ÜBER DIE EIGENBEWEGUNGEN DER FIXSTERNE

III. MITTEILUNG

KRITIK DER ELLIPSOIDHYPOTHESE

VON

SAMUEL OPPENHEIM

WIEN

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 7. JÄNNER 1916

Zur Erklärung der eigentümlichen Gesetzmäßigkeiten in den Eigenbewegungen der Fixsterne wurde neben der Hypothese der zwei Schwärme noch eine zweite aufgestellt. Es ist dies die von Schwarzschild[1] herrührende Ellipsoidhypothese. Sie besteht in der Annahme, daß die Verteilung der Geschwindigkeitsvektoren der einzelnen Sterne nach verschiedenen Richtungen des Raumes verschieden verlauft, aber doch so weit gesetzmäßig vor sich geht, wie etwa die Ausbreitung des Lichtes in Krystallen nicht kugelförmig ist, sondern ellipsoidisch. Gegenüber der älteren Hypothese der zwei Schwärme ist sie insoweit im Vorteile, als sie den unitarischen Charakter des ganzen Fixsternhimmels wahrt, die mit der Annahme jener ersten Anschauung nur schwer vereinbar ist. Dagegen aber wieder im Nachteile, als ihr keine einfache physikalische Deutung unterlegt werden kann, wenn man nicht die etwas gekünstelte Vorstellung eines krystallinischen Baues des ganzen Himmelsgewölbes akzeptieren will, dem nach verschiedenen Richtungen hin verschiedene Geschwindigkeiten entsprechen sollen.

Schwarzschild führte die Rechnungen nur unter der Annahme durch, daß das von ihm supponierte Geschwindigkeitsellipsoid ein Rotationsellipsoid sei und gelangt so nur zu einer im Raume ausgezeichneten Richtung, die der Bewegungsrichtung der Sonne, ihrem Apex nach der alten Definition, koordiniert ist und die er den Vertex der Sternbewegungen nennt. Für jenen findet er

$$A = 266° \qquad D = +33°,$$

für diesen

$$A = 273 \qquad D = -6$$

[1] Schwarzschild. Über die Eigenbewegungen der Fixsterne. Nachr. der kgl. Ges. der Wiss. Göttingen 1907.

Das von ihm benutzte Material ist dasselbe, das auch Eddington[1] in seinen Rechnungen zur Zweischwarm-Hypothese verwertet, nämlich Abzählungen von Sternen mit bestimmten Positionswinkeln ihrer Eigenbewegungen, die aus der in Greenwich durchgeführten Neubeobachtung der Sterne des Groombridge-Kataloges abgeleitet sind. Und erst Charlier[2] und seine Schüler W. Gyllenberg[3] und Sven Wicksell[4] haben der Schwarzschild'schen Hypothese eine breitere Basis gegeben in doppelter Richtung, indem sie als Beobachtungsdata das ganze System der Eigenbewegungen und nicht bloße Abzählungen von Sternen von bestimmter Richtung dieser Eigenbewegung benutzen, andrerseits die Rechnungen für den allgemeinen Fall eines dreiachsigen Ellipsoids durchführen. Sie gelangen so zu vier im Raume ausgezeichneten Bewegungsrichtungen. Die erste fällt mit der alten ursprünglichen Definition des Apex zusammen. Für sie findet Gyllenberg aus den Radialbewegungen und Wicksell aus den Eigenbewegungen der Boss-Sterne

$$A = 268^\circ 0 \qquad D = +29^\circ 0 \qquad \text{bez.} \qquad A = 272^\circ 7 \qquad D = +31^\circ 6.$$

Die anderen drei fallen mit den drei Hauptachsen des Geschwindigkeitsellipsoids zusammen. Die erste ist gegeben durch

$$A = 272^\circ 6 \qquad D = -10^\circ 6 \qquad \text{bez.} \qquad A = 274^\circ 3 \qquad D = -12^\circ 4$$

und steht in sehr guter Übereinstimmung mit dem Schwarzschild'schen Vertex der Sternbewegungen. Die zweite ist bestimmt durch

$$A = 189^\circ 3 \qquad D = +33^\circ 4 \qquad \text{bez.} \qquad A = 189^\circ 9 \qquad D = +24^\circ 1$$

und weist auf den Pol der Milchstraße hin, für welchen Kobold in seinem Bau des Fixsternhimmels als wahrscheinlichsten Wert

$$A = 191^\circ 2 \qquad D = +28^\circ 0$$

angibt; die dritte Richtung aber, für die

$$A = 347^\circ 4 \qquad D = +54^\circ 5 \qquad \text{bez.} \qquad A = 339^\circ 1 \qquad D = +62^\circ 5$$

folgt, bleibt merkwürdigerweise ohne jede geometrische Deutung und Beziehung.

Es schien mir nun nicht ohne Interesse zu sein, das von mir in meinen beiden ersten Mitteilungen über die Eigenbewegungen der Fixsterne angewandte Prinzip der Vergleichung der Bewegungen der Fixsterne mit denen im Schwarme der kleinen Planeten in ihrem Laufe um die Sonne und beobachtet von der Erde aus, auch auf dieses hypothetische Problem auszudehnen und damit der Frage nach der Bedeutung des Geschwindigkeitsellipsoids und im Endziel auch der Frage nach der Realität der Vertexbewegung der Sterne überhaupt näherzutreten. Als Beobachtungsmaterial zu den zu diesem Zwecke durchzuführenden Rechnungen benutzte ich wieder die Sammlung der Jahresephemeriden der kleinen Planeten für das Jahr 1888, die sich im Berliner Jahrbuch für 1890 vorfindet. Ihr entnahm ich die geozentrischen Bewegungsgrößen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ und $\Delta \lg \rho$, doch diesmal für zwei Zeitintervalle, nämlich für Jänner 7—27 und Mai 6—26.

Indes kommt neben diesem für die Bewegung der Planeten oder der Sterne charakteristischen Ellipsoid, für das ich die Bezeichnung »Streuungsellipsoid« in Vorschlag bringen möchte, noch ein zweites

[1] Eddington. The systematic Motions of the Stars. Monthly Notices of the R. A. S. 1907.

[2] Charlier. Studies in Stellar Statistics. On the Motion of the Stars. Meddelande fran Lunds. Astr. Observ. Nr. 9.

[3] W. Gyllenberg. Stellar Velocity Distribution as derived from observations in the line of Sight. Meddelande Nr. 13.

[4] S. Wicksell. The general Charakteristics of the Frequency Funktions of Stellar mouvements as derived from the proper Motions of the Stars. Meddelande Nr. 12.

Ellipsoid in Betracht. Seine Theorie ergibt sich aus der folgenden Überlegung: Seien a und d Rektaszension und Deklination des Poles der Eigenbewegung eines Sternes, A' und D' die gleichen Größen für den Apex der Sonnenbewegung und setzt man

$$l = \cos a \cos d \qquad m = \sin a \cos d \qquad n = \sin d$$
$$X = \cos A' \cos D' \qquad Y = \sin A' \cos D' \qquad Z = \sin D'$$

so hat man, um nach der Bessel-Kobold'schen Methode die Koordinaten des Apex, das heißt die Unbekannten A' und D' zu berechnen, die Aufgabe, das Minimum von

$$M = \Sigma \,(l X + m Y + n Z)^2$$

zu finden mit der Nebenbedingung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Ihre Lösung führt zu der Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & F & E \\ F & B-\lambda & D \\ E & D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

in der

$$A = \Sigma l^2 \quad B = \Sigma m^2 \quad C = \Sigma n^2 \quad D = \Sigma mn \quad E = \Sigma nl \quad F = \Sigma lm$$

ist. Aus ihr folgt, daß es in der Regel drei Punkte gibt, die der mathematischen Bedingung des Minimums Genüge leisten, daß diese drei Punkte in einem gegenseitigen Abstande von 90° liegen und daher zwei von ihnen, weil sie in den durch die Pole der Eigenbewegungen gehenden größten Kreis fallen, nicht in Frage kommen und die Lösung folglich eine eindeutige ist.

Man sieht aber auch, daß diese Aufgabe ganz identisch ist mit der, die Gleichung des Ellipsoids

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EZX + 2FXY = 1$$

auf die Hauptachsen zu reduzieren und kommt so zur Aufstellung eines zweiten, für die Bewegungen der Sterne maßgebenden Ellipsoids, das zum Unterschiede von dem ersten, das Momentenellipsoid genannt werden möge.

Der Berechnung dieser zwei Ellipsoide sowohl für die kleinen Planeten wie für die Sterne sind die zwei ersten Kapitel der vorliegenden Untersuchung gewidmet, während der Schlußteil sich mit einer Spezialuntersuchung der Eigen- und Radialbewegungen der Gruppe von Sternen vom Spektraltypus B nach der Klassifikation des Harward-Observatory befaßt und gewissermaßen ein Musterbeispiel dafür geben soll, wie in Zukunft eine theoretische Bearbeitung von Eigenbewegungen von Fixsternen durchzuführen ist. Sie hat der Reihe nach vorzunehmen: Sichtung des Beobachtungsmaterials, Berechnung des Sonnenapex nach der Methode von Airy, Berechnung der mittleren Bahnebene der Sterne, des Momenten- und des Streuungsellipsoids und die Vergleichung der Ergebnisse dieser Rechnungen miteinander, ferner Transformation der durch die direkte Beobachtung gegebenen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$, die auf den Äquator als Fundamentalebene bezogen sind, in $\Delta\lambda$, bezogen auf die Bahnebene, harmonische Analyse dieser sowie der Radialbewegungen und endlich aus dem Vergleiche der Entwicklungskoeffizienten dieser beiden Reihen die Bestimmung der mittleren Parallaxe der in Betracht gezogenen Sterne.

I. Berechnung des Momentenellipsoids.

1. Am einfachsten, aber gleichzeitig auch am interessantesten gestaltet sich die Berechnung des Momentenellipsoids. Aus den Angaben über $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ der beobachteten Eigenbewegungen der Planeten oder der Fixsterne rechne man nach

$$\operatorname{cotg} d \cos(\alpha - a) = -\operatorname{tg}\delta \qquad \operatorname{ctg} d \sin(\alpha - a) = \frac{\Delta\delta}{\cos^2\delta\Delta\alpha} \ldots \tag{1}$$

die Größen a und d, das ist Rektaszension und Deklination der Pole der Eigenbewegungen, sodann die Richtungskoeffizienten

$$l = \cos a \cos d \quad m = \sin a \cos d \quad n = \sin d \ldots \tag{2}$$

und hat dann sofort die Koeffizienten der Ellipsoidgleichung

$$A = \Sigma l^2 \quad B = \Sigma m^2 \quad C = \Sigma n^2 \quad D = \Sigma mn \quad E = \Sigma nl \quad F = \Sigma lm \ldots \tag{3}$$

Die zu diesem Zwecke zunächst dem Berliner Jahrbuch direkt entnommenen Daten über die geozentrischen Bewegungsgrößen der kleinen Planeten für die zwei Intervalle Jänner 7—27 und Mai 6—26 sind in den folgenden zwei Tafeln enthalten:

1. 1888 Jänner 7—27.

α	Zahl der Planeten	Mittl. δ	$\Delta\alpha$	$\cos^2\delta\,\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta \lg \rho$	$\Delta \rho/\rho$	a	d
0^h	31	+ 0° 23'4	+ 26^{m}671	+ 400'07	+ 169'42	+ 0·03826	+ 302'85	269°05'	+ 67°03'
2	17	+ 7 6·1	+ 16·647	+ 245·88	+ 127·82	+ 0·04965	+ 393·02	286 31	+ 61 52
4	14	+ 19 42·0	+ 0·250	+ 3·32	− 2·64	+ 0·04664	+ 369·19	—	—
6	9	+ 24 25·2	− 11·044	− 137·35	− 1·56	+ 0·03456	+ 273·49	91 26	− 65 34
8	11	+ 21 25·8	− 17·682	− 229·83	+ 51·00	− 0·00245	− 19·39	90 31	− 65 44
10	19	+ 7 52·5	− 10·753	− 158·27	+ 45·42	− 0·02947	− 233·28	85 44	− 72 20
12	32	− 0 36·9	+ 4·872	+ 73·07	− 21·03	− 0·04656	− 368·55	267 52	+ 73 56
14	35	− 8 52·7	+ 16·117	+ 236·01	− 68·11	− 0·04269	− 337·92	271 34	+ 71 50
16	24	− 17 3·0	+ 25·787	+ 353·56	− 68·63	− 0·03058	− 242·06	272 20	+ 70 03
18	24	− 22 25·3	+ 33·904	+ 434·57	+ 10·87	− 0·01479	− 117·07	266 32	+ 67 33
20	30	− 20 10·0	+ 33·790	+ 446·50	+ 94·27	− 0·00100	− 7·92	270 06	+ 67 02
22	19	− 11 2·5	+ 28·733	+ 415·18	+ 165·37	+ 0·01795	+ 142·09	266 05	+ 66 05

2. 1888 Mai 6—26.

α	Zahl der Planeten	Mittl. δ	$\Delta\alpha$	$\cos^2\delta\,\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta \lg \rho$	$\Delta \rho/\rho$	a	d
0^h	25	+ 0° 42'6	+ 27^{m}808	+ 417'12	+ 183'16	− 0·02864	− 226'70	268°23'	+ 66°17'
2	17	+ 12 19·0	+ 31·365	+ 451·84	+ 169·94	− 0·01235	− 97·76	269 52	+ 66 30
4	32	+ 18 56·3	+ 37·272	+ 492·67	+ 104·91	+ 0·00562	+ 43·94	271 49	+ 68 01
6	23	+ 22 50·0	+ 34·439	+ 434·75	+ 11·39	+ 0·01874	+ 148·34	273 34	+ 67 08
8	20	+ 21 47·8	+ 27·275	+ 360·52	− 88·10	+ 0·03515	+ 278·24	269 34	+ 64 53
10	27	+ 11 30·7	+ 13·567	+ 195·45	− 67·08	+ 0·04256	+ 336·89	270 41	+ 68 15
12	34	+ 2 51·1	− 0·024	− 0·36	− 12·47	+ 0·04356	+ 344·81	—	—
14	23	− 9 22·4	− 12·991	− 187·15	+ 48·39	+ 0·02283	+ 180·72	87 27	− 73 57
16	16	− 14 51·9	− 17·706	− 234·04	+ 48·37	− 0·00625	− 47·25	97 54	− 71 24
18	9	− 21 20·0	− 12·200	− 154·01	− 10·56	− 0·02833	− 224·25	80 03	− 68 22
20	12	− 19 24·5	− 5·017	− 66·32	+ 26·58	− 0·04583	− 362·77	108 41	− 61 55
22	27	− 17 28·2	+ 18·456	+ 265·88	+ 107·41	− 0·04278	− 338·63	277 55	+ 63 53

Die aus den Zahlen in den beiden letzten Kolonnen dieser Tafeln berechneten Werte der Koeffizienten der Ellipsoidgleichung sind:

	I	II
$A =$	$+0\cdot02034$	$+0\cdot03372$
$B =$	$+1\cdot53905$	$+1\cdot64878$
$C =$	$+9\cdot44061$	$+9\cdot31750$
$D =$	$-3\cdot76109$	$-3\cdot87630$
$E =$	$+0\cdot06912$	$+0\cdot18479$
$F =$	$-0\cdot04198$	$-0\cdot09170$

Ferner die durch Auflösung der bekannten kubischen Determinantengleichung aus ihnen gewonnenen Koeffizienten der auf die Hauptachsen bezogenen Gleichung desselben Ellipsoids, die

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1\ \ldots \qquad 4)$$

lauten möge, sowie schließlich die Richtungen dieser Hauptachsen selbst bezogen auf die Einheit, das ist $A+B+C=1$:

für 1888 Jänner 17	$\lg a = 0\cdot00107$	$A_1 = 272°\ 44'7$	$D_1 = +68°\ 10'6$
	$\lg b = 1\cdot21162$	$A_2 = 120\ \ 27\cdot6$	$D_2 = +19\ \ 11\cdot9$
	$\lg c = 1\cdot47292$	$A_3 = 208\ \ 41\cdot6$	$D_3 = -10\ \ 29\cdot2$
für 1888 Mai 16	$\lg a = 0\cdot00120$	$A_1 = 272°\ 45'7$	$D_1 = +67°\ 19'1$
	$\lg b = 1\cdot19961$	$A_2 = 221\ \ 52\cdot0$	$D_2 = -14\ \ 45\cdot4$
	$\lg c = 1\cdot40778$	$A_3 = 316\ \ 43\cdot5$	$D_3 = -16\ \ 45\cdot3$

Die erste dieser Richtungen, und zwar die der kürzesten Achse, entspricht, wie man sofort sieht, dem Pole der Ekliptik und gibt für deren Knoten und Neigung die der Wahrheit recht nahe kommenden Werte

$\Omega =$	$2°\ 45'7$	bez.	$2°\ 44'7$	statt $0°\ 0'$
$i =$	$22\ \ 40\cdot9$		$21\ \ 49\cdot4$	$23\ \ 27\cdot1$.

Um ebenso eine einfache geometrische Deutung der zweiten und dritten Richtung zu erhalten entnahm ich dem Berliner Jahrbuch für die zwei Momente 1888 Jänner 17·0 und Mai 16·0 die heliozentrische Rektaszension und Deklination der Erde, A' und D' und berechnete daraus die gleichen Koordinaten für den Apex der Erdbewegung, A'' und D''. Es fand sich:

1888 Jänner 17	$A' = 118°\ 53'9$	$D' = +20°\ 47'9$
	$A'' = 204\ \ 54\cdot3$	$D'' = -10\ \ 21\cdot2$
1888 Mai 16	$A' = 233\ \ 38\cdot2$	$D' = -19\ \ 15\cdot4$
	$A'' = 328\ \ 13\cdot4$	$D'' = -12\ \ 52\cdot1$

und wie man sieht, stehen wieder die Richtungen

A' und D' mit A_2 und D_2 sowie A'' und D'' mit A_3 und D_3

in recht guter Übereinstimmung. Man erhält so auf rein empirischer Grundlage den folgenden Satz:

»In jedem Augenblicke ist die geozentrische Bewegung der kleinen Planeten durch ein Ellipsoid charakterisiert, dessen Gleichung bezogen auf den Äquator als Fundamentalebene in der allgemeinen Form

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2\,Dyz+2\,Ezx+2\,Fxy=1$$

erscheint, dessen drei Hauptachsen aber mit drei im Raume vorhandenen ausgezeichneten Richtungen zusammenfallen. Die erste, der kürzesten Achse entsprechende Richtung, zeigt nach dem Pole der Ekliptik und ist für alle Momentanellipsoide von unveränderlicher Lage. Die beiden anderen liegen in der Ekliptik und von ihnen weist die der mittleren Achse entsprechende nach der Erde, die der größten Achse zukommende nach dem Apex der Erdbewegung hin, diese vom heliozentrischen Standpunkte aus betrachtet, dagegen vom geozentrischen Standpunkte aus, fallen die Richtungen dieser zwei Achsen in die zur Sonne und ihrem scheinbaren Apex.

Es läßt sich nicht schwer ein geometrischer Beweis für die Richtigkeit dieses Satzes erbringen.

Man nehme nämlich zunächst an, daß in den Kolonnen 9 und 10 der beiden Tafeln p. 4 [310], die die geozentrischen Bewegungsgrößen der kleinen Planeten darstellen, die dort stehenden a und d alle einander genau gleich seien oder, was auf dasselbe Resultat hinzielt, man ersetze bei der Berechnung der Koeffizienten $l\,m$ und n die einzelnen voneinander mehr oder weniger abweichenden Werte durch ihre Mittel, dann ergeben sich die Koeffizienten der Ellipsoidgleichung zu

$$A = pl^2 \quad B = pm^2 \quad C = pn^2 \quad D = pmn \quad E = pnl \quad F = plm,$$

worin p die Anzahl der verwendeten Gruppen bedeutet, und diese selbst geht in

$$p\,(lX + mY + nZ)^2 = 1$$

über, was nichts anderes bedeutet, als daß das Ellipsoid in die doppelt zu zählende Bahnebene zerfällt, [1] woraus bekanntlich schon folgt, daß von seinen drei Hauptrichtungen eine nach dem Pol dieser Ebene hinzeigt, die beiden anderen aber in ihr liegen, aber sonst ganz willkürlich sind. Schreibt man ferner die kubische Determinantengleichung, die zur Bestimmung der Hauptachsen dient, in der Form

$$\lambda^3 - p\lambda^2 + J\lambda - K = 0$$

auf, worin

$$\begin{aligned} p &= A + B + C \\ J &= AB + AC + BC - D^2 - E^2 - F^2 \\ K &= ABC + 2\,DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2 \end{aligned}$$

ist, so wird unter dieser vereinfachenden Annahme

$$J = K = 0$$

und die Gleichung lautet

$$\lambda^3 - p\lambda^2 = 0.$$

Der ersten Wurzel $\lambda_1 = p$ entsprechen als Richtungen die Richtungscosinus der Bahnebene, die den beiden anderen, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ entsprechenden sind unbestimmt.

Für den tatsächlichen Fall aber, daß die a und d, und daher auch die l, m und n doch kleinere oder größere Verschiedenheiten untereinander aufweisen, werden die Koeffizienten A, B. . sich von den oben gewissermaßen als Normalwerten angeschriebenen mehr oder weniger unterscheiden, so daß, wenn wir diese Unterschiede als Größen erster Ordnung ansehen, J eine Größe zweiter, und K eine solche dritter Ordnung ist und bis auf Größen zweiter Ordnung genau sich für die Wurzeln der Gleichung dritten Grades die Werte

---

[1] Besser gesagt: daß das Ellipsoid in das Ebenenpaar

$$lX + mY + nZ + 1 = 0 \qquad lX + mY + nZ - 1 = 0$$

zerfällt, die aber einzeln einander wie der Ebene $lX + mY + nZ = 0$ parallel liegen.

$$\lambda_1 = p - \frac{J}{p}$$

$$\lambda_2 = \frac{J}{2p} - \frac{K}{J} - \frac{K^2 p}{2J}$$

$$\lambda_3 = \frac{J}{2p} + \frac{K}{J} + \frac{K^2 p}{2J}$$

ergeben. Der ersten entspricht als Richtung eine, die nur sehr wenig (um kleine Größen zweiter Ordnung) von der nach dem Pole der Bahnebene, sofern diese wie oben durch die Mittelwerte der l, m und n charakterisiert ist, abweicht. Die beiden anderen wieder definieren zwei nun ganz bestimmte Richtungen, die in der Bahnebene liegen, aufeinander senkrecht stehen, und von denen die eine dem Minimum gemäß nach dem Apex, die andere, als auf dieser senkrecht stehend, nach dem Zentrum der Bewegung hinweist.

2. Es ist klar, daß sich auch für die Eigenbewegungen der Fixsterne die Theorie eines analogen Ellipsoids aufstellen läßt und es entsteht die Frage, welche Bedeutung wird da den drei Hauptachsen desselben zuzuschreiben sein.

Das Material zu der hiezu durchzuführenden Rechnung ist schon in meiner zweiten Mitteilung veröffentlicht, p. 23 [249]. Doch ist noch hiezu die folgende Bemerkung zu machen. Bei den 24 Sektoren B_1 B_2 B_3 B_8 B_9 B_{10}, ferner C_{12} C_1 C_2 C_3 C_8 C_9 sowie D_2 D_3 D_7 D_8 D_9 D_{10} und endlich E_3 E_4 E_5 E_6 E_7 E_8 folgt aus den aus den Eigenbewegungen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ berechneten a und d für den Knoten der Bahnebene der Mittelwert $\Omega = 230° - 240°$. Die 20 anderen Sektoren geben dagegen als Mittelwert $\Omega' = 120° - 130°$ und es zeigt sich die merkwürdige Relation

$$\Omega + \Omega' = 360°.$$

Auf diese Differenzierung der Sterne muß, wie sich sofort zeigen wird, Rücksicht genommen werden und es sei aus diesem Grunde diese Tafel hier nochmals mitgeteilt:

	a	d	Ω	Ω'	i
B_8	128° 56'	+37° 47'	218° 56'	—	52° 13'
B_9	144 53	+43 19	234 53	—	46 41
B_{10}	147 18	+43 57	237 18	—	46 3
B_1	149 21	+33 22	239 21	—	56 38
B_2	172 59	+25 46	262 59	—	64 14
B_3	187 46	+ 7 40	277 46	—	82 20
B_4	189 17	−41 46	—	99° 17'	48 14
B_5	197 23	−39 26	—	107 23	50 54
B_6	212 45	−43 56	—	122 45	46 4
B_7	211 48	−42 21	—	121 48	47 19
C_{10}	26 6	+36 42	—	116 6	53 18
C_{11}	57 38	+40 17	—	147 38	49 43
C_{12}	114 15	+67 48	204 15	—	22 12
C_1	116 5	+36 41	206 5	—	53 19
C_2	154 6	+51 43	244 6	—	38 17
C_3	180 22	+45 46	270 22	—	44 14
C_4	189 23	−20 47	—	99 23	69 13
C_5	216 43	−29 11	—	126 43	60 49
C_6	241 14	−42 40	—	151 14	47 20
C_7	254 52	−62 47	—	164 52	27 13
C_8	296 30	−50 48	206 30	—	39 12
C_9	330 4	−44 56	240 4		45 4

	a	d	Ω	Ω'	i
E_3	349° 14'	−10° 32°	259° 14'	—	79° 28'
E_4	285 50	−43 6	195 50	—	46 54
E_5	321 26	−43 1	231 26	—	46 59
E_6	328 25	−32 52	238 25	—	57 8
E_7	347 24	−21 36	257 24	—	68 24
E_8	5 56	− 5 53	275 56	—	84 7
E_9	7 57	+25 6	—	97° 57'	64 54
E_{10}	34 41	+31 8	—	124 41	58 52
E_1	50 28	+40 3	—	140 28	49 57
E_2	29 24	+42 11	—	119 24	47 49
D_{10}	10 26	+17 10	—	100 26	72 50
D_{11}	29 24	+46 9	—	119 24	43 51
D_{12}	50 34	+58 2	—	140 34	31 58
D_1	84 55	+53 3	—	174 55	36 57
D_2	113 45	+54 33	203 45	—	35 27
D_3	158 14	+24 31	248 14	—	65 29
D_4	246 46	−71 48	—	156 46	18 12
D_5	261 55	−66 44	—	171 55	23 16
D_6	351 59	+75 25	261 59	—	14 35
D_7	307 53	−56 25	217 53	—	33 35
D_8	324 23	−32 40	234 23	—	57 20
D_9	347 32	− 9 42	257 32	—	80 18

Die den Knotenwert ☊ gebende Gruppe von Sternen sei als I bezeichnet. Für sie folgt als Mittelwert

$$☊ = 238° \; 32' \quad i = 52° \; 30'$$

Die ☊′ entsprechende Gruppe sei mit II bezeichnet. Für sie erhält man als Mittelwert

$$☊' = 130° \; 11' \quad i = 47° \; 26'$$

und es ist in der Tat näherungsweise ☊ + ☊′ = 360°.

Die für beide Gruppen getrennt durchgeführte Berechnung der Koeffizienten der Ellipsoidgleichung gab

	Gruppe I		II	
$A =$	$+10\cdot6201$	$(+0\cdot44250)$	$+7\cdot3367$	$(+0\cdot36683)$
$B =$	$+\;3\cdot9073$	$(+0\cdot16281)$	$+3\cdot4796$	$(+0\cdot17398)$
$C =$	$+\;9\cdot4732$	$(+0\cdot39471)$	$+9\cdot1842$	$(+0\cdot45921)$
$D =$	$+\;5\cdot2032$	$(+0\cdot21676)$	$+5\cdot2389$	$(+0\cdot26194)$
$E =$	$-\;7\cdot0880$	$(-0\cdot29533)$	$+6\cdot1515$	$(+0\cdot30758)$
$F =$	$-\;3\cdot9096$	$(-0\cdot16291)$	$+3\cdot6228$	$(+0\cdot18114)$
$A+B+C =$	24	$= 1$	$= 20$	$= 1$

wobei die in den Klammern nebenstehenden Zahlen die Reduktion derselben auf die Einheit, das ist die Annahme $A+B+C = 1$ bedeuten. Ihr Vergleich führt auf die folgenden zwei zwischen ihnen bestehenden Beziehungen: 1. Die Koeffizienten A, B, C und D sind einander näherungsweise gleich, 2. die Koeffizienten E und F sind ebenfalls mit dem gleichen Grad der Genauigkeit einander gleich, aber sie haben entgegengesetzte Vorzeichen. Hieraus folgt, daß die zwei durch sie definierten Ellipsoide gleiche Hauptachsen haben werden, nur zwei von ihnen in ihren Richtungen vertauscht. Es ist nämlich das eine Ellipsoid nur das Spiegelbild des anderen, und zwar in bezug auf die X-Achse. Die Rechnung bestätigt auch diese Überlegung. Sie führt für die Hauptachsen der zwei Ellipsoide und ihre Richtungen zu den Werten:

größte Achse: Gruppe I:	$\lg a = 0\cdot74660$	$A_1 = 274°\; 38'4$	$D_1 = +33°\; 29'5$
» II:	$= 0\cdot86774$	$= 272\;\; 18\; 0$	$= +28\;\; 2\cdot8$

Für beide zusammenfallend, dagegen:

mittlere Achse: Gruppe I:	$\lg b = 0\cdot41972$	$A_2 = 208\;\; 44\cdot6$	$D_2 = -31\;\; 45\cdot0$
kürzeste » » II:	$\lg c = 0\cdot03055$	$= 215\;\; 37\cdot6$	$= -44\;\; 30\cdot8$
kürzeste Achse: Gruppe I:	$\lg c = 0\cdot04225$	$A_3 = 150\;\; 26\cdot4$	$D_3 = +40\;\; 20\cdot3$
mittlere » » II:	$\lg b = 0\cdot47362$	$= 159\;\; 24\cdot4$	$= +29\;\; 29\cdot9$

in denen die Angaben über die Größen a, b und c schon auf die Einheit, das ist die Annahme $A+B+C = 1$, reduziert erscheinen.

Worin die Bedeutung der ersten Richtung liegt, ist sofort einzusehen. Sie entspricht dem Apex der Sonnenbewegung und steht mit dem von Charlier aus demselben Material aber nach der Airy'schen Methode abgeleiteten Resultat [1]

$$A_1 = 272° \; 42' \quad D_1 = +31° \; 36'$$

in recht guter Übereinstimmung. Ebenso ist klar zu ersehen, daß die dritte Richtung nach dem Pole der Bahnebene hinweist. Sie gibt für ihren Knoten und ihre Neigung die Werte

[1] Siehe Wicksell, p. 45.

$$\Omega = 240° \; 26'4 \quad i = 39° \; 39'7$$
$$= 249 \quad 24 \cdot 4 \quad\quad = 60 \quad 30 \cdot 1$$

während vorher

$$\Omega = 238 \quad 32 \qquad i = 52 \quad 30$$

gefunden wurde. Was die zweite Richtung anlangt, so muß sie nunmehr in Analogie mit der Diskussion der drei Richtungen für die zwei Ellipsoide der Planetenbewegungen mit der nach der Sonne zusammenfallen. Tatsächlich erhielt ich in meiner zweiten Abhandlung p. 19 [245] aus der Entwicklung nach Kugelfunktionen im Mittel aus dem Charlier'- und Hecker'schen Beobachtungsmaterial

$$A = 202° \; 44' \quad D = -36° \; 24',$$

was mit den oben erhaltenen Zahlen in bestem Einklange steht.

Doch ist gerade diese Art, die Richtungen zu identifizieren, keine zwingende. Man kann ebensogut auch die Richtung A_2 und D_2 als mit der nach dem Pole der Bahnebene zeigenden identisch annehmen. Es führt dann diese Annahme auf die Knoten- und Neigungswerte

$$\Omega' = 118° \; 44'6 \quad i' = 58° \; 15'0$$
$$= 125 \quad 37 \cdot 6 \quad\quad = 45 \quad 29 \cdot 2$$

die wieder mit dem oben erhaltenen zweiten Wertepaar

$$\Omega' = 130° \; 11' \quad i' = 47° \; 26'$$

zusammenfallen und mit ihm in guter Übereinstimmung stehen. Die Richtung nach der Sonne wäre damit durch

$$A_3 = 330° \; 26', \text{ bez. } 339° \; 24', \text{ und } D_3 = -40° \; 20', \text{ bez. } -29° \; 30'$$

gegeben.

Es zeigt sich daher hier in der Zweideutigkeit der Lösung eine Schwierigkeit, die zu überwinden vorläufig nur der eine Anhaltspunkt vorhanden ist, daß die harmonische Analyse der Eigenbewegungen der Sterne $\Delta\alpha$ nach Rektaszensionen allein, oder in Kugelfunktionen nach beiden Koordinaten, ebenso wie die der Radialbewegungen mehr zugunsten der ersten Art, die Richtungen zu identifizieren, spricht, als für die zweite. Dazu kommt noch die Tatsache, daß die erste Ebene nur wenig von der Milchstraße abweicht, für die als wahrscheinlichste Werte

$$\Omega = 280° \; 20' \quad i = 62° \; 50'$$

gelten, wodurch die Beziehung zu dieser festgelegt erscheint. Tatsächlich folgen auch die Sterne der I. Gruppe dem Zuge der Milchstraße am Himmel. Ihre Breite, bezogen auf die Bahnebene, liegt zwischen den Grenzen $\mp 27°$. Dagegen sind von den Sternen der II. Gruppe die Sektoren

$$B_4 \, B_5 \, B_6 \, B_7 \, C_4 \, C_5 \, C_6 \, C_7 \text{ und } D_4 \, D_5 \text{ nördlich,}$$
$$E_9 \, E_{10} \, E_1 \, E_2 \, D_{10} \, D_{11} \, D_{12} \, D_1 \text{ und } C_{10} \, C_{11} \text{ südlich}$$

von der Milchstraße gelegen, in der Breite von $\pm 27°$ bis $\pm 76°$.

3. Zum Schlusse sei noch die Frage vorgenommen, welche Änderungen die drei eben gefundenen ausgezeichneten Richtungen dadurch erleiden, daß man in Unkenntnis der so merkwürdigen Teilung der Sterne in zwei Gruppen das Momentenellipsoid für die Gesamtheit der Sterne rechnet. In diesem Falle hat man für die Koeffizienten dieses neuen Ellipsoids die Summe der vorhergefundenen anzusetzen.

Dabei summieren sich die Koeffizienten A, B, C und D, dagegen subtrahieren sich E und F und heben sich fast zu Null auf. Man erhält:

$$\begin{array}{rlr} A = & +\ 17\cdot 9568 & \text{oder} = +\ 0\cdot 40811 \\ B = & +\ \ 7\cdot 3869 & +\ 0\cdot 16788 \\ C = & +\ 18\cdot 6574 & +\ 0\cdot 42403 \\ D = & +\ 10\cdot 4412 & +\ 0\cdot 23727 \\ E = & -\ \ 0\cdot 9365 & -\ 0\cdot 02129 \\ F = & -\ \ 0\cdot 2868 & -\ 0\cdot 00652 \\ A+B+C = 44 & & A+B+C = 1. \end{array}$$

Nimmt man direkt $E = F = 0$ an, so lautet die Gleichung des Ellipsoids einfach

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2\,Dyz = 1$$

und diese Form weist darauf hin, daß der der X-Richtung entsprechende Koeffizient A schon an sich die Hauptachse in dieser Richtung widergibt und daß, um die anderen zwei Hauptachsen zu finden, nur in der YZ-Ebene eine Drehung um den Winkel φ, der durch

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\,D}{B-C}$$

bestimmt ist, notwendig erscheint. Die Richtungen der drei Hauptachsen des Ellipsoids wären daher für diese vereinfachende Annahme:

$$\begin{array}{llll} A_1 = 270^\circ & 0' & D_1 = +30^\circ & 49' \\ A_2 = \ \ 90 & 0 & D_2 = +59 & 11 \\ A_3 = \ \ \ \ 0 & 0 & D_3 = \ \ \ \ 0 & 0 \end{array}$$

und sind für den wirklichen Fall, gerechnet mit den oben angegebenen Zahlen, und in dieser Anordnung nach ihrer Größe

$$\begin{array}{lllllll} \lg a = 0\cdot 7906 & A_1 = 270^\circ & 57'6 & D_1 = +30^\circ & 58'7 \\ c = 0\cdot 1961 & A_2 = 110 & 9\cdot 9 & D_2 = +66 & 30\cdot 2 \\ b = 0\cdot 1227 & A_3 = \ \ \ 4 & 38\cdot 4 & D_3 = +\ \ 6 & 11\cdot 0 \end{array}$$

Die erste Richtung, die dem Apex der Sonnenbewegung entspricht, ist trotz dieses Verfahrens unverändert geblieben. Dagegen sind die beiden anderen ganz verfälscht und lassen den Einfluß erkennen, welchen eine Zusammenfassung aller Sterne zu einem gemeinschaftlichen Ellipsoid auf die Berechnung der drei Hauptrichtungen desselben ausübt.

Aus diesem Grunde sei hier noch ein kurzer Absatz der Erörterung der Airy'schen Methode zur Bestimmung des Apex gewidmet und damit die Frage behandelt, ob auch bei dieser Methode, die bekanntlich von allen die relativ einfachste ist, ein solcher Einfluß vorhanden ist.

Bezeichnen $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ die Bewegungsgrößen eines Fixsternes, beziehungsweise die geozentrischen Geschwindigkeiten eines Planeten, ferner Δx, Δy und Δz die Komponenten der Spezialbewegung des Sternes oder, für die Planeten, deren heliozentrische Geschwindigkeiten und endlich ΔX, ΔY und ΔZ die gleichen Größen für den anzunehmenden Zentralpunkt, beziehungsweise die Sonne, so gelten die Gleichungen

$$\Delta\xi = \Delta x - \Delta X \quad \Delta\eta = \Delta y - \Delta Z \quad \Delta\zeta = \Delta z - \Delta Z \;.\;.\;. \qquad 5)$$

und, indem man setzt

$$\Sigma\Delta x = \Sigma\Delta y = \Sigma\Delta z = 0,$$

nur die Summierung erstreckt über eine genügende Anzahl von Sternen, beziehungsweise Planeten, erhält man

$$\Delta X = -\frac{1}{n}\Sigma\Delta\xi \qquad \Delta Y = -\frac{1}{n}\Sigma\Delta\eta \qquad \Delta Z = -\frac{1}{n}\Sigma\Delta\zeta \;.\;.\;. \tag{5'}$$

Gleichungen, in denen sich die Methode von Airy zur Apexbestimmung ausdrückt. Stellt man noch die $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ durch Polarkoordinaten dar, so nehmen sie die Form an:

$$\begin{aligned}
\cos\delta\,\Delta\alpha &= \Delta X\sin\alpha - \Delta Y\cos\alpha \\
\Delta\delta &= \Delta X\cos\alpha\sin\delta + \Delta Y\sin\alpha\sin\delta - \Delta Z\cos\delta \;.\;.\;. \\
\frac{\Delta\rho}{\rho} &= -\Delta X\cos\alpha\cos\delta - \Delta Y\sin\alpha\cos\delta - \Delta Z\sin\delta
\end{aligned} \tag{6}$$

die nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, die Berechnung von ΔX, ΔY und ΔZ, und zwar entweder aus der Rektaszensionsbewegung allein oder aus der in Deklination oder im Radiusvektor für sich oder, was natürlich am besten sein dürfte, aus allen zusammen gestatten.

Auf Grund der oben p. 4 [310] angesetzten Zahlenwerte für die Mittelwerte der $\cos\delta\,\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ und $\frac{\Delta\rho}{\rho}$, gültig für die kleinen Planeten und die zwei Zeitintervalle 1888 Jänner 7—27 und Mai 6—26, erhielt ich die folgenden Normalgleichungen:

		1888 Jänner 17	Mai 16
1. aus den $\Delta\alpha$ allein	$6\Delta X =$	$-1986'62$	$+1995'78$
	$6\Delta Y =$	$-1091\cdot25$	$-1203\cdot23$
2. » » $\Delta\delta$	$0\cdot23757\Delta X =$	$-\;62\cdot73$	$+\;67\cdot84$
	$+0\cdot71274\Delta Y - 2\cdot24100\Delta Z =$	$+\;52\cdot77$	$+\;53\cdot46$
	$-2\cdot24100\Delta Y + 11\cdot04800\Delta Z =$	$-\;494\cdot58$	$-\;511\cdot02$
3. » » $\frac{\Delta\rho}{\rho}$	$5\cdot76243\Delta X =$	$-1902\cdot48$	$+1629\cdot93$
	$+5\cdot28726\Delta Y + 2\cdot24100\Delta Z =$	$-1019\cdot81$	$-1133\cdot61$
	$+2\cdot24100\Delta Y + 0\cdot95200\Delta Z =$	$-\;432\cdot84$	$-\;480\cdot49$

und aus ihnen durch Summieren der einander zugeordneten Einzelgleichungen

$12\Delta X =$	$-3951'82$	$+3693'55$
$12\Delta Y =$	$-2058\cdot29$	$-2283\cdot38$
$12\Delta Z =$	$-\;927\cdot42$	$-\;991\cdot51$

aus denen für die Koordinaten des Apex der Erdbewegung für diese zwei Momente

$$A = 207°\;30'7 \qquad A = 328°\;16'6$$
$$D = -\;11\;\;45\cdot5 \qquad D = -\;12\;\;51\cdot8$$

folgen, Werte, die mit den p. 5 [311] angegebenen

$$A = 204°\;54'3 \qquad A = 328°\;13'4$$
$$D = -\;10\;\;21\cdot2 \qquad D = -\;12\;\;52\cdot1$$

in guter Übereinstimmung stehen. Die Airy'sche Methode führt also, was die Bewegung der kleinen Planeten anlangt, zu Resultaten, die der hier kontrollierbaren Wahrheit recht nahe kommen.

Desgleichen folgt aus den Größen ΔX, ΔY und ΔZ für die Winkelgeschwindigkeit der Erde, gesehen von der mittleren Entfernung der Planeten von ihr aus, für die zwei Momente

$$\lg G = 2 \cdot 57895, \quad \text{bez.} \quad \lg G = 2 \cdot 56985,$$

welche Zahlenwerte sich auch aus $21600 \cdot 20 : 365 \cdot 25$, da die Größen ΔX usw. für eine Zeiteinheit von 20 Tagen gelten und in Bogenminuten angesetzt sind, sowie aus der Annahme, daß diese mittlere Entfernung

$$\lg \rho = 0 \cdot 49394, \quad \text{bez.} \quad 0 \cdot 50331$$

beträgt, genau in gleicher Größe ergeben.

In derselben Art haben Charlier und Wicksell aus den nach den Sektoren A, B, C, D, E und F geordneten Mittelwerten der Eigenbewegungen der Boss-Sterne für die Koordinaten des Sonnenapex

$$A = 272° \; 42' \qquad D = +31° \; 36'$$

gefunden. Mit Ausschließung der beiden Polkalotten A und F fand ich nach demselben Rechnungsverfahren:

für die Sterne der I. Gruppe:	$A = 275° \; 20'6$	$D = +30° \; 51'3$	$\lg G = 0 \cdot 0021$
» » » » II. »	$269 \quad 24 \cdot 6$	$+32 \quad 8 \cdot 8$	$0 \cdot 0253$
» alle »	$272 \quad 54 \cdot 1$	$+30 \quad 40 \cdot 0$	$0 \cdot 0151$

Werte, welche sich nur wenig voneinander unterscheiden und zeigen, daß bei der Berechnung des Apex nach der Methode von Airy die Teilung der Sterne nach den zwei Gruppen, denen scheinbar zwei verschiedene Bahnebenen entsprechen, ohne Einfluß ist und daß tatsächlich beide Sterngruppen zu demselben Sonnenapex führen. Ebenso scheint auch kein Unterschied in ihrer mittleren Entfernung von der Sonne zu bestehen, denn beide geben für die mittlere Geschwindigkeit der Sonne, gesehen von dieser Entfernung aus, die fast identischen Werte

$$\lg G = 0 \cdot 0021, \quad \text{bez.} \quad 0 \cdot 0253,$$

das heißt, da die Zeiteinheit, auf die die Charlier'schen Angaben sich beziehen, 20 Jahre ist,

$$G = 0''0502, \quad \text{bez.} \quad 0''0530, \text{ und aus allen Sternen } 0''0518,$$

woraus für die mittlere Parallaxe dieser Sterne π unter der Annahme, daß die absolute Geschwindigkeit der Sonne $19 \cdot 4$ *km*/sec. zählt,

$$\pi = 0''0123, \quad \text{bez.} \quad 0''0129 \text{ und } 0''0126$$

folgt.

2. Berechnung des Streuungsellipsoids.

4. Nach Charlier hat man jede Kombination in den Eigen- wie Radialbewegungen der Sterne als Glieder einer Kollektivreihe aufzufassen. Ihre Verteilungsfunktion hängt von drei Parametern, den drei Geschwindigkeitsvektoren ab und ihr entsprechen drei verschiedene Momente zweiter Ordnung in der Charlier'schen- oder drei verschiedene Streuungen in der Ausdrucksweise von Bruns. Daraus folgt, daß, wenn die ersteren mit u, v und w, die letzteren mit h_1 h_2 und h_3 bezeichnet werden, die Verteilungsfunktion in der Form

$$\varphi = \frac{h_1 h_2 h_3}{(\sqrt{\pi})^3} e^{-h_1^2 u^2 - h_2^2 v^2 - h_3^2 w^2} \quad \ldots \qquad 7)$$

anzunehmen ist. Damit ist der Schwarzschild'sche Ansatz des Geschwindigkeitsellipsoids erzielt.

Nicht in jedem beliebigen Koordinatensystem wird aber der Exponent der Verteilungsfunktion oder die Gleichung des Ellipsoids diese einfache Form haben, im allgemeinen und daher wohl auch für das gebräuchliche astronomische Bezugssystem des Äquators wird er

$$f = AU^2+BV^2+CW^2+2DUW+2EWU+2FUV\ \ldots \tag{8}$$

lauten und man hat daher die doppelte Aufgabe, zunächst aus den Beobachtungsdaten die Gleichung dieses Ellipsoids und sodann durch Transformation auf die Hauptachsen deren einfachere Form

$$f = h_1^2 u^2+h_2^2 v^2+h_3^2 w^2 = \left(\frac{u}{a}\right)^2+\left(\frac{v}{b}\right)^2+\left(\frac{w}{c}\right)^2\ \ldots \tag{9}$$

abzuleiten. Man gewinnt so wieder drei im Raume ausgezeichnete Richtungen, die mit den sonst bekannten zu identifizieren sind.

Der Vorgang zur Berechnung dieser Gleichung des Ellipsoids ist der folgende: Man denke sich den Himmel, entsprechend der Gruppe von Sternen, die man in Betracht ziehen will, in Flächenelemente geteilt, deren Mittelpunkte einzeln die Rektaszensionen $\alpha_1\ \alpha_2\ldots$, sowie die Deklinationen $\delta_1\ \delta_2\ldots$ haben und deren Distanzen von der Sonne $\rho_1\ \rho_2\ldots$ sind. Die im Folgenden durchgeführte Teilung ist, was die kleinen Planeten anlangt, die in je zwei Rektaszensionsstunden, so daß $\alpha_1 = 0^h$, $\alpha_2 = 2^h$ usw. ist, und in Deklinationen, die parallel der Ekliptik verlaufen, so daß deren Breiten $\beta_1 = \beta_2\ldots = 0$ angenommen werden können. Die Teilung ferner für die Fixsterne ist die von Charlier akzeptierte nach den Sektoren *B, C, D* und *E.* Die den beiden Polen entsprechenden Kalotten *A* und *F* sollen nicht in Betracht gezogen werden.

Die Geschwindigkeitskomponenten in jedem dieser Flächenelemente mögen für jeden einzelnen Stern durch

$$U_i = \cos\delta_i\,\Delta\,\alpha_i \qquad V_i = \Delta\delta_i \qquad W_i = \frac{\Delta\rho_i}{\rho_i}$$

die aus ihnen abgeleiteten Mittelwerte durch

$$U_0 = \cos\delta\Delta\alpha = \frac{1}{n}\Sigma U_i \qquad V_0 = \Delta\delta = \frac{1}{n}\Sigma V_i \qquad W_0 = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{n}\Sigma W_i$$

und endlich die Streuungen durch

$$\mu_{01} = \frac{1}{n}\Sigma(U_i-U_0)^2 \qquad \mu_{10} = \frac{1}{n}\Sigma(V_i-V_0)^2 \qquad \mu_{11} = \frac{1}{n}\Sigma(U_i-U_0)(V_i-V_0)$$

$$\mu_{02} = \frac{1}{n}\Sigma(W_i-W_0)^2\ \ldots \tag{10}$$

dargestellt sein. Die Sammlung der Einzelwerte U_i V_i und W_i aus den Beobachtungsergebnissen, die in den Sternkatalogen niedergelegt sind, die Berechnung der U_0 V_0 W_0 als deren Mittel und der μ_{01}, μ_{10}, μ_{11} und μ_{02} als deren Streuungen oder der Mittelwerte der Quadrate der Abweichungen der Einzelwerte vom angenommenen Mittel, dies alles natürlich für jedes einzelne Flächenelement als Teil des Himmels durchgeführt, bildet die erste Aufgabe des Rechners.

Die Geschwindigkeitsvektoren U_0, V_0 und W_0 beziehen sich auf ein Koordinatensystem, dessen *X*-Achse mit dem Deklinationskreis, dessen *Y*-Achse mit dem Stundenkreis und dessen *Z*-Achse mit dem Visionsradius des Mittelpunktes des betreffenden Flächenstückes am Himmel zusammenfällt und sind daher vorerst auf das astronomisch gebräuchliche Koordinatensystem des Äquators zu reduzieren. Es seien *U, V* und *W* die Vektoren in bezug auf dieses System; dann gelten die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} U &= U_0\gamma_{11} + V_0\gamma_{12} + W_0\gamma_{13} & U_0 &= U\gamma_{11} + V\gamma_{21} + W\gamma_{31} \\ V &= U_0\gamma_{21} + V_0\gamma_{22} + W_0\gamma_{23} & V_0 &= U\gamma_{12} + V\gamma_{22} + W\gamma_{32} \\ W &= U_0\gamma_{31} + V_0\gamma_{32} + W_0\gamma_{33} & W_0 &= U\gamma_{13} + V\gamma_{23} + W\gamma_{33} \end{aligned} \qquad 11)$$

in denen die Koeffizienten γ_{ik} die Werte haben

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= -\sin\alpha & \gamma_{21} &= +\cos\alpha & \gamma_{31} &= 0 \\ \gamma_{12} &= -\sin\delta\cos\alpha & \gamma_{22} &= -\sin\delta\sin\alpha & \gamma_{32} &= +\cos\delta\ \ldots \\ \gamma_{13} &= +\cos\delta\cos\alpha & \gamma_{23} &= +\cos\delta\sin\alpha & \gamma_{33} &= +\sin\delta \end{aligned} \qquad 11')$$

und wenn, entsprechend der Ellipsoidgleichung in den Koordinaten U, V, W.

$$f = AU^2 + BV^2 + CW^2 + 2\,DVW + 2EWU + 2FUV \qquad 8)$$

die in den Größen U_0, V_0 und W_0 in der Form

$$f = A_0U_0^2 + B_0V_0^2 + C_0W_0^2 + 2\,D_0V_0W_0 + 2\,E_0W_0U_0 + 2\,F_0U_0V_0 \qquad 8')$$

angeschrieben wird, ebenso die Beziehungsgleichungen:

$$\begin{aligned} A_0 &= A\gamma_{11}^2 + B\gamma_{21}^2 + C\gamma_{31}^2 + 2\,D\gamma_{21}\gamma_{31} + 2\,E\gamma_{31}\gamma_{11} + 2\,F\gamma_{11}\gamma_{21} \\ B_0 &= A\gamma_{12}^2 + B\gamma_{22}^2 + C\gamma_{32}^2 + 2\,D\gamma_{22}\gamma_{32} + 2\,E\gamma_{32}\gamma_{12} + 2\,F\gamma_{12}\gamma_{22} \\ C_0 &= A\gamma_{13}^2 + B\gamma_{23}^2 + C\gamma_{33}^2 + 2\,D\gamma_{23}\gamma_{33} + 2\,E\gamma_{33}\gamma_{13} + 2\,F\gamma_{13}\gamma_{23} \\ D_0 &= A\gamma_{12}\gamma_{13} + B\gamma_{22}\gamma_{23} + C\gamma_{32}\gamma_{33} + D(\gamma_{22}\gamma_{33} + \gamma_{32}\gamma_{23}) + E(\gamma_{32}\gamma_{13} + \gamma_{33}\gamma_{12}) + F(\gamma_{12}\gamma_{23} + \gamma_{13}\gamma_{22}) \\ E_0 &= A\gamma_{13}\gamma_{11} + B\gamma_{23}\gamma_{21} + C\gamma_{33}\gamma_{31} + D(\gamma_{23}\gamma_{31} + \gamma_{33}\gamma_{21}) + E(\gamma_{33}\gamma_{11} + \gamma_{31}\gamma_{13}) + F(\gamma_{13}\gamma_{21} + \gamma_{11}\gamma_{23}) \\ F_0 &= A\gamma_{11}\gamma_{12} + B\gamma_{21}\gamma_{22} + C\gamma_{31}\gamma_{32} + D(\gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{31}\gamma_{22}) + E(\gamma_{31}\gamma_{12} + \gamma_{32}\gamma_{11}) + F(\gamma_{11}\gamma_{22} + \gamma_{12}\gamma_{21}) \end{aligned}$$

Von da ab muß nun unterschieden werden zwischen der Berechnung des Streuungsellipsoids aus den $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ allein, und den Radialbewegungen für sich. Soll zunächst die erste Aufgabe durchgeführt werden, so hat man aus dem Exponenten der Verteilungsfunktion

$$\varphi = K.e^{-f}$$

die Größe $W_0 = \dfrac{\Delta\rho}{\rho}$ zu eliminieren. Dies geschieht durch Integration dieser Größe über alle W_0 zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$. Man erhält so als neuen Exponenten

$$f = U_0^2\,\frac{A_0C_0 - E_0^2}{C_0} + V_0^2\,\frac{B_0C_0 - D_0^2}{C_0} + 2\,U_0\,V_0\,\frac{C_0F_0 - D_0E_0}{C_0}$$

und hat nach den Lehren der Kollektivmaßlehre dann sofort

$$A_0C_0 - E_0^2 = J_0\,\mu_{10} \quad B_0C_0 - D_0^2 = J_0\,\mu_{01} \quad C_0F_0 - D_0E_0 = J_0\,\mu_{11},$$

worin noch J_0 die Determinante

$$J_0 = \begin{vmatrix} A_0 & F_0 & E_0 \\ F_0 & B_0 & D_0 \\ E_0 & D_0 & C_0 \end{vmatrix}$$

bedeutet. Die Beziehungen zwischen den da neuauftretenden Kombinationen $A_0C_0 - E_0^2$, $B_0C_0 - D_0^2$ und $C_0F_0 - D_0E_0$ und den analogen in den Koeffizienten $ABC\ldots$ sind gegeben durch

$$A_0\,C_0 - E_0^2 = (B\,C - D^2)\,\gamma_{12}^2 + (A\,C - E^2)\,\gamma_{22}^2 + (AB - F^2)\,\gamma_{32}^2$$
$$+ 2\,(DE - CF)\,\gamma_{12}\,\gamma_{22} + 2\,(EF - AD)\,\gamma_{22}\,\gamma_{32} + 2\,(FD - BE)\,\gamma_{32}\,\gamma_{12}$$
$$B_0\,C_0 - D_0^2 = (B\,C - D^2)\,\gamma_{11}^2 + (A\,C - E^2)\,\gamma_{21}^2 + (A\,B - F^2)\,\gamma_{31}^2$$
$$+ 2\,(DE - CF)\,\gamma_{11}\,\gamma_{21} + 2\,(EF - AD)\,\gamma_{21}\,\gamma_{31} + 2\,(FD - BE)\,\gamma_{31}\,\gamma_{11}$$
$$-(F_0\,C_0 - D_0\,E_0) = (B\,C - D^2)\,\gamma_{11}\,\gamma_{12} + (A\,C - E^2)\,\gamma_{21}\,\gamma_{22} + (A\,B - F^2)\,\gamma_{32}\,\gamma_{31}$$
$$+ (DE - CF)\,(\gamma_{11}\gamma_{22} + \gamma_{21}\gamma_{12}) + (EF - AD)\,(\gamma_{21}\,\gamma_{32} + \gamma_{22}\gamma_{31}) + (FD - BE)\,(\gamma_{31}\,\gamma_{12} + \gamma_{32}\,\gamma_{11}),$$

so daß, wenn man als Unbekannte einführt

$$\begin{array}{ll} B\,C - D^2 = J_0 x & EF - AD = J_0\,\xi \\ A\,C - E^2 = J_0 y & FD - BE = J_0\,\eta \;\;.\;\;.\;\;. \\ A\,B - F^2 = J_0 z & DE - CF = J_0\,\zeta \end{array} \tag{12}$$

sich die drei Gruppen von Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} \mu_{01} &= x\gamma_{12}^2 + y\,\gamma_{22}^2 + z\,\gamma_{32}^2 + 2\,\xi\,\gamma_{22}\,\gamma_{32} + 2\,\eta\,\gamma_{32}\,\gamma_{12} + 2\,\zeta\,\gamma_{12}\,\gamma_{22} \\ \mu_{10} &= x\gamma_{11}^2 + y\,\gamma_{21}^2 + z\,\gamma_{31}^2 + 2\,\xi\,\gamma_{21}\,\gamma_{31} + 2\,\eta\,\gamma_{31}\,\gamma_{11} + 2\,\zeta\,\gamma_{11}\,\gamma_{21} \\ \mu_{11} &= x\gamma_{11}\,\gamma_{12} + y\,\gamma_{21}\,\gamma_{22} + 2\,z\,\gamma_{31}\,\gamma_{32} + \xi\,(\gamma_{21}\,\gamma_{32} + \gamma_{22}\,\gamma_{31}) + \eta\,(\gamma_{31}\,\gamma_{12} + \gamma_{32}\,\gamma_{11}) + \zeta\,(\gamma_{11}\,\gamma_{22} + \gamma_{12}\,\gamma_{21}), \end{aligned} \tag{13}$$

deren Zahl so groß ist wie die Zahl der Flächenelemente, in die der Himmel geteilt wurde und die nach der Methode der kleinsten Quadrate zu behandeln sind.

Soll jedoch die Gleichung des Streuungsellipsoids aus den Radialbewegungen gefunden werden, so hat man die Funktion φ über alle Werte von U_0 und V_0 zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ zu integrieren, so daß im Exponenten bloß die Größe W_0 übrig bleibt. Der neue Exponent wird nun

$$f = \frac{A_0\,B_0\,C_0 - A_0\,D_0^2 - B_0\,E_0^2 - C_0\,F_0^2 + 2D_0\,E_0\,F_0}{A_0\,B_0 - F_0^2}\,W_0^2,$$

oder mit Beziehung auf die Definition von J_0

$$f = \frac{J_0}{A_0\,B_0 - F_0^2}\,W_0^2$$

und ist jetzt, wieder nach bekannten Lehrsätzen der Kollektivmaßlehre

$$\frac{A_0 B_0 - F_0^2}{J_0} = \mu_{02},$$

das heißt gleichzusetzen der Streuung im Radiusvektor. Es ist aber

$$A_0\,B_0 - F_0^2 = (B\,C - D^2)\,\gamma_{13}^2 + (A\,C - E^2)\,\gamma_{23}^2 + (A\,B - F^2)\,\gamma_{33}^2$$
$$+ 2\,(DE - CF)\,\gamma_{13}\,\gamma_{23} + 2\,(EF - AD)\,\gamma_{23}\,\gamma_{33} + 2\,(FD - BE)\,\gamma_{33}\,\gamma_{13},$$

so daß, wenn man dieselben 6 Unbekannten x, y, z, ξ, η und ζ wie oben einführt, das neue System von Gleichungen folgt:

$$\mu_{02} = x\gamma_{13}^2 + y\,\gamma_{23}^2 + z\,\gamma_{33}^2 + 2\,\xi\,\gamma_{13}\,\gamma_{23} + 2\,\eta\,\gamma_{23}\,\gamma_{33} + 2\,\zeta\,\gamma_{33}\,\gamma_{13} \;\;.\;\;.\;\;. \tag{14}$$

deren Zahl so groß ist wie die Zahl der der Untersuchung zugrundeliegenden Sektoren und die nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösen sind.

Kennt man nunmehr die Größen

$$x = \frac{1}{J_0}(BC - D^2) \qquad \xi = \frac{1}{J_0}(EF - AD)$$

$$y = \frac{1}{J_0}(CA - E^2) \qquad \eta = \frac{1}{J_0}(FD - BE)$$

$$z = \frac{1}{J_0}(AB - F^2) \qquad \zeta = \frac{1}{J_0}(DE - CF),$$

in denen J_0 die Determinante

$$J_0 = \begin{vmatrix} A_0 & F_0 & E_0 \\ F_0 & B_0 & D_0 \\ E_0 & D_0 & C_0 \end{vmatrix}$$

bedeutet, aber nach bekannten Sätzen der Determinantenlehre als mit

$$J = \begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix}$$

identisch anzusehen ist, so ergeben sich daraus die Koeffizienten A, B, C, D, E und F selbst zu

$$\begin{aligned} A &= J(yz - \xi^2) & D &= J(\eta\zeta - \xi x) \\ B &= J(zx - \eta^2) & E &= J(\zeta\xi - \eta y) \\ C &= J(xy - \zeta^2) & F &= J(\xi\eta - \zeta z). \end{aligned}$$

In ihnen ist noch J unbekannt. Da aber, wenn man die Determinante der Größen x, y, z, ξ, η und ζ, das heißt

$$K = \begin{vmatrix} x & \zeta & \eta \\ \zeta & y & \xi \\ \eta & \xi & z \end{vmatrix}$$

bildet, die Relation folgt

$$JK = 1,$$

so erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} A &= (yz - \xi^2) : K & D &= (\eta\zeta - \xi x) : K \\ B &= (zx - \eta^2) : K & E &= (\zeta\xi - \eta y) : K \\ C &= (xy - \zeta^2) : K & F &= (\xi\eta - \zeta z) : K \end{aligned} \qquad 15)$$

womit die Aufgabe der Bestimmung der Koeffizienten in der allgemeinen Gleichung 8) des Ellipsoids gelöst erscheint.

Es bleibt als letztes noch die Transformation auf die Hauptachsen. Diese erfolgt nach bekannten Methoden in der Art, daß man vorerst die Gleichung dritten Grades

$$\begin{vmatrix} A-s & F & E \\ F & B-s & D \\ E & D & C-s \end{vmatrix} = 0$$

auflöst; dann hat man, wenn die drei Wurzeln dieser Gleichung $s_1\ s_2$ und s_3 sind,

$$a = \frac{1}{\sqrt{s_1}} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{s_2}} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{s_3}}$$

als die Hauptachsen desselben, und

$$\begin{aligned} (A-s)\lambda + \quad F\mu + \quad E\nu &= 0 \\ F\lambda + (B-s)\mu + \quad D\nu &= 0 \\ E\lambda + \quad D\mu + (C-s)\nu &= 0, \end{aligned}$$

deren drei Richtungscosinus

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = \cos A_1 \cos D_1 & \lambda_2 = \cos A_2 \cos D_2 & \lambda_3 = \cos A_3 \cos D_3 \\ \mu_1 = \sin A_1 \cos D_1 & \mu_2 = \sin A_2 \cos D_2 & \mu_3 = \sin A_3 \cos D_3 \\ \nu_1 = \sin D_1 & \nu_2 = \sin D_2 & \nu_3 = \sin D_3. \end{array}$$

Die Beziehungen zwischen den u, v und w als den Vektoren der Geschwindigkeit in bezug auf die Hauptachsen des Streuungsellipsoids und den U, V und W endlich sind gegeben

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1\, U + \mu_1\, V + \nu_1\, W \\ v &= \lambda_2\, U + \mu_2\, V + \nu_2\, W \\ w &= \lambda_3\, U + \mu_2\, V + \nu_2\, W \end{aligned}$$

5. Auf Grund der eben abgeleiteten Rechnungsvorschriften soll nunmehr im Folgenden das Streuungsellipsoid der geozentrischen Bewegung der kleinen Planeten für die zwei Intervalle 1888 Jänner 7—27 und Mai 6—26 berechnet werden. Die zur Durchführung der Rechnung notwendigen Daten sind schon teilweise, was die Mittelwerte

$$U_0 = \cos\delta\,\Delta\alpha \qquad V_0 = \Delta\delta \quad \text{und} \quad W_0 = \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

anlangt, früher p. 4 [310] mitgeteilt und daher nur durch die Angaben über die Streuungsgrößen

$$\mu_{01}, \quad \mu_{10}, \quad \mu_{11} \quad \text{und} \quad \mu_{02}$$

zu ergänzen. Sie lauten:

1888 Jänner 17					1888 Mai 16				
α	μ_{01}	μ_{10}	μ_{11}	μ_{02}	α	μ_{01}	μ_{10}	μ_{11}	μ_{02}
0^h	+ 16045·0	+ 4014·1	+ 4687·4	+ 3622·1	0^h	+ 8584·0	+ 2177·0	+ 2674·0	+ 2330·4
2	7869·8	4913·2	+ 1669·5	5639·0	2	6494·6	3586·6	+ 2840·1	2329·2
4	5247·5	6266·1	— 909·9	3836·6	4	5181·4	1395·3	+ 180·4	2015·5
6	3995·2	4209·0	— 244·7	8260·6	6	8974·5	1888·6	— 1126·1	1107·3
8	1767·5	2274·2	+ 924·4	16109·0	8	4353·6	2069·4	— 360·7	1392·9
10	3790·1	2268·4	— 829·5	5437·3	10	5224·1	2581·4	— 232·3	4516·4
12	7078·3	3217·9	— 1153·3	2310·4	12	3599·0	2797·7	— 836·8	4257·8
14	5822·1	4587·8	— 3509·0	2609·8	14	2210·0	3063·7	169·2	6289·3
16	9460·0	2494·6	— 1402·0	2412·0	16	985·9	1622·3	+ 309·7	3512·9
18	7327·5	979·6	+ 1058·5	1785·7	18	2260·0	3693·8	+ 1003·9	4706·6
20	8298·3	1397·3	+ 1679·7	1858·9	20	4461·7	1648·9	+ 1104·2	1763·2
22	5334·6	3281·4	+ 1729·0	1599·5	22	7267·2	2340·7	+ 2349·0	2675·1

Ebenso sei hier die Tafel des Substitutionskoeffizienten für die einzelnen Himmelsteile, berechnet nach den Formeln 11, doch in etwas gedrängterer aber immerhin leicht verständlicher Form wiedergegeben:

α	γ_{11}	γ_{12}	γ_{13}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{23}	γ_{32}	γ_{33}	α
0^h	+0	0	+1 −	+1 −	0	0	+1 +	0	12^h
2	−0·50000+	−0·17233−	+0·84872−	+0·86602−	−0·09950+	+0·49000−	+0·98000+	+0·19899−	14
4	−0·86602+	−0·17233−	+0·46937−	+0·50000−	−0·29849+	+0·81296−	+0·93872+	+0·34466−	16
6	−0 +	0	0	0	−0·39798+	+0·91738−	+0·91738+	+0·39798−	18
8	−0·86602+	+0·17233+	−0·46937+	−0·50000+	−0·29849+	+0·81296−	+0·93872+	+0·34466−	20
10	−0·50000+	+0·17233+	−0·84872+	−0·86602+	−0·09950+	+0·49000−	+0·98000+	+0·19899−	22

Auf Grund dieser Daten ergaben sich für die Unbekannten x, y, z, ξ, η und ζ nach den Formeln 13 und 14 die folgenden Normalgleichungen:

1. Aus μ_{01}, das ist der Streuung in Rektaszension:

	1888 Jänner 17	1888 Mai 16
1) $+4{\cdot}5000\,x+1{\cdot}5000\,y$	$= +35612{\cdot}3$	$+27772{\cdot}7$
2) $+1{\cdot}5000\,x+4{\cdot}5000\,y$	$= +46444{\cdot}2$	$+31832{\cdot}7$
6) $+6{\cdot}0000\,\zeta$	$= -\ 7958{\cdot}3$	$+10343{\cdot}5$

2. aus μ_{10}, das ist der Streuung in Deklination:

1) $+0{\cdot}0070\,x+0{\cdot}0115\,y+\ 0{\cdot}2191\,z-0{\cdot}0897\,\xi$	$= +\ 816{\cdot}2$	$+\ 543{\cdot}7$
2) $+0{\cdot}0115\,x+0{\cdot}0823\,y+\ 0{\cdot}6187\,z-0{\cdot}4387\,\xi$	$= +\ 2053{\cdot}5$	$+\ 1598{\cdot}5$
3) $+0{\cdot}2191\,x+0{\cdot}6187\,y+10{\cdot}2121\,z-3{\cdot}9535\,\xi$	$= +37012{\cdot}8$	$+26721{\cdot}3$
4) $-0{\cdot}0897\,x+0{\cdot}4387\,y-\ 3{\cdot}9535\,z+2{\cdot}4746\,\xi$	$= -13690{\cdot}9$	$-10106{\cdot}4$
5) $+0{\cdot}8751\,\eta-0{\cdot}1795\,\zeta$	$= -\ 2981{\cdot}5$	$-\ 357{\cdot}3$
6) $-0{\cdot}1795\,\eta+0{\cdot}0470\,\zeta$	$= +\ 659{\cdot}1$	$-\ 12{\cdot}9$

3. aus den μ_{11}, das ist der kombinierten Streuung beider:

1) $+0{\cdot}1184\,x-0{\cdot}1184\,y\ \ +0{\cdot}5727\,\xi$	$= +\ 852{\cdot}7$	$+\ 681{\cdot}0$
2) $-0{\cdot}1184\,x+0{\cdot}1184\,y\ \ -0{\cdot}5727\,\xi$	$= -\ 852{\cdot}7$	$-\ 681{\cdot}0$
4) $+0{\cdot}5727\,x-0{\cdot}5727\,y\ \ +5{\cdot}7625\,\xi$	$= +12994{\cdot}4$	$+\ 8909{\cdot}5$
5) $+5{\cdot}2872\,\eta-1{\cdot}0956\,\zeta$	$= +\ 125{\cdot}7$	$+\ 3040{\cdot}3$
6) $-1{\cdot}0956\,\eta+0{\cdot}4752\,\zeta$	$= -\ 824{\cdot}7$	$-\ 1165{\cdot}0$

Wegen der Ungleichförmigkeit in den Koeffizienten der einzelnen Gleichungen, was ihre Größe anlangt, verwendete ich sie jedoch nicht getrennt zur Bestimmung der Unbekannten, sondern leitete aus ihnen durch Summieren der entsprechenden Zeilen, die mit den Zahlen 1..6 numeriert sind, neue ab, deren Auflösung sich einwandfreier gestaltete. Diese lauten:

	1888 Jänner 17	1888 Mai 16	
$+4{\cdot}6254\,x+1{\cdot}3932\,y+\ 0{\cdot}2191\,z+0{\cdot}4830\,\xi$	$= +37281{\cdot}3$	$+28997{\cdot}4$	
$+1{\cdot}3932\,x+4{\cdot}7007\,y+\ 0{\cdot}6187\,z-1{\cdot}0114\,\xi$	$= +47645{\cdot}0$	$+32750{\cdot}2$	
$+0{\cdot}2191\,x+0{\cdot}6187\,y+10{\cdot}2122\,z-3{\cdot}9535\,\xi$	$= +37012{\cdot}8$	$+26721{\cdot}2$	I.
$+0{\cdot}4830\,x-1{\cdot}0114\,y-\ 3{\cdot}9535\,z+8{\cdot}2371\,\xi$	$= -\ 696{\cdot}5$	$-\ 1196{\cdot}9$	
$+6{\cdot}1623\,\eta-1{\cdot}2751\,\zeta$	$=\ \ 2855{\cdot}8$	$+\ 2683{\cdot}1$	
$-1{\cdot}2751\,\eta+6{\cdot}5222\,\zeta$	$= -\ 8123{\cdot}9$	$+\ 9165{\cdot}6$	

4. aus den μ_{02}, das ist der Streuung in der Bewegung im Radiusvektor ρ:

	1888 Jänner 17	1888 Mai 16
$+4\cdot 2696\,x+1\cdot 2742\,y+0\cdot 2188\,z+1\cdot 0557\,\xi$	$=+22276\cdot 9$	$+19960\cdot 4$
$+1\cdot 2742\,x+3\cdot 3943\,y+0\cdot 6187\,z+2\cdot 8978\,\xi$	$=+28129\cdot 5$	$+14451\cdot 7$
$+0\cdot 2188\,x+0\cdot 6187\,y+0\cdot 1129\,z+0\cdot 5285\,\xi$	$=+\ 5072\cdot 4$	$+\ 2582\cdot 6$
$+1\cdot 0557\,x+2\cdot 8978\,y+0\cdot 5285\,z+2\cdot 4746\,\xi$	$=+23887\cdot 0$	$+12214\cdot 1$
$+0\cdot 8710\,\eta+2\cdot 1114\,\zeta$	$=-\ 3382\cdot 5$	$+\ 1283\cdot 3$
$+2\cdot 1194\,\eta+5\cdot 0968\,\zeta$	$=-\ 7935\cdot 9$	$+\ 3080\cdot 6$

In ihnen sind wohl die Koeffizienten ziemlich homogen. Leider gestatten sie aber keine direkte Auflösung, weil zwischen einzelnen Koeffizienten Beziehungen bestehen, die eine solche unmöglich machen; so findet man

$$3\cdot 3943\,.\,0\cdot 1129=(0\cdot 6187)^2$$
$$3\cdot 3943\,.\,2\cdot 4746=(2\cdot 8978)^2$$
$$5\cdot 0968\,.\,0\cdot 8710=(2\cdot 1114)^2.$$

Ich leitete daher aus ihnen durch Summierung mit den Gleichungen I neue ab, die mit II bezeichnet werden mögen, so daß die Gruppe I aus den Streuungen in α und δ allein, die Gruppe II aus allen drei Koordinaten α, δ und ρ abgeleitet erscheinen. Diese Gruppe II lautet:

	1888 Jänner 17	1888 Mai 16	
$+8\cdot 8950\,x+2\cdot 6674\,y+\ 0\cdot 4378\,z+\ 1\cdot 5387\,\xi$	$=+59558\cdot 2$	$+48957\cdot 8$	
$+2\cdot 6674\,x+8\cdot 0950\,y+\ 1\cdot 2374\,z+\ 1\cdot 8864\,\xi$	$=+75774\cdot 5$	$+47201\cdot 9$	
$+0\cdot 4378\,x+1\cdot 2374\,y+10\cdot 3250\,z-\ 3\cdot 4250\,\xi$	$=+42085\cdot 2$	$+29303\cdot 8$	II.
$+1\cdot 5387\,x+1\cdot 8864\,y-\ 3\cdot 4250\,z+10\cdot 7117\,\xi$	$=+23190\cdot 5$	$+11017\cdot 2$	
$+7\cdot 0333\,\eta+\ 0\cdot 8363\,\zeta$	$=-\ 6238\cdot 3$	$+\ 3966\cdot 4$	
$+0\cdot 8363\,\eta+11\cdot 6190\,\zeta$	$=-16059\cdot 8$	$+12246\cdot 2$	

Ihre Auflösung lieferte für die Unbekannten die Werte:

	1888 Jänner 17		1888 Mai 16		
	I	II	I	II	(II)
$\lg x=$	$3\cdot 69709$	$3\cdot 61664$	$3\cdot 62812$	$3\cdot 61538$	$3\cdot 62873$
$y=$	$3\cdot 93937$	$3\cdot 85261$	$3\cdot 75537$	$3\cdot 61632$	$3\cdot 79722$
$z=$	$3\cdot 60223$	$3\cdot 54728$	$3\cdot 45069$	$3\cdot 36626$	$3\cdot 53457$
$\xi=$	$3\cdot 41683$	$3\cdot 15956$	$3\cdot 21989$	$2\cdot 80020$	$3\cdot 05058$
$\eta=$	$2_n 87596$	$2_n 86264$	$2\cdot 87897$	$2\cdot 57396$	$2_n 62179$
$\zeta=$	$3_n 14380$	$3_n 12377$	$3\cdot 19124$	$3\cdot 02266$	$2_n 91537$

Die aus ihnen berechneten Koeffizienten A, B, C, D, E und F der Hauptgleichung des Streuungsellipsoids sind:

	1888 Jänner 17		1888 Mai 16		
	I	II	I	II	(II)
$\lg A=$	$6\cdot 32596$	$6\cdot 41758$	$6\cdot 42204$	$6\cdot 41618$	$6\cdot 38483$
$B=$	$6\cdot 16592$	$6\cdot 20315$	$6\cdot 35514$	$6\cdot 42722$	$6\cdot 23739$
$C=$	$6\cdot 49565$	$6\cdot 49771$	$6\cdot 63542$	$6\cdot 65477$	$6\cdot 49413$
$D=$	$5_n 95656$	$5_n 75465$	$6\cdot 06634$	$5\cdot 79613$	$5_n 72617$
$E=$	$5\cdot 34152$	$5\cdot 57000$	$5_n 53600$	$5_n 39883$	$5\cdot 30972$
$F=$	$5\cdot 43658$	$5\cdot 61599$	$5_n 79299$	$5_n 79678$	$5\cdot 44962$

und damit endlich nach Auflösung der bezüglichen Determinantengleichungen dritten Grades diese Hauptachsen selbst, sowie ihre Richtungen:

	1888 Jänner 17		1888 Mai 16		
	I	II	I	II	(II)
lg a =	1·72592	1·73380	1·65722	1·66368	1·73988
A_1 =	279° 6'8	325° 36'4	264° 45'4	266° 59'1	292° 57'8
D_1 =	+ 66 31·6	+ 67 21·8	+ 66 9·9	+ 72 59·3	+ 71 16·6
lg b =	1·82754	1·78203	1·75941	1·79613	1·79895
A_2 =	196° 31'6	205° 44'8	332° 50'5	318° 31'5	200° 2'2
D_2 =	− 3 1·9	− 12 9·6	− 9 56·1	− 9 54·8	− 0 53·2
lg c =	2·00700	1·95650	1·93458	1·86422	1·92150
A_3 =	107° 59'2	111° 32'5	238° 52'3	226° 11'5	109° 37'0
D_3 =	+ 23 14·0	+ 19 3·2	− 21 36·0	− 13 17·6	+ 18 42·0

6. Die Identifizierung der Richtungen ist nun leicht vorzunehmen. Sie führt zu den folgenden Ergebnissen. Die Richtungen A_2 und D_2 sowie A_3 und D_3 stimmen mit denen nach der Sonne und ihrem scheinbaren Apex überein, für welche oben p. 5 [311] die Werte

$$A' = 118°\ 53'9 \quad D' = +20°\ 47'9 \qquad\qquad A' = 233°\ 38'2 \quad D' = -19°\ 15'4$$
$$A'' = 204\ \ 54·3 \quad D'' = -10\ \ 21·2 \qquad \text{und} \qquad A'' = 328\ \ 13·4 \quad D'' = -12\ \ 52·1$$

angesetzt wurden und geben so die Identitäten

$$A' = A_3 \qquad A'' = A_2$$
$$D' = D_3 \qquad D'' = D_2$$

Die Richtung A_1 und D_1 zeigt daher nach dem Pole der Ekliptik und aus ihr folgen für Knoten und Neigung derselben die Einzelwerte

☊ =	9° 6'8	55° 36'4	354° 45'4	356° 59'1	22° 57'8
i =	23 28·4	22 38·2	23 50·1	17 0·7	18 43·4.

Aber gleichzeitig sieht man, daß die Übereinstimmung der Richtungen nicht mehr eine so gute ist als wie im Falle des Momentenellipsoids. So tritt besonders eine große Differenz auf bei dem Knotenwert, der aus der Gleichungsgruppe II für 1888 Jänner 17 resultiert

$$☊ = 55°\ 36'4 \quad \text{statt} \quad 0°\ 0'.$$

Doch auch sonst zeigen sich Unterschiede, die fast bis auf 15° ansteigen. Die drei Vorzugsrichtungen des Streuungsellipsoids sind daher mit denen des Momentenellipsoids identisch, oder, was die Richtungen der Hauptachsen beider Ellipsoide anlangt, sind beide als identisch anzunehmen. Aber die Genauigkeit, die sich für diese Richtungen aus ihnen ergibt, ist beim Momentenellipsoid eine bedeutend größere als beim Streuungsellipsoid.

Immerhin schien es mir notwendig, für die große Differenz beim Knotenwert, die bei der Berechnung aus der Gruppe II 1888 Jänner 17 sich zeigt, eine Erklärung zu suchen. Da die anderen Werte nur geringere Abweichungen aufweisen, lag es nahe, den Fehler in den Größen μ_{02}, das ist den aus den Radialbewegungen abgeleiteten Streuungen zu vermuten. In der Tat zeigt die für diese Größe p. 17 [323] mitgeteilte Reihe, deren Einzelwerte

3622·1 3639·0 3836·6 8260·6 16109·0 5437·3 2310·4 2609·8 2412·0 1785·7 1858·9 1599·5 sind, in dem für 8^h auftretenden exzessiven Maximum von 16109·0 auf eine hier vorhandene Anomalie hin. Nun setzt sich dieses Maximum aus den folgenden Einzelzahlen zusammen:

				$\Delta \lg \rho =$	Differenz gegen den Mittelw.		Quadrat
7^h	Planet	61	Danae	+0·014		+0·0165	$272^1/_4$
	»	178	Tolosa	+0·012		+ 145	$210^1/_4$
	»	171	Ophelia	+0·000		+ 25	$6^1/_4$
	»	173	Ino	+0·012		+ 145	$210^1/_4$
	»	186	Celuta	+0·018		+ 205	$420^1/_4$
	»	214	Aschera	+0·001		+ 35	$12^1/_4$
8^h	»	41	Daphne	−0·037		− 345	$1190^1/_4$
	»	103	Hera	−0·008		− 55	$30^1/_4$
	»	125	Liberatrix	−0·005		− 25	$6^1/_4$
	»	195	Eurykleia	−0·012		− 95	$90^1/_4$
	»	248	Lameia	−0·022		− 195	$380^1/_4$
			Mittel	−0·0025		Summe	2828·75

aus welcher Quadratsumme durch Multiplikation mit $(7 \cdot 9157)^2$, wodurch $\Delta \lg \rho$ in $\frac{\Delta \rho}{\rho}$ — ausgedrückt in Bogenminuten — reduziert wird, und durch Division durch 11 die Zahl

16109·0

folgt. Man sieht aber, daß zu der Quadratsumme 2828·75 und damit zu dem Maximum 16109·0 der Planet (41) Daphne allein mit seiner exzessiv großen Radialbewegung von 0·037 fast die Hälfte beiträgt und wird daraus schließen, daß, wenn man diesen Planeten, der als eine Art Schnelläufer anzusehen ist, bei den weiteren Rechnungen unberücksichtigt läßt, eine bessere Übereinstimmung erzielt werden dürfte. Ich habe auch die Rechnung unter der Annahme wiederholt, daß statt

16109·0 bloß die Hälfte 8054·5

der richtige Wert sei und es zeigten sich schon da in den aus μ_{02} gerechneten Gleichungen recht beträchtliche Unterschiede. So fand sich, daß

statt + 22276·9 zu setzen ist	+20502·6,	ebenso statt +59558·2	+57783·9
+ 28129·5	20806·3	+75774·5	+68451·3
+ 5072·4	4115·6	+42085·2	+41128·4
+ 23887·0	19373·4	+23190·5	+18676·9
− 3382·5	776·5	− 6238·3	− 3633·3
− 7935·9	+ 6146·8	−16059·8	− 9913·0.

Die neuen Auflösungsresultate sind:

$\lg x = 3 \cdot 62873$ $\lg y = 3 \cdot 79722$ $\lg z = 3 \cdot 53457$ $\lg \xi = 3 \cdot 05058$ $\lg \eta = 2_n 62179$ $\lg \zeta = 2_n 91537$

$\lg A = 6 \cdot 38483$ $B = 6 \cdot 23739$ $C = 6 \cdot 49413$ $D = 5_n 72617$ $E = 5 \cdot 30972$ $F = 5 \cdot 44962$

ferner

$\lg a = 1 \cdot 73988$ $A_1 = 292° \ 57'8$ $D_1 = +71° \ 16'6$

$\lg b = 1 \cdot 79895$ $A_2 = 200 \ \ 2 \cdot 2$ $D_2 = - \ 0 \ \ 53 \cdot 2$

$\lg c = 1 \cdot 92150$ $A_3 = 109 \ \ 37 \cdot 0$ $D_3 = +18 \ \ 42 \cdot 0$

und sind schon oben in der 5. Kolonne unter dem Zeichen (II) mitgeteilt. Ihre Übereinstimmung mit den unter der Kolonne I für 1888 Jänner 17 angegebenen Zahlen ist eine bessere, speziell wird der große Knotenwert von 55° herabgedrückt bis auf 22° 57'8, das ist mehr als die Hälfte, aber sie bestätigen trotzdem das vorher ausgesprochene Ergebnis, daß die Genauigkeit, mit der aus dem Streuungsellipsoid die drei Hauptrichtungen dargestellt werden können, eine weitaus geringere ist, als der aus dem Momentenellipsoid abgeleiteten und lassen, was wohl das wesentlichste ist, außerdem erkennen, daß die Ursache dieses geringeren Grades an Genauigkeit in der fast gar nicht oder nur schwer kontrollierbaren Mitnahme auch nur eines Schnelläufers unter den Planeten zu suchen ist.

Auch hier läßt sich, ebenso wie oben p. 6 [312] im Falle des Momentenellipsoids leicht ein Beweis dafür erbringen, daß von den drei Hauptebenen des Streuungsellipsoids eine notwendigerweise mit der Bahnebene der Planeten zusammenfallen muß. Nimmt man nämlich zunächst an, daß keine Streuungen vorhanden, das heißt, daß alle $\mu_{01} = \mu_{00} = \mu_{11} = \mu_{02} = 0$ seien, was nichts anderes bedeutet, als daß die Einzelwerte der $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ und $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ in den Rektaszensionsstunden voneinander nicht abweichen, so geben die Gleichungen 13 als Auflösungsresultate

$$x = y = z = \xi = \eta = \zeta = 0.$$

Daraus folgen für die Koeffizienten der Ellipsoidgleichung die Relationen

$$D = \sqrt{BC} \qquad E = \sqrt{CA} \qquad F = \sqrt{AB},$$

so daß diese selbst übergeht in

$$(U\sqrt{A} + V\sqrt{B} + W\sqrt{C})^2 = 1,$$

was wieder auf das Zerfallen des Ellipsoids in das Paar paralleler Ebenen

$$U\sqrt{A} + V\sqrt{B} + W\sqrt{C} + 1 = 0 \qquad U\sqrt{A} + V\sqrt{B} + W\sqrt{C} - 1 = 0$$

hindeutet, die ihrerseits wieder der Ebene

$$U\sqrt{A} + V\sqrt{B} + W\sqrt{C} = 0$$

parallel laufen. Es ist klar, daß diese mit der Bahnebene der Planeten identisch sein muß, daß also im Grenzfall bei verschwindenden Unterschieden der Einzelwerte der a und d als der Koordinaten der Pole der Eigenbewegungen für das Momenten- und bei verschwindenden Streuungen für das Streuungsellipsoid beide in das gleiche Ebenenpaar zerfallen. Aber von da ab, wenn die Grenzannahme fallen gelassen wird, wird sich eine Differenz ergeben, die der Verschiedenheit der Rechnungsmethoden bei den Verwertungen dieser Unterschiede in den Einzelwerten der a und d und der Streuungen zuzuschreiben ist. Doch stets wird eine der Hauptebenen mit der Bahnebene zusammenfallen.

Schwieriger als die Identifizierung der Richtungen gestaltet sich die Frage nach der geometrischen Deutung der Längen der Achsen, die hier wohl gestellt werden muß, während sie im Falle des Momentenellipsoids ohne Belang zu sein scheint. Von den vielen möglichen Lösungen schien mir die folgende die plausibelste zu sein. Setzt man von den drei Achsen jene zwei, die nach der Sonne und ihrem Apex hinzeigen, das ist die Achsen b und c

$$b = K \cos \varepsilon \cos \lambda \qquad c = K \cos \varepsilon \sin \lambda$$

und die dritte, die nach dem Pole der Ekliptik gerichtet ist,

$$a = K \sin \varepsilon$$

und geht weiters von dem Begriff der Streuung aus als dem Maß der Wahrscheinlichkeit dafür, inwieweit einzelne Exemplare der Kollektivreihe sich von einem anzunehmenden Durchschnittswert entfernen, so kann man den Winkel ε definieren als die Streuung in Breite oder als die Ausbreitung, bis zu welcher sich die einzelnen Planeten von der Ekliptik entfernen, das heißt als die mittlere Breite des Schwarmes, in dem sie in dieser Ebene um die Sonne einherziehen, und ebenso den Winkel λ als die durchschnittliche Abweichung der Planeten in Länge, eine Abweichung, die wiederum von einer anzunehmenden mittleren Bewegung zu rechnen ist. Für diese zwei Winkel erhält man aus den Daten über die Größen a, b und c die Werte:

	1888 Jänner 17		1888 Mai 16	
	I	II	I	II
$\varepsilon = \pm$	26° 6′	27° 43′	23° 46′	25° 36′
$\lambda = \pm$	33 29	37 1	33 30	40 32
$\lg K =$	2·1325	2·0722	2·0520	2·0282.

7. Das Streuungsellipsoid für die Boss-Sterne nach der Charlier'schen Teilung in die 6 Sektorengruppen hat Wicksell in der anfangs zitierten Abhandlung berechnet. Ich habe die Rechnungen Wicksell's wiederholt, zunächst durchwegs mit Ausschließung der vier Polkalotten A_1 A_2 und F_1 F_2, so daß nur die Sektoren B, C, D und E berücksichtigt erscheinen und dann bei einer Teilung des Materials, analog wie bei der Bestimmung des Momentenellipsoids in drei Gruppen:

1. Gruppe I: Die bloß jene 24 Sektoren mitnimmt, welche auch in der früheren Rechnung p. 8 [314] als zu Gruppe I gehörig angenommen wurden,
2. Gruppe II: alle anderen 20 Sektoren,
3. Gruppe III: alle 44 Sektoren zusammen.

Die Ergebnisse dieser Rechnung, deren Detail hier nicht weiter angeführt werde, sind im Folgenden übersichtlich zusammengestellt in den Kolonnen mit den Zeichen I, II und III. Ferner ist hinzugefügt eine vierte Kolonne mit der Bezeichnung W, sie gibt die Rechnungsresultate Wicksell's und eine fünfte mit G bezeichnete, in der die Resultate angegeben werden, zu denen Gyllenberg bei der Berechnung des Streuungsellipsoids aus allen bekannten Radialbewegungen von Sternen gelangt.

	I	II	III	W	G
lg a	9·7462	9·7045	9·7296	9·7339	–
A_1	279° 41′	278° 13′	276° 7′	274° 18′	264° 6′
D_1	− 6 51	− 19 11	− 10 33	−12 24	− 5 12
lg b	9·8768	9·8481	9·8995	9·8975	–
A_2	357° 54′	212° 14′	339° 14′	339° 6′	336° 30′
D_2	+ 59 25	+ 49 25	+ 65 42	+ 62 30	+ 59 30
lg c	0·0672	9·9601	9·9850	9·9923	–
A_3	193° 36′	354° 39′	183° 54′	189° 12′	177° 6′
D_3	+ 29 39	+ 34 5	+ 23 12	+ 24 6	+ 29 54

Die Schlüsse, die sich aus den Angaben dieser Tafel ziehen lassen, sind die folgenden:

1. Die beiden Richtungen A_2 D_2 und A_3 D_3 in den zwei Gruppen I und II sind wiederum wie im Falle des Momentenellipsoids miteinander vertauscht. Eine Erklärung für diese Besonderheit läßt sich heute nicht geben. Sonst aber, abgesehen von dieser Vertauschung, stehen die Richtungen miteinander in guter Übereinstimmung und ebenso auch mit denen der Gruppe III.

2. Diese gute Übereinstimmung erstreckt sich auch auf die Zahlenwerte in den Kolonnen W und namentlich auch G, die ja aus einem wesentlich anderen Beobachtungsmaterial, nämlich den Radialbewegungen von etwa 1400 Sternen, abgeleitet sind.

3. Dagegen zeigt sich keine solche Übereinstimmung mehr beim Vergleich dieser Zahlen mit denen, die vorher für das Momentenellipsoid berechnet und sich p. 8 [314] vorfinden. Es gewinnt damit den Anschein, als ob die drei Vorzugsrichtungen, zu denen jedes der zwei Ellipsoide führt, und die sich für die Planeten als identisch erwiesen, für die Fixsterne nicht mehr identisch sind, oder als ob hier die Analogie zwischen den Bewegungen beider ihr Ende hat, vielmehr in dieser Tatsache der charakteristische Unterschied zwischen den Planeten und Fixsternen zu suchen ist.

Nimmt man dies vorerst als richtig an, so erscheint hiedurch die Gültigkeit der Schwarzschild'schen Ellipsoidhypothese erwiesen. Den Bewegungen der Fixsterne entsprechen tatsächlich zwei Apices, der eine identisch mit dem Sonnenapex nach der alten Definition, der zweite als der Vertex der Sternbewegungen. Aber jedem dieser zwei Apices kommen in Anlehnung an die Analogie mit den Bewegungen der Planeten außerdem noch je eine Richtung nach der Sonne oder dem Zentralkörper und ebenso je eine zweite nach dem Pole der Bahnebenen beider Bewegungen zu und Knoten und Neigung dieser zwei Ebenen sind genähert

1. für den Sonnenapex durch $\Omega = 235°$ $i = 52°$
2. » » Vertex » $\Omega = 280$ $i = 62$

dargestellt, von denen, wie man sieht, die zweite ganz mit der Ebene der Milchstraße zusammenfällt.

Indes müßte immerhin die Frage untersucht werden, ob diese Zweiteilung der Bewegungen eine notwendige Konsequenz der Ergebnisse der Rechnungen nach den zwei Ellipsoiden ist und ob sich nicht doch eine andere Erklärung für die da auftretende Differenz finden lasse. Ein Versuch einer solchen sei noch im Folgenden gegeben. Er geht von dem Gedanken aus, daß das charakteristische Merkmal, durch das sich die Ergebnisse der Rechnung nach den beiden Ellipsoiden voneinander unterscheiden, nicht so sehr in der Verschiedenheit der zwei Apices, als vielmehr in der Verschiedenheit der zwei aus diesen Rechnungen abgeleiteten Bahnebenen liege. Nimmt man nämlich als feststehend an, daß die Rektaszension des Apex, gleichgültig ob Sonnenapex oder Vertex, 270° ist, so folgt daraus schon nach den bekannten und oft benutzten Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \cos(A-\Omega)\cos D &= \cos(L-\Omega) \\ \sin(A-\Omega)\cos D &= \sin(L-\Omega)\cos i \\ \sin D &= \sin(L-\Omega)\sin i \end{aligned}$$

je nachdem, ob man die eine oder die andere Bahnebene der Rechnung zugrunde legt,

	I.		II.	
	$\Omega = 235°$	$i = 52°$	$\Omega = 280°$	$i = 62°$
Richtung nach Sonne	$A = 206$	$D = -31$	$A = 151°$	$D = -55°$
			oder $180+A = 331°$	$D = +55°$
	Apex $A' = 270°$	$D' = +36$	Vertex $A' = 270°$	$D' = -18°$

Richtungen, deren Übereinstimmung mit den Resultaten aus den Rechnungen auf Grund des Momentenellipsoids (I) und denen auf Grund des Streuungsellipsoids (II), wie nicht anders zu erwarten war, ganz augenfällig ist. Die erste Ebene wurde aus der Theorie des Momentenellipsoids auf Grund der Ansätze (siehe p. 19 [245] der zweiten Mitteilung

$$\begin{aligned} lX+mY+nZ &= 0 \\ l\Delta X+m\Delta Y+n\Delta Z &= 0 \end{aligned} \quad \text{sodann} \quad \begin{aligned} lx+my+nz &= 0 \\ l\Delta x+m\Delta y+n\Delta z &= 0 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} l\xi + m\eta + n\zeta &= 0 \\ l\Delta\xi + m\Delta\eta + n\Delta\zeta &= 0 \end{aligned}$$

gewonnen und stellt wohl die wahre Bahnebene vor, an deren Existenz zu zweifeln kein Grund vorliegt. Die zweite Ebene hat mit einem solchen Ansatze nichts zu tun. Ihr Zusammenfallen mit der Milchstraße, die als Ebene der größten Sternfülle, des Maximums der Dichte derselben definiert wird, weist vielmehr darauf hin, daß sie mehr von der Verteilung der Sterne im Raume abhängen dürfte, als von deren Bewegung.

Wenn daher für die Planeten beide Theorien, die des Momenten- wie die des Streuungsellipsoids, auf die gleiche Ebene führen, so liegt der Grund darin, daß ihre heliozentrische Verteilung eine gleichförmige ist. Wenn aber für die Fixsterne sich eine Verschiedenheit zwischen den beiden Ebenen ergibt, so ist die Ursache davon darin zu suchen, daß die Verteilung der Sterne in dem in Analogie mit dem Schwarm der Planeten anzunehmenden Haufen um den idealen Zentralpunkt derselben keine gleichförmige ist und es wird Aufgabe einer nächsten Untersuchung sein müssen, aus der Verschiedenheit zwischen dem reellen Apex und dem scheinbaren Vertex oder besser aus dem Unterschied zwischen den zwei Gleichungen des Momenten- und Streuungsellipsoids das Gesetz der Dichteverteilung der Sterne aufzustellen, was etwa in demselben Sinne zu verstehen ist, wie man in der Kollektivmaßlehre die Streuung einer Kollektivreihe als Maß für die Abweichung eines seiner Exemplare von einem mittleren Zustand, das heißt hier von dem der gleichförmigen Verteilung, ansieht.

3. Die Spezialgruppe der B-Sterne.

8. Das folgende Schlußkapitel befaßt sich mit einer Spezialuntersuchung über die Eigen- und Radialbewegungen der Sterne vom Spektraltypus B. Wenn gerade diese Gruppe gewählt wurde, um wie in der Einleitung hervorgehoben wurde, ein Musterbeispiel zu geben, nach dem in Zukunft alle Untersuchungen über die Bewegungen der Sterne durchzuführen sind, so war hiefür der Umstand maßgebend, daß diese Sterne, was ihre Verteilung am Himmel anlangt, in einem der Milchstraße parallel laufenden Gürtel liegen, und daher die Wahrscheinlichkeit, daß für sie das Prinzip der Analogie zwischen ihren Bewegungen und denen im Schwarm der kleinen Planeten auf richtige Resultate führt, eine viel größere ist als für irgend eine andere Gruppe von Sternen.

Ein kleiner Teil der nachfolgenden Untersuchungen, namentlich jener, die sich auf die harmonische Analyse der Eigen- und Radialbewegungen dieser Sterne erstrecken, ist schon in den Astronomischen Nachrichten Nr. 4822, Bd. 201, veröffentlicht. Hier folgt noch die Ergänzung dieser Rechnungen durch Aufstellung der Gleichungen des Momenten- und Streuungsellipsoids.

Das Material hiezu entnahm ich, was die Radialbewegungen der Sterne anlangt, den zwei schon in meiner zweiten Mitteilung zitierten Lick-Bulletins, Nr. 195 aus dem Jahre 1911 und Nr. 229 aus dem Jahre 1913. Das erstere enthält die Daten über 225 Sterne, aus dem zweiten kamen noch 8 dazu, so daß im ganzen 233 Sterne in die Rechnung einbezogen erscheinen. Ihre Eigenbewegungen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ wurden dem Generalkatalog von Boss entnommen.

Die aus diesen Daten zunächst zu berechnenden Werte und die Mittel der Eigenbewegungen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$, beide seien ausgedrückt in $0\rlap{.}''001$ als Einheit, dann die $\Delta\rho$ als Mittel der Radialbewegungen dargestellt in Kilometersekunden, sowie endlich die Streuungen μ_{01}, μ_{10} und μ_{11}, in $0\cdot000001$ als Einheit und μ_{02} in (Kilometersekunden)^2 Zur Transformation der $\Delta\rho$ sowie der μ_{02}, deren Einheit die Kilometersekunde ist, in die astronomisch gebräuchlichen Zeit- und Distanzeinheiten, sind sie mit $365\cdot25.24.60.60$ und mit π, das ist der mittleren Parallaxe der Sterne, zu multiplizieren und durch 149480000 zu dividieren. Dies gibt für den Logarithmus der Transformationszahl

$$(9\cdot32452)\pi$$

Als gemeinschaftliche Parallaxe der Sterne nahm ich die Zahl $\pi = 0\rlap{.}''0142$ an, gegenüber dem Wert $0\rlap{.}''015$, der sich aus den Rechnungen in meiner II. Mitteilung ergab, da mit ihr reduziert, der Umwandlungsfaktor sehr einfach, nämlich

$$0\rlap{.}''003$$

wird und daher der gleiche Faktor für die Streuung im Radiusvektor, μ_{02},

$$0\cdot000009.$$

Eine Zusammenstellung der einzelnen Daten gibt die folgende Tafel:

α	Zahl der Sterne	Mittleres δ	$\cos\delta\Delta\alpha$ 0"001	$\cos^2\delta\Delta\alpha$ 0"001	$\Delta\delta$ 0"001	$\Delta\rho$ *km*/sek.	$\frac{\Delta\rho}{\rho}$ 0"001	μ_{01} 10^{-6}	μ_{10} 10^{-6}	μ_{11} 10^{-6}	μ_{02} *km*/sek.^{2}	μ_{02} 10^{-6}
0	12	+ 17° 40'	+28·93	+18·48	−7·00	− 1·51	− 4·53	+ 770	+ 288	− 157	+ 87·6	+ 788
2	11	+ 0 32	+12·59	+ 4·90	−12·09	+ 7·48	+22·44	1060	153	+ 296	109·0	981
4	28	+ 18 11	+19·73	+15·70	−20·93	+10·65	+31·95	461	425	− 87	56·0	504
6	36	− 11 23	− 4·06	− 2·80	− 7·78	+24·01	+72·03	226	994	− 258	62·7	564
8	19	− 42 29	−16·98	−12·35	+ 3·90	+21·10	+63·30	180	256	− 58	58·9	530
10	18	− 42 55	−26·15	−16·17	− 5·33	+20·03	+60·09	189	253	+ 8	58·4	526
12	18	− 54 11	−44·86	−28·77	−16·83	+12·32	+36·96	959	180	− 156	117·4	1057
14	21	− 37 25	−34·67	−24·88	−30·48	+ 4·80	+14·40	436	95	− 11	95·3	858
16	19	− 31 37	− 8·63	− 6·62	−26·26	− 0·01	− 0·03	355	428	− 65	95·3	858
18	20	− 15 17	− 1·58	− 0·46	−24·15	− 4·81	−14·43	150	636	+ 107	83·9	755
20	20	+ 11 24	+ 9·18	+ 7·51	−11·30	−14·62	−43·86	422	454	− 6	116·2	1046
22	11	+ 39 25	+ 9·17	+ 6·08	− 5·45	− 5·92	−17·76	134	77	− 43	116·2	1046

Als erste Aufgabe betrachtete ich die der Berechnung des Sonnenapex nach der Methode von Airy. Sie erfolgte genau nach den Formeln 5) und 6) p. 11 [317], die bei der gleichen Rechnung für die Planeten verwendet wurde und lieferte die Normalgleichungen:

a) Aus den Eigenbewegungen in Rektaszension allein, das ist $\Delta\alpha$

$$6\,\Delta X = +0"00541 \qquad 6\,\Delta Y = -0"17255,$$

b) aus denen in Deklinationen, $\Delta\delta$

$$\begin{aligned} +2\cdot6888\,\Delta X - 0\cdot8475\,\Delta Y - 2\cdot9342\,\Delta Z &= -0"04274 \\ -0\cdot8475\,\Delta X + 2\cdot0879\,\Delta Y + 2\cdot0848\,\Delta Z &= +0\cdot02337 \\ -2\cdot9342\,\Delta X + 2\cdot0848\,\Delta Y + 7\cdot2232\,\Delta Z &= +0\cdot13716, \end{aligned}$$

c) endlich aus den Radialbewegungen, $\frac{\Delta\rho}{\rho}$

$$\begin{aligned} +3\cdot3111\,\Delta X + 0\cdot8475\,\Delta Y + 2\cdot9342\,\Delta Z &= +0"08104 \\ +0\cdot8475\,\Delta X + 3\cdot9120\,\Delta Y - 2\cdot0848\,\Delta Z &= -0\cdot18234 \\ +2\cdot9342\,\Delta X - 2\cdot0848\,\Delta Y + 4\cdot7768\,\Delta Z &= +0\cdot22735. \end{aligned}$$

Da die letzte Gruppe der Gleichungen wegen Verschwindens der Derminante ihrer Koeffizienten nicht auflösbar ist, so verwendete ich sie alle nur in der Art, daß ich aus ihnen durch einfaches Summieren zwei neue Gruppen ableitete:

a) Durch Summierung der Gleichungen für $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$

$$\begin{aligned} 8\cdot6888\,\Delta X - 0\cdot8475\,\Delta Y - 2\cdot9342\,\Delta Z &= -0"03733 \\ -0\cdot8475\,\Delta X + 8\cdot0879\,\Delta Y + 2\cdot0848\,\Delta Z &= -0\cdot14918 \\ -2\cdot9342\,\Delta X + 2\cdot0848\,\Delta Y + 7\cdot2232\,\Delta Z &= +0\cdot13716, \end{aligned}$$

b) durch Summierung aller drei Gruppen $\left(\Delta\alpha, \Delta\delta \text{ und } \frac{\Delta\rho}{\rho}\right)$

$$+12\,\Delta X = +0''04371$$
$$+12\,\Delta Y = -0\cdot33152$$
$$+12\,\Delta Z = +0\cdot36451$$

und so erhielt

$$a)\quad A' = 275°\ 33' \qquad D' = +47°\ \ 6' \qquad \lg G = 8\cdot5708$$
$$b)\quad\ \ = 277\ \ 31 \qquad\ \ = +47\ \ 28 \qquad\quad = 8\cdot6151$$

als Rektaszension A', Deklination D' des Sonnenapex, sowie G die Geschwindigkeit der Sonne. Um auch noch den Einfluß zu konstatieren, den eine andere Annahme über die Parallaxe der Sterne als die oben verwendete $\pi = 0''0142$ bei der Reduktion der $\Delta\rho$ in Bogensekunden auf das Ergebnis der Rechnung hat, reduzierte ich die Gleichungen für $\Delta\rho$ nochmals unter der speziellen Annahme $\pi = 0''0071 = \frac{1}{2}\,.0''0142$. Es treten dann auf der rechten Seite der Gleichungen an Stelle von

$$+0''08104 \quad -0''18234 \quad +0''22735$$

die Zahlen

$$+0\cdot04052 \quad -0\cdot09117 \quad +0\cdot11367$$

auf, die Normalgleichungen, Gruppe *b)*, gehen über in

$$12\,\Delta X = +0''00319 \quad 12\,\Delta Y = -0''24035 \quad 12\,\Delta Z = +0''25083$$

und geben nunmehr

$$c)\quad A' = 270°\ 46' \quad D' = +46°\ 13' \quad \lg G = 8\cdot4617.$$

Der nächste Schritt erstrecke sich auf die Bestimmung der mittleren Bahnebene der Sterne und des für sie charakteristischen Momentenellipsoids, beides durchgeführt nach den Formeln 1, 2 und 3, p. 3 [309]. Die Einzelwerte der Größen a und d als der Koordinaten der Pole der Eigenbewegung und der aus ihnen abzuleitenden ☊ und i für die Bahnebene sind:

α	a	d	☊	i	α	a	d	☊	i
0^h	130° 3'	+ 63° 40'	220° 3'	26° 20'	12^h	337° 7'	− 33° 37'	247° 7'	56° 23'
2	120 13	+ 22 4	210 13	67 56	14	331 1	− 34 42	241 1	55 18
4	163 50	+ 36 4	253 50	53 56	16	338 49	− 13 59	248 49	76 1
6	184 9	− 19 44	94 9	70 16	18	0 26	− 1 34	270 26	88 26
8	318 49	− 45 57	228 49	44 3	20	37 38	+ 33 22	127 38	56 38
10	310 29	− 45 21	220 29	44 39	22	102 34	+ 39 28	192 34	50 32

Sie stehen mit Ausnahme der zwei Werte für $\alpha = 6^h$ und $\alpha = 20^h$, die auch hier auf das Vorhandensein der Gruppe II der Sterne hinweisen, untereinander in recht guter Übereinstimmung und geben mit Ausschluß dieser zwei als Mittel

$$☊ = 233°\ 20' \quad i = 57°\ 26'.$$

Aus den Werten a und d, ohne Ausschluß irgend eines unter ihnen erhielt ich für die Koeffizienten der Gleichung des Momentenellipsoids

$$A = +5\cdot6544 \qquad D = +2\cdot7200$$
$$B = +2\cdot5215 \qquad E = -2\cdot0945$$
$$C = +3\cdot8244 \qquad F = -1\cdot6982$$
$$A+B+C = 12$$

und endlich für die Größen und Richtungen seiner Hauptachsen, die ersteren schon auf die Einheit, das ist die Annahme $A+B+C = 1$ reduziert:

$$\lg a = 0\cdot7521 \qquad A_1 = 276°\ 57' \qquad D_1 = +38°\ 0'$$
$$b = 0\cdot2931 \qquad A_2 = 209\ \ 51 \qquad D_2 = -33\ \ 0$$
$$c = 0\cdot0746 \qquad A_3 = 326\ \ 34 \qquad D_3 = -34\ \ 42.$$

Die erste Richtung — die der größten Achse — ist die nach dem Sonnenapex. Sie stimmt mit der nach der Airy'schen Methode gefundenen recht gut. Die dritte, die der kürzesten Achse, weist nach dem Pole der Bahnebene hin und gibt für deren Knoten und Neigung

$$\Omega = 236°\ 34' \qquad i = 55°\ 18',$$

die ihrerseits mit dem eben erhaltenen einfachen Mittelwert

$$\Omega = 233°\ 20' \qquad i = 57°\ 26'$$

gut übereinstimmen. Die zweite Richtung, der mittleren Achse, stellt die Richtung nach der Sonne vor, gesehen von dem idealen Bewegungszentrum aus. Auch sie, ebenso wie die Größen der Achsen selbst, stehen mit allen früheren für sie abgeleiteten Resultaten in bestem Einklang.

Mit der Kenntnis der Lage der Bahnebene ist in Durchführung der weiteren Rechnung die Möglichkeit geboten, die Eigenbewegungen, die bisher als $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ in Bezug auf den Äquator gegeben sind, in Länge und Breite, $\Delta\lambda$ und $\Delta\beta$ zu transformieren. Die hieraus resultierenden Werte, zu denen noch zu bemerken ist, daß ihre Transformation unter Anwendung von

$$\Omega = 234°\ 40' \qquad i = 53°\ 0'$$

durchgeführt wurde, sind:

α	λ	β	$\cos^2\beta\,\Delta\lambda$ 0"001	$\Delta\beta$ 0"001	$\cos^2\beta\,\Delta\rho$ *km*/sek.	α	λ	β	$\cos^2\beta\,\Delta\lambda$ 0"001	$\Delta\beta$ 0"001	$\cos^2\beta\,\Delta\rho$ *km*/sek.
0^h	2° = 0°	−26° 0'	+26·13	+ 8·85	− 1·22	12^h	165° = 180	− 6° 8'	−47·29	+ 5·94	+12·18
2	38 30	−19 8	+16·39	+ 1·93	+ 6·68	14	201 210	− 5 47	−45·39	+ 4·10	+ 4·75
4	43 60	+15 0	+27·35	+ 4·15	+ 9·94	16	231 240	−22 14	−24·98	− 6·03	− 0·01
6	87 90	+19 31	+ 2·31	− 8·42	+22·98	18	273 270	−37 11	−16·47	−12·60	− 3·06
8	126 120	+ 7 24	−17·13	− 2·03	+19·78	20	294 300	−36 20	+ 2·98	−14·09	− 5·62
10	149 150	− 9 56	−26·08	− 3·35	+19·43	22	332 330	−13 26	+ 9·31	− 4·73	− 5·61

Die harmonische Analyse der Zahlen in den Kolonnen 4 und 6 lieferte die zwei Fourier'schen Reihen

$$\begin{aligned}\cos^2\beta\,\Delta\lambda = &-0"007740\\ &-0\cdot039900\cos(\lambda-197°\ 41')\\ &-0\cdot004046\cos(2\lambda-351\ \ 10)\\ &-0\cdot001909\cos(3\lambda-625\ \ 3)\\ &-0\cdot004291\cos(4\lambda-795\ \ 17)\\ &-0\cdot004358\cos(5\lambda-912\ \ 57)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^2\beta\,\Delta\rho = &+6\cdot685\\ &-13\cdot586\sin(\lambda-210°\ 18')\\ &-1\cdot692\sin(2\lambda-304\ \ 21)\\ &-0\cdot413\sin(3\lambda-484\ \ 9)\\ &-1\cdot068\sin(4\lambda-824\ \ 22)\\ &-1\cdot535\sin(5\lambda-906\ \ 52).\end{aligned}$$

Beide sollen nach den Entwicklungen in meiner II. Abhandlung, was ihre Koeffizienten wie auch was in ihnen vorkommenden Winkelgrößen anlangt, identisch sein. Tatsächlich erhält man vorerst aus den letzteren für den Winkel L, der die Länge der Sonne in der angenommenen Bahnebene bedeutet, die Einzelwerte

$L =$	197° 41′	210° 18′
	175 35	152 11
	208 21	161 23
	198 49	206 5
	182 35	181 22
im Mittel . .	192 36	182 16,

die mit den in meiner II. Mitteilung p. 30 [256] gefundenen

197° 12′, 187° 27′ und 183° 33′

zu vergleichen sind. Die Koeffizienten der Reihe für $\cos^2\beta\Delta\rho$, die in Kilometersekunden ausgedrückt sind, müssen in die gebräuchlichen astronomischen Einheiten verwandelt werden. Dies geschieht durch Multiplikation mit 0·211115, woraus

$$
\begin{aligned}
\cos^2\Delta\rho = &+1\cdot4113\\
&-2\cdot8681\sin(\lambda-210°\ 18')\\
&-0\cdot3571\sin(2\lambda-304\ \ 21)\\
&-0\cdot0872\sin(3\lambda-484\ \ \ 9)\\
&-0\cdot2308\sin(4\lambda-824\ \ 22)\\
&-0\cdot3167\sin(5\lambda-906\ \ 52)
\end{aligned}
$$

folgt und nun gibt ihr Vergleich mit denen der Entwicklung für $\cos^2\beta\Delta\lambda$ für die Parallaxe der B-Sterne

$$
\begin{aligned}
0''033900 : 2\cdot8681 &= 0''0118,\\
0\cdot004046 : 0\cdot3571 &= 0\cdot0113\\
0\cdot001909 : 0\cdot0872 &= 0\cdot0219\\
0\cdot004291 : 0\cdot2308 &= 0\cdot0186\\
0\cdot004358 : 0\cdot3167 &= 0\cdot0137,
\end{aligned}
$$

deren Mittel $\pi = 0''0155$ (oben mit $0''0142$ angesetzt) schon früher vorweggenommen wurde. Reduziert man ferner die Reihe für $\cos^2\beta\Delta\rho$ mit dem Parallaxenwert $0''0118$, so folgen die zwei nunmehr vollständig parallel laufenden Reihen:

$$
\begin{aligned}
\cos^2\beta\Delta\lambda = &\\
&-0''033900\cos(\lambda-197°\ 41')\\
&-0\cdot004046\cos(2\lambda-351\ \ 10)\\
&-0\cdot001909\cos(3\lambda-625\ \ \ 3)\\
&-0\cdot004291\cos(4\lambda-795\ \ 17)\\
&-0\cdot004358\cos(5\lambda-912\ \ 57)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\pi\cos^2\beta\Delta\rho = &\\
&-0''033900\sin(\lambda-210°\ 18')\\
&-0\cdot004224\sin(2\lambda-304\ \ 21)\\
&-0\cdot001031\sin(3\lambda-484\ \ \ 9)\\
&-0\cdot002666\sin(4\lambda-824\ \ 22)\\
&-0\cdot003831\sin(5\lambda-906\ \ 52).
\end{aligned}
$$

Endlich resultieren aus dem Werte für L und $L' = L + 90$ als der Bewegungsrichtung der Sonne in ihrer Bahnebene — wiederum nach den bekannten und oft zitierten Transformationsformeln. Rektaszension und Deklination der Sonne, sowie ihres Apex — zu:

$L =$	183° 0′	190° 0′	197° 0′
$A =$	197 24	203 55	209 45
$D =$	− 38 47	− 34 9	− 28 13
$A' =$	260 7	266 0	272 36
$D' =$	+ 29 42	+ 34 37	+ 39 13,

von denen der letzte $\alpha = 197°$ entsprechende den aus der Airy'schen Methode sowie den aus der Gleichung des Momentenellipsoids gefundenen Apexwerten am nächsten kommt.

Die letzte Aufgabe sei die Berechnung des Streuungsellipsoids. Genau nach den Formeln p. 16 [322] vorgehend, gelangt man zu den folgenden vier Gruppen von Normalgleichungen:

a) aus der Streuung in $\Delta\alpha$ allein, das ist aus μ_{01}:

$$1)\quad +4\cdot5000\,x+1\cdot5000\,y = +1894\cdot2$$
$$2)\quad +1\cdot5000\,x+4\cdot5000\,y = +3447\cdot8$$
$$6)\quad +6\cdot0000\,\zeta = -1202\cdot2$$

b) aus der Streuung in α und δ, das ist aus μ_{11}:

$$1)\quad +0\cdot5543\,x-0\cdot5443\,y -0\cdot3084\,\xi-0\cdot6693\,\eta+0\cdot0764\,\zeta = +\ 65\cdot8$$
$$2)\quad -0\cdot5443\,x+0\cdot5543\,y +0\cdot3084\,\xi+0\cdot6693\,\eta+0\cdot0764\,\zeta = -\ 65\cdot8$$
$$4)\quad -0\cdot3084\,x+0\cdot3084\,y +3\cdot3111\,\xi-0\cdot8475\,\eta-1\cdot5957\,\zeta = +\ 211\cdot0$$
$$5)\quad -0\cdot6693\,x+0\cdot6693\,y -0\cdot8475\,\xi+3\cdot9120\,\eta+1\cdot4687\,\zeta = +\ 187\cdot7$$
$$6)\quad +0\cdot0764\,x+0\cdot0764\,y -1\cdot5957\,\xi+1\cdot4687\,\eta+2\cdot5597\,\zeta = +\ 190\cdot0$$

c) aus der Streuung in $\Delta\delta$ allein, das ist aus μ_{10}:

$$1)\quad +1\cdot1433\,x+0\cdot3040\,y+1\cdot2417\,z+0\cdot5634\,\xi-2\cdot2739\,\eta-0\cdot6055\,\zeta = +\ 561\cdot4$$
$$2)\quad +0\cdot3040\,x+0\cdot7275\,y+1\cdot0564\,z+1\cdot5805\,\xi-0\cdot7850\,\eta-0\cdot6070\,\zeta = +\ 995\cdot8$$
$$3)\quad +1\cdot2417\,x+1\cdot0564\,y+4\cdot9250\,z+2\cdot0257\,\xi-2\cdot8100\,\eta-0\cdot4825\,\zeta = +2678\cdot3$$
$$4)\quad +0\cdot5634\,x+1\cdot5805\,y+2\cdot0257\,z+4\cdot2255\,\xi-0\cdot9650\,\eta-1\cdot5702\,\zeta = +2415\cdot1$$
$$5)\quad -2\cdot2739\,x-0\cdot7850\,y-2\cdot8100\,z-0\cdot9650\,\xi+4\cdot9666\,\eta+1\cdot1268\,\zeta = -1168\cdot7$$
$$6)\quad -0\cdot6055\,x-0\cdot6070\,y-0\cdot4825\,z-1\cdot5702\,\xi+1\cdot2268\,\eta+1\cdot2160\,\zeta = -\ 484\cdot5$$

d) aus der Streuung in den Radialbewegungen, das ist μ_{02}:

$$1)\quad +1\cdot3738\,x+0\cdot6955\,y+1\cdot2417\,z-0\cdot0534\,\xi+2\cdot2560\,\eta+0\cdot9367\,\zeta = +2830\cdot3$$
$$2)\quad +0\cdot6955\,x+2\cdot1600\,y+1\cdot0564\,z-1\cdot9723\,\xi+0\cdot3534\,\eta+1\cdot2408\,\zeta = +2812\cdot3$$
$$3)\quad +1\cdot2418\,x+1\cdot0565\,y+2\cdot4785\,z-2\cdot1439\,\xi+3\cdot0590\,\eta-0\cdot4825\,\zeta = +3869\cdot9$$
$$4)\quad -0\cdot0534\,x-1\cdot9723\,y-2\cdot1439\,z+4\cdot2257\,\xi-0\cdot9650\,\eta+1\cdot1067\,\zeta = -2879\cdot0$$
$$5)\quad +2\cdot2560\,x+0\cdot3534\,y+3\cdot0590\,z-0\cdot9650\,\xi+4\cdot9669\,\eta-0\cdot1068\,\zeta = +5107\cdot5$$
$$6)\quad +0\cdot9367\,x+1\cdot2408\,y-0\cdot4825\,z+1\cdot1067\,\xi-0\cdot1068\,\eta+2\cdot7817\,\zeta = +1328\cdot6.$$

Einerseits wegen der Ungleichförmigkeit der Koeffizienten in ihnen, andrerseits, da sich aus den Gleichungen für μ_{02} die Unbekannten nicht bestimmen lassen, da die Determinante der Koeffizienten identisch verschwindet, leitete ich aus ihnen durch einfache Summierung zwei neue Gruppen ab, und zwar Gruppe I durch Summieren der für μ_{01}, μ_{11} und μ_{10} geltenden und Gruppe II durch Summierung aller.

$$
\text{I.}\quad
\begin{array}{l}
+6\cdot1967\,x+1\cdot2597\,y+1\cdot2417\,z+0\cdot2550\,\xi-2\cdot9424\,\eta-0\cdot5291\,\zeta=+2521\cdot4\\
+1\cdot2597\,x+5\cdot7797\,y+1\cdot0564\,z+1\cdot8889\,\xi-0\cdot1158\,\eta-0\cdot5106\,\zeta=+4377\cdot8\\
+1\cdot2417\,x+1\cdot0564\,y+4\cdot9250\,z+2\cdot0257\,\xi-2\cdot8095\,\eta-0\cdot4825\,\zeta=+2678\cdot3\\
+0\cdot2550\,x+1\cdot8889\,y+2\cdot0257\,z+7\cdot5367\,\xi-1\cdot8125\,\eta-3\cdot1659\,\zeta=+2626\cdot1\\
-2\cdot9424\,x-0\cdot1158\,y-2\cdot8095\,z-1\cdot8125\,\xi+8\cdot8788\,\eta+2\cdot5949\,\zeta=-981\cdot0\\
-0\cdot5291\,x-0\cdot5106\,y-0\cdot4825\,z-3\cdot1659\,\xi+2\cdot5949\,\eta+9\cdot7757\,\zeta=-1496\cdot7
\end{array}
$$

$$
\text{II.}\quad
\begin{array}{l}
+7\cdot5713\,x+1\cdot9552\,y+2\cdot4835\,z+0\cdot2016\,\xi-0\cdot6864\,\eta+0\cdot4075\,\zeta=+5351\cdot7\\
+1\cdot9552\,x+7\cdot9397\,y+2\cdot1129\,z-0\cdot0833\,\xi+0\cdot2376\,\eta+0\cdot7302\,\zeta=+7190\cdot1\\
+2\cdot4835\,x+2\cdot1129\,y+7\cdot4034\,z-0\cdot1182\,\xi+0\cdot2495\,\eta-0\cdot9650\,\zeta=+6548\cdot2\\
+0\cdot2016\,x-0\cdot0833\,y-0\cdot1182\,z+11\cdot7624\,\xi-2\cdot7775\,\eta-2\cdot0592\,\zeta=-252\cdot9\\
-0\cdot6864\,x+0\cdot2376\,y+0\cdot2495\,z-2\cdot7775\,\xi+13\cdot8457\,\eta+2\cdot4880\,\zeta=+4126\cdot5\\
+0\cdot4075\,x+0\cdot7302\,y-0\cdot9650\,z-2\cdot0592\,\xi+2\cdot4880\,\eta+12\cdot5573\,\zeta=-168\cdot1
\end{array}
$$

Sie gaben als Auflösungsresultate

	I	II
$\lg x =$	$2\cdot4313$	$2\cdot5900$
$y =$	$2\cdot7739$	$2\cdot8216$
$z =$	$2\cdot5976$	$2\cdot7360$
$\xi =$	$1\cdot9014$	$1\cdot6382$
$\eta =$	$2\cdot2007$	$2\cdot5039$
$\zeta =$	2_n0182	1_n8967

sodann für die Koeffizienten in der Gleichung des Streuungsellipsoids

	I	II
$\lg A =$	$7\cdot7590$	$7\cdot7318$
$B =$	$7\cdot3114$	$7\cdot2579$
$C =$	$7\cdot5741$	$7\cdot5775$
$D =$	6_n9799	6_n8011
$E =$	7_n4107	7_n5090
$F =$	$7\cdot1313$	$6\cdot9316$

und damit nach Auflösung der Gleichungen dritten Grades die Hauptachsen und ihre Richtungen:

	I	II
$\lg a =$	$1\cdot0493$	$1\cdot0461$
$A_1 =$	$281°\ 20'$	$272°\ 36'$
$D_1 =$	$-\ 11\ \ 17$	$12\ \ 23$
$\lg b =$	$1\cdot3509$	$1\cdot4150$
$A_2 =$	$354°\ 51'$	$349°\ 18'$
$D_2 =$	$+\ 54\ \ 34$	$+\ 50\ \ 27$
$\lg c =$	$1\cdot4001$	$1\cdot4507$
$A_3 =$	$198°\ 42'$	$191°\ 48'$
$D_3 =$	$+\ 33\ \ \ 3$	$+\ 37\ \ 21$

Sie stehen, wie man sieht, mit den von Charlier und seinen Schülern gefundenen und p. 2[308] mitgeteilten Werten in bester Harmonie, weichen aber von den Ergebnissen der Rechnungen auf Grund des Momentenellipsoids in demselben Sinne ab. Was dort in Bezug auf die möglichen Ursachen dieser Abweichung gesagt wurde, dürfte auch hier seine Gültigkeit haben, nämlich, daß, da es nicht angehe, diese Abweichung einzig der größeren Ungenauigkeit zuzuschreiben, die den Berechnungen nach dem Streuungsellipsoid gegenüber denen nach dem Momentenellipsoid anhaftet, hier vielmehr ein prinzipieller Unterschied vorliege, der aller Wahrscheinlichkeit nach seine Ursache hat in der Verschiedenheit der zwei Definitionen des Wortes »Milchstraße« einmal als der mittleren Bahnebene der Sterne und zweitens als der Ebene der größten Sternfülle.