ÜBER DIE EIGENBEWEGUNGEN DER FIXSTERNE

II. MITTEILUNG

ENTWICKELUNG NACH KUGELFUNKTIONEN

VON

S. OPPENHEIM

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 29. APRIL 1915

Vorliegende Abhandlung ist eine Weiterführung der unter dem gleichen Titel in den Denkschriften dieser Akademie erschienenen Arbeit.[1] Sie stellt sich die Aufgabe, den Nachweis der Einheitlichkeit der Fixsternbewegungen im Gegensatze zu ihrer Teilung in zwei oder gar mehrere Schwärme, ein Nachweis, der dort nur für die Rektaszension durchgeführt wurde, auch für die Deklination zu erbringen, wozu, wie bekannt, eine Entwickelung dieser Bewegungen nach Kugelfunktionen beider Argumente, der Rektaszension und Deklination, notwendig ist.

Die Grundlage der folgenden Rechnungen ist wie in meiner ersten Abhandlung die Annahme: »Das System der Fixsterne ist als ein System von Körpern anzusehen, in dem alle Bewegungen um einen idealen Zentralpunkt stattfinden, in vollständiger Analogie mit den Bewegungen im Schwarme der kleinen Planeten, die um die Sonne herumlaufen und deren Lauf von der Erde als einem exzentrischen Standpunkte aus beobachtet wird.« Im Sinne dieser Grundvorstellung sollen die Koordinaten eines Fixsternes in bezug auf ein Achsensystem, dessen Anfangspunkt in diesem Zentralpunkt liegt, als dessen baryzentrische Koordinaten, mit

$$x, y \text{ und } z \quad \text{oder} \quad r, a \text{ und } d$$

bezeichnet werden. In gleicher Weise sollen die baryzentrischen Koordinaten der Sonne in bezug auf dasselbe Achsensystem mit

$$X, Y \text{ und } Z \quad \text{oder} \quad R, A \text{ und } D$$

bezeichnet sein. Endlich mögen

$$\xi, \eta \text{ und } \zeta \quad \text{oder} \quad \rho, \alpha \text{ und } \delta$$

[1] Über die Eigenbewegungen der Fixsterne, Kritik der Zweischwarmhypothese. Denkschriften der kais. Akad. der Wissenschaften, Band 87, 1911.

die geo- oder was hier damit identisch ist, die heliozentrischen Koordinaten desselben Fixsternes bedeuten und es sollen für die Gesamtheit der Fixsterne die Gleichungen gelten

$$\xi = x - X$$
$$\eta = y - Y$$
$$\zeta = z - Z$$

oder

$$\begin{aligned} \rho \cos\delta \cos\alpha &= r \cos d \cos a - R \cos D \cos A \ldots \\ \rho \cos\delta \sin\alpha &= r \cos d \sin a - R \cos D \sin A \ldots \\ \rho \sin\delta &= r \sin d - R \sin D \ldots \end{aligned} \qquad 1)$$

Die Differentialquotienten aller hier vorkommenden Größen, genommen nach der Zeit, seien durch das Symbol Δ angedeutet. Es stellen daher

$$\Delta\rho, \quad \Delta\alpha \text{ und } \Delta\delta$$

die Komponenten der sogenannten parallaktischen Eigenbewegung der Fixsterne vor, wie sie sich aus direkten Beobachtungen von der Erde oder, was hier dasselbe ist, von der Sonne aus ergeben, ferner

$$\Delta r, \Delta a \text{ und } \Delta d$$

die Komponenten ihrer Spezialbewegungen, und schließlich

$$\Delta R, \ \Delta A \text{ und } \Delta D$$

die der Eigenbewegung der Sonne. Die Gleichungen 1) entsprechen den Gleichungen p. 306 in meiner ersten Abhandlung

$$\rho \cos\alpha = a \cos P + a_0 \cos E$$
$$\rho \sin\alpha = a \sin P + a_0 \sin E$$

und hier wie dort besteht nun die zu lösende Aufgabe darin, die Differentiale $\Delta\rho$, $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ durch die Größen

$$\beta = \frac{R}{r}, \ \alpha, \ \delta, \ A \text{ und } D$$

auszudrücken, wozu aber nicht mehr einfache nach der Winkeldifferenz $\alpha - A$ fortschreitende Fourier'sche Reihen mit konstanten Koeffizienten genügen, sondern Entwickelungsreihen notwendig sind, deren Koeffizienten Kugelfunktionen der Argumente δ und D sind.

Noch sei hervorgehoben, daß die vorliegende neue Methode zur Bestimmung des Apex der Sonnenbewegung auf der Anwendung der zwei Systeme von Gleichungen, nämlich

$$\xi = x - X, \quad \eta = y - Y, \quad \zeta = z - Z$$

und

$$\Delta\xi = \Delta x - \Delta X. \quad \Delta y = \Delta y - \Delta Y, \quad \Delta\zeta = \Delta z - \Delta Z$$

beruht, während die älteren Methoden bloß die letzteren benutzten. Es hat dies eben zur Folge, daß man zur Elimination der Unbekannten $\Delta x, \Delta y$ und Δz ein neues Prinzip aufstellen mußte, und als ein solches das der Regellosigkeit dieser Größen oder analytisch die Gleichungen

$$\Sigma \Delta x = \Sigma \Delta y = \Sigma \Delta z = 0$$

annahm, die Summen erstreckt über eine genügende Anzahl von Sternen.

Das Material für die auszuführenden Rechnungen wurde zwei Quellen entnommen. Die erste ist eine wertvolle Zusammenstellung der Eigenbewegungen aller Sterne bis zur 6. Größenklasse, die von

Charlier[1] herrührt und die in der folgenden Art durchgeführt erscheint. Charlier teilt den Himmel in 48 Sektoren von gleichem Flächeninhalt; 4 von ihnen, bezeichnet mit A_1 und A_2, dann F_1 und F_2 umfassen in je 12 Rektaszensionsstunden die Kalotten des Nord- und Südpoles und gehören einer mittleren Deklination von $\pm$ 80° an; weitere 20, einzeln mit B_1 bis B_{10} und C_1 bis C_{10} bezeichnet, umfassen eine Nord- und eine Südzone, deren mittlere Deklination $\pm$ 45° 6'0 ist, und schreiten in Rektaszension um je $36° = 2^h\,24^m$ fort, und schließlich die restlichen 24, mit den Buchstaben C_1 bis C_{12} und D_1 bis D_{12} benannt, gehören den zwei äquatorealen Zonen mit der mittleren Deklination $\pm$ 14° 28'6 an und sind in Rektaszension in 12 Teile geteilt. Für jeden dieser 48 Sektoren gibt Charlier die Mittelwerte der Eigenbewegungen der Fixsterne, das sind die Mittelwerte der Größen $\cos\delta\,\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$, in Gruppen geordnet nach der Größe der Fixsterne, an, und zwar zuerst für alle Sterne bis zur 4., dann zwischen der 4. und 5., ferner 5. und 6. und endlich für alle Sterne bis zur 6. Größe. Bloß die letzteren Mittelwerte einerseits und andererseits nur die den 44 Sektoren B, C, D und E entsprechenden benutzte ich in den nachfolgenden Rechnungen. Die Zahl der in ihnen enthaltenen Sterne ist 3738, so daß im Mittel auf jeden Sektor 84 bis 85 kommen.

Die zweite Quelle ist eine Zusammenstellung der Eigenbewegungen der Bradley'schen Sterne, die Hecker in seiner Inauguraldissertation[2] durchführte und in der er die Mittelwerte der $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ nach einem zweimaligen Ausgleich durch Kurven zunächst für zwei Abteilungen, die erste umfaßt 1596 Sterne der 1. bis zur 6. Größe, die zweite 1494 Sterne der 6. und geringerer Größe, und dann für die Deklinationen $\delta = -20°3,\ -7°7,\ +4°9,\ +17°5,\ +30°1,\ +42°7$ und $+55°3$ angibt.

Das Hauptergebnis der auf Grundlage dieser zwei Zusammenstellungen vorgenommenen Reihenentwickelungen ist eine Angabe über die zwei Größen A und D, das ist die Rektaszension und Deklination der Sonne, gesehen von dem angenommenen idealen Zentralpunkt des gesamten Fixsternhimmels aus oder $180 + A$ und $-D$ als Rektaszension und Deklination der Richtung, in der dieser Zentralpunkt, von der Sonne aus gesehen, sich befindet, aber keineswegs eine Angabe über Rektaszension und Deklination des Zielpunktes der Sonnenbewegung selbst. In diesem Sinne ist daher das Ergebnis der vorliegenden Berechnungen nicht direkt vergleichbar mit den bekannten Resultaten über die Richtung des Apex der Sonne. Vielmehr hat man, um einen solchen Vergleich überhaupt durchführen zu können erst die Aufgabe zu lösen, wie aus den Größen A und D, die durch die Entwickelung nach Kugelfunktionen gewonnen werden, die analogen Größen für den Sonnenapex, die mit A' und D' bezeichnet werden mögen, zu berechnen sind. Hiezu ist ein doppelter Weg möglich. Zunächst seien neben den Größen A und D noch die Komponenten der Bewegung der Sonne, das ist ΔR, ΔA und ΔD, als bekannt angenommen. Ist dann v die totale Eigenbewegung der Sonne, nämlich

$$v^2 = \Delta R^2 + R^2 \Delta D^2 + R^2 \cos^2 D \Delta A^2,$$

so findet man die unbekannten A' und D' aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} v \cos D' \cos A' &= \Delta R \cos D \cos A - R \sin D \cos A \Delta D - R \cos D \sin A \Delta A \\ v \cos D' \sin A' &= \Delta R \cos D \sin A - R \sin D \sin A \Delta D + R \cos D \cos A \Delta A \\ v \sin D' &= \Delta R \sin D + R \cos D \Delta D. \end{aligned}$$

Vernachlässigt man in ihnen ΔR und ΔD, so erhält man

$$\begin{aligned} v \cos D' \cos A' &= -R \cos D \sin A \Delta A \\ v \cos D' \sin A' &= R \cos D \cos A \Delta A \\ v \sin D' &= 0 \end{aligned}$$

[1] Charlier. Studies in Stellar Statistics. II. The motion of the Stars. Meddelanden från Lunds astronomiska Observatorium. Serie 2, Nr. 9, 1913.

[2] Hecker. Über die Darstellung der Eigenbewegungen der Fixsterne und die Bewegung des Sonnensystems. München, 1891

oder $D' = 0$, ferner $\mathrm{tg}\, A' = -\mathrm{ctg}\, A$ oder $A' = A \pm 90°$ und nach dieser Beziehungsgleichung berechnete ich in meiner ersten Abhandlung, in der die Entwickelung der Eigenbewegungen nur nach Rektaszensionen, d. h. $\Delta D = 0$ und nur unter der Annahme von Kreisbahnen, d. h. $\Delta R = \Delta r = 0$, durchgeführt wurde, aus A die Größe A'.

Man könnte aber auch die Lage der Bahnebene der Sonne, das heißt ihren Knoten, Ω und ihren Neigungswinkel i in bezug auf das zugrunde liegende Koordinatensystem als bekannt annehmen. Dann hätte man vorerst aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos(A-\Omega)\cos D &= \cos(L-\Omega) \ldots \\ \sin(A-\Omega)\cos D &= \sin(L-\Omega)\cos i \ldots \\ \sin D &= \sin(L-\Omega)\sin i \ldots \end{aligned} \qquad 2)$$

die Größe L, oder die Länge der Sonne in ihrer Bahn um den angenommenen Zentralpunkt, sodann auf Grund der Beziehung

$$L' = L \pm 90°$$

die Größe L' oder die Länge des Apex der Sonnenbewegung in dieser Bahn und endlich aus

$$\begin{aligned} \cos(L'-\Omega) &= \cos(A'-\Omega)\cos D' \\ \sin(L'-\Omega)\cos i &= \sin(A'-\Omega)\cos D' \\ \sin(L'-\Omega)\sin i &= \sin D' \end{aligned} \qquad 2')$$

erst die Hauptunbekannten A' und D' zu berechnen. Der Vernachlässigung von ΔR und ΔD gegenüber ΔA oder, was dasselbe ist, der Annahme $\Delta R = \Delta D = 0$, die den Berechnungen in meiner ersten Abhandlung zugrunde lag, entspricht als Ergebnis $i = 0$, so als ob die Bewegung der Sonne in einer Ebene stattfinden würde, die in der Deklination D parallel dem Äquator verläuft. Dies ist ein möglicher Grenzfall. Ein zweiter wäre $i = 90$, so als ob die Bahnebene der Sonne auf dem Äquator senkrecht stünde. Für ihn wäre $\Delta R = \Delta A = 0$ und dann $\mathrm{tg}\, D' = -\mathrm{ctg}\, D$ oder $D' = 90 \pm D$ und erst, wenn $\Delta A = \Delta D = 0$ gesetzt und einzig ΔR berücksichtigt würde, hätte man

$$A' = A \text{ und } D' = D.$$

Der Berechnung von Ω und i sowie der Erörterung über den Zusammenhang dieses Rechnungsverfahrens mit der Bessel-Kobold'schen Methode zur Bestimmung des Apex der Sonnenbewegung ist der zweite Abschnitt der vorliegenden Abhandlung gewidmet, während das Schlußkapitel sich mit den Vereinfachungen befaßt, die in den durchgeführten Entwickelungen dadurch ermöglicht werden, daß man alle Rektaszensionen und Deklinationen in Längen und Breiten in bezug auf die nunmehr bekannte Bahnebene der Sonne reduziert und so die Gleichungen 1) in der Form schreibt

$$\begin{aligned} \rho\cos\beta\cos\lambda &= r\cos b\cos l - R\cos L \\ \rho\cos\beta\sin\lambda &= r\cos b\sin l - R\sin L \\ \rho\sin\beta &= r\sin b \end{aligned} \qquad 1')$$

in denen ρ, β und λ die heliozentrischen Koordinaten eines Fixsternes, r, l, b seine baryzentrischen und $R, L, B = 0$ die baryzentrischen Koordinaten der Sonne bedeuten.

1. Entwickelung nach Kugelfunktionen.

Die Bezeichnungsweise der Kugelfunktionen, die im Folgenden angewendet werden soll, sei die von Seeliger [1] benutzte. Ist $f(\alpha\delta)$ die darzustellende Funktion, abhängig gedacht von den beiden Variablen α und δ, so gelte die Entwickelung

$$f(\alpha\delta) = \Sigma X_{\varkappa\lambda}\,(A_{\varkappa\lambda}\cos k\alpha + B_{\varkappa\lambda}\sin k\alpha)$$

in der $A_{\varkappa\lambda}$ und $B_{\varkappa\lambda}$ die aus den Beobachtungen abzuleitenden Konstanten und $X_{\varkappa\lambda}$ Kugelfunktionen des Argumentes δ sind. Speziell möge angenommen werden

$$X_{00} = 1 \qquad X_{10} = \sin\delta \qquad X_{11} = \cos\delta$$

$$X_{20} = \frac{1}{2}(3\sin^2\delta - 1) \qquad X_{21} = 3\sin\delta\cos\delta \qquad X_{22} = 3\cos^2\delta$$

$$X_{30} = \frac{1}{2}(5\sin^3\delta - 3\sin\delta) \qquad X_{31} = \frac{3}{2}(5\sin^2\delta - 1)\cos\delta \qquad X_{32} = 15\sin\delta\cos^2\delta$$

$$X_{33} = 15\cos^3\delta$$

$$X_{40} = \frac{1}{8}(35\sin^4\delta - 30\sin^2\delta + 3) \qquad X_{41} = \frac{5}{2}(7\sin^3\delta - 3\sin\delta)\cos\delta$$

$$X_{42} = \frac{15}{2}(7\sin^2\delta - 1)\cos^2\delta \qquad X_{43} = 105\sin\delta\cos^3\delta \qquad X_{44} = 105\cos^4\delta$$

$$X_{50} = \frac{1}{8}(63\sin^5\delta - 70\sin^3\delta + 15\sin\delta) \qquad X_{51} = \frac{15}{8}(21\sin^4\delta - 14\sin^2\delta + 1)\cos\delta$$

$$X_{52} = \frac{105}{2}(3\sin^3\delta - \sin\delta)\cos^2\delta \qquad X_{53} = \frac{105}{2}(9\sin^2\delta - 1)\cos^3\delta \qquad X_{54} = 945\sin\delta\cos^4\delta$$

$$X_{55} = 945\cos^5\delta\;.\;.\;.$$

Die erste zu entwickelnde Funktion, die im Folgenden gebraucht wird, ist der Cosinus des Winkels zwischen den zwei Richtungen im Raume ρ und R, von denen die eine durch α und δ, die andere durch die Koordinaten A und D bestimmt ist. Wie bekannt, ist

$$\cos(\rho R) = \sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha - A)$$

und, wenn man die Kugelfunktionen von δ mit X, die des Arguments D mit X' bezeichnet,

$$\cos(\rho R) = X_{10}X'_{10} + X_{11}X'_{11}\cos(\alpha - A) \qquad 3)$$

eine Darstellung, die symmetrisch ist sowohl in bezug auf δ und D in den entsprechenden Kugelfunktionen X und X' sowie in den Winkeln α und A. Nach den bekannten Beziehungsgleichungen

[1] v. Seeliger. Über die interpolatorische Darstellung einer Funktion durch eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe. Sitzber. der Münchner Akad., Band 20, 1890.

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$$
$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$
$$\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos\varphi + 1$$

findet man

$$\cos 2(\rho R) = \frac{1}{9} X_{22}X'_{22}\cos 2(\alpha - A) + \frac{2}{9} X_{21}X'_{21}\cos(\alpha - A) + \frac{4}{3} X_{20}X'_{20} - \frac{1}{3} X_{00}X'_{00} \ldots$$

$$\cos 4(\rho R) = \frac{1}{11025} X_{41}X'_{44}\cos 4(\alpha - A) + \frac{8}{11025} X_{43}X'_{43}\cos 3(\alpha - A) +$$
$$+ \left[\frac{16}{1575} X_{42}X'_{42} - \frac{4}{63} X_{22}X'_{22}\right]\cos 2(\alpha - A) + \left[\frac{32}{175} X_{41}X'_{41} - \frac{16}{63} X_{21}X'_{21}\right]\cos(\alpha - A) + \qquad 3')$$
$$+ \left[\frac{64}{35} X_{40}X'_{40} - \frac{16}{21} X_{20}X'_{20} - \frac{1}{15} X_{00}X'_{00}\right] \ldots$$

Zum Beweise dieser Gleichungen ist die Kenntnis des Satzes notwendig, daß das Produkt zweier Kugelfunktionen, zum Beispiel $X_{\varkappa\lambda}\, X_{\mu\nu}$ sich durch eine endliche Summe einfacher Kugelfunktionen darstellen läßt, deren erstes Glied $X_{\varkappa+\mu,\,\lambda+\nu}$ ist. In gleicher Weise kann auch das Doppelprodukt zweier Kugelfunktionen der zwei verschiedenen Variabeln δ und D, das ist etwa $X_{\varkappa\lambda}\, X'_{\varkappa\lambda}\, X_{\mu\nu}\, X'_{\mu\nu}$, in eine endliche Summe von Produkten von Kugelfunktionen X und X' aufgelöst werden, deren Anfangsglied $X_{\varkappa+\mu,\,\lambda+\nu}$ $X'_{\varkappa+\mu,\,\lambda+\nu}$ ist.

Für die weitere Entwickelung werden nur die Doppelprodukte $X_{\varkappa\lambda}\, X'_{\varkappa\lambda}$ einerseits mit $X_{11}\, X'_{11}$, andererseits mit $X_{10}\, X'_{10}$ gebraucht; einige der sich da ergebenden Formeln seien hier mitgeteilt:

$$X_{10}X'_{10}X_{11}X'_{11} = \frac{1}{9} X_{21}X'_{21}$$

$$X_{20}X'_{20}X_{11}X'_{11} = \frac{1}{30} X_{31}X'_{31} + \frac{1}{600} X_{33}X'_{33} - \frac{1}{5} X_{11}X'_{11}$$

$$X_{40}X'_{40}X_{11}X'_{11} = \frac{1}{135} X_{51}X'_{51} + \frac{1}{30240} X_{53}X'_{53} + \frac{1}{6721920} X_{55}X'_{55} - \frac{1}{54} X_{31}X'_{31} - \frac{1}{1080} X_{33}X'_{33}$$

$$(X_{11}X'_{11})^2 = \frac{1}{9} X_{22}X'_{22} \qquad X_{21}X'_{21}X_{11}X'_{11} = \frac{1}{225} X_{32}X'_{32} \qquad X_{22}X'_{22}X_{11}X'_{11} = $$
$$= \frac{1}{25} X_{33}X'_{33}$$

$$X_{41}X'_{41}X_{11}X'_{11} = \frac{2}{189} X_{52}X'_{52} + \frac{1}{20412} X_{54}X'_{54} - \frac{2}{27} X_{32}X'_{32}$$

$$X_{42}X'_{42}X_{11}X'_{11} = \frac{1}{84} X_{53}X'_{53} + \frac{1}{9072} X_{55}X'_{55} - \frac{1}{3} X_{33}X'_{33}$$

$$X_{43}X'_{43}X_{11}X'_{11} = \frac{1}{81} X_{54}X'_{54} \qquad X_{44}X'_{44}X_{11}X'_{11} = \frac{1}{81} X_{55}X'_{55}$$

$$(X_{10}X'_{10})^2 = \frac{2}{3} X_{20}X'_{20} - \frac{1}{18} X_{22}X'_{22} + \frac{1}{3} X_{00}X'_{00} \qquad X_{22}X'_{22}X_{10}X'_{10} =$$
$$= \frac{1}{25} X_{32}X'_{32}$$

$$X_{20}X'_{20}X_{10}X'_{10} = \frac{3}{5}X_{30}X'_{30} - \frac{1}{150}X_{32}X'_{32} + \frac{2}{5}X_{10}X'_{10}$$

$$X_{40}X'_{40}X_{10}X'_{10} = \frac{5}{9}X_{50}X'_{50} - \frac{1}{1890}X_{52}X'_{52} - \frac{1}{408240}X_{54}X'_{54} + \frac{4}{9}X_{30}X'_{30} + \frac{1}{270}X_{32}X'_{32}$$

$$X_{21}X'_{21}X_{10}X'_{10} = \frac{2}{15}X_{31}X'_{31} + \frac{1}{150}X_{33}X'_{33} - \frac{4}{5}X_{11}X'_{11}$$

$$X_{41}X'_{41}X_{10}X'_{10} = \frac{7}{27}X_{51}X_{51}' - \frac{1}{1512}X_{53}X'_{53} - \frac{1}{163296}X_{55}X'_{55} + \frac{25}{3}X_{31}X'_{31} + $$
$$+ \frac{1}{54}X_{33}X'_{33} + \frac{25}{12}X_{11}X'_{11}$$

$$X_{42}X'_{42}X_{10}X'_{10} = \frac{1}{7}X_{52}X_{52}' - \frac{1}{1134}X_{54}X'_{54} + 2\,X_{32}X'_{32}$$

$$X_{43}X'_{43}X_{10}X'_{10} = \frac{1}{18}X_{53}X_{53}' - \frac{1}{648}X_{55}X'_{55} + \frac{49}{9}X_{33}X'_{33}$$

$$X_{44}X'_{44}X_{10}X'_{10} = \frac{1}{81}X_{55}X'_{55} \;\ldots$$

2. Aus den Hauptgleichungen 1) nämlich

$$\begin{aligned} \rho\cos\delta\cos\alpha &= r\cos d\cos a - R\cos D\cos A \\ \rho\cos\delta\sin\alpha &= r\cos d\sin a - R\cos D\sin A \\ \rho\sin\delta &= r\sin d \qquad\quad - R\sin D \end{aligned} \tag{1}$$

lassen sich durch einfache Transformationen zunächst die Relationen:

$$\begin{aligned} \rho\cos\delta &= r\cos d\cos(\alpha-a) - R\cos D\cos(\alpha-A) \\ 0 &= r\cos d\sin(\alpha-a) - R\cos D\sin(\alpha-A) \end{aligned} \tag{4}$$

ferner noch

$$r^2 = \rho^2 + R^2 + 2\,\rho R\,[\sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha-A)]$$

oder

$$r^2 = \rho^2 + R^2 + 2\,\rho R\cos(\rho R)$$

ableiten. Aus der letzteren folgt, wenn man $R/r = \beta$ setzt, die quadratische Gleichung zur Bestimmung von r/ρ,

$$\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - \frac{2\,r}{\rho}\cdot\frac{\beta}{1-\beta^2}\cos(\rho R) - 1 = 0$$

und aus ihr, unter der Voraussetzung, daß

$$R < r \text{ daher } \beta < 1$$

die konvergente Reihe, die ganz mit der analogen, p. 306 meiner ersten Abhandlung übereinstimmt, nur daß dort $\alpha-\varepsilon$ statt (ρR) steht,

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\beta}{1-\beta^2}\cos(\rho R) + g_0 + g_2\cos 2\,(\rho R) + g_4\cos 4\,(\rho R) + g_6\cos 6\,(\rho R) + \;\ldots \tag{5}$$

in welcher

$$\begin{aligned} g_0 &= 1 + \frac{3}{4}\beta^2 + \frac{45}{64}\beta^4 + \frac{350}{512}\beta^6 + \ldots \\ g_2 &= \quad\; \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{20}{64}\beta^4 + \frac{175}{512}\beta^6 + \ldots \\ g_4 &= \qquad\qquad - \frac{1}{64}\beta^4 - \frac{14}{512}\beta^6 \\ g_6 &= \qquad\qquad\qquad\quad \frac{1}{512}\beta^6 \end{aligned} \tag{6)}$$

ist. Ersetzt man in ihr die Größen cos (ρR), cos 2 (ρR) usw. durch die oben gegebenen Entwickelungen, so erhält man die Darstellung von $\frac{r}{\rho}$ in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe. Sie lautet

$$\begin{aligned} \frac{r}{\rho} = \; & \rho_{00} + \rho_{10}X_{10}X'_{10} + \rho_{20}X_{20}X'_{20} + \rho_{40}X_{40}X'_{40} + \ldots \\ & + \cos\;(\alpha - A)\,[\rho_{11}X_{11}X'_{11} + \rho_{21}X_{21}X'_{21} + \rho_{41}X_{41}X'_{41} + \ldots \\ & + \cos 2\,(\alpha - A)\,[\rho_{22}X_{22}X'_{22} + \rho_{42}X_{42}X'_{42} + \ldots \\ & + \cos 3\,(\alpha - A)\,[\rho_{43}X_{43}X'_{43} + \ldots \\ & + \cos 4\,(\alpha - A)\,[\rho_{44}X_{44}X'_{44} + \ldots \end{aligned} \tag{5')}$$

und es haben die in ihr auftretenden Koeffizienten die Werte:

$$\begin{array}{lll} \rho_{00} = g_0 - \frac{1}{3}g_2 - \frac{1}{15}g_4 - \ldots & \rho_{11} = \frac{\beta}{1-\beta^2} & \rho_{22} = \frac{1}{9}g_2 - \frac{4}{63}g_4 \\ \rho_{10} = \frac{\beta}{1-\beta^2} & \rho_{21} = \frac{3}{9}g_2 - \frac{16}{63}g_4 - \ldots & \rho_{13} = \frac{8}{11025}g_4 \ldots \\ \rho_{20} = \frac{4}{3}g_2 - \frac{16}{21}g_4 \ldots & \rho_{41} = \frac{32}{175}g_4 \ldots & \rho_{44} = \frac{1}{11025}g_4 \ldots \\ \rho_{40} = \frac{64}{35}g_4 \ldots & \rho_{42} = \frac{16}{1575}g_4 & \end{array} \tag{7)}$$

die man auch mit Rücksicht auf die Gleichungen 6) als Funktionen der Größe β ausdrücken könnte.

3. Nunmehr sollen die Gleichungen 1) differenziert werden und zwar in bezug auf alle in ihnen vorkommenden Größen als veränderliche. Es seien nur die linken Seiten der betreffenden Gleichungen hier vollständig angesetzt

$$\begin{aligned} \Delta\rho\cos\delta\cos\alpha - \rho\sin\delta\cos\alpha\,\Delta\delta - \rho\cos\delta\sin\alpha\,\Delta\alpha &= \Delta x - \Delta X \\ \Delta\rho\cos\delta\sin\alpha - \rho\sin\delta\sin\alpha\,\Delta\delta + \rho\cos\delta\cos\alpha\,\Delta\alpha &= \Delta y - \Delta Y \\ \Delta\rho\sin\delta \qquad + \rho\cos\delta\,\Delta\delta \qquad\qquad &= \Delta z - \Delta Z \end{aligned} \tag{1'')}$$

Multipliziert man die erste derselben mit $-\sin\alpha$, die zweite mit $\cos\alpha$ und addiert die Produkte, so folgt

$$\rho \cos \delta \, \Delta \alpha = r \cos d \cos(\alpha - a) \, \Delta a + r \sin d \sin(\alpha - a) \, \Delta d - \cos d \sin(\alpha - a) \, \Delta r$$
$$- R \cos D \cos(\alpha - A) \, \Delta A - R \sin D \sin(\alpha - A) \, \Delta D + \cos D \sin(\alpha - A) \, \Delta R$$

eine Beziehung, der man mit Rücksicht auf die Gleichungen 4) die Form

$$\rho \cos \delta \Delta \alpha = \rho \cos \delta \Delta a + R \cos D \cos(\alpha - A) (\Delta a - \Delta A)$$
$$- R \cos D \sin(\alpha - A) \left[\frac{\Delta r}{r} - \Delta d \operatorname{tg} d - \frac{\Delta R}{R} + \Delta D \operatorname{tg} D\right]$$

oder kürzer

$$\rho \cos \delta \Delta \alpha = \rho \cos \delta \Delta a + R \varkappa \cos D \cos(\alpha - A) - R \lambda \cos D \sin(\alpha - A) \qquad 8a)$$

geben kann, wenn

$$\Delta a - \Delta A = \varkappa \qquad \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta R}{R} - \Delta d \operatorname{tg} d + \Delta D \operatorname{tg} D = \lambda \ . \ . \ . \qquad 9)$$

gesetzt wird. In ihr ist die verlangte Elimination der Größen a und d durchgeführt.

Berechnet man durch analoge Multiplikationen und nachherige Addition aus den Differentialgleichungen 1'' die zwei anderen Größen $\Delta\rho$ und $\Delta\delta$, so folgen für diese die schon etwas komplizierteren Ausdrücke:

$$\rho \Delta \delta = - r \cos d \sin(\alpha - a) \, \Delta a + r \Delta d \, [\cos \delta \cos d + \sin \delta \sin d \cos(\alpha - a)] +$$
$$+ \Delta r \, [\cos \delta \sin d - \sin \delta \cos d \cos(\alpha - a)]$$

$$+ R \cos D \sin(\alpha - A) \Delta A - R \Delta D \, [\cos \delta \cos D + \sin \delta \sin D \cos(\alpha - A)] -$$
$$- \Delta R \, [\cos \delta \sin D - \sin \delta \cos D \cos(\alpha - A)]$$

$$\Delta \rho = + r \cos d \cos \delta \sin(\alpha - a) \, \Delta a + r \Delta d \, [\sin \delta \cos d - \cos \delta \sin d \cos(\alpha - a)] +$$
$$+ \Delta r \, (\sin \delta \sin d + \cos \delta \cos d \cos(\alpha - a)]$$

$$- R \cos D \cos \delta \sin(\alpha - A) \Delta A - r \Delta D \, [\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(a - A)] -$$
$$- \Delta R \, [\sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(\alpha - A)],$$

aus denen sich, namentlich aus den bei den Differentialen Δr und ΔR sowie Δd und ΔD auftretenden Koeffizienten, nicht mehr a und d eliminieren lassen. Es blieb daher nichts anderes übrig, als diese Gleichungen, die direkt $\rho\Delta\delta$ und $\Delta\rho$ geben sollten, durch zwei andere zu ersetzen, in denen eine lineare Kombination dieser zwei Größen auf der linken Seite der Gleichungen als zu bestimmende Unbekannte auftritt. Am geeignetsten fanden sich hiezu die Ausdrücke

$$\cos \delta \, \Delta\rho - \rho \sin \delta \, \Delta\delta \qquad \text{und} \qquad \sin \delta \, \Delta\rho + \rho \cos \delta \, \Delta\delta$$

für welche man findet:

$$\cos \delta \Delta \rho - \rho \sin \delta \Delta \delta = r \cos d \sin(\alpha - a) \, \Delta a - r \sin d \cos(\alpha - A) \, \Delta d + \Delta r \cos d \cos(\alpha - a)$$
$$- R \cos D \sin(\alpha - A) \, \Delta A + R \sin D \cos(\alpha - A) \, \Delta D - \Delta R \cos D \cos(\alpha - A) \ . \ . \ .$$

$$\sin \delta \Delta \rho + \delta \cos \delta \Delta \delta = r \cos d \Delta d - R \cos D \Delta D + \Delta r \sin d - \Delta R \cos D$$

oder, wenn man noch die Relationen 4 berücksichtigt und entsprechend den Größen $\varkappa$ und λ, die durch 9) eingeführt wurden, außerdem

$$\frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta R}{R} + \Delta d \operatorname{ctg} d - \Delta D \operatorname{ctg} D = \mu$$

setzt,

$$\begin{aligned} \cos\delta\Delta\rho - \rho\sin\delta\Delta\delta &= \rho\cos\delta\left[\frac{\Delta r}{r} - \Delta d \operatorname{tg} d\right] + \varkappa R\cos D\sin(\alpha - A) + \lambda R\cos D\cos(\alpha - A) \\ \sin\delta\Delta\rho + \rho\cos\delta\Delta\delta &= \rho\sin\delta\left[\frac{\Delta r}{r} + \Delta d \operatorname{ctg} d\right] + \mu R\sin D \end{aligned} \qquad 8b)$$

Gleichungen, in denen wieder die verlangte Elimination der a und d durchgeführt erscheint, d. h. außer den Differentialen aller Größen nur noch die Unbekannten A, D und R enthalten sind.

4. Die drei Gleichungen 8) geben die Schlußform an, die sich zur Entwickelung nach Kugelfunktionen am passendsten erwies. Dividiert man sie noch durch ρ, ersetzt außerdem in ihnen $\frac{R}{\rho}$ durch $\frac{R}{r} \cdot \frac{r}{\rho} = \beta\frac{r}{\rho}$ und endlich $\sin D$ durch X'_{10}, $\cos D$ durch X'_{11}, so erhält man:

$$\begin{aligned} \cos\delta\Delta\alpha &= \cos\delta\Delta a + \beta\frac{r}{\rho}X'_{11}[\varkappa\cos(\alpha - A) - \lambda\sin(\alpha - A)] \\ \cos\delta\frac{\Delta\rho}{\rho} - \sin\delta\Delta\delta &= \cos\delta\left[\frac{\Delta r}{r} - \Delta d \operatorname{tg} d\right] + \beta\frac{r}{\rho}X'_{11}[\varkappa\sin(\alpha - A) + \lambda\cos(\alpha - A)] \\ \sin\delta\frac{\Delta\rho}{\rho} + \cos\delta\Delta\delta &= \sin\delta\left[\frac{\Delta r}{r} + \Delta d \operatorname{ctg} d\right] + \beta\frac{r}{\rho}X'_{10}\mu. \end{aligned} \qquad 8a)$$

Nun ist, wie es die Gleichung 5') zeigt, die Reihe für $\frac{r}{\rho}$ symmetrisch in bezug auf die Kugelfunktionen $X_{\varkappa\lambda}$ des Argumentes δ und $X'_{\varkappa\lambda}$ der Variablen D und, um diese Symmetrie auch für diese Gleichungen zu erhalten, multiplizierte ich die zwei ersten Gleichungen mit $\cos\delta = X_{11}$, die dritte mit $\sin\delta = X_{10}$. Es folgte damit

$$\begin{aligned} \cos^2\delta\Delta\alpha &= \cos^2\delta\Delta a + \beta\frac{r}{\rho}X_{11}X'_{11}[\varkappa\cos(\alpha - A) - \lambda\sin(\alpha - A)] \\ \cos^2\delta\frac{\Delta\rho}{\rho} - \cos\delta\sin\delta\Delta\delta &= \cos^2\delta\left[\frac{\Delta r}{r} - \Delta d \operatorname{tg} d\right] + \beta\frac{r}{\rho}X_{11}X'_{11}[\varkappa\sin(\alpha - A) + \lambda\cos(\alpha - A)] \\ \sin^2\delta\frac{\Delta\rho}{\rho} + \cos\delta\sin\delta\Delta\delta &= \sin^2\delta\left[\frac{\Delta r}{r} + \Delta d \operatorname{ctg} d\right] + \beta\frac{r}{\rho}X_{10}X'_{10}\mu. \end{aligned} \qquad 8b)$$

In diese Gleichungen ist die für $\frac{r}{\rho}$ oben erhaltene Reihe 5') zu substituieren, ferner sind die Doppelprodukte der Kugelfunktionen $X_{\varkappa\lambda}\,X'_{\varkappa\lambda}$ mit $X_{11}\,X'_{11}$ und $X_{10}\,X'_{10}$ durch die entsprechenden Summen der einfachen Produkte zu ersetzen und schließlich die Produkte

$$\cos m(\alpha - A)[\varkappa\cos(\alpha - A) - \lambda\sin(\alpha - A)]$$

$$\cos m(\alpha - A)[\varkappa\sin(\alpha - A) + \lambda\sin(\alpha - A)]$$

in Summen und Differenzen von $\cos (m \pm 1)(\alpha - A)$ usw. zu transformieren. Nach Durchführung aller dieser Operationen ergeben sich die Schlußformeln, in denen ich die auftretenden Koeffizienten, die bloß Funktionen von $\beta = R/r$ sind, der Reihe nach mit a bei den Gliedern 0^{ter} Ordnung, mit b bei den mit dem cos, respektive sin $(\alpha - A)$ multiplizierten Gliedern erster Ordnung u. s. f. mit c, d und e bezeichne und ihnen außerdem Indizes hinzufüge, die den Kugelfunktionen entsprechend gewählt sind, bei denen sie als Faktoren vorkommen. Sie lauten:

$$\begin{aligned}
\cos^2\delta\Delta\alpha = \cos^2\delta\Delta a + {} & \beta\varkappa\,[a_{22}X_{22}X'_{22} + a_{32}X_{32}X'_{32} + a_{52}X_{52}X'_{52} \ldots \\
& + \beta\varkappa\cos(\alpha - A)\,[b_{11}X_{11}X'_{11} + b_{21}X_{21}X'_{21} + b_{31}X_{31}X'_{31} + b_{33}X_{33}X'_{33} + \ldots \\
& - \beta\lambda\sin(\alpha - A)\,[b'_{11}X_{11}X'_{11} + b'_{21}X_{21}X'_{21} + b'_{31}X_{31}X'_{31} + b'_{33}X_{33}X'_{33} + \ldots \\
& + \beta\varkappa\cos 2(\alpha - A)\,[c_{22}X_{22}X'_{22} + c_{32}X_{32}X'_{32} + c_{52}X_{52}X'_{52} + \ldots \qquad 8c) \\
& - \beta\lambda\sin 2(\alpha - A)\,[c'_{22}X_{22}X'_{22} + c'_{32}X_{32}X'_{32} + c'_{52}X_{52}X'_{52} + \ldots \\
& + \beta\varkappa\cos 3(\alpha - A)\,[d_{33}X_{33}X'_{33} + d_{53}X_{53}X'_{54} + \ldots \\
& - \beta\lambda\sin 3(\alpha - A)\,[d'_{33}X_{33}X'_{33} + d'_{53}X_{53}X'_{53} + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^2\delta\frac{\Delta\rho}{\rho} - \sin\delta\cos\delta\Delta\delta = \cos^2\delta\left[\frac{\Delta r}{r} - \Delta d\,\operatorname{tg} d\right] & \\
+ \beta\lambda\,[a_{22}X_{22}X'_{22} + a_{32}X_{32}X'_{32} + a_{52}X_{52}X'_{52} + \ldots & \\
+ \beta\lambda\cos(\alpha - A)\,[b_{11}X_{11}X'_{11} + b_{21}X_{21}X'_{21} + b_{31}X_{31}X'_{31} + b_{33}X_{33}X'_{33} + \ldots & \\
+ \beta\varkappa\sin(\alpha - A)\,[b'_{11}X_{11}X'_{11} + b_{21}X_{21}X'_{21} + b'_{31}X_{31}X'_{31} + b'_{33}X_{33}X'_{33} + \ldots & \\
+ \beta\lambda\cos 2(\alpha - A)\,[c_{22}X_{22}X'_{22} + c_{32}X_{32}X'_{32} + c_{52}X_{52}X'_{52} + \ldots & \\
+ \beta\varkappa\sin 2(\alpha - A)\,[c'_{22}X_{22}X'_{22} + c'_{32}X_{32}X'_{52} + c'_{52}X_{52}X'_{52} + \ldots & \\
+ \beta\lambda\cos 3(\alpha - A)\,[d_{33}X_{33}X'_{33} + d_{53}X_{52}X'_{53} + \ldots & \\
+ \beta\varkappa\sin 3(\alpha - A)\,[d'_{33}X_{33}X'_{33} + d_{53}X_{53}X'_{53} + \ldots &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2\delta\frac{\Delta\rho}{\rho} + \sin\delta\cos\delta\Delta\delta = \sin^2\delta\left[\frac{\Delta r}{r} + \Delta d\,\operatorname{ctg} d\right] & \\
+ \beta\mu\,[a''_{10}X_{10}X'_{10} + a''_{20}X_{20}X'_{20} + a''_{30}X_{30}X'_{30} + \ldots & \\
+ \beta\mu\cos(\alpha - A)\,[b''_{11}X_{11}X'_{11} + b''_{21}X_{21}X'_{21} + b''_{31}X_{31}X'_{31} + \ldots & \\
+ \beta\mu\cos 2(\alpha - A)\,[c''_{32}X_{32}X'_{32} + c''_{52}X_{52}X'_{52} + \ldots & \\
+ \beta\mu\cos 3(\alpha - A)\,[d''_{33}X_{33}X'_{33} + d''_{53}X_{53}X'_{53} + \ldots &
\end{aligned}$$

und die Koeffizienten in ihnen, ausgedrückt durch die Größen g in der Reihe für $\frac{\rho}{r}$ haben die Werte:

$$a_{22} = \frac{1}{18}\,\frac{\beta}{1-\beta^2} \qquad a_{32} = \frac{1}{2025}\,g_2 - \frac{104}{14175}\,g_4 - \ldots$$

$$a_{52} = \frac{32}{33075}\,g_4 \ldots \qquad a_{54} = \frac{8}{893025}\,g_4$$

$$a''_{10} = g_0 + \frac{1}{5}\,g_2 - \frac{13}{35}\,g_4 \qquad a''_{20} = \frac{2}{3}\,\frac{\beta}{1-\beta^2}$$

$$a''_{22} = -\frac{1}{18}\,\frac{\beta}{1-\beta^2} \qquad a''_{30} = \frac{4}{5}\,g_2 - \frac{16}{105}\,g_4$$

$$b_{11} = b'_{11} = g_0 - \frac{3}{5}\,g_2 - \frac{23}{105}\,g_4 \ldots \qquad b_{21} = b'_{21} = \frac{1}{9}\,\frac{\beta}{1-\beta^2}$$

$$b_{31} = b'_{31} = \frac{2}{45}\,g_2 - \frac{8}{135}\,g_4 \tag{9}$$

$$b''_{11} = -\frac{8}{45}\,g_2 + \frac{8}{45}\,g_4 + \ldots \qquad b''_{21} = \frac{1}{9}\cdot\frac{\beta}{1-\beta^2} \qquad b''_{31} = \frac{4}{135}\,g_2 + \frac{64}{45}\,g_4$$

$$c_{22} = c'_{22} = \frac{1}{18}\,\frac{\beta}{1-\beta^2} \qquad c_{32} = c'_{32} = \frac{1}{2025}\,g_2 - \frac{104}{14175}\,g_4 - \ldots$$

$$c''_{32} = \frac{1}{225}\,g_2 + \frac{4}{225}\,g_4 + \ldots \qquad c''_{52} = \frac{16}{11025}\,g_4$$

$${}_{33}d = d'_{33} = \frac{1}{450}\,g_2 - \frac{74}{51975}\,g_4 \ldots \qquad d_{53} = d'_{53} = \frac{1}{463050}\,g_4 \ldots$$

$$d_{55} = d'_{55} = \frac{4}{893025}\,g_4$$

$$d''_{33} = \frac{8}{2025}\,g_4 + \ldots \qquad d''_{33} = \frac{4}{99225}\,g_4 \qquad d''_{55} = -\frac{1}{893025}\,g_4$$

Im allgemeinen sind die Koeffizienten b, c und d nicht identisch mit den entsprechenden b', c' und d'; doch bis zu dem Grade der Annäherung, der in den vorliegenden Entwickelungen erstrebt wurde, ist meistenteils diese Identität vorhanden, bis auf etwa folgende spezielle Werte:

$$b_{33} = \left[\frac{1}{450}\,g_2 - \frac{2}{225}\,g_4 - \ldots\right] + \left[\frac{1}{450}\,g_2 - \frac{148}{51975}\,g_4 - \ldots\right] = \frac{1}{225}\,g_2 - \frac{610}{51975}\,g_4 \ldots$$

$$b'_{33} = \left[\frac{1}{450}\,g_1 - \frac{2}{225}\,g_4 \ldots\right] - \left[\frac{1}{450}\,g_2 - \frac{148}{51975}\,g_4 - \ldots\right] = -\frac{314}{51975}\,g_4 \ldots$$

$$c_{52} = \frac{32}{33075}\,g_4 + \frac{4}{694575}\,g_4 = \frac{676}{694575}\,g_4$$

$$c'_{52} = \frac{32}{33075}\,g_4 - \frac{4}{694575}\,g_4 = \frac{668}{694575}\,g_4$$

Bis zu dem gleichen Grade der Genauigkeit kann man daher die Koeffizienten von $\cos m(\alpha - A)$ und $\sin m(\alpha - A)$ in den beiden ersten Gleichungen als einander gleich annehmen und erhält dann, wenn man noch zur Vereinfachung

$$\frac{\lambda}{\varkappa} = \operatorname{tg} B$$

setzt, diese zwei Gleichungen in der Form:

$$\begin{aligned}\cos^2\delta\,\Delta\alpha = \cos^2\delta\,\Delta a &+ \beta\varkappa\,[a_{22}X_{22}X'_{22} + \ldots \\ &+ \beta\varkappa \sec B \cos\,[\alpha - A + B]\,[b_{11}X_{11}X'_{11} + b_{21}X_{21}X'_{21} + b_{31}X_{31}X'_{31} + \ldots \\ &+ \beta\varkappa \sec B \cos[2(\alpha - A) + B]\,[c_{22}X_{22}X'_{22} + c_{32}X_{32}X'_{32} + c_{52}X_{52}X'_{52} + \ldots \\ &+ \beta\varkappa \sec B \cos\,[3\,(\alpha - A + B]\,[d_{33}X_{33}X'_{33} + d_{53}X_{53}X'_{53} + \ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^2\delta\,\frac{\Delta\rho}{\rho} - \sin\delta\cos\delta\,\Delta\delta = \cos^2\delta\left[\frac{\Delta r}{r} - \Delta d \operatorname{tg} d\right] &+ \beta\lambda\,[a_{22}X_{22}X'_{22} + \ldots \\ &+ \beta\varkappa \sec B \sin\,(\alpha - A + B)\,[b_{11}X_{11}X'_{11} + b_{21}X_{21}X'_{21} + b_{31}X_{31}X'_{31} + \ldots \\ &+ \beta\varkappa \sec B \sin\,[2\,(\alpha - A) + B]\,[c_{22}X_{22}X'_{22} + c_{32}X_{32}X'_{32} + c_{52}X_{52}X'_{52} + \ldots \\ &+ \beta\varkappa \sec B \sin\,[3\,(\alpha - A) + B]\,[d_{33}X_{33}X'_{33} + d_{53}X_{53}X'_{53} + \ldots\end{aligned} \qquad 8d)$$

Hiezu kommen noch die Entwickelung der Anfangsglieder in diesen Reihen, das ist der Glieder

$$\cos^2\delta\,\Delta a, \quad \cos^2\delta\left[\frac{\Delta r}{r} - \Delta d \operatorname{tg} d\right] \text{ und } \sin^2\delta\left[\frac{\Delta r}{r} + \Delta d \operatorname{ctg} d\right].$$

Berücksichtigt man, daß man

$$\cos^2\delta = \frac{2}{3}X_{00} - \frac{2}{3}X_{20} \qquad \sin^2\delta = \frac{1}{3}X_{00} + \frac{2}{3}X_{20}$$

setzen kann, so sieht man, daß sich diese Glieder mit den analogen mit $\beta\varkappa$, $\beta\lambda$ und $\beta\mu$ multiplizierten Teilen vereinigen, nur mit dem Unterschiede, daß sie nicht mit den entsprechenden Kugelfunktionen des Arguments D kombiniert auftreten. Die Symmetrie der Ausdrücke $X_{\varkappa\lambda}\,X'_{\varkappa\lambda}$ ist daher in diesen Anfangsgliedern oder den Gliedern 0[ter] Ordnung nicht vorhanden.

Die nachfolgenden numerischen Entwickelungen lassen nun das merkwürdige Resultat erkennen daß der Hilfswinkel B, der durch die Beziehung $\lambda/\varkappa = \operatorname{tg} B$ eingeführt wurde, sehr nahe gleich Null ist. Nimmt man daher direkte an

$$B = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta R}{R} - \Delta d \operatorname{tg} d + \Delta D \operatorname{tg} D = 0,$$

so vereinfachen sich die Gleichungen 8 *d)* nochmals und zwar zu:

$$\begin{aligned}\cos^2\delta\,\Delta\alpha = \cos^2\delta\,\Delta a &+ \beta\varkappa\,(a_{22}X_{22}X'_{22} + \ldots \\ &+ \beta\varkappa \cos\,(\alpha - A)\,[b_{11}X_{11}X'_{11} + b_{21}X_{21}X'_{21} + \ldots \\ &+ \beta\varkappa \cos 2\,(\alpha - A)\,[c_{22}X_{22}X'_{22} + c_{32}X_{32}X'_{32} + \ldots \\ &+ \beta\varkappa \cos 3\,(\alpha - A)\,[d_{33}X_{33}X'_{33} + c_{53}X_{53}X'_{53} + \ldots\end{aligned} \qquad 8e)$$

$$\cos^2\delta\,\frac{\Delta\rho}{\rho}-\sin\delta\cos\delta\,\Delta\delta=\cos^2\delta\left[\frac{\Delta r}{r}-\Delta d\operatorname{tg} d\right]$$

$$+\beta\varkappa\sin(\alpha-A)\,[b_{11}X_{11}X'_{11}+b_{21}X_{21}X'_{21}+\ldots$$

$$+\beta\varkappa\sin 2(\alpha-A)\,[c_{22}X_{22}X'_{22}+c_{32}X_{32}X'_{32}+\ldots$$

$$+\beta\varkappa\sin 3(\alpha-A)\,[d_{33}X_{33}X'_{33}+d_{53}X_{53}X'_{53}+\ldots$$

in denen die Gleichheit der Koeffizienten b, c und d ebenso wieder nur innerhalb der Grenzen der hier angestrebten Genauigkeit gilt.

Endlich sei noch bemerkt, daß die Beziehungen bestehen:

$$\cos^2\delta\,\Delta\alpha=\frac{1}{\rho^2}\,[\xi\Delta\eta-\eta\Delta\xi]$$

$$\cos^2\delta\,\frac{\Delta\rho}{\rho}-\sin\delta\cos\delta\,\Delta\delta=\frac{1}{\rho^2}\,[\xi\Delta\xi+\eta\Delta\eta]$$

$$\sin^2\delta\,\frac{\Delta\rho}{\rho}+\sin\delta\cos\delta\,\Delta\delta=\frac{1}{\rho^2}\cdot\zeta\Delta\zeta.$$

II. Numerische Entwickelungen nach Charlier und Hecker.

5. Ich entnehme der Abhandlung Charlier's die folgenden auf p. 59 derselben enthaltenen Daten über die Eigenbewegungen $\cos\delta\,\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ der Sterne in den vier Sektoren B, C, D und E, die ich hier durch die Kolonne der $\cos^2\delta\,\Delta\alpha$ ergänzt mitteile:

Sektoren B $\delta=+45°\ 6'0$						Sektoren E $\delta=-45°\ 6'0$					
α		Zahl der Sterne	$\cos\delta\,\Delta\alpha$	$\cos^2\delta\,\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	α		Zahl der Sterne	$\cos\delta\,\Delta\alpha$	$\cos^2\delta\,\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
18°	B_1	104	+ 0"538	+ 0"3798	− 0"433	18°	E_1	51	+ 0"892	+ 0"6297	− 0"402
54	B_2	109	+ 0·491	+ 0·3466	− 0·628	54	E_2	50	+ 0·740	+ 0·5223	+ 0·240
90	B_3	87	+ 0·167	+ 0·1179	− 0·868	90	E_3	94	− 0·117	− 0·0826	+ 0·436
126	B_4	70	− 0·386	− 0·2725	− 0·543	126	E_4	161	− 0·488	− 0·3444	− 0·127
162	B_5	67	− 1·291	− 0·9112	− 0·649	162	E_5	109	− 0·775	− 0·5470	− 0·206
198	B_6	55	− 0·536	− 0·3784	− 0·100	198	E_6	104	− 0·856	− 0·6042	− 0·712
234	B_7	81	− 0·747	− 0·5272	+ 0·216	234	E_7	107	− 0·528	− 0·3713	− 0·864
270	B_8	84	+ 0·250	+ 0·1764	+ 0·143	270	E_8	96	− 0·156	− 0·1101	− 1·062
306	B_9	122	+ 0·508	+ 0·3586	+ 0·123	306	E_9	53	+ 0·632	+ 0·4461	− 0·840
342	B_{10}	105	+ 0·538	+ 0·3798	− 0·100	342	E_{10}	63	+ 0·675	+ 0·4764	− 0·627

Sektoren C $\delta = +14^\circ\, 28'6$						Sektoren D $\delta = -14^\circ\, 28'6$					
α		Zahl der Sterne	$\cos\delta\,\Delta\alpha$	$\cos^2\delta\,\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	α		Zahl der Sterne	$\cos\delta\,\Delta\alpha$	$\cos^2\delta\,\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
15°	C_1	64	+ 0″625	+ 0″6052	− 0″797	15°	D_1	53	+ 0″538	+ 0″5210	− 0″368
45	C_2	92	+ 0·978	+ 0·9469	− 0·706	45	D_2	63	+ 0·976	+ 0·9449	− 0·627
75	C_3	150	+ 0·660	+ 0·6390	− 0·600	75	D_3	105	+ 0·138	+ 0·1336	− 0·291
105	C_4	102	− 0·274	− 0·2653	− 0·696	105	D_4	147	− 0·330	− 0·3195	− 0·065
135	C_5	66	− 0·742	− 0·7184	− 1·273	135	D_5	75	− 0·580	− 0·5616	− 0·193
165	C_6	59	− 0·839	− 0·8126	− 0·856	165	D_6	45	− 1·078	− 1·0438	+ 0·033
195	C_7	61	− 1·008	− 0·9761	− 0·431	195	D_7	59	− 0·873	− 0·8453	− 0·517
225	C_8	69	− 0·703	− 0·6808	− 0·529	225	D_8	86	− 0·570	− 0·5520	− 0·849
255	C_9	86	− 0·384	− 0·3718	− 0·360	255	D_9	77	− 0·162	− 0·1569	− 0·916
285	C_{10}	108	+ 0·306	+ 0·2963	− 0·380	285	D_{10}	105	+ 0·224	+ 0·2169	− 0·700
315	C_{11}	80	+ 0·662	+ 0·6411	− 0·738	315	D_{11}	75	+ 0·767	+ 0·7428	− 0·687
345	C_{12}	62	+ 1·000	+ 0·9683	− 0·306	345	D_{12}	77	+ 0·838	+ 0·8113	− 0·461

Aus ihnen ergaben sich zunächst die folgenden vier reinen Fourier'schen Reihen, in denen der kürzeren Schreibweise halber die Koeffizienten in Einheiten von 0″001 ausgedrückt sind

$$\delta = +45^\circ\; 6'0$$

$$\begin{aligned}
\cos^2\delta\,\Delta\alpha = &- 33''02\\
&+ 566{\cdot}69 \cos\alpha\\
&- 5{\cdot}37 \sin\alpha\\
&- 138{\cdot}87 \cos 2\alpha\\
&+ 11{\cdot}90 \sin 2\alpha\\
&- 45{\cdot}36 \cos 3\alpha\\
&- 59{\cdot}51 \sin 3\alpha\\
&+ 41{\cdot}44 \cos 4\alpha\\
&+ 132{\cdot}70 \sin 4\alpha\\
&- 83{\cdot}40 \sin 5\alpha
\end{aligned}$$

$$\delta = +14^\circ\; 28'6$$

$$\begin{aligned}
\cos^2\delta\,\Delta\alpha = &+ 22''65\\
&+ 961{\cdot}23 \cos\alpha\\
&+ 95{\cdot}32 \sin\alpha\\
&- 74{\cdot}10 \cos 2\alpha\\
&+ 33{\cdot}02 \sin 2\alpha\\
&- 141{\cdot}15 \cos 3\alpha\\
&- 44{\cdot}85 \sin 3\alpha\\
&- 24{\cdot}55 \cos 4\alpha\\
&- 100{\cdot}10 \sin 4\alpha\\
&- 46{\cdot}19 \cos 5\alpha\\
&- 44{\cdot}36 \sin 5\alpha\\
&- 52{\cdot}82 \sin 6\alpha
\end{aligned}$$

$$\delta = -14^\circ\; 28'6$$

$$\begin{aligned}
\cos^2\delta\,\Delta\alpha = &- 9''05\\
&+ 884{\cdot}49 \cos\alpha\\
&- 37{\cdot}99 \sin\alpha\\
&- 62{\cdot}20 \cos 2\alpha\\
&+ 34{\cdot}24 \sin 2\alpha\\
&- 47{\cdot}97 \cos 3\alpha\\
&- 5{\cdot}98 \sin 3\alpha\\
&- 152{\cdot}57 \cos 4\alpha\\
&- 24{\cdot}70 \sin 4\alpha\\
&- 58{\cdot}03 \cos 5\alpha\\
&- 111{\cdot}99 \sin 5\alpha\\
&- 18{\cdot}68 \sin 6\alpha
\end{aligned}$$

$$\delta = -45^\circ\; 6'0$$

$$\begin{aligned}
\cos^2\delta\,\Delta\alpha = &+ 1''49\\
&+ 627{\cdot}35 \cos\alpha\\
&+ 35{\cdot}21 \sin\alpha\\
&+ 15{\cdot}63 \cos 2\alpha\\
&+ 20{\cdot}67 \sin 2\alpha\\
&- 54{\cdot}97 \cos 3\alpha\\
&+ 34{\cdot}91 \sin 3\alpha\\
&- 82{\cdot}22 \cos 4\alpha\\
&+ 12{\cdot}48 \sin 4\alpha\\
&+ 13{\cdot}45 \sin 5\alpha
\end{aligned}$$

und sodann die nur bis zu den Gliedern 3. Ordnung gehende Schlußentwickelung:

$$\begin{aligned}\cos^2\delta\Delta\alpha = & \qquad -7''11\,X_{00} - 34''25\,X_{20} - \ldots \\ & + \cos\alpha\;[+919\cdot54\,X_{11} - 26\cdot41\;X_{21} - 32\cdot62\,X_{31}\ldots \\ & + \sin\alpha\;[+\;26\cdot96\,X_{11} - 28\cdot38\;X_{21} - 2\cdot57\,X_{31}\ldots \\ & + \cos 2\alpha\,[-\;27\cdot97\,X_{22} - 9\cdot64\;X_{32} - 2\cdot79\,X_{52}\ldots \\ & + \sin 2\alpha\,[-\;11\cdot23\,X_{22} - 0\cdot58\;X_{32} - 0\cdot14\,X_{52}\ldots \\ & + \cos 3\alpha\,[-\;7\cdot23\,X_{33} - 0\cdot185\,X_{53}\ldots \\ & + \sin 3\alpha\,[-\;1\cdot92\,X_{33} - 0\cdot033\,X_{53}\ldots\end{aligned}$$

Durch Vereinigung der entsprechenden Koeffizienten der cos und sin nimmt sie die Form an:

$$\begin{aligned}\cos^2\delta\Delta\alpha = & \ldots \\ & -919''54\,X_{11}\cos(\alpha - 181^\circ\;40'8) + 38''77\,X_{21}\cos(\alpha - 227^\circ\;3'6) + \\ & \qquad + 32''71\,X_{31}\cos(\alpha - 184^\circ\;30'5)\ldots \\ & -30\cdot14\,X_{22}\cos(2\alpha - 381\;52\cdot7) - 9\cdot66\,X_{32}\cos(2\alpha - 363^\circ\;25'3) - \\ & \qquad - 2''80\,X_{52}\cos(2\alpha - 362^\circ\;45'9)\ldots \\ & + 7\cdot48\,X_{33}\cos(3\alpha - 554\;51\cdot7) + 0\cdot19\,X_{53}\cos(3\alpha - 550^\circ\;16'3).\end{aligned}$$

Vergleicht man diese Entwickelung mit der p. 13 [239]Gleichung $8d$) gegebenen theoretischen Form, so folgt als erstes Ergebnis der durchgeführten Rechnungen die Bestimmung der Winkelgrößen A und B aus den einzelnen Gliedern 1., 2. und 3. Ordnung zu

$A-B =$	181° 40'8,	227° 3'6,	184° 30'5 . . .	im Mittel	197° 45'0
$2A-B =$	381 52·7	363 25·3	362 54·9	» »	369 24·3
$3A-B =$	554 51·7	550 16·3		» »	552 34·0,

wobei die Mittelwerte gebildet wurden, ohne irgend eine der Zahlen vor der anderen durch Erteilung eines besonderen Gewichtes zu bevorzugen. Aus ihnen findet sich nach den Beziehungen:

$A = (2A-B)-(A-B) = (3A-B)-(2A-B)$ zu 171° 39'3, bez. 183° 9'7 im Mittel 177° 24'5,

während aus

$$A = \frac{1}{2}\,[(3A-B)-(A-B)]$$

als gleicher Mittelwert 177° 24'5 sich ergibt. Mit diesem als Schlußwert angenommenen Mittel erhält man wieder für B der Reihe nach:

$$-20^\circ\;20'5 \qquad -14^\circ\;35'3 \qquad -20^\circ\;20'5 \qquad \text{Mittel } -18^\circ\;25'4$$

so daß endlich

$$A = 177^\circ\;24'5 \qquad B = -18^\circ\;25'4$$

angenommen wurde, aus denen wiederum

$$A-B = 195^\circ\;49'9 \qquad 2A-B = 373^\circ\;14'4 \qquad 3A-B = 550^\circ\;38'9$$

gegenüber den empirischen

$$A-B = 197^\circ\;45'0 \qquad 2A-B = 369^\circ\;24'3 \qquad 3A-B = 552^\circ\;34'0$$

mit den Differenzen im Sinne $B-R$ folgen

$$\Delta(A-B) = +\;1^\circ\;55'1 \qquad \Delta(2A-B) = -3^\circ\;50'1 \qquad \Delta(3A-B) = +1^\circ\;55'1.$$

Nun erübrigt als zweites Ergebnis die Berechnung von D. Diese kann, da vorerst in den Gleichungen 8 d) die Größen β und $\varkappa$ und damit auch die Koeffizienten b, c und d ganz unbekannt sind, nur aus dem Vergleich jener Glieder durchgeführt werden, deren Koeffizienten in einem einfachen Zusammenhange zu einander stehen. Solche sind, wie man aus den Definitionsgleichungen 9 ersieht:

$$b_{21} = \frac{1}{9} \frac{\beta}{1-\beta^2} = 2\,c_{22},$$

ferner, wenn auch nur genähert richtig, bis auf einen kleinen Bruchteil von g_4

$$b_{31} = \frac{2}{45} g_2 - \frac{8}{135} g_4 = 20 \left[\frac{1}{450} g_2 - \frac{74}{51975} g_4 \ldots\right] = 20\, d_{33}.$$

Aus der ersten folgt

$$\frac{\beta\varkappa \sec B\, b_{21} X'_{21}}{\beta\varkappa \sec B\, c_{22} X'_{22}} = 2 \operatorname{tg} D = -\frac{38''77}{30\cdot 14} \text{ dh. } D = -32° \; 44'8$$

aus der zweiten ebenso

$$\frac{\beta\varkappa \sec B\, b_{31} X'_{31}}{\beta\varkappa \sec B\, d_{33} X'_{33}} = 2 \frac{5 \sin^2 D - 1}{\cos^2 D} = \frac{32'71}{7\cdot 48} \text{ dh. } D = -41° \; 45'3$$

und im Mittel wieder ohne jeden Gewichtsunterschied

$$D = -37° \, 15'0.$$

6. Zu einer zweiten Berechnung der Größen A und D entnahm ich das Beobachtungsmaterial der Dissertation Hecker's und zwar p. 25 derselben. Es sind dies bloß die Angaben, die Hecker als Eigenbewegungen in AR Abteilung I bezeichnet und die Bradley'sche Sterne von der 1. bis inklusive 5·9. Größe umfassen. An sie ist eine Präzessionskorrektur im Sinne Anding's[1] angebracht.

In Einheiten von 0"001 ausgedrückt und bei der Bedeutung von $\varphi = \alpha - 15°$ ist:

$$\delta = -20°3 \quad \Delta\alpha = -33''5 + 66''7 \cos\varphi - 15''1 \cos 2\varphi - 1''1 \cos 3\varphi - 4''8 \cos 4\varphi$$
$$- 20\cdot 1 \sin\varphi - 4\cdot 7 \sin 2\varphi - 5\cdot 0 \sin 3\varphi - 1''0 \sin 4\varphi$$

$$\delta = -\;7\cdot 7 \quad \Delta\alpha = -32\cdot 1 + 80\cdot 7 \cos\varphi - 14\cdot 2 \cos 2\varphi - 1\cdot 2 \cos 3\varphi - 3\cdot 8 \cos 4\varphi$$
$$- 20\cdot 1 \sin\varphi - 6\cdot 0 \sin 2\varphi - 1\cdot 6 \sin 3\varphi$$

$$\delta = +\;4\cdot 9 \quad \Delta\alpha = -30\cdot 0 + 80\cdot 6 \cos\varphi - 15\cdot 4 \cos 2\varphi - 1\cdot 4 \cos 3\varphi - 3\cdot 5 \cos 4\varphi$$
$$- 17\cdot 5 \sin\varphi - 4\cdot 8 \sin 2\varphi - 1\cdot 3 \sin 3\varphi$$

$$\delta = +17\cdot 5 \quad \Delta\alpha = -30\cdot 9 + 79\cdot 9 \cos\varphi - 14\cdot 6 \cos 2\varphi - 2\cdot 3 \cos 3\varphi - 5\cdot 0 \cos 4\varphi$$
$$- 13\cdot 7 \sin\varphi - 4\cdot 5 \sin 2\varphi - 7\cdot 0 \sin 3\varphi$$

$$\delta = +30\cdot 1 \quad \Delta\alpha = -32\cdot 4 + 78\cdot 3 \cos\varphi - 15\cdot 9 \cos 2\varphi - 3\cdot 5 \cos 3\varphi - 6\cdot 0 \cos 4\varphi$$
$$- 10\cdot 5 \sin\varphi - 3\cdot 2 \sin 2\varphi - 7\cdot 0 \sin 3\varphi - 1\cdot 8 \sin 4\varphi$$

$$\delta = +42\cdot 7 \quad \Delta\alpha = -29\cdot 9 + 89\cdot 6 \cos\varphi - 17\cdot 9 \cos 2\varphi - 1\cdot 1 \cos 3\varphi - 4\cdot 9 \cos 4\varphi$$
$$- 9\cdot 6 \sin\varphi - 8\cdot 7 \sin 2\varphi - 7\cdot 2 \sin 3\varphi - 1\cdot 8 \sin 4\varphi$$

$$\delta = +55\cdot 3 \quad \Delta\alpha = -32\cdot 2 + 115\cdot 8 \cos\varphi - 24\cdot 3 \cos 2\varphi - 0\cdot 6 \cos 3\varphi - 2\cdot 2 \cos 4\varphi$$
$$- 6\cdot 2 \sin\varphi - 13\cdot 6 \sin 2\varphi - 5\cdot 0 \sin 3\varphi$$

[1] Anding: Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum. München 1901, p. 69.

Durch Multiplikation mit $\cos^2\delta$ erhält man die neuen Reihen, die ich nur bis zu den Gliedern dritter Ordnung hier anführe:

$$\delta = -20^\circ 3 \quad \cos^2\delta\,\Delta\alpha = -29''48 + 58''68\cos\varphi - 13''29\cos 2\varphi - 0''97\cos 3\varphi$$
$$-17\cdot 68\sin\varphi - 4\cdot 14\sin 2\varphi - 4\cdot 40\sin 3\varphi$$

$$\delta = +\ 7\cdot 7 \quad \cos^2\delta\,\Delta\alpha = -31\cdot 52 + 79\cdot 25\cos\varphi - 13\cdot 94\cos 2\varphi - 1\cdot 18\cos 3\varphi$$
$$-19\cdot 74\sin\varphi - 5\cdot 89\sin 2\varphi - 1\cdot 57\sin 3\varphi$$

$$\delta = +\ 4\cdot 9 \quad \cos^2\delta\,\Delta\alpha = -29\cdot 78 + 80\cdot 00\,\mathrm{ccs}\,\varphi - 15\cdot 29\cos 2\varphi - 1\cdot 30\cos 3\varphi$$
$$-17\cdot 37\sin\varphi - 4\cdot 76\sin 2\varphi - 1\cdot 29\sin 3\varphi$$

$$\delta = +17\cdot 5 \quad \cos^2\delta\,\Delta\alpha = -28\cdot 11 + 72\cdot 66\cos\varphi - 13\cdot 38\cos 2\varphi - 2\cdot 09\cos 3\varphi$$
$$-12\cdot 46\sin\varphi - 4\cdot 09\sin 2\varphi - 6.37\sin 3\varphi$$

$$\delta = +30\cdot 1 \quad \cos^2\delta\,\Delta\alpha = -24\cdot 25 + 58\cdot 61\cos\varphi - 11\cdot 90\cos 2\varphi - 2\cdot 62\cos 3\varphi$$
$$-\ 7\cdot 86\sin\varphi - 2\cdot 39\sin 2\varphi - 5\cdot 24\sin 3\varphi$$

$$\delta = +42\cdot 7 \quad \cos^2\delta\,\Delta\alpha = -16\cdot 15 + 48\cdot 40\cos\varphi - 9\cdot 67\cos 2\varphi - 0\cdot 59\cos 3\varphi$$
$$-\ 5\cdot 19\sin\varphi - 4\cdot 70\sin 2\varphi - 3\cdot 89\sin 3\varphi$$

$$\delta = +55\cdot 3 \quad \cos^2\delta\,\Delta\alpha = -10\cdot 44 + 37\cdot 54\cos\varphi - 7\cdot 88\cos 2\varphi - 0\cdot 19\cos 3\varphi$$
$$-\ 2\cdot 01\sin\varphi - 4\cdot 41\sin 2\varphi - 1\cdot 62\sin 3\varphi$$

Die aus ihnen folgende Entwickelung nach Kugelfunktionen lautet, nach Ersetzung von φ durch $\alpha - 15$ und Außerachtlassen der Anfangskonstanten, die nicht weiter benutzt wurden.

$$\cos^2\delta\Delta\alpha = \ldots.$$
$$-71''75\,X_{11}\cos\ (\alpha - 182^\circ\ 15'1) + 4''47\,X_{21}\cos(\alpha - 248^\circ\ 37'6) +$$
$$+\ 4''96\ X_{31}\cos(\alpha - 182^\circ\ 18'5)$$
$$-\ 5\cdot 16\,X_{22}\cos(2\alpha - 407^\circ 24\cdot 5) - 0\cdot 40\,X_{32}\cos(2\alpha - 422^\circ\ 35'6) +$$
$$+\ 0\cdot 182\,X_{52}\cos(2\alpha - 448^\circ\ 44'5)$$
$$-\ 0\cdot 652\,X_{33}\cos(3\alpha - 653^\circ\ 28'8) - 0\cdot 37\,X_{53}\cos(3\alpha - 668^\circ\ 21'5).$$

Sie führt zu den nachstehenden Werten für die Größen A und B. Vorerst

$A - B =$	182° 15 1	248° 37'6	182° 18'5	im Mittel 204° 23'7
$2A - B =$	407 24·5	422 35·6	448 44·5	» » 426 14·8
$3A - B =$	653 28·8	668 21·5		» » 660 54·6

und sodann nach dem gleichen Schema wie vorher

$A =$	221° 51'1	234° 39'8	228° 15'4	im Mittel 228° 15'4
$B =$	+23 51·7	+ 30 16·0	+ 23 51·6	» » + 26 0·0,

so daß

$$A - B = 202^\circ\ 15'4 \qquad 2A - B = 430^\circ\ 30'8 \qquad 3A - B = 658^\circ\ 46'2$$

mit den Fehlern im Sinne $B - R$ wird:

$$+\ 2^\circ 8'3 \qquad -4^\circ\ 16'0 \qquad +2\ 8'4,$$

während für D sich die zwei Werte

$$D = -23^\circ\ 26'0 \quad \text{und} \quad D = -47^\circ\ 38'4 \ \text{im Mittel}\ D = -35^\circ\ 32'2$$

ergeben.

Man gelangt also aus den beiden nach Deklinationszonen geordneten Beobachtungsdaten über die Eigenbewegungen der Fixsterne zu folgenden Resultaten über die Größen A, D und den Hilfswinkel B:

nach Charlier	$A = 177°\ 24'5$	$D = -37°\ 15'0$	$B = -18°\ 25'4$
» Hecker	$A = 228\ \ 15\ 3$	$D = -35\ \ 32\cdot 2$	$B = +26\ \ 0\cdot 0$

Resultate, die, was die Rektaszension A anlangt, recht weit auseinandergehen, dagegen in der Deklination D eine bessere Übereinstimmung zeigen. Dies gilt, so lange man die Größe B als eine mitzubestimmende Unbekannte ansieht. Aus dem Umstande, daß dieser Hilfswinkel ziemlich klein ist, maßgebend ist ja nach der Definition tg B, da $\lambda = \varkappa$ tg B, sich ferner aus dem ersteren Beobachtungsmaterial negativ, aus dem zweiten positiv ergibt, im Mittel daher fast gleich Null ist, kann man den Schluß ziehen, daß es vorteilhafter sein dürfte, B überhaupt $= 0$ anzunehmen. In der Tat folgt sodann

Charlier $A = 197°\ 45'0$ $\quad 2A = 369°\ 24'3 = 2.184°\ 42'1$

$3A = 552°\ 34'0 = 3.184°\ 11'3$, im Mittel $188°\ 52'8$

Hecker $A = 204\ \ 23\cdot 7$ $\quad 2A = 426\ \ 14\cdot 8 = 2.213°\ 7'4$

$3A = 660°\ 54'6 = 3.220°\ 18'2$, im Mittel $212°\ 36'4$

das heißt

$$A = 188°\ 52'8 \quad \text{und} \quad 212°\ 36'4$$

zwei etwas besser zusammenstimmende Zahlen, während der Wert für D unverändert bleibt.

III. Bestimmung der Bahnebene der Sonne.

7. Es mögen, indem auf die Hauptgleichungen 1) zurückgegangen werde, in ihnen die Größen ξ, η und ζ die geozentrischen Koordinaten eines kleinen Planeten, x, y und z seine heliozentrischen und X, Y und Z die heliozentrischen Koordinaten der Erde bedeuten, das heißt es mögen die Gleichungen 1)

$$\xi = x - X \qquad \eta = y - Y \qquad \zeta = z - Z$$

auf die geozentrische Bewegung der kleinen Planeten angewendet werden. Sind dann Ω und i Knoten und Neigung der Ekliptik als der Bahnebene der Erde und

$$l = \sin i \sin \Omega \qquad m = -\sin i \cos \Omega \qquad n = \cos i$$

ihre Richtungscosinus, so gilt die Beziehung

$$lX + mY + nZ = 0 \ . \ . \ . \tag{10)}$$

die nichts anderes aussagt, als daß die Größen X, Y und Z der Gleichung einer Ebene (Ekliptik) genügen.

Ebenso gilt natürlich auch die Beziehung

$$l\Delta X + m\Delta Y + n\Delta Z = 0 \ . \ . \ . \tag{10)}$$

die man aus der ersten durch Differentiation nach der Zeit erhält.

In gleicher Art erfüllen wohl auch die Koordinaten x, y und z die Gleichung einer Ebene. Aber im allgemeinen werden die Richtungscosinus l, m und n derselben für die einzelnen Planeten verschiedene Werte haben, die, was die Knoten Ω betrifft, alle möglichen Werte von $0° - 360°$ durchlaufen, dagegen, was die Neigungswinkel i anlangt, wie bekannt, zwischen den ziemlich engen Grenzen $0° - 35°$ eingeschlossen sind. Nimmt man jedoch von den x, y und z in geeigneter Weise Mittelwerte, das heißt, versteht man unter diesen Größen nicht mehr die Koordinaten eines individuellen Planeten, sondern das Mittel einer bestimmten Zahl aus ihnen, dann kann man annehmen, daß sich darin der Einfluß der Spezialwerte von Ω und i aufhebt und nur die besonderen Werte übrigbleiben, die der Erdbahn entsprechen. Es dürfte diese Annahme nichts anderes ausdrücken, als die Tatsache, daß der Schwarm der kleinen Planeten sich im Mittel in einer Ebene bewegt, die mit der Ebene der Ekliptik zusammenfällt, oder daß die Bahnebenen der Planeten sich symmetrisch um die Ekliptik gruppieren.

Macht man diese Annahme, dann genügen die Koordinaten x, y und z, darunter nicht mehr die heliozentrischen Koordinaten eines einzelnen Planeten, als vielmehr die Mittel einer geeigneten Zahl unter ihnen verstanden, analogen Gleichungen wie die X, Y und Z, nämlich

$$\begin{aligned} lx + my + nz &= 0 \\ l\Delta x + m\Delta y + n\Delta z &= 0 \end{aligned} \qquad 10a)$$

und ist dies der Fall, dann müssen zufolge von 1) auch die Koordinaten ξ, η und ζ wie ihre Differentialen $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ die gleiche Beziehung

$$\begin{aligned} l\xi + m\eta + n\zeta &= 0 \\ l\Delta\xi + m\Delta\eta + n\Delta\zeta &= 0 \end{aligned} \qquad 10b)$$

erfüllen, wobei die Konstanten l, m und n sich ebenfalls auf die Ebene der Erdbahn beziehen.

Aus ihnen folgt:

$$\frac{l}{n} = \operatorname{tg} i \sin\Omega = \frac{\eta\Delta\zeta - \zeta\Delta\eta}{\xi\Delta\eta - \eta\Delta\xi}$$

$$-\frac{m}{n} = \operatorname{tg} i \cos\Omega = \frac{\xi\Delta\zeta - \zeta\Delta\xi}{\xi\Delta\eta - \eta\Delta\xi}$$

und, da zu setzen ist:

$$\xi = \rho\cos\alpha\cos\delta \qquad \eta = \rho\sin\alpha\cos\delta \qquad \zeta = \rho\sin\delta$$

auch noch

$$\operatorname{tg} i \sin\Omega = \frac{\sin\alpha\Delta\delta - \cos\alpha\sin\delta\cos\delta\Delta\alpha}{\cos^2\delta\Delta\alpha} \qquad \operatorname{tg} i \cos\Omega = \frac{\cos\alpha\Delta\delta + \sin\alpha\sin\delta\cos\delta\Delta\alpha}{\cos^2\delta\Delta\alpha}$$

woraus man durch passende Multiplikation mit $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ und nachherige Addition und Subtraktion die etwas einfacheren Beziehungsgleichungen ableiten kann, nämlich

$$\operatorname{tg} i \sin(\alpha-\Omega) = \operatorname{tg}\delta \qquad \operatorname{tg} i \cos(\alpha-\Omega) = \frac{\Delta\delta}{\cos^2\delta\Delta\alpha} \qquad 11)$$

findet.

Das eben auseinandergesetzte Rechnungsverfahren zeigt einige Verwandtschaft mit der Bessel-Kobold'schen Methode[1] zur Bestimmung des Apex der Sonnenbewegung. Nach ihr hat man zuerst nach den Formeln

$$s\sin d = \cos^2\delta\Delta\alpha \qquad s\cos d\sin(\alpha-a) = \Delta\delta \qquad s\cos d\cos(\alpha-a) = -\cos\delta\sin\delta\Delta\alpha \qquad 11b)$$

die Größen a und d als Rektaszension und Deklination des Pols der Eigenbewegung jedes einzelnen Sternes zu berechnen und dann jene Werte von A' und D' als den Koordinaten des Apex aufzusuchen, für welche

$$N = \Sigma\,[\sin d\sin D' + \cos d\cos d'\cos(\alpha - A]^2$$

die Summe erstreckt über alle in Betracht kommenden Fixsterne, ein Minimum wird.

Man leitet nun aus den Formeln 11 b leicht die folgenden ab

$$\operatorname{ctg} d\cos(\alpha-a) = -\operatorname{tg}\delta \qquad \operatorname{ctg} d\sin(\alpha-a) = \frac{\Delta\delta}{\cos^2\delta\Delta\alpha} \qquad 11b)$$

welche, mit den eben gefundenen

$$\operatorname{tg} i\sin(\alpha-\Omega) = \operatorname{tg}\delta \qquad \operatorname{tg} i\cos(\alpha-\Omega) = \frac{\Delta\delta}{\cos^2\delta\Delta\alpha} \qquad 11a)$$

[1] Kobold: Bau des Fixsternhimmels. Braunschweig, 1906, p. 93.

verglichen, den Zusammenhang zwischen den Größen Ω und i einer- und a und d andererseits nachweisen. Man sieht, daß man zu setzen hat:

$$d = 90-i \qquad a = \Omega-90 \qquad i = 90-d \qquad \Omega = a+90$$

und macht man tatsächlich von diesen Beziehungsgleichungen Gebrauch, und setzt

$$\begin{aligned} l &= \sin i \sin \Omega & &= \cos a \cos d & \Delta X &= \cos A' \cos D' \\ m &= -\sin i \cos \Omega & &= \sin a \cos d & \Delta Y &= \cos A' \cos D' \\ n &= \cos i & &= \sin d & \Delta Z &= \sin D' \end{aligned}$$

so geht die Bessel-Kobold'sche Bedingungsgleichung für das Minimum zur Bestimmung von A' und D' über in

$$N = \Sigma\,(l\Delta X + m\Delta Y + n\Delta Z)^2$$

eine Gleichung, deren geometrische Bedeutung damit klar wird.

Aber es besteht doch zwischen den beiden Gleichungsgruppen 11 a und 11 b ein wesentlicher Unterschied. In den Gleichungen 11 a ist der Winkel i stets im ersten Quadranten zu nehmen, während α—Ω durch alle Quadranten läuft. Nach den 11 b dagegen wird s positiv gewählt, d kann sowohl positiv wie negativ sein, und α—a durchläuft alle Quadranten. Speziell wird d negativ, wenn $\Delta\alpha$ negativ ist; in diesem Falle würde $i = 90-d$ in den zweiten Quadranten zu liegen kommen und damit auch da i in den ersten Quadranten fällt, muß man

$$i = 90+d \qquad \Omega = -(a-90)$$

wählen. Sonst zeigt sich in den aus a und d nach den Formeln 11 a berechneten Werten von Ω ein Sprung von 180°, das heißt eine Diskontinuität.

8. Um beide Gleichungsgruppen 11 a und 11 b auf ihre Richtigkeit und Genauigkeit zu prüfen, entnahm ich ebenso wie in meiner ersten Abhandlung dem Berliner Jahrbuch für das Jahr 1890, das noch die Jahresephemeriden der kleinen Planeten für das Jahr 1888 enthält, für die Zwischenzeit von Jänner 7 bis Jänner 27 die geozentrischen Bewegungen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ und berechnete ihre Mittelwerte über je zwei Rektaszensionsstunden. Die Resultate dieser Rechnung, samt den aus ihnen folgenden Werten für a und d als den Koordinaten der Pole der Eigenbewegung und Ω und i als den Bestimmungsgrößen der mittleren Bahnebene der kleinen Planeten sind in der nachstehenden Tabelle enthalten:

Zahl der Planeten	Mittelwert		$\Delta\alpha$	$\cos^2\delta\,\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	a	d	Ω	i
	α	δ							
31	0^h	+ 0° 23'4	+ 26m671	+ 400'07	+ 169'42	269° 5'	+ 67° 3'	− 0° 55'	22 57
17	2	+ 7 6·1	+ 16·647	+ 245·88	+ 127·82	286 31	+ 61 52	+ 16 31	28 8
14	4	+19 42·0	+ 0·250	+ 3·32	− 2·64	—	—	(249 16)	(41 24)
9	6	+24 25·2	− 11·044	− 137·35	− 1·56	91 26	− 65 34	− 1 26	24 26
11	8	+21 25·8	− 17·682	− 229·83	+ 51·00	90 31	− 65 44	− 0 31	24 16
19	10	+ 7 52·5	− 10·753	− 158·27	+ 45·42	85 44	− 72 20	+ 4 16	17 40
32	12	− 0 36·9	+ 4·872	+ 73·07	− 21·03	267 52	+ 73 56	− 2 8	16 4
35	14	− 8 52·7	+ 16·117	+ 236·01	− 68·11	271 34	+ 71 50	+ 1 34	18 10
24	16	17 3·0	+ 25·787	+ 353·56	− 68·63	272 20	+ 70 3	+ 2 20	19 57
24	18	−22 25·3	+ 33·904	+ 434·57	+ 10·87	266 32	+ 67 33	− 3 28	22 27
30	20	−20 10·0	+ 33·790	+ 446·50	+ 94·27	270 6	+ 67 2	+ 0 6	22 58
19	22	−11 2·5	+ 28·733	+ 415·18	+ 165·37	266 6	+ 66 5	− 3 54	23 55

Bis auf die der Rektaszension 4^h entsprechenden Werte von Ω und i weisen die Zahlen in den zwei letzten Kolonnen eine fast überraschende Übereinstimmung auf, während sich in den unter a und d stehenden Kolonnen der erwartete Sprung um 180° bei den negativen d zeigt. Man erhält als Mittel

$$\Omega = 1° \; 7' \qquad i = 22° \; 0'$$

statt der richtigen

$$\Omega = 0 \; 0 \qquad i = 23 \; 27$$

Aber auch für den großen sich bei $\alpha = 4^h$ zeigenden Unterschied ist eine Erklärung leicht zu finden. Sie liegt darin, daß hier beide die Grundlage der Rechnung bildenden Werte für $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ sehr klein sind, und daher der Quotient $\Delta\delta/\Delta\alpha$ fast in der Form 0/0 erscheint.

Der Erfolg reizt, eine analoge Rechnung für die Sonne und ihre Bahnebene im Raume auf Basis der Eigenbewegungen der Sterne zu versuchen. Doch ist vorerst zu überlegen, inwieweit hiebei überhaupt ein Erfolg erwartet werden kann. Zu diesem Zweck mag nochmals auf die Grundlagen eingegangen werden, auf denen die Rechnung beruht.

Die erste ist die Annahme, daß die Bewegung der Sonne in einer Ebene stattfinde. Gegen sie dürfte wohl kein Einwand erhoben werden. Sie sagt ja nicht aus, daß diese Bahn immerzu eine ebene sein müsse, sondern es kann auch nur von einer Momentanebene die Rede sein und, da es sich um Eigenbewegungen von Fixsternen handelt, die erst innerhalb eines Zeitraumes von mehreren 100 Jahren merklich zu werden beginnen, wird dieser Moment auch mehrere Jahrhunderte umspannen dürfen. Ebensowenig und aus dem gleichen Grunde wird man gegen die zweite Annahme, daß die Bahnen der Fixsterne Ebenen sind, Einspruch erheben. Nur die hier noch hinzuzufügende Ergänzungshypothese, daß alle diese Bahnebenen sich symmetrisch um die der Sonne gruppieren, ebenso wie es bei den Bahnen im Schwarme der kleinen Planeten in bezug auf die Ekliptik der Fall ist, dürfte auf Widerspruch stoßen. Scheint es doch, als ob ihr zufolge an Stelle der alten Annahme von der Regellosigkeit der Spezialbewegungen der Fixsterne eine andere tritt, nämlich die der symmetrischen Lage ihrer Bahnebenen gegenüber der Ebene der Milchstraße.

Andererseits ist aber klar, daß bei Durchführung der Rechnung für die Fixsterne keine so gute Übereinstimmung zu erhoffen ist, wie es die für die Planeten erreichte war. Aus zwei Gründen. Vorerst aus einem formalen. Das Beobachtungsmaterial, das die kleinen Planeten betrifft, ist schon an sich so angeordnet, daß es die Mittelwerte der geozentrischen Bewegungen für die einzelnen Rektaszensionsintervalle in einer Verteilung angibt, die der Lage der zu bestimmenden Ebene entspricht. Eine analoge Anordnung längs der Ebene der Milchstraße statt der gebräuchlichen längs von Parallelkreisen eingeschlossener Zonen wäre daher vorzuziehen. Doch habe ich von einer solchen Neuzusammenstellung und Neureduktion der Beobachtungsdaten über die Eigenbewegungen der Fixsterne abgesehen. Dann aber auch aus dem Grunde, daß keineswegs angenommen werden kann, daß die Neigungswinkel der Bahnebenen der Fixsterne gegen die der Sonne zwischen den gleichen engen Grenzen von 0° bis 35° eingeschlossen sein werden, wie es im Systeme der kleinen Planeten der Fall ist, sondern daß hier vielmehr weitaus größere Werte wahrscheinlich sind. Die Tatsache, daß die Zahl der Fixsterne außerhalb der Milchstraße noch immer eine ganz stattliche ist, spricht dafür, während es andererseits bekannt ist, daß von den Planeten nur äußerst wenige Deklinationen erreichen, die über $\pm 50°$ gehen. Von Interesse ist der Planet (247) Eukrate, der nach der Jahresephemeride von 1888 bis zur Deklination $+56°$ ansteigt.

Nach den Formeln 11 a und 11 b sind nun in der folgenden Tabelle aus dem oben p. 14 [240] mitgeteilten Beobachtungsmaterial von Charlier die Werte für a und d und ebenso die von Ω und i gerechnet und zusammengestellt. Wie ein Blick auf sie lehrt, zeigen die Zahlen für Ω und i keine zwar glänzende, aber doch eine solche Übereinstimmung, die es nicht ganz aussichtslos erscheinen läßt, aus ihnen einen Mittelwert abzuleiten, der sich von der Wahrheit nicht gar zu weit entfernen dürfte.

Hiebei sei noch bemerkt, daß nach der Formel $\Omega = a + 90$ gerechnet wurde bei den Sektoren B_8 B_9 B_{10} B_1 B_2 B_3 C_{12} C_1 C_2 C_3 mit positivem d, E_3 E_4 E_5 E_6 E_7 E_8 und D_6 D_7 D_8 D_9 mit negativem d

dagegen nach der Formel $\Omega = -(a-90)$ bei B_4 B_5 B_6 B_7 C_4 C_5 C_6 C_7 mit positivem d und E_9 E_{10} E_{11} E_{12} D_{10} D_{11} D_{12} D_1 mit negativem d. Und nur die Sektoren C_8 C_9 C_{10} C_{11} sowie D_2 D_3 D_4 D_5 bilden eine Ausnahme, indem da teils $\Omega = a - 90$, teils $270-a$ genommen wurde.

	a	d	Ω	i		a	d	Ω	i
B_8	128° 56'	+ 37° 47'	218° 56'	52° 13'	E_3	349° 14'	− 10° 32'	259° 14'	79° 28'
B_9	144 53	+ 43 19	234 53	46 41	E_4	285 50	− 43 6	195 50	46 54
B_{10}	147 18	+ 43 57	237 18	46 3	E_5	321 26	− 43 1	231 26	46 59
B_1	149 21	+ 33 22	239 21	56 38	E_6	328 25	− 32 52	238 25	57 8
B_2	172 59	+ 25 46	262 58	64 14	E_7	347 24	− 21 36	257 24	68 24
B_3	187 46	+ 7 40	277 46	82 20	E_8	5 56	− 5 53	275 56	84 7
B_4	189 17	− 41 46	269 43	48 14	E_9	7 57	+ 25 6	262 3	64 54
B_5	197 23	− 39 26	252 37	50 54	E_{10}	34 41	+ 31 8	235 19	58 52
B_6	212 45	− 43 56	237 15	46 4	E_1	50 28	+ 40 3	220 32	49 57
B_7	211 48	− 42 41	238 12	47 19	E_2	29 24	+ 42 11	240 36	47 49
C_{10}	26 6	+ 36 42	243 54	53 18	D_{10}	10 26	+ 17 10	259 34	72 50
C_{11}	57 38	+ 40 17	212 22	49 43	D_{11}	29 24	+ 46 9	240 36	43 51
C_{12}	114 15	+ 67 48	204 15	22 12	D_{12}	50 34	+ 58 2	219 26	31 58
C_1	116 5	+ 36 41	206 5	53 19	D_1	84 55	+ 53 3	185 5	36 57
C_2	154 6	+ 51 43	244 6	38 17	D_2	113 45	+ 54 33	203 45	35 27
C_3	180 22	+ 45 46	270 22	44 14	D_3	158 14	+ 24 31	248 14	65 29
C_4	189 23	− 20 47	260 37	69 13	D_4	246 46	− 71 48	203 14	18 12
C_5	216 43	− 29 11	233 17	60 49	D_5	261 55	− 66 44	188 5	23 16
C_6	241 14	− 42 40	208 46	47 20	D_6	351 59	− 75 25	261 59	14 35
C_7	254 52	− 62 47	195 7	27 13	D_7	307 53	− 56 25	217 53	33 34
C_8	296 30	− 50 48	206 30	39 12	D_8	324 32	− 32 40	234 32	57 20
C_9	330 4	− 44 56	240 4	45 4	D_9	347 32	− 9 42	257 32	80 18

Die Mittelwerte dieser Zahlengruppen sind:

Sektoren	B	E	C	D
Ω	246° 53'9	242° 40'5	227° 7'1	226° 39'6
i	54 6·4	60 27·2	45 50·5	42 53·8

und ihr allgemeines Mittel mit Berücksichtigung der Zahl der einzelnen Sektoren

$$\Omega = 234°\ 45'2 \qquad i = 50°\ 14'8$$

Greift man aus ihnen nur jene heraus, die dem Zuge der Milchstraße am Himmel folgen, es sind dies B_1 B_2 C_3 C_4 D_4 E_3 E_4 E_5 E_6 E_7 E_8 D_9 C_{10} B_9 B_{10} so folgt als Mittelwert

$$\Omega = 245°\ 30'0 \qquad i = 58°\ 25'1.$$

Zahlen, die auf eine Ebene hinweisen, die nur nahe der sonst durch

$$\Omega = 280° \qquad i = 63°$$

als Milchstraße definierten Ebene liegt, aber nicht mit ihr zusammenfällt. Zu ihnen die mittleren Fehler zu berechnen, schien mir eine überflüssige Arbeit.

9. Mit der Kenntnis dieser Zahlen, und der p. 19 [245] mitgeteilten, aus der Entwickelung der Kugelfunktionen resultierenden für die Größen A und D ist nun die Möglichkeit gegeben, die Hauptunbekannten des Problems, nämlich A' und D', das sind die Koordinaten des Apex der Sonnenbewegung zu berechnen.

Aber gleichzeitig ist das Problem jetzt ein überbestimmtes. Denn man kennt in dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke, das die Grundlage der Gleichungen 2) p. 4 [230] bildet, drei Größen, nämlich $A-\Omega$, D und i, wiewohl nur zwei bekannt sein brauchten. Man kann daher willkürlich eine der Größen variieren und die ihnen zugehörigen Wertepaare der L L' A' und D' bestimmen. Solche sind:

1. Für $\Omega = 234°\ 45'$ und $i = 50°\ 15'$

$A = 188°\ 53'$ $D = -40°\ 48'$ $L = 176°\ 33'$ $L' = 267°\ 33'$ $A' = 256°26'$ $D' = +23°\ 57'$

$A = 212°\ 36'$ $D = -24°\ 25'$ $L = 202°\ 18'$ $L' = 292°\ 18'$ $A' = 279\ 52'$ $D' = +49°\ 34'$

und für das aus den beiden Werten von A angenommene Mittel

$A = 200°\ 45'$ $D = -33°\ 57'$ $L = 191°\ 16'$ $L' = 281°\ 16'$ $A' = 267°58'$ $D' = +31°\ 56'$

2. Für $\Omega = 245°\ 30'$ und $i = 58°\ 25'$

$A = 188°\ 53'$ $D = -53°\ 38'$ $L = 174°\ 34'$ $L' = 264°\ 34'$ $A' = 255°58'$ $D' = +16°\ 8'$

$A = 212°\ 36'$ $D = -41°\ 24'$ $L = 194°\ 29'$ $L' = 284°\ 29'$ $A' = 270\ 38'$ $D' = +32°\ 28'$

und für den mittleren Wert von A

$A = 200°\ 45'$ $D = -48°\ 47'$ $L = 183°\ 21'$ $L' = 273°\ 21'$ $A' = 261°34'$ $D' = +23°\ 27'$

3. Dagegen für die oben erhaltenen Werte von $A = 188°\ 53'$ $D = -37°\ 15'$

$\Omega = 234°\ 45'$ $i = 46°\ 38'$ $L = 178°\ 25'$ $L' = 268°\ 25'$ $A' = 259\ 12'$ $D' = +23°\ 46'$

$\Omega = 245°\ 30'$ $i = 42°\ 20'$ $L = 181°\ 27'$ $L' = 271°\ 27'$ $A' = 265\ 9'$ $D' = +17°\ 10'$

4. Fur $A = 212°\ 36'$ und $D = -35°\ 32'$

$\Omega = 234°\ 45'$ $i = 62°\ 10'$ $L = 193°\ 40'$ $L' = 283°\ 40'$ $A' = 262°\ 55'$ $D' = +41°\ 48'$

$\Omega = 245°\ 30'$ $i = 52°\ 48'$ $L = 198°\ 36'$ $L' = 288°\ 36'$ $A' = 275°\ 10'$ $D' = +32°\ 57'$

5. Für die Mittelwerte $A = 200°\ 45'$ $D = -36°\ 24'$

$\Omega = 234°\ 45'$ $i = 52°\ 49'$ $L = 186°\ 36'$ $L' = 276°\ 36'$ $A' = 263°\ 10'$ $D' = +32°\ 7'$

$\Omega = 245°\ 30'$ $i = 46°\ 20'$ $L = 190°\ 22'$ $L' = 280°\ 22'$ $A' = 271°\ 12'$ $D' = +24°\ 25'$

und man könnte sich aus ihnen leicht Werte für A und D, Ω und i interpolieren, die den bisher als den besten anerkannten für A' und D' vollständig entsprechen.

IV. Weitere Entwickelungen, bezogen auf die Bahnebene der Sonne.

10. Durch die Kenntnis der Größen Ω und i, die die Bahnebene der Sonne definieren, ist weiters auch die Möglichkeit gegeben, die bisher benutzten Größen α und δ, a und d sowie A und D, die sich auf den Äquator als Fundamentalebene beziehen, auf diese neue Ebene zu reduzieren und so die Entwickelungen des ersten Teiles bedeutend zu vereinfachen. Die auf sie bezüglichen Größen sollen als Längen und Breiten mit den Buchstaben

$$\lambda \text{ und } \beta, \qquad l \text{ und } b \qquad \text{sowie } L \text{ und } B = 0$$

bezeichnet werden. Wegen $Bg = 0$ und wenn ferner die Annahme gemacht wird, daß man die Auswahl der Sterne so getroffen habe, daß sie symmetrisch um die Milchstraße liegen, kann auch $\beta = 0$ gesetzt werden, so daß für die neuen Gleichungen, die an die Stellen der Hauptgleichungen 1) treten, die wesentlich vereinfachte Form resultiert:

$$\rho \cos\lambda = r \cos l - R \cos L$$
$$\rho \sin\lambda = r \sin l - R \sin L.$$

Sie ist mit den in meiner ersten Abhandlung aufgestellten Gleichungen vollständig identisch. Nur sollen jetzt auch noch die Größen r und R, die dort als konstante angesehen wurden, als veränderliche betrachtet werden. Hiedurch werden die Entwickelungen von einem etwas allgemeineren Charakter.

Man erhält zunächst entsprechend der Gleichung 5)

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos(\lambda - L) + g_0 + g_2 \cos 2(\lambda - L) + g_4 \cos 4(\lambda - L)$$

wo, wie im ersten Teile, $\beta = \frac{R}{r}$ ist und die Koeffizienten g als Funktionen von β dieselbe Bedeutung haben wie in den Gleichungen 6). Durch Differentiation von 1) folgt zunächst

$$\Delta\rho \cos\lambda - \rho \sin\lambda . \Delta\lambda = \Delta r \cos l - r \sin l \Delta l - \Delta R \sin L + R \cos L \Delta L$$
$$\Delta\rho \sin\lambda + \rho \cos\lambda . \Delta\lambda = \Delta r \sin l + r \cos l \Delta l - \Delta R \cos L - R \sin L \Delta L$$

und daraus nach bekannten einfachen Transformationen

$$\Delta\lambda = \Delta l + \beta \frac{r}{\rho} (\Delta l - \Delta L) \cos(\lambda - L) - \beta \frac{r}{\rho} \left(\frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta R}{R}\right) \sin(\lambda - L)$$

eine Gleichung, die an Stelle von 8 a tritt. Aber nunmehr gestattet auch $\Delta\rho$ eine einfache Entwickelung. Es wird ebenfalls nach einfachen Umwandlungen

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta r}{r} + \beta \frac{r}{\rho} (\Delta l - \Delta L) \sin(\lambda - L) + \beta \frac{r}{\rho} \left(\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta R}{R}\right) \cos(\lambda - L)$$

ein Ausdruck von einer Form, die sich von der für $\Delta\lambda$ abgeleiteten, abgesehen von dem Anfangsgliede nur darin unterscheidet, daß in ihr die $\cos(\lambda - L)$ und $\sin(\lambda - L)$ ihre Plätze getauscht haben.

Die Substitution der Reihe für $\frac{r}{\rho}$, ferner die Einführung des Hilfswinkels B wie in den Gleichungen 8 d p. 13 [239] durch

$$\varkappa = \Delta l - \Delta L \qquad \lambda = \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta R}{R} \qquad \operatorname{tg} B = \frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{\frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta R}{R}}{\Delta l - \Delta L}$$

bringt die Schlußentwickelungen, die nur bis zu den Gliedern 3. Ordnung gehen mögen:

$$\Delta\lambda = \Delta l + \frac{\beta}{1-\beta^2}(\Delta l - \Delta L) \quad + \beta\varkappa g_0 \sec B \cos(\lambda - L + B) + \frac{1}{2}\beta\varkappa g_1 \sec B \cos[2(\lambda - L) + B] + $$
$$+ \frac{1}{2}\beta\varkappa g_2 \sec B \cos[3(\lambda - L) + B]$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta r}{r} + \frac{\beta}{1-\beta^2}\left(\frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta R}{R}\right) + \beta\varkappa g_0 \sec B \sin(\lambda - L + B) + \frac{1}{2}\beta\varkappa g_1 \sec B \sin[2(\lambda - L) + B)] + \tag{12}$$
$$+ \frac{1}{2}\beta\varkappa g_2 \sec B \sin[3(\lambda - L) + B]$$

11. Zur Prüfung dieser Gleichungen benutzte ich die p. 21 [247] mitgeteilten Werte für die $\cos\delta\,\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ der geozentrischen Bewegung der kleinen Planeten, transformierte sie in $\Delta\lambda$ und $\Delta\beta$ in bezug auf die Ekliptik, entnahm außerdem noch der Ephemeridensammlung des Berliner Jahrbuches die Größen $\Delta \lg \rho$ und setzte diese durch Multiplikation mit dem Modul der natürlichen Logarithmen und Umwandlung in Bogenminuten, in $\Delta\rho/\rho$ um, ausgedrückt in den gleichen Maßeinheiten wie die Größe $\Delta\lambda$. Die erhaltenen Zahlen sind in der nachstehenden Tafel enthalten:

λ	β	$\Delta\lambda$	$\Delta\beta$	$\Delta\log\rho$	$\Delta\rho/\rho$	λ	β	$\Delta\lambda$	$\Delta\beta$	$\Delta\log\rho$	$\Delta\rho/\rho$
0°	+0° 21'	+434'44	+ 3'81	+38'26	+302'85	180°	−0° 33'	+ 75'41	+ 9'80	−46'56	−368'55
30	−4 49	+276·72	+34·22	+49·65	+393·02	210	+3 9	+247·69	+18·54	−42·69	−337·92
60	−0 52	+ 2·93	− 3·69	+46·64	+369·19	240	+3 28	+376·06	+ 6·48	−30·58	−242·06
90	+0 58	−150·84	− 1·56	+34·56	+273·49	270	+1 1	+470·11	+10·87	−14·79	−117·07
120	+0 49	−252·09	+ 0·86	− 2·45	− 19·39	300	+0 25	+485·01	− 2·30	− 1·00	− 7·92
150	−4 5	−165·62	−12·59	−29·47	−233·28	330	+1 7	+454·12	+ 9·40	+17·95	+142·09

Die in dieser Tafel in der zweiten Kolonne unter β und in der vierten unter $\Delta\beta$ stehenden Zahlen sollten 0 gleich sein. Wie man sieht, erfüllen sie diese Bedingung ziemlich genau und es bliebe nur zu untersuchen, inwieweit die da stehenden Zahlen, als Fehlerreste betrachtet, regellos verlaufen oder einen systematischen Charakter zeigen. Doch wäre zu einer solchen Untersuchung eine größere Zahl derartiger Reduktionen notwendig.

Aus den Angaben in der 3. Kolonne unter $\Delta\lambda$ und der 6. unter $\Delta\rho/\rho$ folgen die nachstehenden Fourier'schen Reihen:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda = &+187'73 - 362'75\cos(\lambda - 120°\ 25'6)\\ &- 73\cdot43\cos(2\lambda - 228\ \ 39\cdot1)\\ &- 5\cdot19\cos(3\lambda - 283\ \ 42\cdot9)\\ &- 23\cdot38\cos(4\lambda - 213\ \ 40\cdot7)\\ &- 8\cdot17\cos(5\lambda - 115\ \ 55\cdot2)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{\Delta\rho}{\rho} = &+12'79 - 373'35\sin(\lambda - 118°\ 57'8)\\ &- 64\cdot89\sin(2\lambda - 228\ \ 24\cdot7)\\ &- 13\cdot49\sin(3\lambda - 424\ \ 24\cdot4)\\ &- 9\cdot93\sin(4\lambda - 83\ \ 33\cdot5)\\ &- 11\cdot33\sin(5\lambda - 139\ \ 55\cdot3)\end{aligned}$$

während die mit Hilfe von $\lg\beta = 9\cdot55875$ oder $\lg r = 0\cdot44125$ berechneten theoretischen Reihen für beide lauten:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda = &\ 187'88 - 373'84\cos(\lambda - 117°\ 21'8)\\ &- 69\cdot79\cos(2\lambda - 234\ \ 43\cdot6)\\ &- 5\cdot48\cos(3\lambda - 352\ \ 5\cdot4)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{\Delta\rho}{\rho} = &-373\cdot84\sin(\lambda - 117°\ 21'8)\\ &-69\cdot79\sin(2\lambda - 234\ \ 43\cdot6)\\ &-5\cdot48\sin(3\lambda - 352\ \ 5\cdot4)\end{aligned}$$

In ihnen bedeutet die Winkelgröße $117° \; 21'8 = L$ die heliozentrische Länge der Erde für die Mitte des Zeitintervalles vom Jänner 7.—27. Die Übereinstimmung mit den aus den beiden empirischen Reihen gezogenen Mittelwerten

$$L = 119° \; 41'7 \qquad 2L = 228° \; 31'9 \qquad 3L = 354° \; 3'7$$

ist eine ziemlich gute. Sie sagt auch, daß die Größe B hier fast $= 0$ ist. so daß für die kleinen Planeten die Relation gilt

$$\operatorname{tg} B = \frac{\frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta R}{R}}{\Delta l - \Delta L} = 0 \qquad \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta R}{R}$$

wobei natürlich unter $\Delta r/r$ der Mittelwert aller r und Δr, genommen für alle betrachteten Planeten zu verstehen ist.

Des Interesses halber seien hier auch noch die Reihen mitgeteilt, die sich für die Größen

$$\mathrm{I} = \cos^2 \delta \Delta \alpha \quad \text{und} \quad \mathrm{II} = \cos^2 \delta \frac{\Delta \rho}{\rho} - \sin \delta \cos \delta \Delta \delta$$

aus den Angaben pag. 21 [247] und 26 [252] ableiten lassen und die mit den oben stehenden identisch sein sollten. Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = \cos^2 \delta \Delta \alpha = 173'56 - 334'18 & \cos (\alpha - 119° \; 45'5) \\ - \; 68{\cdot}08 & \cos (2\alpha - 230 \; 44{\cdot}0) \\ - \; 2{\cdot}08 & \cos (3\alpha - 267 \; 47{\cdot}7) \\ - \; 22{\cdot}64 & \cos (4\alpha - 212 \; 47{\cdot}5) \\ - \; 6{\cdot}72 & \cos (5\alpha - 292 \; 1{\cdot}4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{II} = 8'67 - 358'46 & \sin (\alpha - 115° \; 1'5) \\ - \; 49{\cdot}30 & \sin (2\alpha - 213 \; 4{\cdot}0) \\ - \; 9{\cdot}81 & \sin (3\alpha - 408 \; 35{\cdot}7) \\ - \; 7{\cdot}24 & \sin (4\alpha - 78 \; 27{\cdot}4) \\ - \; 5{\cdot}15 & \sin (5\alpha - 143 \; 50{\cdot}5 \end{aligned}$$

Die Mittelwerte der in ihnen enthaltenen Winkelgrößen sind

$$A - B = 117° \; 23'5 \qquad 2A - B = 221° \; 54'0 \qquad 3A - B = 338° \; 11'7$$

während, da die Rektaszension der Sonne für Jänner 17. 298° 48' ist,

$$A = 118° \; 48' \qquad 2A = 237° \; 36' \qquad 3A = 355° \; 14'$$

sein sollte. Es zeigt sich damit wieder für den Hilfswinkel B ein Wert fast $= 0$.

Von der dritten, hier noch in Betracht kommenden Größe zufolge der Gleichung 8) nämlich

$$\mathrm{III} = \sin^2 \delta \frac{\Delta \rho}{\rho} + \sin \delta \cos \delta \Delta \delta$$

lauten die den einzelnen Rektaszensionsdoppelstunden entsprechenden Werte

+1'16 +21'69 +41'11 +46'15 +14'75 +1'78
+0'19 +2'34 +1'57 −20'86 −31'47 +25'88.

Sie liegen fast alle ihrer Größenordnung nach innerhalb der als Fehlerreste bezeichneten Grenzen. Die aus ihnen abgeleitete Fourier'sche Reihe hat daher keine Bedeutung.

12. Entsprechend diesen Entwickelungen möge nun eine analoge Untersuchung für die Eigenbewegung der Fixsterne durchgeführt werden. Das hiebei zur Benutzung kommende Beobachtungsmaterial sei nur die Charlier'sche Zusammenstellung. Endlich seien die der Transformation von $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ in $\Delta\lambda$ und $\Delta\beta$ zugrunde liegenden Werte

$$\Omega = 243° \; 18' \qquad i = 56° \; 7'$$

Die nach den bekannten Transformationsformeln berechneten Werte sind in der folgenden Tafel enthalten, bei einer Anordnung derselben nicht mehr nach den Sektoren *B, C, D* und *E*, sondern nach Längen:

Sektor	λ	β	cos² β Δλ	Δβ	Sektor	λ	β	cos² β Δλ	Δβ
B_1	3° 5'	− 1° 15'	+ 0ʳ690	− 0ʳ037	E_6	183° 5'	+ 1° 15'	− 1ʳ111	− 0ʳ078
D_{12}	4 46	−67 53	+ 0·359	− 0·037	C_6	184 46	+67 53	− 0·426	− 0·391
C_1	19 50	−27 27	+ 0·874	− 0·235	D_7	199 50	+27 27	− 0·892	+ 0·138
B_2	20 12	+17 28	+ 0·756	+ 0·100	E_7	200 12	−17 28	− 0·965	+ 0·010
B_4	26 56	+66 18	+ 0·257	− 0·192	E_9	206 56	−66 18	− 0·404	− 0·329
B_3	30 12	+41 9	+ 0·665	+ 0·016	E_8	210 12	−41 9	− 0·808	− 0·028
C_2	41 0	− 6 30	+ 1·148	+ 0·346	D_8	221 0	+ 6 30	− 1·014	− 0·067
D_1	46 25	−47 41	+ 0·411	+ 0·231	C_7	226 25	+47 41	− 0·623	+ 0·575
C_3	57 24	+17 36	+ 0·817	+ 0·250	D_9	237 24	−17 36	− 0·825	− 0·340
D_2	65 40	−23 3	+ 0·957	+ 0·513	C_8	245 40	+23 3	− 0·753	+ 0·333
C_4	75 8	+42 23	+ 0·321	− 0·609	D_{10}	255 8	−42 23	− 0·343	− 0·569
D_3	82 47	+ 1 21	+ 0·313	− 0·057	C_9	262 47	− 1 21	− 0·517	+ 0·102
E_1	95 8	−54 14	+ 0·214	+ 0·909	B_6	275 8	+54 14	− 0·034	+ 0·540
E_2	100 17	−29 18	+ 0·024	+ 0·777	B_7	280 17	+29 18	− 0·046	+ 0·714
D_4	101 23	+23 17	− 0·184	− 0·271	C_{10}	281 23	−23 17	− 0·034	− 0·495
C_5	108 24	+64 30	+ 0·078	− 1·463	D_{11}	288 24	−64 30	+ 0·084	− 1·011
E_3	113 48	− 7 33	− 0·400	+ 0·202	B_8	293 48	+ 7 33	+ 0·271	− 0·092
E_{10}	125 5	−76 57	− 0·205	+ 0·147	B_5	305 5	+76 57	+ 0·144	+ 1·208
D_5	130 23	+38 37	− 0·377	− 0·375	C_{11}	310 23	−38 37	+ 0·363	− 0·917
E_4	134 15	+ 7 14	− 0·399	− 0·335	B_9	314 15	− 7 14	+ 0·512	− 0·081
E_5	159 32	+10 38	− 0·781	− 0·108	B_{10}	334 32	−10 38	+ 0·538	− 0·030
D_6	168 14	+40 23	− 0·795	+ 0·270	C_{12}	348 14	−40 23	+ 0·795	− 0·077

Die in der 4. und 9. Kolonne dieser Tafel stehenden Zahlen für $\cos^2\beta\,\Delta\lambda$ zeigen einen so regelmäßigen Gang, daß zu hoffen ist, daß die aus ihnen abgeleiteten Fourier'schen Reihen oder ihre harmonische Analyse die Winkel L und B mit großer Genauigkeit geben dürfte. Die in der 5. und 10. Kolonne stehenden für $\Delta\beta$ sollten, der Annahme entsprechend, daß sich die Bahnebenen der Fixsterne symmetrisch um die der Sonne gruppieren, Null sein. Sie sind mit einigen Ausnahmen, mindestens ihrer Mehrzahl nach, auch tatsächlich recht klein, sie zeigen ferner keinen ausgesprochenen Gang und mit ihren 25 negativen und 19 positiven Werten, 23 Zeichenfolgen und 20 Zeichenwechseln scheint es, als ob sie den Gesetzen des Zufalls genügen. Jedenfalls zeigen sie ein ganz anderes Verhalten als die analogen Werte $\Delta\delta$ in den Tafeln pag. 14 [240]. Eine strengere Untersuchung in dieser Richtung habe ich jedoch nicht durchgeführt.

Ich habe von den vorstehenden Zahlen für $\cos^2\beta\,\Delta\lambda$ in verschiedener Gruppierung Mittelwerte genommen und sie einer harmonischen Analyse unterworfen:

I. Vorerst alle Sektoren eingeschlossen nach einer Teilung in 12 Teile, das heißt einem Intervalle von 30° mittlerer Länge,

II*a* und II*b* in zwei Unterabteilungen, von denen die erste die 24 Sektoren B_1 C_1 B_2 B_3 C_2 C_3 D_2 D_3 E_3 E_4 E_5 D_6 E_6 D_7 E_7 E_8 D_8 D_9 C_8 C_9 B_8 B_9 B_{10} C_{12} umfaßt, die in der Milchstraße liegen, die zweite alle anderen, gleichgültig ob sie nördlich oder südlich von dieser gelegen sind, endlich

III*a*, *b*, *c* und *d*: vier Unterabteilungen nach einer Teilung, entsprechend dem Intervalle von 45° Länge, und zwar:

III *a*:	Sektoren $B_4C_4D_4C_5D_5C_6C_7B_6B_7B_5$	mit einer mittleren Breite von	$+51°6$
III *b*:	» $B_2B_3C_3D_3E_4E_5D_6E_6D_7D_8C_8B_8$	» » » » »	$+19\cdot7$
III *c*:	» $B_1C_1C_2D_2E_3E_7E_8D_9C_9B_9B_{10}C_{12}$	» » » » »	$-19\cdot7$
III *d*:	» $B_{12}D_1E_7E_2E_{10}E_9D_{10}C_{10}D_{11}C_{11}$	» » » » »	$-51\cdot6$

Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind die folgenden:

$$\text{I}\quad \cos^2\beta\Delta\lambda = -0''0310 - 0''7702\cos(\lambda - 197°\ 46')$$
$$-0\cdot0251\cos(2\lambda - 368\quad 56)$$
$$-0\cdot0868\cos(3\lambda - 654\quad 7)$$
$$-0\cdot0264\cos(4\lambda - 9\quad 36)$$
$$-0\cdot0316\cos(5\lambda - 3\quad 32)$$

$$\text{II}a)\quad \cos^2\beta\Delta\lambda = -0\cdot0508 - 0\cdot9772\cos(\lambda - 197\quad 13)$$
$$-0\cdot0501\cos(2\lambda - 333\quad 31)$$
$$-0\cdot1589\cos(3\lambda - 574\quad 56)$$
$$-0\cdot0462\cos(4\lambda - 347\quad 53)$$
$$-0\cdot0517\cos(5\lambda - 221\quad 42)$$

$$\text{II}b)\quad \cos^2\beta\Delta\lambda = -0\cdot0196 - 0\cdot4367\cos(\lambda - 194\quad 53)$$
$$-0\cdot0469\cos(2\lambda - 393\quad 41)$$
$$-0\cdot0943\cos(3\lambda - 420\quad 7)$$
$$-0\cdot0494\cos(4\lambda - 165\quad 27)$$
$$-0\cdot0721\cos(5\lambda - 284\quad 3)$$

$$\text{III}a)\quad \cos^2\beta\Delta\lambda = -0\cdot0601 - 0\cdot4174\cos(\lambda - 200\quad 8)$$
$$-0\cdot0818\cos(2\lambda - 368\quad 48)$$
$$-0\cdot0426\cos(3\lambda - 555\quad 4)$$

$$\text{III}b)\quad \cos^2\beta\Delta\lambda = -0\cdot0516 - 0\cdot8617\cos(\lambda - 196\quad 29)$$
$$-0\cdot1111\cos(2\lambda - 393\quad 11)$$
$$-0\cdot0788\cos(3\lambda - 538\quad 37)$$

$$\text{III}c)\quad \cos^2\beta\Delta\lambda = -0\cdot0435 - 0\cdot9328\cos(\lambda - 195\quad 24)$$
$$-0\cdot1234\cos(2\lambda - 302\quad 36)$$
$$-0\cdot1071\cos(3\lambda - 540\quad 55)$$

$$\text{III}d)\quad \cos^2\beta\Delta\lambda = -0\cdot0061 - 0\cdot4382\cos(\lambda - 198\quad 38)$$
$$-0\cdot0224\cos(2\lambda - 463\quad 4)$$
$$-0\cdot0477\cos(3\lambda - 570\quad 46)$$

13. Es mögen nun die aus den einzelnen Gliedern 1., 2. und 3. Ordnung (weiter zu gehen schien nicht ratsam), resultierenden Werte für die Hauptgröße L mit dem Index 1, 2 oder 3 bezeichnet werden. Dann erhält man der Reihe nach

	L_1	L_2	L_3
aus I . . .	197° 46′	184° 28′	218° 2′
II *a)* . . .	197 13	166 46	191 39
II *b)* . . .	194 53	196 50	140 2
III *a)* . . .	200 8	184 24	185 1
III *b)* . . .	196 20	196 35	179 32
III *c)* . . .	195 24	151 18	180 18
III *d)* . . .	198 38	231 32	190 15
Mittel . .	197 12	187 28	183 33

deren genügende Übereinstimmung zeigt, daß auch hier bezüglich der Fixsterne sowie vorher bezüglich der Planeten der Hilfswinkel $B = 0$ angenommen werden kann.

Der weiteren Rechnung wurde der aus den Gliedern 1. Ordnung sich ergebende Mittelwert $L =$ 197° 12′, der auch fast vollständig mit dem aus I folgenden zusammenfällt, zugrunde gelegt. Er stellt die Länge der Sonne in ihrer Bahn vor, gesehen von dem idealen Zentralpunkt aus, daher $L + 90 = 287°\ 12'$ oder nach der früheren Bezeichnungsweise die Größe L', das ist die Bewegungsrichtung der Sonne in dieser Bahn, woraus nach den Transformationsformeln 2 die analogen Größen A und D sowie A' und D' als die entsprechenden Äquatorkoordinaten abzuleiten sind. Man erhält, wenn man für Knoten und Neigung dieser Bahn gegen den Äquator die Werte

$$\Omega = 234°\ 45' \qquad i = 50°\ 15'$$

annimmt,

$$A = 208°\ 35' \qquad D = -27°\ 56' \qquad A' = 274°\ 31' \qquad D' = +37°\ 33'$$

dagegen unter der Annahme von

$$\Omega = 245°\ 30' \qquad i = 58°\ 25'$$

$$A = 201°\ 47' \qquad D = -23°\ 1' \qquad A' = 282\ \ 42 \qquad D' = +20°\ 20'.$$

Sie stehen mit den pag. 24 [250] ermittelten in guter Übereinstimmung.

V. Radialbewegungen der Sterne.

14. Im folgenden Schlußabsatze sollen noch die Radialbewegungen der Sterne einer ähnlichen Analyse unterzogen werden, wie sie in den vorhergegangenen Teilen bezüglich ihrer Eigenbewegungen durchgeführt wurde. Es soll diese Rechnung sich anschließen an die Analyse der Radialbewegungen der kleinen Planeten und den Zusammenhang, der sich hiebei zwischen den Reihen für $\cos^2\beta\,\Delta\lambda$ einer- und $\Delta\rho/\rho$ andererseits zeigte. Ihr Zweck sei, eine Neubestimmung der Größe L auch aus dem hier zur Verfügung stehenden Beobachtungsmaterial zu erzielen.

Als Quelle benutzte ich folgende zwei Zusammenfassungen von bekannten Radialbewegungen von Sternen:

1. Eine Liste von Radialbewegungen [1] von 225 Sternen der Spektralklasse B, deren Analyse mir von besonderem Vorteile zu sein schien, als, wie bekannt, die meisten dieser Sterne in der Milchstraße liegen,

[1] W. W. Campbell. »On the motions of the brighter Class B Stars«. Lick Observ. Bulletin Nr. 195, 1911.

2. eine weitere Liste von bekannten Radialbewegungen von 915 Sternen [1], geordnet nach ihren Spektralklassen, die ich in 2 Gruppen teilte

a) 868 Sterne der Spektralklasse *F, G, K* und *M.*

b) 442 Sterne, die bloß der Klasse *K* angehören.

Hiebei wurden nur die folgenden Sterne »ausgeschlossen«. Es sind dies die bekannten Schnelläufer unter den Sternen.

Lal.	5761	Größe	8·0	Sp. *F*	$\alpha = 3^h$	2^m	$\delta = +26°$	$\Delta\rho = -153$ *km*
Gr.	864	»	7·3	*G*	4	34	+42	+101
L. Z. 5°	243	»	9·2	*G*	5	8	−45	+242
A. G. Z.	7195	»	5·2	*G*	5	59	−26	+183
Gr.	1830	»	6·5	*G*	11	47	+38	− 97
Lal.	37120	»	6·6	*G*	19	30	+33	−162
A. q. Z.	27600	»	5·3	*K*	20	5	−36	−130

Bei der Reduktion der Beobachtungsdaten erlaubte ich mir einige Vereinfachungen.

1. Die Umwandlung der Rektaszension und Deklination der Sterne in Längen und Breiten wurde von vorneherein so durchgeführt, als ob die mittlere Breite der Sterne in den einzelnen Längenintervallen $=0$ wäre. Der daraus entspringende Fehler ist ein doppelter. Zunächst kann er sich in einer fehlerhaften Zuweisung der Sterne zu den einzelnen Längen äußern, dann aber auch darin, daß sich die Rechnung auf die Größe $\cos^2\beta\, \Delta\rho/\rho$ erstrecken soll, für alle Sterne aber $\cos^2\beta = 1$ angenommen wird.

2. Da die Parallaxen fast aller der Sterne, deren Radialbewegungen hier verwertet werden, unbekannt sind und es aus diesem Grunde unmöglich ist, für jeden speziellen Stern die Größe $\Delta\rho/\rho$ oder, wenn man seine Parallaxe mit π bezeichnet, die Größe $\pi\, \Delta\rho$ zu berechnen, so mußte von dem Faktor π abgesehen werden, was der Annahme entspricht, als ob allen Sternen eine gemeinschaftliche Parallaxe zukäme.

Statt des strengen Wertes $\cos^2\beta\, \Delta\rho/\rho$ verblieb daher der Näherungswert $\Delta\rho$ und es ist klar, daß die aus der Analyse dieser Größe sich ergebenden Werte für *L* keine so gute Übereinstimmung mehr zeigen dürften, wie sie bei den aus $\cos^2\beta\, \Delta\lambda$ resultierenden zu bemerken war.

Die Mittelwerte der $\Delta\rho$ für die 3 Gruppen von Sternen, I. Gruppe von 225 *B* Sternen, II. Gruppe von 868 *F, G, K* und *M* Sternen und III. Gruppe von 442 *K* Sternen sind in der nachstehenden Tafel enthalten:

Grenzen *AR*	λ	I. Gruppe		II. Gruppe		III. Gruppe	
		Zahl	$\Delta\rho$	Zahl	$\Delta\rho$	Zahl	$\Delta\rho$
			km		*km*		*km*
$23^h5 - 1^h8$	0°	13	− 1·43	81	+ 4·43	40	+ 6·46
1·8 − 3·3	30	8	+12·68	57	+ 9·39	25	+ 2·67
3·3 − 4·6	60	22	+10·68	48	+17·10	23	+25·41
4·6 − 6·2	90	29	+20·23	57	+18·10	31	+21·96
6·2 − 8·6	120	23	+24·80	84	+21·93	49	+23·48
8·6 − 11·5	150	22	+20·27	102	+10·06	47	+13·41
11·5 − 13·8	180	23	+10·09	61	+ 0·04	28	+ 3·07
13·8 − 15·3	210	14	+ 6·39	53	− 5·46	31	− 1·47
15·3 − 16·6	240	13	− 0·02	48	−17·27	23	−13·55
16·6 − 18·2	270	17	− 6·34	67	− 9·33	33	− 8·82
18·2 − 20·6	300	24	−12·09	91	−10·55	46	− 7·37
20·6 − 22·0	330	17	− 6·66	119	− 2·09	66	− 4·48

[1] W. W. Cambell. »The radial Velocities of 915 Stars.« Lick. Observ. Bulletin Nr. 229, 1913.

Die aus ihnen abgeleiteten Fourier'schen Reihen lauten

I. Gruppe

$$\Delta\rho = +6\cdot55 \overset{km}{-15\cdot98} \sin(\lambda - 205^\circ\ 42') - 0\cdot49 \sin(2\lambda - 370\ \ 39) - 3\cdot02 \sin(3\lambda - 483\ \ 59) - 0\cdot15 \sin(4\lambda - 40\ \ 30) - 1\cdot39 \sin(5\lambda - 247\ \ 5)$$

II. Gruppe

$$\Delta\rho = +3\cdot03 \overset{km}{-16\cdot50} \sin(\lambda - 175^\circ\ 35') - 2\cdot58 \sin(2\lambda - 345\ \ 14) - 0\cdot43 \sin(3\lambda - 535\ \ 29) - 1\cdot12 \sin(4\lambda - 165\ \ 29) - 2\cdot89 \sin(5\lambda - 9\ \ 57)$$

III. Gruppe

$$\Delta\rho = +5\cdot064 \overset{km}{-11\cdot66} \sin(\lambda - 183^\circ\ 42') - 2\cdot71 \sin(2\lambda - 357\ \ 0) - 2\cdot33 \sin(3\lambda - 510\ \ 12) - 0\cdot78 \sin(4\lambda - 50\ \ 10) - 3\cdot59 \sin(5\lambda - 115\ \ 49).$$

Sie geben aus den einzelnen Gliedern der Rechnung, jedoch nur bis zu denen von der 3. Ordnung durchgeführt für die Größe L:

	L_1	L_2	L_3
I. Gruppe:	205° 42′	185° 20′	161° 20′
II. »	175 35	172 37	178 30
III. »	183 42	178 30	170 4
und im Mittel:	188 20	178 49	169 58.

Mit dem aus den Gliedern 1. Ordnung fließenden Mittelwert, dem wohl vor den anderen das größte Gewicht erteilt werden muß, nämlich

$$L = 188^\circ\ 20'$$

folgen schließlich unter den zwei Annahmen für Ω und i der Bahnebene der Sonne

I. $\Omega = 234^\circ\ 45'$ $\quad i = 50^\circ\ 15'$ $\quad A = 200^\circ\ 51'$ $\quad D = -33^\circ\ 51'$ $\quad A' = 266^\circ\ 4'$ $\quad D' = +32^\circ\ 0'$

II. $\Omega = 245^\circ\ 30'$ $\quad i = 58^\circ\ 25'$ $\quad A = 195^\circ\ 41'$ $\quad D = -45^\circ\ 43'$ $\quad A' = 263^\circ\ 25'$ $\quad D' = +27^\circ\ 31'$

15. Transformiert man die Zahlenkoeffizienten in diesen Reihen, die in *km*/sec Einheiten ausgedrückt sind, durch Multiplikation mit 365·25.20.24.60.60 und Division durch 148480000 *km* in astronomische Distanzeinheiten und Zeiteinheit 20 Jahre (die Zahlen Charlier's sind in der Einheit [Class-breadth) von 0"05 angegeben, was einer Eigenbewegung für einen Zeitraum von 20 Jahren entspricht) und nimmt ferner als mittlere Parallaxe der hier in Betracht kommenden Sterne

$$\pi = 0''0175$$

an, so geht die Reihe, die für die $\Delta\rho$ der *B*-Sterne gewonnen wurde, und der ich die für die Milchstraßensterne berechnete für $\cos^2\beta\,\Delta\lambda$ (die Reihe II*a* p. 29 [−0]) gegenüberstelle, über in

$$\pi\Delta\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho} = 0''400 - 0''9772 \sin(\lambda - 205^\circ\ 42') - 0\cdot0301 \sin(2\lambda - 370\ \ 39) - 0\cdot1844 \sin(3\lambda - 483\ \ 59)$$

$$\cos^2\beta\Delta\lambda = -0''0508 - 0''9772 \cos(\lambda - 197^\circ\ 13' - 0\cdot0501 \cos(2\lambda - 333\ \ 31) - 0\cdot1589 \cos(3\lambda - 574\ \ 56)$$

zwei Entwickelungen, die nun ihrem ganzen Baue nach zu vergleichen sind mit den beiden für dieselben Größen — aber bezogen auf die geozentrische Bewegung der kleinen Planeten — aufgestellten (pag. 26 [252). Und diese mittlere Parallaxe steht mit den nach anderen statistischen Methoden berechneten Mittelwerten für die Sterne 5. bis 6. Größe, die

$$\pi = 0''010 - 0''015$$

ergeben, in recht guter Übereinstimmung.

16. Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung lassen sich in folgende Leitsätze zusammenfassen:

1. Die meiner ersten Abhandlung zugrunde liegende Hypothese, welche die Eigentümlichkeiten in den Eigenbewegnngen der Sterne in Analogie bringt mit den Gesetzmäßigkeiten in den geozentrischen Bewegungen der kleinen Planeten, die sich aber dort nur auf die harmonische Analyse in bezug auf eine Koordinate, nämlich die Rektaszension stützt, findet nunmehr durch eine erweiterte, nach Kugelfunktionen fortschreitende Entwickelung ihre Ausdehnung und Bestätigung auch in bezug auf die zweite Koordinate, die Deklination. Sie gibt für die zwei Hauptgrößen A und D, das sind Rektaszension und Deklination der Sonne, gesehen von dem idealen Zentralpunkt aus, oder $180 + A$ und $-D$ als die Koordinaten dieses Punktes, von der Sonne aus, die Werte:

$$A = 200^\circ \qquad D = -34^\circ \qquad 180 + A = 20^\circ \qquad -D = +34^\circ.$$

2. Nach einer Methode, die einer etwas geänderten Auffassung der Hauptgleichung des Bessel-Kobold'schen Verfahrens zur Bestimmung des Zielpunktes der Sonnenbewegung gleicht, werden Knoten und Neigung der Bahnebene der Sonne festgestellt zu

$$\Omega = 235^\circ \qquad i = 50^\circ$$

und damit ergibt sich die Möglichkeit, die Länge der Sonne in ihrer Bahn, L, ihre Bewegungsrichtung in ihr, L', und endlich A' und D', das ist Rektaszension und Deklination des Apex, zu berechnen, und zwar findet sich

$$L = 190^\circ \qquad L' = 280^\circ \qquad A' = 266^\circ \qquad D' = +32^\circ.$$

3. Das für die Größe L erhaltene Resultat wird auf eine doppelte Art bestätigt: zunächst durch eine harmonische Analyse der Eigenbewegungen der Sterne, nach einer Reduktion derselben in Längen in bezug auf die berechnete Bahnebene der Sonne, und sodann durch eine gleiche harmonische Analyse ihrer Radialbewegungen.