ÜBER DIE GÜNSTIGSTE GEWICHTSVERTEILUNG BEI TRIGONOMETRISCHEN PUNKTBESTIMMUNGEN

VON

DR. EMIL HELLEBRAND

Mit 6 Textfiguren

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 30. NOVEMBER 1911

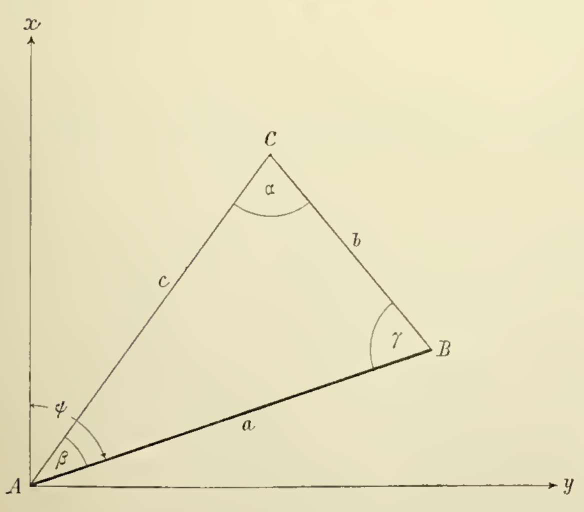
Für die einfachen Methoden trigonometrischer Punktbestimmung, wie sie bei Verwendung eines einzelnen Dreieckes auftreten, wurde das Problem der günstigsten Gewichtsverteilung in einer früheren Arbeit [1] behandelt.

Die vorliegende Studie bringt zunächst in dem Abschnitte »Fehlerellipse und Fehlerkreis« einige Ergänzungen, welche unter Zuhilfenahme der beigeschlossenen Tabelle eine rasche und sichere Beurteilung der mittleren Punktfehler ermöglichen sollen. Im Anschlusse hieran wird die Art der Fehlerfortpflanzung in einer Dreieckskette untersucht und die zugehörige günstigste Gewichtsverteilung ermittelt. Die Entwickelungen basieren auf der Theorie der Ausgleichung bedingter Beobachtungen; diese Grundlage wurde des Zusammenhanges wegen auch im letzten Kapitel beibehalten, welches sich, gleichfalls unter dem Gesichtspunkte zweckmäßigster Beobachtungsverteilung, mit dem mehrfachen Vorwärtseinschneiden befaßt.

Mittlere Koordinatenfehler.

Mit den Bezeichnungen der Fig. 1 lauten die Koordinaten für C:

Fig. 1.



$$x = c \cos[\psi - \beta] = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} \cos[\psi - \beta], \qquad (1$$

$$y = c \sin[\psi - \beta] = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} \sin[\psi - \beta]. \qquad (2$$

Hiebei ist festzuhalten, daß a die ihrer Größe und Richtung nach fehlerfrei bestimmte Basis, α, β und γ bereits ausgeglichene Dreieckswinkel vorstellen, welch letzteren die Gewichtszahlen p_1, p_2 und p_3 zugeordnet sind. Im Vereine mit der auf die Winkeländerungen $d\alpha$, $d\beta$ und $d\gamma$ sowie den Dreieckswiderspruch w bezogenen Bedingung

$$d\alpha + d\beta + d\gamma + w = 0 \qquad (3$$

bilden obige Gleichungen das Ausgangssystem für die weiterhin nach der Theorie bedingter Beobachtungen zu entwickelnden Funktionsgewichte P_x und P_y.

[1] Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften Bd. 118, II a.

Aus

$$Lg\,x = Lg\,a - Lg \sin \alpha + Lg \cos [\psi - \beta] + Lg \sin \gamma,$$
$$Lg\,y = Lg\,a - Lg \sin \alpha + Lg \sin [\psi - \beta] + Lg \sin \gamma$$

folgen im Wege der Differentiation die linearen Funktionen:

$$dx = x\,(-\cot \alpha\, d\alpha + \operatorname{tg} [\psi - \beta]\, d\beta + \cot \gamma\, d\gamma) = F, \tag{4}$$

$$dy = y\,(-\cot \alpha\, d\alpha - \cot [\psi - \beta]\, d\beta + \cot \gamma\, d\gamma) = G. \tag{5}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\begin{array}{lll} f_1 = -x \cot \alpha, & f_2 = x \operatorname{tg} [\psi - \beta], & f_3 = x \cot \gamma, \\ g_1 = -y \cot \alpha, & g_2 = -y \cot [\psi - \beta], & g_3 = y \cot \gamma \end{array} \tag{6}$$

$$\text{und } p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 = K,$$

dann liefert die Auflösung der zwei für F und G aufzustellenden Übertragungsgleichungen

$$\begin{gathered} \left[\frac{a\,a}{p}\right] r + \left[\frac{a f}{p}\right] = 0 \\ \left[\frac{a\,a}{p}\right] \rho + \left[\frac{a\,g}{p}\right] = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

die Koeffizienten:

$$\begin{gathered} r = \frac{1}{K}\,(-p_1 p_2 f_3 - p_1 p_3 f_2 - p_2 p_3 f_1), \\ \rho = \frac{1}{K}\,(-p_1 p_2 g_3 - p_1 p_3 g_2 - p_2 p_3 g_1), \end{gathered} \tag{8}$$

weil die der allgemeinen Bedingungsgleichung

$$a_1 d\alpha + a_2 d\beta + a_3 d\gamma + w = 0$$

im vorliegenden Falle entsprechenden Werte für a_1, a_2 und a_3 gleich der Einheit sind.

Ferner erhält man für die zur Bestimmung von

$$\frac{1}{P_x} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \frac{F_3^2}{p_3}$$

und

$$\frac{1}{P_y} = \frac{G_1^2}{p_1} + \frac{G_2^2}{p_2} + \frac{G_3^2}{p_3} \tag{9}$$

erforderlichen Funktionen

$$\begin{array}{lll} F_1 = f_1 + r, & F_2 = f_2 + r, & F_3 = f_3 + r, \\ G_1 = g_1 + \rho, & G_2 = g_2 + \rho, & G_3 = g_3 + \rho. \end{array} \tag{10}$$

mit Einführung der Symbole

$$\begin{array}{lll} d_1 = -f_1 + f_3, & d_2 = -f_1 + f_2, & d_3 = -f_2 + f_3 \\ t_1 = -g_1 + g_3, & t_2 = -g_1 + g_2, & t_3 = -g_2 + g_3 \end{array} \tag{11}$$

folgende leicht zu ermittelnden Ausdrücke:

$$\begin{array}{ll} F_1 = \dfrac{1}{K}\,(p_1 p_2 d_1 + p_1 p_3 d_2), & G_1 = -\dfrac{1}{K}\,(p_1 p_2 t_1 + p_1 p_3 t_2), \\[2ex] F_2 = -\dfrac{1}{K}\,(p_1 p_2 d_3 - p_2 p_3 d_2), & G_2 = -\dfrac{1}{K}\,(p_1 p_2 t_3 - p_2 p_3 t_2), \\[2ex] F_3 = \dfrac{1}{K}\,(p_1 p_3 d_3 + p_2 p_3 d_1), & G_3 = \dfrac{1}{K}\,(p_1 p_3 t_3 + p_2 p_3 t_1). \end{array}$$

Werden letztere im Sinne der Gleichungen (9 zusammengefaßt, so erscheinen die Gewichtsreziproken in der Form:

$$\frac{1}{P_x} = \frac{1}{K^2} \left\{ \begin{aligned} & p_1 p_2^2 d_1^2 + p_1 p_3^2 d_2^2 + 2\, p_1 p_2 p_3\, d_1\, d_2 \\ + & p_1^2 p_2\, d_3^2 + p_2 p_3^2 d_2^2 - 2\, p_1 p_2 p_3\, d_2\, d_3 \\ + & p_1^2 p_3\, d_3^2 + p_2^2 p_3\, d_1^2 + 2\, p_1 p_2 p_3\, d_1\, d_3 \end{aligned} \right\}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{P_y} = \frac{1}{K^2} \left\{ \begin{aligned} & p_1 p_2^2 t_1^2 + p_1 p_3^2 t_2^2 + 2\, p_1 p_2 p_3\, t_1\, t_2 \\ + & p_1^2 p_2\, t_3^2 + p_2 p_3^2 t_2^2 - 2\, p_1 p_2 p_3\, t_2\, t_3 \\ + & p_1^2 p_3\, t_3^2 + p_2^2 p_3\, t_1^2 + 2\, p_1 p_2 p_3\, t_1\, t_3 \end{aligned} \right\}, \tag{13}$$

welche indes noch einer wesentlichen Vereinfachung unterzogen werden kann.

Beachtet man nämlich die aus (11 folgenden Relationen

$$d_1 - d_3 = d_2, \qquad t_1 - t_3 = t_2$$

und zieht in obigen Gleichungen die Hälften der doppelten Produkte paarweise zusammen, also in $\frac{1}{P_x}$ das halbe erste mit dem halben zweiten:

$$p_1 p_2 p_3\, d_2\, (d_1 - d_3) = p_1 p_2 p_3\, d_2^2,$$

das erste mit dem dritten:

$$p_1 p_2 p_3\, d_1\, (d_2 + d_3) = p_1 p_2 p_3\, d_1^2,$$

das zweite mit dem dritten:

$$p_1 p_2 p_3\, d_3\, (d_1 - d_2) = p_1 p_2 p_3\, d_3^2,$$

führt Analoges in $\frac{1}{P_y}$ durch, dann resultiert nach Division durch

$$K = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3$$

als Reziproke der Funktionsgewichte:

$$\frac{1}{P_x} = \frac{1}{K}\,(p_1\, d_3^2 + p_2\, d_1^2 + p_3\, d_2^2)$$

und

$$\frac{1}{P_y} = \frac{1}{K}\,(p_1\, t_3^2 + p_2\, t_1^2 + p_3\, t_2^2). \tag{14}$$

Bekanntlich sind die Quadrate des mittleren Abszissen- und Ordinatenfehlers bestimmt durch

$$M_x^2 = \frac{m^2}{P_x} \text{ und } M_y^2 = \frac{m^2}{P_y},$$

wenn m den mittleren Fehler einer Winkelmessung bedeutet; demnach wird — mit Rücksicht auf die im früheren eingeführten Abkürzungen:

$$M_x^2 = \frac{m^2 c^2 \cos^2 [\psi - \beta]}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \left\{ p_1\, (\cot \gamma - \operatorname{tg} [\psi - \beta])^2 + p_2\, (\cot \alpha + \cot \gamma)^2 + p_3\, (\cot \alpha + \operatorname{tg} [\psi - \beta])^2 \right\}, \tag{15}$$

$$M_y^2 = \frac{m^2 c^2 \sin^2 [\psi - \beta]}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \left\{ p_1\, (\cot \gamma + \cot [\psi - \beta])^2 + p_2\, (\cot \alpha + \cot \gamma)^2 + p_3\, (\cot \alpha - \cot [\psi - \beta])^2 \right\}, \tag{16}$$

und hieraus nach einigen Reduktionen der mittleren Punktfehler:

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 = \frac{m^2}{\sin^2 \alpha} \; \frac{p_1 a^2 + p_2\, b^2 + p_3 c^2}{p_1 p_2 + p_1\, p_3 + p_2\, p_3} \tag{17}$$

— in voller Übereinstimmung mit dem seinerzeit nach der Theorie vermittelnder Beobachtungen gefundenen Resultat.

Die Bestimmung des Minimums von M^2 mit der Nebenbedingung

$$p_1 + p_2 + p_3 = P$$

war Gegenstand der Arbeit[1] »Die günstigste Gewichtsverteilung bei Dreieckswinkelmessungen«, deren Hauptergebnisse hier in Kürze wiedergegeben seien:

$$p_1 = \frac{P}{N}\left(2\,bc \sin\alpha + \sqrt{3}\,[-a^2 + b^2 + c^2]\right),$$

$$p_2 = \frac{P}{N}\left(2\,ac \sin\beta + \sqrt{3}\,[a^2 - b^2 + c^2]\right), \tag{18}$$

$$p_3 = \frac{P}{N}\left(2\,ab \sin\gamma + \sqrt{3}\,[a^2 + b^2 - c^2]\right),$$

mit

$$N = 6\,bc \sin\alpha + \sqrt{3}\,[a^2 + b^2 + c^2],$$

ferner

$$M^2 = \frac{m^2}{P \sin^2\alpha}\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \sqrt{3}\,bc \sin\alpha\right) \tag{19}$$

als mittlerer Punktfehler bei günstigster,

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{m^2}{P \sin^2\alpha}\,(a^2 + b^2 + c^2) \tag{20}$$

als mittlerer Punktfehler bei gleichmäßiger Gewichtsverteilung.

Zur leichteren numerischen Auswertung der Gewichte wird man das Gleichungssystem (18 noch ein wenig umgestalten:

Da

$$-a^2 + b^2 + c^2 = 2\,bc \cos\alpha$$
$$a^2 - b^2 + c^2 = 2\,ac \cos\beta$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = 2\,ab \cos\gamma,$$

wird zunächst

$$p_1 = \frac{2\,bcP}{N}(\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha)$$

$$p_2 = \frac{2\,acP}{N}(\sin\beta + \sqrt{3}\cos\beta)$$

$$p_3 = \frac{2\,abP}{N}(\sin\gamma + \sqrt{3}\cos\gamma)$$

und mit der Substitution

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60°$$

das Verhältnis

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{\sin(60 + \alpha)}{\sin\alpha} : \frac{\sin(60 + \beta)}{\sin\beta} : \frac{\sin(60 + \gamma)}{\sin\gamma}, \tag{21}$$

womit allen Forderungen nach Bequemlichkeit der Rechnung entsprochen sein dürfte. Überdies erkennt erkennt man auf den ersten Blick, daß Winkel von 120° und darüber von der Beobachtung auszuschließen sind.

---

[1] Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften Bd. 118.

Fehlerellipse und Fehlerkreis.

Als Abschluß der Betrachtungen über den mittleren Punktfehler im Einzeldreieck sollen im Folgenden die Ausdrücke für die Achsen der Fehlerellipse und für die Richtungen derselben entwickelt werden auf Grundlage der zu diesem Zwecke bereits vorbereiteten Gleichung (15 eventuell (16.

Führt man nämlich in den Ausdruck

$$M_x^2 = \frac{m^2 c^2 \cos^2[\psi-\beta]}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \left\{ \begin{array}{l} p_1 (\cot^2\gamma + \operatorname{tg}^2[\psi-\beta] - 2\cot\gamma \operatorname{tg}[\psi-\beta]) \\ + p_2 \dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha \sin^2\gamma} \\ + p_3 (\cot^2\alpha + \operatorname{tg}^2[\psi-\beta] + 2\cot\alpha \operatorname{tg}[\psi-\beta]) \end{array} \right\}$$

die oben angegebenen Werte p_1, p_2 und p_3 ein und ersetzt gleichzeitig $\sin^2[\psi-\beta]$ durch $1-\cos^2[\psi-\beta]$ dann treten innerhalb der Klammern folgende Gliedergruppen auf:

Glieder ohne ψ:

$$p_1 + p_3 = \frac{2bP}{N}(2c\sin\alpha + b\sqrt{3});$$

Glieder mit $$2\,bc\sin\alpha\,\frac{P}{N}\cos^2[\psi-\beta]:$$

$$\frac{2\,bP}{c\sin\alpha\,N}\cos^2[\psi-\beta]\,(a^2+b^2+c^2-4a^2\sin^2\gamma];$$

Glieder mit dem Faktor

$$\frac{P\sqrt{3}}{N}\cos^2[\psi-\beta]:$$

$$\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma}2\,bc\cos\alpha + \frac{b^2}{a^2\sin^2\gamma}2\,ac\cos\beta + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}2\,ab\cos\gamma - 2\,b^2$$

$$= \frac{2\,b}{c\sin^2\alpha}(a\cos\alpha\cos\gamma\,[a\cos\gamma + c\cos\alpha] - ab\cos\alpha\cos\gamma + ab\sin\alpha\sin\gamma - ab\sin\alpha\sin\gamma)$$

$$= O,\quad \text{da } a\cos\gamma + c\cos\alpha = b \text{ ist;}$$

ferner solche mit

$$2\,bc\sin\alpha\,\frac{P}{N}\sin 2[\psi-\beta]:$$

$$2\,bc\sin\alpha\,\frac{P}{N}\sin 2\,[\psi-\beta]\,(\cot\alpha - \cot\gamma) = 2\,\frac{P}{N}\sin 2\,[\psi-\beta]\,(bc\cos\alpha - ab\cos\gamma)$$

$$= 2\,\frac{P}{N}(c^2-a^2)\sin 2\,[\psi-\beta]$$

und schließlich Glieder mit dem Faktor

$$\frac{P\sqrt{3}}{N}\sin 2\,[\psi-\beta]:$$

$$-2\,bc\cos\alpha\cot\gamma + 2\,ab\cos\gamma\cot\alpha = 0.$$

Auf Grund dieser Vereinfachungen und mit Rücksichtnahme auf

$$K = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 = P^2 . \frac{4\,bc\sin\alpha}{6\,bc\sin\alpha + \sqrt{3}\,(a^2+b^2+c^2)},$$

$$N = 6\,bc\sin\alpha + \sqrt{3}\,(a^2+b^2+c^2)$$

lautet jetzt das Quadrat des mittleren Abszissenfehlers:

$$M_x^2 = \frac{m^2}{2\,P \sin^2\alpha}\left\{2\,c^2 \sin^2\alpha + \sqrt{3}\,bc \sin\alpha + \cos^2[\psi-\beta]\,(a^2+b^2+c^2-4a^2\sin^2\gamma)\right.$$
$$\left. + \sin 2\,[\psi-\beta]\; c \sin\alpha\,(b-2\,a\cos\gamma)\right\}. \qquad (22$$

Es ist demnach letzterer nicht allein von der Größe und Form des Dreieckes, sondern auch von der Richtung der Dreiecksbasis — ψ — abhängig.

Aus

$$\frac{d M_x^2}{d\psi} = 0$$

erhält man den die Extreme von M_x^2 präzisierenden Wert von ψ, er sei mit ψ_0 bezeichnet, in der Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2\,[\psi_0-\beta] = \frac{2c \sin\alpha\,(b-2\,a\cos\gamma)}{a^2+b^2+c^2-4a\sin^2\gamma}$$
$$= \frac{\sin\alpha \sin\gamma \sin[\gamma-\alpha]}{\sin^2\beta - \sin\alpha \sin\gamma \cos[\gamma-\alpha]} = \frac{Q}{R}, \qquad (23$$

daher weiter:

$$\sin 2\,[\psi_0-\beta] = \pm \frac{Q}{\sqrt{R^2+Q^2}},$$

$$\cos^2[\psi_0-\beta] = \pm \frac{R \pm \sqrt{R^2+Q^2}}{2\sqrt{R^2+Q^2}}$$

und hiemit, insofern das $+$Zeichen dem Maximum der Funktion zukommt:

$$M_{x\,\text{Max.}}^2 = A^2 = \frac{m^2}{4\,P \sin^2\alpha}\left\{4\,c^2\sin^2\alpha + 2\sqrt{3}\,bc\,\sin\alpha + R + \sqrt{R^2+Q^2}\right\}$$
$$= \frac{m^2}{4\,P\sin^2\alpha}\left\{a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3}\,bc\sin\alpha + \sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2 - 12\,a^2b^2\sin^2\gamma}\right\}$$
$$= \frac{m^2}{4\,P\sin^2\alpha}\left\{a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3}\,bc\sin\alpha + \right.$$
$$\left. + \sqrt{(a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3}\,bc\sin\alpha)\,(a^2+b^2+c^2-2\sqrt{3}\,bc\sin\alpha)}\right\}. \qquad (24$$

Mit Benützung der früher zitierten Gleichungen (19 und (20 sowie der Differenz

$$\mathfrak{M}^2 - M^2 = \frac{m^2}{2\,P\sin^2\alpha}\,(a^2+b^2+c^2-2\sqrt{3}\,bc\sin\alpha)$$

kann man $M_{x\,\text{Max.}} = A$, welches der halben großen Achse der Fehlerellipse entspricht, während $M_{x\,\text{Min.}} = B$ die halbe kleine Achse charakterisiert,

$$M_{x\,\text{Min.}}^2 = B^2 = \frac{m^2}{4\,P\sin^2\alpha}\left\{a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3}\,bc\sin\alpha\right.$$
$$\left. - \sqrt{(a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3}\,bc\sin\alpha)\,(a^2+b^2+c^2-2\sqrt{3}\,bc\sin\alpha)}\right\}, \qquad (25$$

wie folgt, weiter transformieren:

$$A^2 = \frac{M^2}{2} + \frac{M}{2}\sqrt{\mathfrak{M}^2 - M^2} = \frac{M}{2}\left(M + \sqrt{[\mathfrak{M}+M]\,[\mathfrak{M}-M]}\right) \qquad (26$$

und analog

$$B^2 = \frac{M}{2}\left(M - \sqrt{[\mathfrak{M}+M][\mathfrak{M}-M]}\right) \cdot \tag{27}$$

Zu denselben Resultaten führt die Analyse des Ausdruckes M_y^2 nach Gleichung (16.

Für ein gleichseitiges Dreieck gilt:

$$\mathfrak{M} = M,$$

da hier die gleichmäßige Gewichtsverteilung mit der günstigsten identisch ist; mithin

$$A^2 = \frac{M^2}{2},\ B^2 = \frac{M^2}{2} \text{ also } A = B = \frac{M}{\sqrt{2}},$$

das heißt, bei gleichseitigen Dreiecken geht die Fehlerellipse in einen Kreis über, was auch die Unbestimmtheit des Ausdruckes für ψ_0 bestätigt:

$$\operatorname{tg} 2\,[\psi_0 - \beta] = \frac{\sin\alpha \sin\gamma \sin[\gamma-\alpha]}{\sin^2\beta - \sin\alpha \sin\gamma \cos[\gamma-\alpha]}$$

$$= \frac{0}{0}$$

bei $\alpha = \beta = \gamma$.

Im Sinne der Gleichungen (26 und (27 ist der Unterschied zwischen den Ellipsenachsen umso größer, je mehr die Dreiecksform von der Gleichseitigkeit abweicht. So erhält man beispielsweise für

$$a = 10.000\,m, \quad m = 10'', \quad P = 100; \quad \alpha = 20°, \quad \beta = 60°, \quad \gamma = 100°:$$

$$\mathfrak{M} = 56\cdot17\ cm, \qquad M = 49\cdot45\ cm,$$

hieraus

$$A = 43\cdot37\ cm, \qquad B = 23\cdot75\ cm$$

und, wenn die Basisrichtung $\psi = 90°$ gesetzt wird, als Richtungswinkel der Ellipsenachsen

$$\Theta_A = \psi - \psi_0 = 17°\ 11'\ 12'',$$
$$\Theta_B = \Theta_A + 90° = 107°\ 11'\ 12'',$$

hingegen für $\alpha = 70°$, $\beta = \gamma = 55°$ mit Beibehaltung der Werte für a, m und P:

$$\mathfrak{M} = 8\cdot19\ cm, \quad M = 8\cdot15\ cm,$$

$$A = 6\cdot04\ cm, \quad B = 5\cdot48\ cm,$$

und

$$\Theta_A = 90°, \qquad \Theta_B = 180° \text{ oder } 0°.$$

Das Auftreten von Fehlerkreisen bei gleichseitigen Dreiecken legt die Frage nahe, unter welchen Bedingungen bei beliebig geformten Dreiecken die Fehlerellipsen in Fehlerkreise übergehen könnten.

Die Beantwortung dieser Frage ist deshalb von besonderem Interesse, weil man vom Standpunkte der geodätischen Praxis an jede gute Punktbestimmung die Forderung stellt, die mittlere Punktverschiebung soll nach allen Richtungen gleich groß, ihr absoluter Betrag ein Minimum sein oder mit anderen Worten: Die mittlere Fehlerfläche soll ein Kreis mit möglichst kleinem Radius sein.

Zum näheren Studium dieser Aufgabe müssen zunächst die Ausdrücke für die Ellipsenachsen in allgemeiner Form dargestellt werden. Hiezu kann man Gleichung (15 oder (16 verwenden:

$$M_x^2 = \frac{m^2 c^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}\left\{\begin{aligned} &\frac{\sin^2[\psi-\beta]}{a^2 \sin^2\gamma}\left(p_1 a^2 \sin^2\gamma - p_1 a^2 \cos^2\gamma - p_2 b^2 + p_3 c^2 \sin^2\alpha - p_3 c^2 \cos^2\alpha\right) \\ &+ \frac{\sin 2\,[\psi-\beta]}{a \sin\gamma}\left(p_3\, c \cos\alpha - p_1\, a \cos\gamma\right) \\ &+ p_1 \cot^2\gamma + p_2 \frac{b^2}{a^2 \sin^2\gamma} + p_3 \cot^2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

worin die Glieder nach den Funktionen von ψ bereits geordnet sind.

Aus

$$\frac{d\,M_x^2}{d\psi} = 0$$

folgt allgemein:

$$\operatorname{tg} 2\,[\psi_0 - \beta] = \frac{2a \sin\gamma\,(p_1\,a\cos\gamma - p_3\,c\cos\alpha)}{p_1\,a^2\sin^2\gamma - p_1\,a^2\cos^2\gamma - p_2\,b^2 + p_3\,c^2\sin^2\alpha - p_3\,c^2\cos^2\alpha} = \frac{Z}{N}, \tag{29}$$

$$\sin 2\,[\psi_0 - \beta] = \frac{Z}{\pm\sqrt{Z^2 + N^2}}, \quad \sin^2[\psi_0 - \beta] = \frac{\sqrt{Z^2+N^2} \mp N}{\sqrt{Z^2+N^2}}.$$

Da nun

$$Z^2 + N^2 = p_1^2\,a^4 + p_2^2\,b^4 + p_3^2\,c^4 + 2\,p_1\,p_2\,a^2\,b^2\cos 2\gamma + 2\,p_1\,p_3\,a^2\,c^2\cos 2\beta + 2\,p_2\,p_3\,b^2\,c^2\cos 2\alpha$$
$$= (p_1\,a^2 + p_2\,b^2 + p_3\,c^2)^2 - (p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2 p_3)\,4\,a^2\,b^2\sin^2\gamma$$

ist, erscheint das Maximum beziehungsweise Minimum von M_x^2 deffiniert durch:

$$M^2_{x\,\substack{\text{Max.}\\ \text{Min.}}} = \frac{m^2}{2\,K\sin^2\alpha}\Big\{p_1\,a^2 + p_2\,b^2 + p_3\,c^2 \pm$$
$$\pm\sqrt{(p_1\,a^2 + p_2\,b^2 + p_3\,c^2 - 4\,F\sqrt{K})\,(p_1\,a^2 + p_2\,b^2 + p_3\,c^2 + 4\,F\sqrt{K})}\Big\}, \tag{30}$$

wenn mit F der Flächeninhalt des Dreieckes und mit K die Kombinationssumme $p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3$ bezeichnet wird.

Wie unmittelbar ersichtlich, sind die Achsen $A^2 = M^2_{x\text{Max.}}$, $B^2 = M^2_{x\text{Min.}}$ nur noch abhängig von p_1, p_2 und p_3, die nun so bestimmt werden müssen, daß zunächst der Wurzelausdruck verschwindet, mithin an Stelle der Ellipsenachsen der Kreisradius tritt:

$$R^2 = \frac{m^2}{2\,K\sin^2\alpha}\,(p_1\,a^2 + p_2\,b^2 + p_3\,c^2), \tag{31}$$

überdies R selbst hiedurch auf ein Minimum reduziert werde.

Außer den Gleichungen

$$p_1\,a^2 + p_2\,b^2 + p_3\,c^2 = 4\,F\sqrt{p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3}, \tag{32}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = P, \tag{33}$$

liegt demnach noch die Minimumsforderung für R^2 vor.

Wird

$$p_3 = P - p_1 - p_2$$

in (32 eingesetzt, so ergibt sich vorerst die p_1 und p_2 verbindende Relation:

$$p_1^2\,([a^2 - c^2]^2 + 16\,F^2) + p_2^2\,([b^2 - c^2]^2 + 16\,F^2) + 2\,p_1\,p_2\,([a^2 - c^2]\,[b^2 - c^2] + 8F^2)$$
$$+ 2p_1\,P\,(c^2\,[a^2 - c^2] - 8\,F^2) + 2\,p_2\,P\,(c^2\,[b^2 - c^2] - 8\,F^2) + P^2\,c^4 = 0. \tag{34}$$

Bedeutet für den Augenblick

$$k = (a^2 - c^2)^2 + 16\,F^2, \quad q = (a^2 - c^2)\,(b^2 - c^2) + 8\,F^2,$$
$$l = (b^2 - c^2)^2 + 16\,F^2, \quad r = c^2\,(a^2 - c^2) - 8\,F^2, \quad s = c^2\,(b^2 - c^2) - 8\,F^2,$$

dann liefert die Auflösung obiger Gleichung:

$$p_1\,k = -\,(p_2\,q + P\,r) \pm \sqrt{p_2^2\,(q^2 - kl) + 2\,P\,p_2\,(q\,r - ks) + P^2\,(r^2 - kc^4)}. \tag{35}$$

Untersuchen wir zunächst die Größen unter dem Wurzelzeichen:

$$p_2^2\,(q^2-kl) = 16\,F^2 p_2^2\,(-12\,F^2-a^4-b^4-c^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$

$$= 16\,F^2 p_2^2 \left(-12\,F^2 + \frac{3}{4}\,[-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2] - \left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right]^2\right)$$

$$= -16\,F^2 p_2^2 \left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right]^2;$$

ferner

$$2\,Pp_2\,(qr-ks) = 16\,F^2\,Pp_2\,(8\,F^2+a^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2)$$

$$= 16\,F^2\,Pp_2\,\frac{1}{2}\,(a^4-b^4+c^4+2\,a^2c^2)$$

$$= 16\,F^2\,Pp_2\,\frac{1}{2}\,(a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)$$

$$= 16\,F^2\,Pp_2\,a\,c\cos\beta\,(a^2+b^2+c^2)$$

und

$$P^2\,(r^2-kc^4) = 16\,F^2\,P^2\,(4\,F^2-a^2c^2) = -16\,F^2\,P^2a^2c^2\cos^2\beta.$$

Die Substitution dieser Werte in (35 führt zu einem für das vorliegende Problem charakteristischen Wurzelausdruck:

$$\pm\,4\,F\sqrt{-\frac{p_2^2}{4}\,(a^2+b^2+c^2)^2+Pp_2\,ac\cos\beta\,(a^2+b^2+c^2)-P^2a^2c^2\cos^2\beta}$$

$$= \pm\,4\,F\sqrt{-\left(\frac{p_2}{2}\,[a^2+b^2+c^2]-Pac\cos\beta\right)^2}. \qquad (36$$

Daraus erhellt, daß die Unbekannten p_1, p_2, p_3 komplexe Größen sein müssen. Wenn auch die Weiterführung dieser Auflösung in erster Linie aus Raumrücksichten unterbleiben muß, so ist doch anderseits zu bedenken, daß derselben keinerlei praktische Bedeutung zukommen kann, da Gewichtszahlen stets auf das Gebiet reeller Größen beschränkt bleiben müssen.

Voraussetzung hiefür ist im gegebenen Falle das Verschwinden des Wurzelausdruckes in (36, also

$$\frac{p_2}{2}\,(a^2+b^2+c^2)-P\,ac\cos\beta = 0$$

$$p_2 = P.\,\frac{2\,ac\cos\beta}{a^2+b^2+c^2} \qquad (37$$

und hieraus mit

$$k = 16\,F^2+(a^2-c^2)^2 = b^2\,(2\,a^2-b^2+2\,c^2),$$

$$p_2 q = \frac{p_2}{2}\,(-a^4-b^4+c^4+4\,a^2b^2),$$

$$Pr = \frac{P}{2}\,(a^4+b^4-c^4-2\,a^2b^2-2\,b^2c^2)$$

weiter

$$p_1 = P\,\frac{-2\,a^4-b^4+2\,c^4+3\,a^2b^2+b^2c^2}{(2a^2-b^2+2c^2)\,(a^2+b^2+c^2)} = P\,\frac{-a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$p_1 = P\,\frac{2\,bc\cos\alpha}{a^2+b^2+c^2} \qquad (38$$

und schließlich

$$p_3 = P\,\frac{2\,ab\cos\gamma}{a^2+b^2+c^2}\,. \qquad (39$$

Damit sind zwar die Gewichte gefunden, welche den Übergang von Fehlerellipsen auf Fehlerkreise bedingen; da indes der Minimumsforderung (31 nicht entsprochen werden konnte, infolge des beschränkten Geltungsgebietes von Gewichtszahlen überhaupt, so wäre noch zu untersuchen, in welcher Beziehung die mittleren Fehlerflächen — Ellipse und Kreis — zu einander stehen.

Vorerst scheint es aber notwendig, Gleichungen (37, (38 und (39 zu überprüfen.

Soll nämlich nach Einführung von p_1, p_2 und p_3 an Stelle der Fehlerellipse ein Kreis entstehen, dann muß $\operatorname{tg} 2\,[\psi_0 - \beta]$ den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ annehmen, weil jetzt eine ausgezeichnete Richtung nicht mehr vorhanden ist.

Es wird

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2\,[\psi_0-\beta] &= \frac{(p_1\, a \cos\gamma - p_3\, c \cos\alpha)\, 2\, a \sin\gamma}{p_1\, a^2 \sin^2\gamma - p_1\, a^2\cos^2\gamma + p_3\, c^2 \sin^2\alpha - p_3\, c^2\cos^2\alpha - p_2\, b^2} \\ &= \frac{\cos\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\cos\gamma}{a\sin\beta\sin\gamma - b\cos\alpha\cos\gamma + b\cos\alpha\cos\gamma - a\sin\beta\sin\gamma} \\ &= \frac{0}{0}\,,\end{aligned}$$

womit die Richtigkeit der früher ermittelten Gewichte erwiesen ist.

Anderseits erkennt man aus (37, 38 und 39 ebenso aus dem Verhältnis

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{\cos\alpha}{a} : \frac{\cos\beta}{b} : \frac{\cos\gamma}{c} = \cot\alpha : \cot\beta : \cot\gamma\,, \qquad (40$$

daß für Dreiecke, in denen ein Winkel 90° überschreitet, ein Fehlerkreis wegen des Auftretens negativer Gewichte nicht mehr realisierbar ist.

Zum Vergleiche zwischen dem Flächeninhalte des Fehlerkreises und dem der Fehlerellipse setzen wir p_1, p_2 und p_3 in R^2 (31 ein und erhalten:

$$\begin{aligned}R^2 &= \frac{m^2\,(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)}{4\,P\sin^2\alpha\,(a\cos\beta\cos\gamma + b\cos\alpha\cos\gamma + c\cos\alpha\cos\beta)}\,(a^2+b^2+c^2) \\ &= \frac{m^2}{2\,P\sin^2\alpha}\,(a^2+b^2+c^2) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2}\,. \qquad (41\end{aligned}$$

Es war aber

$$A^2 = \frac{M}{2}\left(M + \sqrt{\mathfrak{M}^2 - M^2}\right)$$

$$B^2 = \frac{M}{2}\left(M - \sqrt{\mathfrak{M}^2 - M^2}\right)$$

also

$$\frac{A^2+B^2}{2} = \frac{M^2}{2}\,.$$

Da nun $R^2 = \frac{\mathfrak{M}^2}{2} > \frac{M^2}{2} = \frac{A^2+B^2}{2} > AB$ ist, so folgt: der Flächeninhalt des Fehlerkreises $R^2\pi$ ist stets größer als jener der Fehlerellipse $AB\pi$; nur für das gleichseitige Dreieck ist $R^2\pi = AB\pi$.

Zur Übersicht und etwaigen Verwendung wurden im Nachfolgenden zusammengestellt für $a = 10\,000\,m$, $m = 10''$, $P = 100$ und $\psi = 90°$:

1. Für die Fehlerellipse: A, B, $\Theta_A = \psi - \psi_0 = 90 - \psi_0$ und $AB\pi$;
2. für den Fehlerkreis: R und $R^2\pi$.

Die Tabelle wird es ermöglichen, in praktischen Fällen nach Berücksichtigung aller sonstigen Umstände eine zweckmäßige Entscheidung treffen zu können.

Dabei muß noch bemerkt werden, daß bei jenen Punktbestimmungen, für welche im Sinne der besten Gewichtsverteilung an Stelle der Triangulierung ein einfaches Vorwärts- oder Seitwärtseinschneiden zu wählen ist, also in allen Dreiecken, in denen ein Winkel 120° überschreitet, die Gleichungen (23, (26 und (27 durch folgende zu ersetzen sind:

Beim Vorwärtseinschneiden aus β und γ:

$$\operatorname{tg} 2\,[\psi_0 - \beta] = \frac{\sin 2\alpha \sin \gamma}{\sin \beta + \cos 2\alpha \sin \gamma},$$

$$A^2 = \frac{M^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4 \sin^2 \alpha \sin \beta \sin \gamma}{(\sin \beta + \sin \gamma)^2}}\right),$$

$$B^2 = \frac{M^2}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4 \sin^2 \alpha \sin \beta \sin \gamma}{(\sin \beta + \sin \gamma)^2}}\right)$$

und mit

$$\frac{\sin \alpha \sqrt{\sin \beta \sin \gamma}}{\sin \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2}} = \sin \varphi_1,$$

$$A = M \cos \frac{\varphi_1}{2},$$

$$B = M \sin \frac{\varphi_1}{2};$$

für das Seitwärtseinschneiden aus α und β:

$$\operatorname{tg} 2\,[\psi_0 - \beta] = \frac{\sin \alpha \sin 2\gamma}{\sin \beta + \sin \alpha \cos 2\gamma},$$

$$A^2 = \frac{M^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4 \sin \alpha \sin \beta \sin^2 \gamma}{[\sin \alpha + \sin \beta]^2}}\right),$$

$$B^2 = \frac{M^2}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4 \sin \alpha \sin \beta \sin^2 \gamma}{[\sin \alpha + \sin \beta]^2}}\right),$$

oder mit der Substitution

$$\frac{\sin \gamma \sqrt{\sin \alpha \sin \beta}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = \sin \varphi_2,$$

$$A = M \cos \frac{\varphi_2}{2},$$

$$B = M \sin \frac{\varphi_2}{2}.$$

Die angeführten Gleichungen ergeben sich auf Grundlage des Fehlerfortpflanzungsgesetzes unmittelbar aus den Formeln für die Koordinaten des Punktes C; die näheren Einzelheiten können hier übergangen werden.

α	β	γ	A cm	B cm	Θ_A	$AB\pi$ dm²	R cm	$R^2\pi$ dm²
10	10	160	54·99	9·70	70° 00' 00"	16·75		
	15	155	67·95	14·74	65 07 25	31·47		
	20	150	80·41	20·20	60 20 16	51·03		
	25	145	92·29	25·95	55 14 10	75·24		
	30	140	103·52	31·86	51 03 40	103·62		
	35	135	114·04	37·80	47 34 41	135·42		
	40	130	123·81	43·63	42 12 06	169·70		
	45	125	132·78	49·22	37 55 48	205·32		
	50	120	140·94	54·44	33 45 28	241·06		
	55	115	148·77	57·61	28 58 19	269·28		
	60	110	155·52	60·33	24 10 02	294·77		
	65	105	161·11	62·59	19 20 55	316·78		
	70	100	165·51	64·36	14 31 11	334·63		
	75	95	168·67	65·63	9 41 01	347·76		
	80	90	170·58	66·32	4 50 35	355·41	160·78	812·13
	85	85	171·22	66·65	0 00 00	358·54	161·38	818·21
15	10	155	30·59	6·63	64 52 35	6·38		
	15	150	36·18	9·70	60 00 00	11·02		
	20	145	41·52	12·94	55 16 08	16·88		
	25	140	46·55	16·30	50 42 06	23·84		
	30	135	51·26	19·73	46 18 58	31·76		
	35	130	55·62	23·13	42 07 45	40·42		
	40	125	59·65	26·45	38 09 15	49·57		
	45	120	63·35	29·60	34 23 49	58·89		
	50	115	67·11	31·59	29 53 44	66·60		
	55	110	70·34	33·25	25 21 16	73·48		
	60	105	73·11	34·68	20 46 57	79·66		
	65	100	75·35	35·85	16 11 13	84·85		
	70	95	77·05	36·72	11 34 26	88·89		
	75	90	78·19	37·32	6 56 56	91·67	72·37	164·55
	80	85	78·76	37·61	2 19 02	93·06	72·90	166·97
20	10	150	20·73	5·21	59 39 44	3·39		
	15	145	23·78	7·41	54 43 52	5·53		
	20	140	26·64	9·70	50 00 00	8·12		
	25	135	29·31	12·05	45 30 31	11·09		
	30	130	31·78	14·42	41 18 07	14·40		
	35	125	33·89	16·68	37 25 45	17·76		
	40	120	36·12	19·02	33 56 20	21·58		
	45	115	38·32	20·47	29 48 58	24·64		
	50	110	40·28	21·75	25 38 44	27·53		
	55	105	41·97	22·84	21 26 00	30·12		
	60	100	43·37	23·75	17 11 12	32·37		
	65	95	44·48	24·46	12 54 48	34·17		
	70	90	45·28	24·97	8 37 11	35·52	41·44	53·96

α	β	γ	*A cm*	*B cm*	Θ_A	$A B \pi\, dm^2$	*R cm*	$R^2 \pi\, dm^2$
	75	85	45·76	25·28	4° 18' 47"	36·34	41·88	55·11
	80	80	45·92	25·38	0 00 00	36·62	42·03	55·50
25	10	145	15·58	4·38	54 45 50	2·14		
	15	140	17·46	6·11	49 17 54	3·35		
	20	135	19·20	7·89	44 29 29	4·76		
	25	130	20·79	9·69	40 00 00	6·33		
	30	125	22·24	11·51	35 54 55	8·04		
	35	120	23·55	13·29	32 21 12	9·83		
	40	115	25·00	14·48	28 35 04	11·37		
	45	110	26·31	15·55	24 48 59	12·85		
	50	105	27·45	16·47	21 02 14	14·20		
	55	100	28·42	17·26	17 14 33	15·41		
	60	95	29·21	17·89	13 25 52	16·41		
	65	90	29·81	18·36	9 36 18	17·20	27·15	23·15
	70	85	30·21	18·68	5 46 04	17·73	27·51	23·77
	75	80	30·42	18·84	1 55 24	18·01	27·69	24·09
30	10	140	12·49	3·84	48 56 20	1·51		
	15	135	13·73	5·29	43 41 02	2·28		
	20	130	14·87	6·75	38 41 53	3·15		
	25	125	15·89	8·22	34 05 05	4·10		
	30	120	16·79	9·69	30 00 00	5·11		
	35	115	17·81	10·75	26 20 09	6·01		
	40	110	18·73	11·69	22 48 47	6·88		
	45	105	19·54	12·52	19 23 49	7·69		
	50	100	20·25	13·25	16 03 40	8·43		
	55	95	20·83	13·83	12 47 06	9·05		
	60	90	21·29	14·30	9 33 12	9·57	19·39	11·81
	65	85	21·63	14·69	6 21 09	9·95	19·70	12·19
	70	80	21·83	14·85	3 10 17	10·18	19·88	12·42
	75	75	21·89	14·91	0 00 00	10·26	19·95	12·50
35	10	135	10·45	3·46	42 25 19	1·14		
	15	130	11·33	4·71	37 52 15	1·68		
	20	125	12·05	5·93	32 34 15	2·25		
	25	120	12·78	7·21	27 38 48	2·90		
	30	115	13·53	8·17	23 39 51	3·47		
	35	110	14·21	9·04	20 00 00	4·03		
	40	105	14·81	9·82	16 37 32	4·57		
	45	100	15·34	10·51	13 31 09	5·06		
	50	95	15·77	11·09	10 39 39	5·49		
	55	90	16·13	11·57	8 01 34	5·86	14·74	6·82
	60	85	16·39	11·93	6 34 57	6·14	15·00	7·07
	65	80	16·57	12·18	3 17 12	6·34	15·17	7·23
	70	75	16·66	12·30	1 05 05	6·44	15·26	7·32

α	β	γ	$A\ cm$	$B\ cm$	Θ_A	$A B \pi\ dm^2$	$R\ cm$	$R^2 \pi\ dm^2$
	10	130	9·04	3·18	37° 47' 54"	0·90		
	15	125	9·67	4·29	31 50 45	1·30		
	20	120	10·23	5 39	26 03 40	1·73		
	25	115	10·81	6·26	21 24 56	2·13		
	30	110	11·33	7·07	17 11 13	2·52		
	35	105	11·79	7·80	13 22 28	2·89		
40	40	100	12·20	8·49	10 00 00	3·25		
	45	95	12·53	9·08	7 05 58	3·57		
	50	90	12·79	9·57	4 42 46	3·84	11·73	4·32
	55	85	12·98	9·97	2 51 57	4·07	11·96	4·49
	60	80	13·12	10·26	1 32 29	4·23	12·12	4·61
	65	75	13·21	19·45	0 38 49	4·34	12·22	4·69
	70	70	13·23	10·50	0 00 00	4·36	12·25	4·71
	10	125	8·01	2·97	32 04 12	0·75		
	15	120	8·49	3·97	25 36 11	1·06		
	20	115	8·96	4·79	20 11 02	1·35		
	25	110	9·40	5·56	15 11 01	1·64		
	30	105	9·77	6·26	10 36 11	1·92		
45	35	100	10·09	6·91	6 28 51	2·19		
	40	95	10·35	7·50	2 54 02	2·44		
	45	90	10·55	8·02	0 00 00	2·66	9·69	2·95
	50	85	10·68	8·45	177 58 34	2·84	9·89	3·07
	55	80	10·78	8·80	177 04 02	3·00	10·03	3·16
	60	75	10·83	9·05	177 26 53	3·08	10·13	3·23
	65	70	10·84	9·17	178 59 12	3·12	10·18	3·26
	10	120	7·24	2·80	26 14 32	0·64		
	15	115	7·66	3·61	20 06 16	0·87		
	20	110	8·03	4·34	14 21 16	1·09		
	25	105	8·35	5·01	8 57 46	1·32		
	30	100	8·63	5·64	3 56 20	1·53		
50	35	95	8·84	6·22	179 20 21	1·73		
	40	90	9·00	6·74	175 17 14	1·91	8·26	2·14
	45	85	9·10	7·20	172 01 26	2·06	8·42	2·23
	50	80	9·16	7·60	170 00 00	2·19	8·56	2·30
	55	75	9·16	7·91	170 02 10	2·28	8·65	2·35
	60	70	9·14	8·13	173 11 01	2·33	8·70	2·38
	65	65	9·13	8·20	0 00 00	2·35	8·73	2·39
	10	115	6·69	2·59	21 01 41	0·54		
	15	110	7·02	3·32	14 38 44	0·73		
	20	105	7·32	3·98	8 34 00	0·92		
55	25	100	7·59	4·59	2 45 27	1·09		
	30	95	7·76	5·15	177 12 54	1·26		
	35	90	7·91	5·67	171 58 26	1·41	7·23	1·64
	40	85	8·00	6·14	167 08 03	1·54	7·36	1·70

α	β	γ	*A cm*	*B cm*	Θ_A	$AB\,\pi\,dm^2$	*R cm*	$R^2\,\pi\,dm^2$
	45	80	8·03	6·55	162° 55' 58"	1·65	7·47	1·76
	50	75	8·01	6·92	159 57 50	1·74	7·56	1·80
	55	70	7·94	7·21	160 00 00	1·80	7·62	1·83
	60	65	7·86	7·41	169 09 53	1·83	7·65	1·84
	10	110	6·25	2·43	15 49 58	0·48		
	15	105	6·53	3·10	9 13 03	0·64		
	20	100	6·77	3·70	2 48 48	0·79		
	25	95	6·96	4·26	176 34 08	0·93		
	30	90	7·10	4·77	170 26 48	1·06	6·46	1·31
60	35	85	7·19	5·23	163 25 03	1·18	6·58	1·36
	40	80	7·23	5·65	158 27 31	1·28	6·66	1·39
	45	75	7·22	6·03	152 33 07	1·37	6·75	1·43
	50	70	7·15	6·36	146 48 59	1·43	6·81	1·46
	55	65	7·03	6·63	140 50 07	1·46	6·84	1·47
	60	60	6·86	6·86		1·48	6·86	1·48
	10	105	5·91	2·30	10 39 05	0·43		
	15	100	6·14	2·92	3 48 47	0·56		
	20	95	6·33	3·48	177 05 12	0·69		
	25	90	6·48	3·99	170 23 42	0·81	5·90	1·10
	30	85	6·58	4·46	163 38 51	0·92	6·00	1·13
65	35	80	6·64	4·88	156 42 48	1·02	6·07	1·16
	40	75	6·64	5·26	149 21 11	1·10	6·14	1·19
	45	70	6·60	5·58	141 00 48	1·16	6·19	1·21
	50	65	6·52	5·86	130 00 00	1·20	6·23	1·22
	55	60	6·42	6·05	109 09 53	1·22	6·25	1·23
	10	100	5·65	2·20	5 28 49	0·39		
	15	95	5·84	2·79	178 25 34	0·51		
	20	90	6·00	3·31	171 22 49	0·62	5·49	0·95
	25	85	6·11	3·78	164 13 56	0·73	5·57	0·97
	30	80	6·18	4·20	156 49 43	0·82	5·63	1·00
70	35	75	6·21	4·58	148 54 55	0·89	5·69	1·02
	40	70	6·19	4·91	140 00 00	0·96	5·73	1·03
	45	65	6·14	5·19	128 59 12	1·00	5·76	1·04
	50	60	6·07	5·40	113 11 01	1·03	5·78	1·05
	55	55	6·04	5·48	90 00 00	1·04	5·79	1·05
	10	95	5·45	2·12	0 18 59	0·36		
	15	90	5·61	2·68	173 03 04	0·47	5·20	0·85
	20	85	5·74	3·17	165 41 13	0·57	5·25	0·87
	25	80	5·82	3·61	158 04 36	0·66	5·30	0·88
	30	75	5·87	4·00	150 00 00	0·74	5·35	0·90
75	35	70	5·87	4·34	141 05 05	0·80	5·38	0·91
	40	65	5·85	4·63	130 38 49	0·85	5·41	0·92
	45	60	5·80	4·85	117 26 53	0·88	5·43	0·93
	50	55	5·76	4·97	100 02 10	0·90	5·44	0·93

α	β	γ	A *cm*	B *cm*	Θ_A	$A B \pi$ *dm*²	R *cm*	$R^2 \pi$ *dm*²
80	10	90	5·30	2·06	175° 09' 25"	0·34	5·00	0·79
	15	85	5·44	2·60	167 40 58	0·44	5·03	0·80
	20	80	5·54	3·06	160 00 00	0·53	5·07	0·81
	25	75	5·60	3·47	151 55 24	0·61	5·10	0·82
	30	70	5·63	3·83	143 10 17	0·68	5·13	0·83
	35	65	5·62	4·13	133 17 12	0·73	5·15	0·83
	40	60	5·59	4·37	121 32 29	0·77	5·16	0·84
	45	55	5·56	4·54	107 04 02	0·79	5·17	0·84
	50	50	5·54	4·60	90 00 00	0·80	5·18	0·84
85	10	85	5·20	2·03	170 00 00	0·33	4·90	0·75
	15	80	5·32	2·54	162 19 02	0·42	4·92	0·76
	20	75	5·39	2·98	154 18 47	0·50	4·94	0·77
	25	70	5·44	3·36	145 46 04	0·57	4·95	0·77
	30	65	5·45	3·69	136 21 09	0·63	4·96	0·77
	35	60	5·43	3·95	126 34 57	0·67	4·97	0·78
	40	55	5·41	4·15	112 51 57	0·70	4·98	0·78
	45	50	5·38	4·26	97 58 34	0·72	4·98	0·78
90	10	80	5·14	2·00	164 50 35	0·32	4·85	0·74
	15	75	5·24	2·50	156 56 56	0·41	4·85	0·74
	20	70	5·30	2·92	148 37 11	0·49	4·85	0·74
	25	65	5·33	3·28	139 36 18	0·55	4·85	0·74
	30	60	5·32	3·58	129 33 12	0·60	4·85	0·74
	35	55	5·31	3·81	118 01 34	0·63	4·85	0·74
	40	50	5·28	3·95	104 42 46	0·66	4·85	0·74
	45	45	5·27	4·01	90 00 00	0·66	4·85	0·74
95	10	75	5·13	1·99	159 41 01	0·32		
	15	70	5·20	2·48	151 34 26	0·40		
	20	65	5·24	2·88	142 54 48	0·47		
	25	60	5·26	3·22	133 25 52	0·53		
	30	55	5·25	3·49	122 47 06	0·57		
	35	50	5·23	3·68	110 39 39	0·60		
	40	45	5·22	3·78	97 05 58	0·62		
100	10	70	5·14	2·00	154 31 11	0·32		
	15	65	5·20	2·48	146 11 13	0·40		
	20	60	5·23	2·86	137 11 12	0·47		
	25	55	5·23	3·18	127 14 33	0·52		
	30	50	5·22	3·41	116 03 40	0·56		
	35	45	5·20	3·56	103 31 09	0·58		
	40	40	5·20	3·62	90 00 00	0·59		

α	β	γ	*A cm*	*B cm*	Θ_A	$A\,B\,\pi\,dm^2$	*R cm*	$R^2\,\pi\,dm^2$
105	10	65	5·21	2·02	149° 20' 55"	0·33		
	15	60	5·25	2·49	140 46 57	0·41		
	20	55	5·26	2·86	131 26 00	0·47		
	25	50	5·25	3·15	121 02 14	0·52		
	30	45	5·24	3·36	109 23 49	0·55		
	35	40	5·22	3·46	96 37 32	0·57		
110	10	60	5·31	2·06	144 10 02	0·34		
	15	55	5·34	2·52	135 21 16	0·42		
	20	50	5·34	2·88	125 38 44	0·48		
	25	45	5·32	3·15	114 48 59	0·53		
	30	40	5·30	3·31	102 48 47	0·55		
	35	35	5·29	3·37	90 00 00	0·56		
115	10	55	5·46	2·12	138 58 19	0·36		
	15	50	5·47	2·58	129 53 44	0·44		
	20	45	5·46	2·92	119 48 58	0·50		
	25	40	5·44	3·15	108 35 04	0·54		
	30	35	5·42	3·27	96 20 09	0 56		
120	10	50	5·66	2·18	133 45 28	0·39		
	15	45	5·66	2·64	124 23 49	0·47		
	20	40	5·63	2·97	113 56 20	0·53		
	25	35	5·61	3·16	102 21 12	0·56		
	30	30	5·60	3·23	90 00 00	0·57		
125	10	45	5·96	2·21	127 55 48	0·41		
	15	40	5·95	2·64	118 09 15	0·49		
	20	35	5·94	2·92	107 25 45	0·55		
	25	30	5·92	3·07	95 54 55	0·57		
130	10	40	6·37	2·24	122 12 06	0·45		
	15	35	6·35	2·64	112 07 45	0·53		
	20	30	6·34	2·88	101 18 07	0·57		
	25	25	6·33	2·95	90 00 00	0·59		
135	10	35	6·88	2·28	117 34 41	0·49		
	15	30	6·87	2·64	106 18 58	0·57		
	20	25	6·86	2·82	95 30 31	0·61		
140	10	30	7·56	2·33	111 03 40	0·55		
	15	25	7·55	2·64	100 42 06	0·63		
	20	20	7·55	2·75	90 00 00	0·65		
145	10	25	8·46	2·38	105 14 10	0·63		
	15	20	8·45	2·63	95 16 08	0·70		
150	10	20	9·70	2·44	100 20 16	0·74		
	15	15	9·70	2·60	90 00 00	0·79		
155	10	15	11·47	2·49	95 07 25	0·90		
160	10	10	14·17	2·50	90 00 00	1·11		

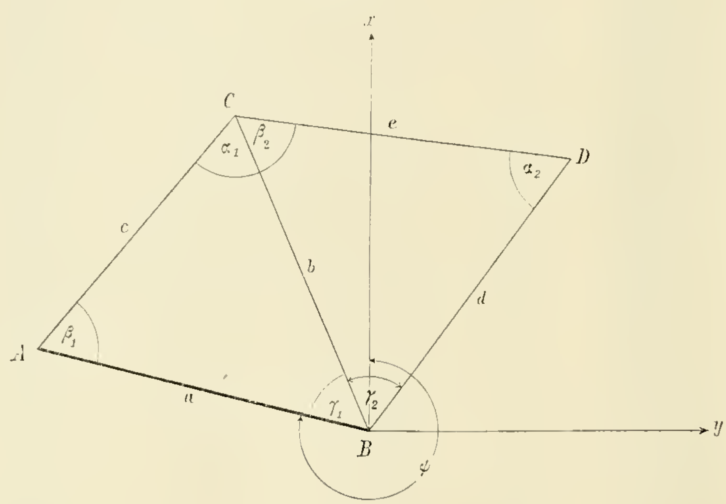
Dreieckskette.

Wenn auch die Bedeutung des Dreieckes als Grundelementes jeder Triangulierung keineswegs unterschätzt werden darf, so ist es doch anderseits evident, daß selbst aus der Verwendung mehrerer auf gemeinsamer Basis aufgebauter Einzeldreiecke nur eine relativ primitive und nicht allzuhäufige Triangulierungsanlage hervorgehen kann.

Unzweifelhaft wichtiger sind jene Triangulierungssysteme, welche in der praktischen Geometrie als Dreiecksketten und Dreiecksnetze bezeichnet werden und die neben der Punkteinschaltung gegenwärtig die Hauptrolle spielen. Im Folgenden soll die freie Kette, im Gegensatz zur eingehängten, näher untersucht werden, wobei zunächst die Art der Fehlerübertragung und hieran anschließend wieder das Problem der günstigsten Gewichtsverteilung zu erörtern sein wird.

Aus der vorläufigen Einschränkung der Aufgabe auf ein System von bloß zwei Dreiecken erwächst der nicht unerhebliche Vorteil, daß die prinzipielle Lösung insbesondere bezüglich der Fehlerfortpflanzung scharf hervorgehoben, überdies der Rechnungsgang bei der erweiterten Dreieckskette wesentlich abge-

Fig. 2.



kürzt werden kann. Die Entwickelungen sollen auf die Theorie bedingter Beobachtungen basiert werden zur Aufrechterhaltung des Zusammenhanges mit dem ersten Teil dieser Abhandlung.

Um zunächst das Gesetz der Fehlerübertragung ermitteln zu können, leiten wir den mittleren Fehler in der Lage des Punktes D (Fig. 2) ab — unter der Annahme: Größe und Richtung der Basis a ist fehlerfrei, den Winkeln α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2 und γ_2, welche hier als bereits ausgeglichen zu betrachten sind, haften unvermeidliche Beobachtungsfehler an, die ihrerseits durch m als mittlerem Fehler der Einzelmessung und die Beobachtungszahlen p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 und p_6 präzisiert sind; versteht man unter p_1 bis p_6 allgemeiner Gewichte, dann bedeutet m den mittleren Fehler für die Gewichtseinheit.

Die Lage des Punktes D bestimmen die Koordinaten

$$x = d \cos [\psi + \gamma_1 + \gamma_2] = \frac{a \sin \beta_1 \sin \beta_2}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} \cos [\psi + \gamma_1 + \gamma_2], \tag{42}$$

$$y = d \sin [\psi + \gamma_1 + \gamma_2] = \frac{a \sin \beta_1 \sin \beta_2}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} \sin [\psi + \gamma_1 + \gamma_2], \tag{43}$$

wenn der Nullpunkt mit B zusammenfällt, ψ die Richtung der Basis kennzeichnet.

Aus $Lg\,x$ und $Lg\,y$ ergeben sich als partielle Differentialquotienten:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} &= -\cot\alpha_1\, x = f_1, & \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} &= -\cot\alpha_1\, y = g_1,\\
\frac{\partial x}{\partial \beta_1} &= +\cot\beta_1\, x = f_2, & \frac{\partial y}{\partial \beta_1} &= +\cot\beta_1\, y = g_2,\\
\frac{\partial x}{\partial \gamma_1} &= -\operatorname{tg}[\psi+\gamma_1+\gamma_2]\, x = f_3, & \frac{\partial y}{\partial \gamma_1} &= +\cot[\psi+\gamma_1+\gamma_2]\, y = g_3,\\
\frac{\partial x}{\partial \alpha_2} &= -\cot\alpha_2\, x = f_4, & \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} &= -\cot\alpha_2\, y = g_4,\\
\frac{\partial x}{\partial \beta_2} &= +\cot\beta_2\, x = f_5, & \frac{\partial y}{\partial \beta_2} &= +\cot\beta_2\, y = g_5,\\
\frac{\partial x}{\partial \gamma_2} &= -\operatorname{tg}[\psi+\gamma_1+\gamma_2]\, x = f_6, & \frac{\partial y}{\partial \gamma_2} &= +\cot[\psi+\gamma_1+\gamma_2]\, y = g_6.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Da die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
d\alpha_1 + d\beta_1 + d\gamma_1 + w_1 &= 0\\
d\alpha_2 + d\beta_2 + d\gamma_2 + w_2 &= 0
\end{aligned}
$$

durchwegs gleich 1 sind, also

$$
\begin{aligned}
a_1 = a_2 = a_3 &= 1\\
b_4 = b_5 = b_6 &= 1,
\end{aligned}
$$

lassen sich die Übertragungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{a\,a}{p}\right] r_1 + \left[\frac{a\,f}{p}\right] &= 0\\
\left[\frac{b\,b}{p}\right] r_2 + \left[\frac{b\,f}{p}\right] &= 0\\
\left[\frac{a\,a}{p}\right] \rho_1 + \left[\frac{a\,g}{p}\right] &= 0\\
\left[\frac{b\,b}{p}\right] \rho_2 + \left[\frac{b\,g}{p}\right] &= 0
\end{aligned}
\tag{45}
$$

leicht aufstellen. Es ist

$$
\left[\frac{a\,a}{p}\right] = \frac{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}{p_1 p_2 p_3}, \quad \left[\frac{a\,f}{p}\right] = \frac{-p_1 p_2 \operatorname{tg}[\psi+\gamma_1+\gamma_2] + p_1 p_3 \cot\beta_1 - p_2 p_3 \cot\alpha_1}{p_1 p_2 p_3}\, x,
$$

$$
\left[\frac{b\,b}{p}\right] = \frac{p_4 p_5 + p_4 p_6 + p_5 p_6}{p_4 p_5 p_6}, \quad \left[\frac{b\,f}{p}\right] = \frac{-p_4 p_5 \operatorname{tg}[\psi+\gamma_1+\gamma_2] + p_4 p_6 \cot\beta_2 - p_5 p_6 \cot\alpha_2}{p_4 p_5 p_6}\, x,
$$

$$
\left[\frac{a\,g}{p}\right] = \frac{p_1 p_2 \cot[\psi+\gamma_1+\gamma_2] + p_1 p_3 \cot\beta_1 - p_2 p_3 \cot\alpha_1}{p_1 p_2 p_3}\, y,
$$

$$
\left[\frac{b\,g}{p}\right] = \frac{p_4 p_5 \cot[\psi+\gamma_1+\gamma_2] + p_4 p_6 \cot\beta_2 - p_5 p_6 \cot\alpha_2}{p_4 p_5 p_6}\, y.
$$

Die oben angeführten Differentialquotienten und die aus den Gleichungen (45 hervorgehenden Übertragungskoeffizienten

$$r_1 = \frac{p_1 p_2 \operatorname{tg}[\psi + \gamma_1 + \gamma_2] - p_1 p_3 \cot \beta_1 + p_2 p_3 \cot \alpha_1}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} x,$$

$$r_2 = \frac{p_4 p_5 \operatorname{tg}[\psi + \gamma_1 + \gamma_2] - p_4 p_6 \cot \beta_2 + p_5 p_6 \cot \alpha_2}{p_4 p_5 + p_4 p_6 + p_5 p_6} x,$$

$$\rho_1 = \frac{-p_1 p_2 \cot[\psi + \gamma_1 + \gamma_2] - p_1 p_3 \cot \beta_1 + p_2 p_3 \cot \alpha_1}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} y,$$

$$\rho_2 = \frac{-p_4 p_5 \cot[\psi + \gamma_1 + \gamma_2] - p_4 p_6 \cot \beta_2 + p_5 p_6 \cot \alpha_2}{p_4 p_5 + p_4 p_6 + p_5 p_6} y$$

bestimmen die Funktionen

$$F_1 = \frac{x}{K_1}(p_1 p_2 A_1 - p_1 p_3 B_1), \qquad G_1 = \frac{y}{K_1}(-p_1 p_2 E_1 - p_1 p_3 B_1),$$

$$F_2 = \frac{x}{K_1}(p_1 p_2 C_1 + p_2 p_3 B_1), \qquad G_2 = \frac{y}{K_1}(-p_1 p_2 D_1 + p_2 p_3 B_1),$$

$$F_3 = \frac{x}{K_1}(-p_1 p_3 C_1 - p_2 p_3 A_1), \qquad G_3 = \frac{y}{K_1}(p_1 p_3 D_1 + p_2 p_3 E_1),$$

$$F_4 = \frac{x}{K_2}(p_4 p_5 A_2 - p_4 p_6 B_2), \qquad G_4 = \frac{y}{K_2}(-p_4 p_5 E_2 - p_4 p_6 B_2),$$

$$F_5 = \frac{x}{K_2}(p_4 p_5 C_2 + p_5 p_6 B_2), \qquad G_5 = \frac{y}{K_2}(-p_4 p_5 D_2 + p_5 p_6 B_2),$$

$$F_6 = \frac{x}{K_2}(-p_4 p_6 C_2 - p_5 p_6 A_2), \qquad G_6 = \frac{y}{K_2}(p_4 p_6 D_2 + p_5 p_6 E_2),$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$K_1 = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3,$$

$$K_2 = p_4 p_5 + p_4 p_6 + p_5 p_6,$$

ferner

$$\begin{aligned}
A_1 &= \operatorname{tg}[\psi + \gamma_1 + \gamma_2] - \cot \alpha_1, & A_2 &= \operatorname{tg}[\psi + \gamma_1 + \gamma_2] - \cot \alpha_2 \\
B_1 &= \cot \alpha_1 + \cot \beta_1, & B_2 &= \cot \alpha_2 + \cot \beta_2, \\
C_1 &= \operatorname{tg}[\psi + \gamma_1 + \gamma_2] + \cot \beta_1, & C_2 &= \operatorname{tg}[\psi + \gamma_1 + \gamma_2] + \cot \beta_2, \\
E_1 &= \cot[\psi + \gamma_1 + \gamma_2] + \cot \alpha_1, & E_2 &= \cot[\psi + \gamma_1 + \gamma_2] + \cot \alpha_2, \\
D_1 &= \cot[\psi + \gamma_1 + \gamma_2] - \cot \beta_1, & D_2 &= \cot[\psi + \gamma_1 + \gamma_2] - \cot \beta_2.
\end{aligned} \qquad (46$$

Beachtet man bei Berechnung der Gewichtsreziproken

$$\frac{1}{Px} = \left[\frac{FF}{p}\right], \quad \frac{1}{Py} = \left[\frac{GG}{p}\right]$$

die aus dem System (46 ersichtlichen Beziehungen

$$A_1 = C_1 - B_1, \qquad E_1 = D_1 + B_1,$$

$$A_2 = C_2 - B_2, \qquad E_2 = D_2 + B_2,$$

und faßt die bei der Quadrierung von F und G auftretenden doppelten Produkte analog dem auf p. 3 [131] angewendeten Verfahren paarweise zusammen, dann lauten obige Gewichtsreziproken:

$$\frac{1}{P_x} = \frac{x^2}{K_1}(p_1 C_1^2 + p_2 A_1^2 + p_3 B_1^2) + \frac{x^2}{K_2}(p_4 C_2^2 + p_5 A_2^2 + p_6 B_2^2), \tag{47}$$

$$\frac{1}{P_y} = \frac{y^2}{K_1}(p_1 D_1^2 + p_2 E_1^2 + p_3 B_1^2) + \frac{y^2}{K_2}(p_4 D_2^2 + p_5 E_2^2 + p_6 B_2^2) \cdot \tag{48}$$

Behufs Feststellung des mittleren Punktfehlers für D

$$\begin{aligned} M^2 = M_x^2 + M_y^2 &= m^2\left(\frac{1}{P_x} + \frac{1}{P}\right) \\ &= \frac{m^2}{K_1}\left\{p_1 (C_1^2 x^2 + D_1^2 y^2) + p_2 (A_1^2 x^2 + E_1^2 y^2) + p_3 (x^2 + y^2) B_1^2\right\} \\ &+ \frac{m^2}{K_2}\left\{p_4 (C_2^2 x^2 + D_2^2 y^2) + p_5 (A_2^2 x^2 + E_2^2 y^2) + p_6 (x^2 + y^2) B_2^2\right\} \end{aligned} \tag{49}$$

sind noch die Klammerausdrücke zu reduzieren.

Wegen $x = d \cos[\psi + \gamma_1 + \gamma_2]$, $y = d \sin[\psi + \gamma_1 + \gamma_2]$ wird:

$$\begin{aligned} C_1^2 x^2 + D_1^2 y^2 &= d^2 \cos^2[\psi + \gamma_1 + \gamma_2]\,(\mathrm{tg}^2 [\psi + \gamma_1 + \gamma_2] + \cot^2\beta_1 + 2\cot\beta_1 \ \mathrm{tg}[\psi + \gamma_1 + \gamma_2]) \\ &+ d^2 \sin^2[\psi + \gamma_1 + \gamma_2]\,(\cot^2[\psi + \gamma_1 + \gamma_2] + \cot^2\beta_1 - 2\cot\beta_1 \cot[\psi + \gamma_1 + \gamma_2]) \\ &= d^2(1 + \cot^2\beta_1) = \frac{d^2}{\sin^2\beta_1}; \end{aligned}$$

analog

$$A_1^2 x^2 + E_1^2 y^2 = \frac{d^2}{\sin^2\alpha_1} \quad \text{und} \quad B_1^2 (x^2 + y^2) = \frac{c^2 d^2}{a^2 \sin^2\beta_1};$$

ebenso für den zweiten Teil von (49:

$$C_2^2 x^2 + D_2^2 y^2 = \frac{d^2}{\sin^2\beta_2}, \qquad A_2^2 x^2 + E_2^2 y^2 = \frac{d^2}{\sin^2\alpha_2}, \qquad B_2^2 (x^2 + y^2) = \frac{d^2 e^2}{b^2 \sin^2\beta_2} \cdot$$

Substituiert man die angeführten Werte in Gleichung (49, so gelangt man zu dem Ausdruck:

$$M_D^2 = \frac{m^2}{K_1}\left(p_1 \frac{d^2}{\sin^2\beta_1} + p_2 \frac{d^2}{\sin^2\alpha_1} + p_3 \frac{c^2 d^2}{a^2 \sin^2\beta_1}\right) + \frac{m^2}{K_2}\left(p_4 \frac{d^2}{\sin^2\beta_2} + p_5 \frac{d^2}{\sin^2\alpha_2} + p_6 \frac{d^2 e^2}{b^2 \sin^2\beta_2}\right)$$

$$M_D^2 = \frac{m^2}{\sin^2\alpha_1} \frac{d^2}{b^2} \cdot \frac{p_1 a^2 + p_2 b^2 + p_3 c^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} + \frac{m^2}{\sin^2\alpha_2} \frac{p_4 b^2 + p_5 d^2 + p_6 e^2}{p_4 p_5 + p_4 p_6 + p_5 p_6}. \tag{50}$$

Es besteht demnach das Quadrat des mittleren Punktfehlers in D:

1. Aus dem Quadrat des Punktfehlers in C, vergrößert oder verkleinert im Verhältnis $\frac{d^2}{b^2}$, als Anteil des ersten Dreieckes;

2. aus dem Quadrat des Fehlers in D, der auftreten würde, wenn das zweite Dreieck allein vorhanden wäre mit einer der Größe und Richtung nach fehlerfreien Basis.

Die Lösung der zweiten Aufgabe, Bestimmung der günstigsten Gewichtsverteilung, gestaltet sich mit Rücksicht auf den Bau der Gleichung (50 sehr einfach.

Ist P die Gesamtbeobachtungszahl oder Gewichtssumme

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6,$$

so soll dem ersten Dreieck der noch zu bestimmende Betrag

$$x = p_1 + p_2 + p_3,$$

dem zweiten also $P-x=p_4+p_5+p_6$ zugewiesen werden. Dem Werte x entspricht aber im Sinne der Gleichung (19, wenn daselbst x an Stelle von P eingesetzt wird, als Minimum des ersten Teiles von M_D^2

$$\frac{m^2}{\sin^2\alpha_1}\,\frac{d^2}{b^2}\,\frac{p_1a^2+p_2b^2+p_3c^2}{p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3}=\frac{m^2}{x\sin^2\alpha_1}\,\frac{d^2}{b^2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\sqrt{3}\,bc\sin\alpha_1\right)=\frac{M_{\mathrm{I}}^2}{x}\,\frac{d^2}{b^2}. \qquad (51$$

wobei M_I den mittleren Punktfehler für die Gewichtssumme 1 bei bester Verteilung der letzteren bedeutet. Ähnlich wird für das Minimum des zweiten Teiles von M_D^2 mit $(P-x)$ erhalten

$$\frac{m^2}{\sin^2\alpha_2}\,\frac{p_4b^2+p_5d^2+p_6e^2}{p_4p_5+p_4p_6+p_5p_6}=\frac{m^2}{(P-x)\sin^2\alpha_2}\left(\frac{b^2+d^2+e^2}{2}+\sqrt{3}\,de\sin\alpha_2\right)=\frac{M_{\mathrm{II}}^2}{(P-x)}\cdot \qquad (52$$

Die Aufgabe beschränkt sich demnach auf die Bestimmung des Minimums von M_D^2 für die Variable x:

$$M_D^2=M_{\mathrm{I}}^2\frac{d^2}{b^2x}+\frac{M_{\mathrm{II}}^2}{P-x}, \qquad (53$$

$$\frac{d\,(M_D^2)}{dx}=-M_{\mathrm{I}}^2\frac{d^2}{b^2x^2}+\frac{M_{\mathrm{II}}^2}{(P-x)^2}=0,$$

also

$$x=P\frac{M_{\mathrm{I}}\dfrac{d}{b}}{M_{\mathrm{I}}\dfrac{d}{b}+M_{\mathrm{II}}}\ \text{und}\ P-x=P\frac{M_{\mathrm{II}}}{M_{\mathrm{I}}\dfrac{d}{b}+M_{\mathrm{II}}}. \qquad (54$$

Nach Substitution von x in (53 resultiert schließlich als mittlerer Punktfehler in D bei günstigster Gewichtsverteilung

$$M_D=\frac{1}{\sqrt{P}}\left(M_{\mathrm{I}}\frac{d}{b}+M_{\mathrm{II}}\right) \qquad (55$$

während sich für gleichmäßige Gewichtsverteilung nach (50 und (20 ergibt

$$\mathfrak{M}_D=\sqrt{\frac{2}{P}\left(\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}^2\frac{d^2}{b^2}+\mathfrak{M}_{\mathrm{II}}^2\right)} \qquad (56$$

mit

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}^2=\frac{m^2}{\sin^2\alpha_1}(a^2+b^2+c^2),\quad \mathfrak{M}_{\mathrm{II}}^2=\frac{m^2}{\sin^2\alpha_2}(b^2+d^2+e^2).$$

In der Differenz $\mathfrak{M}_D-M_D$ äußert sich der durch bessere Arbeitsverteilung erzielte Genauigkeitsgewinn; es soll derselbe am Schlusse dieses Kapitels an einem numerischen Beispiel näher beleuchtet werden.

Damit erscheint das eingangs gestellte Problem im Wesen erledigt. Die Untersuchung der auf mehrere Dreiecke erweiterten Dreieckskette (Fig. 3) folgt dem im Vorhergehenden skizzierten Gedankengang und erfordert nähere Details nur betreffs der zwei oder drei ersten Dreiecke, da derzeit ein Schluß auf die Art der Fehlerübertragung vom ersten Dreieck auf den letzten Kettenpunkt G unzulässig wäre. Bezüglich der Basis, Winkel und Gewichte gilt das im Beginne dieses Abschnittes Ausgeführte mit sinngemäßer Ausdehnung auf die neu eintretenden Größen β_3 bis α_5, p_7 bis p_{15}.

Mit Rücksicht auf die nachstehende Figur 3 erhält man für die Seiten d, h und l und deren Richtungswinkel folgende Ausdrücke:

$$d = \frac{a \sin\beta_1 \sin\beta_2}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2},$$

$$h = \frac{a \sin\beta_1 \sin\gamma_2 \sin\beta_3 \sin\beta_4}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \sin\alpha_4},$$

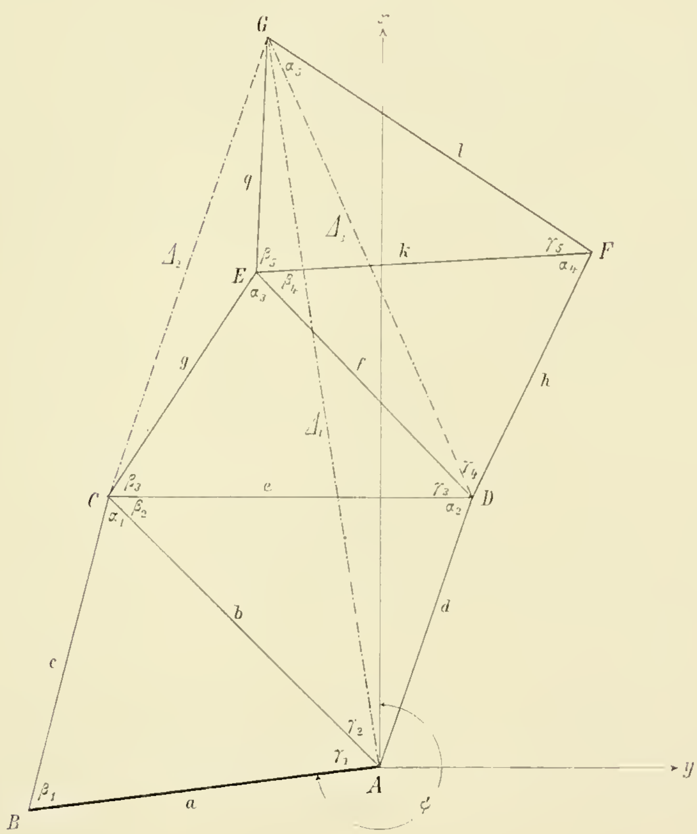
$$l = \frac{a \sin\beta_1 \sin\gamma_2 \sin\beta_3 \sin\gamma_4 \sin\beta_5}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \sin\alpha_4 \sin\alpha_5},$$

$$\omega_{AD} = \psi + \gamma_1 + \gamma_2,$$

$$\omega_{DF} = \psi + \gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - 180,$$

$$\omega_{FG} = \psi + \gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \alpha_4 + \gamma_5.$$

Fig. 3.



Demnach lauten die Koordinaten von G:

$$x = d\cos[\psi + \gamma_1 + \gamma_2] - h\cos[\psi + \gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_2 + \gamma_3 + \gamma_4] + \\ + l\cos[\psi + \gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \alpha_4 + \gamma_5] \quad (57$$

$$= d\cos\sigma_1 \qquad - h\cos\sigma_2 \qquad + l\cos\sigma_3$$

und

$$y = d\sin[\psi + \gamma_1 + \gamma_2] - h\sin[\psi + \gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_2 + \gamma_3 + \gamma_4] + \\ + l\sin[\psi + \gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \alpha_4 + \gamma_5]$$

$$= d\sin\sigma_1 \qquad - h\sin\sigma_2 \qquad + l\sin\sigma_3. \quad (58$$

Differentialquotienten von x und y sollen zunächst nur für die Winkel des ersten Dreieckes entwickelt werden:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} &= \quad d \cos \sigma_1 \cot \alpha_1 + h \cos \sigma_2 \cot \alpha_1 - l \cos \sigma_3 \cot \alpha_1 = - x \cot \alpha_1, \\
\frac{\partial x}{\partial \beta_1} &= d \cos \sigma_1 \cot \beta_1 \quad h \cos \sigma_2 \cot \beta_1 + l \cos \sigma_3 \cot \beta_1 = + x \cot \beta_1, \\
\frac{\partial x}{\partial \gamma_1} &= - d \sin \sigma_1 + h \sin \sigma_2 - l \sin \sigma_3 = - y, \\
\frac{\partial y}{\partial \alpha_1} &= - d \sin \sigma_1 \cot \alpha_1 + h \sin \sigma_2 \cot \alpha_1 - l \sin \sigma_3 \cot \alpha_1 = - y \cot \alpha_1, \\
\frac{\partial y}{\partial \beta_1} &= d \sin \sigma_1 \cot \beta_1 \quad h \sin \sigma_2 \cot \beta_1 + l \sin \sigma_3 \cot \beta_1 = + y \cot \beta_1, \\
\frac{\partial y}{\partial \gamma_1} &= d \cos \sigma_1 - h \cos \sigma_2 + l \cos \sigma_3 = + x.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Löst man ferner die zugehörigen Übertragungsgleichungen

$$
\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right) r_1 + \left(-\frac{x \cot \alpha_1}{p_1} + \frac{x \cot \beta_1}{p_2} - \frac{y}{p_3}\right) = 0
$$

$$
\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right) \rho_1 + \left(-\frac{y \cot \alpha_1}{p_1} + \frac{y \cot \beta_1}{p_2} + \frac{x}{p_3}\right) = 0
$$

nach den Koeffizienten r_1 und ρ_1 auf

$$
r_1 = \frac{p_2 p_3 x \cot \alpha_1 - p_1 p_3 x \cot \beta_1 + p_1 p_2 y}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3},
$$

$$
\rho_1 = \frac{p_2 p_3 y \cot \alpha_1 - p_1 p_3 y \cot \beta_1 - p_1 p_2 x}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3},
$$

so liefern letztere im Vereine mit den aus (59 zu entnehmenden Differentialquotienten die erste Gruppe der zur Bestimmung von $\frac{1}{Px}$ und $\frac{1}{Py}$ erforderlichen Funktionen F und G:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{K_1} \left(p_1 p_2 [-x \cot \alpha_1 + y] - p_1 p_3 [x \cot \alpha_1 + x \cot \beta_1]\right), \\
F_2 &= \frac{1}{K_1} \left(p_1 p_2 [x \cot \beta_1 + y] + p_2 p_3 [x \cot \alpha_1 + x \cot \beta_1]\right), \\
F_3 &= \frac{1}{K_1} \left(- p_1 p_3 [x \cot \beta_1 + y] - p_2 p_3 [-x \cot \alpha_1 + y]\right), \\
G_1 &= \frac{1}{K_1} \left(- p_1 p_2 [y \cot \alpha_1 + x] - p_1 p_3 [y \cot \alpha_1 + y \cot \beta_1]\right), \\
G_2 &= \frac{1}{K_1} \left(p_1 p_2 [y \cot \beta_1 - x] + p_2 p_3 [y \cot \alpha_1 + y \cot \beta_1]\right), \\
G_3 &= \frac{1}{K_1} \left(- p_1 p_3 [y \cot \beta_1 - x] + p_2 p_3 [y \cot \alpha_1 + x]\right),
\end{aligned}
\tag{60}
$$

worin

$$
K_1 = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3.
$$

Mit Beachtung des auf p. 3 [131] dargelegten Reduktionsvorganges erhält man dann als Anteil des ersten Dreieckes an dem mittleren Punktfehler in G ohne besondere Schwierigkeiten:

$$M_{1x}^2 = \frac{m^2}{K_1}\left\{p_1\,(x\cot\beta_1 + y)^2 + p_2\,(-x\cot\alpha_1 + y)^2 + p_3\,x^2\,(\cot\alpha_1 + \cot\beta_1)^2\right\},$$

$$M_{1y}^2 = \frac{m^2}{K_1}\left\{p_1\,(y\cot\beta_1 - x)^2 + p_2\,(y\cot\alpha_1 - x)^2 + p_3\,y^2\,(\cot\alpha_1 + \cot\beta_1)^2\right\}$$

und da

$$x^2 + y^2 = (AG)^2 = \Delta_1^2 \text{ ist,}$$

schließlich

$$M_1^2 = \frac{m^2\,\Delta_1^2}{\sin^2\alpha_1\,\sin^2\beta_1\,K_1}\,(p_1\sin^2\alpha_1 + p_2\sin^2\beta_1 + p_3\sin^2\gamma_1)$$

$$M_1^2 = \frac{m^2}{\sin^2\alpha_1}\;\frac{\Delta_1^2}{b^2}\;\frac{p_1\,a^2 + p_2\,b^2 + p_3\,c^2}{p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3}\,, \qquad (61$$

das heißt, der Fehler im Scheitel C des ersten Dreieckes wird mit der Vergrößerung $\frac{\Delta_1}{b}$ auf den Punkt G übertragen.

In gleicher Reihenfolge entwickeln wir die Gleichungen für das zweite Dreieck, also zunächst die Differentialquotienten:

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha_2} = -d\cot\alpha_2\cos\sigma_1 + h\cot\alpha_2\cos\sigma_2 + h\sin\sigma_2 - l\cot\alpha_2\cos\sigma_3 - l\sin\sigma_3$$

$$= -x\cot\alpha_2 + d\sin\sigma_2 - y,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\beta_2} = d\cot\beta_2\cos\sigma_1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\gamma_2} = -d\sin\sigma_1 - h\cot\gamma_2\cos\sigma_2 + h\sin\sigma_2 + l\cot\gamma_2\cos\sigma_3 - l\sin\sigma_3$$

$$= -y + (x - d\cos\sigma_1)\cot\gamma_2,$$

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha_2} = -d\cot\alpha_2\sin\sigma_1 + h\cot\alpha_2\sin\sigma_2 - h\cos\sigma_2 - l\cot\alpha_2\sin\sigma_3 + l\cos\sigma_3 \qquad (62$$

$$= -y\cot\alpha_2 + x - d\cos\sigma_1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial\beta_2} = d\cot\beta_2\sin\sigma_1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial\gamma_2} = d\cos\sigma_1 - h\cot\gamma_2\sin\sigma_2 - h\cos\sigma_2 + l\cot\gamma_2\sin\sigma_3 + l\cos\sigma_3$$

$$= x + (y - d\sin\sigma_1)\cot\gamma_2$$

und finden mit den Übertragungskoeffizienten

$$r_2 = \frac{1}{K_2}\left\{p_4p_5\,(y + [d\cos\sigma_1 - x]\cot\gamma_2) - p_4p_6\,d\cot\beta_2\cos\sigma_1 + p_5p_6\,(x\cot\alpha_2 + y - d\sin\sigma_1)\right\},$$

$$(63$$

$$\rho_2 = \frac{1}{K_2}\left\{-p_4p_5\,(x + [y - d\sin\sigma_1]\cot\gamma_2) - p_4p_6\,d\cot\beta_2\sin\sigma_1 + p_5p_6\,(y\cot\alpha_2 - x + d\cos\sigma_1)\right\}$$

die Funktionen:

$$
\begin{aligned}
F_4 &= \frac{1}{K_2}(p_1 p_2 A + p_1 p_3 B), & G_4 &= \frac{1}{K_2}(-p_4 p_5 D - p_4 p_6 E),\\
F_5 &= \frac{1}{K_2}(p_1 p_2 C - p_2 p_3 B), & G_5 &= \frac{1}{K_2}(-p_4 p_5 F + p_5 p_6 E),\\
F_6 &= \frac{1}{K_2}(-p_4 p_6 C - p_5 p_6 A), & G_6 &= \frac{1}{K_2}(p_4 p_6 F + p_5 p_6 D),
\end{aligned} \tag{64}
$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$
\begin{aligned}
K_2 &= p_4 p_5 + p_4 p_6 + p_5 p_6,\\
A &= d \cot\gamma_2 \cos\sigma_1 + d \sin\sigma_1 - x(\cot\alpha_2 + \cot\gamma_2),\\
B &= -d \cot\beta_2 \cos\sigma_1 + d \sin\sigma_1 - x \cot\alpha_2 - y,\\
C &= d \cos\sigma_1 (\cot\beta_2 + \cot\gamma_2) - x \cot\gamma_2 + y,\\
D &= -d \cot\gamma_2 \sin\sigma_1 + d \cos\sigma_1 + y(\cot\alpha_2 + \cot\gamma_2),\\
E &= d \cot\beta_2 \sin\sigma_1 + d \cos\sigma_1 - x + y \cot\alpha_2,\\
F &= -d \sin\sigma_1 (\cot\beta_2 + \cot\gamma_2) + x + y \cot\gamma_2.
\end{aligned}
$$

Da $A - B = C$, $D - E = F$ ist, gelangt man auf Grund einer dem früheren analog zu führenden Rechnung leicht zu dem Ausdruck

$$
M_2^2 = \frac{m^2}{K_2}\left(p_4 [C^2 + F^2] + p_5 [A^2 + D^2] + p_6 [B^2 + E^2]\right), \tag{65}
$$

dessen Glieder sich, wie folgt, noch weiter reduzieren lassen:

$$
\begin{aligned}
C^2 + F^2 &= (x^2 + y^2)(1 + \cot^2\gamma_2) + \frac{b^2}{\sin^2\gamma_2} - \frac{2b}{\sin^2\gamma_2}(y \sin[\psi + \gamma_1] + x \cos[\psi + \gamma_1])\\
&= \frac{1}{\sin^2\gamma_2}\Big\{(x^2 - 2bx \cos[\psi + \gamma_1] + b^2 \cos^2[\psi + \gamma_1])\\
&\qquad + (y^2 - 2by \sin[\psi + \gamma_1] + b^2 \sin^2[\psi + \gamma_1])\Big\}\\
&= \frac{\Delta_2^2}{\sin^2\gamma_2} = \frac{1}{\sin^2\alpha_2}\,\frac{b^2}{e^2}\,\Delta_2^2,
\end{aligned}
$$

weil nach Anblick der Fig. 3:

$$
(x - b\cos[\psi + \gamma_1])^2 + (y - b \sin[\psi + \gamma_1])^2 = \Delta_2^2;
$$

ebenso

$$
\begin{aligned}
A^2 + D^2 &= \frac{d^2}{b^2 \sin^2\gamma_2}\left\{x^2 + y^2 + b^2 - 2bx\cos[\psi + \gamma_1] - 2by \sin[\psi + \gamma_1]\right\}\\
&= \frac{d^2}{b^2 \sin^2\gamma_2}\left\{(x - b\cos[\psi + \gamma_1])^2 + (y - b\sin[\psi + \gamma_1])^2\right\}\\
&= \frac{d^2}{b^2 \sin^2\gamma_2}\,\Delta_2^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha_2}\cdot\frac{d^2}{e^2}\,\Delta_2^2
\end{aligned}
$$

und

$$
B^2 + E^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha_2}\,.\,\Delta^2\,.
$$

Substituiert man diese Größen in Gleichung (65, so erscheint der Anteil des zweiten Dreieckes an dem Quadrat des Punktfehlers in G bestimmt durch:

$$M_2^2 = \frac{m^2}{\sin^2 \alpha_2} \frac{\Delta_2^2}{e^2} \frac{p_4 b^2 + p_5 d^2 + p_6 e^2}{p_4 p_5 + p_4 p_6 + p_5 p_6} . \tag{66}$$

die Fehlerübertragung erfolgt also im Verhältnis $\Delta_2 : e$.

Für das dritte Dreieck sei der Rechnungsgang nur kurz skizziert:

Bezeichnet man mit

$$x' = x - d \cos \sigma_1 ,$$
$$y' = y - d \sin \sigma_1 ,$$

die Koordinaten von G bezogen auf D, dann ist:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_3} = h \cot \alpha_3 \cos \sigma_2 - l \cot \alpha_3 \cos \sigma_3 = -\cot \alpha_3 (x - d \cos \sigma_1) = -x' \cot \alpha_3,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta_3} = x' \cot \beta_3,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \gamma_3} = y',$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_3} = -y' \cot \alpha_3,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta_3} = y' \cot \beta_3,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \gamma_3} = +x';$$

ferner

$$r_3 = \frac{1}{K_3} (-p_7 p_8 y' - p_7 p_9 x' \cot \beta_3 + p_8 p_9 x' \cot \alpha_3),$$

$$\rho_3 = \frac{1}{K_3} (-p_7 p_8 x' - p_7 p_9 y' \cot \beta_3 + p_8 p_9 y' \cot \alpha_3),$$

$$F_7 = \frac{1}{K_3} (p_7 p_8 [y' - x' \cot \alpha_3] - p_7 p_9 x' [\cot \alpha_3 + \cot \beta_3]),$$

$$F_8 = \frac{1}{K_3} (p_7 p_8 [y' + x' \cot \beta_3] + p_8 p_9 x' [\cot \alpha_3 + \cot \beta_3]),$$

$$F_9 = \frac{1}{K_3} (-p_7 p_9 [y' + x' \cot \beta_3] - p_8 p_9 [y' - x' \cot \alpha_3]),$$

$$G_7 = \frac{1}{K_3} (-p_7 p_8 [x' + y' \cot \alpha_3] - p_7 p_9 y' [\cot \alpha_3 + \cot \beta_3]),$$

$$G_8 = \frac{1}{K_3} (-p_7 p_8 [x' - y' \cot \beta_3] + p_8 p_9 y' [\cot \alpha_3 + \cot \beta_3]),$$

$$G_9 = \frac{1}{K_3} (p_7 p_9 [x' - y' \cot \beta_3] + p_8 p_9 [x' + y' \cot \alpha_3])$$

und mit $x'^2 + y'^2 = \Delta_3^2$ nach einigen Reduktionen

$$M_3^2 = \frac{m^2}{\sin^2 \alpha_3} \frac{\Delta_3^2}{f^2} \frac{p_7 e^2 + p_8 f^2 + p_9 g^2}{p_7 p_8 + p_7 p_9 + p_8 p_9}, \tag{67}$$

als Anteil des dritten Dreieckes mit der Fehlervergrößerung $\frac{\Delta_3}{f}$.

Für das vierte und fünfte Dreieck können wir auf Grund der ersten Entwicklungen dieses Abschnittes sofort anschreiben:

$$M_4^2 = \frac{m^2}{\sin^2 \alpha_4} \cdot \frac{q^2}{k^2} \frac{p_{10} f^2 + p_{11} h^2 + p_{12} k^2}{p_{10} p_{11} + p_{10} p_{12} + p_{11} p_{12}}. \tag{68}$$

und

$$M_5^2 = \frac{m^2}{\sin^2 \alpha_5} \frac{p_{13} k^2 + p_{14} l^2 + p_{15} q^2}{p_{13} p_{14} + p_{13} p_{15} + p_{14} p_{15}} \tag{69}$$

Fassen wir die einzelnen Resultate zusammen, so erhalten wir das Quadrat des mittleren Punktfehlers in G:

$$\begin{aligned} M_G^2 = & \frac{m^2}{\sin^2 \alpha_1} \frac{\Delta_1^2}{b^2} \frac{p_1 a^2 + p_2 b^2 + p_3 c^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} + \frac{m^2}{\sin^2 \alpha_2} \frac{\Delta_2^2}{e^2} \frac{p_4 b^2 + p_5 d^2 + p_6 e^2}{p_4 p_5 + p_4 p_6 + p_5 p_6} \\ & + \frac{m^2}{\sin^2 \alpha_3} \frac{\Delta_3^2}{f^2} \frac{p_7 e^2 + p_8 f^2 + p_9 g^2}{p_7 p_8 + p_7 p_9 + p_8 p_9} + \frac{m^2}{\sin^2 \alpha_4} \frac{q^2}{k^2} \frac{p_{10} f^2 + p_{11} h^2 + p_{12} k^2}{p_{10} p_{11} + p_{10} p_{12} + p_{11} p_{12}} \\ & + \frac{m^2}{\sin^2 \alpha_5} \frac{p_{13} k^2 + p_{14} l^2 + p_{15} q^2}{p_{13} p_{14} + p_{13} p_{15} + p_{14} p_{15}}. \end{aligned} \tag{70}$$

Hiemit dürfte das Problem der Fehlerfortpflanzung in einer Dreieckskette als gelöst zu betrachten sein.

Die weitere Untersuchung über die günstigste Gewichtsverteilung würde sich mit Rücksicht auf die 15 zu bestimmenden Größen p_1 bis p_{15} zweifellos sehr kompliziert gestalten, wenn nicht wieder der Umstand, daß die den einzelnen Dreiecken zugehörigen Unbekannten in selbständigen Gliedern auftreten, eine wesentliche Vereinfachung ermöglichen würde.

Teilt man von der Gesamtbeobachtungszahl P den Dreiecken in ihrer Reihenfolge die Beträge x_1, x_2, x_3, x_4 und $P - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ zu und bildet im Sinne der Gleichung (19 die Minima der M_G^2 zusammensetzenden Einzelglieder, so folgt zunächst

$$M^2 = \frac{M_I^2}{x_1} \frac{\Delta_1^2}{b^2} + \frac{M_{II}^2}{x_2} \frac{\Delta_2^2}{e^2} + \frac{M_{III}^2}{x_3} \frac{\Delta_3^2}{f^2} + \frac{M_{IV}^2}{x_4} \frac{q^2}{k^2} + \frac{M_V^2}{P - x_1 - x_2 - x_3 - x_4}, \tag{71}$$

worin bedeutet:

$$M_I^2 = \frac{m^2}{\sin^2 \alpha_1} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \sqrt{3}\, bc \sin \alpha_1 \right),$$

$$M_{II}^2 = \frac{m^2}{\sin^2 \alpha_2} \left(\frac{b^2 + d^2 + e^2}{2} + \sqrt{3}\, de \sin \alpha_2 \right),$$

$$M_{III}^2 = \frac{m^2}{\sin^2 \alpha_3} \left(\frac{e^2 + f^2 + g^2}{2} + \sqrt{3}\, fg \sin \alpha_3 \right) \text{ u. s. w.}$$

Dem Minimum von M^2 entsprechen die Wurzeln:

$$x_1 = P\,\frac{M_{\mathrm{I}}\,\frac{\Delta_1}{b}}{D}\,, \quad x_2 = P\,\frac{M_{\mathrm{II}}\,\frac{\Delta_2}{e}}{D}\,, \quad x_3 = P\,\frac{M_{\mathrm{III}}\,\frac{\Delta_3}{f}}{D}\,, \quad x_4 = P\,\frac{M_{\mathrm{IV}}\,\frac{q}{k}}{D}\,,$$

$$x_5 = P - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = P\,\frac{M_{\mathrm{V}}}{D}\,, \qquad (72$$

$$\text{mit } D = M_{\mathrm{I}}\,\frac{\Delta_1}{b} + M_{\mathrm{II}}\,\frac{\Delta_2}{e} + M_{\mathrm{III}}\,\frac{\Delta_3}{f} + M_{\mathrm{IV}}\,\frac{q}{k} + M_{\mathrm{V}}\,;$$

es wäre daher nach Gleichung (18 beispielsweise

$$p_1 = x_1\,\frac{2\,bc\,\sin\alpha_1 + \sqrt{3}\,(-a^2+b^2+c^2)}{6\,bc\,\sin\alpha_1 + \sqrt{3}\,(a^2+b^2+c^2} = p_{\alpha_1},$$

$$p_{11} = x_4\,\frac{2\,hk\,\sin\alpha_4 + \sqrt{3}\,(f^2-h^2+k^2)}{6hk\,\sin\alpha_4 + \sqrt{3}\,(f^2+h^2+k^2)} = p_{\beta_4}.$$

Setzt man obige Werte für x_1 bis x_5 in (71 ein, so resultiert schließlich für den mittleren Punktfehler in G bei bester Gewichtsverteilung

$$M = \frac{1}{\sqrt{P}}\left(M_{\mathrm{I}}\,\frac{\Delta_1}{b} + M_{\mathrm{II}}\,\frac{\Delta_2}{e} + M_{\mathrm{III}}\,\frac{\Delta_3}{f} + M_{\mathrm{IV}}\,\frac{q}{k} + M_{\mathrm{V}}\right), \qquad (73$$

bei gleichmäßiger Gewichtsverteilung mit Beachtung von (20 hingegen

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\frac{5}{P}\left(\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}^2\,\frac{\Delta_1^2}{b^2} + \mathfrak{M}_{\mathrm{II}}^2\,\frac{\Delta_2^2}{e^2} + \mathfrak{M}_{\mathrm{III}}^2\,\frac{\Delta_3^2}{f^2} + \mathfrak{M}_{\mathrm{IV}}^2\,\frac{q^2}{k^2} + M_{\mathrm{V}}^2\right)}\,. \qquad (74$$

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, an einem Beispiel die wichtigsten Resultate der eben abgeschlossenen Untersuchung über die Dreieckskette verfolgen zu können. Gewählt wurde hiezu die Kette erster Ordnung: Hermannskogel—Anninger—Schöpfl—Schneeberg—Ötscher—Hochschwab—Voralpe mit Hermannskogel—Anninger als Basis. Die erforderlichen Daten sind in der Publikation »Die Ergebnisse der Triangulierungen des k. u. k. militär-geographischen Institutes«, Bd. I, enthalten.

Als mittlerer Fehler der einmaligen Winkelmessung wurde $m = 7''$, als Gesamtbeobachtungszahl $P = 720$ angenommen, so daß auf einen Winkel 48 Beobachtungen entfallen und $\mu = \frac{7''}{\sqrt{48}} \doteq 1''$ als mittlerer Winkelfehler bei gleichmäßiger Arbeitsaufteilung zu gelten hätte.

Die Resultate dieser Rechnung lauten:

Beste Verteilung der Beobachtungen.

1. Dreieck:	Hermannskogel	—	Anninger	—	Schöpfl	
Gewichte:	93		37		93	$P_1 = 223$
2. Dreieck:	Schöpfl	—	Anninger	—	Schneeberg	
Gewichte:	28		68		105	$P_2 = 201$
3. Dreieck:	Schneeberg	—	Schöpfl	—	Ötscher	
Gewichte:	24		57		80	$P_3 = 161$
4. Dreieck:	Schneeberg	—	Ötscher	—	Hochschwab	
Gewichte:	44		12		22	$P_4 = 78$
5. Dreieck:	Hochschwab	—	Ötscher	—	Voralpe	
Gewichte:	14		18		25	$P_5 = 57$

Der mittlere Punktfehler für Voralpe entsprechend seiner Zusammensetzung aus den Fehlern der aufeinanderfolgenden Dreiecke beträgt

$$\begin{aligned} M &= \frac{7}{\sqrt{720}}(1 \cdot 521 + 1 \cdot 367 + 1 \cdot 097 + 0 \cdot 533 + 0 \cdot 385) \\ &= 1 \cdot 279\, m, \end{aligned}$$

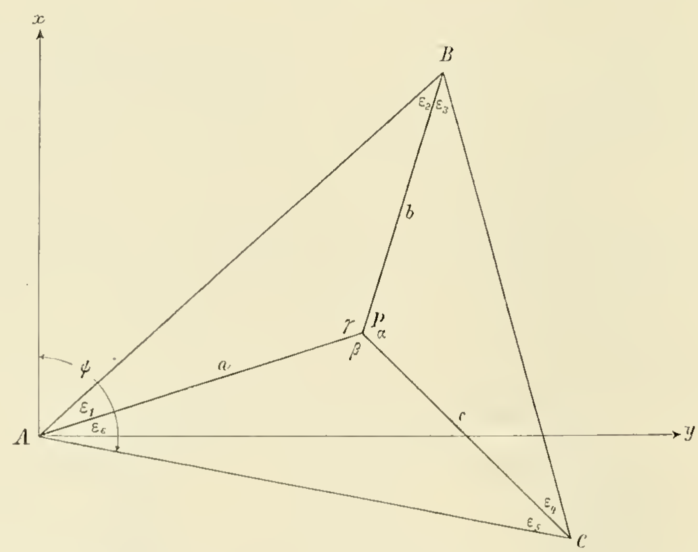
hingegen bei gleichmäßiger Beobachtungsverteilung $\mathfrak{M} = 1 \cdot 467\, m$ also um 15% größer; sollte im zweiten Falle die obere Fehlergrenze $\mathfrak{M} = 1 \cdot 279\, m$ erreicht werden, dann müßten allerdings 947 Beobachtungen gemacht werden statt 720, demnach um 32% mehr. Nichtsdestoweniger muß zugegeben werden, daß der Effekt der günstigsten Gewichtsverteilung hinsichtlich des Genauigkeitsgewinnes relativ gering ist. Der Grund hiefür liegt in dem Gesetze $\mu = \frac{m}{\sqrt{n}}$, demzufolge eine selbst bedeutende Erhöhung der Beobachtungszahl nur eine verhältnismäßig geringe Genauigkeitssteigerung zur Folge hat.

Mehrfaches Vorwärtseinschneiden.

Zum Schlusse soll aus der Gruppe der Punkteinschaltungsmethoden die einfachste derselben, das mehrfache Vorwärtseinschneiden, gleichfalls vom Standpunkte der besten Arbeitsverteilung einer näheren Betrachtung unterzogen werden. Die ungewöhnlichen Schwierigkeiten, welche sich einer allgemeinen Auflösung dieses Problems entgegenstellen, ließen es zweckmäßig erscheinen, die Aufgabe vorläufig auf den Fall dreier Strahlen einzuschränken.

Es ist vorausgesetzt, daß die Koordinaten der Triangulierungspunkte A, B und C — nach Fig. 4 — gegeben, die Strahlenrichtungen a, b und c beobachtet wurden, und zwar, um der Entwicklung in keiner

Fig. 4.



Weise vorzugreifen, im Wege gesonderter Messung der Winkel $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ mit den Beobachtungszahlen beziehungsweise Gewichten $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ und dem mittleren Fehler der Einzelmessung m.

Behufs Feststellung des Ausdruckes für den mittleren Punktfehler in P schreiben wir vorerst die Bedingungsgleichungen an. Sie lassen sich unmittelbar aus der Figur herauslesen und lauten, wenn der Seitengleichung die Kotangentenform gegeben wird:

$$\begin{array}{lllllllll} d\varepsilon_1 & & & & & + d\varepsilon_6 & + w_1 = 0 \\ & d\varepsilon_2 & + d\varepsilon_3 & & & & + w_2 = 0 \\ & & & d\varepsilon_4 & + d\varepsilon_5 & & + w_3 = 0 \\ \cot\varepsilon_1\, d\varepsilon_1 & \cot\varepsilon_2\, d\varepsilon_2 & + \cot\varepsilon_3\, d\varepsilon_3 & \cot\varepsilon_4\, d\varepsilon_4 & + \cot\varepsilon_5\, d\varepsilon_5 & - \cot\varepsilon_6\, d\varepsilon_6 & + w_4 = 0. \end{array} \qquad (75$$

Aus den Koordinaten von P — bezogen auf A als Anfangspunkt —

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{AC \sin \varepsilon_5}{\sin(\varepsilon_5+\varepsilon_6)} \cos[\psi-\varepsilon_6], \\ y &= \frac{AC \sin \varepsilon_5}{\sin[\varepsilon_5+\varepsilon_6]} \sin[\psi-\varepsilon_6] \end{aligned}\right\} \qquad (76$$

und deren Logarithmen

$$\begin{aligned} Lg x &= Lg\, AC + Lg \sin \varepsilon_5 - Lg \sin[\varepsilon_5+\varepsilon_6] + Lg \cos[\psi-\varepsilon_6] \\ Lg y &= Lg\, AC + Lg \sin \varepsilon_5 - Lg \sin[\varepsilon_5+\varepsilon_6] + Lg \sin[\psi-\varepsilon_6], \end{aligned}$$

findet man durch Differentiation

$$\begin{aligned} dx &= x\{d\varepsilon_5 (\cot \varepsilon_5 - \cot[\varepsilon_5+\varepsilon_6]) + d\varepsilon_6 (\operatorname{tg}[\psi-\varepsilon_6] - \cot[\varepsilon_5+\varepsilon_6])\}, \\ dy &= y\{d\varepsilon_5 (\cot \varepsilon_5 - \cot[\varepsilon_5+\varepsilon_6]) - d\varepsilon_6 (\cot[\psi-\varepsilon_6] + \cot[\varepsilon_5+\varepsilon_6])\}. \end{aligned}$$

Zum späteren Gebrauche setzen wir

$$x(\cot \varepsilon_5 - \cot[\varepsilon_5+\varepsilon_6]) = \frac{x \sin \varepsilon_6}{\sin \varepsilon_5 \sin \beta} = f_5,$$

$$x(\operatorname{tg}[\psi-\varepsilon_6] - \cot[\varepsilon_5+\varepsilon_6]) = -x \frac{\cos[\psi+\varepsilon_5]}{\cos[\psi-\varepsilon_6] \sin \beta} = f_6$$

und $\qquad (77$

$$y(\cot \varepsilon_5 - \cot[\varepsilon_5+\varepsilon_6]) = y \frac{\sin \varepsilon_6}{\sin \varepsilon_5 \sin \beta} = g_5 = f_5 \operatorname{tg}[\psi-\varepsilon_6],$$

$$-y(\cot[\psi-\varepsilon_6] + \cot[\varepsilon_5+\varepsilon_6]) = y \frac{\sin[\psi+\varepsilon_5]}{\sin[\psi-\varepsilon_6] \sin \beta} = g_6 = f_6 \operatorname{tg}[\psi+\varepsilon_5].$$

Mit Rücksicht auf obige vier Bedingungsgleichungen treten auch in den Übertragungsgleichungen vier Unbekannte auf, nämlich r_1, r_2, r_3, r_4 für die Abszisse und $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ für die Ordinate:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_6}\right) r_1 + \left(\frac{\cot \varepsilon_1}{q_1} - \frac{\cot \varepsilon_6}{q_6}\right) r_4 + \frac{f_6}{q_6} = 0 \\ &\left(\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}\right) r_2 + \left(\frac{\cot \varepsilon_3}{q_3} - \frac{\cot \varepsilon_2}{q_2}\right) r_4 = 0 \\ &\left(\frac{1}{q_4}+\frac{1}{q_5}\right) r_3 + \left(\frac{\cot \varepsilon_5}{q_5} - \frac{\cot \varepsilon_4}{q_4}\right) r_4 + \frac{f_5}{q_5} = 0 \\ &\left(\frac{\cot \varepsilon_1}{q_1} - \frac{\cot \varepsilon_6}{q_6}\right) r_1 + \left(\frac{\cot \varepsilon_3}{q_3} - \frac{\cot \varepsilon_4}{q_4}\right) r_2 + \left(\frac{\cot \varepsilon_5}{q_5} - \frac{\cot \varepsilon_4}{q_4}\right) r_3 + \\ &\quad + \left(\frac{\cot^2 \varepsilon_1}{q_1} + \frac{\cot^2 \varepsilon_2}{q_2} + \frac{\cot^2 \varepsilon_3}{q_3} + \frac{\cot^2 \varepsilon_4}{q_4} + \frac{\cot^2 \varepsilon_5}{q_5} + \frac{\cot^2 \varepsilon_6}{q_6}\right) r_4 \\ &\quad + \left(\frac{f_5 \cot \varepsilon_5}{q_5} - \frac{f_6 \cot \varepsilon_6}{q_6}\right) = 0 \cdot \end{aligned}\right\} \qquad (78$$

Ein analoges System gilt für y — nach Vertauschung von r_1, r_2, r_3, r_4 mit $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ und f_5, f_6 mit $g_5 = f_5 \operatorname{tg}[\psi-\varepsilon_6]$, $g_6 = f_6 \operatorname{tg}[\psi+\varepsilon_5]$ nach (77.

Die Auflösung der Gleichungen (78 liefert die Werte:

$$r_1 = \frac{q_1 \cot \varepsilon_6 - q_6 \cot \varepsilon_1}{q_1+q_6} r_4 - \frac{q_1}{q_1+q_6} f_6,$$

$$r_2 = \frac{q_3 \cot \varepsilon_2 - q_2 \cot \varepsilon_3}{q_2+q_3} r_4,$$

$$r_3 = \frac{q_5 \cot \varepsilon_4 - q_4 \cot \varepsilon_5}{q_4+q_5} r_4 - \frac{q_4}{q_4+q_5} f_5$$

$$\text{mit } r_4 = \frac{f_6 \dfrac{\cot \varepsilon_1 + \cot \varepsilon_6}{q_1+q_6} - f_5 \dfrac{\cot \varepsilon_4 + \cot \varepsilon_5}{q_4+q_5}}{\dfrac{(\cot \varepsilon_1 + \cot \varepsilon_6)^2}{q_1+q_6} + \dfrac{(\cot \varepsilon_2 + \cot \varepsilon_3)^2}{q_2+q_3} + \dfrac{(\cot \varepsilon_4 + \cot \varepsilon_5)^2}{q_4+q_5}}.$$

Setzt man überall an Stelle von f_5 und f_6 die Größen f_5 tg $[\psi - \varepsilon_6]$ und f_6 tg $[\psi + \varepsilon_5]$, dann ergeben sich sofort die Werte ρ_1, ρ_2, ρ_3 und ρ_4.

Zur Berechnung der Gewichtsreziproken

$$\frac{1}{Px} = \left[\frac{FF}{q}\right], \qquad \frac{1}{Py} = \left[\frac{GG}{q}\right]$$

bilden wir nach bekannten Regeln:

$$F_1 = r_1 + \cot \varepsilon_1 r_4 = \frac{q_1}{q_1 + q_6} \left\{ r_4 (\cot \varepsilon_1 + \cot \varepsilon_6) - f_6 \right\},$$

$$F_2 = r_2 - \cot \varepsilon_2 r_4 = - \frac{q_2}{q_2 + q_3} r_4 (\cot \varepsilon_2 + \cot \varepsilon_3),$$

$$F_3 = r_2 + \cot \varepsilon_3 r_4 = \frac{q_3}{q_2 + q_3} r_4 (\cot \varepsilon_2 + \cot \varepsilon_3) = -F_2 \frac{q_3}{q_2},$$

$$F_4 = r_3 - \cot \varepsilon_4 r_4 = - \frac{q_4}{q_4 + q_5} \left\{ r_4 (\cot \varepsilon_4 + \cot \varepsilon_5) + f_5 \right\},$$

$$F_5 = f_5 + r_3 + \cot \varepsilon_5 r_4 = \frac{q_5}{q_4 + q_5} \left\{ r_4 (\cot \varepsilon_4 + \cot \varepsilon_5) + f_5 \right\} = -F_4 \frac{q_5}{q_4},$$

$$F_6 = f_6 + r_1 - \cot \varepsilon_6 r_4 = - \frac{q_6}{q_1 + q_6} \left\{ r_4 (\cot \varepsilon_1 + \cot \varepsilon_6) - f_6 \right\} = -F_1 \frac{q_6}{q_1},$$

ferner

$$G_1 = \rho_1 + \cot \varepsilon_1 \rho_4 = \frac{q_1}{q_1 + q_6} \left\{ \rho_4 (\cot \varepsilon_1 + \cot \varepsilon_6) - f_6 \operatorname{tg} [\psi + \varepsilon_5] \right\},$$

$$G_2 = \rho_2 - \cot \varepsilon_2 \rho_4 = - \frac{q_2}{q_2 + q_3} \rho_4 (\cot \varepsilon_2 + \cot \varepsilon_3),$$

$$G_3 = \rho_2 + \cot \varepsilon_3 \rho_4 = \frac{q_3}{q_2 + q_3} \rho_4 (\cot \varepsilon_2 + \cot \varepsilon_3) = - G_2 \frac{q_3}{q_2},$$

$$G_4 = \rho_3 - \cot \varepsilon_4 \rho_1 = - \frac{q_4}{q_4 + q_5} \left\{ \rho_4 (\cot \varepsilon_4 + \cot \varepsilon_5) + f_5 \operatorname{tg} [\psi - \varepsilon_6] \right\},$$

$$G_5 = f_5 \operatorname{tg}[\psi - \varepsilon_6] + \rho_3 + \cot\varepsilon_5\,\rho_4 = -\frac{q_5}{q_4+q_5}\left\{\rho_4(\cot\varepsilon_4 + \cot\varepsilon_5) + f_5 \operatorname{tg}[\psi - \varepsilon_6]\right\} = -G_4\frac{q_5}{q_4},$$

$$G_6 = f_6 \operatorname{tg}[\psi + \varepsilon_5] + \rho_1 - \cot\varepsilon_6\,\rho_4 = -\frac{q_6}{q_1+q_6}\left\{\rho_4(\cot\varepsilon_1 + \cot\varepsilon_6) - f_6 \operatorname{tg}[\psi + \varepsilon_5]\right\} = -G_1\frac{q_6}{q_1},$$

und erhalten damit zunächst

$$\frac{1}{Px} = \frac{\{r_4(\cot\varepsilon_1 + \cot\varepsilon_6) - f_6\}^2}{q_1+q_6} + \frac{r_4^2(\cot\varepsilon_2 + \cot\varepsilon_3)^2}{q_2+q_3} + \frac{\{r_4(\cot\varepsilon_4 + \cot\varepsilon_5) + f_5\}^2}{q_4+q_5}, \quad (80$$

$$\frac{1}{Py} = \frac{\{\rho_4(\cot\varepsilon_1 + \cot\varepsilon_6) - f_6 \operatorname{tg}[\psi + \varepsilon_5]\}^2}{q_1+q_6} + \frac{\rho_4^2(\cot\varepsilon_2 + \cot\varepsilon_3)^2}{q_2+q_3} + \frac{\{\rho_4(\cot\varepsilon_4 + \cot\varepsilon_5) + f_5 \operatorname{tg}[\psi - \varepsilon_6]\}^2}{q_4+q_5} \quad (81$$

und gemäß $M^2 = m^2\left(\frac{1}{Px} + \frac{1}{Py}\right)$ nach einigen Reduktionen,

$$M^2 = \frac{m^2}{\sin^2\beta}\,\frac{(q_1+q_6)\dfrac{c^2\sin^2\mathfrak{B}}{\sin^2\varepsilon_2\sin^2\varepsilon_3} + (q_2+q_3)\left(\dfrac{a^2\sin^2\mathfrak{C}}{\sin^2\varepsilon_4\sin^2\varepsilon_5} + \dfrac{c^2\sin^2\mathfrak{A}}{\sin^2\varepsilon_1\sin^2\varepsilon_6} + \dfrac{2ac\sin\mathfrak{A}\sin\mathfrak{C}\cos\beta}{\sin\varepsilon_1\sin\varepsilon_4\sin\varepsilon_5\sin\varepsilon_6}\right) + (q_4+q_5)\dfrac{a^2\sin^2\mathfrak{B}}{\sin^2\varepsilon_2\sin^2\varepsilon_3}}{(q_1+q_6)(q_2+q_3)\dfrac{\sin^2\mathfrak{C}}{\sin^2\varepsilon_4\sin^2\varepsilon_5} + (q_1+q_6)(q_4+q_5)\dfrac{\sin^2\mathfrak{B}}{\sin^2\varepsilon_2\sin^2\varepsilon_3} + (q_2+q_3)(q_4+q_5)\dfrac{\sin^2\mathfrak{A}}{\sin^2\varepsilon_1\sin^2\varepsilon_6}}, \quad (82$$

wenn die Summen $(\varepsilon_1+\varepsilon_6)$, $(\varepsilon_2+\varepsilon_3)$ und $(\varepsilon_4+\varepsilon_5)$ mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bezeichnet werden. Eine weitere und wesentliche Vereinfachung ermöglichen die Relationen:

$$\sin\mathfrak{C} = \frac{AB\sin\mathfrak{A}}{BC} = \sin\mathfrak{A}\,\frac{b\sin\gamma\sin\varepsilon_4}{b\sin\varepsilon_1\sin\alpha},$$

$$\sin\mathfrak{B} = \frac{AC\sin\mathfrak{A}}{BC} = \sin\mathfrak{A}\,\frac{c\sin\beta\sin\varepsilon_3}{c\sin\varepsilon_6\sin\alpha}.$$

Multipliziert man nämlich Zähler und Nenner von (82 mit $\dfrac{\sin^2\alpha\sin^2\varepsilon_1\sin^2\varepsilon_6}{\sin^2\mathfrak{A}}$, dann folgt

$$M^2 = \frac{m^2}{\sin^2\beta}\,\frac{(q_1+q_6)b^2c^2\sin^2\beta + (q_2+q_3)a^2c^2(\sin^2\alpha + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta) + (q_4+q_5)a^2b^2\sin^2\beta}{(q_1+q_6)(q_2+q_3)c^2\sin^2\gamma + (q_1+q_6)(q_4+q_5)b^2\sin^2\beta + (q_2+q_3)(q_4+q_5)a^2\sin^2\alpha}$$

und wegen $\sin^2\alpha + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta = \sin^2\beta$ schließlich

$$M^2 = m^2\,\frac{(q_1+q_6)b^2c^2 + (q_2+q_3)a^2c^2 + (q_4+q_5)a^2b^2}{(q_1+q_6)(q_2+q_3)c^2\sin^2\gamma + (q_1+q_6)(q_4+q_5)b^2\sin^2\beta + (q_2+q_3)(q_4+q_5)a^2\sin^2\alpha}. \quad (83$$

Letztere Gleichung zeigt, daß die Gewichte jener Winkel, welche ein und dieselbe Strahlenrichtung bestimmen, immer nur in ihren Summen auftreten wie $(q_1 + q_6)$, $(q_2 + q_3)$ und $(q_4 + q_5)$; es wird daher zweckmäßiger sein, statt der Winkelgewichte Strahlengewichte einzuführen, also

$$q_1 + q_6 = p_a = p_1,$$
$$q_2 + q_3 = p_b = p_2,$$
$$q_4 + q_5 = p_c = p_3,$$

womit als definitive Form von M^2 erhalten wird:

$$M^2 = m^2 \frac{p_1 b^2 c^2 + p_2 a^2 c^2 + p_3 a^2 b^2}{p_1 p_2 c^2 \sin^2\gamma + p_1 p_3 b^2 \sin^2\beta + p_2 p_3 a^2 \sin^2\alpha} . \qquad (84$$

Zur Kontrolle des eben abgeleiteten Ausdruckes soll noch in Kürze die Entwickelung von M^2 nach der Theorie vermittelnder Beobachtungen durchgeführt werden.

Letztere geht aus von den Fehlergleichungen:

$$v_1 = -\rho \frac{\sin\omega_1}{a} dx + \rho \frac{\cos\omega_1}{a} dy + l_1$$

$$v_2 = -\rho \frac{\sin\omega_2}{b} dx + \rho \frac{\cos\omega_2}{b} dy + l_2$$

$$v_3 = -\rho \frac{\sin\omega_3}{c} dx + \rho \frac{\cos\omega_3}{c} dy + l_3,$$

worin ω_1, ω_2, ω_3 den Richtungswinkeln der Strahlen a, b, c entsprechen; $\rho = 206\,265''$.

Bezeichnet man die Richtungskoeffizienten von dx in ihrer Reihenfolge mit a_1, a_2, a_3, jene von dy mit b_1, b_2, b_3 — wohl zu unterscheiden von den Strahlen a, b, c — dann ist M^2 definiert durch

$$M^2 = m^2 \frac{[paa] + [pbb]}{[paa]\,[pbb] - [pab]\,[pab]} .$$

Man findet unmittelbar

$$[paa] + [pbb] = \frac{\rho^2}{a^2 b^2 c^2} (p_1 b^2 c^2 + p_2 a^2 c^2 + p_3 a^2 b^2),$$

ferner nach einfacher Rechnung

$$[paa][pbb] - [pab]^2 = \frac{\rho^4}{a^2 b^2 c^2} (p_1 p_2 c^2 \sin^2\gamma + p_1 p_3 b^2 \sin^2\beta + p_2 p_3 a^2 \sin^2\alpha);$$

demnach in voller Übereinstimmung mit dem Resultat der vorhergehenden Ableitung

$$M^2 = \frac{m^2}{\rho^2} \frac{p_1 b^2 c^2 + p_2 a^2 c^2 + p_3 a^2 b^2}{p_1 p_2 c^2 \sin^2\gamma + p_1 p_3 b^2 \sin^2\beta + p_2 p_3 a^2 \sin^2\alpha} .$$

Im Sinne der eingangs gestellten Aufgabe haben wir nun die dem Minimum von M^2 entsprechenden Werte von p_1, p_2 und p_3 zu ermitteln, wenn letztere durch die Nebenbedingung

$$p_1 + p_2 + p_3 = P$$

gebunden sind. Der allgemeinen Auflösung sollen zunächst zwei Spezialfälle vorausgeschickt werden.

I. Spezialfall: $a = b = c$.

Aus der Gleichsetzung der Strahlenlängen folgt

$$M^2 = m^2 a^2 \frac{p_1 + p_2 + p_3}{p_1 p_2 \sin^2\gamma + p_1 p_3 \sin^2\beta + p_2 p_3 \sin^2\alpha} \qquad (85$$

und nach Substitution von p_3 aus der Nebenbedingung

$$p_3 = P - p_1 - p_2$$

$$M^2 = a^2 m^2 \frac{P}{p_1 p_2 (\sin^2\gamma - \sin^2\beta - \sin^2\alpha) - p_1^2 \sin^2\beta - p_2^2 \sin^2\alpha + p_1 P \sin^2\beta + p_2 P \sin^2\alpha} \cdot \quad (86$$

Differentiert man M^2 nach p_2 und p_3, setzt die Differentialquotienten gleich 0 und beachtet, daß

$$\sin^2\gamma - \sin^2\beta - \sin^2\alpha = 2 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma,$$

dann erhält man aus den Gleichungen

$$2 p_2 \sin\alpha \cos\gamma + P \sin\beta - 2 p_1 \sin\beta = 0$$

$$2 p_1 \sin\beta \cos\gamma + P \sin\alpha - 2 p_2 \sin\alpha = 0$$

sofort

$$p_1 = -\frac{P\cos\alpha}{2\sin\beta\sin\gamma}, \quad p_2 = -\frac{P\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\gamma} \text{ und hieraus } p_3 = -\frac{P\cos\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta}, \quad (87$$

oder in Verhältnisform überraschend einfach:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma.$$

So wäre beispielsweise für $\alpha = 180°$, $\beta = \gamma = 90°$ zunächst

$$p_1 = \frac{P}{2} \text{ und, wenn man } \alpha = 360 - 2\beta \text{ einsetzt,}$$

$$p_2 = \frac{P \cot\beta}{2\sin 2\beta} = \frac{P}{4\sin^2\beta} = \frac{P}{4} = p_3,$$

das heißt, die Hälfte der Beobachtungsarbeit ist auf die Festlegung jenes Strahles zu verwenden, welcher die beiden anderen unter 90° trifft, ein Ergebnis, welches auch der Anschauung vollkommen entspricht.

II. Spezialfall: $\alpha = \beta = \gamma = 120°$.

An Stelle des allgemeinen Ausdruckes (84 tritt

$$M^2 = \frac{4\,m^2}{3} \frac{p_1 b^2 c^2 + p_2 a^2 c^2 + p_3 a^2 b^2}{p_1 p_2 c^2 + p_1 p_3 b^2 + p_2 p_3 a^2} \quad (89$$

und nach Substitution $p_3 = P - p_1 - p_2$

$$M^2 = \frac{4\,m^2}{3} \frac{p_1 b^2 (c^2 - a^2) + p_2 a^2 (c^2 - b^2) + P a^2 b^2}{p_1 p_2 (c^2 - a^2 - b^2) - p_1^2 b^2 - p_2^2 a^2 + p_1 P b^2 + p_2 P a^2} = \frac{4\,m^2}{3} \cdot \frac{Z}{N} \cdot \quad (90$$

Zur Bestimmung des Minimums differentieren wir:

$$\frac{\partial M^2}{\partial p_1} = \frac{4\,m^2}{3} \frac{1}{N^2} \left\{ N b^2 (c^2 - a^2) - Z (p_2 [c^2 - a^2 - b^2] - 2 p_1 b^2 + P b^2) \right\} = 0 \quad (91$$

$$\frac{\partial M^2}{\partial p_2} = \frac{4\,m^2}{3} \frac{1}{N^2} \left\{ N a^2 (c^2 - b^2) - Z (p_1 [c^2 - a^2 - b^2] - 2 p_2 a^2 + P a^2) \right\} = 0 \quad (92$$

und finden hieraus

$$p_2 = \frac{p_1 b^2 (c^2 [c^2 - b^2] + a^2 [a^2 - b^2]) + P a^2 b^2 (b^2 - a^2)}{a^2 (b^2 [b^2 - a^2] + c^2 [c^2 - a^2])} \cdot \quad (93$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung (91 ein, dann folgt nach einigen Reduktionen die quadratische Gleichung:

$$p_1^2 A + p_1 P a^2 B + P^2 a^2 C = 0 \qquad (94$$

worin bedeuten:

$$A = a^8 - 3a^6b^2 - 3a^6c^2 + 4a^4b^4 + a^4b^2c^2 + 4a^4c^4 - 3a^2b^6 + a^2b^4c^2 + a^2b^2c^4 - 3a^2c^6 - 3b^2c^6 + 4b^4c^4 - 3b^6c^2 + b^8 + c^8,$$

$$B = -2a^6 + 5a^4b^2 + 5a^4c^2 - 4a^2b^4 - 4a^2c^4 - b^2c^4 - b^4c^2 + b^6 + c^6,$$

$$C = a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^2c^2 + b^4 + c^4.$$

Die Auflösung obiger Gleichung führt zu einem Wurzelausdruck von der Form:

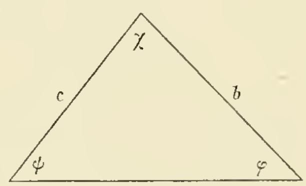
$$W = 3a^4\{-c^{12} + 2b^2c^{10} + 4a^2c^{10} - 6a^4c^8 - 3b^4c^8 + 4a^6c^6 + 4b^6c^6 + 4a^2b^4c^6 - 8a^4b^2c^6 + 4a^2b^6c^4 + 8a^6b^2c^4 - 8a^4b^4c^4 - a^8c^4 - 3b^8c^4 + 2b^{10}c^2 - 2a^8b^2c^2 + 8a^6b^4c^2 - 8a^4b^6c^2 + 4a^2b^{10} - 6a^4b^8 + 4a^6b^6 - a^8b^4 - b^{12}\}, \qquad (95$$

dessen direkte Auswertung unmöglich ist. Nach mehrfachen Versuchen wurde indes festgestellt, daß W aus drei Faktoren besteht, nämlich

$$W = 3a^4(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2)(c^4 + b^4 - a^2c^2 - a^2b^2)^2.$$

Um zu einem praktisch brauchbaren Resultat zu gelangen, konstruiert man aus den Strahlen a, b und c ein Dreieck, dessen Winkel mit χ, ψ und φ bezeichnet werden sollen. Dann stellt aber

Fig. 5.



$$-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = (2bc\sin\chi)^2 = (2ac\sin\psi)^2 = (2ab\sin\varphi)^2$$
$$= (4F)^2$$

das Quadrat des vierfachen Flächeninhaltes dieses Dreieckes vor; somit wird

$$\pm\sqrt{W} = \pm a^2\, 4F\sqrt{3}\,(c^4 + b^4 - a^2c^2 - a^2b^2).$$

Der Umstand, daß in dem Ausdrucke W der Flächeninhalt des erwähnten Hilfsdreieckes enthalten war, macht das Auftreten des gleichen Faktors in A und B einigermaßen wahrscheinlich.

Tatsächlich findet man:

$$A = (-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2)(-a^4 - b^4 - c^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$
$$= (4F)^2(-a^4 - b^4 - c^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

und

$$B = (-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2)(2a^2 - b^2 - c^2) = (4F)^2(2a^2 - b^2 - c^2).$$

Mit Berücksichtigung der eben angeführten Zerlegungen erhält man aus Gleichung (94

$$p_1 = Pa^2\,\frac{(4F)^2(b^2 + c^2 - 2a^2) \pm 4F\sqrt{3}\,(b^4 + c^4 - a^2c^2 - b^2c^2)}{2(4F)^2(-a^4 - b^4 - c^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}$$

und, da dem Minimum das —Zeichen entspricht, wird

$$p_1 = Pa^2\,\frac{4F(2a^2 - b^2 - c^2) + \sqrt{3}\,(b^4 + c^4 - a^2c^2 - b^2c^2)}{8F(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2)}\;. \qquad (96$$

Auf Grund dieses Wertes liefert Gleichung (93 nach Division durch $(b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2)$

$$p_2 = Pb^2 \frac{4F(2b^2-a^2-c^2)+\sqrt{3}\,(a^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2)}{8F(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)} \tag{97}$$

und aus $p_3 = P - p_1 - p_2$ folgt schließlich

$$p_3 = Pc^2 \frac{4F(2c^2-a^2-b^2)+\sqrt{3}\,(a^4+b^4-a^2c^2-b^2c^2)}{8F(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)}. \tag{98}$$

Zwecks weiterer Vereinfachung setzen wir in Hinsicht auf das Hilfsdreieck — Fig. 5

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2 &= \frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2) \\ &\quad - \frac{3}{4}(-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2) \\ &= \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2 - 3b^2c^2\sin^2\chi, \end{aligned}$$

ferner

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\chi$$

in den Ausdruck (96 ein, also

$$p_1 = \frac{Pa^2}{2\,bc\sin\chi} \frac{b^3c\sin\chi + bc^3\sin\chi - 4b^2c^2\sin\chi\cos\chi - \sqrt{3}\,b^2c^2 + \sqrt{3}\,bc^3\cos\chi + \sqrt{3}\,b^3c\cos\chi}{(b^2+c^2-bc\cos\chi-\sqrt{3}\,bc\sin\chi)\,(b^2+c^2-bc\cos\chi+\sqrt{3}\,bc\sin\chi)}$$

und erhalten nach Division durch $(b^2+c^2-bc\cos\chi-\sqrt{3}\,bc\sin\chi)\,bc$

$$p_1 = \frac{Pa^2}{2\sin\chi} \frac{\sin\chi+\sqrt{3}\cos\chi}{(b^2+c^2-bc\cos\chi+\sqrt{3}\,bc\sin\chi)} = \frac{Pa^2}{\sin\chi} \frac{\sin\chi+\sqrt{3}\cos\chi}{(a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3}\,bc\sin\chi)} \tag{99}$$

in analoger Weise

$$p_2 = \frac{Pb^2}{\sin\psi} \frac{\sin\psi+\sqrt{3}\cos\psi}{(a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3}\,ac\sin\psi)} \tag{100}$$

und

$$p_3 = \frac{Pc^2}{\sin\varphi} \frac{\sin\varphi+\sqrt{3}\cos\varphi}{(a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3}\,ab\sin\varphi)}. \tag{101}$$

Da

$$bc\sin\chi = ac\sin\psi = ab\sin\varphi,$$

lautet das Verhältnis

$$p_1 : p_2 : p_3 = a^2(1+\sqrt{3}\cot\chi) : b^2(1+\sqrt{3}\cot\psi) : c^2(1+\sqrt{3}\cot\varphi)$$

und, wenn endlich $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60°$ substituiert wird,

$$p_1 : p_2 : p_3 = \sin\chi\sin(60+\chi) : \sin\psi\sin(60+\psi) : \sin\varphi\sin(60+\varphi). \tag{102}$$

Wären beispielsweise die Strahlen

$$a = 30\,km, \qquad b = 40\,km, \qquad c = 50\,km,$$

so hätte das aus den Seiten a, b, c konstruierte Dreieck die Winkel:

$$\chi = 36°\ 52'\ 11''64, \qquad \psi = 53°\ 07'\ 48''36, \qquad \varphi = 90°$$

und für $P = 100$ würde folgen:

$$p_1 = 33, \qquad p_2 = 40, \qquad p_3 = 27.$$

Das größte Gewicht erhält jener Strahl, dem im erwähnten Hilfsdreieck ein Winkel von 60° gegenüberliegt oder, wenn ein solcher nicht vorhanden ist, jener Strahl, dessen Gegenwinkel am wenigsten von 60° abweicht; denn das Produkt $\sin\chi \sin(60+\chi)$ erreicht sein Maximum für $\chi = 60°$.

Anderseits erkennt man aus (102, daß ein Strahl überhaupt nicht mehr zu beobachten ist, wenn demselben — im Dreieck — ein Winkel zwischen 120° und 180° entspricht, gleiches gilt begreiflicherweise von einem Strahl, welcher größer ist als die Summe der beiden anderen und insofern die Konstruktion des Hilfsdreieckes unmöglich macht.

Will man schließlich das Minimum von M^2 selbst berechnen, so hat man die Werte von p_1, p_2 und p_3 in Gleichung (89 einzuführen und findet mit Beachtung der Relation

$$\cot\chi \cot\psi + \cot\chi \cot\varphi + \cot\psi \cot\varphi = 1$$

$$M^2 = \frac{2\,m^2}{3\,P}\,(a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3}\,bc \sin\chi), \tag{103}$$

demnach fast völlig übereinstimmend mit dem in Gleichung (19 angeführten mittleren Punktfehler für das einzelne Dreieck.

In Fortsetzung des obigen Beispieles ($a = 30\,km, b = 40\,km, c = 50\,km$) wäre bei $P = 100$, $m = 7''$

$$M = 37\cdot 88\,cm$$

und bei gleichmäßiger Arbeitsverteilung $\mathfrak{M} = 38\cdot 03\,cm$; von einer nennenswerten Genauigkeitssteigerung — $0\cdot 15\,cm$ — kann hier wohl nicht gesprochen werden.

Hingegen erhalten wir bei $a = 30\,km$, $b = 40\,km$, $c = 100\,km$, wo also $c > (a+b)$, als günstigste Gewichtsverteilung im Sinne der Gleichungen [1]

$$p_1 = P\,\frac{b}{a+b}, \quad p_2 = P\,\frac{a}{a+b}, \quad M = \frac{m}{\sqrt{P}\sin 120}\,(a+b):$$

$$p_1 = 57, \quad p_2 = 43 \quad (p_3 = 0)$$

und

$$M = 39\cdot 19\,cm \text{ bei bester}$$

$$\mathfrak{M} = 44\cdot 60\,cm \text{ bei gleichmäßiger Gewichtsverteilung, demnach}$$

um 14% schlechter. Sollte indes bei dieser Art der Arbeitsverteilung die Genauigkeit des ersten Falles erreicht werden, so wären hiezu 130 Beobachtungen statt 100 erforderlich.

Das Endergebnis der vorhergehenden Betrachtungen könnte, wie folgt, zusammengefaßt werden: Läßt sich aus den Strahlen *a, b, c* ein Dreieck konstruieren, in welchem kein Winkel 120° überschreitet, dann liefern die günstigste und die gleichmäßige Gewichtsverteilung fast gleichgenaue Resultate; tritt aber in dem bezeichneten Dreieck ein Winkel von über 120° auf, oder läßt sich das Dreieck überhaupt nicht konstruieren, dann entfällt die Beobachtung des längsten Strahles, die Arbeit ist auf die beiden anderen Strahlen zu konzentrieren.

III. Allgemeiner Fall.

Kehren wir nach Erledigung der Spezialfälle zur Hauptaufgabe zurück, also zur Funktion

$$M^2 = m^2\,\frac{p_1 b^2 c^2 + p_2 a^2 c^2 + p_3 a^2 b^2}{p_1 p_2 c^2 \sin^2\gamma + p_1 p_3 b^2 \sin^2\beta + p_2 p_3 a^2 \sin^2\alpha}.$$

Aus der Substitution

$$p_3 = P - p_1 - p_2$$

[1] Sitzungsberichte, Bd. 118, II*a* »Die günstigste Gewichtsverteilung«, p. 144.

folgt

$$M^2 = m^2 \frac{Pb^2c^2 + p_2 c^2 (a^2-b^2) + p_3 b^2 (a^2-c^2)}{p_2 Pc^2 \sin^2\gamma + p_3 Pb^2 \sin^2\beta - p_2^2 c^2 \sin^2\gamma - p_3^2 b^2 \sin^2\beta + p_2 p_3 (a^2 \sin^2\alpha - b^2 \sin^2\beta - c^2 \sin^2\gamma)} = m^2 \frac{Z}{N}$$

mit den Differentialquotienten

$$\frac{\partial M^2}{\partial p_2} = 0 = \left\{ Nc^2 (a^2-b^2) - Z (Pc^2 \sin^2\gamma - 2 p_2 c^2 \sin^2\gamma + p_3 [a^2 \sin^2\alpha - b^2 \sin^2\beta - c^2 \sin^2\gamma]) \right\} \frac{1}{N^2} \tag{104}$$

$$\frac{\partial M^2}{\partial p_3} = 0 = \left\{ Nb^2 (a^2-c^2) - Z (Pb^2 \sin^2\beta - 2 p_3 b^2 \sin^2\beta + p_2 [a^2 \sin^2\alpha - b^2 \sin^2\beta - c^2 \sin^2\gamma]) \right\} \frac{1}{N^2} \tag{105}$$

und nach geringen Reduktionen weiter:

$$p_2 = \frac{Pb^2c^2 (\sin^2\gamma [a^2-c^2] - \sin^2\beta [a^2-b^2]) + p_3 b^2 (a^2-c^2)(a^2 \sin^2\alpha - c^2 \sin^2\gamma)}{c^2 (a^2-b^2)(a^2 \sin^2\alpha - b^2 \sin^2\beta) + c^2 \sin^2\gamma (2 a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2)} \,. \tag{106}$$

Der Wert p_2 ist nun in eine der Gleichungen (104 oder (105 einzusetzen; die hieraus entspringenden Rechnungen sind indes so umfangreich, daß hier von ihrer Wiedergabe abgesehen werden muß und nur das Endresultat angeführt werden kann, das ist die zur Bestimmung von p_3 dienende quadratische Gleichung:

$$p_3^2 A + p_3 PB + P^2 C = 0 \tag{107}$$

mit

$$A = \left\{ \begin{aligned} &- c^4 \sin^6\gamma (a^2-c^2)(b^2-c^2) + c^2 \sin^2\alpha \sin^4\gamma (a^2-c^2)(-3 a^2c^2 + 2 a^2b^2 + b^2c^2) \\ &+ a^2 \sin^4\alpha \sin^2\gamma (a^2-c^2)(3 a^2c^2 - 2 b^2c^2 - a^2b^2) + b^2 \sin^2\alpha \sin^4\beta (b^2-a^2)(3 a^2b^2 - 2 a^2c^2 - b^2c^2) \\ &+ a^2 \sin^4\alpha \sin^2\beta (a^2-b^2)(3 a^2b^2 - 2 b^2c^2 - a^2c^2) + c^2 \sin^2\beta \sin^4\gamma (b^2-c^2)(-3 b^2c^2 + 2 a^2b^2 + a^2c^2) \\ &+ b^2 \sin^4\beta \sin^2\gamma (b^2-c^2)(3 b^2c^2 - 2 a^2c^2 - a^2b^2) + 2 \sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma (a^4b^4 + a^4c^4 + b^4c^4 - a^4b^2c^2 - a^2b^4c^2 - a^2b^2c^4) \\ &- b^4 \sin^6\beta (a^2-b^2)(c^2-b^2) - a^4 \sin^6\alpha (a^2-c^2)(a^2-b^2) \end{aligned} \right\} \tag{108}$$

$$B = \left\{ \begin{aligned} &- c^6 \sin^6\gamma (a^2 + b^2 - 2 c^2) + a^2c^2 \sin^4\alpha \sin^2\gamma (4 a^2c^2 - 2 b^2c^2 - a^4 - a^2b^2) + c^4 \sin^2\beta \sin^4\gamma (-5 b^2c^2 + 2 a^2b^2 + 2 b^4 + a^2c^2) \\ &- a^4c^2 \sin^6\alpha (a^2-b^2) + b^2c^2 \sin^4\beta \sin^2\gamma (4 b^2c^2 - 2 a^2c^2 - b^4 - a^2b^2) + c^4 \sin^2\alpha \sin^4\gamma (-5 a^2c^2 + 2 a^2b^2 + 2 a^4 + b^2c^2) \\ &+ b^4c^2 \sin^6\beta (a^2-b^2) + a^2c^2 \sin^4\alpha \sin^2\beta (a^4 + a^2b^2 - 2 b^4) + b^2c^2 \sin^2\alpha \sin^4\beta (b^4 + a^2b^2 - 2 a^4) \\ &+ 2 c^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma (a^4b^2 + a^2b^4 - a^4c^2 - b^4c^2) \end{aligned} \right\} \tag{109}$$

und $C =$

$$\left\{ \begin{aligned} &+ c^4 \sin^6\gamma (a^2b^2 - c^4) + 2 b^2c^4 \sin^2\beta \sin^4\gamma (c^2-a^2) + a^2c^4 \sin^4\alpha \sin^2\gamma (b^2-a^2) \\ &\qquad + 2 a^2c^4 \sin^2\alpha \sin^4\gamma (c^3-b^2) + b^2c^4 \sin^4\beta \sin^2\gamma (a^2-b^2) \end{aligned} \right\} \tag{110}$$

Bei Auflösung der Gleichung (107 tritt ein relativ sehr komplizierter Wurzelausdruck W auf, der zur Klarstellung der späteren Transformationen in seiner Gänze angeschrieben werden muß:

$$W = B^2 - 4\,AC = \tag{111}$$

$$\begin{aligned}
& c^8 \sin^{12}\gamma\,(2a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2)^2 \\
&+ 2c^6 \sin^{10}\gamma \sin^2\alpha\,(2a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2)(-2a^4b^2 - 2a^2b^2c^2 + 2a^4c^2 + b^2c^4 + a^2c^4) \\
&+ 2c^6 \sin^{10}\gamma \sin^2\beta\,(2a^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2)(-2a^2b^4 - 2a^2b^2c^2 + 2b^4c^2 + a^2c^4 + b^2c^4) \\
&+ c^4 \sin^8\gamma \sin^4\alpha\,(a^4c^8 + 2a^2b^2c^8 + b^4c^8 + 8a^6c^6 + 4a^4b^2c^6 - 4a^2b^4c^6 + 6a^8c^4 - 6a^4b^4c^4 - \\
&\qquad - 24a^6b^2c^4 - 12a^8b^2c^2 + 20a^6b^4c^2 + 4a^8b^4) \\
&+ c^4 \sin^8\gamma \sin^4\beta\,(b^4c^8 + 2a^2b^2c^8 + a^4c^8 + 8b^6c^6 + 4a^2b^4c^6 - 4a^4b^2c^6 + 6b^8c^4 - 6a^4b^4c^4 - \\
&\qquad - 24a^2b^6c^4 - 12a^2b^8c^2 + 20a^4b^6c^2 + 4a^4b^8) \\
&+ 2c^4 \sin^8\gamma \sin^2\alpha \sin^2\beta\,(-a^4c^8 - 2a^2b^2c^8 - b^4c^8 + 4a^6c^6 + 8a^4b^2c^6 + 8a^2b^4c^6 + 4b^6c^6 - 14a^6b^2c^4 - \\
&\qquad - 12a^4b^4c^4 - 14a^2b^6c^4 + 12a^6b^4c^2 + 12a^4b^6c^2 - 4a^6b^6) \\
&+ 4c^4 \sin^6\gamma \sin^4\alpha \sin^2\beta\,(2a^6c^6 + 2a^4b^2c^6 - a^2b^4c^6 - b^6c^6 - 3a^8c^4 - 4a^6b^2c^4 + 5a^2b^6c^4 + \\
&\qquad + 8a^8b^2c^2 - 3a^6b^4c^2 - 7a^4b^6c^2 - 5a^8b^4 + 7a^6b^6) \\
&+ 4c^4 \sin^6\gamma \sin^2\alpha \sin^4\beta\,(2b^6c^6 + 2a^2b^4c^6 - a^4b^2c^6 - a^6c^6 - 3b^8c^4 - 4a^2b^6c^4 + 5a^6b^2c^4 + \\
&\qquad + 8a^2b^8c^2 - 3a^4b^6c^2 - 7a^6b^4c^2 - 5a^4b^8 + 7a^6b^6) \\
&+ 4a^2c^4 \sin^6\gamma \sin^6\alpha\,(-a^4c^6 - a^2b^2c^6 - 3a^6c^4 + 3a^4b^2c^4 + 2a^2b^4c^4 - a^8c^2 + 7a^6b^2c^2 - \\
&\qquad - 4a^4b^4c^2 + a^8b^2 - 3a^6b^4) \\
&+ 4b^2c^4 \sin^6\gamma \sin^6\beta\,(-b^4c^6 - a^2b^2c^6 - 3b^6c^4 + 3a^2b^4c^4 + 2a^4b^2c^4 - b^8c^2 + 7a^2b^6c^2 - \\
&\qquad - 4a^4b^4c^2 + a^2b^8 - 3a^4b^6) \\
&+ 4a^2c^4 \sin^4\gamma \sin^6\alpha \sin^2\beta\,(-3a^6c^4 - a^4b^2c^4 + a^2b^4c^4 - b^6c^4 + 2a^8c^2 + 2a^4b^4c^2 + \\
&\qquad + 4a^2b^6c^2 - 3a^8b^2 + 8a^6b^4 - 9a^4b^6) \\
&+ 4b^2c^4 \sin^4\gamma \sin^2\alpha \sin^6\beta\,(-3b^6c^4 - a^2b^4c^4 + a^4b^2c^4 - a^6c^4 + 2b^8c^2 + 2a^4b^4c^2 + 4a^6b^2c^2 - 3a^2b^8 + \\
&\qquad + 8a^4b^6 - 9a^6b^4) \\
&+ 2c^4 \sin^4\gamma \sin^4\alpha \sin^4\beta\,(3a^8c^4 + 4a^6b^2c^4 - 2a^4b^4c^4 + 4a^2b^6c^4 + 3b^8c^4 - 14a^8b^2c^2 + \\
&\qquad + 2a^6b^4c^2 + 2a^4b^6c^2 - 14a^2b^8c^2 + 17a^8b^4 - 22a^6b^6 + 17a^4b^8) \\
&+ a^4c^4 \sin^4\gamma \sin^8\alpha\,(6a^4c^4 - 2b^4c^4 + 8a^6c^2 - 20a^4b^2c^2 + 4a^2b^4c^2 + a^8 - 10a^6b^2 + 13a^4b^4) \\
&+ b^4c^4 \sin^4\gamma \sin^8\beta\,(6b^4c^4 - 2a^4c^4 + 8b^6c^2 - 20a^2b^4c^2 + 4a^4b^2c^2 + b^8 - 10a^2b^6 + 13a^4b^4) \\
&+ 2a^6c^4 \sin^2\gamma \sin^{10}\alpha\,(-2a^4c^2 + 2a^2b^2c^2 - a^6 + 4a^4b^2 - 3a^2b^4) \\
&+ 2b^6c^4 \sin^2\gamma \sin^{10}\beta\,(-2b^4c^2 + 2a^2b^2c^2 - b^6 + 4a^2b^4 - 3a^4b^2) \\
&+ 2a^4c^4 \sin^2\gamma \sin^8\alpha \sin^2\beta\,(4a^6c^2 - 2a^2b^4c^2 - 2b^6c^2 - a^8 + 2a^6b^2 - 11a^4b^4 + 10a^2b^6) \\
&+ 2b^4c^4 \sin^2\gamma \sin^2\alpha \sin^8\beta\,(4b^6c^2 - 2a^4b^2c^2 - 2a^6c^2 - b^8 + 2a^2b^6 - 11a^4b^4 + 10a^6b^2) \\
&+ 4a^2c^4 \sin^2\gamma \sin^6\alpha \sin^4\beta\,(-a^8c^2 - 3a^6b^2c^2 + a^4b^4c^2 + a^2b^6c^2 + 2b^8c^2 + 3a^8b^2 - 2a^6b^4 + \\
&\qquad + 5a^4b^6 - 6a^2b^8) \\
&+ 4b^2c^4 \sin^2\gamma \sin^4\alpha \sin^6\beta\,(-b^8c^2 - 3a^2b^6c^2 + a^4b^4c^2 + a^6b^2c^2 + 2a^8c^2 + 3a^2b^8 - 2a^4b^6 + \\
&\qquad + 5a^6b^4 - 6a^8b^2) \\
&+ 2a^6c^4 \sin^{10}\alpha \sin^2\beta\,(-a^6 + 3a^2b^4 - 2b^6) \\
&+ 2b^6c^4 \sin^2\alpha \sin^{10}\beta\,(-b^6 + 3a^4b^2 - 2a^6) \\
&+ a^4c^4 \sin^8\alpha \sin^4\beta\,(a^8 + 6a^6b^2 - 9a^4b^4 - 4a^2b^6 + 6b^8) \\
&+ b^4c^4 \sin^4\alpha \sin^8\beta\,(b^8 + 6a^2b^6 - 9a^4b^4 - 4a^6b^2 + 6a^8) \\
&+ 4a^2b^2c^4 \sin^6\alpha \sin^6\beta\,(-a^8 - a^6b^2 + 4a^4b^4 - a^2b^6 - b^8) \\
&+ a^8c^4 \sin^{12}\alpha\,(a^2 - b^2)^2 \\
&+ b^8c^4 \sin^{12}\beta\,(b^2 - a^2)^2
\end{aligned}$$

Zunächst konstatiert man die vollkommene Symmetrie von W in Bezug auf a, α und b, β. Führt man ferner in allen Gliedern $\alpha = \beta = \gamma = 120°$ ein, so resultiert Ausdruck (95; man kann hieraus schließen, daß in dem vorliegenden Ausdruck ein Faktor enthalten sein wird, welcher analog geformt ist wie

$$-a^4-b^4-c^4+2\,a^2b^2+2\,a^2c^2+2\,b^2c^2,$$

auf dessen Basis seinerzeit eine Zerlegung von (95 möglich war. Tatsächlich wurde nach einigen Versuchen die Teilbarkeit von W durch das Polynom

$$f_1=(-a^4\sin^4\alpha-b^4\sin^4\beta-c^4\sin^4\gamma+2\,a^2b^2\sin^2\alpha\sin^2\beta+2\,a^2c^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma+2\,b^2c^2\sin^2\beta\sin^2\gamma)\,c^4 \qquad (112$$

festgestellt und hiebei als Quotient erhalten: $Q=$

$$\begin{aligned}
&-a^4\sin^8\alpha\,(a^2-b^2)^2-b^4\sin^8\beta\,(b^2-a^2)^2-\sin^8\gamma\,(2\,a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)^2\\
&-2\,a^2\sin^6\alpha\sin^2\beta\,(-a^6+a^4b^2+a^2b^4-b^6)-2\,a^2\sin^6\alpha\sin^2\gamma\,(-a^6+4\,a^4b^2-a^4c^2-3\,a^2b^4+b^4c^2)\\
&-\sin^4\alpha\sin^4\beta\,(a^8+2\,a^6b^2-6\,a^4b^4+2\,a^2b^6+b^8)\\
&-2\sin^4\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\,(-a^8+2a^6c^2-3\,a^4b^4+a^4b^2c^2+4\,a^2b^6-2\,a^2b^4c^2-b^6c^2)\\
&-\sin^4\alpha\sin^4\gamma\,(a^8-10\,a^6b^2+4\,a^6c^2+13\,a^4b^4-4\,a^4b^2c^2+a^4c^4-8\,a^2b^4c^2+2\,a^2b^2c^4+b^4c^4)\\
&-2\sin^2\alpha\sin^6\gamma\,(2\,a^6b^2-a^6c^2-6\,a^4b^4+4\,a^4b^2c^2-a^4c^4+5\,a^2b^4c^2-2\,a^2b^2c^4-b^4c^4)\\
&-2\,b^2\sin^2\alpha\sin^6\beta\,(-a^6+a^4b^2+a^2b^4-b^6)\\
&-2\sin^2\alpha\sin^4\beta\sin^2\gamma\,(4\,a^6b^2-a^6c^2-3\,a^4b^4-2\,a^4b^2c^2+a^2b^4c^2+2\,b^6c^2-b^8)\\
&-2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^4\gamma\,(-5\,a^6b^2+2\,a^6c^2+6\,a^4b^4+2\,a^4b^2c^2-a^4c^4-5a^2b^6+2\,a^2b^4c^2-2a^2b^2c^4-b^4c^4\\
&\qquad\qquad+2\,b^6c^2)\\
&-2\sin^2\beta\sin^6\gamma\,(2\,a^2b^6-b^6c^2-6\,a^4b^4+4\,a^2b^4c^2-b^4c^4+5\,a^4b^2c^2-2\,a^2b^2c^4-a^4c^4)\\
&-\sin^4\beta\sin^4\gamma\,(b^8-10\,a^2b^6+4\,b^6c^2+13\,a^4b^4-4\,a^2b^4c^2+b^4c^4-8\,a^4b^2c^2+2\,a^2b^2c^4+a^4c^4)\\
&-2\,b^2\sin^6\beta\sin^2\gamma\,(-b^6-b^4c^2+4\,a^2b^4-3\,a^4b^2+a^4c^2).
\end{aligned}$$

Letzterer Ausdruck gestattet noch eine weitere Transformation; wie man sich leicht überzeugen kann, ist es möglich, denselben in folgende zwei Faktoren zu zerlegen:

$$Q=f_2\,.f_3$$

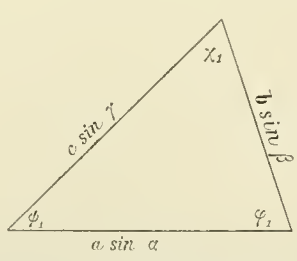
$$f_2=-\sin^4\alpha-\sin^4\beta-\sin^4\gamma+2\sin^2\alpha\sin^2\beta+2\sin^2\alpha\sin^2\gamma+2\sin^2\beta\sin^2\gamma, \qquad (113$$

$$f_3=(a^2\sin^2\alpha\,[a^2-b^2]+b^2\sin^2\beta\,[b^2-a^2]+\sin^2\gamma\,[2\,a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2])^2. \qquad (114$$

Es wäre hiemit der Ausdruck W in die drei Faktoren (112, (113, (114 aufgelöst.

Um noch eine einfachere Formulierung der Gewichte p_1, p_2, p_3 zu erlangen, wird es notwendig, ähnlich dem beim zweiten Spezialfall beobachteten Vorgang aus den Seiten $a\sin\alpha$, $b\sin\beta$, $c\sin\gamma$ ein Drei-

Fig. 6.



eck zu konstruieren, dessen Winkel wir mit χ_1, ψ_1 und φ_1 benennen wollen. Dann läßt sich der erste Faktor (112 durch das Quadrat des vierfachen Flächeninhaltes dieses neuen Hilfsdreieckes (Fig. 6) ersetzen also

$$f_1=(2\,ab\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi_1)^2c^4=(2\,ac\sin\alpha\sin\gamma\sin\psi_1)^2c^4=(2\,bc\sin\beta\sin\gamma\sin\chi_1)^2c^4, \qquad (115$$

während der zweite Faktor (113 durch

$$f_2=(2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2 \qquad (116$$

ausgedrückt werden kann.

Als Resultat der vorangehenden Untersuchung erhalten wir demnach:

$$\pm\sqrt{W} = \pm c^2 . 2\,ab \sin\alpha \sin\beta \sin\varphi_1 . 2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma\,(a^2 \sin^2\alpha\,[a^2 - b^2] + b^2 \sin^2\beta\,[b^2 - a^2] + \\ + \sin^2\gamma\,[2\,a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2]).$$

Anderseits ist es jetzt auf Grund der gewonnenen Anhaltspunkte leicht, auch die Glieder A und B der Gleichung (107 in Produktenform darzustellen. Man findet

$$A = (2\,ab \sin\alpha \sin\beta \sin\varphi_1)^2 (\sin^2\alpha\,[a^2 - b^2]\,[a^2 - c^2] + \sin^2\beta\,[b^2 - a^2]\,[b^2 - c^2] + \sin^2\gamma\,[c^2 - a^2]\,[c^2 - b^2]),$$

$$B = c^2\,(2\,ab \sin\alpha \sin\beta \sin\varphi_1)^2 (\sin^2\alpha\,[a^2 - b^2] + \sin^2\beta\,[b^2 - a^2] + \sin^2\gamma\,[a^2 + b^2 - 2\,c^2])$$

und hiemit

$$\begin{aligned} p_3 = Pc^2 \{&\sin\gamma\,(a^2 \sin^2\alpha\,[a^2 - b^2] + b^2 \sin^2\beta\,[b^2 - a^2] + \sin^2\gamma\,[2\,a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2]) \\ &- a\,b \sin\varphi_1\,(\sin^2\alpha\,[a^2 - b^2] + \sin^2\beta\,[b^2 - a^2] + \sin^2\gamma\,[a^2 + b^2 - 2\,c^2])\} : \\ &\{2\,ab \sin\varphi_1\,(\sin^2\alpha\,[a^2 - b^2]\,[a^2 - c^2] + \sin^2\beta\,[b^2 - a^2]\,[b^2 - c^2] + \sin^2\gamma\,[c^2 - a^2]\,[c^2 - b^2])\}. \end{aligned} \tag{117}$$

Aus der Substitution von p_3 in Gleichung (106 folgt ferner

$$\begin{aligned} p_2 = Pb^2 \{&\sin\beta\,(a^2 \sin^2\alpha\,[a^2 - c^2] + \sin^2\beta\,[2\,a^2 c^2 - a^2 b^2 - b^2 c^2] + c^2 \sin^2\gamma\,[c^2 - a^2]) \\ &- ac \sin\psi_1\,(\sin^2\alpha\,[a^2 - c^2] + \sin^2\beta\,[a^2 + c^2 - 2\,b^2] + \sin^2\gamma\,[c^2 - a^2])\} : \\ &\{2\,ac \sin\psi_1\,(\sin^2\alpha\,[a^2 - b^2]\,[a^2 - c^2] + \sin^2\beta\,[b^2 - a^2]\,[b^2 - c^2] + \sin^2\gamma\,[c^2 - a^2]\,[c^2 - b^2])\} \end{aligned} \tag{118}$$

und aus $p_1 = P - p_2 - p_3$ schließlich

$$\begin{aligned} p_1 = Pa^2 \{&\sin\alpha\,(\sin^2\alpha\,[2\,b^2 c^2 - a^2 b^2 - a^2 c^2] + b^2 \sin^2\beta\,[b^2 - c^2] + c^2 \sin^2\gamma\,[c^2 - b^2]) \\ &- bc \sin\chi_1\,(\sin^2\alpha\,[b^2 + c^2 - 2\,a^2] + \sin^2\beta\,[b^2 - c^2] + \sin^2\gamma\,[c^2 - b^2])\} : \\ &\{2\,bc \sin\chi_1\,(\sin^2\alpha\,[a^2 - b^2]\,[a^2 - c^2] + \sin^2\beta\,[b^2 - a^2]\,[b^2 - c^2] + \sin^2\gamma\,[c^2 - a^2]\,[c^2 - b^2])\}. \end{aligned} \tag{119}$$

Trotz der im früheren bereits vorgenommenen Vereinfachung erscheinen alle diese Ausdrücke noch immer zu schwerfällig; sie gestatten aber eine weitere zweckentsprechende Transformation, wenn man auf das aus $a \sin\alpha$, $b \sin\beta$ und $c \sin\gamma$ konstruierte Dreieck zurückgreift.

Das erste Glied im Zähler von p_3 gibt mit

$$c^2 \sin^2\gamma = a^2 \sin^2\alpha + b^2 \sin^2\beta - 2\,ab \sin\alpha \sin\beta \cos\varphi_1 :$$

$$\begin{aligned} &a^2 \sin^2\alpha\,(a^2 - b^2) + b^2 \sin^2\beta\,(b^2 - a^2) + 2\,ab \sin\alpha \sin\beta \cos\varphi_1\,(a^2 + b^2) + 2\,a^2 b^2 \sin^2\gamma \\ &- a^2 \sin^2\alpha\,(a^2 + b^2) - b^2 \sin^2\beta\,(a^2 + b^2) \\ &= -2\,a^2 b^2\,(\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma) + 2\,ab \sin\alpha \sin\beta \cos\varphi_1\,(a^2 + b^2) \\ &= 4\,a^2 b^2 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma + 2\,ab \sin\alpha \sin\beta \cos\varphi_1\,(a^2 + b^2), \end{aligned}$$

ähnlich das zweite Glied:

$$\begin{aligned} &(a^2 + b^2)\,(-\sin^2\alpha - \sin^2\beta + \sin^2\gamma) + 4\,ab \sin\alpha \sin\beta \cos\chi_1 \\ &= 2\,(a^2 + b^2) \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma + 4\,ab \sin\alpha \sin\beta \cos\chi_1. \end{aligned}$$

Werden beide Glieder mit ihren zugehörigen Faktoren $\sin\gamma$ beziehungsweise $-ab \sin\varphi_1$ und Pc^2 multipliziert, dann gehen sie über in:

$$\begin{aligned} &Pc^2 . 2\,ab \sin\alpha \sin\beta\,\{ab\,(\sin 2\gamma - \sin 2\varphi_1) + (a^2 + b^2) \sin[\gamma - \varphi_1]\} \\ &= Pc^2 . 2\,ab \sin\alpha \sin\beta \sin(\gamma - \varphi_1)\,\{a^2 + b^2 + 2\,ab \cos(\gamma + \varphi_1)\}. \end{aligned} \tag{120}$$

Auf analogem Wege erhält man den Zähler von p_2

$$Zp_2 = Pb^2 . 2\,ac \sin\alpha \sin\gamma \sin(\beta-\psi_1)\,\{a^2+c^2+2\,ac\cos(\beta+\psi_1)\} \tag{121}$$

und

$$Zp_1 = Pa^2 . 2\,bc \sin\beta \sin\gamma \sin(\alpha-\chi_1)\,\{b^2+c^2+2\,bc\cos(\alpha+\chi_1)\}. \tag{122}$$

Zur Vereinfachung des Nenners bilden wir auf Grundlage von

$$a^2 \sin^2\alpha = b^2\sin^2\beta + c^2\sin^2\gamma - 2\,bc\sin\beta\sin\gamma\cos\chi_1$$

und

$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$$

die Differenzen:

$$a^2 - b^2 = \frac{b^2(\sin^2\beta - \sin^2\alpha) + c^2\sin^2\gamma - 2\,bc\sin\beta\sin\gamma\cos\chi_1}{\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{-b^2\sin^2\gamma - 2\,b^2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + c^2\sin^2\gamma - 2\,bc\sin\beta\sin\gamma\cos\chi_1}{\sin^2\alpha},$$

$$a^2 - c^2 = \frac{b^2\sin^2\beta - 2c^2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha - c^2\sin^2\beta - 2\,bc\sin\beta\sin\gamma\cos\chi_1}{\sin^2\alpha}.$$

Führen wir hierauf die im Nenner von (119 angezeigten Operationen durch, dann nimmt p_1 mit Rücksicht auf (122 folgende Gestalt an:

$$p_1 = \frac{Pa^2 . 2\,bc\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha-\chi_1)\{b^2+c^2+2\,bc\cos[\alpha+\chi_1]\}}{\frac{2\,bc\sin^3\beta\sin^3\gamma\sin\chi_1}{\sin^2\alpha}(b^4+4\,b^3c\cos\alpha\cos\chi_1+4b^2c^2\cos^2\chi_1+4b^2c^2\cos^2\alpha-2\,b^2c^2+4\,bc^3\cos\alpha\cos\chi_1)}.$$

Nach Division durch

$$b^2+c^2+2\,bc\cos\alpha\cos\chi_1 - 2\,bc\sin\alpha\sin\chi_1$$

resultiert endlich für p_1 der Wert

$$p_1 = P\frac{a^2\sin^2\alpha\sin[\alpha-\chi_1]}{\sin\beta\sin\gamma\sin\chi_1\,(b^2+c^2+2\,bc\cos[\alpha-\chi_1])}. \tag{123}$$

Eliminiert man, um p_2 zu vereinfachen, im Nenner von (118 b^2 und $\sin^2\beta$ durch

$$b^2 = \frac{a^2\sin^2\alpha + c^2\sin^2\gamma - 2\,ac\sin\alpha\sin\gamma\cos\psi_1}{\sin^2\beta}$$

$$\sin^2\beta = \sin^2\alpha + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta,$$

dann liefert eine dem Obigen analoge Rechnung

$$p_2 = P\frac{b^2\sin^2\beta\sin[\beta-\psi_1]}{\sin\alpha\sin\gamma\sin\psi_1\,(a^2+c^2+2\,ac\cos[\beta-\psi_1])}, \tag{124}$$

und die Eliminierung von c^2 und $\sin^2\gamma$ im Nenner von (117

$$p_3 = P\frac{c^2\sin^2\gamma\sin[\gamma-\varphi_1]}{\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi_1\,(a^2+b^2+2\,ab\cos[\gamma-\varphi_1])}. \tag{125}$$

Da $ab\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi_1 = ac\sin\alpha\sin\gamma\sin\psi_1 = bc\sin\beta\sin\gamma\sin\chi_1$, lautet schließlich das Verhältnis:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{a \sin^2 \alpha \sin [\alpha - \chi_1]}{b^2 + c^2 + 2\,bc \cos [\alpha - \chi_1]} : \frac{b \sin^2 \beta \sin [\beta - \psi_1]}{a^2 + c^2 + 2\,ac \cos [\beta - \psi_1]} : \frac{c \sin^2 \gamma \sin [\gamma - \varphi_1]}{a^2 + b^2 + 2\,ab \cos [\gamma - \varphi_1]} \tag{126}$$

womit die einleitend gestellte Aufgabe ihrem Wesen nach als gelöst zu betrachten wäre.

Zur Überprüfung der Ausdrücke p_1, p_2, p_3 nach (123, (124, (125 soll noch eine kurze Untersuchung beigefügt werden. Auf Grund der Substitutionen $\alpha = \beta = \gamma = 120°$ ferner $a = b = c$ müssen sich obige Gewichtswerte auf jene Größen reduzieren, welche seinerzeit bei Behandlung der zwei Spezialfälle auf direktem Wege hergeleitet worden waren.

Betrachten wir den ersten Fall: $\alpha = \beta = \gamma = 120°$.

Es ist also $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma$ und an Stelle des Hilfsdreieckes $a \sin \alpha$, $b \sin \beta$, $c \sin \gamma$ mit den Winkeln $\chi_1, \psi_1, \varphi_1$ tritt jenes mit den Seiten a, b, c und den Winkeln χ, ψ, φ, daher

$$p_1 = \frac{Pa^2}{2 \sin \chi} \; \frac{\sqrt{3} \cos \chi + \sin \chi}{(b^2 + c^2 - bc \cos \chi + \sqrt{3}\, bc \sin \chi)}$$

$$= P \frac{a^2 (\sin \chi + \sqrt{3} \cos \chi)}{\sin \chi \, (a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3}\, bc \sin \chi)}$$

identisch mit (99.

Gleiches gilt von p_2 und p_3.

Für die Spezialisierung $a = b = c$ muß zunächst eine Relation zwischen den gegebenen Winkeln α, β, γ und $\chi_1, \psi_1\ \varphi_1$ aufgestellt werden.

Die oft verwendete Gleichung

$$a^2 \sin^2 \alpha = b^2 \sin^2 \beta + c^2 \sin^2 \gamma - 2\,bc \sin \beta \sin \gamma \cos \chi_1$$

vereinfacht sich wegen $a = b = c$ zu

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \chi_1$$

und tritt in Parallele mit der aus $\alpha + \beta + \gamma = 360°$ folgenden Gleichung

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha.$$

Es ist also

$$\cos \chi_1 = -\cos \alpha$$

ebenso

$$\cos \psi_1 = -\cos \beta$$

$$\cos \varphi_1 = -\cos \gamma$$

oder

$$\chi_1 = 180 - \alpha,$$
$$\psi_1 = 180 - \beta,$$
$$\varphi_1 = 180 - \gamma$$

demnach

$$p_1 = P \frac{a^2 \sin^2 \alpha \sin (180 + 2\,\alpha)}{\sin \beta \sin \gamma \sin \alpha \, (2\,a^2 + 2\,a^2 \cos [180 + 2\,\alpha])}$$

$$= -P \frac{\sin \alpha \sin 2\,\alpha}{2 \sin \beta \sin \gamma \, (1 - \cos 2\,\alpha)}$$

$$= -\frac{P \cos \alpha}{2 \sin \beta \sin \gamma}$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (87.

Zur Illustration der oben abgeleiteten Formeln sollen folgende zwei Beispiele dienen:

1.

$$a = 40\,000\,m,\quad b = 70\,000\,m,\quad c = 60\,000\,m,$$

$$\alpha = 90°,\qquad \beta = 120°,\qquad \gamma = 150°;$$

aus dem Hilfsdreieck mit den Seiten a sin α, b sin β, c sin γ berechnen wir die Winkel:

$$\chi_1 = 35°\ 07'\ 24''$$
$$\psi_1 = 119°\ 18'\ 48''$$
$$\varphi_1 = 25°\ 33'\ 48''$$

und finden nach den Gleichungen (123, (124 und (125 für $P = 100$:

$$p_1 = 39 \cdot 40$$
$$p_2 = 1 \cdot 01$$
$$p_3 = 59 \cdot 59,$$

ferner bei $m = 10''$ den zugehörigen mittleren Punktfehler $M = 55 \cdot 96\,cm$, während bei gleichmäßiger Gewichtsverteilung $\left(p_1 = p_2 = p_3 = \frac{P}{3}\right)$ der Fehler $\mathfrak{M} = 59 \cdot 73\,cm$, also um 7% größer erhalten wird.

Sieht man von der Messung des Strahles b, dessen Gewicht $1 \cdot 01$ gegenüber den anderen ohnehin verschwindet, ganz ab und behandelt die Aufgabe wie ein gewöhnliches Vorwärtseinschneiden, dann wird $p_a = p_1 = 40$, $p_c = p_3 = 60$ und $M_{a,c} = 55 \cdot 98\,cm$, also noch immer kleiner als $\mathfrak{M}$, wenn auch der Unterschied zwischen diesen drei Fällen sehr gering ist.

2.

$$a = 4\,000\,m,\quad b = 10\,000\,m,\quad c = 2\,000\,m$$
$$\alpha = 90°,\qquad \beta = 185°,\qquad \gamma = 85°;$$

ein Dreieck mit den Seiten a sin α, b sin β, c sin γ ist wegen des negativen Wertes von b sin β unmöglich. Es sind daher auch für die Gewichte keine reellen Werte zu erwarten, was die Rechnung bestätigt:

$$p_1 = P(\ \ 0 \cdot 917\,71 - 0 \cdot 772\,83\,i)$$
$$p_2 = P(\ \ 0 \cdot 324\,70 + 0 \cdot 536\,30\,i)$$
$$p_3 = P(-0 \cdot 242\,41 + 0 \cdot 236\,53\,i)$$

Da die günstigste Gewichtsverteilung nicht verwirklicht werden kann, tritt an Stelle des mehrfachen Vorwärtseinschneidens das einfache, welches entweder aus a, b oder a, c und b, c vorgenommen werden kann. Nun betragen aber die mittleren Punktfehler für diese drei Fälle:

$$M_{a,b} = \frac{m\,(a+b)}{\sqrt{P}\,\sin\gamma} = 6 \cdot 81\,cm,$$

$$M_{a,c} = \frac{m\,(a+c)}{\sqrt{P}\,\sin\beta} = 33 \cdot 38\,cm,$$

$$M_{b,c} = \frac{m\,(b+c)}{\sqrt{P}\,\sin\alpha} = 5 \cdot 82\,cm,$$

hingegen bei gleichmäßiger Arbeitsverteilung $\mathfrak{M} = 8 \cdot 38\,cm$.

Die beste Punktlage gibt das Einschneiden mit b und c und den Gewichten

$$p_b = P \frac{b}{b+c} = 83 \cdot 33$$

$$p_c = P \frac{c}{b+c} = 16 \cdot 67.$$

Fassen wir die Resultate der letzten Betrachtungen zusammen, so könnte für den allgemeinen Fall als Regel aufgestellt werden: Ist es möglich, aus den mit dem Sinus ihrer Gegenwinkel multiplizierten Strahlen ein Dreieck zu konstruieren, dann sind alle drei Strahlenrichtungen zu messen; ist ein solches Dreieck unmöglich, dann entfällt die Beobachtung einer Richtung und die Punktbestimmung ist aus jenem Strahlenpaar durchzuführen, dessen Summe dividiert durch den Sinus des eingeschlossenen Winkels den kleinsten Betrag liefert.