frac{1 - 2B \cos \lambda + B^2}{1 + 2B' \cos \lambda + B'^2} \right) = \log \left(\frac{1 - \frac{2B_0 \alpha \gamma_1 \sin \lambda \cos \lambda}{1 + b(b-2) \cos^2 \lambda + B_0^2}}{1 + \frac{2B_0 \alpha \gamma_1 \sin \lambda \cos \lambda}{1 + b(b-2) \cos^2 \lambda + B_0^2}} \right).$$

In diesem von α abhängigen Bruche kann man offenbar B_0 durch Γ ersetzen und erhält dafür

$$\frac{2\alpha \gamma_1^2 \sin \lambda \cos \lambda}{1 - \gamma_1 \cos^2 \lambda + \dots} = 2\alpha \gamma_1^2 \sin \lambda \cos \lambda,$$

woraus unmittelbar für den Logarithmus der Wert folgt:

$$-4 \alpha \gamma_1^2 \sin \lambda \cos \lambda.$$

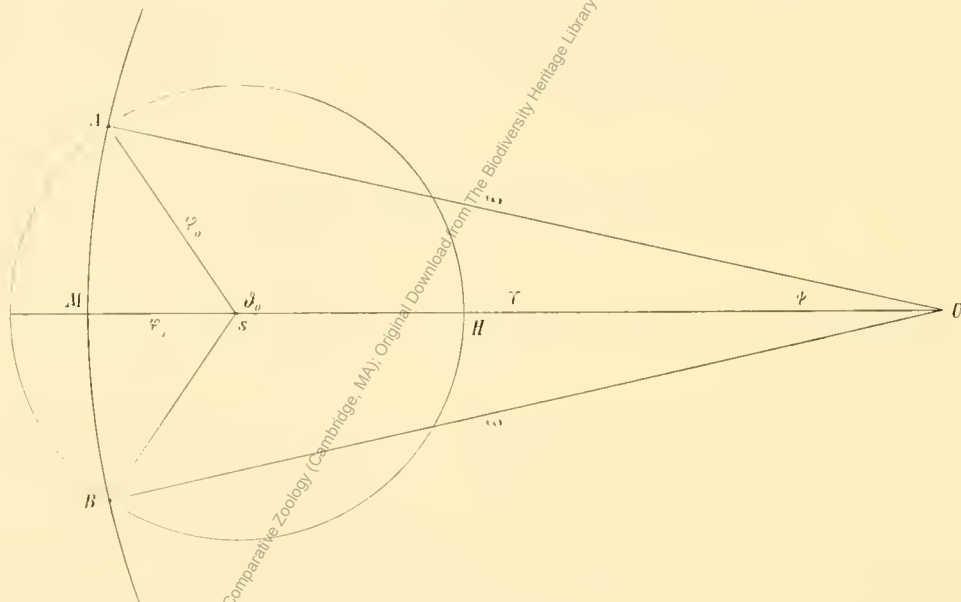
Man erhält demnach durch die Substitution der oberen Grenzen für $N + N'$:

$$N_B + N'_{B'} = u D \frac{\beta_0^2 + \alpha^2 \cos 2\lambda}{\sin \lambda} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin (\gamma_1 \sin \lambda) - \alpha \gamma_1^2 \sin^2 \lambda \right] \\ + u D \alpha^2 \left[\Gamma \sqrt{1 - \gamma_1^2 \sin^2 \lambda} - \alpha \sin \lambda \left(1 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \gamma_1^2 \right) - \alpha \gamma_1^2 \cos \lambda \sin 2\lambda \right].$$

17.

In dem Raume des Hyperboloides zwischen B und B_1 , respektive B' und B'_1 liegen bereits Teile, deren Elemente absoluten Geschwindigkeiten $> \Gamma$ entsprechen, es werden daher andere Integrations-

Fig. 4.



grenzen auftreten als bisher. Diese beiden Endräume werden nur mehr kleine Quantitäten den ermittelten Zahlen hinzufügen, die aber immerhin noch innerhalb der angenommenen Genauigkeitsgrenzen liegen.

Man kann bei der Ermittlung derselben gleich von vornherein die vereinfachende Annahme machen, daß die Dichte in diesen Räumen konstant ist. Wenn — was hier immer angenommen wurde — die zulässige Maximalgeschwindigkeit C wesentlich größer ist als die des Sonnensystems u , so ist das Volumen der Räume von der Größenordnung α^3 ; die Variation der Dichte ist von der Ordnung α , kann daher konsequenterweise unberücksichtigt bleiben.

Bezeichnet man die Anzahl der Geschwindigkeiten darin mit ν , respektive ν' und setzt

$\beta = (B) + \xi$, respektive $= (B') + \xi$, wo also ξ von der Ordnung α ist, so kann demgemäß

$$d\nu = D' u \frac{d\beta \cdot \sin \varphi d\varphi d\vartheta}{1 - \frac{2}{\beta} (\cos \varphi \cos \lambda + \sin \lambda \sin \varphi \cos \vartheta) + \frac{1}{\beta^2}} \\ = D' u \cdot \frac{d\xi \cdot \sin \varphi d\varphi d\vartheta}{1 - \frac{2}{(B)} \cos \lambda + \frac{1}{(B)^2}}$$

gesetzt werden.

Es sei in obenstehender Figur ABH der Schnitt des Hyperboloides mit einer Kugeloberfläche aus dem Mittelpunkt desselben, deren Radius β in den kritischen Bereich fällt, so daß also $B < \beta < B_1$. Sei weiters U der Punkt der Kugelfläche, in welchem dieselbe von der Geschwindigkeitsrichtung des Sonnensystems u getroffen wird, so daß $SU = \lambda$ ist. Wenn nun AMB jener Kreisbogen ist, dessen Punkte der Maximalgeschwindigkeit entsprechen, so wird $UM = \omega$ durch die Gleichung bestimmt:

$$\Gamma^2 = 1 + \beta^2 - 2\beta \cos \omega$$

und der Raum $AMBH$ stellt jenes Gebiet vor, in welchem der vorgelegten relativen Geschwindigkeit β noch mögliche absolute Geschwindigkeiten $\leq \Gamma$ entsprechen. Das Integrationsresultat nach φ und ϑ wird bezüglich der jetzt geltenden Grenzen das Oberflächenstück $AMBH$ sein, da der Nenner im obigen Differential nunmehr eine Konstante ist.

Dieses Flächenstück ist nun gleich $2(SAH + MSA)$, $SAH = \vartheta_0 (1 - \cos \varphi_0)$, wo ϑ_0 der Gleichung genügt

$$\cos \omega = \cos \varphi_0 \cos \lambda + \sin \varphi_0 \sin \lambda \cos \vartheta_0.$$

Setzt man $\omega - \lambda = \varphi_1$, so ist φ_1 für diesen Endraum von der Größenordnung φ_0 . In SAH braucht man im Ausdruck für ϑ_0 offenbar nur mehr erste Potenzen von φ_0 zu berücksichtigen, so daß man zur Bestimmung von ϑ_0 die Gleichung hat

$$\cos \lambda - \sin \varphi_1 \sin \lambda = \cos \lambda + \sin \varphi_0 \sin \lambda \cos \vartheta_0$$

oder

$$\vartheta_0 = \arccos \left(-\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_0} \right).$$

Es ist also

$$SAH = (1 - \cos \varphi_0) \arccos \left(-\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_0} \right) = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_0 \arccos \left(-\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_0} \right).$$

Ferner hat man

$$UMA = (1 - \cos \omega) \psi$$

$$USA = 2\psi \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{2} \sin \frac{\lambda}{2}}{\cos \frac{\varphi_0}{2}} \text{ und}$$

$$MSA = 2\psi \cdot \left(\sin \frac{\omega}{2} - \frac{\sin \frac{\lambda}{2}}{\cos \frac{\varphi_0}{2}} \right) \sin \frac{\omega}{2}.$$

Mit Rücksicht auf die Größenordnungen ergibt sich, da

$$\psi = \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \omega} \sin \varphi_0 \text{ ist}$$

$$MSA = \frac{1}{2} \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \sin \varphi_1,$$

daher das gesamte Flächenstück

$$AMBH = \sin \varphi_0 \left\{ \sin \varphi_0 \arccos \left(-\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_0} \right) + \sin \varphi_1 \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi_0}} \right\}$$

ist.

Diesen Ausdruck hat man mit $d\xi$ zu multiplizieren und von B bis B_1 zu integrieren. Dazu hat man φ_0 und φ_1 als Funktionen von ξ herzustellen. Man sieht sofort, daß im vorliegenden Falle φ_0 konstant gehalten werden kann.

Es ist

$$\sin^2 \varphi_0 = \alpha^2 + \frac{\beta_0^2}{\beta^2} = \alpha^2 \left[1 + \frac{\beta_0^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{(B)^2} \left(1 - 2 \frac{\xi}{(B)} \right) \right],$$

daher

$$\sin \varphi_0 = \alpha \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \frac{1}{(B)^2} - \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \frac{\xi}{(B)^3} \right],$$

woraus unmittelbar folgt, daß nach den bisherigen Festsetzungen das von ξ abhängige Glied vernachlässigt werden kann, daher für den Endraum

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta_0^2}{(B)^2}} = \alpha \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{1}{(B)^2} \right] \text{ ist.}$$

Was die Größe φ_1 anbelangt, so ergibt sich dieselbe leicht aus der Gleichung für ω : $\Gamma^2 = 1 + \beta^2 - 2 \beta \cos$, die auch so formuliert werden kann

$$\Gamma^2 = 1 + [(B) + \xi]^2 - 2[(B) + \xi] \cos(\lambda + \varphi_1).$$

Da es hier wieder ausreicht, nur erste Potenzen von ξ und φ_1 mitzunehmen, so erhält man unter Berücksichtigung der Relation

$$\Gamma^2 = 1 + (B)^2 - 2(B) \cos \lambda$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{(B) - \cos \lambda}{(B) \sin \lambda} \cdot \xi = -L \cdot \xi.$$

Dann ist

$$d\nu = \frac{u D' d\xi}{1 - \frac{2}{(B)} \cos \lambda + \frac{1}{(B)^2}} \sin \varphi_0 \left\{ \sin \varphi_0 \arccos \left(\frac{L\xi}{\sin \varphi_0} \right) - L\xi \sqrt{1 - \frac{L^2 \xi^2}{\sin^2 \varphi_0}} \right\}.$$

Der zweite Teil liefert für die Integration über den ganzen Endraum offenbar keinen Beitrag, da

$$\int L\xi \sqrt{1 - \frac{L^2}{\sin^2 \varphi_0} \xi^2} d\xi = -\frac{1}{3} \frac{\sin^2 \varphi_0}{L} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi_0} \right)^{3/2}$$

und für die Grenzen $\sin \varphi_1 = \pm \sin \varphi_0$ ist.

Für den ersten Teil erhält man:

$$\int \arccos \left(\frac{L\xi}{\sin \varphi_0} \right) d\xi = \xi \arccos \left(\frac{L\xi}{\sin \varphi_0} \right) - \frac{\sin \varphi_0}{L\xi} \sqrt{1 - \frac{L^2 \xi^2}{\sin^2 \varphi_0}},$$

so daß mit Rücksicht auf die Grenzen

$$\nu = \frac{u D' \sin^2 \varphi_0}{1 - \frac{2}{(B)} \cos \lambda + \frac{1}{(B)^2}} \left[\xi \arccos \left(\frac{L\xi}{\sin \varphi_0} \right) \right]_{-\xi_0}^{+\xi_0},$$

wo

$$\xi_0 = \alpha \sin \lambda \left[1 + \gamma_1 \cos \lambda + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \gamma_1^2 \right] \text{ ist.}$$

Die Einführung dieser Grenzen ergibt dann

$$v = \frac{u D \sin^2 \varphi_0}{1 - \frac{2}{(B)} \cos \lambda + \frac{1}{(B)^2}} \cdot \frac{\alpha}{2} \sin \lambda \left[1 + \gamma_1 \cos \lambda + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \cdot \gamma_1^2 \right].$$

Nun ist

$$\frac{1}{1 - \frac{2}{(B)} \cos \lambda + \frac{1}{(B)^2}} = \frac{(B)^2}{\Gamma^2} = \left(\sqrt{1 - \gamma_1^2 \sin^2 \lambda} + \gamma_1 \cos \lambda \right)^2,$$

so daß man schließlich erhält

$$v = \frac{1}{2} u D \sin^2 \varphi_0 \cdot \alpha \sin \lambda \left[1 - \gamma_1 \cos \lambda - \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \right) \gamma_1^2 \right].$$

Da sich der analoge Ausdruck für das entgegengesetzte Ende des Hyperboloides nur durch das Vorzeichen von $\cos \lambda$ unterscheiden wird, so wird

$$v + v' = u D \sin^2 \varphi_0 \alpha \sin \lambda \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \right) \gamma_1^2 \right].$$

Berücksichtigt man, daß hier

$$\sin^2 \varphi_0 = \alpha^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{1}{(B)^2} \right] = \alpha^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 \gamma_1^2 \right]$$

gesetzt werden kann, so erhält man schließlich für die den beiden Endräumen entsprechende Größe

$$v + v' = u D \alpha^3 \sin \lambda \left[1 + \left(\frac{3}{2} \left(\frac{\beta_0}{\alpha} \right)^2 - 1 \right) \gamma_1^2 \right].$$

18.

Die bis jetzt gewonnenen Resultate geben nun die Möglichkeit, die Gesamtzahl der aus allen möglichen Geschwindigkeiten sich ergebenden sichtbaren Bahnen zu bestimmen.

Die Zahl der zwischen β_1 und B liegenden Bahnen ist nach der früheren Bezeichnungsweise

$$N(\beta_1, B) = N_B + N_{B'} - (N + N')_{\beta_1}.$$

Bemerkt man nun, daß die für $(N + N')_{\beta_1}$ erhaltene Größe gleich ist $N(0, \beta_1)$, der Zahl der merklich parabolischen Bahnen, so folgt daraus, daß die Zahl sämtlicher Bahnen bis B :

$$N(0, B) = N_B + N_{B'},$$

daß also mit einer etwas anderen Anordnung des oben erhaltenen Ausdruckes

$$\begin{aligned} N(0, B) = & u D \frac{\beta_0^2}{\sin \lambda} \left[\arccos(\gamma_1 \sin \lambda) - \frac{3}{2} \alpha \gamma_1^2 \sin^2 \lambda \right] \\ & + u D \alpha^2 \left[\Gamma \sqrt{1 - \gamma_1^2 \sin^2 \lambda} + \frac{\cos 2 \lambda}{\sin \lambda} \arccos(\gamma_1 \sin \lambda) \right] \\ & - u D \alpha^3 [\sin \lambda + \gamma_1^2 \sin 3 \lambda]. \end{aligned}$$

Dazu kommt noch die eben gefundene Größe

$$\begin{aligned} \nu + \nu' &= u D \cdot \frac{3}{2} \beta_0^2 \alpha \gamma_1^2 \sin \lambda \\ &+ u D \alpha^3 \sin \lambda (1 - \gamma_1^2). \end{aligned}$$

Die Gesamtzahl der Bahnen ist demnach

$$\begin{aligned} N(0, B_1) &= u D \frac{\beta_0^2}{\sin \lambda} \arccos(\gamma_1 \sin \lambda) \\ &+ u D \alpha^2 \left[\Gamma \sqrt{1 - \gamma_1^2 \sin^2 \lambda} + \frac{\cos 2\lambda}{\sin \lambda} \arccos(\gamma_1 \sin \lambda) \right] \\ &- u D \alpha^3 \gamma_1^2 [\sin \lambda + \sin 3\lambda]. \end{aligned}$$

Eine etwas einfachere Form erhält dieser Ausdruck, wenn man einen Winkel μ durch die zulässige Substitution $\gamma_1 \sin \lambda = \cos \mu$ einführt. Dann wird die Gesamtzahl ausgedrückt durch

$$N(0, B_1) = u D \frac{\beta_0^2}{\sin \lambda} \cdot \mu + u D \alpha^2 \left[\Gamma \sin \mu + \frac{\cos 2\lambda}{\sin \lambda} \mu \right] - 4 u D \alpha^3 \cos^2 \mu \frac{\cos^2 \lambda}{\sin \lambda}.$$

Setzt man endlich $\frac{\beta_0^2}{\alpha^2} = K$, eine Größe, die sehr nahe der Einheit gleich sein wird so resultiert für das gesuchte Verhältnis Γ der merklich parabolischen zu sämtlichen Bahnen:

$$\Gamma = \frac{K \left(\beta_1 \sin \lambda + \frac{1}{3} \beta_1^3 \sin 3\lambda + \frac{1}{5} \beta_1^5 \sin 5\lambda \right) + \beta_1^2 \left(\frac{1}{3} \beta_1 \sin \lambda + \frac{1}{5} \beta_1^3 \sin 3\lambda \right)}{\Gamma \sin \lambda \sqrt{1 - \gamma_1^2 \sin^2 \lambda} + \cos 2\lambda \arccos(\gamma_1 \sin \lambda) + K \arccos(\gamma_1 \sin \lambda) - \alpha \gamma_1^2 \sin^2 2\lambda}$$

oder durch Einführung der Größe μ :

$$\Gamma = \frac{K \left(\beta_1 \sin \lambda + \frac{1}{3} \beta_1^3 \sin^3 \lambda + \frac{1}{5} \beta_1^5 \sin^5 \lambda \right) + \beta_1^2 \left(\frac{1}{3} \beta_1 \sin \lambda + \frac{1}{5} \beta_1^3 \sin 3\lambda \right)}{\Gamma \sin \lambda \sin \mu + (K + \cos 2\lambda) \mu - 4 \alpha \cos^2 \lambda \cos^2 \mu}$$

19.

Die bisherigen Ausführungen sind nicht unter allen Umständen gültig. Sie basieren auf einer Entwicklung nach Potenzen der sehr kleinen Größen α oder β_0 , beginnend mit der Ordnung α^2 , deren Glieder aber Potenzen der Größe $X = 1 - 2\beta \cos \lambda + \beta^2$ zum Nenner haben. Diese Entwicklung verliert daher ihre Gültigkeit, sobald X eine kleine Größe derselben oder höherer Ordnung als α ist.

Da $X = (1 - \beta)^2 + 4\beta \sin^2 \frac{\lambda}{2}$ ist, so wird dieser Fall dann eintreten, wenn sowohl λ als auch $1 - \beta$ Größen von der Ordnung α sind. Vermöge des letzteren Umstandes bleibt daher jene Entwicklung, die sich auf die Zahl der merklich parabolischen Bahnen bezieht, unter allen Umständen gültig, da man β_1 als beträchtlich kleiner als die Einheit annehmen muß, so daß man ohne weiteres die entsprechende Zahl für den Grenzwert $\lambda = 0$ aus der gegebenen Formel für $N(0, \beta_1)$ entnehmen kann. Andererseits wird aber da Γ beträchtlich größer als die Einheit anzunehmen ist, bei genügend kleinem λ die Integration über Gebiete führen, in welchen die obigen Entwicklungen aus dem angegebenen Grunde ungültig ist. Tatsächlich wird auch die Integration in der bisherigen Form überhaupt nicht mehr anwendbar, wenn λ so klein ist, daß die Strecke u ganz innerhalb des Hyperboloides fällt. Dann wird sich in dem dem Endpunkte

von u unendlich benachbarten Raume die Funktion F' , wie unmittelbar ersichtlich ist, beliebig der Null nähern und

$$\int \beta \log F' d\beta$$

überhaupt sinnlos werden.

Es ist selbstverständlich, daß tatsächlich keine derartige Diskontinuität vorhanden sein kann und das Auftreten einer solchen ihren Grund nur in der gewählten Darstellungsform haben kann, da ja nach dem angenommenen Gesetze des Vorkommens der absoluten Geschwindigkeiten jedem endlichen Volumen eine endliche Zahl von Geschwindigkeitsendpunkten entspricht, die sich mit der Lage desselben stetig ändert.

Es soll hier nur der Grenzfall $\lambda = 0$ behandelt werden. Man erhält nach dem eben Gesagten die Zahl der merklich parabolischen Bahnen aus der Spezialisierung der oben dafür gefundenen Formel:

$$N(0, \beta_1)_{\lambda=0} = u D \beta_0^2 (\beta_1 + \beta_1^3 + \beta_1^5) + u D x^2 \left(\frac{1}{3} \beta_1^3 + \frac{3}{5} \beta_1^5 \right).$$

Nebenbei möge hier die Bemerkung Platz finden, daß sich dieser Fall auch völlig streng erledigen ließe. Für die numerische Auswertung ist die bisherige Darstellung natürlich die vorteilhaftere.

Zum Zwecke der Ermittlung der Gesamtzahl soll aber aus den angeführten Gründen ein etwas anderer Weg dadurch eingeschlagen werden, daß statt der relativen Geschwindigkeit die absolute als Integrationsvariable eingeführt wird.

Denkt man sich in dem betrachteten Punkt des Raumes wieder die der Geschwindigkeit u entsprechende Strecke angebracht, so wird dieselbe nunmehr ganz in die gegen die Sonne gerichtete Achse des Hyperboloides fallen. Um den Endpunkt U dieser Strecke seien unendlich dünne Kugelschalen beschrieben, deren Radien den absoluten Geschwindigkeiten entsprechen.

Die Zahl der einer solchen Kugelschale zugehörigen Geschwindigkeiten ist nach den gemachten Annahmen $4 D' \pi dc = 2 D dc$; einem Segment vom Öffnungswinkel 2ψ entspricht die Zahl $D(1 - \cos \psi) dc$.

Um die Gesamtzahl zu finden, hat man über die innerhalb des Hyperboloides fallenden Teile der Kugelschalen zu summieren.

Einen Teil dieser Summierung kann man sofort ausführen. In der um U beschriebenen Kugel, welche das Hyperboloid berührt, werden sämtliche absolute Geschwindigkeitsrichtungen vorkommen. Ist c_0 der Radius derselben, so ist die Zahl der Geschwindigkeiten innerhalb dieses Raumes $4\pi D' c_0 = 2 D c_0$.

Beschreibt man in irgend einer Meridianebene der Rotationsfigur um U einen Kreis mit dem Radius c so sind die Ordinaten der Schnittpunkte mit der Hyperbel gegeben durch

$$y = u \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2} \sqrt{(c^2 - a^2)(a^2 + b^2) - a^2 u^2},$$

wenn a und b die absoluten Beträge der beiden Achsen sind.

Für den berührenden Kreis hat man

$$(c_0^2 - a^2)(a^2 + b^2) = a^2 u^2.$$

Da nun

$$a^2 = s_0^2 = \frac{2q}{r(r+q)}$$

und

$$b^2 = 2 \frac{r-q}{rq},$$

so findet man

$$\frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{q^2}{r^2} = x^2,$$

daher

$$c_0^2 = g_0^2 + \alpha^2 u^2,$$

oder, wenn man die GröÙe $\frac{c}{u} = \zeta$ setzt

$$\zeta_0^2 = \beta_0^2 + \alpha^2.$$

Die Zahl der Geschwindigkeiten innerhalb der berührenden Kugel ist daher $2 D u \zeta_0$.

Für den $c > c_0$ hat man über die vom Hyperboloid herausgeschnittenen Kugelsegmente zu summieren. Die zugehörigen Winkel ψ bestimmen sich aus

$$\cos \psi = \frac{y-u}{c}$$

für das positive Vorzeichen der Wurzel und

$$\cos \psi' = \frac{u-y'}{c}$$

für das negative. Da nun

$$y = u (1 - \alpha^2) + u \sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{\zeta^2 - \beta_0^2 - \alpha^2},$$

so ist

$$\cos \psi = -\frac{\alpha^2}{\zeta} + \frac{1}{\zeta} \sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{\zeta^2 - \zeta_0^2}$$

und

$$\cos \psi' = +\frac{\alpha^2}{\zeta} + \frac{1}{\zeta} \sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{\zeta^2 - \zeta_0^2}.$$

Addiert man gleich beide zum selben c gehörigen Werte, so hat man

$$dN = 2 u D \left[1 - \frac{1}{\zeta} \sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{\zeta^2 - \zeta_0^2} \right] d\zeta;$$

das gibt, zwischen den Grenzen c_0 und C integriert:

$$N(c_0, C) = 2 u D \left[\Gamma - \zeta_0 - \sqrt{1 - \alpha^2} \left(\sqrt{\Gamma^2 - \zeta_0^2} - \zeta_0 \arccos \frac{\zeta_0}{\Gamma} \right) \right]$$

addiert man $N(0, c_0) = 2 u D \zeta_0$, so erhält man schließlich als Gesamtzahl

$$N(0, C)_{\lambda=0} = 2 u D \left[\Gamma - \sqrt{1 - \alpha^2} \left(\sqrt{\Gamma^2 - \zeta_0^2} - \zeta_0 \arccos \frac{\zeta_0}{\Gamma} \right) \right].$$

Entwickelt man wieder in der bisherigen Weise nach den Größen α und ζ_0 , so wird der Klammerausdruck

$$\Gamma - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \left[\Gamma \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\zeta_0^2}{\Gamma^2} \right) - \zeta_0 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\zeta_0}{\Gamma} \right) \right]$$

und die Gesamtzahl

$$N(0, C)_{\lambda=0} = u D \left[\pi \zeta_0 + \alpha^2 \Gamma - \gamma_1 \zeta_0^2 - \pi \frac{\alpha^2}{2} \zeta_0 \right].$$

Zu bemerken ist hier der Umstand, daß diese GröÙe nicht mehr wie die bisherigen von der Ordnung α^2 , sondern des ersten Gliedes wegen erster Ordnung in α ist. Der Grund liegt eben darin, daß bei der gemachten Annahme der gleichmäßigen Verteilung der Geschwindigkeiten einem Raume von den Dimen-

sionen der Ordnung α in der unmittelbaren Umgebung von U ein N von der Ordnung α entspricht, in endlicher Entfernung jedoch N von derselben Größenordnung wie der zugehörige Raum ist oder höherer Ordnung.

Es wird demgemäß auch das Verhältnis der ausgesprochen hyperbolischen Bahnen zu den merklich parabolischen über alle Maßen groß, nämlich, wie gleich ersichtlich sein wird, durch ein beträchtliches Vielfache von $\frac{1}{\alpha}$ dargestellt. Nun ist aber offenbar dieser Fall und der der kleinen λ überhaupt für das Gesamtergebn nicht ausschlaggebend, da die Area der Himmelskugel, die einem bestimmten λ entspricht, $\sin \lambda$ proportional ist. Das ist auch der Grund, warum hier der Fall der kleinen λ , das heißt der λ , die von derselben Ordnung wie der Asymptotenwinkel α sind, nicht weiter behandelt werden soll, dessen analytische Weitläufigkeit überdies in keinem Verhältnis zu dem Einfluß auf das Gesamtergebn steht.

20.

Um nun ein Bild von den Wahrscheinlichkeitsverhältnissen zu gewinnen, wie sie aus den hier entwickelten Formeln resultieren, sind dieselben für einige Annahmen der Größen Γ und β_1 gerechnet worden, die so gewählt wurden, daß die tatsächlichen Verhältnisse sicher von ihnen eingeschlossen werden. Für diesen Zweck wird man sich natürlich weitgehender Vereinfachungen bedienen können.

Nimmt man als Grenze die in Frage kommenden Periheldistanzen $q = 2$ an und berücksichtigt, daß n wahrscheinlich nahe der Einheit gleich sein wird, so wird $\beta_0 = \alpha$.

Für $\lambda = 0$ ergibt sich als Verhältnis der merklich parabolischen Bahnen zur Gesamtzahl, wenn man im Nenner nur das überwiegende Glied $\frac{1}{\alpha}$ beibehält, $V = \frac{\beta_1 \alpha}{\pi}$,

was nach den früheren approximativen Zahlenwerten α und β_1 nichts anderes besagt, als daß für die Gegend um den Apex, respektive Antiapex der Sonnenbewegung eine merklich parabolische Bahn auf eine Anzahl hyperbolischer kommen würde, die etwa durch eine achtziffrige Zahl angebar wäre, ein Resultat, das, wie bemerkt, für die Gesamtverhältnisse irrelevant ist.

Der analoge Ausdruck für endliche λ läßt sich mit ausreichender Näherung darstellen durch

$$V = \frac{\beta_1 \sin \lambda}{\Gamma \sin \lambda \sqrt{1 - \gamma_1^2 \sin^2 \lambda} + (1 + \cos 2\lambda) \arccos(\gamma_1 \sin \lambda)}.$$

Es soll nun $\Gamma = 3, 10$ und 17 gesetzt, das heißt, angenommen werden, daß das Maximum der interstellaren Geschwindigkeiten das Drei-, respektive Zehn- oder Siebzehnfache der Geschwindigkeit des Sonnensystems betragen würde. Ferner soll konform den früheren Folgerungen als Grenzgeschwindigkeit β_1 in großer Distanz (100.000) für jene Hyperbeln, die in der Perihelgegend von Parabeln nicht unterschieden werden können, 0.02 gesetzt werden.

Die Zahlen der folgenden Tabelle bedeuten die Anzahl der Kometenbahnen, auf welche unter den angegebenen Umständen eine einzige merklich parabolische Bahn fallen würde:

λ	$\Gamma = 3$	10	17
10°	1000	1393	1722
20°	527	899	1252
30°	358	728	1081
40°	262	637	989
50°	216	579	931
60°	181	541	893
70°	158	512	862
80°	146	502	853
90°	141	475	849

Diese Zahlen zeigen zur Genüge das starke Überwiegen ausgesprochen hyperbolischer Bahnen.

Wesentlich für das Zustandekommen dieses Resultates war der Umstand, daß die Grenzgeschwindigkeit in großen Distanzen für die merklich parabolischen Bahnen höherer Ordnung ist als die Geschwindigkeit des Sonnensystems, während die obere Grenze der kosmischen (absoluten) Geschwindigkeiten mit dieser vergleichbar ist.

Wenn demnach die Kometen, in keinem Zusammenhang mit dem Sonnensystem stehend, aus interstellarem Raum in die Wirkungssphäre der Sonne gelangen würden mit absoluten Geschwindigkeiten, die jeder Richtung nach und innerhalb gewisser endlicher Grenzen auch jeder Größe nach gleich wahrscheinlich sind, so müßten die ausgesprochen hyperbolischen Bahnen in einem Verhältnis überwiegen, das durch Vielfache der Zahl 100 seiner Größenordnung nach charakterisiert wäre.

Hält man dieses Resultat mit dem früheren zusammen, wonach elliptische Kometenbahnen mit einer Apheldistanz, die etwa das 70fache der Neptunsdistanz beträgt, schon mit äußerst geringer Wahrscheinlichkeit von einer parabolischen unterschieden werden können, so gelangt man zu dem Schlusse, daß die Kometen unserem Sonnensystem angehören und ihr Ursprung in Entfernungen vom Zentralkörper liegen kann, welche im Verhältnis zu den Distanzen der nächsten Fixsterne noch immer als sehr klein zu bezeichnen sind.

