ÜBER DIE DARSTELLUNG GEGEBENER FUNKTIONEN DURCH SINGULÄRE INTEGRALE

1. MITTEILUNG

VON

HANS HAHN

(BONN)

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 30. MÄRZ 1916

Bekanntlich führen viele Probleme der Analysis auf die Frage, ob für einen gegebenen »Kern« $\varphi(\xi, x, n)$ und eine (unter gewissen Beschränkungen verschiedener Art) willkürliche Funktion $f(\xi)$ die Beziehung gilt:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = f(x). \tag{1}$$

Soll diese Formel insbesondere an allen Stetigkeitsstellen von $f(\xi)$ bestehen, und gehören zu den zugelassenen Funktionen f speziell auch diejenigen, die in einem Intervalle $= 1$, außerhalb dieses Intervalles $= 0$ sind, so muß der Kern $\varphi(\xi, x, n)$ folgende Eigenschaft haben: für jedes Intervall I, das den Punkt x im Inneren enthält, ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_I \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 1,$$

während, wenn x außerhalb I liegt:

$$\lim_{n=\infty} \int_I \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0$$

ist. Das in Formel (1) auftretende Integral heißt dann ein singuläres Integral mit der singulären Stelle x.

Eine umfassende Untersuchung solcher singulärer Integrale rührt von H. Lebesgue her.[1] An die Ergebnisse dieser Untersuchung wird hier angeknüpft. Wir stellen der von Lebesgue mit großer Vollständigkeit gelösten Frage, für welche Kerne die Beziehung (1) an allen Stetigkeitsstellen von $f(\xi)$ gilt, die Frage an die Seite, für welche Kerne die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = f^{(m)}(x) \tag{2}$$

überall dort gilt, wo die m-te Ableitung $f^{(m)}(x)$ von $f(x)$ existiert. Dabei legen wir dem Begriffe der m-ten Ableitung nicht die übliche Definition zugrunde: »$f^{(m)}(x)$ ist die erste Ableitung von $f^{(m-1)}(x)$«, sondern

[1] Annales de Toulouse, Serie 3, Bd. 1, p. 25 ff. — Kurz vorher hatte einige hieher gehörige Theoreme bewiesen E. W. Hobson Proc. of the London math. Soc. Serie 2, Bd. 6, p. 349.

wir definieren in weiter tragender Weise[1]: existieren an der Stelle x die Ableitungen bis zur $(m-1)$-ten Ordnung und gilt die Entwicklung:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\ldots+\frac{h^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(x)+a.h^m+\omega(h).h^m,$$

wo a eine Konstante und $\lim\limits_{h=0}\omega(h)=0$ ist, so wird die m-te Ableitung definiert durch $f^{(m)}(x)=m!.a$.

Aus der Beantwortung der Frage nach der Gültigkeit von (2) lassen sich einerseits nun Bedingungen herleiten, unter denen (1) nicht nur an allen Stetigkeitsstellen von $f(\xi)$ gilt, sondern überall dort, wo $f(\xi)$ m-te Ableitung jener Funktion ist, die aus $f(\xi)$ durch m hintereinander ausgeführte unbestimmte Integrationen entsteht[2]; andrerseits gewinnt man aus der Beantwortung unserer Frage Bedingungen, unter denen Beziehung (1) m-mal nach x differenziert werden darf, und zwar in der Weise, daß man auf der linken Seite unter dem Integralzeichen differenziert.

Nach diesen allgemeinen Untersuchungen werden nun drei Typen singulärer Integrale näher betrachtet, die ich als den Stieltjes'schen Typus, den Weierstrass'schen Typus und den Poisson'schen Typus bezeichne. Der erste dieser Typen führt nämlich in einem besonders einfachen Falle auf eine Formel, die in einem Briefe von Stieltjes an Hermite enthalten ist, und die mit Formeln von Laplace und Darboux in engem Zusammenhange steht.[3] Der zweite dieser Typen diente Weierstrass zu seinem berühmten Beweise, daß jede stetige Funktion unbeschränkt durch Polynome approximierbar ist. Der dritte endlich enthält als Spezialfall das bekannte Poisson'sche Integral, das die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie für den Kreis löst und auf die sogenannte Poisson'sche Summierung nicht konvergenter Fourier'scher Reihen führt. Ein noch einfacherer Fall dieses dritten Typus liefert eine Formel, die als das Analogon der Poisson'schen Summierung für das Fourier'sche Integraltheorem betrachtet werden kann, da sie aus der Poisson'schen Summierung der Fourier'schen Reihe durch denselben Grenzübergang hergeleitet werden könnte, durch den die Fourier'sche Reihe ins Fourier'sche Integral übergeht.

§ 1. Einige Sätze von Lebesgue und ihre Übertragung auf unendliche Intervalle.

Sei $<a, b>$ ein endliches Intervall[4]: $a\leqq x\leqq b$. Wir bezeichnen im Folgenden: mit $\mathfrak{F}_1$ die Klasse aller in $<a, b>$ integrierbaren[5] Funktionen; mit $\mathfrak{F}_2$ die Klasse aller in $<a, b>$ meßbaren Funktionen, deren Quadrat in $<a, b>$ integrierbar ist; mit $\mathfrak{F}_3$ die Klasse aller in $<a, b>$ geschränkten, meßbaren Funktionen; mit $\mathfrak{F}_4$ die Klasse aller Funktionen, die in $<a, b>$ nur Unstetigkeiten erster Art besitzen.[6]

Es bedeute $\varphi(\xi, n)$ eine für alle ξ von $<a, b>$ und alle nicht negativen ganzzahligen n definierte, als Funktion von ξ in $<a, b>$ integrierbare Funktion. Wir setzen (allemal wenn dieses Integral existiert):

$$I_n(f)=\int_a^b f(\xi)\,\varphi(\xi, n)\,d\,\xi.$$

---

[1] Diese Definition setzt nicht, wie die übliche, voraus, daß $f^{(m-1)}(\xi)$ in einer Umgebung der Stelle x existiert.

[2] Man beachte die zugrunde gelegte Definition der m-ten Ableitung. Bei der üblichen Definition würde der Satz für beliebiges m nicht mehr aussagen, als für $m=1$, für welchen Fall er sich (in etwas abweichender Form und mit anderem Beweise) schon bei Lebesgue findet: a. a. O. p. 80.

[3] Wir verweisen diesbezüglich auf eine kleine Abhandlung, die Lebesgue dieser Formel widmet: Ann. de Toul. Serie 3, Bd. 1, p. 119 ff.

[4] Es bedeutet stets $<\alpha, \beta>$ ein Intervall mit Einschluß, (α, β) ein Intervall mit Ausschluß seiner Endpunkte.

[5] Das Wort »integrierbar« ist hier, wie im Folgenden, im Sinne der Lebesgue'schen Integration zu verstehen.

[6] Das heißt: jede Funktion von $\mathfrak{F}_4$ hat in einem inneren Punkt von $<a, b>$ einen rechtsseitigen und einen linksseitigen, im Punkt a einen rechtsseitigen, im Punkt b einen linksseitigen endlichen Grenzwert.

Von H. Lebesgue wurden folgende Sätze bewiesen:[1]

I. Damit $\lim\limits_{n=\infty} I_n(f) = 0$ sei für alle Funktionen von $\mathfrak{F}_1$, ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(\xi, n)$ den Bedingungen genügt:

1. Es gibt eine Konstante M, so daß, abgesehen von Nullmengen:[2]

$$|\varphi(\xi, n)| < M \qquad \text{für alle } n \text{ und alle } \xi \text{ von } < a, b >.$$

2. Für jedes Teilintervall[3] $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \varphi(\xi, n)\, d\xi = 0.$$

II. Damit $\lim\limits_{n=\infty} I_n(f) = 0$ sei für alle Funktionen von $\mathfrak{F}_2$, ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(\xi, n)$ den Bedingungen genügt:

1. Es gibt eine Konstante M, so daß:

$$\int_a^b (\varphi(\xi, n))^2\, d\xi < M \quad \text{für alle } n.$$

2. Für jedes Teilintervall $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \varphi(\xi, n)\, d\xi = 0.$$

III. Damit $\lim\limits_{n=\infty} I_n(f) = 0$ sei für alle Funktionen von $\mathfrak{F}_3$, ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(\xi, n)$ den Bedingungen genügt:

1. Zu jedem $\mu > 0$ gibt es ein $\lambda > 0$, so daß für jede Menge I sich nicht überdeckender, in $< a, b >$ gelegener Intervalle, deren Gesamtinhalt $\leqq \lambda$ ist, die Ungleichung besteht:

$$\int_I |\varphi(\xi, n)|\, d\xi < \mu \quad \text{für alle } n.$$

2. Für jedes Teilintervall $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \varphi(\xi, n)\, d\xi = 0.$$

IV. Damit $\lim\limits_{n=\infty} I_n(f) = 0$ sei für alle Funktionen von $\mathfrak{F}_4$, ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(\xi, n)$ den Bedingungen genügt:

1. Es gibt eine Konstante M, so daß

$$\int_\alpha^b |\varphi(\xi, n)|\, d\xi < M \quad \text{für alle } n.$$

2. Für jedes Teilintervall $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \varphi(\xi, n)\, d\xi = 0.$$

Diese Sätze können, mit geringfügigen Abänderungen, auch auf Intervalle übertragen werden, die sich ins Unendliche erstrecken. Es wird genügen, dies für das Intervall $(-\infty, +\infty)$ zu besprechen.

---

[1] Ann. de Toulouse, Serie 3, Bd. 1, p. 51 ff. Dabei ist bei Anschreiben von $\lim\limits_{n=\infty} I_n(f)$ stets mitverstanden, daß $I_n(f)$ für alle n existiert.

[2] Unter einer »Nullmenge« wird eine Menge verstanden, die, im Sinne von Lebesgue, den Inhalt 0 hat.

[3] Zu den Teilintervallen $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$, nicht aber zu denen von (a, b), rechnen wir auch das Intervall $< a, b >$ selbst

Man erhält die Sätze für dieses unendliche Intervall am einfachsten, indem man sie durch die Substitution:

$$u = \frac{e^{\xi} - 1}{e^{\xi} + 1}, \qquad \xi = \lg \frac{1+u}{1-u}$$

auf die Sätze für das endliche Intervall $< -1, 1 >$ zurückführt. Die Substitutionsformeln lauten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\, d\xi = 2 \int_{-1}^{1} F\left(\lg \frac{1+u}{1-u}\right) \frac{1}{1-u^2}\, du \tag{1}$$

$$\int_{-1}^{1} G(u)\, du = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} G\left(\frac{e^{\xi}-1}{e^{\xi}+1}\right) \frac{e^{\xi}}{(e^{\xi}+1)^2}\, d\xi. \tag{2}$$

Die Definition der Klassen $\mathfrak{F}_i$ bleibt für unendliche Intervalle dieselbe wie für endliche Intervalle. Dabei hat man, was die Definition von $\mathfrak{F}_1$ anlangt, zu beachten, daß wir eine Funktion $f(\xi)$ dann und nur dann als integrierbar in $(-\infty, +\infty)$ bezeichnen, wenn:

$$\lim_{x=+\infty} \int_{-x}^{x} |f(\xi)|\, d\xi$$

einen endlichen Wert hat, so daß auch im unendlichen Intervall jede integrierbare Funktion absolut integrierbar ist. — Was die Definition von $\mathfrak{F}_4$ anlangt, so verlangen wir, daß für die zu $\mathfrak{F}_4$ gehörigen Funktionen auch die beiden Grenzwerte:

$$\lim_{\xi=-\infty} f(\xi) \qquad \text{und} \qquad \lim_{\xi=+\infty} f(\xi)$$

existieren und endlich sein sollen.

Dies vorausgeschickt erhalten wir, wenn wir nun:

$$J_n(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi(\xi, n)\, d\xi$$

setzten, folgende Sätze:

I *a*. »Damit $\lim_{n=\infty} J_n(f) = 0$ sei für alle Funktionen von $\mathfrak{F}_1$, ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(\xi, n)$ den Bedingungen genügt:

1. Es gibt eine Konstante M, so daß abgesehen von Nullmengen:

$$|\varphi(\xi, n)| < M \qquad \text{für alle } n \text{ und alle } \xi.$$

2. Für jedes endliche Intervall $< \alpha, \beta >$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi, n)\, d\xi = 0.\text{«}$$

Die Bedingungen sind notwendig. Für 2. ersieht man dies, indem man für f die zu $\mathfrak{F}_1$ gehörige Funktion wählt, die in $< \alpha, \beta >$ gleich 1, sonst $= 0$ ist.

Angenommen es wäre 1. nicht erfüllt, so wäre für:

$$\psi(u, n) = \varphi\left(\lg \frac{1+u}{1-u}, n\right) \tag{3}$$

in $< -1, 1 >$ Bedingung 1. von Satz I nicht erfüllt; es gäbe also eine in $< -1, 1 >$ integrierbare Funktion $g(u)$, für die nicht:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-1}^{1} g(u)\, \psi(u, n)\, du = 0 \tag{4}$$

ist. Nach Formel (2) ist die Funktion

$$f(\xi) = 2g\left(\frac{e^{\xi}-1}{e^{\xi}+1}\right)\cdot\frac{e^{\xi}}{(e^{\xi}+1)^2}$$

integrierbar in $(-\infty, +\infty)$. Und vermöge derselben Formel folgt aus dem Nichtbestehen von (4) auch das Nichtbestehen von:

$$\lim_{n=\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\varphi(\xi, n)\,d\xi = 0.$$

Damit sind die Bedingungen als notwendig erwiesen.

Die Bedingungen sind hinreichend. In der Tat, wegen unserer Bedingung 1. genügt der Kern (3) der Bedingung 1. von Satz I in $<-1, 1>$, und wegen unserer Bedingung 2. ist, nach (1), in jedem Teilintervalle $<\alpha, \beta>$ von $(-1, 1)$:

$$\lim_{n=\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\psi(u, n)\frac{1}{1-u^2}\,du = 0.$$

Da $\frac{1}{1-u^2}$ in $<\alpha, \beta>$ geschränkt ist, genügt der Kern:

$$\psi(u, n)\cdot\frac{1}{1-u^2}$$

in jedem Teilintervalle $<\alpha, \beta>$ von $(-1, 1)$ beiden Bedingungen von Satz I, so daß wir nach Satz I haben:

$$\lim_{n=\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\psi(u, n)\,du = \lim_{n=\infty}\int_{\alpha}^{\beta}(1-u^2)\cdot\psi(u, n)\frac{1}{1-u^2}\,du = 0.$$

Es ist nun leicht einzusehen, daß auch:

(5) $$\lim_{n=\infty}\int_{-1}^{1}\psi(u, n)\,du = 0.$$

In der Tat, da (abgesehen von Nullmengen):

$$|\psi(u, n)| < M \quad \text{für alle } n \text{ und alle } u \text{ von } (-1, 1),$$

gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$, so daß für alle n:

(6) $$\left|\int_{-1}^{-1+\eta}\psi(u, n)\,du\right| < \frac{\varepsilon}{4}; \quad \left|\int_{1-\eta}^{1}\psi(u, n)\,du\right| < \frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

Da, wie bereits gezeigt:

$$\lim_{n=\infty}\int_{-1+\eta}^{1-\eta}\psi(u, n)\,du = 0$$

ist, so haben wir:

$$\left|\int_{-1+\eta}^{1-\eta}\psi(u, n)\,du\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geqq n_0,$$

und somit, wegen (6):

$$\left|\int_{-1}^{1}\psi(u, n)\,du\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geqq n_0.$$

womit (5) bewiesen ist.

So sehen wir, daß die Beziehung

$$\lim_{n=\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\psi(u, n)\,du = 0$$

nicht nur für alle Teilintervalle $<\alpha, \beta>$ von $(-1, 1)$, sondern auch für alle Teilintervalle von $<-1, 1>$ besteht. — Es genügt also der Kern $\psi(u, n)$ in $<-1, 1>$ beiden Bedingungen von Satz I.

Ist nun $f(\xi)$ integrierbar in $(-\infty, +\infty)$, so ist nach (1) die Funktion

$$g(u) = 2f\left(\lg \frac{1+u}{1-u}\right) \frac{1}{1-u^2}$$

integrierbar in $<-1, 1>$. Nach Satz I ist also:

$$\lim_{n=\infty} J_n(f) = \lim_{n=\infty} \int_{-1}^{1} g(u)\, \psi(u, n)\, du = 0.$$

Damit sind die Bedingungen 1. und 2. als hinreichend erwiesen.

Bemerken wir noch ausdrücklich, daß Bedingung 2. nur von endlichen Intervallen $<\alpha, \beta>$ handelt. Folgendes Beispiel zeigt, daß sie in Intervallen, die sich ins Unendliche erstrecken, nicht erfüllt zu sein braucht: es sei:

$$\varphi(\xi, n) = \begin{cases} 1 & \text{in } (n, n+1) \\ 0 & \text{außerhalb } (n, n+1). \end{cases}$$

Dann ist für jede in $(-\infty, +\infty)$ integrierbare Funktion:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi(\xi, n)\, d\xi = 0,$$

während wir für jedes n haben:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, n)\, d\xi = 1.$$

II *a*. »Damit $\lim_{n=\infty} J_n(f) = 0$ sei für alle Funktionen von $\mathfrak{F}_2$, ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(\xi, n)$ den Bedingungen genügt:

1. Es gibt eine Konstante M, so daß:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(\xi, n))^2\, d\xi < M \quad \text{für alle } n.$$

2. Für jedes endliche Intervall $<\alpha, \beta>$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi, n)\, d\xi = 0.«$$

Die Bedingungen sind notwendig. Für 2. ist dies wieder evident. Wäre 1. nicht erfüllt, so würde, wegen (1), der Kern:

$$\psi(u, n) = \sqrt{2}\, \varphi\left(\lg \frac{1+u}{1-u}, n\right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \tag{7}$$

in $<-1, 1>$ der Bedingung 1. von Satz II nicht genügen; es gäbe also eine in $<-1, 1>$ samt ihrem Quadrate integrierbare Funktion $g(u)$, für die nicht:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-1}^{1} g(u)\, \psi(u, n)\, du = 0 \tag{8}$$

ist. Nach Formel (2) ist das Quadrat der Funktion:

$$f(\xi) = g\left(\frac{e^\xi - 1}{e^\xi + 1}\right) \cdot \frac{\sqrt{2 e^\xi}}{e^\xi + 1}$$

in $(-\infty, +\infty)$ integrierbar. Da aber:

$$\int_{-1}^{1} g(u)\,\psi(u, n)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\varphi(\xi, n)\,d\xi$$

ist, folgt aus dem Nichtbestehen von (8) auch das Nichtbestehen von $\lim\limits_{n=\infty} J_n(f) = 0$.

Die Bedingungen sind hinreichend. In der Tat, wegen Bedingung 1. und Formel (1) genügt Kern (7) der Bedingung 1. von Satz II. Ferner folgt aus unserer Bedingung 2., daß in jedem Teilintervalle $<\alpha, \beta>$ von $(-1, 1)$:

$$\lim_{n=\infty} 2\int_{\alpha}^{\beta} \varphi\left(\lg\frac{1+u}{1-u}\right)\frac{du}{1-u^2} = \lim_{n=\infty} \sqrt{2}\int_{\alpha}^{\beta} \psi(u, n)\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 0$$

ist. Da $\frac{1}{1-u^2}$ in $<\alpha, \beta>$ geschränkt ist, folgt, daß zugleich mit dem Kerne $\psi(u, n)$ auch der Kern $\sqrt{2}\frac{\psi(u, n)}{\sqrt{1-u^2}}$ in $<\alpha, \beta>$ der Bedingung 1. von Satz II genügt. Er genügt also in $<\alpha, \beta>$ beiden Bedingungen von Satz II, so daß, nach Satz II:

$$\lim_{n=\infty}\int_{\alpha}^{\beta} \psi(u, n)\,du = \lim_{n=\infty}\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\frac{1-u^2}{2}}\cdot\psi(u, n)\cdot\sqrt{\frac{2}{1-u^2}}\,du = 0$$

ist. Wie oben sehen wir, daß hieraus wieder Gleichung (5) folgt, nur haben wir uns beim Beweise von (6) diesmal darauf zu berufen, daß nach der Schwarz'schen Ungleichung:

$$\left|\int_{1-\eta}^{1} \psi(u, n)\,du\right| < \sqrt{\eta\cdot\int_{1-\eta}^{1} (\psi(u, n))^2\,du} < \sqrt{\eta\cdot M}$$

ist. — Wir sehen nun wieder, daß der Kern $\psi(u, n)$ in $<-1, 1>$ beiden Bedingungen von Satz II genügt.

Gehört nun $f(\xi)$ in $(-\infty, +\infty)$ zu $\mathfrak{F}_2$, so gehört die Funktion

$$g(u) = \sqrt{2} f\left(\lg\frac{1+u}{1-u}\right)\sqrt{\frac{1}{1-u^2}}$$

in $<-1, 1>$ zu $\mathfrak{F}_2$. Nach Satz II ist also:

$$\lim_{n=\infty} J_n(f) = \lim_{n=\infty}\int_{-1}^{1} g(u)\,\psi(u, n)\,du = 0,$$

womit bewiesen ist, daß die Bedingungen von Satz II*a* hinreichend sind. Wie bei Satz I*a* sieht man, daß Bedingung 2. auch hier nur für endliche Intervalle $<\alpha, \beta>$ erfüllt sein muß.

III*a*. »Damit $\lim\limits_{n=\infty} J_n(f) = 0$ sei für alle Funktionen von $\mathfrak{F}_3$, ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(\xi, n)$ den Bedingungen genügt:

1. Zu jedem $\mu > 0$ gibt es ein $\lambda > 0$, so daß für jede Menge I sich nicht überdeckender Intervalle, deren Gesamtinhalt $\leqq \lambda$ ist, die Ungleichung besteht:

$$\int_I |\varphi(\xi, n)|\,d\xi < \mu \quad \text{für alle } n.$$

Und zu jedem $\mu > 0$ gibt es ein A, so daß:

$$\int_{-\infty}^{-A} |\varphi(\xi, n)|\,d\xi < \mu; \quad \int_{A}^{+\infty} |\varphi(\xi, n)|\,d\xi < \mu \quad \text{für alle } n. \tag{9}$$

2. Für jedes endliche Intervall $<\alpha, \beta>$ ist:

$$\lim_{n=\infty}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi, n)\,d\xi = 0.«$$

Die Bedingungen sind notwendig. Für 2. ist das trivial. Wäre 1. nicht erfüllt, so sieht man sofort, daß der Kern:

$$\psi(u, n) = 2\,\varphi\left(\lg\frac{1+u}{1-u}, n\right)\frac{1}{1-u^2} \tag{9}$$

im Intervalle $<-1, 1>$ Bedingung 1. von Satz III nicht erfüllen würde; es gäbe also eine in $<-1, 1>$ zu $\mathfrak{F}_3$ gehörige Funktion $g(u)$, für die nicht:

$$\lim_{n=\infty}\int_{-1}^{1} g(u)\,\psi(u, n)\,du = 0$$

wäre. Setzt man:

$$f(\xi) = g\left(\frac{e^\xi - 1}{e^\xi + 1}\right),$$

so gehört $f(\xi)$ in $(-\infty, +\infty)$ zu $\mathfrak{F}_3$ und es wird:

$$\int_{-1}^{1} g(u)\,\psi(u, n)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\varphi(\xi, n)\,d\xi,$$

so daß auch nicht $\lim\limits_{n=\infty} J_n(f) = 0$ wäre.

Die Bedingungen sind hinreichend. In der Tat folgt aus unserer Bedingung 1., daß der Kern (9) in $<-1, 1>$ der Bedingung 1. von Satz III genügt. Ferner folgt aus unserer Bedingung 2., daß für jedes Teilintervall $<\alpha, \beta>$ von $(-1, 1)$:

$$\lim_{n=\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\psi(u, n)\,du = 0$$

ist. Wie bisher entnimmt man hieraus, daß auch:

$$\lim_{n=\infty}\int_{-1}^{1}\psi(u, n)\,du = 0$$

ist, nur hat man sich diesmal beim Beweise von (6) auf den zweiten Teil unserer Bedingung 1. zu berufen. — Es genügt also $\psi(u, n)$ in $<-1, 1>$ beiden Bedingungen von Satz III.

Gehört nun $f(\xi)$ in $(-\infty, +\infty)$ zu $\mathfrak{F}_3$, so gehört

$$g(u) = f\left(\lg\frac{1+u}{1-u}\right)$$

in $<-1, 1>$ zu $\mathfrak{F}_3$. Somit ist:

$$\lim_{n=\infty} J_n(f) = \lim_{n=\infty}\int_{-1}^{1} g(u)\,\psi(u, n)\,du = 0$$

und Satz III *a* ist bewiesen.

Da die Funktion $f(\xi) = 1$ (oder $f(\xi) = 1$ für $\xi \geqq 0$, $f(\xi) = 0$ für $\xi < 0$) zu $\mathfrak{F}_3$ gehört, ist es hier notwendig, daß auch für unendliche Intervalle Bedingung 2. erfüllt sei:

$$\lim_{n=\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi, n)\,d\xi = 0; \quad \lim_{n=\infty}\int_{0}^{+\infty}\varphi(\xi, n)\,d\xi = 0.$$

Doch braucht dies in Bedingung 2. nicht ausdrücklich aufgenommen zu werden, da es vermöge Bedingung 1. aus der Gültigkeit von 2. für endliche Intervalle von selbst folgt.

IV *a*. Damit $\lim\limits_{n=\infty} J_n(f) = 0$ sei für alle Funktionen von $\mathfrak{F}_4$, ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(\xi, n)$ den Bedingungen genügt:

1. Es gibt eine Konstante M, so daß:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi, n)| \, d\xi < M \quad \text{für alle } n.$$

2. Für jedes endliche Intervall $< \alpha, \beta >$ ist

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi, n) \, d\xi = 0,$$

und es ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{0} \varphi(\xi, n) \, d\xi = 0; \quad \lim_{n=\infty} \int_{0}^{\infty} \varphi(\xi, n) \, d\xi = 0.$$

Der Beweis wird geführt wie für Satz III *a*. Nur folgt diesmal die Tatsache, daß der Kern (9) in $< -1, 1 >$ der Bedingung 2. von Satz IV genügt, unmittelbar aus unserer Bedingung 2.

Hier wäre es nicht hinreichend, Bedingung 2. bloß für endliche Intervalle auszusprechen, wie wieder das schon einmal verwendete Beispiel zeigt:

$$\varphi(\xi, n) = \begin{cases} 1 & \text{in } (n, n+1) \\ 0 & \text{außerhalb } (n, n+1). \end{cases}$$

Es genügt dieses φ der Bedingung 1., sowie der Bedingung 2. für endliche Intervalle, während wenn wir $f = 1$ wählen, wir für jedes n haben:

$$J_n(1) = 1.$$

§ 2. Ein Hilfssatz von Haar und Lebesgue.

Wir kehren wieder zur Betrachtung endlicher Intervalle zurück, und beweisen folgenden Satz, den wir weiterhin verwenden werden:[1]

V. Ist die Menge der Zahlen

$$\int_a^b |\varphi(\xi, n)| \, d\xi$$

($n = 1, 2, \ldots$) nicht geschränkt, so gibt es eine in $< a, b >$ stetige, in endlich vielen vorgegebenen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_p$ von $< a, b >$ verschwindende Funktion $f(x)$, für die nicht $\lim\limits_{n=\infty} I_n(f) = 0$ ist.

Wir erinnern daran, daß (bei gegebenem n) zu jedem $\sigma > 0$ ein $\tau_n > 0$ gehört, derart, daß für jede in $< a, b >$ gelegene meßbare Menge $\mathfrak{A}$, deren Inhalt $< \tau_n$ ist, die Ungleichung gilt:

$$\int_{\mathfrak{A}} |\varphi(\xi, n)| \, d\xi < \sigma. \tag{1}$$

Bezeichnen wir mit $h_n(\xi)$ die Funktion, die $= 1$ ist, wo $\varphi(\xi, n) \geqq 0$, und $= -1$, wo $\varphi(\xi, n) < 0$, so gibt es nach Voraussetzung eine (wachsende) Indizesfolge n_i mit $\lim\limits_{i=\infty} n_i = \infty$, so daß:

$$\lim_{i=\infty} \int_a^b |\varphi(\xi, n_i)| \, d\xi = \lim_{i=\infty} \int_a^b h_{n_i}(\xi) \, \varphi(\xi, n_i) \, d\xi = +\infty. \tag{2}$$

Wir zeigen zunächst, daß es auch eine Folge in $< a, b >$ stetiger Funktionen $g_n(\xi)$ gibt, die, ebenso wie die $h_n(\xi)$ der Ungleichung genügen:

$$|g_n(\xi)| \leqq 1. \tag{3}$$

[1] H. Lebesgue, a. a. O., p. 61. A. Haar, Math. Ann. 69, p. 335. Der im Text gegebene Beweis unterscheidet sich nicht wesentlich vom Lebesgue'schen Beweise.

die sämtlich in $x_1, x_2, \ldots, x_p$ verschwinden, und für die gleichfalls:

(4) $$\lim_{i=\infty} \int_a^b g_{n_i}(\xi)\,\varphi(\xi, n_i)\,d\xi = +\infty.$$

Sei also $\sigma > 0$ beliebig gegeben. Wir schließen die Menge $\mathfrak{M}_n$ aller Punkte von $< a, b >$, in denen $\varphi(\xi, n) \geqq 0$ ist, in eine abzählbare Menge I_n sich nicht überdeckender Intervalle ein, deren Gesamtlänge den Inhalt von $\mathfrak{M}_n$ um weniger als $\frac{\tau_n}{2}$ übersteigt.[1] Von den unendlich vielen Intervallen von I_n behalten wir eine endliche Menge J_n bei, deren Inhalt hinter dem von I_n um weniger als $\frac{\tau_n}{2}$ zurückbleibt.

Bezeichnen wir nun mit $h_n^*(\xi)$ die Funktion, die $= 1$ ist in den Punkten von J_n, sonst $= -1$; dann unterscheiden sich h_n und h_n^* voneinander nur in den Punkten einer Menge, deren Inhalt $\leqq \tau_n$ ist, und zwar ist in den Punkten dieser Menge:

$$|h_n(\xi) - h_n^*(\xi)| = 2.$$

Es ist also zufolge (1):

(5) $$\left| \int_a^b h_n(\xi)\,\varphi(\xi, n)\,d\xi - \int_a^b h_n^*(\xi)\,\varphi(\xi, n)\,d\xi \right| < 2\sigma.$$

Die Funktion $h_n^*(\xi)$ ist auch noch unstetig, hat aber nur mehr endlich viele Unstetigkeitspunkte $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_q^{(n)}$. Wir umgeben jeden derselben mit einem Intervalle $< \xi_i^{(n)} - h_i^{(n)}, \xi_i^{(n)} + h_i^{(n)} >$, wo die $h_i^{(n)}\ (> 0)$ so klein gewählt seien, daß alle diese Intervalle in (a, b) liegen, keine zwei einen Punkt gemein haben und:

(6) $$2\,(h_1^{(n)} + h_2^{(n)} + \ldots + h_q^{(n)}) < \tau_n$$

ist. Nun definieren wir eine Funktion $g_n^*(\xi)$ durch die Vorschrift: es ist $g_n^*(\xi) = h_n^*(\xi)$ außerhalb der Intervalle $(\xi_i^{(n)} - h_i^{(n)}, \xi_i^{(n)} + h_i^{(n)})$; in jedem dieser Intervalle ist $g_n^*(\xi)$ gleich derjenigen linearen Funktion, die in den beiden Endpunkten des Intervalles mit $h_n^*(\xi)$ übereinstimmt. Dann unterscheiden sich g_n^* und h_n^* voneinander nur in den Punkten einer Menge, deren Inhalt $< \tau_n$ ist (wegen (6)) und in den Punkten dieser Menge ist:

$$|h_n^*(\xi) - g_n^*(\xi)| \leqq 2,$$

so daß, wegen (1):

(7) $$\left| \int_a^b h_n^*(\xi)\,\varphi(\xi, n)\,d\xi - \int_a^b g_n^*(\xi)\,\varphi(\xi, n)\,d\xi \right| < 2\sigma.$$

Die Funktion $g_n^*(\xi)$ ist bereits stetig, genügt der Ungleichung $|g_n^*(\xi)| \leqq 1$, erfüllt aber noch nicht die Bedingung, in $x_1, x_2, \ldots, x_p$ zu verschwinden.

Um auch das zu erreichen, legen wir um jeden dieser Punkte ein Intervall[2] $< x_i - k_i^{(n)}, x_i + k_i^{(n)} >$, wo die $k_i^{(n)}\ (> 0)$ so klein gewählt seien, daß alle diese Intervalle in $< a, b >$ liegen, keine zwei einen Punkt gemein haben und:

$$2\,(k_1^{(n)} + k_2^{(n)} + \ldots + k_p^{(n)}) < \tau_n$$

ist. Sodann definieren wir die Funktion $g_n(\xi)$ durch die Vorschrift: es ist $g_n(\xi) = g_n^*(\xi)$ außerhalb der Intervalle $(x_i - k_i^{(n)}, x_i + k_i^{(n)})$; in jedem der Intervalle $< x_i - k_i^{(n)}, x_i >$, beziehungsweise $< x_i, x_i + k_i^{(n)} >$ ist $g_n(\xi)$ gleich derjenigen linearen Funktion, die in x_i verschwindet und in $x_i - k_i^{(n)}$, beziehungsweise $x_i + k_i^{(n)}$ mit $g_n^*(\xi)$ übereinstimmt. Dann unterscheiden sich g_n und g_n^* nur in den Punkten einer Menge, deren Inhalt $> \tau_n$ ist, und in den Punkten dieser Menge ist:

$$|g_n(\xi) - g_n^*(\xi)| < 2,$$

---

[1] Dabei bedeutet τ_n die zufolge der eingangs gemachten Bemerkung der Größe σ zugeordnete Größe.

[2] Fällt der Punkt x_i mit a oder mit b zusammen, hat es statt dessen zu heißen:

$$< a,\ a + k_i^{(n)} > \text{ oder } < b - k_i^{(n)},\ b >.$$

so daß, wegen (1):

(8) $$\left| \int_a^b g_n^*(\xi)\, \varphi(\xi, n)\, d\xi - \int_a^b g_n(\xi)\, \varphi(\xi, n)\, d\xi \right| < 2\sigma.$$

Die Funktionen $g_n(\xi)$ sind nun stetig, genügen der Ungleichung (3) und verschwinden in $x_1\, x_2, \ldots, x_p$. Die Ungleichungen (5), (7) und (8) zusammengenommen ergeben:

$$\left| \int_a^b h_n(\xi)\, \varphi(\xi, n)\, d\xi - \int_a^b g_n(\xi)\, \varphi(\xi, n)\, d\xi \right| < 6\sigma,$$

und wegen (2) ist daher auch (4) bewiesen.

Wir setzen nun:

(9) $$\int_a^b |\varphi(\xi, n)|\, d\xi = L_n.$$

Beim weiteren Beweise von Satz V können wir annehmen, es sei für alle i:

(10) $$\lim_{n=\infty} I_n(g_i) = 0.$$

Wäre nämlich dies für ein i nicht der Fall, so wäre ja, indem wir $f = g_i$ nehmen, die Behauptung schon bewiesen.

Wir können dann aus der Folge der Indizes n_i eine wachsende Teilfolge n_{i_ν} (mit $n_{i_1} = n_1$ beginnend) so herausgreifen, daß folgende drei Eigenschaften bestehen:

1. Für $n \geqq n_{i_{\nu+1}}$ ist:
$$\left| I_n\left(g_{n_{i_1}} + \frac{1}{2\, L_{n_{i_1}}} g_{n_{i_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{\nu-1} \cdot L_{n_{i_{\nu-1}}}} g_{n_{i_\nu}} \right) \right| < 1,$$
2. $$I_{n_{i_{\nu+1}}}\left(g_{n_{i_{\nu+1}}}\right) \geqq 2^{\nu+1} L_{n_{i_\nu}},$$
3. $$L_{n_{i_{\nu+1}}} > L_{n_{i_\nu}};$$

und zwar läßt sich dies für Eigenschaft 1. wegen (10), für Eigenschaft 2. wegen (4), für Eigenschaft 3. wegen (2) erreichen.

Schreiben wir nun der Kürze halber:

$$g_{n_{i_\nu}} = g^{(\nu)}; \quad L_{n_{i_\nu}} = L^{(\nu)}; \quad I_{n_{i_\nu}} = I^{(\nu)},$$

so haben wir:

(11) $$I^{(n)} \left| \left(g^{(1)} + \frac{1}{2\, L^{(1)}} g^{(2)} + \ldots + \frac{1}{2^{\nu-1}\, L^{(\nu-1)}} g^{(\nu)} \right) \right| < 1 \quad \text{für } n \geqq \nu + 1.$$

(12) $$I^{(\nu+1)}\left(g^{(\nu+1)}\right) \geqq 2^{\nu+1} L^{(\nu)}.$$

(13) $$L^{(\nu+1)} > L^{(\nu)}.$$

Wir setzen:

(14) $$f = g^{(1)} + \frac{1}{2\, L^{(1)}} g^{(2)} + \ldots + \frac{1}{2^{\nu-1}\, L^{(\nu-1)}} g^{(\nu)} + \ldots;$$

dann ist, wegen (3), diese Reihe gleichmäßig konvergent, und somit f eine stetige Funktion, und es verschwindet f in den vorgeschriebenen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Wir bilden:

$$I^{(\nu)}(f) = I^{(\nu)}\left(g^{(1)} + \frac{1}{2\, L^{(1)}} g^{(2)} + \ldots + \frac{1}{2^{\nu-2}\, L^{(\nu-2)}} g^{(\nu-1)} \right) + I^{(\nu)}\left(\frac{1}{2^{\nu-1}\, L^{(\nu-1)}} g^{(\nu)} \right) + I^{(\nu)}\left(\frac{1}{2^{\nu}\, L^{(\nu)}} g^{(\nu+1)} + \ldots \right).$$

Hierin ist, wegen (11):

$$\left| I^{(\nu)}\left(g^{(1)} + \frac{1}{2\,L^{(1)}} g^{(2)} + \ldots + \frac{1}{2^{\nu-2}\,L^{(\nu-2)}} g^{(\nu-1)}\right)\right| < 1 \tag{15}$$

und wegen (12):

$$I^{(\nu)}\left(\frac{1}{2^{\nu-1}\,L^{(\nu-1)}} g^{(\nu)}\right) \geqq 2. \tag{16}$$

Endlich ist, wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (14):

$$I^{(\nu)}\left(\frac{1}{2^{\nu}\,L^{(\nu)}} g^{(\nu+1)} + \frac{1}{2^{\nu+1}\,L^{(\nu+1)}} g^{(\nu+2)} + \ldots\right) = \frac{1}{2^{\nu}\,L^{(\nu)}} I^{(\nu)}(g^{(\nu+1)}) + \frac{1}{2^{\nu+1}\,L^{(\nu+1)}} I^{(\nu)}(g^{(\nu+2)}) + \ldots,$$

und somit, wegen (3), (9) und (13):

$$\left| I^{(\nu)}\left(\frac{1}{2^{\nu}\,L^{(\nu)}} g^{(\nu+1)} + \frac{1}{2^{\nu+1}\,L^{(\nu+1)}} g^{(\nu+2)} + \ldots\right)\right| \leqq$$

$$\frac{1}{2^{\nu}\,L^{(\nu)}} \cdot L^{(\nu)} + \frac{1}{2^{\nu+1}\,L^{(\nu+1)}} L^{(\nu)} + \ldots \leqq \frac{1}{2} \quad (\text{für } \nu > 1). \tag{17}$$

Die Ungleichungen (15), (16), (17) ergeben nun zusammen:

$$I^{(\nu)}(f) = I_{n_{i_\nu}}(f) \geqq \frac{1}{2}$$

und da $\lim\limits_{\nu=\infty} n_{i_\nu} = \infty$ war, so ist nicht $\lim\limits_{n=\infty} I_n(f) = 0$, womit Satz V erwiesen ist.

§ 3. Darstellung der Ableitungen einer gegebenen Funktion.

Wir nehmen nun an, es sei $\varphi(\xi, x, n)$ für jedes nicht negative ganzzahlige n und für alle x des endlichen Intervalles (a, b) in $< a, b >$ als integrierbare Funktion von ξ gegeben; wir bezeichnen $\varphi(\xi, x, n)$ mit einem der Theorie der Integralgleichungen entlehnten Ausdruck als Kern und setzen:

$$I_n(f, x) = \int_a^b f(\xi)\,\varphi(\xi, x, n)\,d\xi.$$

Es wurde von H. Lebesgue folgender Satz bewiesen:[1]

VI. »Damit für alle der Klasse $\mathfrak{F}_i$ angehörigen Funktionen f, die im gegebenen Punkte x von (a, b) stetig sind, die Gleichung gelte:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} I_n(f, x),$$

ist notwendig und hinreichend, daß der Kern $\varphi(\xi, x, n)$ folgenden Bedingungen genügt:

1. In jedem den Punkt x nicht enthaltenden Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$ ist Bedingung 1. desjenigen der Sätze I bis IV erfüllt, der sich auf die Klasse $\mathfrak{F}_i$ bezieht.

2. Für jedes den Punkt x nicht enthaltende Teilintervall $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \varphi(\xi, x, n)\,d\xi = 0.$$

3. Es gibt eine Konstante N, so daß

$$\int_a^b |\varphi(\xi, x, n)|\,d\xi < N \quad \text{für alle } n.$$

[1] A. a. O., p. 69 ff.

4. Es ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 1.«$$

Wir wollen nun im Folgenden den Satz beweisen:

VII. Damit für alle der Klasse $\mathfrak{F}_i$ angehörigen Funktionen f, die im gegebenen Punkte x von (a, b) endliche Ableitungen der m ersten Ordnungen haben, die Gleichung gelte:

$$f^{(m)}(x) = \lim_{n=\infty} I_n(f, x), \tag{1}$$

ist notwendig und hinreichend, daß der Kern $\varphi(\xi, x, n)$ folgenden Bedingungen genüge:

1. In jedem den Punkt x nicht enthaltenden Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$ ist Bedingung 1. desjenigen der Sätze I bis IV erfüllt, der sich auf die Klasse $\mathfrak{F}_i$ bezieht.[1]

2. Für jedes den Punkt x nicht enthaltende Teilintervall $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0.$$

3. Es gibt eine Konstante N, so daß

$$\int_a^b |(\xi - x)^m \varphi(\xi, x, n)|\, d\xi < N \quad \text{für alle } n. \tag{2}$$

4. Es ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b (\xi - x)^i \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0 \quad (i = 0\ 1, 2 \ldots, m-1), \tag{3}$$

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b (\xi - x)^m \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = m! \tag{4}$$

Die Bedingungen sind hinreichend: In der Tat, wenn $f(\xi)$ im Punkte x endliche Ableitungen der ersten m Ordnungen hat, so können wir schreiben:

$$f(\xi) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{(\xi - x)^i}{i!} f^{(i)}(x) + (\xi - x)^m \cdot \omega(\xi), \tag{5}$$

wo:

$$\lim_{\xi = x} \omega(\xi) = 0 \tag{6}$$

ist; setzen wir also $\omega(x) = 0$, so ist die Funktion $\omega(\xi)$ im Punkte x stetig.

Wegen (5) ist nun:

$$I_n(f, x) = f(x) \int_a^b \varphi(\xi, x, n)\, d\xi + \sum_{i=1}^{m} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \int_a^b (\xi - x)^i \varphi(\xi, x, n)\, d\xi + \int_a^b \omega(\xi)(\xi - x)^m \varphi(\xi, x, n)\, d\xi.$$

Wegen (3) und (4) erhält man daraus:

$$\lim_{n=\infty} \left(I_n(f, x) - \int_a^b \omega(\xi)(\xi - x)^m \varphi(\xi, x, n)\, d\xi \right) = f^{(m)}(x),$$

so daß zum Beweise von (1) nur mehr zu zeigen ist, daß:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \omega(\xi)(\xi - x)^m \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0 \quad \text{ist.} \tag{7}$$

---

[1] Die in dieser Bedingung auftretende Konstante M (beziehungsweise bei der Klasse $\mathfrak{F}_3$ die Konstante λ) braucht keineswegs für alle diese Intervalle dieselbe zu sein.

Sei, um das nachzuweisen, $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Es gibt wegen (6) ein $h > 0$, derart, daß:

$$|\omega(\xi)| < \varepsilon \quad \text{in} \quad < x-h, x+h >.$$

Wegen (2) ist dann:

$$\left|\int_{x-h}^{x+h} \omega(\xi)(\xi-x)^m \varphi(\xi, x, n)\, d\xi\right| < \varepsilon \cdot N \quad \text{für alle } n. \tag{8}$$

Zufolge (5) gehört $(\xi-x)^m \cdot \omega(\xi)$ zugleich mit $f(\xi)$ zur Klasse $\mathfrak{F}_i$. Wegen Bedingung 1. und 2. hat man daher, unter Berufung auf denjenigen der Sätze I bis IV, der sich auf die Klasse $\mathfrak{F}_i$ bezieht:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^{x-h} \omega(\xi)(\xi-x)^m \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0; \quad \lim_{n=\infty} \int_{x+h}^{b} \omega(\xi)(\xi-x)^m \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0,$$

und somit gibt es ein n_0, so daß für $n \geqq n_0$:

$$\left|\int_a^{x-h} \omega(\xi)(\xi-x)^m \varphi(\xi, x, n)\, d\xi\right| < \varepsilon; \quad \left|\int_{x+h}^{b} \omega(\xi)(\xi-x)^m \varphi(\xi, x, n)\, d\xi\right| < \varepsilon. \tag{9}$$

Die Ungleichungen (8) (9) zusammengenommen ergeben:

$$\left|\int_a^{b} \omega(\xi)(\xi-x)^m \varphi(\xi, x, n)\, d\xi\right| < (N+2) \cdot \varepsilon \quad \text{für } n \geqq n_0,$$

und da ε beliebig war, ist damit (7) und somit auch (1) bewiesen.

Die Bedingungen sind notwendig: Wäre in der Tat 1. oder 2. für ein den Punkt x nicht enthaltendes Teilintervall $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$ nicht erfüllt, so gäbe es, nach demjenigen der Sätze I bis IV, der sich auf die Klasse $\mathfrak{F}_i$ bezieht, in $< \alpha, \beta >$ eine der Klasse $\mathfrak{F}_i$ angehörige Funktion $g(\xi)$, für die nicht:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta g(\xi)\varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0$$

gilt. Definieren wir dann $f(\xi)$ durch die Vorschrift:

$$f(\xi) = g(\xi) \text{ in } < \alpha, \beta >, \quad f(\xi) = 0 \text{ außerhalb } < \alpha, \beta >,$$

so gehört $f(\xi)$ auch in $< a, b >$ zur Klasse $\mathfrak{F}_i$ und es ist $f^{(m)}(x) = 0$, während die Gleichung:

$$\lim_{n=\infty} I_n(f, x) \left(= \lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta g(\xi)\varphi(\xi, x, n)\, d\xi\right) = 0$$

nicht gilt.

Angenommen es sei Bedingung 3. nicht erfüllt. Dann gibt es, nach Satz V, eine in $< a, b >$ stetige für $\xi = x$ verschwindende Funktion $\omega(\xi)$, für die nicht:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \omega(\xi)(\xi-x)^m \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0$$

ist. Wir setzen:

$$f(\xi) = (\xi-x)^m\, \omega(\xi).$$

Dann besitzt $f(\xi)$ im Punkte x eine m-te Ableitung und es ist:

$$f^{(m)}(x) = 0,$$

während die Gleichung:

$$\lim_{n=\infty} I_n(f, x) = 0$$

nicht gilt.

Bedingung 4. ergibt sich als notwendig, indem man für $f(\xi)$ die Funktionen wählt:

$$f(\xi) = (\xi-x)^i \quad (i = 0, 1, \ldots, m).$$

Die Sätze VI und VII können ohne weiteres auf unendliche Intervalle ausgedehnt werden. Wir setzen:

$$J_n(f, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi,$$

bezeichnen, für $\varepsilon > 0$, mit $\psi(\xi, x, n, \varepsilon)$ die Funktion von ξ, die in $< x-\varepsilon, x+\varepsilon >$ den Wert 0 hat, sonst mit $\varphi(\xi, x, n)$ übereinstimmt, und haben:

VI *a*. »Damit für alle in $(-\infty, +\infty)$ der Klasse $\mathfrak{F}_i$ angehörigen Funktionen f, die im gegebenen Punkte x stetig sind, die Gleichung gelte:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} J_n(f, x),$$

ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(\xi, x, n)$ folgenden Bedingungen genügt:

1. und 2. Für jedes $\varepsilon > 0$ genügt der Kern $\psi(\xi, x, n, \varepsilon)$ den Bedingungen 1. und 2. desjenigen der Sätze I *a* bis IV *a*, der sich auf die Klasse $\mathfrak{F}_i$ bezieht.

3. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so daß

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |\varphi(\xi, x, n)|\, d\xi < N \quad \text{für alle } n.$$

4. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 1.\text{«}$$

VII *a*. »Damit für alle in $(-\infty, +\infty)$ der Klasse $\mathfrak{F}_i$ angehörigen Funktionen, die im gegebenen Punkte x von (a, b) endliche Ableitungen der m ersten Ordnungen haben, die Gleichung gelte:

$$f^{(m)}(x) = \lim_{n=\infty} J_n(f, x),$$

ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(\xi, x, n)$ folgenden Bedingungen genügt:

1. und 2. wie in Satz VI *a*.

3. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so daß:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |(\xi - x)^m\, \varphi(\xi, x, n)|\, d\xi < N \quad \text{für alle } n.$$

4. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} (\xi - x)^i\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots m-1),$$

$$\lim_{n=\infty} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} (\xi - x)^m\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = m!\text{«}$$

Zum Beweise von VI *a* und VII *a* hat man nur zu bemerken, daß wegen der Bedingungen 1. und 2. nach dem in Betracht kommenden der Sätze I *a* bis IV *a* für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ J_n(f, x) - \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi \right\} = \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \psi(\xi, x, n, \varepsilon)\, d\xi = 0$$

ist, wodurch die Betrachtung von $\lim\limits_{n=\infty} J_n(f, x)$ auf die von

$$\lim_{n=\infty} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi$$

zurückgeführt ist. Auf dieses Integral aber sind die Sätze VI und VII anwendbar.

§ 4. Darstellung der verallgemeinerten Ableitungen.

Das Resultat von § 3 läßt sich noch ein wenig verallgemeinern, wenn wir annehmen, daß der Kern in einer Umgebung der Stelle x, etwa für $|t| \leqq k$, einer der zwei Bedingungen genügt:

(1) $$\varphi(x+t, x, n) = \varphi(x-t, x, n),$$

(2) $$\varphi(x+t, x, n) = -\varphi(x-t, x, n).$$

Den Ausführungen von § 3 lag folgende Definition der m-ten Ableitung einer Funktion zugrunde:

Sei $f(u)$ eine in der Umgebung der Stelle u_0 definierte Funktion, die in u_0 Ableitungen der $m-1$ ersten Ordnungen besitzt:

$$f'(u_0),\quad f''(u_0), \ldots, f^{(m-1)}(u_0).$$

Gibt es dann eine endliche Zahl a, so daß in einer Umgebung von u die Entwicklung gilt:

$$f(u)-f(u_0) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(u-u_0)^i}{i!} f^{(i)}(u_0) = a\,(u-u_0)^m + \omega(u)\cdot(u-u_0)^m,$$

wo:

$$\lim_{u=u_0} \omega(u) = 0$$

ist, so wird:

$$m!\, a = f^{(m)}(u_0)$$

gesetzt und als die m-te Ableitung von $f(u)$ an der Stelle u_0 bezeichnet.

Diese Definition wurde von Ch. J. de la Vallée-Poussin in folgender Weise verallgemeinert:[1]

Sei $f(u)$ eine in der Umgebung der Stelle u_0 definierte Funktion, und es gelte für alle hinlänglich kleinen $|t|$ ($\neq 0$) eine der beiden Entwicklungen:

(3) $$\frac{f(u_0+t) + f(u_0-t)}{2} = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_{2i} \frac{t^{2i}}{(2i)!} + \omega(t)\, t^{2m}$$

(4) $$\frac{f(u_0+t) - f(u_0-t)}{2} = \sum_{i=0}^{m} a_{2i+1} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + \omega(t)\, t^{2m+1},$$

worin:

(5) $$\lim_{t=0} \omega(t) = 0$$

sei. Es heißen dann, wenn (3) gilt, die Koeffizienten a_i ($i = 0, 2, \ldots, 2m$)[2], und wenn (4) gilt, die Koeffizienten a_i ($i = 1, 3, \ldots, 2m+1$) die verallgemeinerten Ableitungen i-ter Ordnung von $f(u)$ an der Stelle u_0.

Vergleicht man diese Definition mit der oben angeführten Definition der i-ten Ableitungen, so erkennt man sofort: wo die i-te Ableitung ($i > 0$) von $f(u)$ existiert, existiert auch die verallgemeinerte i-te Ableitung und ist gleich der i-ten Ableitung.

Wir werden die verallgemeinerte i-te Ableitung von $f(u)$ mit $\overset{*}{f}{}^{(i)}(u)$ bezeichnen.

Wir haben dann folgende Sätze:

---

[1] Acad. Bruxelles, Bulletin, Classe des Sciences 1908, p. 214.

[2] Wie man sieht, ist eine »*0*-te Ableitung« von f an der Stelle u_0 sicher vorhanden, wenn f dort einen rechts- und einen linksseitigen Grenzwert $f(u_0+0)$, beziehungsweise $f(u_0-0)$ besitzt. Und zwar ist die *0*-te Ableitung dann nichts anderes als das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(f(u_0+0)+f(u_0-0))$ dieser beiden einseitigen Grenzwerte.

VIII. Es genüge für ein gegebenes x von (a, b) und für alle $|t| \leqq k$ der Kern $\varphi(\xi, x, n)$ der Relation (1). Damit für alle der Klasse $\mathfrak{F}_i$ angehörigen Funktionen, die im Punkte x eine verallgemeinerte Ableitung $\overset{*}{f}{}^{(2m)}(x)$ besitzen, die Gleichung gelte:

(6) $$\overset{*}{f}{}^{(2m)}(x) = \lim_{n=\infty} I_n(f, x),$$

ist notwendig und hinreichend, daß noch folgende Bedingungen erfüllt seien:[1]

1. und 2. Es sind die Bedingungen 1. und 2. von Satz VI erfüllt.

3. Es gibt eine Konstante N, so daß

$$\int_a^b |(\xi - x)^{2m} \varphi(\xi, x, n)|\, d\xi < N \quad \text{für alle } n.$$

4. Es ist:

(7) $$\lim_{n=\infty} \int_a^b (\xi - x)^i \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0 \quad (i = 0, 2, \ldots 2m-2),$$

(8) $$\lim_{n=\infty} \int_a^b (\xi - x)^{2m} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = (2m)!$$

Es genüge für ein gegebenes x von (a, b) und alle $|t| \leqq k$ der Kern $\varphi(\xi, x, n)$ der Relation (2). Damit für alle der Klasse $\mathfrak{F}_i$ angehörigen Funktionen, die im Punkte x eine verallgemeinerte Ableitung $\overset{*}{f}{}^{(2m+1)}(x)$ besitzen, die Gleichung gelte:

(6a) $$\overset{*}{f}{}^{(2m+1)}(x) = \lim_{n=\infty} I_n(f, x),$$

ist notwendig und hinreichend, daß noch folgende Bedingungen erfüllt seien:

1. und 2. Es sind die Bedingungen 1. und 2. von Satz VI erfüllt.

3. Es gibt eine Konstante N, so daß:

$$\int_a^b |(\xi - x)^{2m+1} \varphi(\xi, x, n)|\, d\xi < N \quad \text{für alle } n.$$

4. Es ist:

(7a) $$\lim_{n=\infty} \int_a^b (\xi - x)^i \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0 \quad (i = 1, 3, \ldots, 2m-1),$$

(8a) $$\lim_{n=\infty} \int_a^b (\xi - x)^{2m+1} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = (2m+1)!$$

Wir beweisen die erste Hälfte dieses Satzes. Es handelt sich nur darum, daß die Bedingungen hinreichend sind; denn der Beweis, daß sie notwendig sind, ist derselbe wie in § 3.

Um nachzuweisen, daß unter den gemachten Voraussetzungen Gleichung (6) besteht, schreiben wir:

$$I_n(f, x) = \int_a^{x-k} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi + \int_{x+k}^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi + \int_{x-k}^{x+k} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi.$$

Da die Bedingungen 1. und 2. erfüllt sind, ist hierin, auf Grund desjenigen der Sätze I bis IV, der sich auf die Klasse $\mathfrak{F}_i$ bezieht:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^{x-k} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0\ ; \quad \lim_{n=\infty} \int_{x+k}^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0.$$

[1] Dies gilt auch für $m = 0$. Die Gleichungen (7) fallen dann weg, und in (8) steht auf der rechten Seite: 1.

Um also (6) zu beweisen, haben wir nur nachzuweisen:

$$\overset{*}{f}{}^{(2m)}(x) = \lim_{n=\infty} \int_{x-k}^{x+k} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi. \tag{9}$$

Da aber für $|t| \leqq k$ Beziehung (1) gilt, können wir schreiben:

$$\int_{x-k}^{x+k} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = \int_0^k \{f(x+t) + f(x-t)\}\, \varphi(x+t, x, n)\, dt.$$

Setzen wir hierin die Entwicklung (3) ein ($u_0 = x$), so haben wir weiter:

$$\int_{x-k}^{x+k} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 2a_0 \int_0^k \varphi(x+t, x, n)\, dt + 2 \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{2i}}{(2i)!} \int_0^k t^{2i} \varphi(x+t, x, n)\, dt +$$

$$+ 2\int_0^k \omega(t)\, t^{2m} \varphi(x+t, x, n)\, dt = a_0 \int_{x-k}^{x+k} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{2i}}{(2i)!} \int_{x-k}^{x+k} (\xi - x)^{2i} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi + \tag{10}$$

$$+ \int_{x-k}^{x+k} \omega(\xi - x)\, (\xi - x)^{2m} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi,$$

wobei berücksichtigt ist, daß zufolge (3) $\omega(t)$ eine gerade Funktion von t ist.

Nun ist, wegen der Sätze von § 1:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^{x-k} (\xi - x)^{2i} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0\ ; \quad \lim_{n=\infty} \int_{x+k}^{b} (\xi - x)^{2i} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, m),$$

also, wegen (7) und (8):

$$\lim_{n=\infty} \int_{x-k}^{x+k} (\xi - x)^{2i} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1)$$

$$\lim_{n=\infty} \int_{x-k}^{x+k} (\xi - x)^{2m} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = (2m)!$$

Berücksichtigt man dies, sowie die Tatsache, daß $a_{2m} = \overset{*}{f}{}^{(2m)}(x)$ ist, so sieht man aus (10), daß (9) und damit auch (6) bewiesen sein wird, wenn:

$$\lim_{n=\infty} \int_{x-k}^{x+k} \omega(\xi - x)\, (\xi - x)^{2m} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0$$

nachgewiesen sein wird. Dies aber beweist man, da (5) gilt, genau so, wie Gleichung (7) in § 3, was nicht noch einmal durchgeführt werde.

Damit ist die erste Hälfte des ausgesprochenen Satzes bewiesen. Der Beweis der zweiten Hälfte ist analog, nur hat man sich, statt auf (1) und (3), auf (2) und (4) zu stützen.

VIII *a*. »Man erhält aus Satz VIII einen für das Intervall $(-\infty, +\infty)$ gültigen Satz, indem man in Bedingung 1. und 2. von Satz VIII statt »Satz VI« setzt: »Satz VI *a*« und in Bedingung 3. und 4. von Satz VIII die Integrationsgrenzen a und b ersetzt durch $x - \varepsilon$ und $x + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$).«

§ 5. Bedingungen für gleichmäßige Konvergenz.

Wir wollen nun Bedingungen dafür aufstellen, daß die Konvergenz von $I_n(f, x)$ gegen $f^{(m)}(x)$ eine gleichmäßige sei.

Es hänge in den Sätzen von § 1 die Funktion $\varphi(\xi, n)$ noch ab von einem Parameter α und werde deshalb geschrieben $\varphi(\xi, \alpha, n)$. Und zwar sei φ für alle einer Menge $\mathfrak{A}$ angehörigen Werte des Parameters α als in $< a, b >$ meßbare Funktion von ξ gegeben. Wir setzen:

$$I_n(f, \alpha) = \int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, \alpha, n)\, d\xi.$$

IX. Damit für jede Funktion f der Klasse $\mathfrak{F}_i$ die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} I_n(f, \alpha) = 0 \tag{0}$$

gleichmäßig für alle α von $\mathfrak{A}$ gelte, ist notwendig und hinreichend, daß φ folgenden Bedingungen genügt:[1]

1 *a*. Für jedes einzelne α genügt φ der Bedingung 1. desjenigen der Sätze I bis IV, der sich auf die Klasse $\mathfrak{F}_i$ bezieht.[2]

1 *b*. Für die Klasse $\mathfrak{F}_1$: Es gibt einen Index n_0 und eine Konstante M, so daß, abgesehen von Nullmengen:

$$|\varphi(\xi, \alpha, n)| < M \quad \text{für alle } \xi \text{ von } < a, b >, \text{ alle } n \geqq n_0 \text{ und alle } \alpha \text{ von } \mathfrak{A}.$$

Für die Klasse $\mathfrak{F}_2$: Es gibt einen Index n_0 und eine Konstante M, so daß:

$$\int_a^b (\varphi(\xi, \alpha, n))^2 \, d\xi < M \quad \text{für alle } n \geqq n_0 \text{ und alle } \alpha \text{ von } \mathfrak{A}.$$

Für die Klasse $\mathfrak{F}_3$: Zu jedem $\mu > 0$ gehört ein $\lambda > 0$ und ein Index n_0, so daß für jede Menge I sich nicht überdeckender Teilintervalle von $< a, b >$, deren Gesamtlänge $< \lambda$ ist, für alle $n \geqq n_0$ und alle α von $\mathfrak{A}$:

$$\int_I |\varphi(\xi, \alpha, n)| \, d\xi < \mu.$$

Für die Klasse $\mathfrak{F}_4$: Es gibt einen Index n_0 und eine Konstante M, so daß:

$$\int_a^b |\varphi(\xi, \alpha, n)| \, d\xi < M \quad \text{für alle } n \geqq n_0 \text{ und alle } \alpha \text{ von } \mathfrak{A}.$$

2. Für jedes Teilintervall $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$ gilt die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \varphi(\xi, \alpha, n) \, d\xi = 0$$

gleichmäßig für alle α von $\mathfrak{A}$.

Die Bedingungen sind notwendig. Dies ist trivial für 1 *a* und 2. Wäre 1 *b* nicht erfüllt, so gäbe es eine Folge von zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Werten α_i und von Indizes n_i mit $\lim_{i=\infty} n_i = \infty$, so daß für $\bar{\varphi}(\xi, i) = \varphi(\xi, \alpha_i, n_i)$ Bedingung 1. des in Frage kommenden der Sätze I bis IV nicht erfüllt wäre. Es gäbe also in $\mathfrak{F}_i$ eine Funktion f, für die nicht

$$\lim_{i=\infty} \int_a^b f(\xi) \bar{\varphi}(\xi, i) \, d\xi = 0$$

wäre, so daß für dieses f Beziehung (0) nicht gleichmäßig für alle α von $\mathfrak{A}$ gelten würde.

Die Bedingungen sind hinreichend. Denn sind sie erfüllt, so genügt für jede Folge α_i aus $\mathfrak{A}$ und jede Indizesfolge n_i mit $\lim_{i=\infty} n_i = \infty$ die Funktion $\bar{\varphi}(\xi, i) = \varphi(\xi, \alpha_i, n_i)$ den Bedingungen 1. und 2. des in Frage kommenden der Sätze I bis IV, so daß (für alle solchen Folgen α_i und n_i): $\lim_{i=\infty} I_{n_i}(f, \alpha_i) = 0$ ist, was gleichbedeutend ist mit der gleichmäßigen Konvergenz von (0).

[1] Vgl. H. Lebesgue, a. a. O., p. 68.

[2] Dabei kann die in dieser Bedingung auftretende Konstante M (beziehungsweise, bei der Klasse $\mathfrak{F}_3$, die Konstante λ) noch von α abhängen.

Sei wie bisher der Kern $\varphi(\xi, x, n)$ für jedes x von (a, b) als eine in $< a, b >$ integrierbare Funktion von ξ gegeben. Sei ε irgend eine positive Zahl. Wir leiten, wie schon einmal, aus dem Kerne $\varphi(\xi, x, n)$ einen Kern $\psi(\xi, x, n, \varepsilon)$ her durch folgende Vorschrift:

$$\psi(\xi, x, n, \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{in } < x-\varepsilon, x+\varepsilon > \\ \varphi(\xi, x, n) & \text{in } < a, b > \text{ außerhalb } < x-\varepsilon, x+\varepsilon >. \end{cases}$$

Dann gilt folgender Satz: [1]

X. Für den Kern $\varphi(\xi, x, n)$ seien die nachstehenden Bedingungen erfüllt:

1. und 2. Für jedes gegebene $\varepsilon > 0$ genügt der dem Kerne $\varphi(\xi, x, n)$ zugeordnete Kern $\psi(\xi, x, n, \varepsilon)$ im Intervalle $< a, b >$ den Bedingungen 1 a, 1 b, 2. des Satzes IX für die Klasse $\mathfrak{F}_i$, wenn unter α die Veränderliche x, unter $\mathfrak{A}$ ein Teilintervall $< a', b' >$ von (a, b) verstanden wird.

3. Zu jedem (hinlänglich kleinen) $\varepsilon > 0$ gehört ein N, so daß:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |\varphi(\xi, x, n)|\, d\xi < N \quad \text{für alle } n \text{ und alle } x \text{ von } < a', b' >.$$

4. Für jedes (hinlänglich kleine) $\varepsilon > 0$ gilt die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 1$$

gleichmäßig für alle x von $< a', b' >$.

Dann gilt für jede der Klasse $\mathfrak{F}_i$ angehörige Funktion f, die in jedem Punkte von $< a', b' >$ stetig ist [2], die Beziehung:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} I_n(f, x)$$

gleichmäßig für alle x von $< a', b' >$.

Wir geben ein $\eta > 0$ beliebig vor, und zeigen zunächst: es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß:

$$|f(\xi) - f(x)| < \eta \text{ für alle } x \text{ von } < a', b' > \text{ und alle } \xi \text{ von } < x-\varepsilon, x+\varepsilon >.$$

In der Tat, da f stetig ist in $< a', b' >$, gibt es, zufolge des Satzes von der gleichmäßigen Stetigkeit, ein $\varepsilon_1 > 0$, so daß:

$$|f(\xi) - f(x)| < \eta$$

für alle x von $< a', b' >$ und alle gleichfalls zu $< a', b' >$ gehörigen ξ von $< x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1 >$.

Da aber f auch stetig ist in a' und in b', so gibt es ein $\varepsilon_2 > 0$, so daß:

$$|f(\xi) - f(a')| < \frac{\eta}{2} \text{ für alle } \xi \text{ von } < a'-\varepsilon_2, a'+\varepsilon_2 >,$$

$$|f(\xi) - f(b')| < \frac{\eta}{2} \text{ für alle } \xi \text{ von } < b'-\varepsilon_2, b'+\varepsilon_2 >,$$

und somit:

$$|f(\xi) - f(x)| < \eta \text{ für alle } x \text{ von } < a', a'+\varepsilon_2 > \text{ und alle } \xi \text{ von } < a'-\varepsilon_2, a' >,$$

$$|f(\xi) - f(x)| < \eta \text{ für alle } x \text{ von } < b'-\varepsilon_2, b' > \text{ und alle } \xi \text{ von } < b', b'+\varepsilon_2 >.$$

Wie man sieht, hat man für das ε unserer Behauptung lediglich die kleinere der beiden Größen ε_1 und ε_2 zu nehmen, und diese Behauptung ist bewiesen.

---

[1] Vgl. H. Lebesgue, a. a. O., p. 73.

[2] Es muß also f auch in a' und b' stetig (nicht etwas bloß rechtsseitig, beziehungsweise linksseitig stetig) sein.

Sei also zum vorgegebenen η das ε in dieser Weise bestimmt. Wir wählen es obendrein so klein, daß $< a'-\varepsilon, b'+\varepsilon >$ in $< a, b >$ liegt. Da der mit diesem ε gebildete Kern $\psi(\xi, x, n, \varepsilon)$ in $< a, b >$ den Voraussetzungen von Satz IX genügt,[1] so sehen wir: es gibt ein n_0, so daß:

(1) $$\left|\int_a^b f(\xi)\,\psi(\xi, x, n, \varepsilon)\,d\xi\right| < \eta \quad \text{für } n \geqq n_0 \text{ und alle } x \text{ von } < a', b' >.$$

Nun kann geschrieben werden:

$$I_n(f, x) = f(x)\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(\xi, x, n)\,d\xi + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} (f(\xi)-f(x))\,\varphi(\xi, x, n)\,d\xi + \int_a^b f(\xi)\,\psi(\xi, x, n, \varepsilon)\,d\xi.$$

Weil $f(x)$ in $< a', b' >$, zufolge der Stetigkeit, geschränkt ist, kann, nach Bedingung 4. n_0 auch so groß gewählt werden, daß:

$$\left|f(x)\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(\xi, x, n)\,d\xi - f(x)\right| < \eta \quad \text{für } n \geqq n_0 \text{ und alle } x \text{ von } < a', b' >.$$

Wegen Bedingung 3. und unserer Wahl von ε haben wir weiter:

$$\left|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} (f(\xi)-f(x))\,\varphi(\xi, x, n)\,d\xi\right| < \eta\cdot N \quad \text{für alle } n \text{ und alle } x \text{ von } < a', b' >,$$

und die beiden letzten Ungleichungen, zusammen mit (1) ergeben sofort:

$$|I_n(f, x) - f(x)| < (2+N)\cdot\eta \quad \text{für alle } n \geqq n_0 \text{ und alle } x \text{ von } < a', b' >.$$

Da η beliebig war, ist damit Satz X bewiesen.

XI. Für den Kern $\varphi(\xi, x, n)$ seien die nachstehenden Bedingungen erfüllt:

1. und 2. Der dem Kerne $\varphi(\xi, x, n)$ zugeordnete Kern $\psi(\xi, x, n, \varepsilon)$ genügt den Bedingungen 1. und 2. von Satz X.

3. Zu jedem (hinlänglich kleinen) $\varepsilon > 0$ gehört ein N, so daß:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |(\xi-x)^m\,\varphi(\xi, x, n)|\,d\xi < N \quad \text{für alle } n \text{ und alle } x \text{ von } < a', b' >.$$

4. Für jedes (hinlänglich kleine) $\varepsilon > 0$ gelten die Beziehungen:

$$\lim_{n=\infty}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} (\xi-x)^i\,\varphi(\xi, x, n)\,d\xi = 0; \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1)$$

$$\lim_{n=\infty}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} (\xi-x)^m\,\varphi(\xi, x, n)\,d\xi = m!$$

gleichmäßig für alle x von $< a', b' >$.

Dann gilt für jede der Klasse $\mathfrak{F}_i$ angehörige Funktion f, die im Teilintervall $< a', b' >$ von (a, b) m-mal stetig differenzierbar[2] ist, die Beziehung:

$$f^{(m)}(x) = \lim_{n=\infty}\int_a^b f(\xi)\,\varphi(\xi, x, n)\,d\xi$$

gleichmäßig für alle x von $< a', b' >$.

---

[1] Dabei ist unter α die Veränderliche x, unter $\mathfrak{A}$ das Intervall $< a', b' >$ zu verstehen.

[2] Die Funktion f heißt m-mal stetig differenzierbar in $< \alpha, \beta >$, wenn in jedem Punkte x von $< \alpha, \beta >$ die m-te Ableitung $f^{(m)}(x)$ existiert, und $f^{(m)}(x)$ in jedem Punkte von (α, β) stetig, in α rechtsseitig, in β linksseitig stetig ist.

Wir setzen zum Beweise,[1] wenn x ein Wert von $< a', b' >$ ist:

$$R_m(\xi, x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{(\xi - x)^i}{i!} f^{(m)}(x)$$

und:

$$\omega(\xi, x) = \frac{f(\xi) - R_m(\xi, x)}{(\xi - x)^m} \quad (\xi \neq x).$$

Wir behaupten: ist $\eta > 0$ beliebig gegeben, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß:

(2) $$|\omega(\xi, x)| < \eta \quad \text{für alle } x \text{ von } < a', b' > \text{ und alle } \xi \text{ von } < x - \varepsilon, x + \varepsilon >.$$

Liegt nicht nur x, sondern auch ξ in $< a', b' >$, so haben wir:

$$\omega(\xi, x) = \frac{1}{m!} \{f^{(m)}(x + \vartheta(\xi - x)) - f^{(m)}(x)\} \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Weil aber $f^{(m)}(\xi)$ als in $< a', b' >$ stetig vorausgesetzt wurde, gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$, so daß:

$$|f^{(m)}(x') - f^{(m)}(x)| < \eta$$

für alle x und x' von $< a', b' >$, für die $|x - x'| \leqq \varepsilon_1$. Wir haben also bereits:

$$|\omega(\xi, x)| < \eta$$

für alle x von $< a', b' >$ und alle gleichfalls zu $< a', b' >$ gehörigen ξ von $< x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1 >$.

Da $f(\xi)$ in a' und in b' eine m-te Ableitung hat, so gibt es ein $\varepsilon_2 > 0$, so daß:

(3) $$|\omega(\xi, a')| < \frac{\eta}{2} \text{ für alle } \xi \text{ von } < a' - \varepsilon_2, a' + \varepsilon_2 >,$$

(3') $$|\omega(\xi, b')| < \frac{\eta}{2} \text{ für alle } \xi \text{ von } < b' - \varepsilon_2, b' + \varepsilon_2 >.$$

Wir zeigen weiter, daß es ein $\varepsilon_3 > 0$ gibt, so daß:

(3a) $$|R_m(\xi, x) - R_m(\xi, a')| < \frac{\eta}{2}(x - \xi)^m$$

für alle ξ von $< a' - \varepsilon_3, a' >$ und alle x von $< a', a' + \varepsilon_3 >$; und ebenso:

(3'a) $$|R_m(\xi, x) - R_m(\xi, b')| < \frac{\eta}{2}(\xi - x)^m$$

für alle ξ von $< b', b' + \varepsilon_3 >$ und alle x von $< b' - \varepsilon_3, b' >$.

Sei in der Tat $g(\xi)$ die Funktion, die in $< a', b' >$ übereinstimmt mit $f(\xi)$, in $< a, a' >$ mit $R_m(\xi, a')$, und in $< b', b >$ mit $R_m(\xi, b')$. Dann ist $g(\xi)$ in ganz $< a, b >$ m-mal stetig differenzierbar, so daß wir nun für jedes x von $< a', b' >$ und jedes ξ von $< a, b >$ haben:

$$g(\xi) - R_m(\xi, x) = \frac{(\xi - x)^m}{m!} \left(g^{(m)}(x + \vartheta(\xi - x)) - g^{(m)}(x)\right) \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Weil $g^{(m)}$ in ganz $< a, b >$ stetig ist, gibt es ein $\varepsilon_4 > 0$, so daß:

$$|g^{(m)}(x') - g^{(m)}(x)| < \frac{\eta}{4}$$

[1] Der Beweis wird viel einfacher, wenn man sich darauf beschränkt zu beweisen, daß die Konvergenz von $I_n(f, x)$ gegen $f^{(m)}(x)$ gleichmäßig ist in jedem Teilintervalle $< a'', b'' >$ von (a', b').

für alle x und x' von $< a, b >$, für die $|x-x'| \leqq \varepsilon_4$ ist. — Wir setzen $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_4}{2}$. Liegt dann x in $< a', a'+\varepsilon_3 >$ und ξ in $< a'-\varepsilon_3, a' >$, so haben wir:

$$|R_m(\xi, a') - g(\xi)| < \frac{\eta}{4}(a'-\xi)^m,$$

$$|R_m(\xi, x) - g(\xi)| < \frac{\eta}{4}(x-\xi)^m,$$

woraus sich ergibt:

$$|R_m(\xi, x) - R_m(\xi, a')| < \frac{\eta}{2}(x-\xi)^m.$$

Damit ist (3 a) bewiesen, und ebenso beweist man ($3'\,a$).

Liegt nun wieder x in $< a', a'+\varepsilon_3 >$ und ξ sowohl in $< a'-\varepsilon_2, a' >$ als in $< a'-\varepsilon_3, a' >$, so gelten (3) und (3 a) gleichzeitig und wir haben, wenn ϑ eine Zahl zwischen -1 und 1 bezeichnet:

$$\omega(\xi, x) = \frac{f(\xi) - R_m(\xi, x)}{(\xi - x)^m} = \frac{f(\xi) - R_m(\xi, a') - \vartheta \cdot \frac{\eta}{2}(x-\xi)^m}{(\xi - x)^m} = \omega(\xi, a') \cdot \frac{(\xi - a')^m}{(\xi - x)^m} \pm \vartheta \cdot \frac{\eta}{2}$$

und somit, wegen (3):

$$|\omega(\xi, x)| < \eta.$$

Ebenso beweist man die Gültigkeit dieser Ungleichung, wenn x in $< b'-\varepsilon_3, b' >$ und ξ sowohl in $< b', b'+\varepsilon_2 >$ als in $< b', b'+\varepsilon_3 >$ liegt.

Diese Ungleichung ist also jetzt bewiesen:

1. Wenn x in $< a', b' >$ und ξ sowohl in $< a', b' >$ als auch in $< x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1 >$; 2. wenn x in $< a', a'+\varepsilon_3 >$ und ξ sowohl in $< a'-\varepsilon_2, a' >$ als in $< a'-\varepsilon_3, a' >$; 3. wenn x in $< b'-\varepsilon_3, b' >$ und ξ sowohl in $< b', b'+\varepsilon_2 >$ als in $< b', b'+\varepsilon_3 >$ liegt. Versteht man also unter ε die kleinste der drei Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, so gilt die Ungleichung für alle x von $< a, b >$ und alle ξ von $< x-\varepsilon, x+\varepsilon >$: das aber war die Behauptung (2).

Wir bilden nun mit diesem ε den Kern $\psi(\xi, x, n, \varepsilon)$ und sehen wieder durch Berufung auf Satz IX: es gibt einen Index n_0, so daß:

(4) $$\left|\int_a^b f(\xi)\, \psi(\xi, x, n, \varepsilon)\, d\xi\right| < \eta \quad \text{für alle } n \geqq n_0 \text{ und alle } x \text{ von } < a'\ b' >.$$

Für jedes x von $< a', b' >$ und jedes ξ von $< a'-\varepsilon, b'+\varepsilon >$ gilt die Entwicklung:

$$f(\xi) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{(\xi - x)^i}{i!} f^{(i)}(x) + (\xi - x)^m\, \omega(\xi, x).$$

Wir haben also:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = f(x) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi$$

(5) $$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} (\xi - x)^i\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \omega(\xi, x)\, (\xi - x)^m\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi.$$

Wegen Bedingung 4. kann n_0 so groß gewählt werden, daß:

(6) $$\left|\left\{f(x) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi + \sum_{i=1}^{m} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} (\xi - x)^i\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi\right\} - f^{(m)}(x)\right| < \eta$$

für $n \geqq n_0$ und alle x von $< a', b' >$.

Wegen (2) und Bedingung 3. haben wir:

(7) $$\left|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \omega(\xi, x)(\xi-x)^m \varphi(\xi, x, n)\, d\xi\right| < \eta \cdot N$$

für alle n und alle x von $< a', b' >$.

Wir haben also aus (5), (6) und (7):

(8) $$\left|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi - f^{(m)}(x)\right| < \eta\,(1+N)$$

für alle $n \geqq n_0$ und alle x von $< a', b' >$.

Beachten wir endlich noch, daß:

$$\int_a^b f(\xi)\, \psi(\xi, x, n, \varepsilon)\, d\xi = \int_a^{x-\varepsilon} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi + \int_{x+\varepsilon}^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi,$$

so sehen wir, daß aus (4) und (8) folgt:

$$|I_n(f, x) - f^{(m)}(x)| < \eta\,(2+N)$$

für alle $n \geqq n_0$ und alle x von $< a', b' >$. Da aber η beliebig war, so ist damit Satz XI bewiesen.

Die Übertragung der Sätze X und XI auf unendliche Intervalle bietet keine Schwierigkeit. Zunächst tritt an Stelle von Satz IX folgender Satz:

IX *a.* »Damit für jede Funktion f von $\mathfrak{F}_i$ die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi(\xi, \alpha, n)\, d\xi = 0$$

gleichmäßig für alle α von $\mathfrak{A}$ gelte, ist notwendig und hinreichend, daß φ folgenden Bedingungen genügt:

1 *a.* Für jedes einzelne α von $\mathfrak{A}$ genügt φ der Bedingung 1. desjenigen der Sätze I *a* bis IV *a*, der sich auf die Klasse $\mathfrak{F}_i$ bezieht.

1 *b.* Für die Klasse $\mathfrak{F}_1$: Es gibt einen Index n_0 und eine Konstante M, so daß, abgesehen von Nullmengen:

$$|\varphi(\xi, \alpha, n)| < M \quad \text{für alle } \xi, \text{ alle } n \geqq n_0 \text{ und alle } \alpha \text{ von } \mathfrak{A}.$$

Für die Klasse $\mathfrak{F}_2$: Es gibt einen Index n_0 und eine Konstante M, so daß:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(\xi, \alpha, n))^2\, d\xi < M \quad \text{für alle } n \geqq n_0 \text{ und alle } \alpha \text{ von } \mathfrak{A}.$$

Für die Klasse $\mathfrak{F}_3$: Zu jedem $\mu > 0$ gehört ein $\lambda > 0$ und ein Index n_0, so daß für jede Menge I sich nicht überdeckender Intervalle, deren Gesamtlänge $< \lambda$ ist, für alle $n \geqq n_0$ und alle α von $\mathfrak{A}$:

$$\int_I |\varphi(\xi, \alpha, n)|\, d\xi < \mu;$$

und zu jedem $\mu > 0$ gehört ein A und ein Index n_0, so daß:

$$\int_{-\infty}^{-A} |\varphi(\xi, \alpha, n)|\, d\xi < \mu; \quad \int_A^{+\infty} |\varphi(\xi, \alpha, n)|\, d\xi < \mu \quad \text{für alle } n \geqq n_0 \text{ und alle } \alpha \text{ von } \mathfrak{A}.$$

Für die Klasse $\mathfrak{F}_4$: Es gibt einen Index n_0 und eine Konstante M, so daß:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi, \alpha, n)|\, d\xi < M \quad \text{für alle } n \geqq n_0 \text{ und alle } \alpha \text{ von } \mathfrak{A}.$$

2. Für jedes endliche Intervall $<\alpha, \beta>$ gilt die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi, \alpha, n)\, d\xi = 0$$

gleichmäßig für alle α von $\mathfrak{A}$. Im Falle der Klasse $\mathfrak{F}_4$ gilt dies auch für die Beziehungen:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{0} \varphi(\xi, \alpha, n)\, d\xi = 0; \quad \lim_{n=\infty} \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi, \alpha, n)\, d\xi = 0.«$$

Unter Berufung auf diesen Satz IX *a* erkennt man dann sofort die Richtigkeit der beiden Sätze:

X *a*. »Für den Kern $\varphi(\xi, x, n)$ seien die nachstehenden Bedingungen erfüllt:

1. und 2. Für jedes $\varepsilon > 0$ genügt der dem Kerne $\varphi(\xi, x, n)$ zugeordnete Kern $\psi(\xi, x, n, \varepsilon)$ den Bedingungen 1 *a*, 1 *b* und 2. von Satz IX *a* für die Klasse $\mathfrak{F}_i$, wenn unter α die Veränderliche x, unter $\mathfrak{A}$ das Intervall $<a', b'>$ verstanden wird.

3. und 4. Es ist Bedingung 3. und 4. von Satz X erfüllt.

Dann gilt für jede der Klasse $\mathfrak{F}_i$ angehörige Funktion f, die in jedem Punkte von $<a', b'>$ stetig ist, die Beziehung:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi$$

gleichmäßig für alle x von $<a', b'>$.«

XI *a*. »Genügt der Kern $\varphi(\xi, x, n)$ den Bedingungen 1. und 2. von Satz X *a* und den Bedingungen 3. und 4. von Satz XI, so gilt für jede der Klasse $\mathfrak{F}_i$ angehörige Funktion f, die in $<a', b'>$ m-mal stetig differenzierbar ist, die Beziehung:

$$f^{(m)}(x) = \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi$$

gleichmäßig für alle x von $<a', b'>$.«

§ 6. Darstellung von $f(x)$ in gewissen Unstetigkeitspunkten.

Ein einfaches Korollar von Satz VII ist folgende, von H. Lebesgue direkt bewiesene Tatsache,[1] die, unter spezielleren Voraussetzungen über den Kern $\varphi(\xi, x, n)$, eine wesentliche Verschärfung von Satz VI enthält: Sei x ein fest gegebener Punkt von (a, b); dann gilt der Satz:

XII. Der Kern $\varphi(\xi, x, n)$ sei (als Funktion von ξ betrachtet) absolut stetig in einer Umgebung $<x-h, x+h>$ des Punktes x von (a, b), in der außerdem für jedes $\xi \neq x$ die Beziehung gelte:

(1) $$\lim_{n=\infty} \varphi(\xi, x, n) = 0.$$

Ferner genüge der Kern $\varphi(\xi, x, n)$ noch folgenden Bedingungen:

1. und 2. Es genügt $\varphi(\xi, x, n)$ den Bedingungen 1. und 2. von Satz VI.

3. Zu jedem hinlänglich kleinen $h > 0$ gibt es ein N, so daß:

$$\int_{x-h}^{x+h} \left| (\xi - x) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n) \right| d\xi < N \quad \text{für alle } n.$$

4. Es ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_{a}^{b} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 1.$$

[1] A. a. O. p. 80.

Dann gilt für jede der Klasse $\mathfrak{F}_i$ angehörige Funktion f, die im Punkte x die erste Ableitung ihres unbestimmten Integrales ist, die Gleichung:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} I_n(f, x). \tag{2}$$

Wir schicken die Bemerkung voraus, daß die in Bedingung 3. auftretende Ableitung $\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n)$ in einer Umgebung $< x-h, x+h >$ von x überall, abgesehen von einer Nullmenge, als endliche Zahl existiert: dies folgt, nach einem bekannten Satze, daraus, daß f in einer solchen Umgebung als **absolut stetig** vorausgesetzt wurde.

Die Bedeutung des zu beweisenden Satzes liegt darin, daß, wenn seine Bedingungen in allen Punkten x von (a, b) erfüllt sind, die Gleichung $f(x) = \lim_{n=\infty} I_n(f, x)$ für jede Funktion f von $\mathfrak{F}_i$ überall in (a, b) gilt, abgesehen von einer Nullmenge, denn es ist jede Funktion von $\mathfrak{F}_i$ überall, abgesehen von einer Nullmenge, Ableitung ihres unbestimmten Integrales.

Um nun Satz XII aus Satz VII herzuleiten, setzen wir:

$$F_1(\xi) = \int_a^\xi f(t)\, dt.$$

Wir wählen ein k (> 0) so klein, daß in $< x-k, x+k >$ die über φ gemachten Voraussetzungen gelten und insbesondere auch Bedingung 3. angewendet werden kann.

Durch partielle Integration, die wegen der absoluten Stetigkeit von φ angewendet werden darf, erhalten wir:

$$\int_{x-k}^{x+k} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = F_1(\xi)\, \varphi(\xi, x, n) \Big]_{x-k}^{x+k} - \int_{x-k}^{x+k} F_1(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi.$$

Nun ist, wegen Bedingung 1. und 2.:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ I_n(f, x) - \int_{x-k}^{x+k} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi \right\} = 0.$$

Ferner ist, wegen (1):

$$\lim_{n=\infty} F_1(\xi)\, \varphi(\xi, x, n) \Big]_{x-k}^{x+k} = 0.$$

Es wird also, um (2) nachzuweisen, genügen zu zeigen, daß:

$$\lim_{n=\infty} \int_{x-k}^{x+k} F_1(\xi) \left\{ -\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n) \right\} d\xi = f(x) \tag{2a}$$

ist. Da wir voraussetzen, daß im Punkte x die Funktion f Ableitung ihres unbestimmten Integrales sei, das heißt, daß:

$$f(x) = F_1'(x)$$

sei, da weiter $F_1(\xi)$ stetig ist und mithin zur Klasse $\mathfrak{F}_4$ gehört, so wird ($2a$) bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß der Kern:

$$\Phi(\xi, x, n) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n)$$

im Intervalle $< x-k, x+k >$ allen Voraussetzungen von Satz VII für die Klasse $\mathfrak{F}_4$ und für $m = 1$ genügt.

Bedingung 2. von VII ist erfüllt wegen:

(3)
$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = \varphi(\xi, x, n) \Big]_\alpha^\beta$$

und wegen (1). — Bedingung 3. von VII (für das Intervall $< x-k, x+k >$) ist identisch mit unserer Bedingung 3. — Um nachzuweisen, daß Bedingung 1. von VII erfüllt ist, sei $< \alpha, \beta >$ ein beliebiges, den Punkt x nicht enthaltendes Teilintervall von $< x-k, x+k >$. Es liege etwa in $(x, x+k)$. Wir haben zu zeigen, daß es ein M gibt, so daß:

(4)
$$\int_\alpha^\beta \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n) \right| d\xi < M \quad \text{für alle } n.$$

Schreiben wir:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n) = \frac{1}{\xi - x} \cdot \left\{ (\xi - x) \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n) \right\},$$

so haben wir:

$$\int_\alpha^\beta \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n) \right| d\xi \leqq \frac{1}{\alpha - x} \int_\alpha^\beta \left| (\xi - x) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n) \right| d\xi,$$

und somit nach Bedingung 3.

$$\int_\alpha^\beta \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n) \right| d\xi < \frac{N}{\alpha - x},$$

womit (4) erwiesen ist.

Was endlich Bedingung 4. von Satz VII anlangt, so sind die beiden Gleichungen zu beweisen:

$$\lim_{n=\infty} \int_{x-k}^{x+k} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \int_{x-k}^{x+k} (\xi - x) \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = -1.$$

Die erste folgt wegen (1) unmittelbar aus (3), angewendet auf $< x-k, x+k >$; die zweite folgt vermöge:

$$\int_{x-k}^{x+k} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = (\xi - x)\, \varphi(\xi, x, n) \Big]_{x-k}^{x+k} - \int_{x-k}^{x+k} (\xi - x) \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi$$

unter Berücksichtigung von (1) unmittelbar aus unseren Bedingungen 2. und 4.

Damit ist Satz XII nachgewiesen. Es sei, ohne Beweis, noch Folgendes bemerkt: Hält man an den Voraussetzungen von Satz XII, mit Ausnahme von Bedingung 3., fest, so ist, damit (2) für alle Funktionen von $\mathfrak{F}_1$ gelte, die im Punkte x Ableitungen ihres unbestimmten Integrales sind, notwendig, daß die Bedingung erfüllt sei:

3 *a*. Zu jedem hinlänglich kleinen $h > 0$ gibt es ein N, so daß

$$\left| \int_\alpha^\beta (\xi - x) \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi \right| < N$$

für alle n und alle Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $< x-h, x+h >$.

Satz XII läßt sich sofort noch etwas verallgemeinern:

XIII. Gelten alle Voraussetzungen und Bedingungen von Satz XII und ist noch für alle hinlänglich kleinen $|t|$ die Beziehung

(5)
$$\varphi(x+t, x, n) = \varphi(x-t, x, n)$$

erfüllt, so gilt (2) für jede Funktion f, die im Punkte x verallgemeinerte erste Ableitung ihres unbestimmten Integrales ist.

In der Tat, aus (5) folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(x+t, x, n) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(x-t, x, n),$$

so daß statt Satz VII Satz VIII verwendet werden kann.

Die Bedingung, daß f verallgemeinerte erste Ableitung seines unbestimmten Integrales sei, kann noch etwas umgeformt werden. Es ist nämlich nach § 4 die verallgemeinerte erste Ableitung von $F(\xi)$ im Punkte x nichts anderes als die erste Ableitung nach t für $t=0$ von

$$\frac{F(x+t)-F(x-t)}{2}.$$

Ist $F_1(\xi)$ unbestimmtes Integral von $f(\xi)$, so wird:

$$F_1(x+t)-F_1(x-t) = \int_{-t}^{t} f(x+u)\, du = \int_0^t (f(x+u)+f(x-u))\, du.$$

Es wird also $f(\xi)$ im Punkte x verallgemeinerte erste Ableitung seines unbestimmten Integrales sein, wenn:

$$\lim_{t=0} \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} f(x+u)\, du = f(x)$$

ist, oder, noch anders formuliert, wenn:

$$\lim_{t=0} \frac{1}{t} \int_0^t (f(x+t)+f(x-t)-2f(x))\, dt = 0$$

ist. In dieser letzteren Form findet sich die Bedingung bei H. Lebesgue.

§ 7. Darstellung von $f(x)$ in allgemeineren Unstetigkeitspunkten.

Die Sätze XII und XIII sind die einfachsten in einer Kette analoger, immer schärferer Sätze, die nun ausgesprochen und bewiesen werden sollen:

XIV. Der Kern $\varphi(\xi, x, n)$ besitze in einer Umgebung $< x-h, x+h >$ des Punktes x von (a, b) eine absolut stetige $(m-1)$-te Ableitung[1] $\frac{\partial^{m-1}}{\partial \xi^{m-1}} \varphi(\xi, x, n)$, und es gelten in dieser Umgebung für $\xi \neq x$ die Beziehungen:

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \varphi(\xi, x, n) = 0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\partial^i}{\partial \xi^i} \varphi(\xi, x, n) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots, m-1).$$

Ferner genüge der Kern $\varphi(\xi, x, n)$ noch folgenden Bedingungen:

1. und 2. Es genügt $\varphi(\xi, x, n)$ den Bedingungen 1. und 2. von Satz VI.

3. Zu jedem hinlänglich kleinen $h > 0$ gibt es ein N, so daß:

$$\int_{x-h}^{x+h} \left| (\xi - x)^m \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \varphi(\xi, x, n) \right| d\xi < N \quad \text{für alle } n.$$

4. Es ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 1.$$

---

[1] Daraus folgt, daß $\frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \varphi(\xi, x, n)$ in $< x-h, x+h >$ überall, abgesehen von einer Nullmenge, als endliche Zahl existiert.

Dann gilt für jede der Klasse $\mathfrak{F}_i$ angehörige Funktion f, die im Punkte x m-te Ableitung ihres m-fach iterierten unbestimmten Integrales ist, die Gleichung:

(2)
$$f(x) = \lim_{n=\infty} I_n(f, x).$$

Dabei ist unter dem m-fach iterierten unbestimmten Integrale von f die Funktion F_m verstanden, die definiert ist durch:

$$F_1(\xi) = \int_a^\xi f(t)\,dt; \quad F_{i+1}(\xi) = \int_a^\xi F_i(t)\,dt.$$

Zum Beweise von Satz XIV wählen wir nun ein k (> 0) so klein, daß in der Umgebung $< x-k,\ x+k >$ von x alle über $\varphi(\xi, x, n)$ gemachten Voraussetzungen gelten, insbesondere auch Bedingung 3. angewendet werden kann.

Durch m-malige partielle Integration (was wegen der absoluten Stetigkeit von $\frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial \xi^{m-1}}$ und der daraus folgenden absoluten Stetigkeit von $\frac{\partial^i \varphi}{\partial \xi^i}$ $(i < m-1)$ und von φ zulässig ist) erhalten wir:

$$\int_{x-k}^{x+k} f(\xi)\,\varphi(\xi, x, n)\,d\xi = F_1(\xi)\,\varphi(\xi, x, n)\Big]_{x-k}^{x+k} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i F_{i+1}(\xi) \frac{\partial^i}{\partial \xi^i} \varphi(\xi, x, n)\Big]_{x-k}^{x+k} + (-1)^m \int_{x-k}^{x+k} F_m(\xi) \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \varphi(\xi, x, n)\,d\xi.$$

Wegen (1) verschwinden beim Grenzübergange die rechts außerhalb des Integralzeichens stehenden Glieder. Wegen der Bedingungen 1. und 2. haben wir:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \int_a^b f(\xi)\,\varphi(\xi, x, n)\,d\xi - \int_{x-k}^{x+k} f(\xi)\,\varphi(\xi, x, n)\,d\xi \right\} = 0.$$

Es wird also, um (2) nachzuweisen, genügen zu zeigen, daß:

(2 *a*)
$$\lim_{n=\infty} \int_{x-k}^{x+k} F_m(\xi) \left\{ (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \varphi(\xi, x, n) \right\} d\xi = f(x)$$

ist. Da wir voraussetzen, daß im Punkte x die Funktion f die m-te Ableitung von F_m sei, da weiter F_m zur Klasse $\mathfrak{F}_4$ gehört, so wird (2 *a*) bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß der Kern $(-1)^m \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \varphi(\xi, x, n)$ im Intervalle $< x-k,\ x+k >$ allen Voraussetzungen von Satz VII für die Klasse $\mathfrak{F}_4$ genügt.

Für Bedingung 2. von VII folgt dies wieder unmittelbar aus (1) und der Relation:

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \varphi(\xi, x, n)\,d\xi = \frac{\partial^{m-1}}{\partial \xi^{m-1}} \varphi(\xi, x, n)\Big]_\alpha^\beta.$$

Bedingung 3. von VII (für das Intervall $< x-k,\ x+k >$) ist identisch mit unserer Bedingung 3. Für Bedingung 1. von VII wird es ganz analog wie in § 6 aus unserer Bedingung 3. hergeleitet. Was endlich Bedingung 4. von VII anlangt, so sind die Gleichungen zu beweisen:

$$\lim_{n=\infty} \int_{x-k}^{x+k} (\xi - x)^i \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \varphi(\xi, x, n)\,d\xi = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1),$$

$$\lim_{n=\infty} \int_{x-k}^{x+k} (\xi - x)^m \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \varphi(\xi, x, n)\,d\xi = (-1)^m m!$$

Sie folgen vermöge der Gleichungen (1) und unserer Bedingungen 2. und 4. aus der für $i < m$ gültigen Formel: [1]

$$\int_{x-k}^{x+k} (\xi - x)^i \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = \sum_{r=0}^{i} (-1)^r i\,(i-1)\ldots(i-r+1)\,(\xi - x)^{i-r} \frac{\partial^{m-r-1}}{\partial \xi^{m-r-1}} \varphi(\xi, x, n) \Big|_{x-k}^{x+k}$$

und der Formel:

$$\int_{x-k}^{x+k} (\xi - x)^m \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r m\,(m-1)\ldots(m-r+1)\,(\xi - x)^{m-r} \frac{\partial^{m-r-1}}{\partial \xi^{m-r-1}} \varphi(\xi, x, n) \Big]_{x-k}^{x+k} +$$

$$+ (-1)^m \cdot m! \int_{x-k}^{x+k} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi.$$

Unser Satz ist damit bewiesen.

Auch hier können wir ihn sofort noch etwas verallgemeinern:

XV. Gilt, außer den Voraussetzungen und Bedingungen von Satz XIV noch für alle hinlänglich kleinen $|t|$ die Beziehung:

(3) $$\varphi(x+t, x, n) = \varphi(x-t, x, n),$$

so gilt (2) für jede Funktion f, die im Punkte x verallgemeinerte m-te Ableitung ihres m-fach iterierten unbestimmten Integrales ist.

In der Tat haben wir aus (3):

$$\frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \varphi(x+t, x, n) = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \varphi(x-t, x, n),$$

so daß Satz VIII angewendet werden kann.

Auch Satz XIV und XV können ohneweiters auf unendliche Intervalle ausgedehnt werden:

XIV a und XV a: »Man erhält aus den Sätzen XIV und XV Sätze für das Intervall $(-\infty, +\infty)$, indem man in den Bedingungen 1. und 2. statt »Satz VI« setzt »Satz VI a« und in Bedingung 4. die Integrationsgrenzen a und b ersetzt durch $x-h$ und $x+h$ $(h > 0)$.«

§ 8. Differenziation singulärer Integrale.

Die Sätze VII und VIII gestatten es auch, Theoreme über die Differenziation von Darstellungen gegebener Funktionen durch singuläre Integrale herzuleiten.

Nehmen wir an, es genüge $\varphi(\xi, x, n)$ für alle x von (a, b) den Bedingungen von Satz VI. Insbesondere ist dann für jedes Teilintervall $<\alpha, \beta>$ von $<a, b>$, das den Punkt x nicht enthält:

(1) $$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0,$$

während für das Intervall $<a, b>$ gilt:

(2) $$\lim_{n=\infty} \int_{a}^{b} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 1.$$

Ist $f(x)$ stetig in allen Punkten von (a, b), so haben wir in ganz (a, b):

(3) $$f(x) = \lim_{n=\infty} \int_{a}^{b} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi.$$

[1] Es ist in dieser Formel $\frac{\partial^0 \varphi}{\partial \xi^0}$ durch φ zu ersetzen und $i\,(i-1)\ldots(i-r+1)$ für $r=0$ zu ersetzen durch 1.

Differenzieren wir Formel (1), die nichts anderes ist als Formel (3) für diejenige Funktion f, die $= 1$ ist in $< \alpha, \beta >$ und $= 0$ außerhalb $< \alpha, \beta >$, m-mal nach x und nehmen an, was natürlich durchaus nicht immer der Fall ist, es könne die Differenziation unter dem Limes- und Integralzeichen ausgeführt werden, so erhalten wir:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0,$$

das heißt es genügt der Kern $\frac{\partial^m}{\partial x^m} \varphi(\xi, x, n)$ der Bedingung 2. von Satz VII.

Schreiben wir neben Formel (2), die nichts anderes ist als (3) für $f = 1$, noch die aus (3) für $f = \xi^i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ entstehenden Formeln auf:

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \int_a^b \xi^i \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = x^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Differenzieren wir die Formeln (2) und (4) m-mal nach x und nehmen wir wieder an, es könne die Differenziation unter dem Limes- und Integralzeichen ausgeführt werden, so erhalten wir:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \xi^i \frac{\partial^m}{\partial x^m} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1),$$

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \xi^m \frac{\partial^m}{\partial x^m} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = m!$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß der Kern $\frac{\partial^m}{\partial x^m} \varphi(\xi, x, n)$ der Bedingung 4. von Satz VII genügt. Nehmen wir also an, er genüge auch noch den Bedingungen 1. und 3. von Satz VII, welch letztere wir nun aufschreiben als Bedingung:

3 *a*. Es gibt ein N, so daß:

$$\int_a^b \left| (\xi - x)^m \frac{\partial^m}{\partial x^m} \varphi(\xi, x, n) \right| d\xi < N \quad \text{für alle } n,$$

so kann Satz VII angewendet werden, und wir haben das Resultat:

Genügt sowohl der Kern $\varphi(\xi, x, n)$ als auch der Kern $\frac{\partial^m}{\partial x^m} \varphi(\xi, x, n)$ der Bedingung 1. von Satz VI, genügt der Kern $\varphi(\xi, x, n)$ ferner den Bedingungen 2., 3. und 4. von Satz VI und unserer Bedingung 3 *a*, und darf Formel (3) für $f = \xi^i$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ sowie für die Funktionen f, die in einem den Punkt x nicht enthaltenden Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$ den Wert 1, sonst den Wert 0 haben, m-mal unter dem Limes- und Integralzeichen nach x differenziert werden, so gilt dies für jedes f von $\mathfrak{F}_i$, das im Punkte x eine m-te Ableitung besitzt.

Ein befriedigenderes Resultat erhalten wir, wenn wir uns auf den (von H. Lebesgue ausschließlich betrachteten) Fall beschränken, daß der Kern die Form hat: $\varphi(\xi - x, n)$. Wir können dann den Satz aussprechen:

XVI. Sei $\varphi(u, n)$ eine im Intervalle $(-l, l)$ gegebene Funktion, die eine in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(-l, l)$ absolut stetige Ableitung $(m-1)$-ter Ordnung[1] besitzt.[2]

Ferner sei für jedes $u \neq 0$ von $(-l, l)$:

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \varphi(u, n) = 0; \quad \lim_{n=\infty} \varphi^{(i)}(u, n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

[1] Es ist (im Falle $m = 1$) unter der Ableitung 0-ter Ordnung hier wie im Folgenden die Funktion $\varphi(u, n)$ selbst zu verstehen.

[2] Daraus folgt, daß in $(-l, l)$ auch die m-te Ableitung $\varphi^{(m)}(u)$ überall, abgesehen von einer Nullmenge, als endliche Zahl existiert.

Damit für jede im Intervalle $< a, a+l >$ zur Klasse $\mathfrak{F}_i$ gehörige Funktion, die im beliebigen Punkte x von $(a, a+l)$ endliche Ableitungen der m ersten Ordnungen besitzt, die Formeln gelten:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \int_a^{a+l} f(\xi)\, \varphi(\xi - x, n)\, d\xi, \tag{6}$$

$$f^{(i)}(x) = \lim_{n=\infty} (-1)^i \int_a^{a+l} f(\xi)\, \varphi^{(i)}(\xi - x, n)\, d\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{7}$$

ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(u, n)$ folgenden Bedingungen genügt:

1. In jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(-l, l)$, das den Punkt 0 nicht enthält, genügt $\varphi^{(m)}(u, n)$ der Bedingung 1. desjenigen der Sätze I bis IV, der sich auf die Klasse $\mathfrak{F}_i$ bezieht.[1]

2. Für jedes Teilintervall $< \alpha, \beta >$ von $(-l, l)$, das den Punkt 0 nicht enthält, ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \varphi(u, n)\, du = 0.$$

3. Es gibt ein N und ein $h > 0$, so daß:

$$\int_{-h}^{h} |u^m \varphi^{(m)}(u, n)|\, du < N \quad \text{für alle } n. \tag{8}$$

4. Es gibt ein $h > 0$, für das:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-h}^{h} \varphi(u, n)\, du = 1. \tag{9}$$

Die Bedingungen sind hinreichend. Bemerken wir zunächst, daß man durch partielle Integration erhält:[2]

$$\int_0^h |u^{m-1} \varphi^{(m-1)}(u, n)|\, du = \frac{u^m}{m} |\varphi^{(m-1)}(u, n)| \Big]_0^h - \frac{1}{m} \int_0^h u^m \cdot \operatorname{sgn} \varphi^{(m-1)}(u, n)\, \varphi^{(m)}(u, n)\, du.$$

Es gibt also, wegen (8) und (5), ein M, so daß:

$$\int_0^h |u^{m-1} \varphi^{(m-1)}(u, n)|\, du < M \quad \text{für alle } n.$$

Ebenso sieht man, daß es ein M gibt, so daß:

$$\int_{-h}^0 |u^{m-1} \varphi^{(m-1)}(u, n)|\, du < M \quad \text{für alle } n.$$

Wir sehen also schließlich, daß aus (8) folgt: es kann N so groß angenommen werden, daß:

$$\int_{-h}^{h} |u^{m-1} \varphi^{(m-1)}(u, n)|\, du < N \quad \text{für alle } n. \tag{10}$$

Ebenso wie (10) aus (8) hergeleitet wurde, kann aus (10) hergeleitet werden: es kann N auch so groß angenommen werden, daß:

$$\int_{-h}^{h} |u^{m-2} \varphi^{(m-2)}(u, n)|\, du < N \quad \text{für alle } n,$$

[1] Daraus folgt, daß dasselbe auch für $\varphi(u, n)$ und $\varphi^{(i)}(u, n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ gilt.

[2] In der folgenden Gleichung bedeutet $\operatorname{sgn} \varphi^{(m-1)}$ das Vorzeichen von $\varphi^{(m-1)}$, wo $\varphi^{(m-1)} \neq 0$ ist, und den Wert 0, wo $\varphi^{(m-1)} = 0$ ist.

und indem man so weiter schließt, sieht man, daß aus Bedingung 3. und (5) folgt: es gibt ein N, so daß:

$$\int_{-h}^{h} |u^i \varphi^{(i)}(u, n)| du < N \quad \text{für alle } n \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{11}$$

$$\int_{-h}^{h} |\varphi(u, n)| du < N \quad \text{für alle } n. \tag{12}$$

Ferner erhält man durch partielle Integration:[1]

$$\int_{-h}^{h} u^j \varphi^{(i)}(u, n) du = \sum_{r=0}^{j} (-1)^r j(j-1)\ldots(j-r+1)\, u^{j-r} \varphi^{(i-r-1)}(u, n)\Big]_{-h}^{h} \qquad (0 < j < i \leqq m)$$

$$\int_{-h}^{h} u^i \varphi^{(i)}(u, n) du = \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \cdot i(i-1)\ldots(i-r+1)\, u^{i-r} \varphi^{(i-r-1)}(u, n)\Big]_{-h}^{h} +$$

$$+ (-1)^i \cdot i! \int_{-h}^{h} \varphi(u, n)\, du \qquad (0 < i \leqq m),$$

so daß wir wegen (9) und (5) die Formeln haben:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-h}^{h} u^j \varphi^{(i)}(u, n)\, du = 0 \qquad (0 < j < i \leqq m) \tag{13}$$

$$\lim_{n=\infty} \int_{-h}^{h} u^i \varphi^{(i)}(u, n)\, du = (-1)^i \cdot i! \qquad (0 < i \leqq m). \tag{14}$$

Endlich folgt aus:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi^{(i)}(u, n)\, du = \varphi^{(i-1)}(u, n)\Big]_{\alpha}^{\beta}$$

wegen (5) unmittelbar für jedes den Punkt 0 nicht enthaltende Intervall $<\alpha, \beta>$, sowie für jedes Intervall $<-h, h>$:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^{(i)}(u, n)\, du = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{15}$$

Bedingung 1., 2., 4. unseres Satzes zusammen mit Ungleichung (12) besagt nun aber: liegt x in $(a, a+l)$, so genügt der Kern $\varphi(\xi, x, n) = \varphi(\xi - x, n)$ im Intervalle $<a, a+l>$ der Veränderlichen ξ allen Bedingungen von Satz VI. Ferner besagen die Bedingungen 1. und 3. unseres Satzes zusammen mit den Ungleichungen (11) und den Gleichungen (13), (14), (15): der Kern $\varphi(\xi, x, n) = (-i)^i \cdot \varphi^{(i)}(\xi - x, n)$ $(i = 1, 2 \ldots, m)$ genügt allen Bedingungen von Satz VII für $m = i$. Damit aber sind unsere Bedingungen als hinreichend erwiesen.

Die Bedingungen sind notwendig. Angenommen in der Tat, es wäre Bedingung 1. für ein den Nullpunkt nicht enthaltendes Teilintervall $<\alpha, \beta>$ von $(-l, l)$ nicht erfüllt. Da die Länge von $<\alpha, \beta>$ gewiß $< l$ ist, gäbe es in $(a, a+l)$ einen Punkt x, so daß $<\alpha, \beta>$ in $<a-x, a-x+l>$ enthalten wäre. Dann aber würde der Kern $\varphi^{(m)}(\xi - x, n)$ im Intervalle $<a, a+l>$ der Veränderlichen ξ nicht der Bedingung 1. von Satz VII genügen, so daß (7) für $i = m$ nicht für alle Funktionen von $\mathfrak{F}_i$ gelten könnte. Angenommen, Bedingung 2. wäre für ein den Nullpunkt nicht enthaltendes Teilintervall $<\alpha, \beta>$ von $(-l, l)$ nicht erfüllt, so sieht man ebenso, daß für ein gewisses x von $(a, a+l)$ der Kern $\varphi(\xi - x, n)$ in $<a, a+l>$ der Bedingung 2. von Satz VI nicht genügen würde, so daß (6) nicht für alle Funktionen von $\mathfrak{F}_i$ gelten könnte. Wäre Bedingung 3. nicht erfüllt, so könnte $\varphi^{(m)}(\xi - x, n)$ für kein x von $(a, a+l)$ der Bedingung 3. von Satz VII genügen. Bedingung 4. ergibt sich als notwendig durch Betrachtung der Funktion, die in $<x-h, x+h>$ den Wert 1, außerhalb $<x-h, x+h>$ den Wert 0 hat.

[1] In den folgenden Formeln ist φ^0 durch φ und $j \cdot (j-1) \ldots (j-r+1)$ für $r = 0$ durch 1 zu ersetzen.

Satz XVI wird ergänzt durch:

XVII. Genügt die Funktion $\varphi(u, n)$ außer den Voraussetzungen und Bedingungen von Satz XVI noch für alle hinlänglich kleinen $|u|$ der Beziehung:

$$\varphi(u, n) = \varphi(-u, n),$$

so gilt Satz XVI auch noch, wenn man darin die Ableitung $f^{(i)}(x)$ durch die verallgemeinerte i-te Ableitung $\overset{*}{f}{}^{(i)}(x)$ ersetzt.

Der Beweis ist derselbe, wie für Satz XVI, nur hat man sich, statt auf Satz VII, diesmal auf Satz VIII zu berufen.

Auch die Sätze XVI und XVII können sofort auf das Intervall $(-\infty, +\infty)$ übertragen werden. Wir führen zu diesem Zwecke wieder die Funktion $\psi(u, n, h)$ ein, die aus $\varphi(u, n)$ dadurch entsteht, daß man die Funktionswerte im Intervalle $< -h, h >$ durch 0 ersetzt. Die i-te Ableitung von $\psi(u, n, h)$ sei $\psi^{(i)}(u, n, h)$.

XVI*a*. »Sei $\varphi(u, n)$ eine für alle reellen u gegebene Funktion, die eine in jedem endlichen Intervalle $< \alpha, \beta >$ absolut stetige $(m-1)$-te Ableitung besitzt. Ferner sei für jedes $u \neq 0$:

$$\lim_{n=\infty} \varphi(u, n) = 0; \quad \lim_{n=\infty} \varphi^{(i)}(u, n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Damit für jede in $(-\infty, +\infty)$ zu $\mathfrak{F}_i$ gehörige Funktion, die im beliebigen Punkte x endliche Ableitungen der m ersten Ordnungen besitzt, die Gleichungen gelten:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi(\xi - x, n)\, d\xi, \tag{6a}$$

$$f^{(i)}(x) = \lim_{n=\infty} (-1)^i \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi^{(i)}(\xi - x, n)\, d\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{7a}$$

ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(u, n)$ folgenden Bedingungen genügt:

1. Für jedes $h > 0$ genügen $\psi(u, n, h)$ und $\psi^{(i)}(u, n, h)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ der Bedingung 1. desjenigen der Sätze I*a* bis IV*a*, der sich auf die Klasse $\mathfrak{F}_i$ bezieht.

2. In jedem endlichen, den Nullpunkt nicht enthaltenden Intervalle $< \alpha, \beta >$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u, n)\, du = 0,$$

und wenn es sich um $\mathfrak{F}_4$ handelt, ist außerdem für jedes $h > 0$:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{-h} \varphi(u, n)\, du = 0; \quad \lim_{n=\infty} \int_{h}^{+\infty} \varphi(u, n)\, du = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{-h} \varphi^{(i)}(u, n)\, du = 0; \quad \lim_{n=\infty} \int_{h}^{+\infty} \varphi^{(i)}(u, n)\, du = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

3. und 4. Es sind die Bedingungen 3. und 4. von Satz XVI erfüllt.«

XVII*a*. »Ist außerdem für alle hinlänglich kleinen $|u|$:

$$\varphi(u, n) = \varphi(-u, n),$$

so kann in XVI*a* die Ableitung $f^{(i)}(x)$ auch durch die verallgemeinerte i-te Ableitung $\overset{*}{f}{}^{(i)}(x)$ ersetzt werden.«

§ 9. Bedingungen für gleichmäßige Konvergenz.

Wir geben nun Bedingungen an, unter denen die Konvergenz in den Formeln (6) und (7) von § 8 ein gleichmäßige ist.

Sei $\varphi(u, n)$ für alle nicht negativen ganzzahligen n als Funktion von u gegeben in $(-l, l)$. Ist $h > 0$ irgendwie gegeben, so bezeichnen wir wieder mit $\psi(u, n, h)$ die Funktion, die in $< -h, h >$ gleich 0, sonst gleich $\varphi(u, n)$ ist.

XVIII. Sei $\varphi(u, n)$ eine in $(-l, l)$ gegebene, in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(-l, l)$ für jedes einzelne n geschränkte Funktion, für die die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \varphi(u, n) = 0 \tag{1}$$

gleichmäßig in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(-l, l)$ gilt und die außerdem folgenden Bedingungen genügt:[1]

3. Es gibt ein $h > 0$ und ein N, so daß:

$$\int_{-h}^{h} |\varphi(u, n)|\, du < N \quad \text{für alle } n.$$

4. Es gibt ein $h > 0$, so daß:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-h}^{h} \varphi(u, n)\, du = 1.$$

Dann gilt für jede in $< a, a+l >$ zu $\mathfrak{F}_1$ gehörige[2] Funktion f die Formel:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \int_a^{a+l} f(\xi)\, \varphi(\xi - x, n)\, d\xi$$

in jedem Punkte x von $(a, a+l)$, in dem f stetig ist; sie gilt gleichmäßig in jedem Teilintervall $< a', b' >$ von $(a, a+l)$, in dessen sämtlichen Punkten f stetig ist.

Zum Beweise genügt es zu zeigen, daß der Kern

$$\varphi(\xi, x, n) = \varphi(\xi - x, n)$$

den Bedingungen von Satz X für die Klasse $\mathfrak{F}_1$ genügt.

Sei, um dies für Bedingung 1. von X nachzuweisen, $h > 0$ beliebig gegeben und x ein Punkt von $< a', b' >$. Die Werte von $\psi(\xi, x, n, h) = \psi(\xi - x, n, h)$ sind 0 in $< x-h, x+h >$ und stimmen in $< a, x-h >$ und $< x+h, a+l >$ überein mit denen von $\varphi(u, n)$ in $< a-x, -h >$ und $< h, a+l-x >$. Diese beiden letzteren Intervalle aber liegen für jedes x von $< a', b' >$ in den Intervallen $< a-b', -h >$ und $< h, a+l-a' >$, die ihrerseits den Nullpunkt nicht enthaltende Teilintervalle von $(-l, l)$ sind.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (1) gibt es also ein n_0, so daß:

$$|\varphi(u, n)| < 1 \quad \text{für } n \geqq n_0$$

für alle u dieser beiden Intervalle. Da aber nach Voraussetzung $\varphi(u, n)$ für jedes einzelne n in diesen Intervallen geschränkt ist, gibt es ein M $(\geqq 1)$, so daß:

$$|\varphi(u, n)| < M \quad (n = 1, 2, \ldots, n_0)$$

für alle u dieser beiden Intervalle. Wir sehen also, es ist:

$$|\psi(\xi, x, n, h)| < M \quad \text{für alle } n, \text{ alle } \xi \text{ von } < a, a+l >, \text{ alle } x \text{ von } < a', b' >.$$

Damit ist Bedingung 1. von X[3] nachgewiesen.

[1] Wir bezeichnen diese Bedingungen mit 3. und 4. wegen der Analogie mit unseren bisherigen Sätzen.

[2] Und mithin auch für jede zu $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$ gehörige Funktion.

[3] Das heißt Bedingung 1 *a* und 1 *b* von Satz IX.

Sei, um Bedingung 2. nachzuweisen, $<\alpha, \beta>$ ein beliebiges Teilintervall von $<a, a+l>$. Es ist:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(\xi, x, n, h)\, d\xi = \int_{\alpha-x}^{\beta-x} \psi(u, n, h)\, du.$$

Für alle x von $<a', b'>$ liegt das Integrationsintervall $<\alpha - x, \beta - x>$ in $<\alpha - b', \beta - a'>$, das seinerseits in $(-l, l)$ liegt. Es ist also:

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} \psi(\xi, x, n, h)\, d\xi\right| \leqq \int_{\alpha-b'}^{\beta-a'} |\psi(u, n, h)|\, du. \tag{2}$$

Nun ist aber, wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (1):

$$\lim_{n=\infty} \psi(u, n, h) = 0$$

gleichmäßig in ganz $<\alpha - b', \beta - a'>$ und somit:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha-b'}^{\beta-a'} |\psi(u, n, h)|\, du = 0.$$

Da dieser Ausdruck von x nicht abhängt, ist zufolge (2) Bedingung 2. von X bewiesen.

Daß Bedingung 3. und 4. von X erfüllt sind, folgt wegen:

$$\int_{x-h}^{x+h} |\varphi(\xi, x, n)|\, d\xi = \int_{-h}^{h} |\varphi(u, n)|\, du; \quad \int_{x-h}^{x+h} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = \int_{-h}^{h} \varphi(u, n)\, du$$

(wo die rechten Seiten von x nicht abhängen) sofort aus den Bedingungen 3. und 4. unseres Satzes.

XIX. Sei $\varphi(u, n)$ eine in $(-l, l)$ gegebene Funktion, die eine in jedem Teilintervalle $<\alpha, \beta>$ von $(-l, l)$ absolut stetige $(m-1)$-te Ableitung besitzt.[1] Ferner möge die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \varphi^{(m-1)}(u, n) = 0 \tag{3}$$

gleichmäßig in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervalle $<\alpha, \beta>$ von $(-l, l)$ gelten. Sind dann noch die Bedingungen 1., 2., 3. und 4. von Satz XVI erfüllt, so gelten die Gleichungen (6) und (7) von Satz XVI gleichmäßig in jedem Teilintervalle $<a', b'>$ von $(a, a+l)$, in dem die zu $\mathfrak{F}_l$ gehörige Funktion f m-mal stetig differenzierbar ist.

Korollar zu Satz XIX. Existiert die Ableitung $\varphi^{(m)}(u, n)$ für jedes $u \neq 0$ von $(-l, l)$, ist sie für jedes einzelne n geschränkt in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervalle $<\alpha, \beta>$ von $(-l, l)$ und ist:

$$\lim_{n=\infty} \varphi^{(m)}(u, n) = 0$$

gleichmäßig in jedem der genannten Teilintervalle $<\alpha, \beta>$, so ist in Satz XIX die die Beziehung (3) betreffende Voraussetzung sowie Bedingung 1. von Satz XVI für die Klasse $\mathfrak{F}_1$ von selbst erfüllt.

Wir beweisen Satz XIX. Was die Gleichung (6) von XVI anlangt, braucht nur gezeigt zu werden, daß $\varphi(u, n)$ den Voraussetzungen und Bedingungen von Satz XVIII genügt: daß in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervalle $<\alpha, \beta>$ von $(-l, l)$ $\varphi(u, n)$ geschränkt ist für jedes einzelne u, folgt unmittelbar aus unseren Voraussetzungen über $\varphi^{(m-1)}(u, n)$. Was die in Satz XVIII vorausgesetzte Beziehung (1) anlangt, so folgt aus dem gleichmäßigen Bestehen von (3), daß in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervalle $<\alpha, \beta>$ von $(-l, l)$ eine Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \{\varphi(u, n) + c_0(n) + c_1(n)\, u + \ldots + c_{m-2}(n)\, u^{m-2}\} = 0$$

---

[1] Für $m = 1$ ist darunter die Funktion $\varphi(u, n)$ selbst zu verstehen.

gleichmäßig gilt, was mit Bedingung 2. von Satz XVI nur dann verträglich ist, wenn:

$$\lim_{n=\infty} c_0(n) = \lim_{n=\infty} c_1(n) = \ldots = \lim_{n=\infty} c_{m-2}(n) = 0$$

ist; damit ist das gleichmäßige Bestehen von (1) nachgewiesen. — Bedingung 3. von XVIII ist erfüllt, wegen (12) von § 8, und Bedingung 4. von XVIII ist identisch mit 4. von XVI.

Was die Gleichungen (7) von XVI anlangt, braucht nur gezeigt zu werden, daß die Bedingungen von Satz XI erfüllt sind, wenn unter dem Kerne $\varphi(\xi, x, n)$ von Satz XI verstanden wird der Kern $(-1)^i \varphi^{(i)}(\xi - x, n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Um zu zeigen, daß Bedingung 1. von Satz XI erfüllt ist, bemerken wir: durchläuft in $\psi^{(i)}(\xi - x, n, h)$ die Veränderliche ξ das Intervall $< a, a + l >$, so durchläuft $\xi - x$ das Intervall $< a - x, a + l - x >$, und da $\psi^{(i)}(\xi - x, n, h)$ in $< x - h, x + h >$ den Wert 0 hat, kommt es nur an auf die Intervalle $< a - x, -h >$ und $< h, a + l - x >$, die, solange x in $< a', b' >$ liegt, ganz in den Intervallen $< a - b', -h >$ und $< h, a + l - a' >$ enthalten sind, die wieder ihrerseits Teilintervalle von $(-l, l)$ sind, die den Nullpunkt nicht enthalten. Es folgt also Bedingung 1. von XI für $i = m$ unmittelbar aus Bedingung 1. von XVI. — Für $i = m-1$ beachte man, daß nach Voraussetzung $\varphi^{(m-1)}(u, n)$ in den Intervallen $< a - b', -h >$ und $< h, a + l - a' >$ absolut stetig und somit geschränkt ist, woraus, zusammen mit der gleichfalls vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz von (3), wie wir schon beim Beweise von Satz XVIII gesehen haben, das Bestehen der Bedingung 1. von XI für die Klasse $\mathfrak{F}_1$, und damit auch für die Klassen $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$ leicht folgt. — Dasselbe gilt für $i = 1, 2, \ldots, m-2$, da die Funktionen $\varphi^{(i)}(u, n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m-2)$ sicherlich gleichfalls absolut stetig sind und auch für sie die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \varphi^{(i)}(u, n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-2) \tag{4}$$

gleichmäßig in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(-l, l)$ gelten muß, was aus dem gleichmäßigen Bestehen dieser Beziehung für $i = m-1$ und Bedingung 2. von XVI leicht folgt, wie wir gerade vorhin für $\varphi(u, n)$ gesehen haben.

Bedingung 2. von XI verlangt, daß in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $< a, a + l >$ die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \psi^{(i)}(\xi - x, n, h)\, d\xi = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{5}$$

gleichmäßig für alle x von $< a', b' >$ gelte. Nun ist:[1]

$$\int_\alpha^\beta \psi^{(i)}(\xi - x, n, h)\, d\xi = \psi^{(i-1)}(u, n, h)\Big]_{\alpha - x}^{\beta - x} + \varphi^{(i-1)}(-h, n) - \varphi^{(i-1)}(h, n),$$

wenn (α, β) die beiden Punkte $x - h$ und $x + h$ enthält; ist einer dieser Punkte nicht in (α, β) enthalten, so ist diese Formel durch Weglassen eines oder beider Summanden $\varphi^{(i-1)}(-h, n)$, $\varphi^{(i-1)}(h, n)$ zu modifizieren. Ferner ist $\psi^{(i-1)}(u, n, h) = 0$ oder $= \varphi^{(i-1)}(u, n)$, je nachdem $|u| \leqq h$ oder $|u| > h$ ist. Solange nun x in $< a', b' >$ liegt, liegen $\alpha - x$ und $\beta - x$ in $< \alpha - b', \beta - a' >$, welches Intervall seinerseits in $(-l, l)$ liegt. Das gleichmäßige Bestehen von (5) folgt nun unmittelbar aus dem gleichmäßigen Bestehen von (3) und dem daraus folgenden gleichmäßigen Bestehen von (4) in den außerhalb $(-h, h)$ liegenden Teilen von $< \alpha - b', \beta - a' >$.

Endlich sind die Bedingungen 3. und 4. von XI erfüllt, wie die Formeln (11), (13), (14) und (15) von § 8 zeigen.

Es erübrigt noch, die Sätze XVIII und XIX für unendliche Intervalle auszusprechen.

XVIII *a*. »Sei $\varphi(u, n)$ eine für alle reellen u gegebene Funktion, für die die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \varphi(u, n) = 0 \tag{6}$$

[1] Hierin ist $\varphi^{(0)}$ durch φ und $\psi^{(0)}$ durch ψ zu ersetzen.

gleichmäßig in jedem endlichen den Nullpunkt nicht enthaltenden Intervalle gilt. Damit für jede in $(-\infty, +\infty)$ zur Klasse $\mathfrak{F}_i$ gehörige Funktion in jedem Punkte x, in dem sie stetig ist, die Beziehung gelte:

(7) $$f(x) = \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi(\xi - x, n)\, d\xi,$$

ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(u, n)$ folgenden Bedingungen genügt:

1. Für jedes $h > 0$ genügt $\psi(u, n, h)$ der Bedingung 1. desjenigen der Sätze I*a* bis IV*a*, der sich auf die Klasse $\mathfrak{F}_i$ bezieht.

2. Im Falle der Klasse $\mathfrak{F}_4$ ist für jedes $h > 0$:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{-h} \varphi(u, n)\, du = 0; \quad \lim_{n=\infty} \int_{h}^{+\infty} \varphi(u, n)\, du = 0.$$

3. und 4. Es sind die Bedingungen 3. und 4. von Satz XVIII erfüllt.

Unter diesen Voraussetzungen und Bedingungen ist die Konvergenz in (7) gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle $< a', b' >$, in dessen sämtlichen Punkten f stetig ist.«

Der Beweis wird geführt durch Berufung auf die Sätze VI*a* und X*a*. Der einzige gegenüber dem Beweise von Satz XVIII neu hinzukommende Punkt ist der, im Falle der Klasse $\mathfrak{F}_4$ nun zu führende Beweis, daß die Beziehungen:

(8) $$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{0} \psi(\xi - x, n, h)\, d\xi = 0; \quad \lim_{n=\infty} \int_{0}^{+\infty} \psi(\xi - x, n, h)\, d\xi = 0$$

gleichmäßig für alle x von $< a', b' >$ gelten. Um dies etwa für die erste dieser Beziehungen zu zeigen, bemerken wir, daß:

$$\int_{-\infty}^{0} \psi(\xi - x, n, h)\, d\xi = \int_{-\infty}^{-x} \psi(u, n, h)\, du$$

ist. Wird $A > h$ und $> b'$ gewählt, so haben wir also:

$$\int_{-\infty}^{0} \psi(\xi - x, n, h)\, d\xi = \int_{-\infty}^{-A} \varphi(u, n)\, du + \int_{-A}^{-x} \psi(u, n, h)\, du.$$

Hierin hängt der erste Summand der rechten Seite von x nicht ab, und es ist wegen Bedingung 2.

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{-A} \varphi(u, n)\, du = 0.$$

Solange nun x in $< a', b' >$ liegt, liegt $< -A, -x >$ in $< -A, -a' >$, und es ist daher:

$$\left| \int_{-A}^{-x} \psi(u, n, h)\, du \right| \leqq \int_{-A}^{-a'} |\psi(u, n, h)|\, du.$$

Aus der vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz von (6) folgt nun aber:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-A}^{-a'} |\psi(u, n, h)|\, du = 0,$$

und da dieser Ausdruck von x nicht abhängt, ist damit die gleichmäßige Konvergenz von (8) nachgewiesen.

XIX*a*. »Sei $\varphi(u, n)$ eine für alle reellen u gegebene Funktion, die eine in jedem endlichen Intervalle absolut stetige $(m-1)$-te Ableitung besitzt, für die die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \varphi^{(m-1)}(u, n) = 0$$

gleichmäßig in jedem endlichen, den Nullpunkt nicht enthaltenden Intervalle $< \alpha, \beta >$ gilt. Damit für jede in $(-\infty, +\infty)$ zur Klasse $\mathfrak{F}_i$ gehörige Funktion f, die im Punkte x endliche Ableitungen der m ersten Ordnungen besitzt, die Beziehungen gelten:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi(\xi - x, n)\, d\xi, \tag{9}$$

$$f^{(i)}(x) = \lim_{n=\infty} (-1)^i \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi^{(i)}(\xi - x, n)\, d\xi \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{10}$$

ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(u, n)$ den Bedingungen 1., 2., 3., 4. von Satz XVI a genügt.

Unter diesen Voraussetzungen und Bedingungen ist die Konvergenz in (9) und (10) gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle $< a', b' >$, in dem f m-mal stetig differenzierbar ist.«

§ 10. Singuläre Integrale vom Stieltjes'schen Typus.

Wir wenden uns zum Studium eines besonders einfachen Spezialfalles.[1]

XX. Sei $\varphi(u)$ eine in $(-l, l)$ definierte, nicht negative Funktion. Im Punkte $u = 0$ sei sie stetig, und es sei $\varphi(0) = 1$, während in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(-l, l)$ die obere Grenze von $\varphi(u)$ kleiner als 1 sei. Es sei $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ eine wachsende Folge positiver Zahlen mit $\lim\limits_{n=\infty} i_n = +\infty$, und es sei γ eine beliebige positive Zahl $< l$. Ist dann $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ eine Folge von Zahlen, für die:

$$\lim_{n=\infty} c_n \cdot \int_{-\gamma}^{\gamma} (\varphi(u))^{i_n}\, du = 1$$

ist, so gilt für jede in $< a, a + l >$ zur Klasse $\mathfrak{F}_1$ gehörige Funktion[2] f, die im Punkte x von $(a, a + l)$ stetig ist, die Beziehung:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} c_n \int_a^{a+l} f(\xi)\, (\varphi(\xi - x))^{i_n}\, d\xi.$$

Diese Beziehung gilt gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< a', b' >$ von $(a, a + l)$, in dessen sämtlichen Punkten f stetig ist.

Zum Beweise berufen wir uns auf Satz XVIII, indem wir setzen:

$$\varphi(u, n) = c_n . (\varphi(u))^{i_n}. \tag{1}$$

Dann ist zunächst klar, daß $\varphi(u, n)$ für jedes einzelne n in $(-l, l)$ geschränkt ist.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$k_n = \int_{-\gamma}^{\gamma} (\varphi(u))^{i_n}\, du, \tag{2}$$

und haben somit:

$$\lim_{n=\infty} c_n . k_n = 1. \tag{3}$$

Sei ein beliebiges, den Nullpunkt nicht enthaltendes Teilintervall $< \alpha, \beta >$ von $(-l, l)$ gegeben. Weil die obere Grenze von $\varphi(u)$ in $< \alpha, \beta >$ kleiner als 1 ist, gibt es ein $\eta > 0$, so daß:

$$0 \leq \varphi(u) < 1 - \eta \quad \text{in } < \alpha, \beta >. \tag{4}$$

---

[1] Vgl. H. Lebesgue, a. a. O., p. 95.

[2] Und mithin erst recht für jede zu einer der Klassen $\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4$ gehörige Funktion.

Wegen der Stetigkeit von $\varphi(u)$ im Nullpunkte und wegen $\varphi(0) = 1$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß:

$$\varphi(u) > 1 - \frac{\eta}{2} \quad \text{in} < -\delta, \delta >.$$

Nehmen wir dieses δ kleiner an als das γ in (2), so haben wir:

$$k_n > 2\delta \cdot \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)^{i_n},$$

und infolgedessen nach (3) für alle hinlänglich großen n:

$$c_n < \frac{1}{\delta} \frac{1}{\left(1 - \frac{\eta}{2}\right)^{i_n}}. \tag{5}$$

Nach (1) und (4) ist also in $< \alpha, \beta >$ für alle hinlänglich großen n:

$$|\varphi(u, n)| < \frac{1}{\delta} \left(\frac{1-\eta}{1 - \frac{\eta}{2}}\right)^{i_n}.$$

Da hierin $\dfrac{1-\eta}{1-\frac{\eta}{2}} < 1$ ist, so ist damit gezeigt, daß:

$$\lim_{n=\infty} \varphi(u, n) = 0$$

gleichmäßig in $< \alpha, \beta >$ gilt. Die in Satz XVIII zunächst über $\varphi(u, n)$ gemachten Voraussetzungen sind also hier erfüllt.

Daß auch die Bedingungen 3. und 4. von XVIII erfüllt sind, erkennt man auf den ersten Blick, da wegen (3) und wegen $\varphi(u) \geqq 0$:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} |\varphi(u, n)|\, du = \lim_{n=\infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} \varphi(u, n)\, du = 1$$

ist. Satz XX ist damit bewiesen.

XX*a*. Sei $\varphi(u)$ eine für alle reellen u definierte, nicht negative Funktion. Im Punkte $u = 0$ sei sie stetig, und es sei $\varphi(0) = 1$, während in jedem, den Nullpunkt nicht enthaltenden endlichen Intervalle $< \alpha, \beta >$ die obere Grenze von $\varphi(u)$ kleiner als 1 sei. Es sei γ eine beliebige positive Zahl, und i_n und c_n mögen dieselbe Bedeutung haben wie in Satz XX. Damit für jede in $(-\infty, +\infty)$ zur Klasse $\mathfrak{F}_1$ gehörige Funktion, die im Punkte x stetig ist, die Beziehung gelte:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, (\varphi(\xi - x))^{i_n}\, d\xi, \tag{6}$$

ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(u)$ sich höchstens in einer Nullmenge unterscheide von einer Funktion $\varphi^*(u)$, für die:

$$\overline{\lim_{u=-\infty}}\, \varphi^*(u) < 1; \quad \overline{\lim_{u=+\infty}}\, \varphi^*(u) < 1. \tag{7}$$

Ist auch diese Bedingung erfüllt, so gilt (6) gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle $< a', b' >$, in dessen sämtlichen Punkten f stetig ist.

Die Bedingung (7) ist hinreichend: dies wird ebenso bewiesen wie Satz XX, nur hat man sich diesmal auf Satz XVIII *a* zu berufen und zu beachten, daß, abgesehen von Nullmengen, eine Ungleichung (4) nun auch (für $h > 0$) in jedem Intervalle $(-\infty, -h >$ und $< h, +\infty)$ gilt.

Die Bedingung (7) ist notwendig. In der Tat, es ist für jedes $\gamma > 0$:

(8) $$\lim_{n=\infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} (\varphi(u))^{in}\, du = 0.$$

Denn ist $\varepsilon > 0$ und $< \gamma$ beliebig gegeben, so gibt es ein $\eta > 0$, so daß:

$$0 \leqq \varphi(u) < 1 - \eta \quad \text{in} < -\gamma, -\frac{\varepsilon}{4} > \text{und in} < \frac{\varepsilon}{4}, \gamma >.$$

Wegen $\varphi(u) \leqq 1$ ist also, indem man die Zerlegung:

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} = \int_{-\gamma}^{-\frac{\varepsilon}{4}} + \int_{-\frac{\varepsilon}{4}}^{\frac{\varepsilon}{4}} + \int_{\frac{\varepsilon}{4}}^{\gamma}$$

anwendet:

$$0 \leqq \int_{-\gamma}^{\gamma} (\varphi(u))^{in}\, du \leqq 2 \cdot (1-\eta)^{in} \cdot \gamma + \frac{\varepsilon}{2},$$

und daher für alle hinlänglich großen n:

$$0 \leqq \int_{-\gamma}^{\gamma} (\varphi(u))^{in}\, du < \varepsilon,$$

womit (8) bewiesen ist.

Aus (8) aber folgt wegen (3):

(9) $$\lim_{n=\infty} c_n = +\infty.$$

Wäre nun Bedingung (7) nicht erfüllt, so gäbe es (außerhalb eines gegebenen endlichen Intervalles) eine Menge, die keine Nullmenge ist, und in deren Punkten $(\varphi(u))^{in} > \frac{1}{2}$ und somit $\varphi(u, n) > \frac{c_n}{2}$ wäre. Wegen (9) wäre also Bedingung 1. von Satz XVIII *a* für die Klasse $\mathfrak{F}_1$ nicht erfüllt.

XX *b*. Genügt die Funktion $\varphi(u)$ allen Voraussetzungen von Satz XX *a* und ist:

$$\overline{\lim_{u=-\infty}}\ \varphi(u) < 1; \quad \overline{\lim_{u=+\infty}}\ \varphi(u) < 1,$$

so gilt Formel (6) auch für jede, in $(-\infty, +\infty)$ zu einer der Klassen $\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4$ gehörige Funktion, die im Punkte x stetig ist, vorausgesetzt, daß im Falle der Klasse $\mathfrak{F}_2$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(u))^{2i_1}\, du,$$

im Falle der Klassen $\mathfrak{F}_3$ und $\mathfrak{F}_4$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(u))^{i_1}\, du$$

existiert. Und zwar gilt dann die Beziehung (6) gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle $< a', b' >$, in dessen sämtlichen Punkten $f(x)$ stetig ist.

Zum Beweise bemerken wir, daß Ungleichung (5) offenbar auch so ausgesprochen werden kann: zu jedem $\zeta > 1$ gibt es ein n_0, so daß:

(10) $$c_n < \zeta^{in} \quad \text{für } n \geqq n_0.$$

Für den Fall der Klasse $\mathfrak{F}_2$ wird XX *b* bewiesen sein, wenn wir zeigen: für jedes $h > 0$ ist:

(11) $$\lim_{n=\infty} c_n^2 \int_{-\infty}^{-h} (\varphi(u))^{2in}\, du = 0; \quad \lim_{n=\infty} c_n^2 \int_{h}^{+\infty} (\varphi(u))^{2in}\, du = 0.$$

Beweisen wir dies etwa für die zweite dieser Formeln. Nach Voraussetzung gibt es ein $\vartheta < 1$, so daß:

$$0 \leqq \varphi(u) < \vartheta\ (< 1) \quad \text{in} < h, +\infty).$$

Bezeichnen wir den Inhalt der Menge aller Punkte von $< h, +\infty)$, in denen:

$$\frac{\vartheta}{\nu+1} \leqq \varphi(u) < \frac{\vartheta}{\nu}$$

ist mit e_ν, so haben wir:

$$\int_h^{+\infty} (\varphi(u))^{2i_1} du \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\vartheta}{\nu+1}\right)^{2i_1} e_\nu,$$

wo die rechts stehende Reihe wegen der vorausgesetzten Konvergenz des links stehenden Integrales konvergent ist. Es folgt hieraus sofort die Konvergenz der Reihen:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\vartheta}{\nu}\right)^{2i_n} e_\nu,$$

so daß die Ungleichung aufgeschrieben werden kann:

$$\int_h^{+\infty} (\varphi(u))^{2i_n} du \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\vartheta}{\nu}\right)^{2i_n} e_\nu .$$

Setzen wir noch:

$$s = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e_\nu}{\nu^{2i_1}},$$

so haben wir:

$$\int_h^{+\infty} (\varphi(u))^{2i_n} du \leqq s \cdot \vartheta^{2i_n},$$

und somit wegen (10):

$$c_n^2 \int_h^{+\infty} (\varphi(u))^{2i_n} du \leqq s \cdot (\zeta \cdot \vartheta)^{2i_n} \quad \text{für } n \geqq n_0. \tag{12}$$

Hierin war ζ irgend eine Zahl > 1. Wählen wir sie gemäß:

$$1 < \zeta < \frac{1}{\vartheta},$$

so folgt nun aus (12) unmittelbar die zweite Gleichung (11). Ebenso beweist man die erste.

Im Falle der Klasse $\mathfrak{F}_3$ genügt es, folgende zwei Tatsachen zu beweisen:

a) Ist ein endliches, den Nullpunkt nicht enthaltendes Intervall $< \alpha, \beta >$ gegeben, so gehört zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\lambda > 0$, so daß für jede Menge I sich nicht überdeckender Intervalle von $< \alpha, \beta >$ deren Gesamtlänge $< \lambda$ ist:

$$c_n \int_I (\varphi(u))^{i_n} du < \varepsilon \quad \text{für alle } n. \tag{13}$$

b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört ein A, so daß:

$$c_n \int_{-\infty}^{-A} (\varphi(u))^{i_n} du < \varepsilon; \quad c_n \int_A^{+\infty} (\varphi(u))^{i_n} du < \varepsilon \quad \text{für alle } n. \tag{13a}$$

Um die Tatsache *a)* zu beweisen, zeigt man zuerst, wie beim Beweise von Satz XX, daß die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} c_n (\varphi(u))^{i_n} = 0$$

gleichmäßig in $<\alpha, \beta>$ gilt, woraus die Gleichung folgt:

$$\lim_{n=\infty} c_n \int_\alpha^\beta (\varphi(u))^{i_n} du = 0. \tag{14}$$

Ist sodann $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so kann man n_0 so groß wählen, daß:

$$c_n \int_\alpha^\beta (\varphi(u))^{i_n} du < \varepsilon \quad \text{für } n > n_0. \tag{15}$$

Nun kann man, zufolge einer bekannten Eigenschaft der Lebesgue'schen Integrale für jedes einzelne n zu dem gegebenen ε ein λ_n so bestimmen, daß für dieses n und für $\lambda = \lambda_n$ Ungleichung (13) gilt. Wählt man nun für λ die kleinste der Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n_0}$, so gilt nun, bei Berücksichtigung von (15), Ungleichung (13) für alle n und die Tatsache *a)* ist bewiesen.

Um die Tatsache *b)* zu beweisen, zeigt man zuerst, daß:

$$\lim_{n=\infty} c_n \int_1^{+\infty} (\varphi(u))^{i_n} du = 0, \quad \lim_{n=\infty} c_n \int_{-\infty}^{-1} (\varphi(u))^{i_n} du = 0, \tag{16}$$

was ebenso bewiesen wird wie (11). Sodann wählt man n_0 so groß, daß:

$$c_n \int_1^{+\infty} (\varphi(u))^{i_n} du < \varepsilon \quad \text{für } n > n_0. \tag{17}$$

Für jedes einzelne n aber gibt es, da jedes Integral:

$$\int_1^{+\infty} (\varphi(u))^{i_n} du$$

konvergent ist, ein A_n, so daß:

$$c_n \int_{A_n}^{+\infty} (\varphi(u))^{i_n} du < \varepsilon. \tag{18}$$

Wählt man also A größer als die Zahlen $1, A_1, A_2, \ldots, A_{n_0}$, so gilt, wegen (17) und (18), die zweite Ungleichung (13 *a*) für alle n. Analog zeigt man, daß die erste Ungleichung (13 *a*) gilt, und Tatsache *b)* ist bewiesen.

Daß Satz XX *b* auch für die Klasse $\mathfrak{F}_4$ richtig ist, folgt aus (14) und (16).

§ 11. Die verallgemeinerte Stieltjes'sche Formel.

Es genüge wieder $\varphi(u)$ den Voraussetzungen von Satz XX (beziehungsweise XX *a* oder XX *b*). Wir wählen für die in diesen Sätzen auftretende Zahlenfolge $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ nun der Einfachheit halber die Folge $1, 2, \ldots, n, \ldots$. Ersetzt man in (2) von § 10 die Zahl γ durch eine andere positive Zahl γ' von $(-l, l)$ (beziehungsweise eine beliebige andere positive Zahl γ') und setzt:

$$k_n = \int_{-\gamma}^{\gamma} (\varphi(u))^n du; \quad k'_n = \int_{-\gamma'}^{\gamma'} (\varphi(u))^n du, \tag{1}$$

so gelingt es leicht, die Differenz $k_n - k'_n$ abzuschätzen. Sei etwa $\gamma' < \gamma$. Dann hat man:

$$k_n - k'_n = \int_{-\gamma}^{-\gamma'} (\varphi(u))^n du + \int_{\gamma'}^{\gamma} (\varphi(u))^n du.$$

Da in $<-\gamma, -\gamma'>$ sowie in $<\gamma', \gamma>$ die obere Grenze von $\varphi(u)$ kleiner als 1 ist, gibt es ein $\eta_1 > 0$, so daß in diesen Intervallen:

$$0 \leqq \varphi(u) < 1 - \eta_1,$$

und somit:

$$k_n - k'_n < 2(\gamma - \gamma')(1-\eta)^n.$$

Wir haben also allgemein: es gibt ein positives $\vartheta < 1$, so daß für alle hinlänglich großen n:

(2) $$|k_n - k'_n| < \vartheta^n \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Diese einfache Bemerkung ermöglicht es, unter weiteren spezialisierenden Annahmen über das Verhalten von $\varphi(u)$ in der Umgebung des Nullpunktes, eine asymptotische Auswertung von k_n vorzunehmen und dadurch einfache Ausdrücke für die Konstanten c_n zu ermitteln.

Es habe $\varphi(u)$ außer den schon bisher geforderten Eigenschaften die Gestalt:

(3) $$\varphi(u) = 1 - \alpha\,|u|^p + \omega(u)\cdot|u|^p,$$

worin:

(4) $$\alpha > 0; \quad p > 0; \quad \lim_{u=0} \omega(u) = 0$$

sei. Wir können dann, wenn ein $h > 0$ beliebig gegeben ist, γ' so klein wählen, daß in $< -\gamma', \gamma' >$ die Ungleichung gilt:

(5) $$1-(\alpha+h)\,|u|^p \leqq \varphi(u) \leqq 1-(\alpha-h)\cdot|u|^p,$$

und somit auch:

(6) $$2\int_0^{\gamma'}\{1-(\alpha+h)|u|^p\}^n du \leqq \int_{-\gamma'}^{\gamma'}(\varphi(u))^n du \leqq 2\int_0^{\gamma'}\{1-(\alpha-h)|u|^p\}^n du.$$

Dies führt uns auf die Aufgabe, eine asymptotische Auswertung des Integrales:

(7) $$\varkappa_n(\beta, \sigma, p, q) = \int_0^{\sigma} u^q(1-\beta u^p)^n du \qquad (\beta > 0, \sigma > 0, p > 0, q > 0)$$

vorzunehmen. Nehmen wir die Substitution:

$$v = \beta\cdot u^p \qquad \tau = \beta\cdot\sigma^p$$

vor, so erhalten wir:

$$\varkappa_n(\beta, \sigma, p, q) = \frac{1}{p}\cdot\beta^{-\frac{q+1}{p}}\int_0^{\tau} v^{\frac{q+1}{p}-1}(1-v)^n dv.$$

Wir wollen noch annehmen, es sei:

(7a) $$\tau = \beta\cdot\sigma^p < 1.$$

Dann haben wir offenbar die Ungleichung:

(8) $$\left|\varkappa_n(\beta, \sigma, p, q) - \frac{1}{p}\beta^{-\frac{q+1}{p}}\int_0^1 v^{\frac{q+1}{p}-1}(1-v)^n dv\right| < \frac{1}{p}\beta^{-\frac{q+1}{p}}(1-\tau)^{n+1}\cdot\tau^{-1}.$$

Nun ist bekanntlich:

$$\int_0^1 v^{\frac{q+1}{p}-1}(1-v)^n dv = \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{q+1}{p}+n+1\right)},$$

und somit nach der Stirling'schen Formel:

$$\int_0^1 v^{\frac{q+1}{p}-1}(1-v)^n dv = \Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right)n^{-\frac{q+1}{p}}A(n) \qquad (\lim_{n=\infty} A(n) = 1).$$

Man erhält daher aus (8) wegen:

$$\lim_{n=\infty} n^{\frac{q+1}{p}}(1-\tau)^{n+1} = 0$$

die Beziehung:

(9) $$\lim_{n=\infty} n^{\frac{q+1}{p}} \varkappa_n(\beta, \sigma, p, q) = \frac{1}{p} \beta^{-\frac{q+1}{p}} \Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right).$$

Sie gilt, wegen (7 *a*), für $\beta \cdot \sigma^p < 1$.

Sei nun ein $h > 0$ beliebig gegeben; es kann dann γ' so klein gewählt werden, daß in $< -\gamma', \gamma' >$ die Ungleichungen (5) gelten. Wir haben dann nach (6):

$$2\varkappa_n(\alpha+h, \gamma', p, 0) \leqq \int_{-\gamma'}^{\gamma'} (\varphi(u))^n \, du \leqq 2\varkappa_n(\alpha-h, \gamma', p, 0).$$

Wählen wir γ' auch so klein, daß:

$$(\alpha+h) \cdot \gamma'^p < 1,$$

so können wir (9) anwenden und haben, wenn wir wieder von der Bezeichnungsweise (1) Gebrauch machen:

Ist $\eta > 0$ beliebig gegeben, so ist für alle hinlänglich großen n:

$$\frac{2}{p}(\alpha+h)^{-\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) - \eta \leqq n^{\frac{1}{p}} k'_n \leqq \frac{2}{p}(\alpha-h)^{-\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) + \eta,$$

und somit, bei Benützung von (2), wieder für alle hinlänglich großen n:

$$\frac{2}{p}(\alpha+h)^{-\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) - n^{\frac{1}{p}} \vartheta^n - \eta \leqq n^{\frac{1}{p}} k_n \leqq \frac{2}{p}(\alpha-h)^{-\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) + n^{\frac{1}{p}} \vartheta^n + \eta.$$

Da hierin h und η beliebig waren und $0 < \vartheta < 1$ ist, ist das gleichbedeutend mit:

$$\lim_{n=\infty} n^{\frac{1}{p}} k_n = \frac{2}{p} \alpha^{-\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right).$$

Zufolge von Gleichung (3) in § 10 können wir also setzen:

$$c_n = \frac{p}{2} \alpha^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} n^{\frac{1}{p}}.$$

Wir haben damit den Satz:

XXI. Sei $\varphi(u)$ eine in $(-l, l)$ gegebene, nicht negative Funktion der Form (3), (4), deren obere Grenze in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(-l, l)$ kleiner als 1 ist. Dann gilt für jede in $< a, a+l >$ zur Klasse $\mathfrak{F}_1$ gehörige Funktion, die im Punkte x von $(a, a+l)$ stetig ist, die Formel:

(10) $$f(x) = \frac{p \cdot \alpha^{\frac{1}{p}}}{2 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \lim_{n=\infty} n^{\frac{1}{p}} \int_a^{a+l} f(\xi)\,(\varphi(\xi-x))^n \, d\xi.$$

Diese Beziehung gilt gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< a', b' >$ von $(a, a+l)$, in dessen sämtlichen Punkten f stetig ist.

Formel (10) wurde für den Fall $p = 2$ aufgestellt von Stieltjes.[1] Man erhält wichtige Spezialfälle der Stieltjes'schen Formel, indem man für $(-l, l)$ das Intervall $(-1, 1)$ nimmt und setzt:[2]

$$\varphi(u) = 1 - u^2,$$

[1] Correspondance de Hermite et de Stieltjes, Bd. II, p. 185. Näheres hierüber: H. Lebesgue, a. a. O., p. 119

[2] E. Landau, Rend. Pal., Bd. 25, p. 337; Ch. J. de la Vallée-Poussin, Acad. Bruxelles, Bull. Classe des Sciences 1908, p. 193

oder indem man für $(-l, l)$ das Intervall $(-2\pi, 2\pi)$ nimmt und setzt:[1]

$$\varphi(u) = \left(\cos\frac{u}{2}\right)^2.$$

XXI *a*. Sei $\varphi(u)$ eine für alle reellen u gegebene nicht negative Funktion der Form (3), (4), deren obere Grenze in jedem Intervalle $(-\infty, -h>$ und $<h, +\infty)$ $(h>0)$ kleiner als 1 ist. Dann gilt für jede in $(-\infty, +\infty)$ zur Klasse $\mathfrak{F}_1$ gehörige Funktion, die im Punkte x stetig ist, die Formel:

$$f(x) = \frac{p\cdot\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \lim_{n=\infty} n^{\frac{1}{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,(\varphi(\xi-x))^n\,d\xi. \tag{11}$$

Diese Beziehung gilt gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle $<a', b'>$, in dessen sämtlichen Punkten f stetig ist. — Existiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(u))^2\,du, \text{ beziehungsweise } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du,$$

so gilt dies auch für die in $(-\infty, +\infty)$ zu $\mathfrak{F}_2$, beziehungsweise zu $\mathfrak{F}_3$, gehörigen Funktionen f.

Einen bekannten Spezialfall[2] erhält man, indem man wählt:

$$\varphi(u) = e^{-u^2}.$$

§ 12. Konvergenz an Unstetigkeitsstellen und Differenziation.

Wir wollen nun auf den in den §§ 10 und 11 behandelten Typus singulärer Integrale Satz XII und XIII anwenden.

XXII. Es genüge $\varphi(u)$ außer den Voraussetzungen von Satz XXI noch folgenden Bedingungen: $\varphi(u)$ ist absolut stetig[3] in einer Umgebung des Nullpunktes und es genügt $\varphi'(u)$ in dieser Umgebung (abgesehen von einer Nullmenge) einer Ungleichung:

$$|\varphi'(u)| < A\cdot|u|^{p-1} \quad (A \text{ eine Konstante}). \tag{1}$$

Dann gilt Gleichung (10) von § 11 in jedem Punkte x von $(a, a+l)$, in dem die zur Klasse $\mathfrak{F}_1$ gehörige Funktion f Ableitung ihres unbestimmten Integrales ist. — Ist außerdem in einer Umgebung des Nullpunktes $\varphi(-u) = \varphi(u)$, so gilt (10) von § 11 in jedem Punkte x von $(a, a+l)$, in dem f verallgemeinerte erste Ableitung seines unbestimmten Integrales ist.

Wir haben uns zu überzeugen, daß der Kern:

$$\varphi(\xi, x, n) = \frac{p\cdot\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}\, n^{\frac{1}{p}}\,(\varphi(\xi-x))^n \tag{2}$$

allen Voraussetzungen und Bedingungen von Satz XII genügt. Die absolute Stetigkeit wurde ausdrücklich vorausgesetzt. Daß Beziehung (1) von § 6 erfüllt ist, haben wir schon in § 10 gesehen. Ebenso wissen wir, daß die Bedingungen 1., 2. und 4. von Satz XII für die Klasse $\mathfrak{F}_1$ erfüllt sind. Es bleibt also nur Bedingung 3. von XII nachzuweisen; das heißt, daß es ein $h>0$ und ein N gibt, so daß:

$$\int_{x-h}^{x+h} \left|(\xi-x)\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi(\xi, x, n)\right| d\xi < N \quad \text{für alle } n. \tag{3}$$

---

[1] Ch. J. de la Vallée Poussin, a. a. O., p. 227.

[2] Weierstraß, Werke, Bd. III, p. 1.

[3] Es existiert also $\varphi'(u)$, abgesehen von einer Nullmenge.

Dazu genügt es nachzuweisen, daß es ein $h > 0$ und ein N gibt, so daß:

(4) $$n^{\frac{1}{p}+1}\int_{-h}^{h}|u\cdot\varphi'(u)\,(\varphi(u))^{n-1}|\,du < N \quad \text{für alle } n.$$

Nun haben wir aber, wenn γ hinlänglich klein gewählt wird, in $<-\gamma, \gamma>$, wegen (3) und (4) von § 11, für ein $\beta < \alpha$:

(5) $$0 < \varphi(u) < 1 - \beta|u|^{p},$$

und somit bei Berücksichtigung von (1):

$$\int_{-\gamma}^{\gamma}|u\,\varphi'(u)\,(\varphi(u))^{n-1}|\,du < 2A\int_{0}^{\gamma}u^{p}\,(1-\beta\,u^{p})^{n-1}\,du.$$

Dieses letztere Integral aber ist nach der Bezeichnungsweise (7) von § 11 nichts anderes als $\varkappa_{n-1}(\beta,\gamma,p,p)$. Wählen wir noch γ so klein, daß $\beta\cdot\gamma^{p} < 1$, so hat, nach (9) von § 11, $n^{\frac{p+1}{p}}\cdot\varkappa_{n-1}(\beta,\gamma,p,p)$ für $n=\infty$ einen endlichen Grenzwert. Damit ist also (4) und gleichzeitig (3) für $h=\gamma$ nachgewiesen und unser Satz ist bewiesen.

Der Spezialfall dieses Satzes $\varphi(u) = 1-u^2$ wurde von Fr. Riesz,[1] der Fall $\varphi(u) = \left(\cos\frac{u}{2}\right)^2$ von H. Lebesgue[2] bewiesen. Weitergehende Resultate erhält man durch Anwendung von Satz XIV und XV:

XXIII. Es genüge $\varphi(u)$ außer den Voraussetzungen von Satz XXI (beziehungsweise XXI *a*) noch folgenden Bedingungen: $\varphi(u)$ besitzt in einer Umgebung des Nullpunktes eine absolut stetige $(m-1)$-te Ableitung, und es sind in dieser Umgebung, abgesehen von einer Nullmenge, die Ungleichungen erfüllt:

(6) $$|\varphi^{(i)}(u)| < A\,|u|^{p-i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Dann gilt Gleichung (10) (beziehungsweise (11)) von § 11 in jedem Punkte x von $(a, a+l)$ (beziehungsweise in jedem Punkte x), in dem f m-te Ableitung seines m-fach iterierten unbestimmten Integrales ist. — Ist außerdem in einer Umgebung des Nullpunktes $\varphi(-u) = \varphi(u)$, so gilt (10) (beziehungsweise (11)) von § 11 in jedem Punkte x von $(a, a+l)$ (beziehungsweise in jedem Punkte x) in dem f verallgemeinerte m-te Ableitung seines m-fach iterierten unbestimmten Integrales ist.

Wir haben nachzuweisen, daß der Kern (2) allen Bedingungen von Satz XIV genügt. Die absolute Stetigkeit der $(m-1)$-ten Ableitung wurde ausdrücklich vorausgesetzt. Um einzusehen, daß die Beziehungen (1) von § 7 gelten, hat man nur zu beachten, daß die i-te Ableitung von $(\varphi(u))^n$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ eine Summe aus einer endlichen (von n unabhängigen) Anzahl von Summanden der Form:

$$P(n)\,(\varphi(u))^{n-j}\,(\varphi'(u))^{j_1}\cdot(\varphi''(u))^{j_2}\cdot\ldots(\varphi^{(i)}(u))^{j_i}$$

ist, wo $P(n)$ ein Polynom in n ist und die Exponenten $j, j_1, \ldots, j_i$ von n unabhängig sind. Da $|\varphi(u)| < 1$ ist für $u \neq 0$, haben für $u \neq 0$ alle diese Ausdrücke auch nach Multiplikation mit $n^{\frac{1}{p}}$ für $n=\infty$ den Grenzwert 0.

Daß die Bedingungen 1., 2. und 4. von Satz XIV erfüllt sind, ist uns schon bekannt. Es bleibt nur noch nachzuweisen, daß auch Bedingung 3. erfüllt ist. Dazu genügt es wieder nachzuweisen, daß für ein hinlänglich kleines γ eine Ungleichung besteht:

$$n^{\frac{1}{p}}\int_{0}^{\gamma}u^{m}\left|\frac{d^{m}}{du^{m}}(\varphi(u))^{n}\right|du < N \quad \text{für alle } n.$$

[1] Jahresber. Math. Ver., Bd. 17, p. 196.

[2] A. a. O., p. 100.

Nun ist, abgesehen von einer Nullmenge, $\frac{d^m}{du^m}(\varphi(u))^n$ eine Summe aus einer endlichen (von n unabhängigen) Anzahl von Summanden der Form:

$$P(n)\,(\varphi(u))^{n-j}\,(\varphi'(u))^{j_1}\cdot(\varphi''(u))^{j_2}\ldots(\varphi^{(m)}(u))^{j_m}.$$

Berücksichtigen wir Ungleichung (5) und (6), so wird es also genügen nachzuweisen, daß für jeden einzelnen dieser Summanden eine Ungleichung gilt:

$$n^{\frac{1}{p}}\,P(n)\int_0^{\gamma} u^{m+j_1(p-1)+j_2(p-2)+j_m(p-m)}\,(1-\beta u^p)^{n-j}\,du < N \quad \text{(für alle } n). \tag{7}$$

Dieses Integral ist nichts anderes als:

$$\chi_{n-j}(\beta, \gamma, p, m+j_1(p-1)+j_2(p-2)+\ldots+j_m(p-m)).$$

Bezeichnen wir noch mit k den Grad des Polynoms $P(n)$, so verhält sich also nach Formel (9) von § 11 der Ausdruck (7) für unendlich wachsendes n wie:

$$n^{k-\frac{1}{p}(m+j_1(p-1)+j_2(p-2)+\ldots+j_m(p-m))},$$

und unsere Behauptung wird bewiesen sein, wenn wir die Gleichheiten beweisen:

$$\begin{aligned} j_1+2j_2+\ldots+mj_m &= m, \\ j_1+j_2+\ldots+j_m &= k. \end{aligned} \tag{8}$$

Im Falle $m=1$ sind diese Gleichheiten richtig. Denn die erste Ableitung von $(\varphi(u))^n$ besteht nur aus dem einen Gliede:

$$n\cdot(\varphi(u))^{n-1}\cdot\varphi'(u),$$

und es ist also $k=1, j_1=1$. Nehmen wir also an, die Gleichheiten (8) seien richtig für $m=i$, und zeigen wir, daß sie dann auch richtig sind für $m=i+1$.

Differenziert man das Glied:

$$P(n)\,(\varphi(u))^{n-j}\,(\varphi'(u))^{j_1}\,(\varphi''(u))^{j_2}\ldots(\varphi^{(i)}(u))^{j_i} \tag{9}$$

von $\frac{d^i}{du^i}(\varphi(u))^n$ nach der Regel für die Differenziation eines Produktes, so erhält man $i+1$ Glieder von $\frac{d^{i+1}}{du^{i+1}}(\varphi(u))^n$. Die in diesen Gliedern auftretenden Zahlen $k, j_1, j_2, \ldots, j_{i+1}$ gehen aus den entsprechenden Zahlen von (9) in folgender Weise hervor: Differenziert man in (9) den Faktor $(\varphi(u))^{n-j}$ und läßt die übrigen ungeändert, so vermehrt sich in den als richtig vorausgesetzten Gleichheiten:

$$\begin{aligned} j_1+2j_2+\ldots+ij_i &= i, \\ j_1+j_2+\ldots+j_i &= k, \end{aligned} \tag{10}$$

j_1 um $1, j_2, \ldots, j_i$ bleiben ungeändert, die Gradzahl k vermehrt sich um 1. Gleichzeitig geht i in $i+1$ über. Die Gleichheiten bleiben dabei bestehen. — Differenziert man in (9) den Faktor $(\varphi^{(h)}(u))^{j_h}$ ($h<i$, $j_h>0$) und läßt die andern ungeändert, so vermindert sich j_h um 1 und es vermehrt sich j_{h+1} um 1, die übrigen j und k bleiben ungeändert, i vermehrt sich um 1; die Gleichheiten bleiben dabei bestehen. Differenziert man den Faktor $(\varphi^{(i)}(u))^{j_i}$ und läßt die anderen ungeändert, so vermindert sich j_i um 1, die anderen j und k bleiben ungeändert, aus i wird $i+1$ und es tritt in (10) auf der linken Seite in der ersten Gleichheit der Summand $i+1$, in der zweiten der Summand 1 hinzu. Die Gleichheiten bleiben dabei bestehen. Damit ist (8) nachgewiesen und somit auch Satz XXIII bewiesen.

Nehmen wir nun an, es sei $\varphi^{(m-1)}(u)$ nicht nur in einer Umgebung des Nullpunktes, sondern in jedem Teilintervall $<\alpha, \beta>$ von $(-l, l)$ absolut stetig, so sind nun offenbar alle Bedingungen von Satz XIX erfüllt, so daß wir den Satz aussprechen können:

XXIV. Es genüge $\varphi(u)$ außer den Voraussetzungen von Satz XXI noch folgenden Bedingungen: $\varphi(u)$ besitzt eine in jedem Teilintervalle $<\alpha, \beta>$ von $(-l, l)$ absolut stetige $(m-1)$-te Ableitung und es sind in jedem solchen Teilintervalle (abgesehen von einer Nullmenge) Ungleichungen der Gestalt:

$$(11) \qquad |\varphi^{(i)}(u)| < A|u|^{p-i} \quad (i = 1, 2 \ldots, m)$$

erfüllt. Dann gilt in jedem Punkte x von $(a, a+l)$, in dem die in $<a, a+l>$ zur Klasse $\mathfrak{F}_1$ gehörige Funktion f eine endliche Ableitung m-ter Ordnung besitzt, die Formel:

$$(12) \qquad f^{(i)}(x) = \frac{p\,\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \lim_{n=\infty} n^{\frac{1}{p}}. \int_a^{a+l} f(\xi) \frac{\partial^i}{\partial x^i} (\varphi(\xi - x))^n \, d\xi \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

und zwar gilt diese Beziehung gleichmäßig in jedem Teilintervalle $<a', b'>$ von $(a, a+l)$, in dem $f(x)$ i-mal stetig differenzierbar ist. — Genügt $\varphi(u)$ in einer Umgebung des Nullpunktes auch der Relation $\varphi(-u) = \varphi(u)$, so gilt (12) auch für die verallgemeinerte i-te Ableitung $\overset{*}{f}{}^{(i)}(x)$.

Ist speziell p eine gerade natürliche Zahl, so kann es vorkommen, daß alle Ableitungen von $\varphi(u)$ existieren und absolut stetig sind. Gilt dann in jedem Teilintervalle $<\alpha, \beta>$ von $(-l, l)$ für jedes i eine Ungleichung der Form:

$$|\varphi^{(i)}(u)| < A_i\,|u|^{p-i},$$

so gilt (12) für jedes i. Die Spezialfälle unseres Satzes: $\varphi(u) = 1 - u^2$ und $\varphi(u) = \left(\cos\frac{u}{2}\right)$ wurden von Ch. J. de la Vallée-Poussin bewiesen.[1]

Für unendliche Intervalle haben wir (unter Berufung auf Satz XIX *a*):

XXIV *a*. »Es genüge $\varphi(u)$ den Voraussetzungen von Satz XXI *a* für die Klasse $\mathfrak{F}_i$. Ferner besitze $\varphi(u)$ eine in jedem endlichen Intervalle absolut stetige $(m-1)$-te Ableitung; im Falle der Klasse $\mathfrak{F}_1$ sei ferner $\varphi^{(i)}(u)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ geschränkt für alle u; im Falle der Klasse $\mathfrak{F}_2$ sei für alle hinlänglich großen $|u|$ (abgesehen von Nullmengen):

$$(13) \qquad |\varphi^{(i)}(u)| < u^{-\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)} \quad (\alpha > 0);$$

im Falle der Klasse $\mathfrak{F}_3$ sei für alle hinlänglich großen $|u|$ (abgesehen von Nullmengen):

$$|\varphi^{(i)}(u)| < u^{-(1+\alpha)}.$$

Endlich mögen in jedem endlichen Intervalle Ungleichungen der Form (11) erfüllt sein. Dann gilt für jede in $(-\infty, +\infty)$ zu $\mathfrak{F}_i$ gehörige Funktion, die im Punkte x eine endliche Ableitung i-ter Ordnung besitzt, die Formel:

$$(14) \qquad f^{(i)}(x) = \frac{p\,\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \lim_{n=\infty} n^{\frac{1}{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \frac{\partial^i}{\partial x^i} (\varphi(\xi - x))^n d\xi \quad (i = 1, 2 \ldots, m).$$

Diese Beziehung gilt gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle $<a', b'>$, in dem f i-mal stetig differenzierbar ist. — Genügt $\varphi(u)$ in einer Umgebung des Nullpunktes der Relation $\varphi(u) = \varphi(-u)$, so gilt (14) auch für die verallgemeinerte i-te Ableitung $\overset{*}{f}{}^{(i)}(x)$.«

---

[1] A. a. O., p. 204 ff. u. p. 238 ff. Die Resultate von de la Vallee-Poussin sagen auch in diesen Spezialfällen insofern etwas weniger aus als die des Textes, als sie die gleichmäßige Konvergenz von (12) nur behaupten für jedes Intervall $<a'', b''>$, das ganz in einem Intervalle (a', b') liegt, in dem f i-mal stetig differenzierbar ist.

Um dies zu beweisen, hat man nur noch zu zeigen, daß Bedingung 1. von Satz XIX a [1] erfüllt ist, was man unmittelbar erkennt, indem man beachtet, daß $\frac{d^i}{du^i}(\varphi(u))^n$ sich aus einer endlichen Anzahl Glieder der Form (9) zusammensetzt. Sei der Beweis etwa für den Fall der Klasse $\mathfrak{F}_2$ angedeutet: es ist, wenn ϑ eine Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet:

$$\int_h^{+\infty}\{P(n)(\varphi(u))^{n-j}(\varphi'(u))^{j_1}(\varphi''(u))^{j_2}\ldots(\varphi^{(i)}(u))^{j_i}\}^2\,du \leqq$$

$$\leqq (P(n))^2\,\vartheta^{2(n-j)}\int_h^{+\infty}(\varphi'(u))^{2j_1}(\varphi''(u))^{2j_2}\ldots(\varphi^{(i)}(u))^{2j_i}\,du.$$

Das rechts auftretende Integral hat wegen (13) einen endlichen Wert und es ist wegen $0<\vartheta<1$:

$$\lim_{n=\infty} n^{\frac{2}{p}}(P(n))^2\,\vartheta^{2(n-j)} = 0.$$

So erkennt man, daß die Integrale:

$$n^{\frac{2}{p}}\int_h^{+\infty}\left\{\frac{d^i}{du^i}(\varphi(u))^n\right\}^2 du$$

geschränkt sind für alle n, wodurch Bedingung 1. von Satz XIX a (das ist Bedingung 1. von Satz XVI a) verifiziert erscheint. Ähnlich argumentiert man in den anderen Fällen.

§ 13. Singuläre Integrale vom Weierstraß'schen Typus.

Im Weierstraß'schen Falle:

$$\varphi(u) = e^{-u^2}$$

sind alle Voraussetzungen der Sätze XXI a, XXIII, XXIV a erfüllt, und zwar für jede unserer Klassen $\mathfrak{F}_i$. Die Sätze XXI a und XXIII lehren uns also, da bekanntlich:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

ist, daß für jede in $(-\infty, +\infty)$ zu einer der Klassen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ gehörige Funktion die Formel:

$$f(x) = \lim_{n=\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-n(\xi-x)^2}\,d\xi$$

in jedem Punkte gilt, in dem f (für irgend ein m) verallgemeinerte m-te Ableitung seines m-fach iterierten Integrales ist, und daß sie gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle $<a', b'>$ gilt, in dessen sämtlichen Punkten f stetig ist. — Satz XXIV a lehrt sodann, daß (für jedes i) die Formel:

$$\overset{*}{f}{}^{(i)}(x) = \lim_{n=\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\frac{d^i}{dx^i}e^{-n(\xi-x)^2}\,d\xi$$

in jedem Punkte gilt, in dem f eine verallgemeinerte endliche Ableitung i-ter Ordnung besitzt, und daß sie gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle $<a', b'>$ gilt, in dem f i-mal stetig differenzierbar ist.

So wie diese Resultate als Spezialfälle der in den letzten Paragraphen durchgeführten Erörterungen aufgefaßt werden können, kann man sie auch als Spezialfälle eines anderen Typus singulärer Integrale auffassen, den wir als den Weierstraß'schen Typus bezeichnen wollen, und der in mancher Hinsicht

[1] Das heißt Bedingung 1. von Satz XVI a.

einfacher ist, als der in den letzten Paragraphen betrachtete Typus. Es ist für das Folgende bequemer, statt wie bisher Integrale der Form:

$$I_n(f, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi$$

zu betrachten, nunmehr Integrale der Form:

$$I(f, k, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, k)\, d\xi$$

zu betrachten, wo k alle Werte $\geqq 1$ durchläuft.

XXV. Sei $\varphi(u)$ eine für alle reellen u definierte Funktion, für die das verallgemeinerte Lebesgue'sche Integral:

(1) $$\lim_{k=+\infty} \int_{-k}^{k} \varphi(u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\, du \;(= \omega)$$

existiert und einen von Null verschiedenen Wert ω besitzt.

Damit für jede in $(-\infty, +\infty)$ zur Klasse $\mathfrak{F}_3$ gehörige Funktion f, die im Punkte x stetig ist, die Formel gelte:[1]

(2) $$f(x) = \lim_{k=+\infty} \frac{k}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi(k(\xi - x))\, d\xi.$$

ist notwendig und hinreichend, daß das Integral:

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(u)|\, du$$

einen endlichen Wert habe. Ist dies der Fall, so gilt (2) gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle $< a', b' >$, in dessen sämtlichen Punkten f stetig ist.

Die Bedingung ist hinreichend (auch für gleichmäßige Konvergenz). Es genügt zu zeigen, daß für jede Folge positiver Werte k_n mit $\lim\limits_{n=\infty} k_n = +\infty$ der Kern:

$$\varphi(\xi, x, n) = \frac{k_n}{\omega}\, \varphi(k_n(\xi - x))$$

den Bedingungen von Satz X a für die Klasse $\mathfrak{F}_3$ genügt.

Um Bedingung 1. von Satz X a als erfüllt nachzuweisen, zeigen wir zunächst, daß für jedes $\varepsilon > 0$:

(4) $$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\xi, x, n, \varepsilon)|\, d\xi = 0$$

gleichmäßig für alle x von $< a', b' >$ ist. In der Tat, es ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\xi, x, n, \varepsilon)|\, d\xi = \frac{k_n}{\omega} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} |\varphi(k_n u)|\, du + \int_{\varepsilon}^{+\infty} |\varphi(k_n u)|\, du \right\} =$$

$$= \frac{1}{\omega} \left\{ \int_{-\infty}^{-k_n \varepsilon} |\varphi(v)|\, dv + \int_{k_n \varepsilon}^{+\infty} |\varphi(v)|\, dv \right\},$$

wodurch wegen der über das Integral (3) gemachten Voraussetzung und weil der letzte Ausdruck von x nicht abhängt, die gleichmäßige Konvergenz von (4) bewiesen ist.

Um nun zu beweisen, daß Bedingung 1. von X a für die Klasse $\mathfrak{F}_3$ erfüllt ist, zeigen wir zunächst: zu jedem $\mu > 0$ gibt es ein $\lambda > 0$, so daß für jede Menge I sich nicht überdeckender Intervalle, deren Gesamtlänge $< \lambda$ ist, sowie für alle x von $< a', b' >$:

$$\int_I |\psi(\xi, x, n, \varepsilon)|\, d\xi < \mu \quad \text{für alle } n$$

[1] Darunter ist hier wie im Folgenden auch mitverstanden, daß das in dieser Formel auftretende Integral für jedes $k \geqq 1$ existiert

ist. Wir wählen zu dem Zwecke n_0 so groß, daß für $n > n_0$ und alle x von $< a', b' >$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\xi, x, n, \varepsilon)|\, d\xi < \mu,$$

was wegen (4) möglich ist; sodann bestimmen wir für jedes einzelne n ein λ_n, so daß für jede Menge $\mathfrak{A}$, deren Inhalt $< \lambda_n$ ist:

$$\frac{k_n}{\omega} \int_{\mathfrak{A}} |\varphi(k_n u)|\, du < \mu$$

ist, was wegen eines bekannten Satzes über Lebesgue'sche Integrale sicher möglich ist. Wir haben nun für das gewünschte λ lediglich die kleinste der Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n_0}$ zu wählen.

Wir zeigen weiter: zu jedem $\eta > 0$ gibt es ein A, so daß:

$$\int_{-\infty}^{-A} |\psi(\xi, x, n, \varepsilon)|\, d\xi < \eta; \quad \int_{A}^{+\infty} |\psi(\xi, x, n, \varepsilon)|\, d\xi < \eta \tag{5}$$

für alle n und alle x von $< a', b' >$. Wir wählen wieder n_0 so groß, daß:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\xi, x, n, \varepsilon)|\, d\xi < \eta$$

für $n > n_0$ und alle x von $< a', b' >$. Sodann beachten wir, daß:

$$\int_{A}^{+\infty} |\psi(\xi, x, n, \varepsilon)|\, d\xi \leqq \frac{k_n}{\omega} \int_{A-x}^{+\infty} |\varphi(k_n u)|\, du,$$

und daher weiter für alle x von $< a', b' >$:

$$\int_{A}^{+\infty} |\psi(\xi, x, n, \varepsilon)|\, d\xi \leqq \frac{k_n}{\omega} \int_{A-b'}^{+\infty} |\varphi(k_n u)|\, du.$$

Nun kann aber zu jedem einzelnen n ein A_n so gewählt werden, daß:

$$\frac{k_n}{\omega} \int_{A_n-b'}^{+\infty} |\varphi(k_n u)|\, du < \eta.$$

Wir haben daher, um die zweite Ungleichung (5) zu befriedigen, für A lediglich die größte der Zahlen $A_1, A_2, \ldots, A_{n_0}$ zu wählen. Analog befriedigt man die erste Ungleichung (5). — Damit ist Bedingung 1. von X a als erfüllt nachgewiesen.

Daß Bedingung 2. von X a erfüllt ist, folgt unmittelbar aus dem gleichmäßigen Bestehen von (4) für alle x von $< a', b' >$.

Bedingung 3. von X a ist erfüllt, denn es ist:

$$\frac{k_n}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(k_n(\xi - x))|\, d\xi = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(u)|\, du,$$

wo die rechte Seite von n und x nicht abhängt und nach Voraussetzung endlich ist.

Bedingung 4. von X a ist erfüllt. Denn wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (4) für alle x von $< a', b' >$ ist diese Bedingung nun gleichbedeutend mit folgender: es ist:

$$\lim_{n=\infty} \frac{k_n}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k_n(\xi - x))\, d\xi = 1$$

gleichmäßig für alle x von $< a', b' >$.

Das aber ist der Fall, wegen der Gleichungen:

$$k_n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k_n(\xi - x))\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\, du = \omega.$$

Die Bedingung ist **notwendig**. Dies erkennt man durch Berufung auf Satz VI *a*. In der Tat, es ist:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |\varphi(\xi, x, n)|\, d\xi = \frac{k_n}{\omega} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |\varphi(k_n(\xi - x))|\, d\xi = \frac{1}{\omega} \int_{-k_n\varepsilon}^{k_n\varepsilon} |\varphi(u)|\, du.$$

Hätte nun das Integral (3) nicht einen endlichen Wert, so wäre:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-k_n\varepsilon}^{k_n\varepsilon} |\varphi(u)|\, du = +\infty,$$

und es wäre somit Bedingung 3. von VI *a* nicht erfüllt.

Man erkennt ohneweiters:

XXV *a*. »Genügt $\varphi(u)$ den zu Beginn von Satz XXV angeführten Voraussetzungen, so ist die das Integral (3) betreffende Bedingung auch notwendig und hinreichend dafür, daß in jedem Punkte x des beliebigen Intervalles (a, b), der ein Stetigkeitspunkt für die in $< a, b >$ zur Klasse $\mathfrak{F}_3$ gehörige Funktion f ist, die Formel gelte:

$$f(x) = \lim_{k=+\infty} \frac{k}{\omega} \int_a^b f(\xi)\, \varphi(k(\xi - x))\, d\xi. \tag{6}$$

Ist auch Bedingung (3) erfüllt, so gilt (6) gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< a', b' >$ von (a, b), in dessen sämtlichen Punkten f stetig ist.«

Wir wenden uns nunmehr zum Studium von Formel (2) für Funktionen der Klassen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$. Da für diese Klassen Bedingung 3. von VI *a* dieselbe ist wie für die Klasse $\mathfrak{F}_3$, so sehen wir aus dem zuletzt geführten Beweise, daß Formel (2) jedenfalls nur dann für alle Funktionen, die in $(-\infty, +\infty)$ zu $\mathfrak{F}_1$ oder zu $\mathfrak{F}_2$ gehören, gelten kann, wenn die das Integral (3) betreffende Bedingung von Satz XXV erfüllt ist. Wir setzen also diese Bedingung von jetzt an als erfüllt voraus.

XXVI. Sei $\varphi(u)$ eine für alle reellen u definierte Funktion, für die das Integral (3) einen endlichen Wert hat, und für die der Wert ω des Integrales (1) nicht verschwindet. Damit Beziehung (2) für jede im Punkte x stetige Funktion gelte, die in $(-\infty, +\infty)$ zur Klasse $\mathfrak{F}_2$ gehört, ist notwendig und hinreichend, daß zu jedem $h > 0$ ein A gehört, so daß:

$$\int_{-\infty}^{-u} (\varphi(v))^2\, dv < \frac{A}{u}; \quad \int_u^{+\infty} (\varphi(v))^2\, dv < \frac{A}{u} \quad \text{für } u \geqq h. \tag{7}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so gilt (2) gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle $< a', b' >$, in dessen sämtlichen Punkten f stetig ist.

Die Bedingung ist **hinreichend**. Um Bedingung 1.* von X *a* für die Klasse $\mathfrak{F}_2$ als erfüllt nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß es zu jedem $h > 0$ ein M gibt, so daß:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi(\xi, x, k, h))^2\, d\xi < M \quad \text{für alle } k \geqq 1 \text{ und alle } x \text{ von } < a', b' >. \tag{8}$$

Nun ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi(\xi, x, k, h))^2\, d\xi = \frac{k^2}{\omega^2} \left\{ \int_{-\infty}^{-h} (\varphi(ku))^2\, du + \int_h^{+\infty} (\varphi(ku))^2\, du \right\} =$$

$$= \frac{k}{\omega^2} \left\{ \int_{-\infty}^{-k.h} (\varphi(u))^2\, du + \int_{k.h}^{+\infty} (\varphi(u))^2\, du \right\}.$$

Also haben wir bei Benützung von (7):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi(\xi, x, k, h))^2\, d\xi < \frac{2}{\omega^2} \cdot \frac{A}{h},$$

wodurch (8) bewiesen ist.

Daß Bedingung 2., 3. und 4. von X*a* erfüllt sind, haben wir schon beim Beweise von Satz XXV gesehen.

Die Bedingung ist notwendig. Wäre sie nicht erfüllt, so gäbe es ein $h > 0$ und eine Folge von Zahlen A_n mit:

(9) $$\lim_{n=\infty} A_n = +\infty,$$

sowie eine Folge von Zahlen u_n, alle $\geqq h$ (oder alle $\leqq -h$), für die:

$$\int_{u_n}^{+\infty} (\varphi(v))^2\, dv = \frac{A_n}{u_n} \quad \left(\text{oder} \int_{-\infty}^{u_n} (\varphi(v))^2\, dv = \frac{A_n}{|u_n|}\right)$$

wäre. Sei etwa das erstere der Fall. Wir setzen: $u_n = k_n \cdot h$ (dann ist $k_n \geqq 1$) und haben:

$$k_n \int_{u_n}^{+\infty} (\varphi(v))^2\, dv = k_n^2 \int_{h}^{+\infty} (\varphi(k_n u))^2\, du = \frac{A_n}{h}.$$

Wegen (9) wäre also für den Kern:

$$\varphi(\xi, x, n) = \frac{k_n}{\omega} \varphi(k_n(\xi - x))$$

gewiss Bedingung 1. von Satz VI*a* für die Klasse $\mathfrak{F}_2$ nicht erfüllt. Damit ist unsere Behauptung erwiesen.

XXVI*a*. »Genügt $\varphi(u)$ allen zu Beginn von Satz XXVI angeführten Voraussetzungen, so ist notwendig und hinreichend dafür, daß in jedem Punkte x des beliebigen Intervalles (a, b), der ein Stetigkeitspunkt für die in $< a, b >$ zu $\mathfrak{F}_2$ gehörige Funktion f ist, die Formel (6) gelte, daß φ auch der Bedingung (7) genügt. Ist auch Bedingung (7) erfüllt, so gilt (6) gleichmäßig in jedem Teilintervalle (a', b') von $< a, b >$, in dessen sämtlichen Punkten f stetig ist.«

Die Bedingung ist hinreichend. Das folgt unmittelbar aus dem Beweise von Satz XXVI.

Die Bedingung ist notwendig. Um dies einzusehen, wird es genügen, statt der Notwendigkeit von (7) die Notwendigkeit der folgenden Bedingung nachzuweisen: Zu jedem $h > 0$ und $\lambda > 1$ gibt es ein A', so daß:

(10) $$\int_{-\lambda u}^{-u} (\varphi(u))^2\, du < \frac{A'}{u}; \quad \int_{u}^{\lambda u} (\varphi(u))^2\, du < \frac{A'}{u} \quad \text{für } u \geqq h.$$

In der Tat. ist Bedingung (10) erfüllt, so ist auch Bedingung (7) erfüllt, denn es ist (für $u \geqq h$ und $\lambda > 1$):

$$\int_{u}^{+\infty} (\varphi(u))^2\, du = \int_{u}^{\lambda u} (\varphi(u))^2\, du + \int_{\lambda u}^{\lambda^2 u} (\varphi(u))^2\, du + \ldots + \int_{\lambda^n u}^{\lambda^{n+1} u} (\varphi(u))^2\, du + \ldots$$

und somit wegen (10):

$$\int_{u}^{+\infty} (\varphi(u))^2\, du < \frac{A'}{u}\left(1 + \frac{1}{\lambda} + \ldots + \frac{1}{\lambda^n} + \ldots\right) = \frac{A'\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{1}{u};$$

das heißt: es ist auch Bedingung (7) erfüllt.

Angenommen nun, es wäre Bedingung (10) nicht erfüllt; dann gäbe es ein $h > 0$ und ein $\lambda > 1$, so daß für eine Folge in $< h, +\infty)$ oder in $(-\infty, -h >$ gelegener u_n (wir nehmen etwa das erstere an):

(11) $$\int_{u_n}^{\lambda u_n} (\varphi(u))^2\, du = \frac{A_n}{u_n} \quad \left(\lim_{n=\infty} A_n = +\infty\right)$$

wäre. Sei x ein Punkt von (a, b). Wir wählen ein $\varepsilon > 0$, so daß:

$$\lambda\varepsilon \leqq b - x \quad \text{und} \quad \varepsilon \leqq h,$$

und setzen:

$$u_n = k_n\,\varepsilon.$$

Dann wird $k_n \geqq 1$ und nach (11):

$$k_n^2 \int_{x+\varepsilon}^{b} \{\varphi(k_n(\xi - x))\}^2\, d\xi \geqq k_n \int_{k_n\varepsilon}^{k_n\lambda.\varepsilon} (\varphi(u))^2\, du = \frac{A_n}{\varepsilon},$$

so daß für den Kern:

$$\varphi(\xi, x, n) = k_n\,\varphi(k_n(\xi - x))$$

Bedingung 1. von Satz VI nicht erfüllt wäre.

XXVII. Sei $\varphi(u)$ eine für alle reellen u definierte Funktion, für die das Integral (3) einen endlichen Wert hat und für die der Wert ω des Integrales (1) nicht verschwindet. Damit Beziehung (2) für jede im Punkte x stetige Funktion gelte, die in $(-\infty, +\infty)$ zur Klasse $\mathfrak{F}_1$ gehört, ist notwendig und hinreichend, daß zu jedem $h > 0$ ein A gehört, so daß (abgesehen von Nullmengen):

$$|\varphi(u)| < \frac{A}{|u|} \quad \text{für } |u| \geqq h. \tag{12}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so gilt (2) gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle $< a', b' >$, in dessen sämtlichen Punkten f stetig ist.

Die Bedingung ist hinreichend. Es handelt sich nur darum, nachzuweisen, daß Bedingung 1. von Satz X a für die Klasse $\mathfrak{F}_1$ erfüllt ist; denn für Bedingung 2., 3. und 4. ist es uns schon bekannt.

Wir haben zu zeigen: ist $h > 0$ beliebig gegeben, so gibt es ein M, so daß (abgesehen von Nullmengen):

$$\frac{k}{\omega}\,|\varphi(ku)| < M \quad \text{für } |u| \geqq h \text{ und } k \geqq 1. \tag{13}$$

Nun folgt aus (12) (immer abgesehen von Nullmengen):

$$k\,|\varphi(ku)| < \frac{A}{|u|} \quad \text{für } |u| \geqq h \text{ und } k \geqq 1,$$

mithin auch:

$$k\,|\varphi(ku)| < \frac{A}{h} \quad \text{für } |u| \geqq h \text{ und } k \geqq 1,$$

womit (13) bewiesen ist.

Die Bedingung ist notwendig. Wäre sie nicht erfüllt, so hieße das: es gibt ein $h > 0$ und eine, sei es in $< h, +\infty)$, sei es in $(-\infty, -h >$ gelegene Folge von Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n, \ldots$, deren jede einen von 0 verschiedenen Inhalt hat, und derart, daß in den Punkten von $\mathfrak{M}_n$:

$$|\varphi(u)| > \frac{n}{|u|}$$

ist. Nehmen wir etwa an, diese Mengen liegen in $< h, +\infty)$. Jedenfalls gibt es dann auch eine Folge von Punkten u_n $(\geqq h)$, so daß der in $< u_n, u_n + 1 >$ liegende Teil $\mathfrak{M}'_n$ von $\mathfrak{M}_n$ nicht den Inhalt 0 hat. Setzen wir:

$$u_n = k_n \cdot h,$$

so ist $k_n \geqq 1$, und es wird in den Punkten der Menge $\mathfrak{M}_n^*$, die aus $\overline{\mathfrak{M}}_n$ durch Ähnlichkeitstransformation im Verhältnisse $k_n : 1$ hervorgeht:

$$k_n \varphi(k_n u) > \frac{n}{u} \geqq \frac{n}{\frac{1}{k_n}(u_n+1)} = \frac{n}{h+\frac{1}{k_n}} \geqq \frac{n}{h+1}.$$

Und da die Menge $\mathfrak{M}_n^*$ in $\langle h, +\infty)$ liegt, wäre also Bedingung 1. von Satz VI a für die Klasse $\mathfrak{F}_1$ nicht erfüllt.

XXVII a. »Genügt $\varphi(u)$ allen zu Beginn von Satz XXVII aufgezählten Bedingungen, so ist, damit in jedem Punkte x des beliebigen Intervalles (a, b), der für die in $\langle a, b \rangle$ zur Klasse $\mathfrak{F}_1$ gehörige Funktion f ein Stetigkeitspunkt ist, Formel (6) gelte, notwendig und hinreichend, daß $\varphi(u)$ auch der Bedingung (12) genüge. Ist auch Bedingung (12) erfüllt, so gilt (6) gleichmäßig in jedem Teilintervalle $\langle a', b' \rangle$ von (a, b), in dessen sämtlichen Punkten f stetig ist.«

Eines Beweises bedarf hier nur die Behauptung, daß die Bedingung (12) notwendig ist. Wäre sie nicht erfüllt, so gäbe es wieder eine Folge, etwa in $\langle h, +\infty)$ gelegener Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n, \ldots$ mit von 0 verschiedenem Inhalte, so daß in den Punkten von $\mathfrak{M}_n$:

$$|\varphi(u)| > \frac{n}{u}. \tag{14}$$

Es gäbe also auch eine in $\langle h, +\infty)$ gelegene Punktfolge $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ und in $\langle u_n, u_n + \frac{1}{n} \rangle$ gelegene Mengen $\overline{\mathfrak{M}}_n$ mit von 0 verschiedenem Inhalte, auf denen (14) gilt.

Sei x ein Punkt von (a, b). Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ gemäß:

$$\varepsilon \leqq h, \quad \varepsilon < b - x$$

und setzen:

$$k_n = \frac{u_n}{\varepsilon}; \quad u = k_n(\xi - x).$$

Gehört dann $k_n(\xi - x)$ zur Menge $\overline{\mathfrak{M}}_n$, das heißt gehört ξ zur Menge $\mathfrak{M}_n^*$, die aus $\overline{\mathfrak{M}}_n$ durch die lineare Transformation $u = k_n(\xi - x)$ entsteht, so haben wir wegen (14):

$$k_n\,|\varphi(k_n(\xi - x))| > \frac{n}{\xi - x}.$$

Die Menge $\mathfrak{M}_n^*$ aber liegt im Intervalle $\langle x+\varepsilon, x+\varepsilon+\frac{1}{n\,k_n} \rangle$ der Veränderlichen ξ. Wegen $k_n \geqq 1$ liegen diese Intervalle für hinlänglich großes n in $\langle x+\varepsilon, b \rangle$, so daß für den Kern:

$$\varphi(\xi, x, n) = k_n \varphi(k_n(\xi - x))$$

sicherlich Bedingung 1. von Satz VI nicht erfüllt ist.

§ 14. Konvergenz an Unstetigkeitsstellen.

Besonders einfach gestaltet sich für den jetzt betrachteten Typus singulärer Integrale die Anwendung der Sätze von §§ 7, 8 und 9, wenn wir bemerken, daß hier die Bedingung:

$$\lim_{k=+\infty} \varphi(\xi, x, k) = 0 \quad \text{für } \xi \neq x$$

gleichbedeutend ist mit:

$$\lim_{u=-\infty} u \cdot \varphi(u) = 0; \quad \lim_{u=+\infty} u \cdot \varphi(u) = 0. \tag{1}$$

und daß wegen:

$$\frac{\partial^i}{\partial \xi^i} \varphi(\xi, x, k) = (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial x^i} \varphi(\xi, x, k) = k^{i+1} \varphi^{(i)}(k(\xi - x))$$

jede der Beziehungen:

$$\lim_{k=+\infty} \frac{\partial^i}{\partial \xi^i} \varphi(\xi, x, k) = 0; \quad \lim_{k=+\infty} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \varphi(\xi, x, k) = 0 \quad \text{für } \xi \neq x$$

gleichbedeutend wird mit:

$$(1a) \qquad \lim_{u=-\infty} u^{i+1} \varphi^{(i)}(u) = 0; \quad \lim_{u=+\infty} u^{i+1} \varphi^{(i)}(u) = 0.$$

Durch Anwendung von Satz XIV *a* und XV *a* finden wir also:

XXVIII. Sei $\varphi(u)$ eine für alle reellen u definierte Funktion, die eine in jedem endlichen Intervalle absolut stetige $(m-1)$-te Ableitung besitzt, und es sei:

$$(2) \qquad \lim_{u=-\infty} u^m \varphi^{(m-1)}(u) = 0; \quad \lim_{u=+\infty} u^m \varphi^{(m-1)}(u) = 0.$$

Ferner existiere das verallgemeinerte Integral:

$$(3) \qquad \lim_{A=+\infty} \int_{-A}^{A} \varphi(u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\, du = \omega,$$

und es sei sein Wert $\omega \neq 0$. Endlich existiere das Integral:

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |u^m \varphi^{(m)}(u)|\, du.$$

Dann gilt für jede in $(-\infty, +\infty)$ zu einer der Klassen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ gehörige Funktion f die Beziehung:

$$(5) \qquad f(x) = \lim_{k=+\infty} \frac{k}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi(k(\xi - x))\, d\xi$$

in jedem Punkte x, in dem f m-te Ableitung seines m-fach iterierten unbestimmten Integrales ist. Ist $\varphi(u)$ eine gerade Funktion, so gilt (5) in jedem Punkte x, in dem f verallgemeinerte m-te Ableitung seines m-fach iterierten unbestimmten Integrales ist.

Zum Beweise bemerken wir, daß gleichzeitig mit $\varphi^{(m-1)}$ auch $\varphi^{(m-2)}, \ldots, \varphi'$ und φ in jedem endlichen Intervalle absolut stetig sind. Daraus und aus der Existenz des verallgemeinerten Integrales (3) folgt ohneweiters: es gibt Punktfolgen $u_n, \bar{u}_n, u_n^{(i)}, \bar{u}_n^{(i)}$ mit:

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} u_n = +\infty, \quad \lim_{n=\infty} \bar{u}_n = -\infty, \quad \lim_{n=\infty} u_n^{(i)} = +\infty, \quad \lim_{n=\infty} \bar{u}_n^{(i)} = -\infty,$$

für die:

$$(7) \quad \lim_{n=\infty} \varphi(u_n) = 0, \quad \lim_{n=\infty} \varphi(\bar{u}_n) = 0, \quad \lim_{n=\infty} \varphi^{(i)}(u_n^{(i)}) = 0, \quad \lim_{n=\infty} \varphi^{(i)}(\bar{u}_n^{(i)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Aus (2) folgt: ist $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so gibt es ein A, so daß:

$$|\varphi^{(m-1)}(u)| < \frac{\varepsilon}{u^m} \quad \text{für } u \geqq A.$$

Und daraus folgt durch Integration (für $u \geqq A$ und hinlänglich großes n):

$$|\varphi^{(m-2)}(u) - \varphi^{(m-2)}(u_n^{(m-2)})| \leqq \frac{\varepsilon}{m-1} \left| \frac{1}{u^{m-1}} - \frac{1}{(u_n^{(m-2)})^{m-1}} \right|.$$

Aus (6) und (7) folgt nun:

$$|\varphi^{(m-2)}(u)| \leqq \frac{\varepsilon}{m-1} \frac{1}{u^{m-1}} \quad \text{für } u \geqq A,$$

oder, was dasselbe heißt:

(8) $$\lim_{u=+\infty} u^{m-1} \varphi^{(m-2)}(u) = 0.$$

Ebenso beweist man:

(8 *a*) $$\lim_{u=-\infty} u^{m-1} \varphi^{(m-2)}(u) = 0.$$

So wie (8) und (8 *a*) aus (2) hergeleitet wurden, zeigt man, indem man in derselben Weise weiterschließt: es bestehen die Relationen:

(9) $$\lim_{u=-\infty} u\varphi(u) = 0 \qquad \lim_{u=+\infty} u\varphi(u) = 0$$

$$\lim_{u=-\infty} u^{i+1} \varphi^{(i)}(u) = 0 \qquad \lim_{u=+\infty} u^{i+1} \varphi^{(i)}(u) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Wir zeigen sodann, daß aus unseren Voraussetzungen folgt, daß $\varphi(u)$ der Bedingung (3) von Satz XXV, der Bedingung (7) von Satz XXVI und der Bedingung (12) von Satz XXVII genügt.

Durch partielle Integration ergibt sich:

$$\int_0^u v^{m-1} \varphi^{(m-1)}(v)|\,dv = \frac{v^m}{m} |\varphi^{(m-1)}(v)|\Big]_0^u - \frac{1}{m} \int_0^u v^m \, sgn.\varphi^{(m-1)}(v) \cdot \varphi^{(m)}(v)\, dv.$$

Hierin haben wir, wegen (2):

$$\lim_{u=+\infty} \frac{v^m}{m} \varphi^{(m-1)}(v)|\Big]_0^u = 0,$$

der Subtrahend hat, wegen der vorausgesetzten Existenz des Integrales (4) einen endlichen Grenzwert für $u \doteq +\infty$, so daß die Existenz des Integrales:

$$\int_0^{\infty} u^{m-1} \varphi^{(m-1)}(u)|\, du$$

bewiesen ist. Ebenso beweist man die Existenz von:

$$\int_{-\infty}^{0} |u^{m-1} \varphi^{(m-1)}(u)|\, du,$$

so daß aus der vorausgesetzten Existenz von (4) die Existenz von:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u^{m-1} \varphi^{(m-1)}(u)|\, du$$

folgt. Indem man (unter Benützung von (9)) so weiter schließt, beweist man der Reihe nach die Existenz von:

(10) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |u^i \varphi^{(i)}(u)|\, du \qquad (i = m-1, m-2, \ldots, 1) \qquad \text{und} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(u)|\, du.$$

Damit ist Bedingung (3) von Satz XXV erwiesen.

Wie aus der Stetigkeit von $\varphi(u)$ und den beiden ersten Relationen (9) unmittelbar folgt, gibt es eine Konstante B, so daß für alle u:

(11) $$|\varphi(u)| < \frac{B}{|u|}.$$

Also haben wir für alle $u \geqq h$:

$$\int_{-\infty}^{-u} (\varphi(v))^2\, dv < \frac{B^2}{u}; \quad \int_{u}^{+\infty} (\varphi(v))^2\, dv < \frac{B^2}{u},$$

womit Bedingung (7) von Satz XXVI nachgewiesen ist. — Und durch Ungleichung (11) ist gleichzeitig Bedingung (12) von Satz XXVII als erfüllt nachgewiesen.

Daraus folgt aber, wie die Beweise von XXV, XXVI und XXVII gezeigt haben, das Bestehen der Bedingungen 1., 2. und 4. von Satz XIV *a* für jede der Klassen $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$. — Um einzusehen, daß auch Bedingung 3. von Satz XIV *a* erfüllt ist, schreiben wir:

$$\int_{x-h}^{x+h} \left| (\xi - x)^m \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \varphi(\xi, x, u) \right| d\xi = \int_{-h}^{h} k^{m+1} \left| u^m \varphi^{(m)}(ku) \right| du = \int_{-k.h}^{k.h} \left| u^m \varphi^{(m)}(u) \right| du,$$

und dieser Ausdruck liegt, wegen der vorausgesetzten Existenz des Integrales (4), tatsächlich für alle $k \geqq 1$ unter einer endlichen Schranke N.

Damit ist Satz XXVIII bewiesen. Man beweist ebenso:

XXVIII *a*. »Genügt $\varphi(u)$ den Voraussetzungen von Satz XXVIII, so gilt für jede in $<a, b>$ zur Klasse $\mathfrak{F}_1$ gehörige Funktion f die Beziehung

$$f(x) = \lim_{k=+\infty} \frac{k}{\omega} \int_a^b f(\xi)\, \varphi(k(\xi - x))\, d\xi \tag{12}$$

in jedem Punkte x von (a, b), in dem f m-te Ableitung seines m-fach iterierten unbestimmten Integrales ist. — Ist $\varphi(u)$ eine gerade Funktion, so gilt (12) in jedem Punkte x von (a, b), in dem f verallgemeinerte m-te Ableitung seines m-fach iterierten unbestimmten Integrales ist.«

§ 15. Differenziation der Integrale des Weierstraß'schen Typus.

Durch Berufung auf die Sätze XVI *a*, XVII *a*, XIX *a* finden wir:

XXIX. Es genüge $\varphi(u)$ allen Voraussetzungen von Satz XXVIII. Damit in jedem Punkte x, in dem die in $(-\infty, +\infty)$ zur Klasse $\mathfrak{F}_3$ gehörige Funktion f eine endliche Ableitung m-ter Ordnung besitzt, die Beziehungen gelten:

$$f(x) = \lim_{k=+\infty} \frac{k}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi(k(\xi - x))\, d\xi, \tag{1}$$

$$f^{(i)}(x) = \lim_{k=+\infty} (-1)^i \frac{k^{i+1}}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi^{(i)}(k(\xi - x))\, d\xi \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

ist notwendig und hinreichend, daß das Integral (4) von § 14 existiere. Ist dies der Fall, so gelten die Beziehungen (1), (2) gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle, in dem f m-mal stetig differenzierbar ist. Ist $\varphi(u)$ eine gerade Funktion, so kann die Ableitung $f^{(i)}(x)$ durch die verallgemeinerte Ableitung $\overset{*}{f^{(i)}}(x)$ ersetzt werden.

Die Bedingung ist hinreichend (auch für die gleichmäßige Konvergenz). Es genügt zu beweisen, daß für den Kern

$$\varphi(u, k) = \frac{k}{\omega} \varphi(ku)$$

alle Voraussetzungen und Bedingungen von Satz XIX *a* erfüllt sind; zunächst gilt tatsächlich die Beziehung:

$$\lim_{k=+\infty} \varphi^{(m-1)}(u, k) = \lim_{k=+\infty} \frac{k^m}{\omega} \varphi^{(m-1)}(k \cdot u) = 0 \tag{3}$$

gleichmäßig in jedem endlichen, den Nullpunkt nicht enthaltenden Intervalle $<\alpha, \beta>$, wie unmittelbar aus (2) von § 14 folgt; denn sei etwa:

$$0 < \alpha < \beta.$$

Wegen (2) von § 14 ist, bei beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$:

$$|u^m \varphi^{(m-1)}(u)| < \varepsilon \quad \text{für } u \geqq A.$$

Daher weiter für alle u von $<\alpha, \beta>$:

$$|k^m \varphi^{(m-1)}(uk)| < \frac{\varepsilon}{\alpha^m} \quad \text{für } k \geqq \frac{A}{\alpha},$$

womit das gleichmäßige Bestehen von (3) in $<\alpha, \beta>$ bewiesen ist.

Bedingung 1. von XIX a für die Klasse $\mathfrak{F}_3$ ist erfüllt, wenn für jedes $h > 0$ die Kerne $\psi(u, k, h)$ und $\psi^{(i)}(u, k, h)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ der Bedingung 1. von Satz III a genügen. Für den Kern $\psi(u, k, h)$ haben wir schon beim Beweise von Satz XXV gezeigt, daß dies tatsächlich aus der Existenz des Integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(u)|\, du$$

folgt. Zeigen wir es nun für den Kern $\psi^{(i)}(u, k, h)$.

Es wird wieder genügen zu zeigen, daß:

$$\lim_{k=+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi^{(i)}(u, k, h)|\, du = 0 \tag{4}$$

ist, da daraus das Bestehen der Bedingung 1. von III a für den Kern $\psi^{(i)}(u, k, h)$ ebenso gefolgert werden kann, wie beim Beweise von Satz XXV das Bestehen dieser Bedingung für den Kern $\psi(\xi, x, n, \varepsilon)$ aus der dortigen Relation (4) gefolgert wurde.

Um (4) zu beweisen, beachten wir, daß:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi^{(i)}(u, k, h)|\, du = \frac{k^{i+1}}{\omega}\left\{\int_{-\infty}^{-h} |\varphi^{(i)}(ku)|\, du + \int_{h}^{+\infty} |\varphi^{(i)}(ku)|\, du\right\} = \tag{5}$$

$$= \frac{k^i}{\omega}\left\{\int_{-\infty}^{-kh} |\varphi^{(i)}(u)|\, du + \int_{kh}^{+\infty} |\varphi^{(i)}(u)|\, du\right\}.$$

Wegen der in § 14 bewiesenen Existenz des Integrales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u^i \varphi^{(i)}(u)|\, du$$

gibt es zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein A, so daß:

$$\int_{-\infty}^{-u} |v^i \varphi^{(i)}(v)|\, dv < \varepsilon; \quad \int_{u}^{+\infty} |v^i \varphi^{(i)}(v)|\, dv < \varepsilon \quad \text{für } u \geqq A,$$

und somit auch:

$$\int_{-\infty}^{-u} |\varphi^{(i)}(v)|\, dv < \frac{\varepsilon}{u^i}; \quad \int_{u}^{+\infty} |\varphi^{(i)}(v)|\, dv < \frac{\varepsilon}{u^i} \quad \text{für } u \geqq A,$$

woraus man sofort entnimmt:

$$k^i \int_{-\infty}^{-kh} |\varphi^{(i)}(u)|\, du < \frac{\varepsilon}{h^i}; \quad k^i \int_{kh}^{+\infty} |\varphi^{(i)}(u)|\, du < \frac{\varepsilon}{h^i} \quad \text{für } k \geqq \frac{A}{h}.$$

Damit ist, im Hinblick auf (5), Beziehung (4) dargetan und mithin bewiesen, daß Bedingung 1. von Satz XIX a erfüllt ist.

Daß Bedingung 3. von XIX *a* erfüllt ist, entnimmt man daraus, daß:

$$(6) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |u^m \varphi^{(m)}(u,k)|\, du = \frac{k^{m+1}}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^m \varphi^{(m)}(ku)|\, du = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} |u^m \varphi^{(m)}(u)|\, du$$

ist. Daß Bedingung 4. von XIX *a* erfüllt ist, ist evident.

Gleichung (6) lehrt aber auch, daß die Bedingung von Satz XXIX notwendig ist,[1] womit dieser Satz völlig bewiesen ist.

Ebenso beweist man:

XXIX *a.* »Es genüge $\varphi(u)$ allen Voraussetzungen von Satz XXVIII. Damit in jedem Punkte x des beliebigen Intervalles (a, b), in dem die in $< a, b >$ zur Klasse $\mathfrak{F}_3$ gehörige Funktion f eine endliche Ableitung m-ter Ordnung besitzt, die Beziehungen gelten:

$$(7) \qquad f(x) = \lim_{k=+\infty} \frac{k}{\omega} \int_a^b f(\xi)\, \varphi(k(\xi - x))\, d\xi,$$

$$(8) \qquad f^{(i)}(x) = \lim_{k=+\infty} (-1)^i \frac{k^{i+1}}{\omega} \int_a^b f(\xi)\, \varphi^{(i)}(k(\xi - x))\, d\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

ist notwendig und hinreichend, daß das Integral (4) von § 14 existiere. — Ist dies der Fall, so gelten die Beziehungen (7), (8) gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< a', b' >$ von (a, b), in dem f m-mal stetig differenzierbar ist. — Ist $\varphi(u)$ eine gerade Funktion, so kann die Ableitung $f^{(i)}(x)$ durch die verallgemeinerte Ableitung $\overset{*}{f}{}^{(i)}(x)$ ersetzt werden.«

Wir wenden uns nunmehr der Frage nach der Gültigkeit der Formeln (1), (2) für Funktionen der Klassen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zu.

XXX. Es genüge $\varphi(u)$ allen Voraussetzungen von Satz XXVIII. Damit in jedem Punkte x, in dem die in $(-\infty, +\infty)$ zur Klasse $\mathfrak{F}_2$ gehörige Funktion f eine endliche Ableitung m-ter Ordnung besitzt, die Beziehungen (1), (2) bestehen, ist notwendig und hinreichend, daß das Integral (4) von § 14 existiere, und daß folgende Bedingung erfüllt sei: zu jedem $h > 0$ gehört ein A, so daß für $u \geqq h$:

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^{-u} (\varphi^{(m)}(v))^2\, dv < \frac{A}{u^{2m+1}}; \quad \int_u^{+\infty} (\varphi^{(m)}(v))^2\, dv < \frac{A}{u^{2m+1}}.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gelten die Beziehungen (1), (2) gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle $< a', b' >$, in dem f m-mal stetig differenzierbar ist. — Ist $\varphi(u)$ eine gerade Funktion, so kann die Ableitung $f^{(i)}(x)$ ersetzt werden durch die verallgemeinerte Ableitung $\overset{*}{f}{}^{(i)}(x)$.

Die Bedingungen sind hinreichend. Es braucht nur mehr gezeigt zu werden, daß Bedingung 1. von Satz XIX *a* für die Klasse $\mathfrak{F}_2$ erfüllt ist; es genügt also zu zeigen: zu jedem $h > 0$ gibt es ein M, so daß für alle $k \geqq 1$:

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi(u, k, h))^2\, du < M,$$

$$(11) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi^{(i)}(u, k, h))^2\, du < M \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Wir schreiben:

$$(12) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi^{(i)}(u, k, h))^2\, du = \frac{k^{2(i+1)}}{\omega^2} \left\{ \int_{-\infty}^{-h} (\varphi^{(i)}(ku))^2\, du + \int_h^{+\infty} (\varphi^{(i)}(ku))^2\, du \right\} =$$

$$= \frac{k^{2i+1}}{\omega^2} \left\{ \int_{-\infty}^{-kh} (\varphi^{(i)}(u))^2\, du + \int_{kh}^{+\infty} (\varphi^{(i)}(u))^2\, du \right\}.$$

---

[1] Und zwar nicht nur, wenn f zu $\mathfrak{F}_3$ gehört, sondern auch, wenn f zu $\mathfrak{F}_1$ oder $\mathfrak{F}_2$ gehört.

Benützt man (9), so hat man daher weiter:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi^{(m)}(u, k, h))^2 \, du \leqq \frac{2}{\omega^2} \frac{A}{h^{2m+1}},$$

womit (11) für $i = m$ bewiesen ist. Für $i = 1, 2, \ldots, m-1$, sowie für (10) folgt dies wieder aus (12), beziehungsweise der analogen Formel für $\psi(u, k, h)$, wenn man bemerkt, daß es wegen der Stetigkeit von $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(m-1)}$ und wegen (9) von § 14 eine Konstante B gibt, so daß für alle u die Ungleichungen bestehen:

$$|\varphi(u)| < \frac{B}{|u|}, \quad \varphi^{(i)}(u) < \frac{B}{|u|^{i+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Die Bedingungen sind notwendig. Für die das Integral (4) von § 14 betreffenden Bedingung haben wir das schon oben bemerkt.[1] Was (9) anlangt, so nehmen wir an, diese Bedingung sei nicht erfüllt.

Es gibt dann einen Wert $h > 0$ und eine sei es in $< h, +\infty)$, sei es in $(-\infty, -h >$ liegende Punktfolge $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, für die die entsprechende der beiden Beziehungen:

$$\int_{u_n}^{+\infty} (\varphi^{(m)}(u))^2 \, du = \frac{A_n}{u_n^{2m+1}}; \quad \int_{-\infty}^{u_n} (\varphi^{(m)}(u))^2 \, du = \frac{A_n}{|u_n|^{2m+1}}$$

mit:

$$\lim_{n=\infty} A_n = +\infty$$

gilt. Nehmen wir etwa ersteren Fall an und setzen:

$$u_n = k_n \cdot h, \tag{13}$$

so haben wir $k_n \geqq 1$ und:

$$\int_{u_n}^{+\infty} (\varphi^{(m)}(u))^2 \, du = k_n \int_{\frac{u_n}{k_n}}^{+\infty} (\varphi^{(m)}(k_n u))^2 \, du = \frac{A_n}{u_n^{2m+1}},$$

oder wegen (13):

$$k_n^{2m+2} \int_h^{+\infty} (\varphi^{(m)}(k_n u))^2 \, du = \frac{A_n}{h^{2m+1}},$$

es wäre also für $\psi^{(m)}(u, k_n, h)$ Bedingung 1. von Satz XVI *a* für die Klasse $\mathfrak{F}_2$ nicht erfüllt.

Damit ist Satz XXX nachgewiesen. In analoger Weise (man vergleiche den Beweis von Satz XXVI *a*) zeigt man:

XXX *a*. Es genüge $\varphi(u)$ allen Voraussetzungen von Satz XXVIII. Damit in jedem Punkte x des beliebigen Intervalles (a, b), in dem die in $< a, b >$ zur Klasse $\mathfrak{F}_2$ gehörige Funktion f eine endliche Ableitung m-ter Ordnung besitzt, die Beziehungen (7), (8) gelten, ist notwendig und hinreichend, daß das Integral (4) von § 14 existiere und daß folgende Bedingung erfüllt sei: zu jedem $h > 0$ gehört ein A, so daß für $u \geqq h$:

$$\int_{-\infty}^{-u} (\varphi^{(m)}(u))^2 \, du < \frac{A}{u^{2m+1}}; \quad \int_u^{+\infty} (\varphi^{(m)}(u))^2 \, du < \frac{A}{u^{2m+1}}. \tag{14}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gelten die Beziehungen (7), (8) gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< a', b' >$ von (a, b), in dem f m-mal stetig differenzierbar ist. Ist $\varphi(u)$ eine gerade Funktion, so kann die Ableitung $f^{(i)}(x)$ ersetzt werden durch die verallgemeinerte Ableitung $\overset{\circ}{f}{}^{(i)}(x)$.

[1] Anmerkung auf p. 61 [645].

XXXI. In Satz XXX kann die Klasse $\mathfrak{F}_2$ ersetzt werden durch die Klasse $\mathfrak{F}_1$, wenn Bedingung (9) ersetzt wird durch die Bedingung: zu jedem $h > 0$ gibt es ein A, so daß (abgesehen von Nullmengen):

(15) $$|\varphi^{(m)}(u)| < \frac{A}{|u|^{m+1}} \quad \text{für } |u| \geqq h.$$

Bedingung (15) ist hinreichend. Es genügt, gemäß Satz XIX a für die Klasse $\mathfrak{F}_1$, nachzuweisen: Zu jedem $h > 0$ gibt es ein M, so daß (abgesehen von Nullmengen) für alle $k \geqq 1$:

$$|\psi(u, k, h)| < M; \quad |\psi^{(i)}(u, k, h)| < M \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Aus (15) und den Beziehungen (9) von § 14 folgt, daß es zu jedem $h > 0$ ein B gibt, so daß für $|u| \geqq h$:

$$|\varphi(u)| < \frac{B}{|u|}; \quad |\varphi^{(i)}(u)| < \frac{B}{|u|^{i+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Infolgedessen ist für $|u| \geqq h$ und $k \geqq 1$:

$$\left|\frac{k}{\omega}\,\varphi(ku)\right| < \frac{B}{\omega \cdot h}; \quad \left|\frac{k^{i+1}}{\omega}\,\varphi^{(i)}(ku)\right| < \frac{B}{\omega \cdot h^{i+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

womit Bedingung 1. von XIX a für $\mathfrak{F}_1$ nachgewiesen ist.

Bedingung (15) ist notwendig. Wäre sie nicht erfüllt, so hieße das: es gibt ein $h > 0$ und eine sei es in $\langle h, +\infty)$, sei es in $(-\infty, -h\rangle$ gelegene Folge von Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n, \ldots$ mit von 0 verschiedenem Inhalte, derart, daß in den Punkten von $\mathfrak{M}_n$:

$$|\varphi^{(m)}(u)| > \frac{n}{|u|^{m+1}}$$

ist. Nehmen wir etwa an, diese Mengen liegen in $\langle h, +\infty)$. Es gibt dann auch eine Folge von Punkten $u_n\ (\geqq h)$, so daß der in $\langle u_n, u_n + 1\rangle$ liegende Teil $\overline{\mathfrak{M}}_n$ von $\mathfrak{M}_n$ nicht den Inhalt 0 hat. Setzen wir:

$$u_n = k_n \cdot h,$$

so ist $k_n \geqq 1$, und es wird in den Punkten der Menge $\mathfrak{M}_n^*$, die aus $\overline{\mathfrak{M}}_n$ durch Ähnlichkeitstransformation im Verhältnisse $k_n : 1$ entsteht:

$$k_n^{m+1}\,\varphi^{(m)}(k_n u) > \frac{n}{u^{m+1}} \geqq \frac{n}{\left(\frac{1}{k_n}(u_n + 1)\right)^{m+1}} = \frac{n}{\left(h + \frac{1}{k_n}\right)^{m+1}} \geqq \frac{n}{(h+1)^{m+1}},$$

so daß also Bedingung 1. von Satz XVI für die Klasse $\mathfrak{F}_1$ nicht erfüllt wäre.

Analog beweist man (vergleiche den Beweis von Satz XXVII a):

XXXI a. In Satz XXX a kann die Klasse $\mathfrak{F}_2$ ersetzt werden durch die Klasse $\mathfrak{F}_1$, wenn Bedingung (14) ersetzt wird durch Bedingung (15).

§ 16. Singuläre Integrale vom Poisson'schen Typus.

Wir betrachten nun einen Typus singulärer Integrale, den wir, weil in ihm das aus der Potentialtheorie bekannte Poisson'sche Integral als Spezialfall enthalten ist, als den Poisson'schen Typus bezeichnen wollen.

Sei $\varphi(u)$ eine in $(-l, l)$ definierte, im Nullpunkt verschwindende Funktion der Gestalt:

(1) $$\varphi(u) = \alpha\,|u|^{\nu} + \omega(u) \cdot |u|^{\nu},$$

worin:

(2) $$\alpha > 0; \quad p > 1; \quad \lim_{u=0} \omega(u) = 0.$$

In jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervalle $<\alpha, \beta>$ von $(-l, l)$ sei die untere Grenze von $\varphi(u)$ eine positive Zahl.

Sei $0 < \gamma < l$. Wir wollen für $k > 0$ eine Funktion $c(k)$ so bestimmen, daß:

(3) $$\lim_{k=+\infty} c(k) \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{du}{1+k\,\varphi(u)} = 1$$

wird. — Sei $h > 0$ beliebig gegeben. Wir können dann, zufolge (1) und (2), $\gamma' > 0$ so klein wählen, daß in $<-\gamma', \gamma'>$:

(4) $$(\alpha-h)\,|u|^p \leqq \varphi(u) \leqq (\alpha+h)\,|u|^p,$$

und somit auch:

(5) $$2\int_0^{\gamma'} \frac{du}{1+k\cdot(\alpha+h)\,u^p} \leqq \int_{-\gamma'}^{\gamma'} \frac{du}{1+k\cdot\varphi(u)} \leqq 2\int_0^{\gamma'} \frac{du}{1+k\cdot(\alpha-h)\,u^p}.$$

Dies führt uns auf die Aufgabe, eine asymptotische Auswertung des Integrales:

$$I(k, \beta, \sigma, p) = \int_0^{\sigma} \frac{du}{1+k\cdot\beta u^p}$$

vorzunehmen. Führen wir die Substitution:

$$v = k^{\frac{1}{p}} \cdot \beta^{\frac{1}{p}} \cdot u \qquad \tau = \beta^{\frac{1}{p}} \cdot \sigma$$

aus, so erhalten wir:

$$I(k, \beta, \sigma, p) = k^{-\frac{1}{p}} \beta^{-\frac{1}{p}} \int_0^{k^{\frac{1}{p}}\cdot\tau} \frac{dv}{1+v^p}.$$

Setzen wir noch:

(6) $$\Omega(p) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^p},$$

so haben wir also:

(7) $$\lim_{k=+\infty} k^{\frac{1}{p}}\, I(k, \beta, \sigma, p) = \beta^{-\frac{1}{p}}\, \Omega(p).$$

Nun kann (5) auch geschrieben werden:

$$2\,k^{\frac{1}{p}}\, I(k, \alpha+h, \gamma', p) \leqq k^{\frac{1}{p}} \int_{-\gamma'}^{\gamma'} \frac{du}{1+k\,\varphi(u)} \leqq 2\,k^{\frac{1}{p}}\, I(k, \alpha-h, \gamma', p).$$

Wegen (7) ist also, wenn $\eta > 0$ beliebig gegeben wird, für alle $k \geqq k_0$:

$$2\,(\alpha+h)^{-\frac{1}{p}}\,\Omega(p) - \eta \leqq k^{\frac{1}{p}} \int_{-\gamma'}^{\gamma'} \frac{du}{1+k\cdot\varphi(u)} \leqq 2\,(\alpha-h)^{-\frac{1}{p}}\,\Omega(p) + \eta.$$

Sei nun γ eine beliebige Zahl aus $(0, l)$ und es sei $\gamma'\ (<\gamma)$ entsprechend (4) gewählt. Da die untere Grenze von $\varphi(u)$ in $<\gamma', \gamma>$ sowie in $<-\gamma, -\gamma'>$ positiv (etwa $= \vartheta > 0$) ist, haben wir:

$$\left| \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{du}{1+k\,\varphi(u)} - \int_{-\gamma'}^{\gamma'} \frac{du}{1+k\,\varphi(u)} \right| \leqq \frac{2(\gamma-\gamma')}{1+k\vartheta}.$$

Wir haben also endlich für alle hinlänglich großen k:

$$2\,(\alpha+h)^{-\frac{1}{p}}\,\Omega(p) - k^{\frac{1}{p}} \frac{2\gamma}{1+k\vartheta} - \eta \leqq k^{\frac{1}{p}} \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{du}{1+k\cdot\varphi(u)} \leqq 2\,(\alpha-h)^{-\frac{1}{p}}\,\Omega(p) + k^{\frac{1}{p}} \frac{2\gamma}{1+k\cdot\vartheta} + \eta,$$

und da hierin h und η beliebig waren, so ist das gleichbedeutend mit:

$$\lim_{k=+\infty} k^{\frac{1}{p}} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{du}{1+k\cdot\varphi(u)} = 2\cdot\alpha^{-\frac{1}{p}}\,\Omega(p).$$

Wir sehen also, daß wir in (3) wählen können:

$$c(k) = \frac{1}{2}\,\alpha^{\frac{1}{p}}\,\frac{1}{\Omega(p)}\,k^{\frac{1}{p}}.$$

Wir können nun den Satz beweisen:

XXXII. Sei $\varphi(u)$ eine in $(-l, l)$ gegebene Funktion der Form (1), (2), deren untere Grenze in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervalle $<\alpha, \beta>$ von $(-l, l)$ positiv ist. Mit $\Omega(p)$ werde der Wert (6) bezeichnet. Dann gilt für jede in $<a, a+l>$ zur Klasse $\mathfrak{F}_1$ gehörige Funktion f, die im Punkte x von $(a, a+l)$ stetig ist, die Formel:

(8)
$$f(x) = \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Omega(p)} \lim_{k=+\infty} k^{\frac{1}{p}} \int_a^{a+l} f(\xi)\,\frac{d\xi}{1+k\varphi(\xi-x)}.$$

Diese Formel gilt gleichmäßig in jedem Teilintervalle $<a', b'>$ von $(a, a+l)$, in dessen sämtlichen Punkten f stetig ist.

Zum Beweise haben wir uns nur auf Satz XVIII zu berufen. Ist $<\alpha, \beta>$ ein den Nullpunkt nicht enthaltendes Teilintervall von $(-l, l)$, so haben wir nach Voraussetzung in $<\alpha, \beta>$:

$$\varphi(u) > \vartheta > 0$$

und somit, wenn:

$$\varphi(u, k) = \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Omega(p)}\,k^{\frac{1}{p}}\,\frac{1}{1+k\varphi(u)}$$

gesetzt wird:

(9)
$$0 < \varphi(u, k) < \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Omega(p)}\,\frac{k^{\frac{1}{p}}}{1+k\vartheta},$$

so daß:

$$\lim_{k=+\infty} \varphi(u, k) = 0$$

gleichmäßig in $<\alpha, \beta>$ ist, wie Voraussetzung (1) von Satz XVIII verlangt.

Daß Bedingung 3. und 4. von XVIII erfüllt sind, folgt aus der wegen (3) gültigen Beziehung:

$$\lim_{k=+\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi(u, k)\,du = \lim_{k=+\infty} \int_{-\eta}^{\eta} |\varphi(u, k)|\,du = 1.$$

Einen bekannten Spezialfall erhält man, indem man für $(-l, l)$ das Intervall $(-2\pi, 2\pi)$ wählt und:

$$\varphi(u) = 1 - \cos u$$

setzt. Man erhält so:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\cdot\sqrt{2}} \lim_{k=+\infty} k^{\frac{1}{2}} \int_a^{a+2\pi} f(\xi)\,\frac{d\xi}{1+k\,(1-\cos(\xi-x))}.$$

Setzt man hierin:

$$k = \frac{2r}{(1-r)^2} \qquad (0 < r < 1)$$

und multipliziert unter dem Limeszeichen mit dem Faktor:

$$\frac{1+r}{2\sqrt{r}}$$

dessen $\lim\limits_{r=1}$ gleich 1 ist, so erhält man die bekannte Poisson'sche Formel:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r=1-0} \int_0^{2\pi} f(\xi) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\xi-x)+r^2} d\xi.$$

Die Übertragung von Satz XXXII auf unendliche Intervalle gelingt leicht durch Berufung auf Satz XVIII a:

XXXII a. »Sei $\varphi(u)$ eine für alle reellen u definierte Funktion der Gestalt (1), (2), deren untere Grenze in jedem endlichen, den Nullpunkt nicht enthaltenden Intervalle positiv ist. Mit $\Omega(p)$ werde der Wert (6) bezeichnet. Es gilt dann die Formel:

$$f(x) = \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\Omega(p)} \lim_{k=+\infty} k^{\frac{1}{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \frac{d\xi}{1+k\varphi(\xi-x)} \tag{10}$$

in jedem Punkte x, in dem f stetig ist: *a)* für alle Funktionen, die in $(-\infty, +\infty)$ zur Klasse $\mathfrak{F}_1$ gehören wenn:

$$\lim_{u=-\infty} \varphi(u) > 0; \quad \lim_{u=+\infty} \varphi(u) > 0. \tag{11}$$

b) für alle Funktionen, die in $(-\infty, +\infty)$ zur Klasse $\mathfrak{F}_2$ gehören, wenn (11) erfüllt ist und:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1+\varphi(u))^2} \tag{12}$$

existiert; *c)* für alle Funktionen, die in $(-\infty, +\infty)$ zur Klasse $\mathfrak{F}_3$ gehören, wenn (11) erfüllt ist und:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+\varphi(u)} \tag{13}$$

existiert. In allen diesen Fällen gilt (10) gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle $< a', b' >$, in dessen sämtlichen Punkten f stetig ist.«

In der Tat, ist Bedingung (11) erfüllt, so gibt es zu jedem $h > 0$ ein $\vartheta > 0$, so daß in $(-\infty, -h >$ und in $< h, +\infty)$:

$$\varphi(u) > \vartheta.$$

In diesen Intervallen ist daher Ungleichung (9) erfüllt, und somit $|\varphi(u, k)|$ geschränkt für alle k. Damit ist Bedingung 1. von XVIII a für die Klasse $\mathfrak{F}_1$ nachgewiesen.

Ferner hat man in den genannten Intervallen:

$$\frac{1+\varphi(u)}{1+k\varphi(u)} < \frac{1+\varphi(u)}{k\varphi(u)} < \frac{1}{k} \frac{\vartheta+1}{\vartheta}.$$

Existiert also das Integral (12), so hat man:

$$\int_h^{+\infty} (\varphi(u, k))^2 du = \frac{\alpha^{\frac{2}{p}}}{4(\Omega(p))^2} k^{\frac{2}{p}} \int_h^{+\infty} \frac{du}{(1+k\varphi(u))^2} \leqq$$

$$\leqq \frac{\alpha^{\frac{2}{p}}}{4(\Omega(p))^2} k^{2\left(\frac{1}{p}-1\right)} \left(\frac{\vartheta+1}{\vartheta}\right)^2 \int_h^{+\infty} \frac{du}{(1+\varphi(u))^2}.$$

Es sind also gewiß die Integrale:

$$\int_h^{+\infty} (\varphi(u, k))^2 du \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{-h} (\varphi(u, k))^2 du$$

geschränkt für alle $k \geqq 1$. Damit ist Bedingung 1. von XVIII a für die Klasse $\mathfrak{F}_2$ nachgewiesen.

Ebenso beweist man, wenn das Integral (13) existiert, die Ungleichung:

$$\int_h^{+\infty} \varphi(u, k)\, du \leqq \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Omega(p)}\, k^{\frac{1}{p}-1}\, \frac{\vartheta+1}{\vartheta} \int_h^{+\infty} \frac{du}{1+\varphi(u)},$$

woraus man entnimmt:

$$\lim_{k=+\infty} \int_h^{+\infty} \varphi(u, k)\, du = 0; \quad \lim_{k=+\infty} \int_{-\infty}^{-h} \varphi(u, k)\, du = 0.$$

Daraus aber kann man, wie wir nun schon wiederholt gesehen haben, weiter schließen, daß für jede Folge von Zahlen k_n mit $\lim\limits_{n=\infty} k_n = +\infty$ der zum Kerne:

$$\varphi(u, n) = \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\Omega(p)}\, k_n^{\frac{1}{p}}\, \frac{1}{1 + k_n\, \varphi(u)}$$

gehörige Kern $\psi(u, n, h)$ für jedes $h > 0$ in $(-\infty, +\infty)$ der Bedingung 1. von Satz III *a* genügt, so daß Bedingung 1. von XVIII für die Klasse $\mathfrak{F}_3$ nachgewiesen ist. Damit ist Satz XXXII *a* bewiesen.

Als einfachsten Spezialfall erwähnen wir: [1]

$$\varphi(u) = u^2.$$

Man erhält so, indem man noch

$$\rho^2 = \frac{1}{k}$$

setzt, die in jedem Stetigkeitspunkte einer Funktion f, die in $(-\infty, +\infty)$ einer der drei Klassen $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ angehört, gültige Formel:

(14)
$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\rho=+0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \frac{\rho}{\rho^2 + (\xi - x)^2}\, d\xi.$$

§ 17. Konvergenz an Unstetigkeitsstellen und Differenziation.

Wir wenden auch auf unseren jetzigen Typus singulärer Integrale Satz XIV und XV, beziehungsweise XIV *a* und XV *a* an. Wir erhalten:

XXXIII. Es genüge $\varphi(u)$ außer den Voraussetzungen von Satz XXXII (beziehungsweise den Voraussetzungen von Satz XXXII*a* für die Klasse $\mathfrak{F}_i$) noch folgenden Bedingungen: $\varphi(u)$ besitzt in einer Umgebung des Nullpunktes eine absolut stetige $(m-1)$-te Ableitung und es sind in dieser Umgebung, abgesehen von einer Nullmenge, die Ungleichungen erfüllt:

(1)
$$|\varphi^{(i)}(u)| < A\, |u|^{p-i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m):$$

dann gilt Gleichung (8) (beziehungsweise (10)), von § 16 in jedem Punkte x von $(a, a+l)$ (beziehungsweise in jedem Punkte x), in dem die zur Klasse $\mathfrak{F}_1$ (beziehungsweise zur Klasse $\mathfrak{F}_i$) gehörige Funktion f m-te Ableitung ihres m-fach iterierten unbestimmten Integrales ist. — Ist außerdem in einer Umgebung des Nullpunktes: $\varphi(-u) = \varphi(u)$, so gilt (8) (beziehungsweise (10)) von § 16 in jedem Punkte x von $(a, a+l)$ (beziehungsweise in jedem Punkte x), in dem f verallgemeinerte m-te Ableitung seines m-fach itererierten unbestimmten Integrales ist.

Wir haben nachzuweisen, daß der Kern:

(2)
$$\varphi(\xi, x, k) = \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Omega(p)}\, k^{\frac{1}{p}}\, \frac{1}{1 + k\,\varphi(\xi - x)}$$

[1] Es ist dies gleichzeitig ein Spezialfall des Weierstraß'schen Typus.

allen Voraussetzungen und Bedingungen von Satz XIV genügt. Beachten wir zu dem Zwecke, daß die i-te Ableitung von $\frac{1}{1+k\varphi(u)}$ eine Summe aus einer endlichen Anzahl von Summanden der Form:

$$\frac{k^j\,(\varphi'(u))^{j_1}\,(\varphi''(u))^{j_2}\ldots(\varphi^{(i)}(u))^{j_i}}{(1+k\,\varphi(u))^{j+1}} \tag{3}$$

ist, wo für die Exponenten die Gleichheiten gelten:

$$j_1+2\,j_2+\ldots+ij_i=i \tag{4}$$
$$j_1+j_2+\ldots+j_i=j. \tag{5}$$

In der Tat gilt dies für $i=1$:

$$\frac{d}{du}\,\frac{1}{1+k\,\varphi(u)}=-\frac{k\cdot\varphi'(u)}{(1+k\,\varphi(u))^2},$$

und kann allgemein durch vollständige Induktion bewiesen werden, die genau so verläuft, wie beim analogen Beweise in § 12.

Zunächst sehen wir, daß in einer Umgebung der Stelle x für $\xi\neq x$ die Beziehung (1) von § 7:

$$\lim_{k=+\infty}\frac{\partial^i}{\partial\xi^i}\,\varphi(\xi,x,k)=0\qquad(i=1,2,\ldots,m-1) \tag{6}$$

besteht: in der Tat, zufolge (2) und (3) enthält jeder Summand von $\frac{\partial^i}{\partial\xi^i}\,\varphi(\xi,x,k)$ im Zähler den Faktor $k^{j+\frac{1}{p}}$, während der Nenner groß wird wie $(\varphi(u)\,k)^{j+1}$. Da $\varphi(u)\neq 0$ und $\frac{1}{p}<1$ ist, folgt unmittelbar (6).

Es bleibt noch nachzuweisen, daß Bedingung 3. von Satz XIV erfüllt ist, oder, was dasselbe ist, daß für ein hinlänglich kleines $\gamma>0$ eine Ungleichung besteht:

$$k^{\frac{1}{p}}\int_{-\gamma}^{\gamma}u^m\left|\frac{d^m}{du^m}\,\frac{1}{1+k\,\varphi(u)}\right|du<N\quad\text{für alle } k\geqq 1\,. \tag{7}$$

Nun besteht

$$\frac{d^m}{du^m}\,\frac{1}{1+k\,\varphi(u)}$$

aus einer endlichen Anzahl Summanden der Form (3). Wegen (1) von § 16 ist hierin, wenn $h>0$ beliebig und dazu $\gamma>0$ hinlänglich klein gewählt wurde:

$$1+k\,\varphi(u)>1+k\,(\alpha-h)|u|^p,$$

und somit ist, wegen der Ungleichungen (1), das Integral in (7) kleiner als eine endliche Anzahl Summanden der Form (C bedeutet eine Konstante):

$$C\,k^{\frac{1}{p}+j}\int_0^{\gamma}\frac{u^{m+j_1(p-1)+j_2(p-2)+\ldots+j_m(p-m)}}{(1+k\,(\alpha-h)\cdot u^p)^{j+1}}\,du;$$

indem wir die Substitution $k^{\frac{1}{p}}.u=v$ vornehmen und (4) und (5) beachten (für $i=m$), sehen wir, daß hierin alle Faktoren k sich vollständig wegheben und dieser Ausdruck übergeht in:

$$C\int_0^{k^{\frac{1}{p}}\cdot\gamma}\frac{v^{pj}}{(1+(\alpha-h)\,v^p)^{j+1}}\,d\,v;$$

wegen $p>1$ aber existiert das Integral:

$$\int_0^{+\infty}\frac{v^{pj}}{(1+(\alpha-h)\,v^p)^{j+1}}\,d\,v,$$

womit (7) nachgewiesen ist. Der Beweis von Satz XXXIII ist damit beendet.

Für das Poisson'sche Integral wurde der einfachste Fall dieses Satzes ($m = 1$) zuerst von P. Fatou[1] bewiesen.

Durch Anwendung von Satz XIX erhalten wir den Satz:

XXXIV. Es genüge $\varphi(u)$ außer den Voraussetzungen von Satz XXXII nach folgenden Bedingungen: $\varphi(u)$ besitzt eine in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(-l, l)$ absolut stetige $(m-1)$-te Ableitung und es sind in jedem solchen Teilintervalle (abgesehen von einer Nullmenge) Ungleichungen der Gestalt:

$$(8) \qquad |\varphi^{(i)}(u)| < A\,|u|^{p-i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

erfüllt. Dann gilt in jedem Punkte x von $(a, a+l)$, in dem die in $< a, a+l >$ zur Klasse $\mathfrak{F}_1$ gehörige Funktion f eine endliche Ableitung m-ter Ordnung besitzt, die Formel:

$$(9) \qquad f^{(i)}(x) = \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Omega(p)} \lim_{k=+\infty} k^{\frac{1}{p}} \int_a^{a+l} f(\xi)\, \frac{\partial^i}{\partial x^i}\, \frac{1}{1+k\,\varphi(\xi-x)}\, d\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Diese Beziehung gilt gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< a', b' >$ von $(a, a+l)$, in dem f m-mal stetig differenzierbar ist. — Genügt $\varphi(u)$ in einer Umgebung des Nullpunktes der Beziehung $\varphi(-u) = \varphi(u)$, so gilt (9) auch für die verallgemeinerte i-te Ableitung $\overset{*}{f}{}^{(i)}(x)$.

Beim Beweise hat man nur zu beachten, daß in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(-l, l)$ die Beziehung:

$$\lim_{k=+\infty} k^{\frac{1}{p}}\, \frac{d^{m-1}}{du^{m-1}}\, \frac{1}{1+k\,\varphi(u)} = 0$$

gleichmäßig gilt. In der Tat gilt nach den in Satz XXXII über $\varphi(u)$ gemachten Voraussetzungen in $< \alpha, \beta >$ eine Ungleichung:

$$\varphi(u) > \vartheta > 0,$$

woraus nach der oben besprochenen Form von

$$\frac{d^{m-1}}{du^{m-1}}\, \frac{1}{1+k\,\varphi(u)}$$

die Behauptung unmittelbar folgt. Damit ist die Voraussetzung (3) vom Satz XIX erwiesen. Daß die übrigen Bedingungen dieses Satzes gelten ist evident.

Im speziellen Falle des Poisson'schen Integrales wurden die Behauptungen unseres Satzes bewiesen von Ch. J. de la Vallée-Poussin.[2]

Für unendliche Intervalle erhalten wir durch Berufung auf Satz XIX a:

XXXIV a. »Es genüge $\varphi(u)$ den zu Beginn von Satz XXXII a gemachten Voraussetzungen.

Ferner besitze $\varphi(u)$ eine in jedem endlichen Intervalle absolut stetige $(m-1)$ te Ableitung und es seien in $(-\infty, +\infty)$ Ungleichungen der Form:

$$(10) \qquad \varphi(u) > \beta\,|u|^p \qquad (\beta > 0),$$

$$(11) \qquad |\varphi^{(i)}(u)| < A\,|u|^{p-i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

erfüllt. Dann gilt in jedem Punkte x, in dem die in $(-\infty, +\infty)$ zu einer der Klassen $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ gehörige Funktion f eine endliche Ableitung m-ter Ordnung besitzt, die Formel:

---

[1] Acta Math., Bd. 30, p. 345, 373. Vgl. auch H. Lebesgue a. a. O., p. 87, und W. Groß, Sitzungsber. Akad. Wien. Abt. IIa, Bd. 124, p. 1020.

[2] Acad. Bruxelles, Bull. Classe des Sciences 1908, p. 245.

(12)
$$f^{(i)}(x) = \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Omega(p)} \lim_{k=+\infty} k^{\frac{1}{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{1}{1+k\,\varphi(\xi - x)}\, d\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Sie gilt gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle $< a', b' >$, in dem f m-mal stetig differenzierbar ist. — Genügt $\varphi(u)$ in einer Umgebung des Nullpunktes der Beziehung $\varphi(-u) = \varphi(u)$, so gilt (12) auch für die verallgemeinerte i-te Ableitung $\overset{*}{f}{}^{(i)}(x)$.«

Es genügt, nach dem schon Bewiesenen, zu zeigen, daß Bedingung 1. von Satz XIXa erfüllt ist.

Zeigen wir dies zunächst für die Klasse $\mathfrak{F}_1$. Wir setzen:

$$\psi(u, k, h) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Omega(p)} \cdot k^{\frac{1}{p}} \dfrac{1}{1+k\,\varphi(u)} & \text{außerhalb } < -h, h > \\ 0 & \text{in } < -h, h >. \end{cases}$$

und haben nach (10):

$$|\psi(u, k, h)| < \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Omega(p)} \cdot \frac{k^{\frac{1}{p}}}{1+k\beta\,.\,h^p},$$

also ist $|\psi(u, k, h)|$ geschränkt für alle u und alle k.

Ferner haben wir, unter Benützung von (3), (4), (5), (10) und (11), wenn durch das Symol Σ eine Summation über eine endliche Zahl von Summanden angedeutet wird:

(13)
$$|\psi^{(i)}(u, k, h)| < \sum C \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Omega(p)} \cdot k^{\frac{1}{p}} \frac{k^j\,|u|^{pj-i}}{(1+\beta\cdot k\,|u|^p)^{j+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

und indem wir $k\,|u|^p = v$ schreiben, haben wir außerhalb $< -h, h >$:

$$|\psi^{(i)}(u, k, h)| < \sum C \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Omega(p)} h^{-(i+1)} \frac{v^{j+\frac{1}{p}}}{(1+\beta\,v)^{j+1}}.$$

Es ist also, da $\frac{1}{p} < 1$ ist, auch $\psi^{(i)}(u, k, h)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ geschränkt für alle u und alle k. — Damit ist Bedingung 1. von XIXa für die Klasse $\mathfrak{F}_1$ nachgewiesen.

Wir gehen sogleich über zur Klasse $\mathfrak{F}_3$, da für die Klasse $\mathfrak{F}_2$ der Nachweis ganz analog ist: Aus (13) entnehmen wir sofort:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi^{(i)}(u, k, h)|\, du < \sum C \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{\Omega(p)} k^{\frac{1}{p}+j} \int_h^{+\infty} \frac{u^{pj-i}}{(1+\beta\cdot k\cdot u^p)^{j+1}}\, du,$$

oder vermöge der Substitution: $v = k^{\frac{1}{p}} \cdot u$

(14)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi^{(i)}(u, k, h)|\, du < \sum C \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{\Omega(p)} k^{\frac{i}{p}} \int_{k^{\frac{1}{p}}.h}^{+\infty} \frac{v^{pj-i}}{(1+\beta\,v^p)^{j+1}}\, dv.$$

Nun haben wir:

$$\frac{v^{pj-i}}{(1+\beta\,v^p)^{j+1}} < \frac{1}{\beta^{j+1}} v^{-(i+p)};$$

infolgedessen:

$$\int_{k^{\frac{1}{p}}.h}^{+\infty} \frac{v^{pj-i}}{(1+\beta\,v^p)^{j+1}}\, dv < \frac{1}{\beta^{j+1}} \frac{1}{i+p-1} \cdot h^{-(i+p-1)} k^{-1-\frac{i-1}{p}},$$

und, indem man dies in (14) einführt und berücksichtigt, daß $p > 1$ ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi^{(i)}(u, k, h)|\, du < c \cdot k^{-\eta} \qquad (\eta > 0).$$

Wir haben also:

$$\lim_{k=+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi^{(i)}(u, k, h)|\, du = 0,$$

woraus zusammen mit der ähnlich zu bestätigenden Beziehung:

$$\lim_{k=+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(u, k, h)|\, du = 0$$

nach einem schon wiederholt durchgeführten Schlusse folgt, daß Bedingung 1. von XIX*a* für die Klasse $\mathfrak{F}_3$ erfüllt ist.

Wenden wir die Sätze XXXIII und XXXIV *a* auf den Spezialfall $\varphi(u) = u^2$ an, so sehen wir: Formel (14) von § 16 gilt für jede in $(-\infty, +\infty)$ einer der Klassen $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ angehörende Funktion f, in jedem Punkte, in dem f verallgemeinerte m-te Ableitung seines m-fach iterierten unbestimmten Integrales ist; und in jedem Punkte, in dem f eine verallgemeinerte m-te Ableitung $\overset{*}{f}{}^{(m)}(x)$ besitzt, wird sie (für jedes m) dargestellt durch:

$$\overset{*}{f}{}^{(m)}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\rho=+0} \rho \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{1}{\rho^2 + (\xi - x)^2}\, d\xi. \tag{15}$$

Nun ist bekanntlich:

$$\frac{\rho}{\rho^2 + u^2} = \int_0^{+\infty} e^{-\rho\lambda} \cos \lambda u\, d\lambda; \quad \frac{d^m}{du^m} \frac{\rho}{\rho^2 + u^2} = \int_0^{+\infty} e^{-\rho\lambda} \frac{d^m}{du^m} \cos \lambda u\, d\lambda \qquad (\rho > 0).$$

Wir können Formel (14) von § 16 also auch so schreiben:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\rho=+0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-\rho\lambda} \cos \lambda\xi \cdot \cos \lambda x\, d\lambda + \int_0^{+\infty} e^{-\rho\lambda} \sin \lambda\xi \cdot \sin \lambda x\, d\lambda \right\} d\xi. \tag{16}$$

Sie gilt in dieser Form für jede Funktion von $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ oder $\mathfrak{F}_3$ in jedem Punkte, in dem f verallgemeinerte m-te Ableitung seines m-fach iterierten unbestimmten Integrales ist. Die Formel (15) besagt, daß in jedem Punkte, in dem f eine verallgemeinerte m-te Ableitung besitzt, diese aus (16) durch m unter den Integralzeichen auszuführende Differenziationen nach x gewonnen wird.

Gehört f speziell zu $\mathfrak{F}_1$, so existieren die Ausdrücke:

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi\, d\xi; \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi\, d\xi.$$

Dann kann (16) auch so geschrieben werden:

$$f(x) = \lim_{\rho=+0} \int_0^{+\infty} e^{-\rho\lambda} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x)\, d\lambda, \tag{17}$$

und stellt für das Fourier'sche Integraltheorem das Analogon zur Poisson'schen Summierung der Fourier'schen Reihe dar. Formel (17) gilt für jede in $(-\infty, +\infty)$ absolut integrierbare Funktion f an jeder Stelle, wo sie verallgemeinerte m-te Ableitung ihres m-fach iterierten unbestimmten Integrales ist. Wo eine verallgemeinerte m-te Ableitung von f existiert, wird sie aus (17) gewonnen, indem man unter dem Integralzeichen m-mal nach x differenziert.