

NEUE METHODE DER SPHÄRISCHEN NETZAUSGLEICHUNG

UND

DEREN ANWENDUNG AUF DIE BERECHNUNG DER GEOGRAPHISCHEN LAGE

DES

ST. STEPHANSTURMES IN WIEN

VON

S. WELLISCH,

BAUINSPEKTOR DES WIENER STADTBAUAMTES.

Mit 4 Textfiguren.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 26. NOVEMBER 1914.

Die Methode der Netzausgleichung, welche in dem vorliegenden Aufsatze zur Behandlung gelangt, unterscheidet sich von der üblichen Methode im wesentlichen darin, daß an Stelle der Winkelgleichungen eine neue Gattung von Bedingungsgleichungen, die sogenannten Richtungsgleichungen, eingeführt werden. Es sind dies jene Gleichungen, welche zum Ausdrucke bringen, daß nach erfolgter Ausgleichung und Orientierung des Netzes die zugeordneten Richtungen im Hin- und Hergange — gleichwie im ebenen Dreiecksnetze genau auf 180° — im sphärischen Netze auf $180^\circ +$ Ordinatenkonvergenz stimmen müssen.

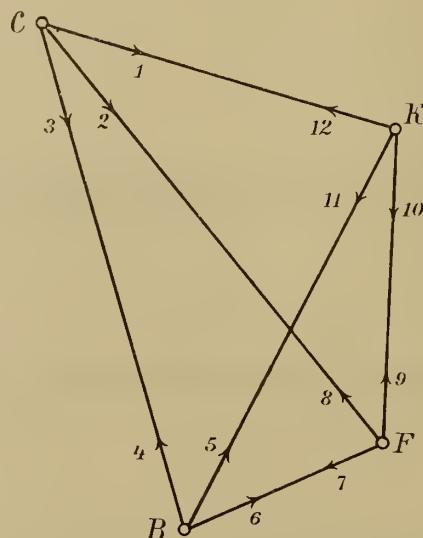
Diese Methode hat durch die Einführung der neuen Bedingung keinesfalls eine Mehrarbeit in der Rechnung zur Folge; im Gegenteile, der Rechnungsgang gestaltet sich wesentlich bequemer und kürzer. Überdies besitzt diese Methode den Vorteil der Unabhängigkeit von der Wahl der beim üblichen Verfahren erforderlichen Winkelgleichungen.

Nachdem wir an anderer Stelle¹ die Netzausgleichung in der Ebene behandelt haben, sei in dem vorliegenden Artikel die Netzausgleichung auf der Sphäre an der Hand eines ausführlichen Zahlen-

¹ »Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung.« Wien u. Leipzig, 1910, II. Bd., p. 148. »Netzorientierung durch Einführung von Richtungsbedingungsgleichungen« in der »Österr. Zeitschr. f. Vermessungswesen«, 1913, p. 178.

beispiele durchgenommen. Wir wählen hiezu das in Jordan-Eggert's »Handbuch der Vermessungskunde«, 1910, I. Bd., § 66 behandelte, im nebenstehenden Netzbilde (Fig. 1) dargestellte Viereck »Catharina

Fig. 1.



—Belchen—Feldberg—Kandel« der badischen Landestriangulierung, das wir der Vollständigkeit wegen zuerst nach Richtungen, sodann nach Winkeln ausgleichen.

I. Ausgleichung nach Richtungen.

a) Übliche Methode.

Zusammenstellung der beobachteten Richtungen.

Station Catharina.		Station Kandel	
Kandel	... (1) = 0° 00' 00"00	Feldberg	... (10) = 0° 00' 00"00
Feldberg	... (2) = 34 52 27·44	Belchen	... (11) = 25 09 09·67
Belchen	... (3) = 57 49 20·90	Catharina	... (12) = 102 43 24·53

Station Belchen.		Station Feldberg.	
Catharina	... (4) = 0° 00' 00"00	Belchen	... (7) = 0° 00' 00"00
Kandel	... (5) = 44 36 27·07	Catharina	... (8) = 72 58 55·84
Feldberg	... (6) = 84 04 12·94	Kandel	... (9) = 115 23 06·40

Summenproben mit Berücksichtigung der sphärischen Exzesse.

$C(1, 3) = 57^{\circ} 49' 20\cdot90$	$C(2, 3) = 22^{\circ} 56' 53\cdot46$
$B(4, 5) = 44 36 27\cdot07$	$F(7, 8) = 72 58 55\cdot84$
$K(11, 12) = 77 34 14\cdot86$	$B(4, 6) = 84 04 12\cdot94$
Summe: 180° 00' 02·83	Summe: 180° 00' 02·24
Soll 180 00 01·83	Soll 180 00 01·22
$w = + 1^{\circ}00$	$w = + 1^{\circ}02$

$B(5, 6) = 39^\circ 27' 45\overset{''}{.}87$	$F(8, 9) = 42^\circ 24' 10\overset{''}{.}56$
$F(7, 9) = 115^\circ 23' 06\overset{''}{.}40$	$K(10, 12) = 102^\circ 43' 24\overset{''}{.}53$
$K(10, 11) = 25^\circ 09' 09\overset{''}{.}67$	$C(1, 2) = 34^\circ 52' 27\overset{''}{.}44$
Summe: $180^\circ 00' 01\overset{''}{.}94$	Summe: $180^\circ 00' 02\overset{''}{.}53$
Soll $180^\circ 00' 00\overset{''}{.}67$	Soll $180^\circ 00' 01\overset{''}{.}28$
$v = + 1\overset{''}{.}27$	$v = + 1\overset{''}{.}25$

In die Ausgleichung eingeführte Winkelgleichungen.

$$\left. \begin{array}{l} v_3 - v_1 + v_5 - v_4 + v_{12} - v_{11} + 1^\circ 00 = 0 \\ v_3 - v_2 + v_8 - v_7 + v_6 - v_4 + 1^\circ 02 = 0 \\ v_9 - v_8 + v_{12} - v_{10} + v_2 - v_1 + 1^\circ 25 = 0 \end{array} \right\} \dots (1)$$

Seitengleichung in Einheiten der sechsten Logarithmendezimale.

$$\left. \begin{array}{l} -3^\circ 02 v_1 + 8^\circ 00 v_2 - 4^\circ 98 v_3 - 0^\circ 22 v_4 + 2^\circ 56 v_5 - 2^\circ 34 v_6 - 4^\circ 97 v_{10} \\ + 4^\circ 49 v_{11} + 0^\circ 48 v_{12} - 2^\circ 90 = 0 \end{array} \right\} \dots (2)$$

Normalgleichungen.

$$\left. \begin{array}{l} 155^\circ 09 k_1 - 3^\circ 19 k_2 - 15^\circ 10 k_3 + 16^\circ 47 k_4 - 2^\circ 90 = 0 \\ 6^\circ 00 + 2^\circ 00 + 2^\circ 00 + 1^\circ 00 = 0 \\ 6^\circ 00 - 2^\circ 00 + 1^\circ 02 = 0 \\ 6^\circ 00 + 1^\circ 25 = 0 \end{array} \right\} \dots (3)$$

Korrelaten.

$$k_1 = +0^\circ 044 \quad k_2 = +0^\circ 078 \quad k_3 = -0^\circ 232 \quad k_4 = -0^\circ 431.$$

Die Richtungsverbesserungen v enthält die Tabelle I in Spalte 2. In der Spalte 3 sind die beobachteten, von Jordan der Ausgleichung zugrunde gelegten Richtungen (1) bis (12) in genäherter Orientierung, wie solche aus Anschlußrechnungen stets gewonnen werden können, aufgeführt. Hierin stimmen die Richtungen (1), (6) und (9) mit ihren Gegenrichtungen (12), (7) und (10) auf 180° vollkommen ziffermäßig überein, weil dies bei der auf drei Stationen willkürlichen Festsetzung der Anfangsrichtung von Jordan so angenommen worden ist. Daß dann nicht auch die übrigen Richtungen, (2) mit (8), (3) mit (4) und (5) mit (11), zusammenstimmen, hat teils in den Beobachtungsfehlern, teils darin seinen Grund, daß das Viereck nicht eben, sondern sphärisch ist. Es muß aber hervorgehoben werden, daß — wie bereits erwähnt — bei sphärischen Netzen die ausgeglichenen und orientierten Richtungen der Dreiecksseiten mit ihren Gegenrichtungen nicht vollkommen auf 180° übereinstimmen dürfen, sondern um $180^\circ +$ Ordinatenkonvergenz voneinander abweichen müssen, wie ja auch die Winkelsumme in einem sphärischen Dreieck nicht genau 180° , sondern $180^\circ +$ sphärischen Exzeß betragen muß.

Die Spalte 4 der Tabelle I enthält die von Jordan angegebenen Ausgleichungsergebnisse ohne Wiederholung der Grade und Minuten.

b) Ordinatenkonvergenz.

Der von der Konvergenz der Ordinatenkreise abhängende Unterschied im Richtungswinkel eines Strahles MN und seines Gegenstrahles NM ergibt sich aus der Formel

$$\Delta \alpha_{m,n} - \alpha_{m,n} - \alpha_{n,m} = \frac{\rho}{2r^2} (r_m + r_n) (\lambda_n - \lambda_m),$$

worin y_m, x_m beziehungsweise y_n, x_n die rechtwinkligen sphärischen Koordinaten der Punkte M, N bedeuten und r den mittleren Krümmungshalbmesser darstellt. Da die Ordinatenkonvergenzen der sechs Seiten des Vierecks in der Folge eine wichtige Rolle spielen, sei deren numerische Berechnung hier vorausgeschickt.

Tabelle I.

Richtung Nr.	Ver- besserungen v	Beobachtete			Aus- geglichene
		Richtungen ohne Orientierungsanschluß			
1	2	3	4		
1	+ 0°221	104° 33' 24°00		24°22	
2	+ 0°153	139 25 51°44		51°59	
3	- 0°372	162 22 44°90		44°53	
4	+ 0°144	342 22 40°13		40°27	
5	+ 0°190	26 59 07°20		07°39	
6	- 0°335	66 26 53°07		52°74	
7	+ 0°232	246 26 53°07		53°30	
8	+ 0°199	319 25 48°91		49°11	
9	- 0°431	1 49 59°47		59°04	
10	+ 0°214	181 49 59°47		59°68	
11	+ 0°119	206 59 09°14		09°26	
12	- 0°332	284 33 24°00		23°67	

Die hiezu erforderlichen Koordinaten der vier Stationen haben wir dem Aufsatze von Jordan: »Ausgleichung eines Triangulierungsnetzes mit Repetitionswinkelmessung« in der »Zeitschrift für Vermessungswesen« 1878, p. 18 bis 34, entnommen. Die rechtwinkligen sphärischen Koordinaten der vier Punkte nach Angabe der badischen Landestriangulierung, jedoch für die nach Norden gerichtete positive Abszissenachse, sind:

Catharina	$y = -57\ 369\cdot38\ m$	$x = -152\ 032\cdot10\ m$
Belchen	-46 945·31	-184 849·97
Feldberg	-34 075·05	-179 239·32
Kandel	-33 403·83	-158 255·28

Zur Berechnung der Ordinatenkonvergenzen genügen aber genäherte Koordinaten. Für die geographische Breite von 48° ist

$$\log r = 6\cdot80479, \quad \log \frac{\rho}{2r^2} = 1\cdot40382 - 10.$$

Damit erhält man für die Ordinatenkonvergenzen die Werte:

$$\begin{aligned}
 \text{Von } C \text{ nach } K & \Delta a_{1,12} = + 1^\circ 43 \\
 \text{» } C \text{ » } F & \Delta a_{2,8} = + 6^\circ 30 \\
 \text{» } C \text{ » } B & \Delta a_{3,4} = + 8^\circ 67 \\
 \text{» } K \text{ » } F & \Delta a_{10,9} = + 3^\circ 59 \\
 \text{» } K \text{ » } B & \Delta a_{11,5} = + 5^\circ 41 \\
 \text{» } F \text{ » } B & \Delta a_{7,6} = + 1^\circ 15.
 \end{aligned}$$

Bildet man für jedes einzelne Dreieck mit Berücksichtigung des Vorzeichens die Summen der Ordinatenkonvergenzen der drei Dreiecksseiten, so erhält man die sphärischen Exzesse der betreffenden Dreiecke, was als Rechenprobe dienen kann, denn es ist allgemein

$$\begin{aligned}\Delta a_{1,2} &= \frac{\rho}{2r^2} (y_1 + y_2) (x_2 - x_1) \\ \Delta a_{2,3} &= \frac{\rho}{2r^2} (y_2 + y_3) (x_3 - x_2) \\ \Delta a_{3,1} &= \frac{\rho}{2r^2} (y_3 + y_1) (x_1 - x_3) \\ \hline [\Delta a] &= \frac{\rho}{2r^2} \cdot 2f = \rho \frac{f}{r^2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

und man erhält mit den aus der Dreiecksfläche f nach der Formel $\varepsilon = \rho \frac{f}{r^2}$ direkt berechneten, in der Zusammenstellung der Summenproben bereits ausgewiesenen sphärischen Exzessen vollkommen übereinstimmend die speziellen Werte:

$$\begin{aligned}\text{Dreieck } C-B-K &\dots +8 \cdot 67 - 5 \cdot 41 - 1 \cdot 43 = 1^{\circ} 83 \\ \text{» } C-F-B &\dots +8 \cdot 67 - 1 \cdot 15 - 6 \cdot 30 = 1 \cdot 22 \\ \text{» } B-F-K &\dots +5 \cdot 41 - 1 \cdot 15 - 3 \cdot 59 = 0 \cdot 67 \\ \text{» } F-K-C &\dots +6 \cdot 30 - 1 \cdot 43 - 3 \cdot 59 = 1 \cdot 28.\end{aligned}$$

Die in der Spalte 4 der Tabelle I ausgeglichenen Richtungen Jordan's erfüllen wohl die Seitenungleichung und alle Winkelgleichungen, aber sie stimmen mit ihren Gegenrichtungen nicht sofort auf $180^\circ + \Delta a$ überein. Um dies zu erreichen, wurden in der Spalte 3 der Tabelle II die nach Jordan ausgeglichenen Richtungen an die Richtungen der Station C unter Belassung der Differenzen $180^\circ + \Delta a$ angeschlossen, indem die drei Richtungen (1), (2) und (3) der ersten Station C , welche von den vier

Tabelle II.

Richtung Nr.	Beobachtete			Die um v verbesserten Richtungen der Spalte 2	
	Richtungen mit Orientierungsanschluß				
	1	2	3		
1	104° 33' 24" 00		24° 22	24° 22	
2	139 25 51·44		51·59	51·59	
3	162 22 44·90		44·53	44·53	
4	342 22 36·23		35·86	36·37	
5	26 59 03·30		02·98	03·49	
6	66 26 49·17		48·33	48·84	
7	246 26 49·30		49·48	49·53	
8	319 25 45·14		45·29	45·34	
9	1 49 55·70		55·22	55·27	
10	181 49 58·04		58·80	58·25	
11	206 59 07·71		08·38	07·83	
12	284 33 22·57		22·79	22·24	

Richtungssätzen als die am besten orientierten angenommen seien, unverändert gelassen, die zugehörigen Gegenrichtungen (12), (8) und (4), wovon je eine den drei anderen Stationen angehört, auf $180^\circ + \Delta \alpha$ abgestimmt und die übrigen Richtungen je eines Satzes an die derart endgültig orientierten Strahlen der betreffenden Beobachtungsstationen ohne Veränderung der Winkel angeschlossen wurden, wodurch der zweite Satz um die Ordinatenkonvergenz $\Delta \alpha_{4.3} = -8^\circ 67$, der dritte Satz um $\Delta \alpha_{8.2} = -6^\circ 30$ und der vierte Satz um $\Delta \alpha_{12.1} = -1^\circ 43$ gegenüber dem ersten Satz gedreht erscheint.

Fügt man die Jordan'schen Verbesserungen v an die »beobachteten Richtungen mit Orientierungsanschluß« (Spalte 2 der Tabelle II), die in ähnlicher Weise orientiert wurden wie die Werte der Spalte 3, so erhält man die Ergebnisse der Spalte 4, die aber (von den drei Richtungen der ersten Station abgesehen) mit den »ausgeglichenen Richtungen mit Orientierungsanschluß« (Spalte 3) selbstverständlich erst dann übereinstimmen können, wenn sie abermals auf $180^\circ + \Delta \alpha$ abgestimmt werden.

c) Neue Methode.

Bei dieser Ausgleichungsmethode wird der Orientierungsanschluß mit Vorteil gleich an den beobachteten Richtungen vorgenommen. In den Spalten 2 und 3 der Tabelle III erscheinen die beobachteten Richtungen und die unter dem erwähnten Gesichtspunkte vorläufig orientierten Richtungen der leichteren Übersichtlichkeit wegen nochmals angeschrieben (vergl. Spalte 3 der Tabelle I und Spalte 2 der Tabelle II).

Tabelle III.

Richtung Nr.	Beobachtete Richtungen			Unterschiede der gegen- seitigen Richtungen $\Delta \alpha$	Ordinaten- Konver- genzen $\Delta \alpha$	Differenzen (sollen gleich Null sein) $\Delta \alpha - \Delta \alpha$
	ohne		mit			
	Orientierungsanschluß					
1	2	3		4	5	6
1	104° 33' 24" 00		24" 00	+ 1" 43	+ 1" 43	0
2	139 25 51' 44		51' 44	+ 6' 30	+ 6' 30	0
3	162 22 44' 90		44' 90	+ 8' 67	+ 8' 67	0
4	342 22 40' 13		36' 23	- 8' 67	- 8' 67	0
5	26 59 07' 20		03' 30	- 4' 41	- 5' 41	- 1' 00
6	66 26 53' 07		49' 17	- 0' 13	- 1' 15	- 1' 02
7	246 26 53' 07		49' 30	+ 0' 13	+ 1' 15	+ 1' 02
8	319 25 48' 91		45' 14	- 6' 30	- 6' 30	0
9	1 49 59' 47		55' 70	- 2' 34	- 3' 59	- 1' 25
10	181 49 59' 47		58' 04	+ 2' 34	+ 3' 59	+ 1' 25
11	206 59 09' 14		07' 71	+ 4' 41	+ 5' 41	+ 1' 00
12	284 33 24' 00		22' 57	- 1' 43	- 1' 43	0

In der Spalte 4 sind die Richtungsunterschiede der Werte von Spalte 3 mit Weglassung von 180° in dem Sinne

$$\Delta \alpha_{m.n} = \alpha_{m.n} - \alpha_{n.m},$$

in der Spalte 5 die Ordinatenkonvergenzen $\Delta \alpha_{m.n}$ und in der Spalte 6 die Differenzen $\Delta \alpha - \Delta \alpha$, welche nach der Ausgleichung Null sein müssen, ausgewiesen, wobei zu beachten ist, daß in den drei letzten Spalten die zu den Richtungen im Hingange gehörigen Werte jenen im Rückgange dem absoluten Betrage nach gleich, ihrem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt sein müssen.

Nach unserer Ausgleichungsmethode benötigt man als Bedingungsgleichungen sechs Richtungsgleichungen, welche an die Stelle der drei Winkelgleichungen zu treten haben, und eine Seitengleichung. Die Richtungsgleichungen werden wie folgt erhalten. Es bestehen zwischen der ausglichenen Richtung $[\alpha_{m,n}]$ von M nach N und ihrer Gegenrichtung $[\alpha_{n,m}]$ von N nach M , sowie zwischen der gemessenen Richtung $(\alpha_{m,n})$ von M nach N und ihrer Gegenrichtung $(\alpha_{n,m})$ von N nach M , deren Verbesserungen zur Unterscheidung von den bisherigen v mit v_m und v_n bezeichnet werden mögen, die Gleichungen

$$[\alpha_{n,m}] - [\alpha_{m,n}] = 180^\circ + \Delta \alpha_{n,m} = 180^\circ - \Delta \alpha_{m,n}$$

$$(\alpha_{n,m}) + v_n - (\alpha_{m,n}) - v_m = 180^\circ - \Delta \alpha_{m,n}.$$

Da aber

$$(\alpha_{n,m}) - (\alpha_{m,n}) = 180^\circ + \Delta \alpha_{n,m} = 180^\circ - \Delta \alpha_{m,n},$$

so besteht die Bedingungsgleichung

$$v_n - v_m = \Delta \alpha_{m,n} - \Delta \alpha_{n,m}$$

oder

$$v_m - v_n - (\Delta \alpha_{m,n} - \Delta \alpha_{n,m}) = 0.$$

Nach dieser Anleitung erhält man mit Benützung der Werte aus der Spalte 6 der Tabelle III die sechs Richtungsgleichungen

$$\left. \begin{array}{l} v_1 - v_{12} = 0 \\ v_2 - v_8 = 0 \\ v_3 - v_4 = 0 \\ v_5 - v_{11} + 1.00 = 0 \\ v_6 - v_7 + 1.02 = 0 \\ v_9 - v_{10} + 1.25 = 0 \end{array} \right\} \dots (4).$$

Die in den drei letzten Gleichungen auftretenden Absolutglieder sind jenen der drei Winkelgleichungen (1) der üblichen Methode gleich.

Der Umstand, daß die sechs Richtungsgleichungen der neuen Methode immer nur je zwei Unbekannte, die drei Winkelgleichungen der üblichen Methode aber je sechs Unbekannte enthalten, bewirkt es, daß die ganze Rechnung nach der neuen Methode wesentlich bequemer und einfacher sich gestaltet. Eine weitere Vereinfachung bringt die Seitengleichung mit sich. Es kann zwar die bei der üblichen Methode verwendete Seitengleichung direkt benutzt werden, empfehlenswert erscheint es jedoch, diese Seitengleichung umzuformen.

Die übliche Seitengleichung (2) enthält 9 unbekannte Verbesserungen. Hieron sind aber 3 Verbesserungen von den anderen abhängig, was aus den Richtungsbedingungsgleichungen (4) hervorgeht. Man kann daher die Anzahl der Unbekannten in der Seitengleichung sozusagen mit einem Federstrich von 9 auf 6 vermindern. Setzt man nämlich in der Seitengleichung (2)

$$-3.02 v_1 + 8.00 v_2 - 4.98 v_3 - 0.22 v_4 + 2.56 v_5 - 2.34 v_6 - 4.97 v_{10} + 4.49 v_{11} + 0.48 v_{12} - 2.90 = 0$$

in Entsprechung der Richtungsgleichungen:

$$v_3 \text{ statt } v_4, \quad v_1 \text{ statt } v_{12} \text{ und } v_5 + 1.00 \text{ statt } v_{11},$$

so erhält man die verkürzte Seitengleichung

$$-2.54 v_1 + 8.00 v_2 - 5.20 v_3 + 7.05 v_5 - 2.34 v_6 - 4.97 v_{10} + 1.50 = 0, \dots (5)$$

welche nur noch 6 unbekannte Verbesserungen enthält. Die Rechnung mit den sechs Richtungsgleichungen und der verkürzten Seitengleichung nimmt nun folgenden Verlauf:

Koeffizienten der Bedingungsgleichungen.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	w
+ 1	- 1	0
.	+ 1	- 1	0
.	.	+ 1	- 1	0
.	.	.	.	+ 1	- 1	.	+1.00
.	+ 1	- 1	+1.02
.	+ 1	- 1	.	.	+1.25
- 2.54	+ 8.00	- 5.20	.	+ 7.05	- 2.34	.	.	.	- 4.97	.	.	+1.59

Bildung der Summenkoeffizienten.

$$[aa] = [bb] = [cc] = [dd] = [ee] = [ff] = 2,$$

$$[ag] = -2.54, [bg] = +8.00, [cg] = -5.20, [dg] = +7.05, [eg] = -2.34,$$

$$[fg] = +4.97, [gg] = +177.37.$$

Normalgleichungen.

$$\left. \begin{array}{l} 2.00 f_1 + \dots + \dots - 2.54 f_7 \dots = 0 \\ 2.00 f_2 + \dots + \dots + 8.00 f_7 \dots = 0 \\ 2.00 f_3 + \dots + \dots - 5.20 f_7 \dots = 0 \\ 2.00 f_4 + \dots + 7.05 f_7 + 1.00 = 0 \\ 2.00 f_5 + \dots - 2.34 f_7 + 1.02 = 0 \\ 2.00 f_6 + 4.97 f_7 + 1.25 = 0 \\ + 177.37 f_7 + 1.59 = 0 \end{array} \right\} \dots \quad (6)$$

Hieraus werden die Korrelaten sehr einfach dadurch erhalten (und darin besteht die wesentlichste Erleichterung), daß die aus den sechs ersten Normalgleichungen resultierenden, sofort anschreibbaren Ansätze

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = +1.270 f_7 \\ f_2 = -4.000 f_7 \\ f_3 = +2.600 f_7 \\ f_4 = -3.525 f_7 - 0.500 \\ f_5 = +1.170 f_7 - 0.510 \\ f_6 = -2.485 f_7 - 0.625 \end{array} \right\} \dots \quad (7)$$

in die letzte Normalgleichung eingesetzt, eine Gleichung mit der einzigen Unbekannten f_7 ergibt, die sohin leicht ermittelt werden kann. Ist aber f_7 einmal bekannt, so werden die übrigen Korrelaten aus den obigen sechs Ansätzen (7) durch einfache Substitution erhalten. Die Auflösung der Normalgleichungen, bekanntlich die umständlichste und zeitraubendste Arbeit der ganzen Ausgleichung, bereitet sohin nach der neuen Methode keine Schwierigkeiten. Die Rechnung liefert zunächst aus

$$88.6853 f_7 - 3.8478 = 0, \quad f_7 = 0.043387$$

die Korrelaten:

$$f_1 = +0.055, \quad f_2 = -0.174, \quad f_3 = +0.113, \quad f_4 = -0.653, \quad f_5 = -0.459, \quad f_6 = -0.733, \\ f_7 = +0.043,$$

sodann die in der Tabelle IV, Spalte 3 eingetragenen Verbesserungen v , welche, an die »beobachteten Richtungen mit Orientierungsanschluß« (Spalte 3 der Tabelle III oder Spalte 2 der Tabelle IV) angefügt, die in der Spalte 4 ausgewiesenen ausgeglichenen Richtungen ergeben.

Tabelle IV.

Richtung Nr.	Beobachtete Richtungen			Ver- besserungen v	Ausgeglichene Richtungen			Unterschiede $v - v$
	1	2	3		4	5		
1	104° 33' 24"00		- 0"055	104° 33' 23"94		+ 0"28		
2	139 25 51.44		+ 0.173	139 25 51.61		- 0.02		
3	162 22 44.90		- 0.113	162 22 44.79		- 0.26		
4	342 22 36.23		- 0.113	342 22 36.12		+ 0.26		
5	26 59 03.30		- 0.847	26 59 02.95		+ 0.54		
6	66 26 49.17		- 0.561	66 26 48.61		+ 0.23		
7	246 26 49.30		+ 0.459	246 26 49.76		- 0.23		
8	319 25 45.14		+ 0.174	319 25 45.31		+ 0.02		
9	1 49 55.70		- 0.733	1 49 54.97		+ 0.30		
10	181 49 58.04		+ 0.517	181 49 58.56		- 0.30		
11	206 59 07.71		+ 0.653	206 59 08.36		- 0.53		
12	284 33 22.57		- 0.055	284 33 22.51		- 0.28		

Die ausgeglichenen Richtungen in der Spalte 4 erfüllen die Winkelgleichungen und die Seiten-
gleichung und sind auch sofort richtig orientiert, indem alle sechs Richtungspaare auf 180° + Ordinaten-
konvergenz vollkommen übereinstimmen. Die Rechenprobe ergibt:

Prüfung der Winkelgleichungen.

$$\begin{array}{ll}
 C[1, 3] = 57^\circ 49' 20"85 & C[2, 3] = 22^\circ 56' 53"18 \\
 B[4, 6] = 44^\circ 36' 26"83 & F[7, 8] = 72^\circ 58' 55"55 \\
 K[11, 12] = 77^\circ 34' 14"15 & B[4, 6] = 84^\circ 04' 12"49 \\
 \hline
 \text{Summe . . } 180^\circ 00' 01"83 & \text{Summe . . } 180^\circ 00' 01"22 \\
 \\
 B[5, 6] = 39^\circ 27' 45"66 & F[8, 9] = 42^\circ 24' 09"66 \\
 F[7, 9] = 115^\circ 23' 05"21 & K[10, 12] = 102^\circ 43' 23"95 \\
 K[10, 11] = 25^\circ 09' 09"80 & C[1, 2] = 34^\circ 52' 27"67 \\
 \hline
 \text{Summe . . } 180^\circ 00' 00"67 & \text{Summe . . } 180^\circ 00' 01"28
 \end{array}$$

Prüfung der Seitengleichung

$$\begin{array}{ll}
 \log \sin [1, 2] = 9.7572 280 & \log \sin [2, 3] = 9.5909 501 \\
 \log \sin [4, 6] = 9.9976 699 & \log \sin [5, 6] = 9.8031 672 \\
 \log \sin [10, 11] = 9.6284 222 & \log \sin [10, 12] = 9.9892 028 \\
 \hline
 & \quad 9.3833 201
 \end{array}$$

Prüfung der Richtungsgleichungen.

$$\begin{array}{ll} [12]-[1] = 180^\circ - 1^\circ 43 & [11]-[5] = 180^\circ + 5^\circ 41 \\ [8]-[2] = 180 - 6^\circ 30 & [7]-[6] = 180 + 1^\circ 15 \\ [4]-[3] = 180 - 8^\circ 67 & [10]-[9] = 180 + 3^\circ 59. \end{array}$$

Es ist der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung nach der üblichen Methode

$$\sqrt{\frac{[vv]}{4}} = \sqrt{\frac{0.8176}{4}} = \pm 0^\circ 45$$

nach der neuen Methode

$$\sqrt{\frac{[vv]}{7}} = \sqrt{\frac{1.9686}{7}} = \pm 0^\circ 53.$$

Die nach beiden Methoden ausgeglichenen Winkel und deren Verbesserungen enthält die Tabelle V.

Tabelle V.

Winkel- bezeichnung	Beobachtete Winkel	Verbesserungen nach der		Ausgeglichene Winkel nach der	
		üblichen	neuen	üblichen	neuen
		Methode		Methode	
1	2	3	4	5	6
1, 2	34° 52' 27"44	- 0"07	+ 0"23	27"37	27"67
2, 3	22 56 53"46	- 0"52	- 0"28	52"94	53"18
4, 5	44 36 27"07	+ 0"05	- 0"24	27"12	26"83
5, 6	39 27 45"87	- 0"52	- 0"21	45"35	45"66
7, 8	72 58 55"84	- 0"03	- 0"29	55"81	55"55
8, 9	42 24 10"56	- 0"63	- 0"90	09"93	09"66
10, 11	25 09 09"67	- 0"09	+ 0"13	09"58	09"80
11, 12	77 34 14"86	- 0"45	- 0"71	14"41	14"15

Rechnet man mit den ausgeglichenen Winkel unter Benützung des Legendre'schen Satzes alle Dreiecksseiten, so erhält man bei Zugrundelegung der Basis Catharina—Belchen = 34432.57 m folgende Ergebnisse, welchen des Vergleiches halber die in Jordan-Eggert's Handbuch, I. Bd., p. 114 angegebenen Resultate gegenübergestellt seien.

Tabelle VI.

Dreieckssseite	Länge der Seiten nach der		Differenz in Metern
	üblichen	neuen	
	Methode		
Catharina—Belchen . . .	34432.57	34432.57	0
Catharina—Feldberg . . .	35816.62	35816.63	+ 0.01
Catharina—Kandel . . .	24760.43	24760.40	- 0.03
Belchen—Feldberg . . .	14039.83	14039.87	+ 0.04
Belchen—Kandel . . .	29843.17	29843.23	+ 0.06
Feldberg—Kandel . . .	20994.59	20994.64	+ 0.05

II. Ausgleichung nach Winkeln.

a) Ohne Orientierungswinkel.

Nachdem die Ausgleichung nach Richtungen sowohl mit Winkelgleichungen als auch mit Richtungsgleichungen erledigt ist, sei nunmehr die Ausgleichung nach Winkeln behandelt, die bekanntlich ohne Orientierungswinkel oder mit Orientierungswinkeln durchgeführt werden kann. Bei der »Ausgleichung nach Winkeln ohne Orientierungswinkel« erhält man nur Winkelverbesserungen, aber keine Richtungsverbesserungen, so daß eine Orientierungsausgleichung nicht vorgenommen werden kann.

Nach dieser Methode bestehen, wenn man zum Unterschiede von den Richtungsverbesserungen v die Winkelverbesserungen mit δ bezeichnet, in unserem Vierecksbeispiel folgende Bedingungsgleichungen

Winkelgleichungen.

$$\delta_{1.2} + \delta_{2.3} + \delta_{4.5} + \delta_{11.12} + 1 \cdot 00 = 0$$

$$\delta_{2.3} + \delta_{4.5} + \delta_{5.6} + \delta_{7.8} + 1 \cdot 02 = 0$$

$$\delta_{1.2} + \delta_{8.9} + \delta_{10.11} + \delta_{11.12} + 1 \cdot 25 = 0$$

Seitengleichung.

$$3 \cdot 02 \delta_{1.2} - 4 \cdot 98 \delta_{2.3} + 0 \cdot 22 \delta_{4.5} - 2 \cdot 34 \delta_{5.6} + 4 \cdot 97 \delta_{10.11} + 0 \cdot 48 \delta_{11.12} - 2 \cdot 90 = 0.$$

Aus den Normalgleichungen

$$4 k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 - 1 \cdot 26 k_4 + 1 \cdot 00 = 0$$

$$4 \dots - 7 \cdot 10 \dots + 1 \cdot 02 = 0$$

$$4 \dots + 8 \cdot 47 \dots + 1 \cdot 25 = 0$$

$$+ 64 \cdot 38 \dots - 2 \cdot 90 = 0$$

erhält man die Korrelaten

$$k_1 = +0 \cdot 204, \quad k_2 = -0 \cdot 107, \quad k_3 = -0 \cdot 713, \quad k_4 = +0 \cdot 141$$

und schließlich die in der Spalte 4 der Tabelle VII zusammengestellten Ergebnisse.

Tabelle VII.

Winkelbezeichnung	Winkelverbesserungen δ	Beobachtete Winkel	Ausgeglichene Winkel	
			ohne	mit
			Orientierungswinkel	
1	2	3	4	5
1, 2	— 0°08	34° 52' 27"44	27°36	27°38
2, 3	— 0°61	22° 56' 53"46	52°85	53°13
4, 5	+ 0°13	44° 36' 27"07	27°20	26°95
5, 6	— 0°44	39° 27' 45"87	45°43	45°30
7, 8	— 0°11	72° 58' 55"84	55°73	55°84
8, 9	— 0°71	42° 24' 10"56	09°85	09°80
10, 11	— 0°01	25° 09' 09"67	09°66	09°74
11, 12	— 0°44	77° 34' 14"86	14°42	14°36

b) Mit Orientierungswinkeln.

Nach der Methode der Winkelausgleichung mit Orientierungswinkeln, bei welcher neben Winkel- auch Richtungsverbesserungen erhalten werden und daher auch eine Orientierungsausgleichung vorgenommen werden kann, hat man nach dem Vorgange von Bessel in jeder Beobachtungsstation einen Orientierungs- oder Richtungswinkel z einzuführen, das ist jener Winkel, den die als positive Richtung der Abszissenachse genommene Nullrichtung mit der als Anfangsstrahl gewählten Richtung des Satzes nach dessen Ausgleichung einschließt.

In unserem Vierecksbeispiele seien die Winkel, welche die Richtungen Nr. 1, 4, 7 und 10 mit der Nullrichtung nach der Ausgleichung bilden, mit z_1, z_4, z_7, z_{10} bezeichnet, so daß — da die Nullrichtung selbst keine Verbesserung erhält — die Gleichungen bestehen (vgl. Fig. 2, p. 15 [45]):

$$\begin{aligned} (1) \quad & +v_1 = z_1 \\ (4) \quad & +v_4 = z_4 \\ (7) \quad & +v_7 = z_7 \\ (10) \quad & +v_{10} = z_{10} \end{aligned}$$

Die voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen sind dann:

$$\begin{aligned} z_1 - z_{10} - [10, 12] & +180^\circ - \Delta \alpha_{1, 12} = 0 \\ z_1 - z_7 - [7, 8] + [1, 2] & +180^\circ - \Delta \alpha_{2, 8} = 0 \\ z_1 - z_4 + [1, 3] & +180^\circ - \Delta \alpha_{3, 4} = 0 \\ z_4 - z_{10} - [10, 11] + [4, 5] & -180^\circ - \Delta \alpha_{5, 11} = 0 \\ z_4 - z_7 + [4, 6] & -180^\circ - \Delta \alpha_{6, 7} = 0 \\ z_7 - z_{10} + [7, 9] & -180^\circ - \Delta \alpha_{9, 10} = 0 \end{aligned}$$

Infolge der Beobachtungsfehler werden anstatt diesen Winkelbedingungsgleichungen folgende Widerspruchsgleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} (1) - (10) - (10, 12) & +180^\circ - \Delta \alpha_{1, 12} = 0 \\ (1) - (7) - (7, 8) + (1, 2) & +180^\circ - \Delta \alpha_{2, 8} = 0 \\ (1) - (4) + (1, 3) & +180^\circ - \Delta \alpha_{3, 4} = 0 \\ (4) - (10) - (10, 11) + (4, 5) & -180^\circ - \Delta \alpha_{5, 11} = 0 \\ (4) - (7) + (4, 6) & -180^\circ - \Delta \alpha_{6, 7} = 0 \\ (7) - (10) + (7, 9) & -180^\circ - \Delta \alpha_{9, 10} = 0 \end{aligned}$$

Hieraus resultieren die Verbesserungsgleichungen:

$$\begin{aligned} v_1 - v_{10} - \delta_{10, 12} - (\Delta \alpha_{1, 12} - \Delta \alpha_{1, 12}) & = 0 \\ v_1 - v_7 - \delta_{7, 8} + \delta_{1, 2} - (\Delta \alpha_{2, 8} - \Delta \alpha_{2, 8}) & = 0 \\ v_1 - v_4 + \delta_{1, 3} - (\Delta \alpha_{3, 4} - \Delta \alpha_{3, 4}) & = 0 \\ v_4 - v_{10} - \delta_{10, 11} + \delta_{4, 5} - (\Delta \alpha_{5, 11} - \Delta \alpha_{5, 11}) & = 0 \\ v_4 - v_7 + \delta_{4, 6} - (\Delta \alpha_{6, 7} - \Delta \alpha_{6, 7}) & = 0 \\ v_7 - v_{10} + \delta_{7, 9} - (\Delta \alpha_{9, 10} - \Delta \alpha_{9, 10}) & = 0 \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf die besonderen Werte der Spalte 6 der Tabelle III:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 - v_{10} - \delta_{10,12} = 0 \\ v_1 - v_7 - \delta_{7,8} + \delta_{1,2} = 0 \\ v_1 - v_4 + \delta_{1,3} = 0 \\ v_4 - v_{10} - \delta_{10,11} + \delta_{4,5} + 1 \cdot 00 = 0 \\ v_4 - v_7 + \delta_{4,6} + 1 \cdot 02 = 0 \\ v_7 - v_{10} + \delta_{7,9} + 1 \cdot 25 = 0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (8)$$

Zu diesen sechs Winkelgleichungen tritt noch die Seitengleichung

$$\frac{\sin(1,2) \sin(4,6) \sin(10,11)}{\sin(2,3) \sin(5,6) \sin(10,12)} = 1,$$

deren lineare Form:

$$3 \cdot 02 \delta_{1,2} + 0 \cdot 22 \delta_{4,6} + 4 \cdot 49 \delta_{10,11} - 4 \cdot 98 \delta_{2,3} - 2 \cdot 56 \delta_{5,6} + 0 \cdot 48 \delta_{10,12} - 2 \cdot 90 = 0$$

durch Substitution von

$$\delta_{2,3} = \delta_{4,3} - \delta_{1,2} \text{ und } \delta_{5,6} = \delta_{4,6} - \delta_{4,5}$$

die Gestalt annimmt:

$$8 \cdot 00 \delta_{1,2} - 4 \cdot 98 \delta_{1,3} + 2 \cdot 56 \delta_{4,5} - 2 \cdot 34 \delta_{4,6} + 4 \cdot 49 \delta_{10,11} + 0 \cdot 48 \delta_{10,12} - 2 \cdot 90 = 0 \quad \dots \quad (9)$$

Mit den sieben Bedingungsgleichungen (8) und (9) erhält man direkt die darin auftretenden 8 Winkelverbesserungen und 4 Richtungsverbesserungen und indirekt die übrigen 8 Richtungsverbesserungen aus der allgemeinen Beziehung $v_n = v_m + \delta_{m,n}$ wie folgt:

Normalgleichungen.

$$\begin{aligned} 3k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + \dots + k_6 - 0 \cdot 48 k_7 &= 0 \\ 4k_2 + k_3 + \dots + k_5 - k_6 + 8 \cdot 00 k_7 &= 0 \\ 4k_3 - k_4 - k_5 + \dots - 4 \cdot 98 k_7 &= 0 \\ 4k_4 + k_5 + k_6 - 1 \cdot 93 k_7 + 1 \cdot 00 &= 0 \\ 4k_5 - k_6 - 2 \cdot 34 k_7 + 1 \cdot 02 &= 0 \\ 4k_6 - \dots - 1 \cdot 25 &= 0 \\ 121 \cdot 22 k_7 - 2 \cdot 90 &= 0 \end{aligned}$$

Korrelaten:

$$\begin{aligned} k_1 &= +0 \cdot 427, & k_2 &= -0 \cdot 002, & k_3 &= -0 \cdot 421, & k_4 &= -0 \cdot 098, & k_5 &= -0 \cdot 706, & k_6 &= -0 \cdot 762, \\ k_7 &= -0 \cdot 007. \end{aligned}$$

Die ausgeglichenen Winkel enthält die Tabelle VII in Spalte 5, die ausgeglichenen Richtungen die Tabelle VIII.

Die nach dieser Methode ausgeglichenen Richtungen (der Tabelle VIII) weichen von den nach der neuen Methode erhaltenen (der Tabelle IV) nicht un wesentlich ab, was durch Vergleichung der bezüglichen Verbesserungen V (in Tabelle VIII) mit v (in Tabelle IV) deutlich zu erkennen ist. Zwischen beiden Methoden der Orientierungsausgleichung besteht jedoch eine Beziehung. Setzt man nämlich in die Gleichungen (8) an Stelle der Winkelverbesserungen die Richtungsverbesserungen nach der allgemeinen Relation

$$\delta_{m,n} = v_n - v_m$$

und in die Gleichung (9) außerdem in Entsprechung der Richtungsgleichungen (wie im Kapitel I. c)

$$v_3 \text{ statt } v_4, \quad v_1 \text{ statt } v_{12} \text{ und } v_5 + 1 \cdot 00 \text{ statt } v_{11},$$

so erhält man das System der Richtungsgleichungen (4) und die verkürzte Seitengleichung (5). Es geht zum Beispiel die erste Gleichung der Gruppe (8)

$$v_1 - v_{10} - \delta_{10, 12} = 0$$

durch Substitution von

$$\delta_{10, 12} = v_{12} - v_{10}$$

über in

$$v_1 - v_{10} - v_{12} + v_{10} = 0$$

oder

$$v_1 - v_{12} = 0,$$

welche mit der ersten Richtungsgleichung des Systems (4) identisch ist.

Tabelle VIII.

Richtung Nr.	Ver- besserungen <i>V</i>	Beobachtete			Aus- gegliche
		Richtungen			
1	0°	104°	33'	24°00	24°00
2	- 0°05	139	25	51°44	51°39
3	- 0°38	162	22	44°90	44°52
4	- 0°38	342	22	36°23	35°85
5	- 0°50	26	59	03°30	02°80
6	- 1°07	66	26	49°17	48°10
7	- 0°05	246	26	49°30	49°25
8	- 0°05	319	25	45°14	45°09
9	- 0°82	1	49	55°70	54°88
10	+ 0°43	181	49	58°04	58°47
11	+ 0°50	206	59	07°71	08°21
12	0	284	33	22°57	22°57

III. Praktische Bemerkungen.

Im Kapitel I. c wurde hervorgehoben, daß in unserem Viereck bei der neuen Methode die absoluten Glieder der Richtungsgleichungen entweder Null oder jenen gleich sind, die auch schon in den Winkelgleichungen der üblichen Methode auftreten. Diese Beziehung kann dazu benutzt werden, die Richtungsgleichungen ohne Kenntnis der Ordinatenkonvergenzen sofort anzuschreiben.

In dem durchgerechneten Viereck sind die Verbesserungen der von der ersten Beobachtungsstation ausgehenden Richtungen jenen ihrer Gegenrichtungen gleichgesetzt, wodurch die ersten drei Richtungsgleichungen der Gruppe (4) mit den Absolutgliedern Null erhalten werden. Die drei anderen Richtungsgleichungen ergeben sich ohne weiteres aus den drei Winkelgleichungen (1), wenn man darin die in den

drei ersten Richtungsgleichungen vorkommenden, sich gegenseitig aufhebenden Verbesserungen einfach wegläßt.

Dieser Vorgang sei nun ausführlich an dem klassischen Fünfeck der hannover'schen Gradmessung¹ (Fig. 3) gezeigt, wobei des besseren Vergleiches wegen den neuen Bedingungs- und Normalgleichungen

Fig. 2.

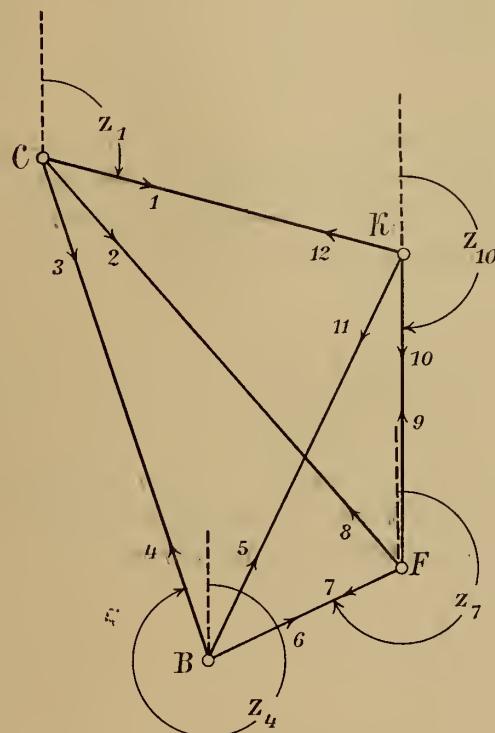
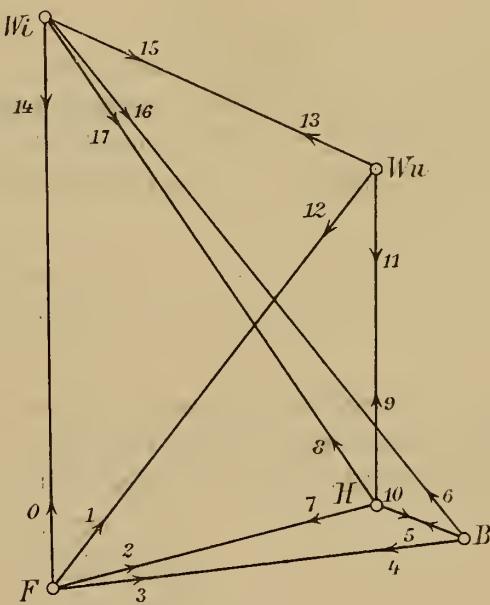


Fig. 3.



die von Gauss aufgestellten vorausgeschickt seien. Werden die den gemessenen Richtungen 0, 1, 2 . . . 17 zukommenden Verbesserungen mit (0), (1), (2) . . . (17) bezeichnet, so lauten die Gauss'schen Bedingungsgleichungen wie folgt:

Winkelgleichungen

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad -(2)+(3)-(4) + (5) + (7) - (10) - 1 \cdot 368 = 0 \\ 2. \quad -(1)+(2)-(7) + (9) - (11) + (12) + 1 \cdot 773 = 0 \\ 3. \quad -(0)+(2)-(7) + (8) + (14) - (17) + 1 \cdot 042 = 0 \\ 4. \quad -(5)+(6)-(8) + (10) - (16) + (17) - 0 \cdot 813 = 0 \\ 5. \quad -(8)+(9)-(11) + (13) - (15) + (17) - 0 \cdot 750 = 0 \end{array} \right\} \dots (a)$$

Seitengleichungen

$$\left. \begin{array}{l} 6. \quad +4 \cdot 3 (0) - 153 \cdot 9 (2) + 149 \cdot 6 (3) + 39 \cdot 1 (4) - 79 \cdot 6 (5) + 40 \cdot 5 (6) + 31 \cdot 9 (14) \\ \quad + 275 \cdot 4 (16) - 307 \cdot 3 (17) + 25 \cdot 0 = 0 \\ 7. \quad +4 \cdot 3 (0) - 24 \cdot 2 (1) + 19 \cdot 9 (2) + 36 \cdot 1 (11) - 28 \cdot 6 (12) - 7 \cdot 5 (13) + 31 \cdot 9 (14) \\ \quad + 29 \cdot 1 (15) - 61 \cdot 0 (17) - 3 \cdot 0 = 0 \end{array} \right\} \dots (b)$$

¹ Gauss: »Suppl. theor. comb. etc.« 1826. Werke, Bd. IV, p. 87 bis 92.

Weltisch: »Theorie und Praxis der Ausgleichsrechnung,« Bd. II, p. 150 bis 154.

Die Koeffizienten der Normalgleichungen sind (I):

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	w
+60000	-20000	-20000	-20000	...	+ 18480	- 1990	-136.8
	+60000	+20000	...	+20000	- 15390	- 2060	+177.3
		+60000	-20000	-20000	+ 18100	+10850	+104.2
			+60000	+20000	- 46260	- 6100	-81.3
				+60000	- 30730	-13370	-75.0
					+226884	+16719	+25.0
						+ 8763	- 3.0

Bei dem neuen Verfahren erfolgt die Aufstellung der Bedingungs- und Normalgleichungen nach folgenden Gesichtspunkten. Die Verbesserungen der von der Station Wilsede = W_i ausgehenden vier Richtungen 14, 15, 16, 17 werden jenen der Gegenrichtungen 0, 13, 6, 8 gleichgesetzt, wodurch die ersten vier Richtungsgleichungen mit den Absolutgliedern Null erhalten werden, nämlich

$$\left. \begin{array}{l} (14)-(0) = 0 \\ (15)-(13) = 0 \\ (16)-(6) = 0 \\ (17)-(8) = 0 \end{array} \right\} \dots (c)$$

Indem, diesen Beziehungen entsprechend, in der dritten, vierten und fünften Winkelgleichung (14) gegen (0), (15) gegen (13), (16) gegen (6) und (17) gegen (8) gekürzt wird, ergeben sich sofort die weiteren Richtungsgleichungen mit den Absolutgliedern der letzten drei Winkelgleichungen von (a)

$$\left. \begin{array}{l} (2) - (7) + 1.042 = 0 \\ (10) - (5) - 0.813 = 0 \\ (9) - (11) - 0.750 = 0 \end{array} \right\} \dots (d)$$

und hierauf durch Substitution von (7) = (2) + 1.042, (10) = (5) + 0.813 und (11) = (9) - 0.750 in die beiden ersten Winkelgleichungen von (a) die restlichen Richtungsgleichungen

$$\left. \begin{array}{l} (3) - (4) - 1.139 = 0 \\ (12) - (1) + 1.481 = 0 \end{array} \right\} \dots (e)$$

Nimmt man bei der Umformung der Seitengleichungen (b) auf die Richtungsgleichungen (c), (d) und (e) Rücksicht, so resultieren folgende verkürzte Seitengleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} 36.2(0) - 153.9(2) + 188.7(3) - 79.6(5) + 315.9(6) - 307.3(8) - 19.5 = 0 \\ 36.2(0) - 52.8(1) + 19.9(2) - 61.0(8) + 36.1(9) + 21.6(13) + 12.3 = 0 \end{array} \right\} \dots (f)$$

und die Koeffizienten der Normalgleichungen (II):

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	w
20000	- 3620	- 3620	...
	20000	- 2160	...
		20000	- 31590
			20000	+ 30730	+ 6100
				20000	- 15390	+ 1990	+ 104.2	
					20000	+ 7960	...	- 81.3	
						20000	+ 3610	- 75.0	
							20000	...	+ 18870	...	- 113.9
								20000	...	+ 5280	+ 148.1
									261166	+ 16993	- 19.5
										9985	+ 12.3

An Stelle der 5 Winkelgleichungen (a) mit je 6 und der 2 Seitengleichungen (b) mit je 9 Unbekannten treten also bei Anwendung der neuen Methode 9 Richtungsgleichungen mit je 2 und 2 Seiten-gleichungen mit je 6 Unbekannten. Die anstatt der 7 Normalgleichungen (I) entstehenden 11 Normal-gleichungen (II) sind zwar in größerer Anzahl, aber von weit einfacherer Form, was in der Rechenpraxis ausschlaggebend ist. Diese 11 Normalgleichungen lassen sich nämlich sehr leicht auf 5 Gleichungen reduzieren, wenn man die aus der 2., 3., 6., 7., 8. und 9. Normalgleichung ohne weiteres anschreibbaren Ansätze

$$\begin{aligned}k_2 &= +0 \cdot 1080 k_{11} \\k_3 &= +1 \cdot 5795 k_{10} \\k_6 &= -0 \cdot 3980 k_{10} + 0 \cdot 00407 \\k_7 &= -0 \cdot 1805 k_{11} + 0 \cdot 00375 \\k_8 &= -0 \cdot 9435 k_{10} + 0 \cdot 00570 \\k_9 &= -0 \cdot 2640 k_{11} - 0 \cdot 00740\end{aligned}$$

in die übrigen Normalgleichungen substituiert, wodurch sechs Korrelaten verschwinden und sofort die fünf bedeutend reduzierten Normalgleichungen

$$\begin{array}{cccccc}k_1 & k_4 & k_5 & k_{10} & k_{11} & w \\20000 & \dots & \dots & -3620 & -3620 & \dots = 0 \\20000 & \dots & \dots & +30730 & +6100 & \dots = 0 \\20000 & -15390 & +1990 & +104 \cdot 2 & = 0 \\190298 & +16993 & +120 \cdot 5 & = 0 \\7706 & -45 \cdot 1 & = 0\end{array}$$

entstehen, welche wesentlich einfacher und müheloser aufgelöst werden können, als die sieben Normal-gleichungen (I) des altgebräuchlichen Verfahrens, was der Praktiker beim bloßen Anblick erkennt. Wendet man nämlich auf das System der 5 Normalgleichungen das Verfahren von Schleiermacher an, indem man die aus den drei ersten dieser Gleichungen hervorgehenden Ansätze

$$\begin{aligned}k_1 &= +0 \cdot 1810 k_{10} + 0 \cdot 1810 k_{11} \\k_4 &= -1 \cdot 5365 k_{10} - 0 \cdot 3050 k_{11} \\k_5 &= +0 \cdot 7695 k_{10} - 0 \cdot 0995 k_{11} - 0 \cdot 00521\end{aligned}$$

in die beiden letzten Gleichungen einsetzt, so erhält man schließlich ein System von bloß zwei Gleichungen, welche den Bau von Normalgleichungen aufweisen; sie lauten:

$$\begin{aligned}140 \cdot 584 k_{10} + 8496 k_{11} + 200 \cdot 7 &= 0 \\8 \cdot 496 k_{10} + 1992 k_{11} - 55 \cdot 5 &= 0.\end{aligned}$$

Die weitere Rechnung nimmt den normalen Gang.

Bemerkt sei noch, daß die Absolutglieder der ersten Gleichungsgruppe (c) nicht unbedingt Null sein müssen.

IV. Positionsbestimmung des Stephansturmes.

Für das Gebiet der Stadt Wien samt Umgebung kommen die für die Zwecke der internationalen Gradmessung bestimmten trigonometrischen Punkte erster Ordnung: »Hermannskogel«, »Hundsheimer« und »Anniner« als Hauptdreieckspunkte in erster Linie in Betracht, da das ganze Stadtgebiet innerhalb des von diesen Punkten gebildeten Dreiecks gelegen ist. Den vom k. u. k. Militärgeographischen Institute herausgegebenen »Ergebnissen der Triangulierungen«, 1. Band 1901, entnehmen wir:

1. Die geographischen Koordinaten der drei Fundamentalpunkte.

	Breite	Länge von Ferro
Hermannskogel	48° 16' 15" 2900	33° 57' 41" 0600
Hundsheimer	48 07 57.6364	34 36 24.0265
Anniner	48 02 52.7203	33 54 49.5000

2. Die Azimute der Dreiecksseiten von Nord über Ost.

Von Hermannskogel nach Hundsheimer	107° 31' 41" 700
» Hermannskogel » Anniner	188 09 25.077
» Hundsheimer » Anniner	259 55 05.159
» Hundsheimer » Hermannskogel	288 00 33.472
» Anniner » Hermannskogel	8 07 17.264
» Anniner » Hundsheimer	79 24 08.726

3. Die Logarithmen der Längen der Dreiecksseiten.

$$\begin{aligned}\log (\text{Hermannskogel} - \text{Hundsheimer}) &= 4.702\ 1012, 8 \\ \log (\text{Hermannskogel} - \text{Anniner}) &= 4.398\ 6072, 2 \\ \log (\text{Hundsheimer} - \text{Anniner}) &= 4.719\ 8689, 4.\end{aligned}$$

4. Die Dreieckswinkel.

Dreieckspunkt	Beobachtete Winkel	Korrektionen aus der Netzausgleichung	Sphärischer Exzeß	Ausgeglichene Winkel des ebenen Dreiecks
Hermannskogel	42° 92	+ 0° 457	1° 051	80° 37' 42" 326
Hundsheimer	28° 26	+ 0° 053	1° 050	28 05 27.263
Anniner	50° 21	+ 1° 252	1° 051	71 16 50.411
Summen .	1° 39	+ 1° 767	3° 152	180 00 00.000

Für die Positionsbestimmung der Spitze des Stephansturmes aus den geographischen Koordinaten der genannten drei Fundamentalpunkte erscheint es von Vorteil, zugleich mit dieser Bestimmung die Festlegung des Punktes »Andreasberg« bei Rauchenwart östlich von Himberg zu verbinden, während es sich für die Stationsausgleichung empfiehlt, überdies noch die nach dem Punkte zweiter Ordnung »Kirche Ober-Siebenbrunn« im Marchfelde angestellten Richtungsmessungen einzubeziehen. Dieser Rechnungsplan lag — nach einer freundlichen Mitteilung des ehemaligen Direktors des Triangulierungs- und Kalkülbureaus,

Herrn Hofrat A. Broch — der Bestimmung der Koordinaten des Stephansturmes für die fünfte Auflage der Theodolitinstruktion vom Jahre 1904 zugrunde und soll auch bei der Neuberechnung nach der hier dargestellten Methode beibehalten werden. Das hiebei benutzte Beobachtungsmaterial wurde den Serien geodätischer Messungen des Militärgeographischen Institutes aus den Jahren 1857 bis 1859 und 1867 bis 1876, sowie den Beobachtungen der Katastertriangulierung aus dem Jahre 1867 entnommen, wobei die zu St. Stephan gehörigen Beobachtungsdaten mittels der in den »Mitteilungen des k. u. k. Militärgeographischen Institutes«, 10. Band, 1891, enthaltenen Ergebnisse auf die Beobachtungsserie der Periode 1857 bis 1859 reduziert wurden.

Die zugrunde gelegten Beobachtungen mit den Resultaten der Stationsausgleichung sind:

1. Auf der Station Hermannskogel.

Epoche der Beobachtungen	Anninger <i>o</i>	Ober-Siebenbrunn <i>A</i>	Hundsheimer <i>B</i>	Stephansturm <i>C</i>	Andreasberg <i>D</i>
Mil.-Triang. 1857—1859 .	0° 0' 0"	262° 45' 28"46	—	311° 17' 43"63	316° 39' 57"09
Mil.-Triang. 1867—1876 .	0 0 0	—	279° 22' 17"08	311 17 43.34	316 39 56.69
Kat.-Triang. 1867 . . .	0 0 0	—	—	311 17 45.27	—

Normalgleichungen.

$$3A - C - D - 14 \cdot 660 = 0$$

$$3B - C - D - 11 \cdot 208 = 0$$

$$8C - 2D - 2 \cdot 132 = 0$$

$$6D - 18 \cdot 828 = 0.$$

Stationsausgleichung.

	Annahme	Verbesserungen	Ausgegl. Richtungen
Anninger	0° 00' 00"		0° 00' 00"
Ober-Siebenbrunn .	262 45 20	+8"642	262 45 28.642
Hundsheimer . . .	279 22 10	+7"491	279 22 17.491
Stephansturm . . .	311 17 40	+4"079	311 17 44.079
Andreasberg . . .	316 39 50	+7"187	316 39 57.187.

2. Auf der Station Anninger.

Epoche der Beobachtungen	Hermannskogel <i>o</i>	Stephansturm <i>A</i>	Andreasberg <i>B</i>	Hundsheimer <i>C</i>
Mil.-Triang. 1857—1859 .	—	0° 00' 00"	50° 36' 53"61	—
Mil.-Triang. 1867—1876 .	0° 0' 0"	19 44 00.76	70 20 52.08	71° 16' 50"21
Kat.-Triang. 1867 . . .	0 0 0	19 43 59.26	70 20 54.00	—

Normalgleichungen.

$$23A - 13B - 3C + 14 \cdot 608 = 0$$

$$23B - 3C - 72 \cdot 432 = 0$$

$$9C + 6 \cdot 624 = 0.$$

Stationsausgleichung.

	Annahme	Verbesserungen	Ausgegl. Richtungen
Hermannskogel . . .	0° 00' 00"		0° 00' 00"
Stephansturm . . .	19 44 00	-0° 150	19 43 59.850
Andreasberg . . .	70 20 50	+3° 101	70 20 53.101
Hundsheimer . . .	71 16 50	+0° 281	71 16 50.281.

3. Auf der Station Andreasberg.

Epoche der Beobachtungen	Anninger o	Hermannskogel A	Stephansturm B	Ober-Siebenbrunn C	Hundsheimer D
Mil.-Triang. 1857—1859 .	0° 0' 0"	66° 19' 04"59	69° 14' 05"27	139° 14' 54"46	181° 27' 06"86
Mil.-Triang. 1867—1876 .	0 0 0	66 19 04.72	—	—	—
Kat.-Triang. 1867 . . .	—	—	0 00 00	70 00 49.43	112 13 07.43

Normalgleichungen.

$$\begin{aligned}
 19.5 A - 3 B - 3 C - 3 D - 40.710 &= 0 \\
 22 B - 8 C - 8 D + 18.795 &= 0 \\
 22 C - 8 D + 39.495 &= 0 \\
 +22 D - 116.505 &= 0.
 \end{aligned}$$

Stationsausgleichung.

	Annahme	Verbesserungen	Ausgegl. Richtungen
Anninger	0° 00' 00"		0° 00' 00"
Hermannskogel . .	66 19 00	+4° 655	66 19 04.655
Stephansturm . . .	69 14 00	+4° 288	69 14 04.288
Ober-Siebenbrunn	139 14 50	+3° 598	139 14 53.598
Hundsheimer . . .	181 27 00	+8° 798	181 27 08.798.

4. Auf der Station Stephansturm.

Epoche der Beobachtungen	Anninger	Hermannskogel	Ober-Siebenbrunn	Hundsheimer	Andreasberg
Mil.-Triang. 1857—1859 .	0° 0' 0"	111° 33' 44"98	227° 37' 39"74	253° 12' 26"43	299° 50' 58"33

5. Auf der Station Hundsheimer.

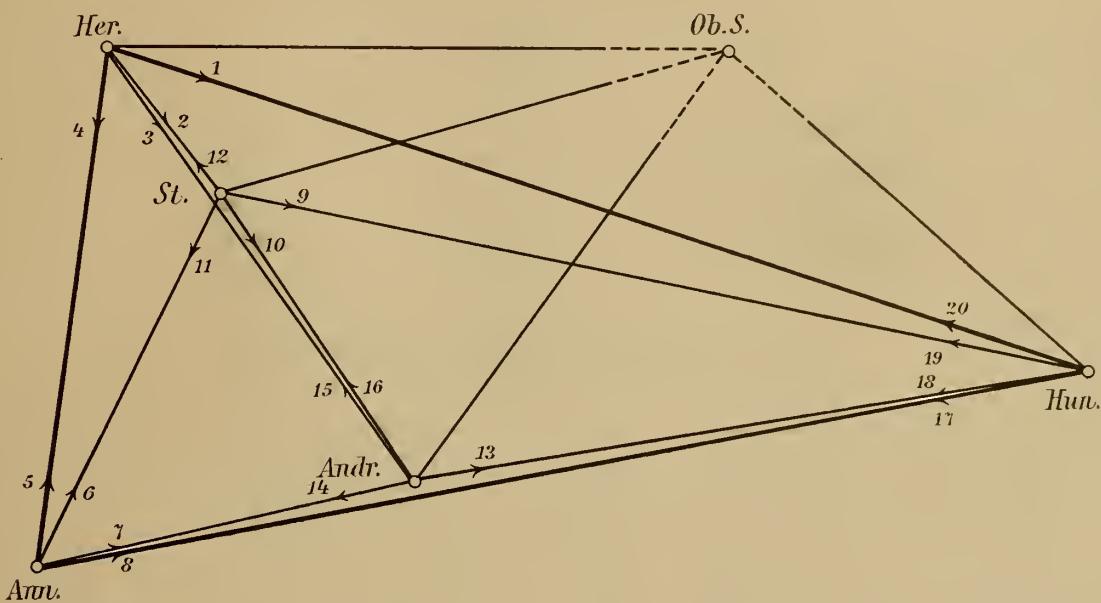
Epoche der Beobachtungen	Anninger	Hermannskogel
Mil.-Triang. 1867—1876 .	0° 0' 0"	28° 05' 28"26

Methode der sphärischen Netzausgleichung.

51

Die Ergebnisse der Stationsausgleichung sind mit Bezug auf die in dem Netzbilde (Fig. 4) eingeschriebenen Richtungsnummern in der 2. Spalte der Tabelle IX, welche konform der Tabelle III auf-

Fig. 4.



gestellt ist, nochmals zusammengeschrieben. In der 3. Spalte sind diese Richtungen nach dem Meridian von St. Stephan vorläufig orientiert, indem die Richtung Nr. 12 mit $319^{\circ} 30' 42\frac{5}{5}$ zum Ausgang

Tabelle IX.

Richtungs- Nr.	Ergebnisse der Stationsausgleichung		Vorläufig orientierte Richtungen		$\Delta \alpha$	$\Delta \alpha$	$\Delta \alpha - \Delta \alpha$
	1	2	3	4			
1		$279^{\circ} 22' 17\frac{4}{5}91$	$107^{\circ} 35' 16\frac{1}{5}015$	$- 1^{\circ} 540$	$- 1^{\circ} 540$	0	
2		$311^{\circ} 17' 44\frac{1}{5}079$	$139^{\circ} 30' 42\frac{1}{5}603$	$+ 0^{\circ} 103$	$+ 0^{\circ} 103$	0	
3		$316^{\circ} 39' 57\frac{1}{5}187$	$144^{\circ} 52' 55\frac{1}{5}711$	$- 0^{\circ} 160$	$- 0^{\circ} 160$	0	
4		$0^{\circ} 00' 00\cdot000$	$188^{\circ} 12' 58\frac{1}{5}524$	$+ 0^{\circ} 966$	$+ 0^{\circ} 966$	0	
5		$0^{\circ} 00' 00\cdot000$	$8^{\circ} 12' 57\frac{1}{5}558$	$- 0^{\circ} 966$	$- 0^{\circ} 966$	0	
6		$19^{\circ} 43' 59\frac{1}{5}850$	$27^{\circ} 56' 57\frac{1}{5}408$	$- 0^{\circ} 112$	$- 0^{\circ} 429$	$- 0^{\circ} 317$	
7		$70^{\circ} 20' 53\frac{1}{5}101$	$78^{\circ} 33' 50\frac{1}{5}659$	$- 0^{\circ} 557$	$- 0^{\circ} 005$	$+ 0^{\circ} 552$	
8		$71^{\circ} 16' 50\frac{1}{5}281$	$79^{\circ} 29' 47\frac{1}{5}839$	$+ 1^{\circ} 456$	$+ 0^{\circ} 664$	$+ 2^{\circ} 120$	
9		$253^{\circ} 12' 26\frac{1}{5}430$	$101^{\circ} 09' 23\frac{1}{5}950$.	$- 1^{\circ} 051$.	
10		$299^{\circ} 50' 58\frac{1}{5}330$	$147^{\circ} 47' 55\frac{1}{5}850$	$+ 0^{\circ} 346$	$- 0^{\circ} 319$	$- 0^{\circ} 665$	
11		$0^{\circ} 00' 00\cdot000$	$207^{\circ} 56' 57\frac{1}{5}520$	$+ 0^{\circ} 112$	$+ 0^{\circ} 429$	$+ 0^{\circ} 317$	
12		$111^{\circ} 33' 44\frac{1}{5}980$	$319^{\circ} 30' 42\frac{1}{5}500$	$- 0^{\circ} 103$	$- 0^{\circ} 103$	0	
13		$181^{\circ} 27' 08\frac{1}{5}798$	$80^{\circ} 01' 00\cdot014$.	$- 1^{\circ} 557$.	
14		$0^{\circ} 00' 00\cdot000$	$258^{\circ} 33' 51\frac{1}{5}216$	$+ 0^{\circ} 557$	$+ 0^{\circ} 005$	$0^{\circ} 552$	
15		$66^{\circ} 19' 04\frac{1}{5}655$	$324^{\circ} 52' 55\frac{1}{5}871$	$- 0^{\circ} 160$	$+ 0^{\circ} 160$	0	
16		$69^{\circ} 14' 04\frac{1}{5}288$	$327^{\circ} 47' 55\frac{1}{5}504$	$- 0^{\circ} 346$	$+ 0^{\circ} 319$	$+ 0^{\circ} 665$	
17		$0^{\circ} 00' 00\cdot000$	$259^{\circ} 29' 49\frac{1}{5}295$	$+ 1^{\circ} 456$	$- 0^{\circ} 664$	$- 2^{\circ} 120$	
20		$28^{\circ} 05' 28\frac{1}{5}260$	$287^{\circ} 35' 17\frac{1}{5}555$	$+ 1^{\circ} 540$	$+ 1^{\circ} 540$	0	

genommen wurde. Hierauf folgen die Richtungsunterschiede $\Delta\alpha$, die Ordinatenkonvergenzen Δa und die Differenzen $\Delta a - \Delta\alpha$. Die Ordinatenkonvergenzen wurden für

$$\varphi = 48^\circ 12' \text{ und } \log \frac{\rho}{2r^2} = 1 \cdot 40379 - 10$$

aus den rechtwinkeligen Koordinaten y, x

Stephansturm I	$y = 0$	$x = 0$
Hermannskogel II	-5901	$+6913$
Anninger III	-9481	-17864
Andreasberg IV	$+8906$	-14147
Hundsheimer V	$+42145$	-9839

wie folgt erhalten:

$y_m + y_n$	$x_n - x_m$	$m - n$	Δa
-5901	$+6913$	I - II	$-0^\circ 103$
-9481	-17864	I - III	$+0^\circ 429$
$+8906$	-14147	I - IV	$-0^\circ 319$
$+42145$	-9839	I - V	$-1^\circ 051$
-15383	-24777	II - III	$+0^\circ 966$
$+3005$	-21060	II - IV	$-0^\circ 160$
$+36243$	-16753	II - V	$-1^\circ 540$
-576	$+3717$	III - IV	$-0^\circ 005$
$+32663$	$+8025$	III - V	$+0^\circ 664$
$+51051$	$+4307$	IV - V	$+0^\circ 557$

Behufs Aufstellung der erforderlichen Bedingungsgleichungen sei festgestellt: In dem der Ausgleichung zu unterziehenden Netze gibt es $P = 5$ Punkte und $L = 10$ Verbindungslien. Hieron sind, da der Punkt V nur vorwärts eingeschnitten betrachtet wird, $p = 4$ Punkte vor- und rückwärts eingeschnitten und $l = 8$ Richtungen gegenseitig, 2 Richtungen aber nur einseitig gemessen. Die Anzahl der Seitengleichungen beträgt sohin $S = L - 2P + 3 = 3$, die der Winkelgleichungen $W = l - p + 1 = 5$.

Die Bedingungsgleichungen sind:

A. Für die alt-gebräuchliche Methode.

a) Winkelgleichungen.

$$\begin{array}{l|l} -(2)+(4)-(5) + (6) - (11)+(12)+0^\circ 318 = 0 & \varepsilon = 0^\circ 433 \\ -(6)+(7)-(10)+(11)-(14)+(16)-1^\circ 534 = 0 & \varepsilon = 0^\circ 743 \\ -(3)+(4)-(5) + (7) - (14)+(15)-0^\circ 551 = 0 & \varepsilon = 1^\circ 120 \\ -(1)+(4) & -0^\circ 868 = 0 \text{ fester Winkel} \\ -(5)+(8) & -1^\circ 181 = 0 \text{ fester Winkel} \end{array}$$

b) Seitengleichungen.

$$\begin{aligned} +0^\circ 679707 (1) - 0^\circ 902869 (3) + 0^\circ 223162 (4) + 0^\circ 075188 (5) - 36^\circ 214138 (7) \\ +36^\circ 138950 (8) - 23^\circ 608299 (13) + 23^\circ 205050 (14) + 0^\circ 403249 (15) - 67^\circ 97618 = 0 \\ +0^\circ 184947 (2) - 0^\circ 223162 (3) + 0^\circ 038215 (4) + 0^\circ 120822 (10) - 0^\circ 037618 (11) \\ - 0^\circ 083204 (12) + 0^\circ 012512 (14) - 0^\circ 092347 (15) + 0^\circ 079835 (16) - 0^\circ 01106 = 0 \\ +2^\circ 205667 (1) - 4^\circ 445240 (2) + 2^\circ 239573 (3) - 2^\circ 412229 (9) + 0^\circ 544517 (10) \\ + 1^\circ 867712 (12) + 0^\circ 458516 (13) + 4^\circ 130595 (15) - 4^\circ 589111 (16) + 6^\circ 00405 = 0 \end{aligned}$$

B. Für die neue Methode.

a') Richtungsgleichungen.

$$\begin{aligned}
 \text{I} . . . (2) - (12) &= 0 \\
 \text{II} . . . (3) - (15) &= 0 \\
 \text{III} . . . (4) - (5) &= 0 \\
 \text{IV} . . . (6) - (11) + 0.318 &= 0 \\
 \text{V} . . . (7) - (14) - 0.551 &= 0 \\
 \text{VI} . . . (10) - (16) + 0.665 &= 0 \\
 \text{VII} . . . (4) - (1) - 0.868 &= 0 \\
 \text{VIII} . . . (8) - (5) - 1.181 &= 0
 \end{aligned}$$

b') Verkürzte Seitengleichungen.

$$\begin{aligned}
 \text{IX} . . . + 37.117007 (1) - 0.499620 (3) - 13.009088 (7) - 23.608299 (13) - 6.454487 &= 0 \\
 \text{X} . . . + 0.101743 (2) - 0.315509 (3) + 0.038215 (4) + 0.200657 (10) - 0.037618 (11) \\
 &\quad + 0.012512 (14) + 0.042030 = 0 \\
 \text{XI} . . . + 2.205667 (1) - 2.577528 (2) + 6.370168 (3) - 2.412229 (9) - 4.044594 (10) \\
 &\quad + 0.458516 (13) + 2.952291 = 0
 \end{aligned}$$

Die Weiterrechnung nach der neuen Methode nimmt folgenden Gang:

Koeffizienten der Bedingungsgleichungen.

Nr.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
1	- 1	.	+ 37.117007	.	+ 2.205667
2	1	+ 0.101743	- 2.577528
3	.	1	- 0.499620	- 0.315509	+ 6.370168
4	.	.	1	1	.	.	+ 0.038215
5	.	.	- 1	- 1	.	.
6	.	.	.	1
7	1	.	.	.	- 13.009088	.	.
8	1
9	- 2.412229
10	1	.	.	.	+ 0.200657	- 4.044594
11	.	.	.	- 1	- 0.037618	.
12	- 1
13	- 23.608299	.	+ 0.458516
14	- 1	+ 0.012512	.
15	.	- 1
16	- 1

Koeffizienten der Normalgleichungen.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	<i>w</i>
2	+0·101743	- 2·577528	.
	2	- 0·499620	-0·315509	+ 6·370168	.
		2	.	.	.	1	1	.	+0·038215	.	.
			2	+0·037618	.	+0·318
				2	.	.	.	-13·009088	-0·012512	.	-0·551
					2	.	.	.	+0·200657	- 4·044594	+0·665
						2	.	-37·117007	+0·038215	- 2·205667	-0·868
							2	.	.	.	-1·181
								+2104·509981	+0·157635	+67·860311	-6·454487
									+0·153193	- 3·083667	+0·042030
										+74·475484	+2·952291

Korrelaten.

$$\text{I} = -0·082\ 936$$

$$\text{II} = +0·062\ 733$$

$$\text{III} = -1·571\ 285$$

$$\text{IV} = -0·068\ 200$$

$$\text{V} = +0·567\ 801$$

$$\text{VI} = -0·363\ 666$$

$$\text{VII} = +1·950\ 910$$

$$\text{VIII} = +1·376\ 142$$

$$\text{IX} = +0·049\ 581$$

$$\text{X} = -4·827\ 500$$

$$\text{XI} = -0·254\ 909$$

Verbesserungen.

(1) = -0·673	(5) = +0·195	(9) = +0·615	(13) = -1·287
(2) = +0·083	(6) = -0·068	(10) = -0·301	(14) = -0·628
(3) = -0·063	(7) = -0·077	(11) = +0·250	(15) = -0·063
(4) = +0·195	(8) = +1·376	(12) = +0·083	(16) = +0·364

Mittlerer Fehler einer beobachteten Richtung:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{r}} = \sqrt{\frac{5·169199}{11}} = \pm 0·685.$$

Winkel im Dreieck »Hermannskogel—Stephansturm—Anninger».

	Beobachtete Winkel	Verbesserungen	Ausgegl. Winkel
Hermannskogel 4—2	$= 48^\circ 42' 15\cdot921$	$+0\cdot112$	$= 48^\circ 42' 16\cdot033$
Stephansturm 12—11	$= 111^\circ 33' 44\cdot980$	$-0\cdot167$	$= 111^\circ 33' 44\cdot813$
Anninger 6—5	$= 19^\circ 43' 59\cdot850$	$-0\cdot263$	$= 19^\circ 43' 59\cdot587$
Summe	$180^\circ 00' 00\cdot751$	$-0\cdot318$	$= 180^\circ 00' 00\cdot433$

Sphärischer Exzeß $\varepsilon = 0\cdot433$.

Winkel im ebenen Dreieck:

$$\begin{aligned} \text{Hermannskogel} . . &= 48^\circ 42' 15\cdot889 \\ \text{Stephansturm} . . &= 111^\circ 33' 44\cdot669 \\ \text{Anninger} &= 19^\circ 43' 59\cdot442. \end{aligned}$$

Dreiecksseiten:

$$\begin{aligned} \log (\text{Hermannskogel—Anninger}) . . &= \log S = 4\cdot398\ 6072,2 \\ \log (\text{Hermannskogel—Stephansturm}) &= \log s_1 = 3\cdot958\ 5703,7 \\ \log (\text{Anninger—Stephansturm}) . . &= \log s_2 = 4\cdot305\ 9379\cdot8. \end{aligned}$$

Azimute:

$$\begin{aligned} \text{Hermannskogel—Stephansturm } \alpha_1 &= 139^\circ 27' 09\cdot044 \\ \text{Anninger—Stephansturm} . . . \alpha_2 &= 27^\circ 51' 16\cdot851. \end{aligned}$$

Die Übertragung der geographischen Koordinaten und des Azimuts von dem Punkte »Hermannskogel« nach dem Punkte »St. Stephansturm« vermittelst der geodätischen Linie s_1 und ihres Azimutes α_1 geschieht nach O. Börsch: »Anleitung zur Berechnung geodätischer Koordinaten«, 1885, § 24, wie folgt:

$\log s_1 = 3\cdot958\ 57$	$\log s_1 = 3\cdot958\ 5703,7$	$\log s_1 = 3\cdot958\ 5703,7$
$\log \cos \alpha_1 = 9\cdot880\ 74_n$	$\log \cos \left(\alpha_1 - \frac{2}{3}\varepsilon \right) = 9\cdot8807379,9_n$	$\log \sin \left(\alpha_1 - \frac{1}{3}\varepsilon \right) = 9\cdot8129654,4$
$\therefore (7) \varphi = 6\cdot556\ 02$	$\text{cpl. (1) } \varphi f = 8\cdot5102662.1$	$\text{cpl. (2) } f = 8\cdot5089745,2$
$\log \frac{2}{3} b' = 0\cdot395\ 33_n$		
$\log \frac{3}{4} = 9\cdot875\ 06$		
$\log \frac{1}{2} b' = 0\cdot270\ 39_n$	$\log b'' = 2\cdot349\ 5745,7_n$	$\log p'' = 2\cdot280\ 5103,3$
$\varphi + \frac{2}{3} b' = 48^\circ 13\cdot770$	$b'' = -223\cdot6529$	$\text{cpl. } \log \cos f = 0\cdot176\ 2531,9$
$\varphi + \frac{1}{2} b' = 48^\circ 14\cdot391$	$= - 3^\circ 43\cdot6529$	$\tau_p'' - \tau_l'' = -1,5$
$\log s_1^2 = 7\cdot917\ 14$	$\varphi = 48^\circ 16' 15\cdot2900$	$\log l'' = 2\cdot456\ 7633,7$
$\log \cos \alpha_1 = 9\cdot880\ 74_n$	$f = 48^\circ 12' 31\cdot6371$	$l = - 4^\circ 46\cdot2618$
$\log \sin \alpha_1 = 9\cdot812\ 97$	$\log l^2 = 4\cdot913\ 53$	$\lambda = 33^\circ 57' 41\cdot0600$
$(3) \varphi \varphi_1 f = 1\cdot403\ 79$	$(5) f = 4\cdot082\ 08$	
$\log \varepsilon'' = 9\cdot01464_n$	$\log \psi'' = 8\cdot995\ 61$	$\lambda_1 = 31^\circ 02' 27\cdot3218$
$\varepsilon'' = -0\cdot103$	$\psi'' = - 0\cdot0990$	$\gamma'' = 213\cdot431$
	$f = 48^\circ 12' 31\cdot6371$	$\gamma - \varepsilon = 3^\circ 33\cdot534$
	$\varphi_1 = 48^\circ 12' 31\cdot5381$	$180 + \alpha_1 = 319^\circ 27' 09\cdot044$
		$\alpha'_1 = 319^\circ 30' 42\cdot578$

Die Übertragung der geographischen Koordinaten und des Azimutes von dem Punkte »Anninger« liefert die Ergebnisse:

$$\varphi_2 = 48^\circ 12' 31\frac{1}{2}380, \quad \lambda_2 = 34^\circ 02' 27\frac{1}{2}3217, \quad \alpha_2' = 207^\circ 56' 57\frac{1}{2}765$$

Rechnet man diese Elemente nach dem altgebräuchlichen Verfahren auf dieselbe Anzahl von Dezimalstellen, so erhält man im Vergleiche mit den Ergebnissen der neuen Methode folgendes:

Nach der	Breite φ	Länge λ	Logarithmus der Entfernung von der Spitze des Stephansturmes nach	
			Hermannskogel	Anninger
Alten Methode	48° 12' 31\frac{1}{2}375	34° 02' 27\frac{1}{2}3227	3.958 5716,0	4.305 9378,6
Neuen Methode	48 12 31.5380	34 02 27.3217	3.958 5703,7	4.305 9379,8
Differenz . .	+ 0°0005	- 0°0010	- 12.3	+ 1.2

Nach der	Azimut der Richtung nach Stephansturm von		Azimut der Richtung von Stephansturm nach	
	Hermannskogel	Anninger	Hermannskogel	Anninger
Alten Methode	139° 27' 08\frac{1}{2}946	27° 51' 17\frac{1}{2}120	319° 30' 42\frac{1}{2}480	207° 56' 58\frac{1}{2}035
Neuen Methode	139 27 09.044	27 51 16.851	319 30 42.578	207 56 57.765
Differenz . .	+ 0°098	- 0°269	+ 0°098	- 0°270

Zum Schlusse seien die geographischen Koordinaten der Spitze des Stephansturmes, wie sie seit dem Anfange des vorigen Jahrhunderts in verschiedenen Karten und Büchern angegeben werden, übersichtlich zusammengestellt:

	φ	λ
1804. »Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde«	48° 12' 34°0	34° 02' 16°5
1810. »Instruktion für die im Kalkülbureau der k. k. österreichischen Landesvermessung angestellten Herren Offiziere« und auf der ältesten Spezialkarte der Monarchie	48° 12' 34°0	34° 02' 15°0
1821. »Annalen der k. k. Sternwarte in Wien«, beziehungsweise »Beiträge zur Landeskunde Österreichs unter der Enns« (1834)	48° 12' 33°0	34° 02' 18°0
1828. »Neueste Europäische Münz-, Maß- und Gewichtskunde« von Josef Jäckel, und auf der Generalkarte von Tirol und Vorarlberg (1831)	48° 12' 32°00	34° 02' 16°28
1842. Generalkarte von Steiermark	48° 12' 31°	34° 02' 25°

φ λ

1845. »Instruktion für die bei der astronomisch-trigonometrischen Landesvermessung und im Kalkülbureau des k. k. Militärgeographischen Institutes angestellten Individuen« und auf der Spezialkarte von Böhmen	48° 12' 33"36	34° 02' 22"50
1861. Spezialkarte von Dalmatien	48° 12' 32"75	34° 02' 21"60
1890. »Mitteilungen des k. u. k. Militärgeographischen Institutes«	48° 12' 34"742	34° 02' 25"648
1904. »Instruktion zur Ausführung der trig. u. polyg. Vermessungen behufs Herstellung neuer Pläne für die Zwecke des Grundsteuerkatasters«, 5. Auflage	48° 12' 31"54	34° 02' 27"32
1914. Vorliegende Neuberechnung	48° 12' 31"538	34° 02' 27"322

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.](#)

Jahr/Year: 1916

Band/Volume: [92](#)

Autor(en)/Author(s): Wellisch Sigmund

Artikel/Article: [Neue Methode der sphärischen Netzausgleichung und deren Anwendung auf die Berechnung der geographischen Lage des St. Stephansturmes in Wien \(mit 4 Textfiguren\). 31-57](#)