DIE DYNAMISCHE THEORIE DER GEZEITEN AUF EINEM MACLAURIN'SCHEN ELLIPSOID

VON

PROF. DR. KARL HILLEBRAND

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 19. DEZEMBER 1912

Über die dynamische Theorie der ozeanischen Gezeiten sind in den letzten Dezennien sehr eingehende fundamentale Arbeiten erschienen. Es sind dies insbesondere die umfangreichen Arbeiten G. H. Darwin's, die in den »Proceedings of the Royal Society« und in der »Encyclopaedia Britannica« veröffentlicht wurden, ferner S. S. Hough's: »On the Application of Harmonic Analysis to the Dynamical Theorie of the Tides«, I & II, Lond. Phil. Trans. A. vol. 189 und 191, und die einschlägigen Kapitel in Poincaré's »Leçons de mécanique céleste«, t. III (Théorie des Marées).

Allen diesen Untersuchungen liegt die Annahme einer sphärischen Gleichgewichtsfigur zugrunde, eine Annahme, die streng genommen im Widerspruch steht mit der das Phänomen wesentlich mitbestimmenden Rotationsgeschwindigkeit. Durch die Berücksichtigung der entsprechenden strengen Gleichgewichtsfigur wird allerdings in den großen Zügen der theoretischen Darstellung wenig geändert und sie erscheint vielleicht um so weniger von wesentlicher Bedeutung, als ja doch der tatsächliche Verlauf der Gezeiten in überwiegender Weise durch die spezielle Konfiguration der Meeresbecken mitbestimmt wird, so zwar, daß er mit dem aus gewissen einfachen Voraussetzungen gewonnenen theoretischen Verlauf nur in den allgemeinsten Umrissen übereinstimmt.

Es muß aber doch die — auch in dieser Hinsicht — konsequente Einbeziehung der Rotationsgeschwindigkeit als eine immerhin einmal durchzuführende Ergänzung dieser Theorie um so mehr angesehen werden, als gewisse Komponenten der Gezeitenbewegung sich dabei etwas anders darstellen, insbesonder das eine Laplace'sche Theorem eine Modifikation erfährt. Außerdem ist die Annahme einer der Rotation entsprechenden Gleichgewichtsfigur, also im aktuellen Falle eines Maclaurin'schen Ellipsoides durchaus kein Umstand, der die harmonische Analysis in irgendeiner Weise schwieriger gestaltet, so daß eigentlich kein Anlaß vorliegt, von einer mechanisch völlig korrekten Annahme abzugehen. Es würde sogar bei einer noch allgemeineren Annahme — der einer ellipsoidischen Gleichgewichtsfigur überhaupt — der gleiche analytische Gang mit Zuhilfenahme der Lame'schen Funktionen möglich sein.

Die folgende Untersuchung soll sich auf den einzig aktuellen Fall eines Rotationsellipsoides beschränken.

Zugleich mit dieser Verallgemeinerung soll eine möglichst übersichtliche Darstellung der dynamischen Theorie der Gezeiten überhaupt gegeben werden und aus diesem Grunde auf numerische Details, soweit sie nicht die erwähnte Korrektur betreffen, verzichtet und bezüglich eingehenderer quantitativer Angaben auf die oben zitierten Fundamentalwerke verwiesen werden.

Noch soll Erwähnung finden, daß bei der Behandlung der beiden Hauptgleichungen wesentlich der von S. S. Hough eingeschlagene Weg verfolgt wurde und die Auflösungsmethode eine Verallgemeinerung der von ihm gegebenen ist.

1. Die Differentialgleichungen der Gezeitenbewegung.

Die rechtwinkligen Koordinaten eines Massenelementes der Flüssigkeitsschicht seien ξ, η, ζ, bezogen auf ein System, das unveränderlich mit dem festen Teil des Himmelskörpers verbunden ist. Dieser rotiere mit einer Winkelgeschwindigkeit ω, deren Komponenten nach den rechtwinkligen Axen p, q, r sein mögen.

Die Geschwindigkeitskomponenten des Flüssigkeitsteilchens sind dann

$$v_x = \xi' + q\,\zeta - r\,\eta$$
$$v_y = \eta' + r\,\xi - p\,\zeta$$
$$v_z = \zeta' + p\,\eta - q\,\xi$$

wo ξ', η', ζ' die Geschwindigkeiten relativ zum starren Körper sind.

Ebenso hat man für die Komponenten der Beschleunigung

$$u_x = v'_x + q\,v_z - r\,v_y$$
$$u_y = v'_y + r\,v_x - p\,v_z$$
$$u_z = v'_z + p\,v_y - q\,v_x.$$

Man kann für die folgenden Untersuchungen annehmen, daß die Rotationskomponenten konstante Größen sind, das heißt also von Rotationsstörungen und etwaiger Abweichung der instantanen Drehungsachse von der kleinsten Hauptträgheitsachse absehen.

Dann erhält man, wenn für den Augenblick

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

gesetzt wird

$$u_x = \xi'' + 2\,(q\,\zeta' - r\,\eta') + \omega\,p\,\rho\cos(\omega, \rho) - \omega^2\,\xi$$
$$u_y = \eta'' + 2\,(r\,\xi' - p\,\zeta') + \omega\,q\,\rho\cos(\omega, \rho) - \omega^2\,\eta$$
$$u_z = \zeta'' + 2\,(p\,\eta' - q\,\xi') + \omega\,r\,\rho\cos(\omega, \rho) - \omega^2\,\zeta.$$

ξ'' usw. sind die Beschleunigungen der relativen Bewegung, $2\,(q\,\zeta' - r\,\eta')$ usw. sind die Komponenten der Coriolis'schen Kraft und $\omega\,p\,\rho\cos(\omega, \rho) - \omega^2\,\xi$ usw. die negativen Komponenten der Zentrifugalkraft.

Das Potential der letzteren sei mit Ω bezeichnet.

Auf das Flüssigkeitsteilchen wirkt die Attraktion der Gesamtmasse des Himmelskörpers: des festen Teiles vermehrt um die der flüssigen Masse in der momentanen Konfiguration, das Potential derselben sei P; außerdem sei noch eine außerhalb gelegene Masse m_1, die als ausdehnungslos angenommen wird, vorhanden, deren Attraktion als störende Kraft mit dem Potential S dazutritt. Das Gesamtpotential ist dann

$$V = \Omega + P + S$$

so daß $\Omega + P = U$ das Potential der Schwere im betrachteten Punkt und

$$V = U + S$$

ist.

Setzt man die Flüssigkeit als inkompressibel und reibungslos voraus und ihre Dichte gleich der Einheit, so sind die hydrodynamischen Gleichungen:

$$\xi'' + 2\,(q\,\zeta' - r\,\eta') = \frac{\partial}{\partial x}\,(V-p)$$

und analoge für η'' und ζ''. p ist der hydrostatische Druck im betrachteten Punkt.

Im Problem der Gezeiten gibt man diesen Gleichungen eine etwas andere Form, die dadurch bedingt ist, daß die tatsächlichen Lagen der Punkte sich nur wenig von den Gleichgewichtslagen unterscheiden werden, das heißt jenen Lagen, die sie nur unter dem Einfluß von U und ohne Eigenschwingung annehmen würden.

Bezeichnet man die Koordinaten der Gleichgewichtslage mit x, y, z, die Abweichungen infolge der Gezeitenbewegung mit u, v, w, so daß

$$\xi = x + u, \quad \eta = y + v, \quad \zeta = z + w,$$

so lauten nun die Gleichungen

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\left(q\,\frac{d\,w}{d\,t} - r\,\frac{d\,v}{d\,t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\,(V-p).$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2\left(r\,\frac{d\,u}{d\,t} - p\,\frac{d\,w}{d\,t}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\,(V-p)$$

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + 2\left(p\,\frac{d\,v}{d\,t} - q\,\frac{d\,u}{d\,t}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\,(V-p).$$

Dazu kommen noch die Kontinuitätsgleichung und die Grenzbedingungen.

Bei der weiteren Behandlung dieser Gleichungen kann man sich sehr weitgehende Vereinfachungen erlauben, die beim Problem der Ebbe und Flut einer bedeckenden Flüssigkeitsschichte durchaus gerechtfertigt sind.

Vor allem kann man die Verschiebungskomponenten u, v, w, um deren Ermittlung es sich zunächst handelt, als kleine Größen betrachten, von denen nur erste Potenzen berücksichtigt werden sollen.

Daraus folgt in erster Linie, daß die Euler'sche und Lagrange'sche Betrachtungsweise identisch werden, weil sich beide um Größen zweiter Ordnung unterscheiden, wie aus

$$\frac{d\,u'}{dt} = \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial x}\,u' + \frac{\partial u'}{\partial y}\,v' + \frac{\partial u'}{\partial z}\,w'$$

unmittelbar hervorgeht.

Ferner können in der Störungsfunktion, die ja von derselben Ordnung wie die Deviationen ist, unmittelbar die Koordinaten der Gleichgewichtslagen eingeführt werden.

Was das Potential der Schwere U für ein Massenelement der deformierten Flüssigkeitsschichte anbelangt, so kann dasselbe mit der gleichen Annäherung durch folgende Betrachtung gefunden werden. Es sei U_0 sein Wert auf der ungestörten Oberfläche, deren Gleichung demnach

$$U_0 = \text{Konst.}$$

ist. Die vermöge der Gezeiten gestörte Oberfläche wird von dieser nur durch Abstände getrennt sein, die erster Ordnung sind. Denkt man sich von den Randpunkten eines Flächenelementes der Gleichgewichtsoberfläche Normalen bis zum Durchschnitt mit der wirklichen Oberfläche gezogen, so kann also dieses kleine Prisma nach der obigen Annahme wie ein Volumelement behandelt und die ganze Deformation kann durch das Hinzufügen dieser kleinen Massen gedacht werden, die positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem die Normalen nach außen oder innen gerichtet sind. Ist ζ die Höhe dieses kleinen

Prismas, so kann $\frac{\zeta}{2}$ als Ort seines Schwerpunktes und damit auch als Ort dieses Deformationselementes angesehen werden. Das Potential der Schwerkraft in einem solchen unterscheidet sich nun in zweierlei Weise von U_0: erstens geht es, wenn man nur die Verschiebung ζ dieses einen Elementes in Betracht zieht, offenbar in

$$U_0 + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_0 \zeta$$

über, wo die Ableitung die nach der Richtung der Normalen von U_0 bedeutet; dann tritt aber noch in dem Teil P von U die durch die Deformation verursachte Änderung der Attraktion, das ist also die Gesamtattraktion der Deformationselemente — unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens — dazu. Dieser Bestandteil von P ist demnach gegeben durch

$$k^2 \int \frac{\zeta do}{\Delta}$$

wo do ein Oberflächenelement, Δ seine Entfernung vom betrachteten Flüssigkeitsteilchen und das Integral über die ganze Gleichgewichtsoberfläche zu nehmen ist.

Bemerkt man weiter, daß $-\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_0$ nichts anderes als die Acceleration g der Schwere an der betreffenden Stelle der Fläche ist, U_0 aber eine Konstante, daher für die Potentialfunktion bedeutungslos ist, so hat man

$$U = -g\zeta + k^2 \int \frac{\zeta do}{\Delta}.$$

ζ ist die Strecke der Normalen der Gleichgewichtsoberfläche zwischen dieser und der freien Oberfläche, genügt daher der sich auf die gesamte Deformation beziehenden Kontinuitätsgleichung

$$\int \zeta do = 0$$

das Integral über die ganze Oberfläche genommen.

In den Bewegungsgleichungen hat man also zu setzen

$$V = -g\zeta + k^2 \int \frac{\zeta do}{\Delta} + S.$$

Die Unbekannten u, v, w sind Funktionen der Zeit und der Koordinaten x, y, z. Den ersteren Zusammenhang werden die Bewegungsgleichungen ergeben, den letzteren die Kontinuitätsgleichung und die Grenzbedingungen. Die Art des funktionellen Zusammenhanges mit der Zeit ist aber sofort angebbar.

Die linken Seiten der Gleichungen sind lineare Funktionen der Ableitungen nach der Zeit mit konstanten, nur von x, y, z abhängigen Koeffizienten, die rechtsstehende Funktion $U-p+S$ ist im ersten Teil $U-p$ eine lineare Funktion von u, v, w gemäß der hier festgesetzten Annäherung, mit ebensolchen Koeffizienten, S ist eine bekannte Funktion der x, y, z und der Zeit, welch letztere Abhängigkeit man als eine Exponentialreihe voraussetzen kann. Derartige Gleichungssysteme werden aber bekanntlich durch ebensolche Exponentialreihen integriert, so zwar, daß man ein partikuläres Lösungssystem in der Form voraussetzen kann:

$$u = u_0 e^{\lambda t}, \quad v = v_0 e^{\lambda t}, \quad w = w_0 e^{\lambda t}.$$

Die u_0, v_0, w_0 sind Funktionen der Gleichgewichtslage, also von x, y, z; λ ist entweder identisch mit dem Faktor t in einem Glied der Reihe S (erzwungene Schwingung) oder ergibt sich in ganz bestimmter Weise aus dem von S unabhängigen Teil des Integrals (freie Schwingung). Der letztere enthält die willkürlichen Konstanten.

Für ein derartiges partikuläres Integral hat man also

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \qquad \frac{d^2 u}{dt^2} = \lambda^2 u.$$

Setzt man $V - p = \lambda^2 \psi$, so müssen die gesuchten Größen als Funktion des Ortes sich durch die Ableitungen dieser Funktion ψ in der Weise bestimmen, daß

$$\lambda^2 u + 2\lambda (qw - rv) = \lambda^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\lambda^2 v + 2\lambda (ru - pw) = \lambda^2 \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\lambda^2 w + 2\lambda (pv - qu) = \lambda^2 \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Es ist also das Problem auf die Bestimmung einer einzigen Funktion ψ reduziert, die aus anderen Bedingungsgleichungen gewonnen werden muß. Es sind dies die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

und gewisse Grenzbedingungen: daß für die freie Oberfläche

$$p = \text{Konst.}$$

und für die festen Teile der Begrenzung die zu ihr normale Verschiebungskomponente Null ist.

2. Die Gleichungen für Flüssigkeitsschichten geringer Tiefe.

Dieser Fall, der einzig und allein bei den ozeanischen Gezeiten auf unserer Erde in Frage kommt, läßt eine gewisse Vereinfachung der hier auftretenden Relationen zu. Es soll angenommen werden, daß die im allgemeinen veränderliche Tiefe h der Flüssigkeitsschicht von der Größenordnung der Verschiebungen ist.

Das an sich ganz willkürliche Koordinatensystem werde nun so gewählt, daß die xy-Ebene parallel zur Tangentialebene an dem betrachteten Punkt der Gleichgewichtsoberfläche ist. Für die als eben anzunehmende Umgebung des Punktes auf der Fläche wird die kleine Größe h eine gewisse Funktion von x und y sein. (Bei der in Wirklichkeit ganz willkürlichen Veränderlichkeit von h kann es sich natürlich nur um den Verlauf gewisser Mittelwerte handeln.) Wenn nun h überall eine kleine Größe ist, so gilt dasselbe auch für das Fortschreiten dieses mittleren Wertes nach irgendeiner Richtung, das heißt für $\frac{\partial h}{\partial x}$ und $\frac{\partial h}{\partial y}$. Berücksichtigt man die Grenzbedingung für den Meeresgrund, vermöge welcher die normale Verschiebungskomponente Null sein muß, also

$$u_0 \frac{\partial h}{\partial x} + v_0 \frac{\partial h}{\partial y} + w_0 = 0,$$

so folgt daraus, daß die Komponente w_0 für die untere Begrenzung eine Größe zweiter Ordnung ist. Da die Änderung von w bis zur freien Oberfläche

$$(h + \zeta) \frac{\partial w}{\partial z}$$

der Voraussetzuug gemäß eine Größe derselben Ordnung ist, so kann die Komponente w überhaupt vernachlässigt werden, die dritte Bewegungsgleichung entfällt und die beiden anderen enthalten nur mehr die Rotationskomponente

$$r = \omega \cos \theta,$$

wo θ der Winkel der Normalen mit der Rotationsachse ist. Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - 2\,\omega \cos\theta \,\frac{dv}{dt} = \lambda^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2\,\omega \cos\theta \,\frac{du}{dt} = \lambda^2 \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

und man hat, dem obigen Resultat entsprechend,

$$u = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\,\omega^2 \cos\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{2\,\omega}{\lambda}\cos\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\right).$$

$$v = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\,\omega^2 \cos\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{2\,\omega}{\lambda}\cos\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).$$

In dieser Lösungsform ist also bereits eine der Grenzbedingungen enthalten.

Zur weiteren Behandlung der Aufgabe sollen für die Gleichgewichtsoberfläche krummlinige Gauß'sche Koordinaten μ und ν eingeführt werden, so daß die Gleichung dieser Fläche in der Form gegeben ist

$$x = f_1(\mu, \nu) \qquad y = f_2(\mu, \nu) \qquad z = f_3(\mu, \nu),$$

und zwar sollen die Größen zwei Scharen orthogonaler Trajektorien vorstellen, wonach ein Linienelement ds der Oberfläche ausgedrückt ist durch

$$ds = \sqrt{E d\mu^2 + G d\nu^2},$$

wo E und G die bekannten Gauß'schen Größen sind.

Alle in den Gleichungen vorkommenden abhängigen Veränderlichen können nun als Funktion dieser Koordinaten gedacht werden.

Die Komponenten u und v seien nun auch nach den durch μ und ν angegebenen Richtungen orientiert, dann ist

$$u = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\,\omega^2 \cos^2\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\sqrt{E}\,\partial\mu} + \frac{2\,\omega}{\lambda}\cos\theta\,\frac{\partial\psi}{\sqrt{G}\,\partial\nu}\right)$$

$$v = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\,\omega^2 \cos^2\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\sqrt{G}\,\partial\nu} - \frac{2\,\omega}{\lambda}\cos\theta\,\frac{\partial\psi}{\sqrt{E}\,\partial\mu}\right).$$

Die Kontinuitätsbedingung kann auf Grund der Kleinheit der Tiefe in folgender Weise formuliert werden: Es sei h die Höhe der ungestörten Flüssigkeitsschicht an einem bestimmten Punkt der Oberfläche. Betrachtet man den Raum eines unendlich dünnen rechtwinkeligen Prismas, dessen Grundlinien $\sqrt{E}d\mu$, $\sqrt{G}d\nu$ und die entsprechenden gegenüberliegenden Linienelemente sind und dessen Höhe h ist, so ist durch die Seitenfläche $\sqrt{E}d\mu h$ in einer bestimmten Zeit die Flüssigkeitsmenge $vh\sqrt{E}d\mu$ durchgegangen und durch die gegenüberliegende

$$vh\sqrt{E}d\mu + \frac{\partial}{\partial\nu}(vh\sqrt{E}d\mu)\,d\nu,$$

es resultiert also der Zuwachs

$$-\frac{\partial}{\partial\nu}(vh\sqrt{E})\,d\mu\,d\nu$$

und ebenso von dem darauf normalen Seitenflächenpaar

$$-\frac{\partial}{\partial\mu}(uh\sqrt{G})\,d\nu\,d\mu.$$

Diese Vermehrung des Flüssigkeitsquantums drückt sich aber in der Größe ζ, der Erhebung der freien Oberfläche über die ungestörte, aus und ist gegeben durch $\sqrt{EG}\zeta\, d\mu d\nu$; es ist daher

$$\frac{\partial}{\partial\mu}(uh\sqrt{G}) + \frac{\partial}{\partial\nu}(vh\sqrt{E}) = \sqrt{EG}\zeta$$

und das ist die Kontinuitätsgleichung für den Fall kleiner Tiefen. Führt man die Darstellung der Deformationen u und v durch die Funktion ψ ein und setzt

$$\frac{\lambda^2 h}{\lambda^2 + 4\omega^2\cos^2\theta} = h_1, \quad \cos\theta\,\frac{2\omega}{\lambda}\,h_1 = h_2,$$

so lautet die Kontinuitätsbedingung

$$\sqrt{EG}\zeta = \frac{\partial}{\partial\mu}\left(h_1\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial\nu}\left(h_1\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right) + \frac{\partial h_2}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \frac{\partial h_2}{\partial\nu}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\mu}.$$

Dazu kommt noch die Bedingung der freien Oberfläche

$$p = \text{Konst.}$$

oder

$$\lambda^2\psi = -g\zeta + k^2\int\frac{\zeta do}{\Delta} + S - \text{Konst.}$$

oder, da für ein Potential additive Konstante irrelevant sind,

$$\zeta = -\frac{\lambda^2\psi}{g} + \frac{k^2}{g}\int\frac{\zeta do}{\Delta} + \frac{1}{g}S.$$

Für S ist der der Größe λ entsprechende Term $Ce^{\lambda t}$ zu substituieren für die erzwungenen Schwingungen — C ist eine Funktion von μ und ν und den Bewegungselementen des störenden Körpers — oder es ist $S = 0$ und λ bezieht sich auf die freien Schwingungen. Im letzteren Falle ergibt sich λ aus einer bestimmten Bedingungsgleichung.

Aus der Kontinuitätsbedingung und der Bedingung der freien Oberfläche sind die einzelnen partikulären Integrale für ψ und ζ abzuleiten. Diese Größen sind — abgesehen von dem von der Zeit abhängigen Faktor—Funktionen des Ortes auf der Gleichgewichtsoberfläche, also gewisse Funktionen von μ und ν, und die Lösung wird sich durch den Umstand besonders übersichtlich gestalten, daß sich derartige Funktionen — wenigstens für die hier in Frage kommenden Gleichgewichtsfiguren — in Reihen gewisser Elementarfunktionen entwickeln lassen, deren Integraleigenschaften eine sehr einfache Bestimmung der Koeffizienten zur Folge haben. Für die Kugel sind dies die Kugelfunktionen und für Ellipsoide die Lame'schen Funktionen.

Da für das vorliegende Problem nur Maclaurin'sche Ellipsoide in Betracht kommen können, so sollen die weiteren Schritte zur Lösung desselben unter Zugrundelegung dieser speziellen Gleichgewichtsfigur durchgeführt werden.

3. Das Maclaurin'sche Ellipsoid.

Die hier vorausgesetzte Gleichgewichtsform sei also ein Rotationsellipsoid. Die Lage eines Punktes auf der Oberfläche sei durch die drei elliptischen Koordinaten

$$\rho, \quad \mu, \quad \varphi$$

gegeben, die im Falle eines Umdrehungskörpers auftreten, so daß der Punkt durch den Schnitt dreier sich orthogonal schneidender Flächen gegeben ist: des Rotationsellipsoides

$$\frac{x^2+y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

wo c die lineare Exzentrizität der Meridianellipse ist, des einschaligen Rotationshyperboloides, dessen Meridianschnitte mit dieser Ellipse konfokale Hyperbeln sind:

$$\frac{x^2+y^2}{\mu^2} - \frac{z^2}{c^2-\mu^2} = 1$$

und der durch den Winkel φ bestimmten Meridianebene. Führt man statt μ die elliptische Kugelkoordinate ϑ ein durch

$$\frac{\mu}{c} = \sin\vartheta,$$

wo also ϑ der halbe Öffnungswinkel des zum Hyperboloid gehörigen Asymptotenkegels ist, so sind die rechtwinkeligen Koordinaten dieses Punktes

$$x = \frac{\rho\mu}{c}\sin\varphi = \rho\sin\vartheta\sin\varphi$$

$$y = \frac{\rho\mu}{c}\cos\varphi = \rho\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$z = \frac{1}{c}\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2} = \sqrt{\rho^2-c^2}\cos\vartheta = \rho\cos\varepsilon\cos\vartheta,$$

wenn $\frac{c}{\rho} = \sin\varepsilon$, das heißt, ε der Exzentrizitätswinkel ist.

Daraus ergibt sich für das Linienelement ds der Ausdruck

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2\varepsilon}(1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta)\,d\rho^2 + \rho^2(1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta)\,d\vartheta^2 + \rho^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2,$$

also zerlegt nach den Komponenten in der Normalenrichtung und den beiden nach dem Meridian orientierten in der Tangentialebene.

Ist ferner θ der Winkel der Normalen mit der z-Achse, der hier mit dem Komplement der Polhöhe identifiziert werden kann, und r die geozentrische Distanz, so ist

$$\operatorname{tg}\theta = \cos\varepsilon\operatorname{tg}\vartheta \quad \text{und} \quad r = \rho\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\cos^2\vartheta}.$$

Soll das Ellipsoid bei der Winkelgeschwindigkeit ω eine Gleichgewichtsfigur sein, so muß

$$\omega^2 = \frac{3}{2}\,\frac{k^2M}{\rho^3}\cdot\frac{\varepsilon(3-2\sin^2\varepsilon)-3\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{\sin^3\varepsilon}$$

sein, wo k die Konstante der Gravitation und M die Masse des Himmelskörpers bedeutet.

Aus der diesem Werte entsprechenden Zentrifugalkraft und den bekannten Formeln für die Attraktionskomponenten der Rotationsellipsoide ergibt sich als Beschleunigung der Schwere auf der Oberfläche in einer Breite, die der Koordinate ϑ entspricht,

$$g = -\frac{3k^2M}{\rho^2}(\operatorname{tg}\varepsilon-\varepsilon)\frac{\cos\varepsilon}{\sin^3\varepsilon}\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}$$

oder, wenn man die Beschleunigung am Pol mit g_0 bezeichnet,

$$g = g_0\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}.$$

Was nun die oben erwähnten zur Lösung heranzuziehenden Entwicklungsfunktionen anbelangt, so sind diese für elliptische Koordinaten die Lame'schen Funktionen, die aber für Rotationsellipsoide in die bekannten Kugelfunktionen übergehen.

Die Lame'schen Funktionen genügen der Gleichung

$$\nabla^2 (f) = 0,$$

wo ∇^2 den Laplace'schen Operator

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

bedeutet, transformiert für das betreffende Koordinatensystem: ρ, μ, ν. Ist dieses orthogonal, so zwar, daß das Linienelement ds gegeben ist durch

$$ds^2 = \alpha^2 d\rho^2 + \beta^2 d\mu^2 + \gamma^2 d\nu^2$$

so ist der Operator bekanntlich

$$\nabla^2 = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\gamma\alpha}{\beta}\,\frac{\partial}{\partial\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\,\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\right].$$

Im Falle der allgemeinen elliptischen Koordinaten ist ein Punkt gegeben durch drei Flächen zweiten Grades

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

wo $\rho > c > \mu > b > \nu > 0$ ist. Die rechtwinkeligen Koordinaten sind dann

$$x = \frac{\rho\mu\nu}{bc},\; y = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Setzt man für den Moment

$$Q^2 = (\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)(\rho^2 - \nu^2)$$
$$A^2 = (\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)$$
$$B^2 = (\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)$$
$$C^2 = (b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)$$

so ist

$$\alpha = \frac{Q}{A\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

$$\beta = \frac{Q}{B\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}$$

$$\gamma = \frac{Q}{C\sqrt{\rho^2 - \mu^2}}$$

und die Laplace'sche Gleichung $\nabla^2 (f) = 0$ wird

$$\frac{\mu^2 - \nu^2}{BC}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(A\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{\rho^2 - \nu^2}{CA}\,\frac{\partial}{\partial\mu}\left(B\frac{\partial f}{\partial\mu}\right) + \frac{\rho^2 - \mu^2}{AB}\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left(C\frac{\partial f}{\partial\nu}\right) = 0.$$

Diese Gleichung wird aber bekanntlich durch die sogenannten Lame'schen Produkte befriedigt, das heißt durch

$$f = RMN$$

wo R nur von ρ, M nur von μ und N nur von ν abhängt und folgende Gleichungen befriedigt werden:

$$A\frac{\partial}{\partial\rho}\left(A\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)= \quad [n(n+1)\rho^2-K^2]R$$

$$B\frac{\partial}{\partial\mu}\left(B\frac{\partial M}{\partial\mu}\right)=-[n(n+1)\mu^2-K^2]M$$

$$C\frac{\partial}{\partial\nu}\left(C\frac{\partial N}{\partial\nu}\right)= \quad [n(n+1)\nu^2-K^2]N.$$

n ist eine ganze, positive Zahl und K kann so bestimmt werden, daß die betreffenden Größen ganze Funktionen $n$ten Grades ihrer Argumente sind.

$MN=\Lambda$ ist eine Lame'sche Flächenfunktion, die offenbar der Gleichung genügt

$$(\rho^2-\nu^2)B\frac{\partial}{\partial\mu}\left(B\frac{\partial\Lambda}{\partial\mu}\right)+(\rho^2-\mu^2)C\frac{\partial}{\partial\nu}\left(C\frac{\partial\Lambda}{\partial\nu}\right)=-\Lambda(\mu^2-\nu^2)[n(n+1)\rho^2-K^2].$$

Für das abgeplattete Rotationsellipsoid wird

$$b=\nu=0$$

und

$$\lim\frac{\nu}{b}=\sin\varphi,$$

daher

$$\lim\frac{d\nu}{C}=\frac{1}{c}\,d\varphi \quad \text{und} \quad \frac{d\mu}{B}=\frac{d\vartheta}{c\sin\vartheta}$$

und die obige Gleichung in Λ, wenn $K^2=\rho^2m^2\sin^2\varepsilon$ gesetzt wird,

$$\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Lambda}{\partial\vartheta}\right)+(1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta)\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\varphi^2}+\Lambda\sin^2\vartheta\,[n(n+1)-m^2\sin^2\varepsilon]=0.$$

Bezeichnet man den Operator

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}=\nabla$$

so ist

$$\nabla(\Lambda)=-[n(n+1)-m^2\sin^2\varepsilon]\Lambda.$$

Man sieht sofort, daß der letzten Gleichung genügt wird durch

$$\Lambda=Pe^{im\varphi},$$

wo P eine zugeordnete Kugelfunktion ist. Man erhält nach Substitution für P die Gleichung

$$\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial P}{\partial\vartheta}\right)+[n(n+1)\sin^2\vartheta-m^2]P=0,$$

das ist die Differentialgleichung der zugeordneten Funktion $P_m^{(n)}(\cos\vartheta)$. Es ist also bis auf konstante Faktoren

$$M=P_m^{(n)}(\cos\vartheta)=P_m^{(n)}\sqrt{1-\frac{\mu^2}{c^2}})$$

$$N=e^{im\varphi}.$$

Da R dieselbe Funktion von ρ ist wie M von μ, also

$$R=P_{m)}^{(n}\left(\sqrt{1-\frac{\rho^2}{c^2}}\right),$$

so ist die räumliche Lame'sche Funktion bis auf einen konstanten Faktor gleich

$$P_m^{(n)}\,(i\cot\varepsilon)\;P_m^{(n)}\,(\cos)\,\vartheta\;e^{im\varphi}.$$

Gewöhnlich wird der an sich willkürliche Faktor der Lame'schen Flächenfunktion Λ so bestimmt, daß in der bekannten Integralrelation

$$\int_{(\mathrm{Ell.})}\Lambda^2\,\frac{do}{\sqrt{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}}=\text{Konst.}$$

die rechts stehende Konstante der Einheit gleich wird.

Soll nun unter $P_m^{(n)}(x)$ die zugeordnete Kugelfunktion bezeichnet werden, wie sie in Heine's »Theorie der Kugelfunktionen« definiert wird:

$$P_m^{(n)}\,(x)=\frac{(n-m)!}{1.3.\ldots.(2n-1)}\,(x^2-1)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^m\,P_{(x)}^{(n)}}{dx^m}$$

$$=\frac{(n-m)!}{(2n)!}\,(x^2-1)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^{n+m}\,(x^2-1)^m}{dx^{n+m}}$$

so erhält man

$$\Lambda=\frac{i^m}{\sqrt{2\pi}}\,\sqrt{2n+1}\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{\sqrt{(n+m)!}\sqrt{(n-m)!}}\,P_m^{(n)}\,\cos\vartheta)\;e^{im\varphi}$$

Ist $P_{n,m}(x)$ die von F. Neumann definierte zugeordnete Kugelfunktion, das heißt

$$P_{n,m}\,(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^m\,P^{(n)}(x)}{dx^m}=i^m\,.\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{(n-m)!}\,P_m^{(n)}\,(x),$$

so ist

$$\Lambda=\sqrt{\frac{2n+1}{2\pi}}.\sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,P_{n,\,m}\,(\cos\vartheta)\;e^{im\varphi}.$$

In der Folge wird es notwendig sein, für die von ρ abhängigen Teile auch die Lame'schen, beziehungsweise Kugelfunktionen zweiter Art einzuführen; sie genügen denselben Differentialgleichungen und stehen mit den entsprechenden Funktionen der ersten Art in der Beziehung

$$S=(2n+1)\,R\int_\rho^\infty\frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-b^2)\,(\rho^2-c^2)}\,.\,R^2},$$

wo S die Funktion zweiter Art ist, die der Funktion erster Art R vom Grade n entspricht.

Zwischen beiden besteht die Relation

$$R\,\frac{dS}{d\rho}-S\,\frac{dR}{d\rho}=\frac{2n+1}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}.$$

Die entsprechenden Relationen für die zugeordneten Kugelfunktionen $Q_m^{(n)}(x)$ (nach der Heine'schen Definition) lauten

$$Q_m^{(n)}\,(x)=(2n+1)\,P_m^{(n)}\,(x)\int_x^\infty\frac{dx}{(1-x^2)(P_m^{(n)}(x))^2}$$

und

$$P_m^{(n)}\,(x)\,\frac{d\,Q_m^{(n)}(x)}{dx}-Q_m^{(n)}\,(x)\,\frac{d\,P_m^{(n)}\,(x)}{dx}=\frac{2\,n+1}{1-x^2}.$$

Nach der Neumann'schen Bezeichnungsweise ist

$$Q_{n,m}(x) = 2\, i^{3m} \cdot \frac{(n+m)!}{1 \cdot 3 \ldots (2n+1)}\, Q_m^{(n)}(x)$$

und die entsprechenden Relationen

$$Q_{n,m}(x) = 2\, \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\, P_{n,m}(x) \int_x^\infty \frac{dx}{(1-x^2)\,(P_{n,m}(x))^2}$$

$$P_{n,m}(x)\, \frac{d\,Q_{n,m}(x)}{dx} - Q_{n,m}(x)\, \frac{d\,P_{n,m}(x)}{dx} = 2\, \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \cdot \frac{1}{1-x^2}.$$

Um für das abgeplattete Rotationsellipsoid die Funktionen R und S zu finden, hat man in den beiden Arten der zugeordneten Funktionen

$$x = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{c^2}} = i \cot \varepsilon$$

zu setzen, so daß

$$\frac{dx}{1-x^2} = -\frac{c\,d\rho}{\rho\sqrt{c^2-\rho^2}} = -i\,d\,\varepsilon$$

und die Differentialbeziehung

$$P_m^{(n)}\, \frac{d\,Q_m^{(n)}}{d\varepsilon} - Q_m^{(n)}\, \frac{d\,P_m^{(n)}}{d\varepsilon} = -i\,(2n+1)$$

wird.

4. Die beiden Hauptgleichungen der Theorie der Gezeiten.

Vermöge der Darstellung der beiden Unbekannten u und v durch die Funktion ψ werden die Bewegungsgleichungen identisch befriedigt und es handelt sich nur darum, diese Funktion ψ und die noch weiter dazutretende unbekannte Störung ζ der Niveaufläche so zu bestimmen, daß der Kontinuitätsgleichung und der Oberflächenbedingung genügt wird. Vorausgesetzt ist in der oben angegebenen Form schon ein ganz bestimmter funktioneller Zusammenhang mit der Zeit, demgemäß die Verschiebungskomponenten sowohl als auch ψ und ζ nach Exponentialfunktionen $e^{\lambda t}$ entwickelt gedacht sind, die im Falle der erzwungenen Schwingungen den Gliedern in der Entwicklung der Störungsfunktion entsprechen, während im Falle der freien Schwingungen sich aus den Bedingungen des Systems die λ bestimmen lassen.

Da es sich bei den vorliegenden Betrachtungen nur um periodische Vorgänge handeln kann, so soll in der Folge $i\lambda$ statt λ eingeführt werden. Die in der Kontinuitätsgleichung vorkommenden Größen h_1 und h_2 sind dann

$$h_1 = \frac{h}{1 - \dfrac{4\,\omega^2}{\lambda^2} \cos^2 \theta}, \qquad h_2 = \frac{2\,\omega}{i\lambda} \cos\theta \,.\, h_1.$$

Da ferner für das Rotationsellipsoid

$$E = \rho^2\,(1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 \vartheta)\,, \qquad G = \rho^2 \sin^2 \vartheta$$

ist, so hat man als Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(h_1\, \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon \sin^2\vartheta}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(h_1\, \frac{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}}{\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)$$
$$+ \frac{2\,\omega}{i\lambda}\left(\frac{\partial\,(h_1 \cos\vartheta)}{\partial\vartheta} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \frac{\partial\,(h_1\cos\vartheta)}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) = \rho^2 \sin\vartheta \sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta} \,.\, \zeta$$

und als Bedingung der freien Oberfläche

$$-g_0 \sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}\,.\,\zeta - \lambda^2\psi + k^2\int\frac{\zeta\, do}{\Delta} + S = 0.$$

Die Lösung der Aufgabe wird nun dadurch bewerkstelligt, daß man sich die Unbekannten ψ und $\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}\,.\,\zeta$ als Funktionen des Ortes auf der Gleichgewichtsoberfläche entwickelt denkt nach den dem Rotationsellipsoid zugehörigen Flächenfunktionen $P_m^{(n)}(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$ und aus den beiden Bedingungsgleichungen die Koeffizienten dieser Entwicklung zu ermitteln sucht. Dann sind die Ableitungen unmittelbar aus der Natur dieser Entwicklungsfunktionen gegeben und die Lösung des Problems wird sich auf die Auflösung einer Serie endlicher Gleichungen in den Koeffizienten reduzieren.

Zunächst sieht man, daß für jedes dieser Glieder

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = im\psi, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = -m^2\psi$$

ist.

Es soll nun weiter die Annahme gemacht werden, daß die Tiefe der ungestörten Wasserschichte eine zonale Funktion ist, so wie es bei völlig exakten Niveauschichten der Fall wäre, und Abweichungen davon einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben; dann ist h_1 nur von ϑ abhängig und die Kontinuitätsgleichung nimmt die Form an

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{h_1\sin\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) - \frac{h_1\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}}{\sin\vartheta}\, m^2\psi + \frac{2\omega}{\lambda}\, m\psi\,\frac{\partial(h_1\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}$$
$$= \rho^2\sin\vartheta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}\,.\,\zeta.$$

Dieser Gleichung kann man eine etwas andere Gestalt geben, die für gewisse einfache Annahmen eine besonders leichte Behandlung gestattet.

Setzt man der Kürze halber

$$\frac{2\omega}{\lambda} = \sigma,$$

so daß

$$h_1 = \frac{h}{1-\sigma^2\cos^2\theta}$$

führt statt dieser Größen h ein

$$H = \frac{h}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}}, \qquad H_1 = \frac{h_1}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}}$$

und bezeichnet mit dem Operator

$$D = -\sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\vartheta},$$

so erhält man nach einigen leichten Transformationen für die Kontinuitätsbedingung schließlich die folgende Gleichung

$$(D+\sigma m\cos\vartheta)\,[H_1(D-\sigma m\cos\vartheta)\,\psi] - H(1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta)\, m^2\psi$$
$$= \rho^2\sin^2\vartheta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}\,.\,\zeta.$$

Was ferner die Bedingung der freien Oberfläche anbelangt, so kann zunächst das darin vorkommende Integral

$$\int\frac{\zeta\, do}{\Delta} = \Pi$$

durch die Entwicklungskoeffizienten von $\zeta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}$ selbst erhalten werden: es ist ja nichts anderes als das Potential einer unendlich dünnen Schicht ζ auf einen ihrer Punkte und als solches eine bestimmte Funktion des Ortes auf der Oberfläche des Rotationsellipsoides, kann also wieder nach Kugelflächenfunktion ϑ und φ entwickelt gedacht werden, und zwar soll das in der Form geschehen

$$\Pi = \Sigma \alpha_m^{(n)} i P_m^{(n)} \left(\sqrt{1-\frac{\rho_0^2}{c^2}}\right) Q_m^{(n)} \left(\sqrt{1-\frac{\rho_0^2}{c^2}}\right) P_m^{(n)}(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi},$$

wo für den Moment der Äquatorhalbmesser der ellipsoidischen Schicht ρ_0 gesetzt wird, zum Unterschied von einem veränderlichen ρ.

Dann ist das Potential dieser Schichte auf einen außerhalb gelegenen Punkt mit den elliptischen Koordinaten $\rho > \rho_0$, ϑ, φ

$$\Pi_a = \Sigma \alpha_m^{(n)} i P_m^{(n)} \left(\sqrt{1-\frac{\rho_0^2}{c^2}}\right) Q_m^{(n)} \left(\sqrt{1-\frac{\rho^2}{c^2}}\right) P_m^{(n)}(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$

und das Potential auf einen inneren Punkt $\rho < \rho_0, \vartheta, \varphi$

$$\Pi_i = \Sigma \alpha_m^{(n)} i P_m^{(n)} \left(\sqrt{1-\frac{\rho_0^2}{c^2}}\right) Q_m^{(n)} \left(\sqrt{1-\frac{\rho_0^2}{c^2}}\right) P_m^{(n)}(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi},$$

denn die Reihen konvergieren zugleich mit Π, genügen der Laplace'schen Gleichung $\nabla^2 = 0$ und nehmen auf der Oberfläche selbst die vorgeschriebenen Werte an, stellen also nach dem Dirichlet'schen Prinzip tatsächlich das äußere und innere Potential der Schicht dar.

Die Koeffizienten α sind offenbar reelle Größen. Nach der Heine'schen Definition der zugeordneten Funktionen ist

$$P_m^{(n)}(i\cot\varepsilon) = i_n R_m^{(n)}, \qquad Q_m^{(n)}(i\cot\varepsilon) = \frac{1}{i^{n+1}} S_m^{(n)},$$

wo

$$R_m^{(n)} = \frac{\cos^{n-m}\varepsilon}{\sin^{n}\varepsilon}\left\{1+\frac{(n-m)(n-m-1)}{2.(2n-1)}\operatorname{tg}^2\varepsilon+\frac{(n-m)\ldots(n-m-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\operatorname{tg}^4\varepsilon+\ldots\right\}$$

$$S_m^{(n)} = \frac{\sin^{n+1}\varepsilon}{\cos^{n+m+1}\varepsilon}\left\{1-\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{2.(2n+3)}\operatorname{tg}^2\varepsilon+\frac{(n+m+1)\ldots(n+m+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)}\operatorname{tg}^4\varepsilon-\ldots\right\}.$$

Es besteht dann nach der obigen Relation für die beiden Arten der zugeordneten Funktionen die Gleichung

$$R_m^{(n)}\frac{\partial S_m^{(n)}}{\partial\varepsilon} - S_m^{(n)}\frac{\partial R_m^{(n)}}{\partial\varepsilon} = 2n+1$$

und

$$\Pi = \Sigma \alpha_m^{(n)} R_{m,0}^{(n)} S_{m,0}^{(n)} P_m^{(n)}(\cos\vartheta) e^{im\varphi}$$

$$\Pi_a = \Sigma \alpha_m^{(n)} R_{m,0}^{(n)} S_m^{(n)} P_m^{(n)}(\cos\vartheta) e^{im\varphi}$$

$$\Pi_i = \Sigma \alpha_m^{(n)} R_m^{(n)} S_{m,0}^{(n)} P_m^{(n)}(\cos\vartheta) e^{im\varphi},$$

wo der zweite untere Index 0 bedeutet, daß das Argument für ρ_0 zu nehmen ist.

Ist weiter s_0 die Dichte der Flüssigkeitsschicht und betrachtet man ζ konsequent als kleine Größe, so kann die zu Π gehörige Flüssigkeitsmenge als unendlich dünne Schicht mit der Dichte $s_0\zeta$ angesehen werden und dann ist nach einem bekannten Theorem

$$\lim\left(\frac{d\Pi_a}{dn}-\frac{d\Pi_i}{dn}\right)=-4\pi s_0\,\zeta,$$

wo die Ableitungen nach der nach aussen gerichteten Flächennormale zu nehmen sind. Aus dem Ausdruck für das Linienelement in elliptischen Koordinaten folgt aber

$$dn=\frac{1}{\cos\varepsilon}\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\,\sin^2\vartheta}\;d\rho$$

demnach

$$-4\pi s_0\zeta=\frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon_0\sin^2\vartheta}}\lim\left(\frac{d\Pi_a}{d\rho}-\frac{d\Pi_i}{d\rho}\right)_{\rho=\rho_0}$$

und wegen

$$\frac{d\rho}{\rho}=-\cot\varepsilon\,d\varepsilon$$

$$4\pi s_0\zeta=\frac{1}{\rho_0}\frac{\sin\varepsilon_0}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon_0\sin^2\vartheta}}\,\Sigma\alpha_m^{(n)}\left(R_m^{(n)}\frac{\partial S_m^{(n)}}{\partial\varepsilon}-S_m^{(n)}\frac{\partial R_m^{(n)}}{\partial\varepsilon}\right)P_m^{(n)}(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi}$$

und infolge der obigen Relation, wenn wieder ρ für ρ_0 gesetzt wird,

$$s_0\zeta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}=\frac{\sin\varepsilon}{4\pi\rho}\,\Sigma(2n+1)\,\alpha_m^{(n)}P_m^{(n)}\cos\vartheta)\,e^{im\varphi}$$

woraus hervorgeht, daß sich die Koeffizienten der Entwicklung des Potentiales Π unmittelbar durch die der Reihe für

$$\zeta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}$$

ausdrücken lassen. Ist die Entwicklung für letztere Größe gegeben durch

$$\zeta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}=\Sigma A_m^{(n)}P_m^{(n)}(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi},$$

so erhält man für dieses Potential

$$\Pi=\rho s_0\sum\frac{4\pi}{2n+1}\,\frac{1}{\sin\varepsilon}\,A_m^{(n)}R_m^{(n)}S_m^{(n)}P_m^{(n)}(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi}.$$

Die Bedingung der freien Oberfläche ist demnach

$$-g_0\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}\,.\,\zeta-\lambda^2\psi+k^2\Pi+S=0$$

und gibt zusammen mit der Kontinuitätsgleichung die Lösung des Problems, die also darin bestehen wird, die Koeffizienten der Entwicklung der beiden Unbekannten ζ und ψ nach Kugelflächenfunktionen von ϑ und φ zu bestimmen.

Denkt man sich also — immer für ein bestimmtes λ und abgesehen von dem Faktor $e^{i\lambda t}$ —

$$\zeta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}=\Sigma A_m^{(n)}P_m^{(n)}(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi}$$

daher

$$\Pi=\Sigma p_m^{(n)}A_m^{(n)}P_m^{(n)}(\cos\vartheta)e^{im\varphi},$$

wo

$$p_m^{(n)}=\frac{4\pi}{2n+1}\cdot\frac{\rho s_0}{\sin\varepsilon}\,R_m^{(n)}S_m^{(n)},$$

also eine bekannte Funktion von ε ist, ferner

$$\psi = \Sigma \Gamma_m^{(n)} P_m^{(n)} (\cos \vartheta)\, e^{i m \varphi},$$

so wird es sich um die Ermittlung der Größen $A_m^{(n)}$ und $\Gamma_m^{(n)}$ handeln. Setzt man den zu λ gehörigen Teil der Störungsfunktion S ebenso entwickelt voraus, also

$$S = \Sigma\, C_m^{(n)} P_m^{(n)} (\cos \vartheta)\, e^{i m \varphi},$$

wo die $C_m^{(n)}$ bekannte Größen, im Fall der freien Schwingung gleich Null sind, so müssen nach einer bekannten Eigenschaft dieser Entwicklungsfunktionen nach Substitution in die beiden Gleichungen die Faktoren derselben Kugelfunktion indentisch verschwinden, eine Bedingung, die eine Serie von Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten $A_m^{(n)}$ und $\Gamma_m^{(n)}$ ergibt.

5. Methode der Lösung für den Fall einer zonalen Tiefenfunktion.

Nach dem eben angegebenen Lösungsvorgang erhält man aus der Bedingung der freien Oberfläche die die eine Serie von Bestimmungsgleichungen repräsentierende Relation

$$(g_0 - k^2 p_m^{(n)})\, A_m^{(n)} + \lambda^2 \Gamma_m^{(n)} = + C_m^{(n)}.$$

Weniger einfach gestalten sich die aus der Kontinuitätsgleichung folgenden Bedingungsgleichungen.

Das Nullsetzen der Koeffizienten der linken Seite der Gleichung wird dadurch bedingt, daß die totale Funktion, die diese bildet, nach Kugelfunktionen entwickelt ist. Nun kommen hier die Größen ψ und $\zeta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon \sin^2\vartheta}$, für welche diese Entwicklung supponiert wurde, in Verbindung mit gewissen Funktionen von ϑ und mit dem Operator D vor.

Es sind also zunächst diese Verbindungen der in ψ und $\zeta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}$ auftretenden Kugelfunktionen wieder durch solche Funktionen auszudrücken. Das ist tatsächlich möglich. Aus der bekannten Formel für die zugeordneten Funktionen

$$(1-x^2)\,\frac{dP_m^{(n)}(x)}{dx} + n P_m^{(n+1)}(x) - \frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)}\,(n+1)\, P_m^{(n-1)}(x) = 0$$

folgt unmittelbar, daß

$$D\,(P_m^{(n)}(\cos\vartheta)) = -n\, P_m^{(n+1)}(\cos\vartheta) + \frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)}\,(n+1)\, P_m^{(n+1)}(\cos\vartheta).$$

(Die Heine'sche Definition vorausgesetzt.)

Ferner folgt aus der Rekursionsformel

$$x P_m^{(n)}(x) = P_m^{(n+1)}(x) + \frac{(n-m)(n+m)}{(2n+1)(2n-1)}\, P_m^{(n-1)}(x)$$

und deren wiederholter Anwendung, daß jedes Produkt

$$\cos^k\vartheta \,.\, P_m^{(n)}(\cos\vartheta)$$

sich ausdrücken läßt durch

$$P_m^{(n+k)},\ P_m^{(n+k-2)}, \ldots .\, P_m^{(n-k)},$$

wenn $k \leqq n$, respektive durch

$$P_m^{(n+k)},\ P_m^{(n+k-2)}, \ldots .\, P_m^{(0)},$$

wenn $k > n$ ist.

Denkt man sich das Tiefengesetz in einer Potenzreihe nach $\cos\vartheta$ hergestellt, so wird man die Kontinuitätsgleichung in Kugelfunktionen mit konstanten Koeffizienten auflösen und so die Bedingungsgleichungen für diese erhalten können. Es werden dies Relationen zwischen einer endlichen Anzahl von Koeffizienten $A_m^{(n)}$ und $\Gamma_m^{(n)}$ sein, mit gleichem unteren Index m und gewissen Reihen aufeinanderfolgender oberer Indizes.

Es hat nun keinen Zweck, diesen allgemeinen Fall weiter zu verfolgen, der ja auf ganz willkürliche Konfigurationen Bezug nehmen müßte; man wird, um allgemein gültige Näherungen zu erhalten, einen gewissen mittleren Verlauf der Tiefe nach der geographischen Breite annehmen, für welchen die Lösung sich wesentlich einfacher gestalten wird.

Es sei hier nur noch ein Laplace'sches Theorem erwähnt, das sich, wie Poincaré bei dem einfacheren Fall der sphärischen Gleichgewichtsoberfläche bemerkt hat, unmittelbar aus dem Anblick dieser Lösungsform ergibt.

Aus dem ganzen Vorgang der Lösung ist ersichtlich, daß, wenn es sich um erzwungene Schwingungen handelt, jedem Glied der Störungsfunktion, das $e^{im\varphi}\,e^{i\lambda t}$ als Faktor enthält, ein Glied mit dem gleichen Faktor im Ausdrucke für ψ und $\zeta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}$ entspricht. Der übrige Faktor ist eine gewisse durch die $P_m^{(n)}$ (m Konst.) ausgedrückte Funktion von ϑ, deren Koeffizienten sich eben aus dem Gleichungssystem bestimmen, die aus den beiden Hauptgleichungen erhalten wurden und daher so wie diese nur reelle Größen enthalten; es werden also auch die zu ermittelnden Koeffizienten entweder reelle oder paarweise konjugierte Größen sein und — wenigstens in ihrer Vereinigung — keinen Faktor von der Form e^{ik} liefern, wo k irgendeine Konstante bedeutet; das heißt aber nichts anderes als daß die entsprechenden Glieder der Gezeitenbewegung dieselbe Phase besitzen wie die störenden Kräfte. Das ist der Inhalt des einen Laplace'schen Theorems, welches besagt, daß keine Flutverzögerung eintritt, wenn die Tiefe der Flüssigkeitsschicht nur eine Funktion der Breite ist.

6. Lösung für eine exakte Niveauschichte.

Setzt man — was bisher immer stillschweigend getan wurde — eine vollständige Bedeckung des festen Himmelskörpers mit der Flüssigkeitsschichte voraus, so wird man gewisse mittlere Verhältnisse erhalten, wenn man die Unregelmäßigkeiten der festen Oberfläche vernachlässigt, demnach ein solches Tiefengesetz annimmt, wie es stattfinden muß, wenn die Flüssigkeitsschichte zwischen zwei unendlich benachbarten Niveauflächen eingeschlossen ist: Aus der Beziehung zwischen dem Element der Flächennormale und dem Inkrement des Potentialwertes der Schwerkraft auf der Oberfläche folgt, daß die Tiefe umgekehrt proportional der Beschleunigung der Schwere sein muß, also

$$h = \frac{h_0}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}},$$

wo h_0 eine Konstante ist, eine Annahme die der konstanten Tiefe bei sphärischer Gleichgewichtsoberfläche äquivalent ist. Es nimmt dann die Kontinuitätsbedingung eine wesentlich einfachere Gestalt an. Sie wird am leichtesten durch eine Transformation erhalten, die eine Verallgemeinerung einer von S. S. Hough in der eingangs zitierten Abhandlung »On the Application of Harmonic Analysis to the Dynamical Theory of Tides«, Part. II, Phil. Trans. A., vol. 191, angegebenen Umformung dieser Gleichung für eine sphärische Oberfläche ist.

Substituiert man für ψ zwei neue unbekannte Funktionen ψ_1 und ψ_2 vermöge der zwei Relationen

$$\psi = (D+\sigma m\cos\vartheta)\,\psi_1 + (1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta)\,(1-\sigma^2\cos^2\theta)\,\psi_2,$$

$$\sin^2\vartheta\,(\nabla+\sigma m)\,\psi_1 = -\psi_2\,D\,[(1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta)\,(1-\sigma^2\cos^2\theta)],$$

wo ∇ der in Nummer 3 definierte Operator ist und die zweite Gleichung mit Berücksichtigung der Bedeutung von D auch

$$(\nabla + \sigma m)\,\psi_1 = -\,2\cos\vartheta\,(\sin^2\varepsilon - \sigma^2)\,\psi_2$$

geschrieben werden kann, so nimmt die Kontinuitätsgleichung die Form an

$$\begin{aligned}(D + \sigma m\cos\vartheta)\{H(1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta)\,[m^2\psi_1 + (D - \sigma m\cos\vartheta)\,\psi_2[\}\\ - H.(1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta)\,m^2\,[(D+\sigma m\cos\vartheta)\,\psi_1 + (1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta)(1-\sigma^2\cos^2\theta)\,\psi_2]\\ = \rho^2\zeta\sin^2\vartheta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}.\end{aligned}$$

Macht man die Annahme, daß

$$H(1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta) = h_0$$

einer Konstanten gleich ist, so fällt ψ_1 aus der Gleichung heraus und die Kontinuitätsbedingung reduziert sich auf

$$h_0\,(\nabla - \sigma m)\,\psi_2 = \zeta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}.$$

Die obige Annahme ist aber nichts anderes als

$$h = \frac{h_0}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}},$$

das heißt, jener Verlauf der Tiefe, der stattfindet, wenn auch die feste Oberfläche eine Niveaufläche ist.

Zur Lösung des Problems hat man jetzt vier Gleichungen in den vier unbekannten Funktionen ζ, ψ, ψ_1 und ψ_2.

Berücksichtigt man in der Darstellung von ψ durch ψ_1 und ψ_2, daß

$$\cos\theta = \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}},$$

so lauten diese

$$\begin{aligned}-g_0\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}.\zeta - \lambda^2\psi + k^2\Pi + S = 0\\ h_0\,(\nabla - \sigma m)\,\psi_2 = \rho^2\zeta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}\\ (\nabla + \sigma m)\,\psi_1 = -\,2\cos\vartheta\,(\sin^2\varepsilon - \sigma^2)\,\psi_2\\ \psi = (D + \sigma m\cos\vartheta)\,\psi_1 + [\cos^2\varepsilon + (\sin^2\varepsilon - \sigma^2)\cos^2\vartheta]\psi_2,\end{aligned}$$

oder

$$\psi = (D + \sigma m\cos\vartheta)\,\psi_1 - \frac{1}{2}\cos\vartheta\,(\nabla + \sigma m)\,\psi_1 + \cos^2\varepsilon.\psi_2.$$

Die Lösung geschieht nun so, daß man auch für die Hilfsfunktionen ψ_1 und ψ_2 eine Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen voraussetzt, im ganzen also vier Reihen von Koeffizienten aus den vier jetzt wesentlich einfacheren Gleichungen zu bestimmen hat, und zwar sollen hier die Neumann'schen Zugeordneten eingeführt werden, die eine bessere Symmetrie in den einzelnen Relationen ergeben. Für diese lautet die hier benützte Rekursionsformel

$$(2n+1)\cos\vartheta\,P_{n,m}(\cos\vartheta) = (n-m+1)\,P_{n+1,m}(\cos\vartheta) + (n+m)\,P_{n-1,m}(\cos\vartheta)$$

und

$$(2n+1)\,D[P_{n,m}(\cos\vartheta)] = -\,n\,(n-m+1)\,P_{n+1,m}(\cos\vartheta) + (n-1)\,(n+m)\,P_{n-1,m}(\cos\vartheta).$$

Es sei also der Faktor von

$$e^{i\lambda t}\,e^{im\varphi}$$

in

$$\zeta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta} : \Sigma A_{n,m} P_{n,m}(\cos\vartheta)$$

daher in

$$\Pi : \Sigma p_m^{(n)} A_{n,m} P_{n,m}(\cos\vartheta)$$
$$\psi : \Sigma\Gamma_{n,m} P_{n,m}(\cos\vartheta)$$
$$\psi_1 : \Sigma\alpha_{n,m} P_{n,m}(\cos\vartheta)$$
$$\psi_2 : \Sigma\beta_{n,m} P_{n,m}(\cos\vartheta)$$
$$S : \Sigma C_{n,m} P_{n,m}(\cos\vartheta).$$

Führt man diese Reihenentwicklungen in die vier Gleichungen ein, berücksichtigt außer den obigen Rekursionsformeln noch, daß

$$\nabla[P_{n,m}(\cos\vartheta)] = -[n(n+1)-m^2\sin^2\varepsilon]\, P_{n,m}(\cos\vartheta)$$

und setzt die Koeffizienten der einzelnen Kugelfunktionen gleich Null, so erhält man die folgenden Rekursionsformeln in den zu ermittelnden Größen A, Γ, α, β, wobei der Einfachheit halber der allen gemeinsame Index m vorläufig nicht eigens angemerkt werden soll:

$$(g_0-k^2p^{(n)})\, A_n + \lambda^2\Gamma_n = C_n$$

$$h_0\,[-n(n+1)+m^2\sin^2\varepsilon-\sigma m]\,\beta_n = A_n\rho^2$$

$$[-n(n+1)+m^2\sin^2\varepsilon+\sigma m]\,\alpha_n = 2(\sigma^2-\sin^2\varepsilon)\left(\frac{n-m}{2n-1}\beta_{n-1}+\frac{n+m+1}{2n+3}\beta_{n+1}\right)$$

$$\Gamma_n = \cos^2\varepsilon\,.\,\beta_n + \frac{1}{2}\alpha_{n-1}\frac{n-m}{2n-1}[(n-1)(n-2)-m^2\sin^2\varepsilon+\sigma m]$$
$$+\frac{1}{2}\alpha_{n+1}\frac{n+m+1}{2n+3}[(n+2)(n+3)-m^2\sin^2\varepsilon+\sigma m].$$

Durch Elimination der α, β und Γ erhält man für die A die folgende Rekursionsformel

$$\frac{\lambda^2\rho^2}{h_0}(\sigma^2-\sin^2\varepsilon)\,\frac{(n-m-1)(n-m)}{(2n-3)(2n-1)}\cdot\frac{A_{n-2}}{(n-1)n-\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon}+$$
$$+A_n\left\{g_0-k^2p^{(n)}-\frac{\lambda^2\rho^2}{h_0}\cdot\frac{\cos^2\varepsilon}{n(n+1)-\sigma m+m^2\sin^2\varepsilon}+\right.$$
$$+\frac{\lambda^2\rho^2}{h_0}\cdot\frac{\sigma^2-\sin^2\varepsilon}{n(n+1)-\sigma m+m^2\sin^2\varepsilon}\left[\frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{(n-2)(n-1)+\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon}{(n-1)n-\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{(n+2)(n+3)+\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon}{(n+1)(n+2)-\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon}\right]\right\}+$$
$$+\frac{\lambda^2\rho^2}{h_0}(\sigma^2-\sin^2\varepsilon)\,.\,\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+3)(2n+5)}\cdot\frac{A_{n+2}}{(n+1)(n+2)-\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon} = \begin{cases}+C_n\\ 0\end{cases}.$$

Führt man folgende Bezeichnungen ein

$$a_n = \frac{\lambda^2\rho^2}{h_0}(\sigma^2-\sin^2\varepsilon)\,\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)-\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon}$$

$$c_n = \frac{\lambda^2 \rho^2}{h_0} (\sigma^2 - \sin^2 \varepsilon) \frac{(n+m-1)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{1}{(n-1)\, n - \sigma m - m^2 \sin^2 \varepsilon}$$

$$b_n = g_n + B_n,$$

wo

$$g_n = g_0 - k^2 p^{(n)}$$

und

$$B_n = \frac{\lambda^2 \rho^2}{h_0} \cdot \frac{1}{n(n+1) + \sigma m - m^2 \sin^2 \varepsilon} \Bigg\{ -\cos^2 \varepsilon +$$

$$+ (\sigma^2 - \sin^2 \varepsilon) \left[\frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{(n-1)(n-2) + \sigma m - m^2 \sin^2 \varepsilon}{(n-1)\, n - m\sigma - m^2 \sin^2 \varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{(n+2)(n+3) + \sigma m - m^2 \sin^2 \varepsilon}{(n+1)(n+2) - \sigma m - m^2 \sin^2 \varepsilon} \right] \Bigg\},$$

so lautet die Rekursionsformel

$$a_{n-2} A_{n-2} + b_n A_n + c_{n+2} A_{n+2} = \begin{cases} C_n \\ 0 \end{cases}.$$

Dabei ist aber zu bemerken, daß wegen

$$P_{n,m} (\cos \vartheta) = 0 \text{ für } n < m$$

diese Formel überhaupt nur für $n \gtreqless m$ gilt und in den ersten beiden Fällen $n = m$ und $n = m + 1$

$$A_{m-2} = A_{m-1} = 0$$

zu setzen ist.

Aus der Bedeutung von ζ folgt ferner wegen der Unveränderlichkeit der Quantität der deformierten Masse, daß

$$\int \zeta \, do = 0$$

sein muß, wenn das Integral über die ganze Oberfläche ausgedehnt wird (immer vollständige Bedeckung mit der Flüssigkeitsschicht vorausgesetzt), das heißt also,

$$\int \int \zeta \sin \vartheta \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 \vartheta} \,.\, d\vartheta \, d\varphi = 0$$

oder

$$\int \int \Sigma A_{n,m} P_{n,m} (\cos \vartheta) \, e^{im\varphi} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 0.$$

Da vermöge der bekannten Eigenschaften der Kugelfunktionen diese Gleichung durch jedes Glied der Summe für sich erfüllt ist, außer für $m = n = 0$, so muß

$$A_{0,0} = 0$$

sein.

Man kann übrigens dem Koeffizienten B_n eine etwas andere Form geben, die die Behandlungsweise der Bedingungsgleichungen erleichtert.

Zerlegt man die von σ abhängigen Teile in Partialbrüche, setzt man

$$\frac{(n-1)(n-2) - m^2 \sin^2 \varepsilon + \sigma m}{[n(n+1) - m^2 \sin^2 \varepsilon + \sigma m]\,[(n-1)\, n - m^2 \sin^2 \varepsilon - \sigma m]} =$$

$$= \frac{1}{\text{[illegible]}} \left[- \frac{2n-1}{n(n+1) - m^2 \sin^2 \varepsilon + \sigma m} + \frac{(n-1)^2 - m^2 \sin^2 \varepsilon}{(n-1)\, n - m^2 \sin^2 \varepsilon - \sigma m} \right]$$

und

$$\frac{(n+2)(n+3)-m^2\sin^2\varepsilon+\sigma m}{[n(n+1)-m^2\sin^2\varepsilon+\sigma m][(n+1)(n+2)-m^2\sin^2\varepsilon-\sigma m]} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2-m^2\sin^2\varepsilon}\left[\frac{2n+3}{n(n+1)-m^2\sin^2\varepsilon+\sigma m}+\frac{(n+2)^2-m^2\sin^2\varepsilon}{(n+1)(n+2)-m^2\sin^2\varepsilon-\sigma m}\right],$$

so erhält man

$$B_n = -\frac{\lambda^2\rho^2\cos^2\varepsilon}{h_0}\cdot\frac{n(n+1)-\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon}{[(n+1)^2-m^2\sin^2\varepsilon][n^2-m^2\sin^2\varepsilon]}+$$

$$+\lambda^2\rho^2.\frac{\sigma^2-\sin^2\varepsilon}{h_0}\left\{\frac{(n-m)(n+m)[(n-1)^2-m^2\sin^2\varepsilon]}{(2n-1)(2n+1)(n^2-m^2\sin^2\varepsilon)[(n-1)n-\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon]}+\right.$$

$$\left.+\frac{(n-m+1)(n+m+1)([n+2)^2-m^2\sin^2\varepsilon]}{(2n+1)(2n+3)[(n+1)^2-m^2\sin^2\varepsilon][(n+1)(n+2)-\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon]}\right\}.$$

Es soll hier noch eine Umformung angegeben werden, die sich besonders bei der Ermittlung der erzwungenen Schwingungen, also bei gegebenen λ als vorteilhaft erweist. Die Gleichung

$$a_{n-2}A_{n-2}+b_nA_n+c_{n+2}A_{n+2}=C_n$$

kann nach Substitution der angegebenem Werte für die a, b und c auch geschrieben werden

$$\frac{n-m}{(2n-1)[(n-1)n-\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon]}\left\{\frac{n-m-1}{2n-3}A_{n-2}+\frac{(n+m)[(n-1)^2-m^2\sin^2\varepsilon]}{(2n+1)[n^2-m^2\sin^2\varepsilon]}A_n\right\}+$$

$$+\frac{1}{\sigma^2-\sin^2\varepsilon}\left\{g_n\frac{h_0}{\lambda^2\rho^2}-\cos^2\varepsilon.\frac{n(n+1)-\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon}{[(n+1)^2-m^2\sin^2\varepsilon][n^2-m^2\sin^2\varepsilon]}\right\}A_n+$$

$$+\frac{n+m+1}{(2n+3)[(n+1)(n+2)-\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon]}\left\{\frac{n+m+2}{2n+5}A_{n+2}+\frac{(n-m+1)[(n+2)^2-m^2\sin^2\varepsilon]}{(2n+1)[(n+1)^2-m^2\sin^2\varepsilon]}A_n\right\}$$

$$=\frac{h_0}{\lambda^2\rho^2}\cdot\frac{C_n}{\sigma^2-\sin^2\varepsilon}.$$

Führt man nun Hilfsgrößen D ein vermöge der Relation

$$\frac{(n-m)[(n+1)^2-m^2\sin^2\varepsilon]}{2n-1}A_{n-1}+\frac{(n+m+1)(n^2-m^2\sin^2\varepsilon)}{2n+3}A_{n+1}=$$

$$=[n(n+1)-\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon]D_n,$$

so wird aus der obigen Gleichung

$$\frac{n-m}{2n-1}[(n+1)^2-m^2\sin^2\varepsilon]D_{n-1}+\left\{\frac{g_nh_0}{\lambda^2\rho^2}(n^2-m^2\sin^2\varepsilon)[(n+1)^2-m^2\sin^2\varepsilon]\right.$$

$$\left.-\cos^2\varepsilon[n(n+1)-\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon]\right\}\frac{A_n}{\sigma^2-\sin^2\varepsilon}+\frac{n+m+1}{2n+3}(n^2-m^2\sin^2\varepsilon)D_{n+1}=$$

$$=\frac{h_0}{\lambda^2\rho^2}\cdot\frac{(n^2-m^2\sin^2\varepsilon)[(n+1)^2-m^2\sin^2\varepsilon]}{\sigma^2-\sin^2\varepsilon}C_n.$$

Setzt man

$$\frac{n-m+1}{2n+1}[(n+2)^2-m^2\sin^2\varepsilon]=k_n,\qquad \frac{n+m}{2n+1}[(n-1)^2-m^2\sin^2\varepsilon]=l_n,$$

$$\frac{1}{\sigma^2-\sin^2\varepsilon}\left\{\cos^2\varepsilon\,[n\,(n+1)-\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon]-\frac{h_0\,g_n}{\lambda^2\rho^2}(n^2-m^2\sin^2\varepsilon)\,[(n+1)^2-m^2\sin^2\varepsilon]\right\}=M_n$$

$$n\,(n+1)-\sigma m-m^2\sin^2\varepsilon=N_n$$

$$\frac{h_0}{\lambda^2\rho^2}\,\frac{(n^2-m^2\sin^2\varepsilon)\,[(n+1)^2-m^2\sin^2\varepsilon]}{\sigma^2-\sin^2\varepsilon}\,C_n=K_n\,,$$

so ist der Gleichung

$$a_{n-2}\,A_{n-2}+b_n\,A_n+c_{n+2}\,A_{n+2}=C_n$$

äquivalent das System

$$k_{n-1}\,D_{n-1}-M_n\,A_n+l_{n+1}\,D_{n+1}=K_n$$
$$k_{n-2}\,A_{n-2}-N_{n-1}\,D_{n-1}+l_n\,A_n=0$$
$$k_n\,A_n-N_{n+1}\,D_{n+1}+l_{n+2}\,A_{n+2}=0$$

und die beiden Systeme

$$\begin{array}{ll} b_m\,A_m+c_{m+2}\,A_{m+2}=C_m & b_{m+1}\,A_{m+1}+c_{m+3}\,A_{m+3}=C_{m+1} \\ a_m\,A_m+b_{m+2}\,A_{m+2}+c_{m+4}\,A_{m+4}=C_{m+2} & a_{m+1}\,A_{m+1}+b_{m+3}\,A_{m+3}+c_{m+5}\,A_{m+5}=C_{m+3} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

werden ersetzt durch

$$\begin{array}{ll} k_{m-1}D_{m-1}-M_m\,A_m+l_{m+1}D_{m+1}=K_m & k_m\,D_m-M_{m+1}\,A_{m+1}+l_{m+2}\,D_{m+2}=K_{m+1} \\ k_{m+1}D_{m+1}-M_{m+2}\,A_{m+2}+l_{m+3}\,D_{m+3}=K_{m+2} & k_{m+2}D_{m+2}-M_{m+3}\,A_{m+3}+l_{m+4}\,D_{m+4}=K_{m+3} \\ \vdots & \vdots \\ -N_{m-1}\,D_{m-1}+l_m\,A_m=0 & -N_m\,D_m+l_{m+1}\,A_{m+1}=0 \\ k_m\,A_m-N_{m+1}\,D_{m+1}+l_{m+2}\,A_{m+2}=0 & k_{m+1}A_{m+1}-N_{m+2}D_{m+2}+l_{m+3}A_{m+3}=0 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

7. Freie Schwingungen.

Da für die freien Schwingungen sämtliche $C=0$ sind, so sind die Koeffizienten $A_{n,m}$ nach dem bisherigen bestimmt durch zwei Systeme rekurrierender — im Allgemeinen trinomischer — Gleichungen von folgender Form, wobei wieder der allen Größen gemeinsame zweite Index m vorläufig unterdrückt wird:

$$b_m\,A_m+c_{m+2}\,A_{m+2}=0$$
$$a_m\,A_m+b_{m+2}\,A_{m+2}+c_{m+4}\,A_{m+4}=0$$
$$a_{m+2}\,A_{m+2}+b_{m+4}\,A_{m+4}+c_{m+6}\,A_{m+6}=0$$
$$\vdots$$
$$a_{n-4}\,A_{n-4}+b_{n-2}\,A_{n-2}+c_n\,A_n=0$$
$$\vdots$$

$$b_{m+1} A_{m+1} + c_{m+3} A_{m+3} = 0$$
$$a_{m+1} A_{m+1} + b_{m+3} A_{m+3} + c_{m+5} A_{m+5} = 0$$
$$a_{m+3} A_{m+3} + b_{m+5} A_{m+5} + c_{m+7} A_{m+7} = 0$$
$$\cdots$$
$$a_{n-3} A_{n-3} + b_{n-1} A_{n-1} + c_{n+1} A_{n+1} = 0.$$

Das erste System gibt die Koeffizienten jener $P_{n,m}$ (cos ϑ) für welche $n-m$ eine gerade Zahl ist, das zweite für solche mit ungerader Differenz $n-m$; das erste definiert der Bedeutung der zugeordneten Kugelfunktionen gemäß Schwingungen, die symmetrisch zum Rotationsäquator stattfinden.

Die Lösungen derartiger Systeme können bekanntlich in Form von Kettenbrüchen dargestellt werden.

Setzt man

$$a_{n-2} \frac{A_{n-2}}{A_n} = h_{n-2}, \qquad c_{n+2} \frac{A_{n+2}}{A_n} = k_{n+2}$$ [1]

so findet man aus den beiden Gleichungen

$$h_{n-2} + b_n + k_{n+2} = 0$$

und

$$a_n c_{n+2} = h_n k_{n+2},$$

daß

$$k_{n+2} = -\cfrac{a_n c_{n+2}}{b_{n+2} - \cfrac{a_{n+2} c_{n+4}}{b_{n+4} - \cdots \; b_{n+2\nu} + k_{n+2\nu+2}}}$$

$$h_n = -\cfrac{a_n c_{n+2}}{b_n - \cfrac{a_{n-2} c_n}{b_{n-2} - \cdots \; b_{n-2\nu} + h_{n-2\nu-2}}}$$

der zweite Kettenbruch ist ein endlicher, weil für $n < m$

$$A_{n,m} = 0$$

ist. Hat man auf diese Weise die Größen h und k ermittelt, so werden sich sämtliche A_n der ersten Gruppe durch A_m, die der zweiten durch A_{m+1} dargestellt ergeben.

Damit aber diese Größen von Null verschiedene Werte erhalten, tritt hier noch die Bedingung dazu, daß die Determinante jedes Systems verschwindet. Diese kann für das erste System in folgender Weise formuliert werden — für das zweite gelten analoge Beziehungen —: setzt man die Determinante $\frac{n-m}{2}$. Grades

[1] Eine Verwechslung mit den k der vorigen Nummer ist ja nicht zu befürchten.

$$\begin{vmatrix} b_m & c_{m+2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_m & b_{m+2} & c_{m+4} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{m+2} & b_{m+4} & c_{m+6} & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ & & & & b_{n-6} & c_{n-4} & 0 \\ & & & & a_{n-6} & b_{n-4} & c_{n-2} \\ & & & & 0 & a_{n-4} & b_{n-2} \end{vmatrix} = D_n$$

so muß

$$\lim_{n=\infty} D_n = 0$$

sein und das ist offenbar eine Bedingung für die in den a, b, c enthaltene Größe λ, demnach die Gleichung aus der die Perioden der freien Schwingungen der den Himmelskörper bedeckenden Flüssigkeitsschichte erhalten werden.

Die Lösungen λ werden eine nach einem bestimmten Gesetze fortschreitende unendliche Reihe bilden, jeder Lösung gehört ein bestimmtes Wertesystem

$$\frac{A_n}{A_m}$$

an, worin also A_m, beziehungsweise A_{m+1} offenbar die willkürlichen Konstanten des Problems sind.

Für die numerische Auswertung der λ und der zugehörigen Koeffizientensysteme $A_n : A_m$ wird sich nun ein Weg durch folgende Überlegung finden lassen.

Zur Ermittlung irgendeines A_n aus der willkürlichen Konstanten A_m genügt das System der $\frac{n-m}{2}$ Gleichungen

$$\begin{aligned} c_{m+2} A_{m+2} &= -b_m A_m \\ b_{m+2} A_{m+2} + c_{m+4} A_{m+4} &= -a_m A_m \\ a_{m+2} A_{m+2} + b_{m+4} A_{m+4} + c_{m+6} A_{m+6} &= 0 \\ a_{m+4} A_{m+4} + b_{m+6} A_{m+6} + c_{m+8} A_{m+8} &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n-4} A_{n-4} + b_{n-2} A_{n-2} + c_n A_n &= 0. \end{aligned}$$

Da die Determinante dieses Systems

$$c_{m+2}\, c_{m+4} \dots c_n$$

ist, so ist unmittelbar ersichtlich, daß $A_n\, c_{m+2} \dots c_n =$

$$\begin{vmatrix} c_{m+2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_m A_m \\ b_{m+2} & c_{m+4} & 0 & \dots & 0 & -a_m A_m \\ a_{m+2} & b_{m+4} & c_{m+6} & & 0 & 0 \\ 0 & & & & & \\ & & \vdots & & & \\ 0 & & & a_{n-4} & b_{n-2} & 0 \end{vmatrix}$$

oder

$$A_n\, c_m \dots c_n = (-1)^{\frac{n-m}{2}} A_m D_n$$

ist, woraus folgt, daß, wenn die λ der obigen Bedingung genügen, die A_n gegen Null konvergieren. Man wird also jedenfalls eine Näherung für die Ermittlung der λ und A erhalten, wenn man die Reihe der A bei irgendeinem genügend großen n abbricht, das heißt,

$$A_{n+2} = A_{n+4} = \ldots\ldots = 0$$

setzt.

Die Periodengleichung ist dann

$$D_{n+2} = 0$$

und wird eine endliche Zahl von Lösungen λ ergeben.

Auch für diese läßt sich ein Näherungsverfahren angeben. Bedenkt man, daß die Größen a_n und c_n mit wachsendem n gleichfalls gegen Null konvergieren, und vernachlässigt man schon c_n, so wird

$$D_{n+2} = b_n D_n$$

und es werden in erster Näherung gewisse Werte von λ offenbar aus

$$b_n = 0$$

erhalten.

Man wird also aus den Gleichungen

$$b_m = 0, \quad b_{m+2} = 0, \ldots . b_n = 0 \ldots .$$

die Reihe der Werte für λ mit einer gewissen Annäherung finden, die umso größer sein wird, je größer n ist. Für die Werte aus den ersteren dieser Gleichungen ist dann allerdings eine nochmalige Durchrechnung und daraus sich ergebende Verbesserung notwendig, das numerische Verfahren zeigt aber — wenigstens für den Fall unserer Erde — eine genügende Konvergenz, um uns über die Natur dieser Oszillationen in Kenntnis zu setzen.

Die Wurzeln der Gleichungen $b_n = 0$ lassen sich aber auf ziemlich einfachem Wege ermitteln.

Für $m = 0$ sind sie ja unmittelbar anzugeben.

Ist m eine von Null verschiedene Größe und denke man sich die λ als Abszissen eines ebenen rechtwinkeligen Koordinatensystems, dann gehören die verlangten Wurzeln den Durchschnittspunkten einer Kurve

$$y = -B_n$$

und einer zur λ—Achse parallelen Geraden

$$y + g_n$$

an. Die Kurvengleichung hat die Form

$$y = a\lambda^2 - b\lambda - (f^2 - \sin^2 \varepsilon . \lambda^2)\left(\frac{A_1'}{a_1 - \frac{b_1}{\lambda}} + \frac{A_2'}{a_2 - \frac{b_2}{\lambda}}\right).$$

Sie hat also zwei zur y-Achse parallele Asymptoten

$$\lambda = \frac{b_1}{a_1} \text{ und } \lambda = \frac{b_2}{a_2}$$

und eine parabolische Asymptote, deren Gleichung von der Form ist

$$y = a'\lambda^2 - b\lambda.$$

Die Kurve wird demnach vier Arme im Raum der positiven y besitzen, daher vier reelle Wurzeln ergeben. Für relativ große g_n — deren relative Größe ja von der Annahme über h_0 abhängt — werden die beiden Werte

$$\lambda = \frac{b_1}{a_1}, \quad \lambda = \frac{b_2}{a_2}$$

offenbar Näherungen bedeuten. Die Wurzeln sind ganz allgemein eingeschlossen zwischen den Werten

$$-\infty,\ 0,\ \frac{\bar{b}_1}{a_1},\quad \frac{b_2}{a_2},\quad +\infty$$

(die Kurve geht ja durch den Nullpunkt).

Mit diesen aus den $b_n = 0$ gefundenen Näherungen wird man aus

$$D_{n+2} = 0$$

die verbesserten, beziehungsweise die als definitiv anzusehenden Werte der λ finden.

Für die numerische Auswertung soll ε als kleine Größe betrachtet und nur $\sin^2\varepsilon$ mitgenommen werden. Dann ist

$$g_0 = \frac{k^2 M}{\rho^2}\left(1 + \frac{2}{5}\sin^2\varepsilon\right)$$

und

$$p_m^{(n)} = \frac{4\pi}{2n+1}\rho s_0\left(1 + \frac{(2m-1)(2m+1)}{2(2n-1)(2n+3)}\sin^2\varepsilon\right).$$

Ist s die mittlere Dichte des ganzen Himmelskörpers, so findet sich für

$$g_n = g_0 - k^2 p_m^{(n)}$$

$$g_n = \frac{4\pi}{3}k^2\rho s\left[1 - \frac{1}{10}\sin^2\varepsilon - \frac{3}{2n+1}\,\frac{s_0}{s}\left(1 + \frac{(2m-1)(2m+1)}{2(2n-1)(2n+3)}\sin^2\varepsilon\right)\right].$$

Um den Einfluß der Abplattung beurteilen zu können, soll nun die Schwere G_0 auf der Oberfläche einer Kugel gleicher mittlerer Dichte und gleichen Volumens eingeführt werden, so zwar, daß

$$G_0 = \frac{4\pi}{3}k^2 a s$$

und

$$a = \rho\left(1 - \frac{1}{6}\sin^2\varepsilon\right)$$

ist, dann erhält man

$$\frac{g_n h_0}{4\omega^2\rho^2} = \frac{G_0 h_0}{4\omega^2 a^2}\left\{1 - \frac{3}{2n+1}\cdot\frac{s_0}{s} - \sin^2\varepsilon\left(\frac{4}{15} + \frac{s_0}{s}\cdot\frac{1}{2(2n+1)}\left[\frac{3(2m-1)(2m+1)}{(2n-1)(2n+3)} - 1\right]\right)\right\}.$$

Im Falle $m = 0$, das heißt im Falle bloßer zonaler Eigenschwingungen ist dieser Einfluß leicht zu beurteilen. Die Gleichung

$$B_n + g_n = 0$$

lautet dann

$$\frac{\lambda^2}{4\omega^2}\left[1 - \frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)}\sin^2\varepsilon\right] = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{n^2-1}{2n-1} + \frac{n(n+2)}{2n+3}\right] +$$
$$+ n(n+1)\frac{G_0 h_0}{4\omega^2 a^2}\left[1 - \frac{3}{2n+1}\,\frac{s_0}{s} - \left(\frac{4}{15} - \frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\,\frac{s_0}{s}\right)\sin^2\varepsilon\right].$$

Bezeichnet man mit λ_0 den Wert für $\varepsilon = 0$, so ist

$$\frac{\lambda_0^2}{4\omega^2} = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{n^2-1}{2n-1} + \frac{n(n+2)}{2n+3}\right] + n(n+1)\frac{G_0 h_0}{4\omega^2 a^2}\left[1 - \frac{3}{2n+1}\cdot\frac{s_0}{s}\right]$$

und

$$\frac{\lambda^2}{4\omega^2} - \frac{\lambda_0^2}{4\omega^2} = \left[\frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)}\cdot\frac{\lambda_0^2}{4\omega^2} - n(n+1)\frac{G_0 h_0}{4\omega a^2}\left(\frac{4}{15} - \frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\,\frac{s_0}{s}\right)\right]\sin^2\varepsilon.$$

Der rechts stehende Ausdruck ist aber jedenfalls positiv; negative Größen kommen nur in den von G_0 abhängigen Gliedern vor; in diesen hängt das Vorzeichen der von s unabhängigen Teile von

$$\frac{2n\,(n+1)}{(2n-1)\,(2n+3)} - \frac{4}{15}$$

ab, eine Größe die für $n = 1$ bis $n = \infty$ Werte zwischen $+\frac{8}{15}$ und $+\frac{7}{30}$ annimmt, während der Koeffizient von $\frac{s_0}{s}$ zwischen 0 und $\frac{4}{15}$ liegt. Da $\frac{s_0}{s}$ gleich $0 \cdot 18093$ gesetzt werden kann, so ist die obige Behauptung unmittelbar ersichtlich: λ wird durch ε vergrößert, woraus folgt:

Die Abplattung verkleinert die Periode der freien zonalen Schwingungen.

Was die numerischen Werte dieser Perioden anbelangt, so wurden diese von S. S. Hough für $\varepsilon = 0$ ermittelt und zwar für verschiedene Tiefen einer die Erde gleichmäßig bedeckenden Wasserschichte. Es sollen hier nur die Ergebnisse angeführt werden, die sich auf jene beiden Annahmen beziehen, innerhalb deren die mittlere Tiefe der Wasserschichte liegen muß, die der Gesamtmasse der Ozeane bei völlig nivelliertem Erdkörper entspricht.

Setzt man

$$\frac{G_0 h_0}{4\omega\, a^2} = \frac{1}{40}\,, \qquad \frac{1}{20}\,,$$

was für h_0 den Werten von $2200\,m$, beziehungsweise $4400\,m$ entsprechen würde, so ergeben sich folgende Perioden, ausgedrückt in Stunden und Minuten (Sternzeit).

$m=0$	Perioden	
n	für $h_0 = 2 \cdot 2\,km$	$= 4 \cdot 4\,km$
1	$30^h\ 29^m 3$	$25^h\ 28^m 0$
2	18 3·5	15 11·0
3	14 15·2	11 54·3
4	12 13·5	10 0·7
5	10 50·0	8 38·3
6	9 43·5	7 33·8
7	8 47·5	6 42·3
8	7 59·6	6 0·5
9	7 18·6	5 26·1
10	6 43·3	4 57·4
11	6 12·9	4 33·2
12	5 46·4	4 12·5

Zur Abschätzung des Einflusses von ε sollen noch folgende Daten für die erste angenommene mittlere Tiefe mitgeteilt werden: Für

$n =$	ist $\frac{\lambda_0^2}{4\omega^2}$	und $\frac{\lambda^2}{4\omega^2} - \frac{\lambda_0^2}{4\omega^2}$
1	0·15491	$+0 \cdot 111\,\varepsilon^2$
2	0·44155	$+0 \cdot 215\,\varepsilon^2$
3	0·70890	$+0 \cdot 321\,\varepsilon^2$
4	0·96357	$+0 \cdot 372\,\varepsilon^2$
5	1·2270	$+0 \cdot 436\,\varepsilon^2$

wo λ_0 $\varepsilon = 0$ entspricht.

Für den relativen Betrag $\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}$ erhält man:

$$0\cdot364\,\varepsilon^2,\quad 0\cdot244\,\varepsilon^2,\quad 0\cdot216\,\varepsilon^2,\quad 0\cdot193\,\varepsilon^2,\quad 0\cdot177\,\varepsilon^2,$$

er konvergiert, wie aus den obigen Formeln hervorgeht, gegen die Größe

$$0\cdot117\,\varepsilon^2.$$

Die Fälle, für welche $m \neq 0$ ist, die sich also auf die auch sektorial geteilten Eigenschwingungen beziehen, lassen sich hinsichtlich des Einflusses der Abplattung auf die Schwingungsperioden nicht so einfach behandeln, da der Mechanismus der Auflösung der Bedingungsgleichung ein ungleich komplizierterer ist. Es sollen auch hier nur die Korrektionsglieder für einige der wichtigeren Spezialfälle angeführt werden.

S. S. Hough hat für verschiedene mittlere Tiefen die Perioden einer Gruppe dieser Schwingungen berechnet. Für die Tiefe $2\cdot2\,km$, die der am nächsten kommt, die dem Ozean als gleichmäßige Flüssigkeitschichte entspricht, wurden von ihm die folgenden Zahlen gefunden:

n	m	$\frac{\lambda^2}{4\,\omega^2}$	σ_0	Periode	
1	1	0·1024	+ 3·125	1^d 13^h	
2	1	0·6673	+ 1·224	14	41^m
	1	0·2418	− 2·034	24	24
	2	0·4454	+ 1·498	17	59
	2	0·0968	− 3·215	38	34
3	1	0·0010	+31·995	16 0	
	2	0·0070	+11·969	6 0	
4	1	1·0697	+ 0·967	11	36
	1	0·8312	− 1·097	13	10
	2	0·9866	+ 1·007	12	5
	2	0·6885	− 1·205	14	28
5	1	0·0004	+52·854	26 10	
	2	0·0002	+24·456	12 5	

Es wurde nun aus der Gleichung

$$B_n + g_n + 0$$

die Variation $\delta\sigma$ von σ_0 und δP von der Periode, die aus $\varepsilon = 0$ folgt, ermittelt für mäßige Beträge von ε^2, deren zweite Potenzen als zu vernachlässigende Größen vorausgesetzt wurden, und zwar für die leic hen Argumente wie die obigen Resultate.

Die erste Kolumne gibt die Koeffizienten von ε^2 für $\delta\sigma$ und die zweite die entsprechenden Faktoren von δP, ausgedrückt in Sternzeitminuten:

n	m	$\delta\sigma : \varepsilon^2$	$\delta P : \varepsilon^2$
1	1	−1·434	−1033
2	1	−0·176	− 127
	1	+0·954	− 687
	2	−0·293	− 211
	2	−0·231	+ 166

n	m	$\delta\sigma : \varepsilon^2$	$\delta P : \varepsilon^2$
3	1	$+5 \cdot 181$	$+3731$
	2	$+0 \cdot 326$	$+\ 235$
4	1	$-0 \cdot 267$	$-\ 192$
	1	$+0 \cdot 338$	$-\ 243$
	2	$+0 \cdot 127$	$+\ \ 91$
	2	$+0 \cdot 234$	$-\ 168$
5	1	$+1 \cdot 914$	$+1378$
	2	$+0 \cdot 729$	$+\ 525$

Sind auf diese Art die Perioden ermittelt, so können für jeden Wert derselben die Größen k_n und h_n mit Hilfe der obigen Kettenbruchentwicklung angegeben werden und damit auch die Verhältnisse der unbekannten Koeffizienten A_n, so daß also für jede Schwingungsart, die durch λ und m charakterisiert ist, die Amplituden für die einzelnen Breiten durch eine einzige willkürliche Konstante ausgedrückt erscheinen.

Bezüglich der numerischen Ergebnisse sei auf die oben zitierten Arbeiten S. S. Hough's verwiesen, die auch in Poincaré's »Théorie des marées« (Leçons de Mécanique céleste, t. III) zu finden sind.

8. Erzwungene Schwingungen.

Da hier λ eine gegebene Größe ist, so sind die Koeffizienten a, b, c in dem Gleichungssystem der A ebenfalls von vornherein bestimmte Größen und es lassen sich daraus die A_n unter Berücksichtigung der Bedingung

$$\lim_{n=\infty} A_n = 0$$

eindeutig bestimmen.

Nun ergibt die Entwicklung der Störungsfunktion ein Aggregat von Gliedern der Form

$$C_{n,m}\, P_{n,m}\, (\cos\vartheta)\, e^{im\varphi} . e^{i\lambda t}$$

und zwar derart, daß jedem λ nur ein einziges Glied entspricht, zu jedem λ also nur ein Wertepaar n und m gehört. Es sei dieses s und m. Dann sind offenbar sämtliche A_n, für welche n nicht gleichartig mit s ist, Null, das Gleichungssystem der A_n für welche die n gleichartig mit s sind, lautet — je nachdem m gleichartig mit s ist oder nicht:

$$b_m A_m c_{m+2} A_{m+2} = 0 \qquad \text{oder:} \qquad b_{m+1} A_{m+1} + c_{m+3} A_{m+3} = 0$$

$$a_m A_m + b_{m+2} A_{m+2} + c_{m+4} A_{m+4} = 0 \qquad a_{m+1} A_{m+1} + b_{m+3} A_{m+3} + c_{m+5} A_{m+5} = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{s-4} A_{s-4} + b_{s-2} A_{s-2} + c_s A_s = 0$$

$$a_{s-2} A_{s-2} + b_s A_s + c_{s+2} A_{s+2} = C_s$$

$$a_s A_s + b_{s+2} A_{s+2} + c_{s+4} A_{s+4} = 0$$

$$\vdots$$

Führt man wieder statt der A als Unbekannte die Verhältnisse h_n und k_n ein, so wird das System der Bestimmungsgleichungen für diese dasselbe sein wie für die freien Schwingungen mit Ausnahme der Gleichung, die b_s enthält, demnach:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ h_{s-4}+b_{s-2}+k_s &= 0 \\ h_{s-2}+b_s+k_{s+2} &= \frac{C_s}{A_s} \\ h_s+b_{s+2}+k_{s+4} &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die früher für die h und k gefundene Kettenbruchentwicklung wird also auch hier noch gelten, solange in dem Eliminationsprozeß die Gleichung mit der von Null verschiedenen rechten Seite nicht enthalten ist, also zunächst für die Werte h bis h_{s-4} und für die k von k_{s+4} an, dann ergeben sich k_s und h_s aus der ersten und dritten der oben angeschriebenen Gleichung und aus der Indentität

$$h_{s-2} = \frac{a_{s-2}\,c_s}{k_s} \text{ und } k_{s+2} = \frac{a_s\,c_{s+2}}{h_s}$$

die linke Seite der mittleren Gleichung, so daß mit diesen Werten nun

$$A_s = \frac{C_s}{h_{s-2}+b_s+k_{s+2}}$$

gefunden wird.

Dann ist

$$\begin{aligned} A_{s-2} &= \frac{h_{s-2}}{a_{s-2}} A_s \\ A_{s-4} &= \frac{h_{s-2}\,h_{s-4}}{a_{s-2}\,a_{s-4}} A_s \\ &\vdots \\ A_{s+2} &= \frac{k_{s+2}}{c_{s+2}} A_s \\ A_{s+4} &= \frac{k_{s+2}\,k_{s+4}}{c_{s+2}\,c_{s+4}} A_s \\ &\vdots \end{aligned}$$

wo also sämtliche hier auftretende h und k aus der angegebenen Kettenbruchentwicklung erhalten werden. Man hat demnach folgendes Resultat:

Enthält die Störungsfunktion ein Glied

$$C_{n,m}\,P_{n,m}(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi}\,e^{i\lambda t},$$

so gibt dieses Anlaß zu Oszillationen, die definiert sind durch

$$\zeta = \frac{C_{n,m} e^{im\varphi} e^{i\lambda t}}{(h_{n-2,m} + b_{n,m} + k_{n+2,m})\sqrt{1-\sin^2\varepsilon \sin^2\vartheta}} \Big\{ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{h_{n-4,m}\, h_{n-2,m}}{a_{n-4,m}\, a_{n-2,m}} P_{n-4,m}(\cos\vartheta) + \\ + \frac{h_{n-2,m}}{a_{n-2,m}} P_{n-2,m}(\cos\vartheta) + P_{n,m}(\cos\vartheta) + \frac{k_{n+2,m}}{c_{n+2,m}} P_{n+2,m}(\cos\vartheta) + \\ + \frac{k_{n+2,m}\, k_{n+4,m}}{c_{n+2,m}\, c_{n+4,m}} P_{n+4,m}(\cos\vartheta) + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \Big\}.$$

Was das Größenverhältnis der einzelnen Glieder anbelangt, so kann zunächst bemerkt werden, daß das der Störungsfunktion entsprechende Glied mit P_n durchaus keine quantitativ ausgezeichnete Rolle zu spielen braucht: die Faktoren sind Funktionen von λ, eine Größe, die ja bei diesen Schwingungen in keinem Zusammenhang mit dem Rang der Kugelfunktion steht. Es wird sich vielmehr in dem quantitativen Verhältnis ein anderes Phänomen bemerkbar machen können, nämlich das der Resonanz.

Ist das λ der Störungsfunktion eine Größe, die sehr nahe einem λ der freien Schwingungen kommt, so heißt das nach dem vorausgehenden, daß es ein n gibt, für welches die Gleichung

$$b_n = 0$$

eine Wurzel in der Nähe von λ besitzt, daß also b_n für dieses λ einen sehr kleinen Wert annimmt, daher auch das entsprechende A_n, wie aus dem System der Bedingungsgleichungen folgt, dementsprechend die übrigen Koeffizienten quantitativ übertreffen muß.

Beschränkt man sich bei der Entwicklung der Störungsfunktion auf jene Glieder, die allein einen merklichen Beitrag zu dem Phänomen der Gezeiten liefern können, so kommt nur der Fall $n = 2$ in Betracht und es handelt sich nun für die quantitative Beurteilung der einzelnen Oszillationen darum, ob die zugehörigen λ der Störungsfunktion in der Nähe einer der Wurzeln

$$D_n = 0$$

oder, was nach dem früheren auf dasselbe hinauskommt, in der Nähe einer der Wurzeln

$$b_2 = 0, \quad b_4 = 0, \quad \ldots \ldots b_n = 0$$

liegt.

9. Die Störungsfunktion.

Ist m_1 die störende Masse und Δ ihre Distanz von einem Flüssigkeitselement, so ist

$$S = \frac{k^2 m_1}{\Delta}$$

Die den Koordinaten ρ, ϑ, φ des letzteren entsprechenden elliptischen Koordinaten von m_1 seien

$$\rho_1, \quad \vartheta_1, \quad \varphi_1$$

und

$$\frac{c}{\rho_1} = \sin\varepsilon_1,$$

dann ist nach bekannten Entwicklungen

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_0^{\infty}{}_n\, T^{(n)}$$

wo

$$T^{(n)} = -\frac{2}{ic}[1.3\ldots(2n-1)]^2 \sum_0^n{}_m (-1)^m \cdot \frac{P_m^{(n)}(i\cot\varepsilon) \,.\, Q_m^{(n)}(i\cot\varepsilon_1)}{(n+m)!\,(n-m)!} P_m^{(n)}(\cos\vartheta)\, P_m^{(n)}(\cos\vartheta_1) \cos m(\varphi_1 - \varphi).$$

Führt man wieder die Reihen $R_m^{(n)}$ und $S_m^{(n)}$ und die Neumann'schen Zugeordneten ein, so wird

$$T^{(n)} = \frac{2}{c} \sum_0^n {}_m \frac{1}{(n+m)!} R_m^{(n)}(\varepsilon) . S_m^{(n)}(\varepsilon_1) P_{n,m}(\cos\vartheta) P_{n,m}(\cos\vartheta_1) \cos m(\varphi_1 - \varphi).$$

Dabei ist also

$$R_m^{(n)}(\varepsilon) . S_m^{(n)}(\varepsilon_1) = c . \frac{\rho^n}{\rho_1^{n+1}} \cdot \frac{\cos^{n-m}\varepsilon}{\cos^{n+m+1}\varepsilon_1} \left[1 + \frac{(n-m)(n-m-1)}{2.(2n-1)} \operatorname{tg}^2\varepsilon + \ldots . \right] .$$

$$\cdot \left[1 - \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{2.(2n+3)} \operatorname{tg}^2\varepsilon_1 + \ldots . \right] .$$

Da die Glieder $n = 0$ und $n = 1$ für die relative Beschleunigung keinen Beitrag liefern, $\frac{\rho}{\rho_1}$ aber als kleine Größe betrachtet werden kann, von der nur noch die zweite Potenz berücksichtigt zu werden braucht, so kann

$$S = k^2 m_1 T^{(2)}$$

gesetzt werden. Dann ist aber auch $\frac{c^2}{\rho_1{}^2}$ zu vernachlässigen und wegen

$$r = \rho_1 \sqrt{1 - \frac{c^2}{\rho_1^2} \cos^2\vartheta_1}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \cot\vartheta_1 \sqrt{1 - \frac{c^2}{\rho_1^2}},$$

wo r die geozentrische Distanz und δ die Deklination von m_1 bedeutet, diese Größen für ρ_1 und $90° - \vartheta_1$ zu substituieren. Dann wird

$$S = \frac{3}{2} k^2 m_1 \frac{\rho^2}{r^3} \left[\frac{1}{2}(3 - 2\sin^2\varepsilon)\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right)\left(\sin^2\delta - \frac{1}{3}\right)\right.$$
$$+ 2\cos\varepsilon \sin\vartheta \cos\vartheta \sin\delta \cos\delta \cos(\varphi - \varphi_1)$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sin^2\vartheta \cos^2\delta \cos 2(\varphi - \varphi_1)\right].$$

$\varphi - \varphi_1$ ist offenbar der Stundenwinkel des störenden Körpers für den Meridian φ. Ist t die Sternzeit im Nullmeridian, von dem aus die φ gezählt werden, so ist

$$\varphi - \varphi_1 = \omega t + \varphi - \alpha,$$

wo α die Rektaszension des störenden Körpers ist.

Es handelt sich nun zunächst darum, die Variabeln r, α und δ als Funktionen der Zeit und der Bahnelemente des störenden Körpers auszudrücken, von dem man annehmen kann, daß er eine Keppler'sche Bewegung um den betrachteten Himmelskörper ausführt.

Seien Ω_1 und i_1 Knotenlänge und Neigung seiner Bahnebene und ω_1 das Argument des Perigäums, bezogen auf das Äquatorsystem, und v die wahre Anomalie, so ist

$$\cos(\alpha - \Omega_1)\cos\delta = \cos(\omega_1 + v)$$
$$\sin(\alpha - \Omega_1)\cos\delta = \sin(\omega_1 + v)\cos i_1$$
$$\sin\delta = \sin(\omega_1 + v)\sin i_1 .$$

Sind Ω, i und ω die analogen Größen bezüglich der Ekliptik, N der Bogen der Bahn zwischen den beiden Fundamentalkreisen und e die Schiefe der Ekliptik, so kann man nach den bekannten Transformationsformeln von einem System auf das andere übergehen, wobei von i nur erste Potenzen mitgenommen werden sollen, so daß

$$\begin{aligned}\sin i_1 \cos \Omega_1 &= \sin e + i \cos e \cos \Omega\\ \sin i_1 \sin \Omega_1 &= i \sin \Omega\\ \cos i_1 &= \cos e - i \sin e \cos \Omega\\ \sin i_1 \cos N &= i \cos e + \sin e \cos \Omega\\ \sin i_1 \sin N &= \sin e \sin \Omega\\ \omega_1 &= \omega + N.\end{aligned}$$

Man wird sich bei dem vorliegenden Problem ziemlich weitgehende Vereinfachungen erlauben können, insbesondere sollen nur erste Potenzen der Bahnexzentrizität ε_1 berücksichtigt werden. (Eine Verwechslung mit dem obigen ε_1, das von dem elliptischen Bezugsystem herrührte und sofort gleich Null gesetzt werden könnte, ist ja nicht zu befürchten.)

Ist r_0 die mittlere Entfernung und M die mittlere Anomalie, so kann darnach

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 = 1 + 3\varepsilon_1 \cos M$$

und

$$v = M + 2\varepsilon_1 \sin M$$

gesetzt werden.

Nun sollen auch diese ersten Potenzen von i und ε_1 nur in den von ωt unabhängigen, also relativ langperiodischen Gliedern beibehalten werden, dann erhält man schließlich die folgenden drei Bestandteile der Störungsfunktion

$$S = S_0 + S_1 + S_2,$$

wobei — unter π die Länge des Perigäums und unter l die mittlere Länge in der Bahn verstanden —:

$$\begin{aligned}S_0 = -\frac{3}{4} k^2 m_1 \frac{\rho^2}{r_0^3} (3 - 2\sin^2\varepsilon)\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right)\Big\{&\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sin^2 e + \frac{1}{2}\sin^2 e \cos 2l -\\ &-\frac{i}{2}[\sin 2e \cos\Omega + \sin 2e \cos(2l - \Omega)] +\\ &+\varepsilon_1\left[\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 e\right)\cos(l - \pi) - \frac{1}{4}\sin^2 e \cos(l + \pi) + \frac{7}{4}\sin 2e \cos(3l - \pi)\right]\Big\}\end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{3}{2} k^2 m_1 \frac{\rho^2}{r_0^3} \cos\varepsilon \sin\vartheta \cos\vartheta \sin e\,[\sin(\omega t + \varphi) - \sin(\omega t + \varphi - 2l)]$$

(dabei ist $\sin^3 e$ als von der Ordnung i angenommen).

$$S_2 = \frac{3}{8} k^2 m_1 \frac{\rho^2}{r_0^3} \sin^2\vartheta\,[\sin^2 e \cos 2(\omega t + \varphi) + 2\cos 2(\omega t + \varphi - l)]$$

mit der gleichen Vernachlässigung.

Wie man sieht, tritt in jedem dieser Bestandteile eine einzige Kugelfunktion auf, und zwar in S_m nur $P_{2,m}$.

Für $m = 0$ erhält man die Gezeiten langer Periode, das Hauptglied hat eine Periode die gleich ist der halben tropischen Umlaufszeit des störenden Körpers, involviert also etwa vierzehntägige Mond- oder halbjährige Sonnenfluten.

S_1 und S_2 geben Anlaß zu kurzperiodischen Gezeiten: S_1 enthält Perioden, die gleich einem Sterntag oder um einen geringen Betrag länger sind, S_2 halbtägige oder nahezu halbtägige Perioden.

10. Langperiodische Gezeiten.

Hier ist $m = 0$ und $\frac{\lambda}{2\omega} = \frac{1}{\sigma}$ eine kleine Größe.

Die Betrachtung der Koeffizienten

$$\frac{a_n h_0}{4\omega^2 \rho^2}, \quad \frac{b_n h_0}{4\omega^2 \rho^2}, \quad \frac{c_n h_0}{4\omega^2 \rho^2}$$

ergibt dann, daß diese so gut wie unabhängig von λ sind, wegen der Kleinheit der von λ abhängigen Glieder. Die numerische Rechnung zeigt tatsächlich, daß die Resultate für $\lambda = 0$ nicht wesentlich von jenen abweichen, die man für den größten hier in Frage kommenden Wert von λ, den der vierzehntägigen Mondflut, erhält. Aus demselben Grunde sind diese Größen auch merklich unabhängig von ε, denn auch in g_n kommt die Exzentrizität nur mit einem kleinen Faktor versehen vor, der gegenüber dem expliziten Vorkommen von ε in der Störungsfunktion als belanglos erscheint.

Setzt man wieder

$$h_0 = 2\cdot 2\, km \qquad \frac{G_0 h_0}{4\omega^2 a^2} = \frac{1}{40},$$

so findet man für

$$\log\frac{A_4}{A_2} = 9_n7979 \qquad \log\frac{A_6}{A_4} = 9_n4601 \qquad \log\frac{A_8}{A_6} = 9_n2211$$

$$\log\frac{A_{10}}{A_8} = 9_n033 \qquad \log\frac{A_{12}}{A_{10}} = 8_n88.$$

Die Höhe ζ der Gezeitenwelle wird also für diese langperiodischen Bewegungen gegeben sein durch eine Reihe nach $P_{n,o}(\cos\vartheta)$, deren erstes Glied $n = 2$ das quantitativ bedeutendste ist.

Es ist also

$$\zeta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta} = (A_2 P_2 + A_4 P_4 + \ldots\ldots)\cos 2l,$$

wo nach dem früheren

$$A_2 = \frac{C_2}{b_2 + c_4 \frac{A_4}{A_2}}.$$

Man findet gemäß den angegebenen Voraussetzungen

$$A_2 = 19\cdot 28.\ \frac{h_0}{4\omega^2\rho^2} C_2$$

wo

$$C_2 = \frac{9}{8} k^2 m_1 \frac{\rho^2}{r_0^3}\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\varepsilon\right)\sin^2 e,$$

so daß

$$A_2 = 5\cdot 423.\ \frac{k^2 m_1}{\omega^2 r_0^3}\sin^2 e\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\varepsilon\right).h_0.$$

Was zunächst den Einfluß der Abplattung anbelangt, so sieht man, daß die einzelnen Amplituden proportional dem Faktor

$$1-\sin^2\varepsilon\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right)$$

verkleinert werden, also im Maximum an den Polen und am wenigsten am Äquator.

Für die halbjährige Sonnenflut hat man

$$m_1 = 1 \quad \text{und} \quad r_0 = 1$$

zu setzen und man erhält, wenn für

$$e = 23°\ 27'\ 8''$$

und der Annahme gemäß $h_0 = 2200\,m$ gesetzt wird,

$$A_2 = 0\cdot0142\,m\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\varepsilon\right).$$

Für die vierzehntägige Mondflut hat man

$$\frac{k^2 m_1}{\omega^2 r_0^3} = \frac{\mu}{U_☾^2},$$

wo μ die Mondmasse in Einheiten der Erdmasse und $U_☾$ die tropische Umlaufszeit des Mondes in Sterntagen bedeutet. Für

$$\mu = \frac{1}{81\cdot45} \quad \text{und} \quad U_☾ = 27\cdot3291$$

findet man

$$A_2 = 0\cdot0391\,m\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\varepsilon\right)$$

demnach

$$\frac{A_2(☾)}{A_2(\odot)} = 2\cdot76.$$

Für größere Werte von h_0 nehmen die Amplituden rascher zu, weil der Faktor von h_0 in A_2 selbst mit h_0 zunimmt; so wird er etwa für die vierfache der hier angenommenen Tiefe $2\cdot135$ mal größer und die Amplitude der Mondfluten für $h_0 = 8\cdot8\,km$ wird demnach sein

$$A_2 = 0\cdot2654\,m\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\varepsilon\right).$$

II. Ganztägige Gezeiten.

Die von S_1 herrührenden Glieder in ζ haben Perioden, die gleich oder nahezu gleich einem Sterntag sind.

Es kann gezeigt werden, daß die Flutbewegung dieser Art unter allen Umständen nur außerordentlich kleine Amplituden haben kann.

Der hier vorliegende Fall ist in allgemeinerer Fassung der folgende.

Die Entwicklung der Störungsfunktion habe für ein bestimmtes m und λ nur ein einziges Glied, und zwar soll für dieses $n = m+1$ sein, so daß also

$$S = C_{m+1}\,P_{m+1,\,m}(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi}\,e^{i\lambda t}$$

ist.

Dann werden sämtliche $A_{m+2k}=0$ sein und die A_{m+2k+1} werden dem System in Nummer 6. zu genügen haben

$$k_m D_m - M_{m+1} A_{m+1} + l_{m+2} D_{m+2} = K_{m+1}$$
$$k_{m+2} D_{m+2} - M_{m+3} A_{m+3} + l_{m+4} D_{m+4} = 0$$
$$\vdots$$
$$-N_m D_m + l_{m+1} A_{m+1} = 0$$
$$k_{m+1} A_{m+1} - N_{m+2} D_{m+2} + l_{m+3} A_{m+3} = 0$$
$$\vdots$$

Nun sei λ so beschaffen, daß $N_m = 0$ wird, das heißt

$$m(m+1) - \sigma m - m^2 \sin^2 = 0$$

oder

$$\lambda = \frac{2\omega}{m \cos^2 \varepsilon + 1},$$

dann ist $A_{m+1} = 0$ und dem obigen Gleichungssystem wird offenbar genügt durch

$$D_m = \frac{K_{m+1}}{k_m}, \quad D_{m+2} = A_{m+3} = D_{m+4} = A_{m+5} = \ldots = 0,$$

das heißt, das betreffende Glied der Störungsfunktion gibt zu keiner Gezeitenbewegung Anlaß.

Im vorliegenden Falle ist $m = 1$, $n = 2$ und $\lambda = \omega$ oder sehr wenig davon verschieden.

Vernachlässigt man ε, so wird die Bedingung $N_2 = 0$ für das erste Glied von S_1 streng, für das zweite mit großer Annäherung erfüllt sein, und man erhält, da dann $h = h_0$ ist, das bekannte Theorem von Laplace, demzufolge bei einem Ozean von konstanter Tiefe keine ganztägigen Gezeiten existieren.

Bei kugelförmiger Erde kann das für die Sonnenflut ohneweiters angenommen werden; mit geringerer Annäherung gilt es für die Mondflut, da hier der Faktor von t in $2l$ nicht mehr unmerklich klein gegen ω ist.

Nimmt man aber Rücksicht auf die Erdabplattung, so ist das auch für $\lambda = \omega$ nicht streng richtig.

Die quantitativen Verhältnisse ergeben sich dann in folgender Weise.

Angenommen es sei $\lambda = \omega + \tau$, wo τ eine kleine Größe bedeutet, so ist, wenn zunächst $\varepsilon = 0$ vorausgesetzt wird,

$$M_1 = \frac{2\tau}{\omega}.$$

Das Gleichungssystem der A ist hier

$$k_1 D_1 - M_2 A_2 + l_3 D_3 = K_2$$
$$k_3 D_3 - M_4 A_4 + l_5 D_5 = 0$$
$$\vdots$$
$$-N_1 D_1 + l_2 A_2 = 0$$
$$k_2 A_2 - N_3 D_3 + l_4 A_4 = 0$$
$$\vdots$$

woraus folgt

$$A_2 = 2\frac{\tau}{\omega}\frac{D_1}{l_2},$$

worin $D_1 = \frac{K_2}{k_1}$ gesetzt werden kann, da der wahre Wert von D_1 von diesem nur um Größen von der Ordnung $\frac{\tau}{\omega}$ abweicht.

Es ist demnach

$$A_2 = N_1 \frac{K_2}{k_1 l_2}$$

und, da hier

$$C_2 = \frac{3}{2} k^2 m_1 \frac{a^2}{r_0^3} \sin e$$

ist, so findet sich

$$A_2 = 15 \frac{\tau}{\omega} \cdot \frac{k^2 m_1 h_0}{r_0^3 \omega^2} \sin e$$

Das Glied in S_1, das ein von Null verschiedenes τ hat, ist das mit dem Argumente $\omega t + \varphi - 2l$; τ ist also negativ, die Amplitude dieser Gezeiten wird der des entsprechenden Störungsgliedes entgegengesetzt sein. (Die Koeffizienten A_4, A_6, . . . nehmen sehr rasch ab.)

Da für die Sonne $\frac{\tau}{\omega} = -\frac{1}{182\cdot 62}$, für den Mond hingegen $= -\frac{1}{13\cdot 66}$, so folgt für das Verhältnis

$$(A_2)_☾ : (A_2)_\odot = \mu \left(\frac{U_\odot}{U_☾}\right)^3 = 29\cdot 33,$$

so daß die ganztägigen Sonnenfluten tatsächlich unmerklich sind.

Die Höhe der Gezeiten nimmt auch hier mit der mittleren Meerestiefe zu, aber bei exakter Rechnung auch wieder rascher als nach bloßer Proportionalität. Für sehr große Tiefen tritt übrigens hier der oben erwähnte Fall der Resonanz ein, das heißt, die hier bestehende Periode der erzwungenen Schwingung kommt mit zunehmender Tiefe der Wurzel einer Periodengleichung der freien Schwingungen immer näher. Die Periode der hier auftretenden Mondflut beträgt ja ungefähr $1^d\ 1^h$; für $n = 1$ und $m = 1$ erhielt man bei der Tiefe $2\cdot 2\ km$ für die freie Schwingung eine Periode von $1^d\ 13^h$; bei Annahme größerer Tiefe wird die Periode kürzer, erreicht bei achtfachem Betrag der mittleren Tiefe den Wert $1^d\ 3^h$ und nähert sich immer mehr der Mondflutperiode. Die Rechnung ergibt, daß für diese Tiefe die Amplitude der ganztägigen Mondflut das Neunzehnfache der für $h_0 = 2\cdot 2\ km$ beträgt.

Was nun den Einfluß der Erdabplattung anbelangt, so folgt zunächst

$$N_1 = \frac{2\tau}{\omega} - \sin^2 \varepsilon$$

und für die Amplitude.

$$A_2 = \left(\frac{2\tau}{\omega} - \sin^2\varepsilon\right)\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon\right)(A_2)_{\varepsilon=0}$$

woraus einerseits hervorgeht, daß mit Rücksicht auf das Vorzeichen von τ diese Gezeiten vergrößert werden, anderseits daß auch die Gezeiten mit genauer Sterntagperiode einen von Null verschiedenen allerdings sehr kleinen Betrag erhalten, der etwa von der Größenordnung der Sonnenfluten bei kugelförmiger Erde ist.

Es soll übrigens hier noch bemerkt werden, daß die beiden bis jetzt untersuchten Gezeiten, die langperiodischen und die ganztägigen wesentlich durch die Abweichung der Bahnebene des störenden Körpers vom Rotationsäquator bedingt sind und nicht existieren würden, wenn die betreffende Bahn in der Äquatorebene liegen würde.

12. Halbtägige Gezeiten.

Die von S_2 herrührenden halbtägigen oder nahezu halbtägigen Gezeiten bilden die quantitativ weitaus überwiegenden Komponenten des ganzen Phänomens und verleihen diesem den auffälligen charakteristischen Verlauf. Es sind dies jene Erscheinungen der Ebbe und Flut, die schon aus der statischen Betrachtungsweise unmittelbar erfolgen — wenigstens ihrem typischen Verhalten nach — und die auch der oberflächlichen Beobachtung ohneweiters zugänglich sind.

Um eine Vorstellung von der Größenordnung dieser Gezeiten zu erhalten, soll zunächst wieder die Abplattung vernachlässigt werden.

Es soll hier der gebräuchliche Vorgang eingehalten werden, die Amplituden im Verhältnis zu denen der statischen Gezeiten anzugeben, die erhalten werden, wenn in den Fundamentalgleichung die als Faktoren auftretenden $\lambda = 0$ gesetzt werden. Sind diese Gezeiten gegeben durch

$$\zeta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\,\sin^2\vartheta} = \Sigma\,\mathfrak{A}_{n,m}\,P_{n,m}(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi},$$

so reduziert sich die aus der Oberflächenbedingung resultierende Bestimmungsgleichung der Koeffizienten auf

$$g_n\,\mathfrak{A} = C_n$$

es entspricht also jedem Glied der Störungsfunktion nur ein einziges Glied in ζ.

Das in S_2 auftretende Hauptglied, mit dem Argumente $2(\omega t + \varphi - l)$, gibt, weil

$$P_{2,2}(\cos\vartheta) = 3\sin^2\vartheta$$

für

$$C_2 = \frac{1}{4}k^2 m_1 \frac{\rho^2}{r_0^3}$$

demnach

$$\frac{g^2 h_0}{4\,\omega^2\rho^2}\,\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{16}\cdot\frac{k^2 m_1}{\omega^2 r_0^3}\,h_0 = c\,h_0$$

oder für $\varepsilon = 0$

$$\frac{g_2 h_0}{4\,\omega^2\rho^2} = \frac{G_0 h_0}{4\,\omega^2 a^2}\left(1 - \frac{3}{5}\cdot\frac{s_0}{s}\right),$$

wo $\frac{s_0}{s_1} = 0\cdot 18093$ ist.

Nimmt man wieder $h_0 = 2\cdot 2\,km$ demnach

$$\frac{G_0 h_0}{4\,\omega^2 a^2} = \frac{1}{40},$$

so wird

$$0\cdot 022286\,\mathfrak{A}_2 = c\,h_0.$$

Die dynamische Theorie der Gezeiten hat ergeben

$$\frac{h_0}{4\,\omega^2\rho^2}\,A_2\left(b_2 + c_4\frac{A_4}{A_2}\right) = c\,h_0.$$

Die oben in 7. angegebene Kettenbruchentwicklung für die Größen

$$k_{n+2} = c_{n+2} \frac{A_{n+2}}{A_n}$$

gibt für $n = 2, m = 2$

$$\log\left(\frac{h_0}{4\omega^2\rho^2} c_4 \frac{A_4}{A_2}\right) = 8\cdot 71588$$

b_2 ist unmittelbar der entsprechenden Formel zu entnehmen, man erhält schließlich

$$\frac{A_2}{\mathfrak{A}_2} = -1\cdot 9476.$$

Um das tatsächliche Amplitudenverhältnis zu finden, hat man in derselben Weise die Reihe der Koeffizienten A_4, A_6, ... zu bilden. Man findet

$$\log \frac{A_4}{A_2} = 0\cdot 03810$$

$$\log \frac{A_6}{A_4} = 9_n 58266$$

$$\log \frac{A_8}{A_6} = 9_n 22417$$

$$\vdots$$

und daraus

$$\begin{aligned} A_2 &= -1\cdot 9476\, \mathfrak{A}_2 \\ A_4 &= -2\cdot 12617\, \mathfrak{A}_2 \\ A_6 &= +0\cdot 81331\, \mathfrak{A}_2 \\ A_8 &= -0\cdot 13628\, \mathfrak{A}_2 . \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Amplitude der statischen Gezeiten ist

$$A_2 P_{2,2}(\cos\vartheta) . h_0,$$

die der dynamischen

$$[A_2 P_{2,2}(\cos\vartheta) + A_4 P_{4,2}(\cos\vartheta) + \ldots .]\, h_0,$$

wo

$$P_{n,2}(\cos\vartheta) = \frac{1.3\ldots.(2n-1)}{(n-2)!} \sin^2\vartheta \left[\cos^{n-2}\vartheta - \frac{(n-2)(n-3)}{2.(2n-1)} \cos^{n-4}\vartheta + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-2)\ldots(n-5)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} \cos^{n-6}\vartheta - \ldots . . \right].$$

Die numerische Ausführung ergibt, daß für den Äquator, $\vartheta = 90°$, die Amplitude der dynamischen Gezeiten sehr nahe das Dreifache von $\mathfrak{A}_2$ ist.

Um absolute Beträge zu erhalten, hat man in c die entsprechenden Elemente der störenden Körper einzuführen.

Es ist

$$\log c_{☉} = 3\cdot 67070-10$$
$$\log c_{☾} = 4\cdot 01173-10$$

woraus für den angenommenen Wert h_0 folgt

$$\mathfrak{A}_2\,(☉) = 0\cdot 04625\,m$$
$$\mathfrak{A}_2\,(☾) = 0\cdot 10142\,m,$$

so daß also am Äquator der Maximalbetrag der halbtägigen Gezeiten

$$0\cdot 886\,m$$

betragen würde, bei einem Ozean, der den ganzen Erdkörper mit einer gleichmäßigen Tiefe von $2\cdot 2\,km$ bedeckt.

Bei der Durchführung dieser Rechnung wurde der durch l auftretende Faktor von t gegen ω als belanglos vernachlässigt.

Das gleiche gilt auch von dem Einfluß der Abplattung für die Verhältnisse auf unserer Erde.

Will man ganz allgemein diesen Einfluß bei elliptischen Rotationskörpern berücksichtigen, so sieht man zunächst, daß der betreffende Teil der Störungsfunktion unabhängig von ε ist, die A also nur vermöge der Änderung der Größen a_n, b_n, c_n zu variieren sind.

Über den Sinn dieser Variation läßt sich von vornherein nichts aussagen, es hängt das ganz von den speziellen Voraussetzungen des Problems ab.

Setzt man ähnliche Verhältnisse wie auf der Erde voraus, so kann die folgende Betrachtung darüber Aufschluß geben.

Es soll sich in erster Linie um die Variation der beiden quantitativ bedeutendsten Koffizienten A_2 und A_4 handeln und vorausgesetzt werden, daß c_6 und der Faktor von ε^2 in A_6 so klein ist, daß $c_6\,A_6$ nicht mehr merklich von ε beeinflußt wird. Dann hat man zur Bestimmung von A_2 und A_4

$$b_2\,A_2+c_4\,A_4 = C_2$$
$$a_2\,A_2+b_4\,A_4 = -\,c_6\,A_6$$

und, da die beiden rechten Seiten von ε unabhängig sind, so hat man für die gesuchten Variationen δA

$$a_2\,\delta A_2+c_4\,\delta A_4 = -\varepsilon^2 A_2\left(\beta_2+\gamma_4\frac{A_4}{A_2}\right)$$
$$a_2\,\delta A_2+b_4\,\delta A_4 = -\varepsilon^2 A_2\left(\alpha_2+\beta_4\frac{A_4}{A_2}\right)$$

wo die α, β, γ die Koeffizienten von $\sin^2\varepsilon$ in den entsprechenden Größen a, b, c sind.

a und c sind wesentlich positive, α und γ negative Größen, die mit wachsendem n und konstantem m ($=2$) gegen Null konvergieren; in

$$b_n = g_n+B_n$$

ist g_n wesentlich positiv und konvergiert gegen eine endliche Grenze, B_n negativ und gegen Null konvergierend, es ist also b_n positiv oder geht einmal von einer negativen Anfangsreihe zu positiven Werten über, für β besteht ein ähnliches Verhalten. Tritt dieser Wechsel schon zwischen $n=2$ und $n=4$ ein, so ist die Determinante wesentlich negativ und es wird sich das Vorzeichen von δA_2 und δA_4 leicht entscheiden lassen.

Im Falle der Erde tritt das tatsächlich ein bei der oben angenommenen Tiefe der Wasserschicht.

Man erhält für die Variationen δA Größen, die mit A_2 und daher auch mit A_4 verschiedenes Vorzeichen besitzen, das heißt, die Amplituden werden kleiner. Es ergibt sich

$$A_2 = -\,1\cdot 9476\,(1-4\cdot 43\,\varepsilon^2)\,\mathfrak{A}_2,$$
$$A_4 = -\,2\cdot 1262\,(1-5\cdot 96\,\varepsilon^2)\,\mathfrak{A}_2.$$

13. Wirkung einer sektoriellen Tiefenfunktion.

Die bisherigen Resultate gelten für ein Maclaurin'sches Ellipsoid, dessen Flüssigkeitsschichte von zwei Niveauflächen begrenzt ist. Sie bleiben in allen wesentlichen Punkten bestehen, wenn die Tiefe irgendeine Funktion der geographischen Breite ist. Man erhält immer aus der Bedingung der Identität der Faktoren gleich hoher Kugelfunktionen eine fortlaufende Reihe von Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten der Entwicklung von ζ mit nur reellen Größen, so daß etwaige komplexe Lösungen konjugiert sein müssen und im Integral selbst wieder einen reellen Faktor A ergeben. Jedem Glied

$$C^{(\lambda)}_{nm}\, P_{n,m}(\cos\vartheta)\, e^{i(m\varphi+\lambda t)}$$

entspricht in der Entwicklung von

$$\zeta\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\vartheta}$$

eine Reihe

$$e^{i(m\varphi+\lambda t)}\sum_m^{\infty} A^{(\lambda)}_{n,m}\, P^{n,m}(\cos\vartheta)$$

mit reellen Koeffizienten $A^{(\lambda)}_{n,m}$, woraus insbesonders folgt, daß bei zonaler Tiefenfunktion die Phase der Gezeiten dieselbe ist wie die der Störungskraft, ein Resultat, das zuerst von Laplace ausgesprochen wurde. Dies bleibt aber nicht mehr bestehen, wenn h auch eine Funktion von φ ist.

Setzt man der Einfachheit halber $\varepsilon = 0$, was für die folgende Betrachtung ganz irrelevant ist, so lautet die Oberflächenbedingung

$$g_0\zeta - k^2\Pi + \lambda^2\psi = S$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(h_1\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{h_1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)+\frac{2\omega}{i\lambda}\left[\frac{\partial(h_1\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}-\frac{\partial(h_1\cos\vartheta)}{\partial\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right]=$$
$$= a^2\sin\vartheta.\zeta,$$

wo

$$h_1 = \frac{h}{1-\dfrac{4\omega^2}{\lambda^2}\cos^2\vartheta}\cdot$$

Die erste Relation gibt Anlaß zu der Bestimmungsgleichung

$$g_n A_n + \lambda^2\Gamma_n = C_n,$$

wenn wie früher mit Γ die Entwicklungskoeffizienten von ψ bezeichnet werden.

Setzt man nun hier h auch von φ abhängig voraus und greift etwa ein Glied einer Fourier'schen Entwicklung heraus

$$h_1 = h_0\, e^{i\mu\varphi},$$

wo der Einfachheit halber h_0 als unabhängig von ϑ angenommen wird, so ergibt die Kontinuitätsgleichung für den Term mit

$$e^{i(m\varphi+\lambda t)}$$

in ψ und ζ bis auf einen konstanten Faktor

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)-(m^2+m\mu)\frac{\psi}{\sin\vartheta}-m\frac{2\omega}{\lambda}\sin\vartheta.\psi-m\frac{2\omega}{\lambda}i\mu\cos\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}=\sin\vartheta.\zeta$$

oder

$$\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sum_n\Gamma_n P_n\right)-(m^2+m\mu)\sum_n\Gamma_n P_n - m\frac{2\omega}{\lambda}\sin^2\vartheta\sum_n\Gamma_n P_n -$$

$$- m\frac{2\omega}{\lambda}i\mu\sin\vartheta\cos\vartheta\sum_n\Gamma_n\frac{\partial P_n}{\partial\vartheta} = \sin^2\vartheta\sum_n A_n P_n.$$

Vermöge der bekannten Reduktionsformeln lassen sich die hier auf die P anzuwendenden Operationen wieder durch Kugelfunktionen darstellen und man erhält unter Zuziehung der Oberflächenbedingung wieder eine Gleichung zwischen A_{n-2}, A_n, A_{n+2}, die aber auch imaginäre Größen enthält; die Lösungen werden daher im allgemeinen die Form

$$A_n = (A_n)\,e^{ik_n}$$

haben, wo (A_n) reell ist. Die einzelnen Glieder von ζ lauten jetzt

$$(A_n)\,P_n\,e^{i(k_n+m\varphi+\lambda t)},$$

haben also eine andere Phase als die störende Kraft.

Da theoretische Untersuchungen (siehe Poincaré l. c.) gezeigt haben, daß die Reibung bei dem Phänomen der Gezeiten einer relativ dünnen Flüssigkeitsschicht keine nennenswerte Rolle spielen kann, so sind die beobachteten, stellenweise ganz außerordentlich großen Phasendifferenzen den sektoriellen Unregelmäßigkeiten des Meeresbodens zuzuschreiben.

Zeitschrift/Journal: Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.

Jahr/Year: 1914

Band/Volume: 89

Autor(en)/Author(s): Hillebrand Carl

Artikel/Article: Die Dynamische Theorie der Gezeiten auf einem MaclauriÅ½schen Ellipsoid. 401-442