# ÜBER DIE DARSTELLUNG GEGEBENER FUNKTIONEN DURCH SINGULÄRE INTEGRALE

## 2. MITTEILUNG

VON

HANS HAHN

(BONN)

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 11. MAI 1916

In dieser zweiten Mitteilung setze ich meine Untersuchungen über singuläre Integrale fort, und wende sodann die erhaltenen Resultate auf die Theorie der orthogonalen Funktionensysteme an. Es wird zunächst als Maß der Approximation des singulären Integrales:

$$I_n(f, x) = \int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi$$

an die darzustellende Funktion $f(x)$ das Integral über den absoluten Betrag des Fehlers:

$$R_n = \int_a^b |f(x) - I_n(f, x)|\, dx$$

betrachtet. Unter sehr allgemeinen Bedingungen gelingt der Nachweis, daß:

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0$$

ist. Von diesem Satze werden Anwendungen auf einige Spezialfälle, insbesondere auf die üblichen Summationsverfahren der Fourier'schen Reihe gemacht.

Sodann wird die Giltigkeit des sogenannten Parseval'schen Theoremes näher untersucht, und zwar sogleich für beliebige orthogonale Funktionensysteme. Es handelt sich um die Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu g_\nu,$$

wo $f_\nu, g_\nu$ die »Fourier'schen Konstanten« von $f(x)$ und $g(x)$ in Bezug auf ein vollständiges, normiertes Orthogonalsystem bedeuten. Es ist bekannt, daß diese Gleichung gilt, wenn die Quadrate von $f(x)$ und $g(x)$ integrierbar sind. Ein anderer typischer Fall, indem das Integral des Produktes $f(x) \cdot g(x)$ sicher existiert, ist der, daß von den beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die eine integrierbar, die andere geschränkt ist. Es gelingt eine sehr einfache, notwendige und hinreichende Bedingung anzugeben, der ein Orthogonalsystem genügen muß, damit auch in diesem Falle die fragliche Formel gelte. Eine ebenso einfache Bedingung ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Formel immer gelte, wenn von den zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die eine integrierbar, die andere von geschränkter Variation ist. Im Falle der trigonometrischen Reihen ist die erste dieser Bedingungen nicht erfüllt, wohl aber die zweite. Sodann werden Summationsverfahren für die Reihe:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \, g_\nu$$

entwickelt, die stets gegen:

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

konvergieren, wenn von den zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die eine integrierbar, die andere geschränkt ist. Im Falle der trigonometrischen Reihen entspricht jedem der bekannten Summationsverfahren auch ein analoges Summationsverfahren für die Reihe:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \, g_\nu .$$

Wendet man auf das singuläre Integral $I_n(f, x)$ die Parseval'sche Formel an, so erhält man Summationsverfahren für die Reihenentwicklung von $f$ nach den Funktionen eines Orthogonalsystemes. Versteht man unter $I_n(f, x)$ ein Integral, das gegen die $m$-te Ableitung von $f(x)$ konvergiert (ich habe solche Integrale in meiner 1. Mitteilung eingehend behandelt), so erhält man Prozesse, die aus der Reihenentwicklung von $f(x)$ nach den Funktionen des Orthogonalsystemes Ausdrücke herleiten, die gegen $f^{(m)}(x)$ konvergieren überall, wo diese Ableitung existiert. Die Anwendung auf trigonometrische Reihen ergibt neben den bekannten Summationsverfahren bei Benützung der wohl einfachstmöglichen Kerne eine Kette sich immer verschärfender Verfahren, deren zwei erste Glieder die sogenannten Riemann'schen Summationsverfahren sind; ferner erhält man Summationsverfahren für die durch $m$-maliges gliedweises Differenzieren der Fourier'schen Reihe gebildeten Reihen, die überall gegen $f^{(m)}(x)$ konvergieren, wo diese Ableitung existiert.

Es hätte wohl keine Schwierigkeiten, all dies auch für kontinuierliche Orthogonalschaaren durchzuführen, deren wichtigstes Beispiel die Theorie der Fourier'schen Integrale bildet. Ich habe mich auf eine Bemerkung aus der Theorie der Fourier'schen Integrale beschränkt, die das Annalogon des Poisson'schen Summationsverfahrens, das ich in meiner ersten Mitteilung angegeben habe, sowie das Analogon des Summationsverfahrens von de la Vallée-Poussin betrifft.

---

## § I.

Unter Benützung eines Gedankens von W. H. Young[1] beweisen wir den Satz:

I. Sei $\varphi(\xi, x)$ eine im Rechtecke $a \leqq \xi \leqq b$, $a' \leqq x \leqq b'$ meßbare Funktion der zwei Veränderlichen $x, \xi$. Als Funktion von $x$ sei sie für alle Werte $\xi$ aus $< a, b >$, abgesehen von einer Nullmenge, integrierbar[2] in $< a', b' >$, und es gebe ein $M$, so dass, wieder abgesehen von einer Nullmenge:

$$(1) \qquad \int_{a'}^{b'} |\varphi(\xi, x)|\, dx < M \quad \text{für alle } \xi \text{ von } < a, b >.$$

[1] Comptes rendus, Bd. 155 (1912), p. 30.

[2] Das Wort »integrierbar« wird stets im Sinne der Lebesgue'schen Integration gebraucht.

Ist dann $f(\xi)$ eine in $< a, b >$ integrierbare Funktion, so existiert das Integral:

$$I(f, x) = \int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x)\, d\xi \tag{2}$$

für alle $x$ von $< a', b', >$ abgesehen von einer Nullmenge, und ist eine in $< a', b' >$ integrierbare Funktion von $x$.

Wir beweisen den Satz zunächst unter der Annahme;

$$\varphi(\xi, x) \geqq 0; \quad f(\xi) \geqq 0. \tag{3}$$

Bezeichnen wir mit $\Phi_\nu(\xi, x)$ die Funktion, die aus $f(\xi) \cdot \varphi(\xi, x)$ entsteht, indem man alle Werte dieses Produktes, die $> \nu$ sind, durch $\nu$ ersetzt, so existiert das Doppelintegral:

$$\int_a^b \int_{a'}^{b'} \Phi_\nu(\xi, x)\, d\xi\, dx$$

und man hat bekanntlich:[1]

$$\int_a^b \int_{a'}^{b'} \Phi_\nu(\xi, x)\, d\xi\, dx = \int_a^b \left( \int_{a'}^{b'} \Phi_\nu(\xi, x)\, dx \right) d\xi. \tag{4}$$

Wegen Voraussetzung (1) existiert nun das Integral:

$$\int_a^b f(\xi) \left( \int_{a'}^{b'} \varphi(\xi, x)\, dx \right) d\xi = \int_a^b \left( \lim_{\nu=\infty} \int_{a'}^{b'} \Phi_\nu(\xi, x)\, dx \right) d\xi,$$

und nach einem bekannten Satze hat man daher weiter, da $\Phi_\nu(\xi, x)$ mit $\nu$ monoton wächst:

$$\int_a^b f(\xi) \left( \int_{a'}^{b'} \varphi(\xi, x)\, dx \right) d\xi = \lim_{\nu=\infty} \int_a^b \left( \int_{a'}^{b'} \Phi_\nu(\xi, x)\, dx \right) d\xi;$$

wegen (4) aber heißt das nichts anderes als: es existiert das Doppelintegral:

$$\int_a^b \int_{a'}^{b'} f(\xi)\, \varphi(\xi, x)\, d\xi\, dx\,. \tag{5}$$

Nach dem schon vorhin benutzten Satze von Fubini existiert dann auch, abgesehen von einer Nullmenge, das Integral:

$$\int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x)\, d\xi,$$

stellt eine in $< a', b' >$ integrierbare Funktion von $x$ dar, und es ist:

$$\int_{a'}^{b'} \left( \int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x)\, d\xi \right) dx = \int_a^b \int_{a'}^{b'} f(\xi)\, \varphi(\xi, x)\, d\xi\, dx. \tag{6}$$

Damit ist Satz I nachgewiesen unter der Annahme (3), und es ist obendrein der Wert des Integrales

$$\int_{a'}^{b'} I(f, x)\, dx$$

durch ein Doppelintegral ausgedrückt.

Den allgemeinen Fall führt man auf diesen speziellen zurück, indem man setzt:

$$\varphi(\xi, x) = \varphi_1(\xi, x) - \varphi_2(\xi, x) \qquad (\varphi_1(\xi, x) \geqq 0;\ \varphi_2(\xi, x) \geqq 0),$$
$$f(\xi) = f_1(\xi) - f_2(\xi) \qquad (f_1(\xi) \geqq 0;\ f_2(\xi) \geqq 0).$$

[1] Siehe etwa Ch. J. de la Vallée Poussin Cours d'analyse infinitésimale, II (2. éd), p. 122 (»Théorème de M. Fubini«).

Unter Berufung auf (6) ergänzen wir die Aussage von Satz I durch:

I'. Unter den Voraussetzungen von Satz I existiert das Doppelintegral (5) und der Wert von:

$$\int_{a'}^{b'} I(f, x)\, dx$$

ist gleich diesem Doppelintegrale.

Eine weitere Ergänzung von I liefert der ebenso zu beweisende Satz:

I''. Ersetzt man in Satz I die Voraussetzung (1) durch die Voraussetzung, es sei das Quadrat von:

$$\Phi(\xi) = \int_{a'}^{b'} |\varphi(\xi, x)|\, dx$$

integrierbar in $< a, b >$, so gilt die Behauptung von Satz I für jede Funktion $f$, deren Quadrat in $< a, b >$ integrierbar ist. — Ersetzt man in Satz I die Voraussetzung (1) durch die Voraussetzung, es sei $\Phi(\xi)$ integrierbar in $< a, b >$, so gilt die Behauptung von Satz I für jede in $< a, b >$ geschränkte, meßbare Funktion $f$.

Wir denken uns nun den Kern $\varphi(\xi, x)$ noch abhängig von der natürlichen Zahl $n$, und setzen, wo dieses Integral existiert:

$$I_n(f, x) = \int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi;$$

dann können wir folgenden Satz beweisen:

II. Sei $< a', b' >$ ein Teilintervall von $< a, b >$,[1] und es sei $\varphi(\xi, x, n)$ meßbar im Rechtecke $a \leqq \xi \leqq b$, $a' \leqq x \leqq b'$. Abgesehen von einer Nullmenge sei $\varphi(\xi, x, n)$ für jedes $x$ von $< a', b' >$ nach $\xi$ integrierbar in $< a, b >$. Ferner genüge $\varphi(\xi, x, n)$ folgenden Bedingungen:

1. Es gibt ein $M$, so daß für alle $x$ von $< a', b' >$, abgesehen von einer Nullmenge, und für alle $n$:

$$\int_a^b |\varphi(\xi, x, n)|\, d\xi < M.$$

2. Es gibt ein $M$, so daß für alle $\xi$ von $< a, b >$, abgesehen von einer Nullmenge, und für alle $n$:

$$\int_{a'}^{b'} |\varphi(\xi, x, n)|\, dx < M.$$

3. Abgesehen von einer Nullmenge, gelte für alle $x$ von $< a', b' >$ folgendes: für jede im Intervalle $< a, b >$ der Veränderlichen $\xi$ gelegene Punktmenge $\mathfrak{A}_x$, die im Punkte $x$ die Dichte[2] 1 hat, sei:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{A}_x} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 1.$$

---

[1] Es kann natürlich $< a', b' >$ auch mit $< a, b >$ identisch sein.

[2] Eine Punktmenge $\mathfrak{A}$ hat im Punkte $x$ die Dichte $\rho$, wenn für den Inhalt $i(h)$ ihres ins Intervall $< x-h, x+h >$ fallenden Teiles die Beziehung gilt:

$$\lim_{h=0} \frac{1}{2h} \cdot i(h) = \rho.$$

Dann gilt für jede in $< a, b >$ integrierbare Funktion $f(\xi)$ die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \int_{a'}^{b'} |f(x) - I_n(f, x)|\, dx = 0. \tag{7}$$

Es sei zunächst folgendes bemerkt: nach Satz I angewendet auf den Spezialfall $f = 1$, existiert das in Bedingung 2 auftretende Integral:

$$\int_{a'}^{b'} |\varphi(\xi, x, n)|\, dx$$

für alle $\xi$ von $< a, b >$, abgesehen von einer Nullmenge. Ebenso lehrt Satz I die Existenz von $I_n(f, x)$ für alle $x$ von $< a', b' >$, abgesehen von einer Nullmenge.

Aus Bedingung 3 folgt, daß für jede im Intervalle $< a, b >$ der Veränderlichen $\xi$ gelegene Punktmenge $\mathfrak{B}_x$, die im Punkte $x$ von $< a', b' >$ die Dichte 0 hat:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{B}_x} |\varphi(\xi, x, n)|\, d\xi = 0 \tag{8}$$

ist. In der Tat sei $\mathfrak{B}_x^{(1)}$ der Teil von $\mathfrak{B}_x$, auf dem $\varphi(\xi, x, n) \geqq 0$, und $\mathfrak{B}_x^{(2)}$ der Rest von $\mathfrak{B}_x$. Sind dann $\mathfrak{A}_x^{(1)}$ und $\mathfrak{A}_x^{(2)}$ die Komplemente von $\mathfrak{B}_x^{(1)}$ und $\mathfrak{B}_x^{(2)}$ bezüglich des Intervalles $< a, b >$, so haben $\mathfrak{A}_x^{(1)}$ und $\mathfrak{A}_x^{(2)}$ im Punkte $x$ die Dichte 1. Es ist also nach Bedingung 3:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 1; \quad \lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{A}_x^{(1)}} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 1; \quad \lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{A}_x^{(2)}} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 1,$$

woraus sofort:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{B}_x^{(1)}} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0; \quad \lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{B}_x^{(2)}} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 0,$$

und somit auch (8) folgt.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}_x$ die Menge aller Punkte $\xi$ von $< a, b >$, in denen:

$$|f(\xi) - f(x)| \leqq \varepsilon \tag{9}$$

ist, mit $\mathfrak{B}_x$ ihr Komplement bezüglich $< a, b >$. Nach einem bekannten Satze[1] hat dann für jedes $x$ von $< a', b' >$, abgesehen von einer Nullmenge, $\mathfrak{A}_x$ im Punkte $x$ die Dichte 1, und daher $\mathfrak{B}_x$ im Punkte $x$ die Dichte 0.

Wir schreiben:

$$I_n(f, x) - f(x) = \int_{\mathfrak{A}_x} (f(\xi) - f(x))\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi + f(x) \left\{ \int_{\mathfrak{A}_x} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi - 1 \right\} + \\ + \int_{\mathfrak{B}_x} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi . \tag{10}$$

---

[1] »Abgesehen von einer Nullmenge ist, wenn $f(\xi)$ integrierbar ist, $|f(\xi) - c|$ überall Ableitung seines unbestimmten Integrales für alle Werte von $c$« (de la Vallée-Poussin, Cours d'analyse II, 2-éd, p. 115). Es ist also, wieder abgesehen von einer Nullmenge:

$$\lim_{h=0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t) - f(x)|\, dt = 0.$$

Ist also $i(h, \varepsilon)$ der Inhalt der Menge aller jener Punkte von $< x-h, x+h >$, in denen $|f(\xi) - f(x)| > \varepsilon$ ist, so haben wir:

$$\lim_{h=0} \frac{1}{2h}\, i(h, \varepsilon) = 0.$$

Das aber ist die Behauptung des Textes.

Wegen (9) ist:

$$\left|\int_{\mathfrak{A}_x}(f(\xi)-f(x))\,\varphi(\xi,x,n)\,d\xi\right| \leqq \varepsilon\int_a^b|\varphi(\xi,x,n)|\,d\xi,$$

und mithin, wegen Bedingung 1:

$$\int_{a'}^{b'}\left|\int_{\mathfrak{A}_x}(f(\xi)-f(x))\,\varphi(\xi,x,n)\,d\xi\right|dx \leqq \varepsilon M(b'-a'). \tag{11}$$

Nach Bedingung 3 ist, abgesehen von einer Nullmenge, für alle $x$ von $<a', b'>$:

$$\lim_{n=\infty}\left\{\int_{\mathfrak{A}_x}\varphi(\xi,x,n)\,d\xi-1\right\}=0,$$

und nach Bedingung 1 ist, wieder abgesehen von einer Nullmenge:

$$\left|\int_{\mathfrak{A}_x}\varphi(\xi,x,n)\,d\xi-1\right|<M+1.$$

Daraus folgt nach einem bekannten Satze:

$$\lim_{n=\infty}\int_{a'}^{b'}\left|f(x)\left\{\int_{\mathfrak{A}_x}\varphi(\xi,x,n)\,d\xi-1\right\}\right|dx=0. \tag{12}$$

Sei endlich $\overline{\varphi}(\xi,x,n)$ für jedes einzelne $x$ in den Punkten von $\mathfrak{B}_x$ gleich $|\varphi(\xi,x,n)|$, sonst gleich 0. Dann ist, nach (8), abgesehen von einer Nullmenge, für alle $x$ von $<a', b'>$:

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b\overline{\varphi}(\xi,x,n)\,d\xi=0. \tag{13}$$

Ferner ist:

$$\left|\int_{\mathfrak{B}_x}f(\xi)\,\varphi(\xi,x,n)\,d\xi\right| \leqq \int_a^b|f(\xi)|\cdot\overline{\varphi}(\xi,x,n)\,d\xi. \tag{14}$$

Nach Satz I′ haben wir:

$$\int_{a'}^{b'}\left(\int_a^b|f(\xi)|\,\overline{\varphi}(\xi,x,n)\,d\xi\right)dx=\int_a^b|f(\xi)|\left(\int_{a'}^{b'}\overline{\varphi}(\xi,x,n)\,dx\right)d\xi. \tag{15}$$

Nach Bedingung 2 ist, abgesehen von einer Nullmenge, für alle $\xi$ von $<a, b>$ und alle $n$:

$$0\leqq\int_{a'}^{b'}\overline{\varphi}(\xi,x,n)\,dx\leqq M. \tag{16}$$

Wegen Bedingung 1 ist, abgesehen von einer Nullmenge, für alle $x$ von $<a', b'>$ und alle $n$:

$$0\leqq\int_a^b\overline{\varphi}(\xi,x,n)\,d\xi<M,$$

und somit wegen (13):

$$\lim_{n=\infty}\int_{a'}^{b'}\left(\int_a^b\overline{\varphi}(\xi,x,n)\,d\xi\right)dx=0.$$

Da aber nach Satz I′:

$$\int_{a'}^{b'}\left(\int_b^b\overline{\varphi}(\xi,x,n)\,d\xi\right)dx=\int_a^b\int_{a'}^{b'}\overline{\varphi}(\xi,x,n)\,d\xi\,dx$$

ist, so haben wir:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \int_{a'}^{b'} \overline{\varphi}\,(\xi, x, n)\, d\xi\, dx = 0,$$

und somit, da $\overline{\varphi} \geqq 0$ ist, auch für jedes Teilintervall $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$:

(17) $$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \left( \int_{a'}^{b'} \overline{\varphi}\,(\xi, x, n)\, dx \right) d\xi = 0.$$

Setzen wir also:

$$\Phi\,(\xi, n) = \int_{a'}^{b'} \overline{\varphi}\,(\xi, x, n)\, dx,$$

so sehen wir aus (16) und (17), daß $\Phi\,(\xi, n)$ folgenden zwei Bedingungen genügt:

1. Es ist in $< a, b >$ abgesehen von einer Nullmenge:

$$|\Phi\,(\xi, n)| < M \quad \text{für alle } n.$$

2. Es ist für jedes Teilintervall $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$:

$$\lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta \Phi\,(\xi, n)\, d\xi = 0.$$

Nach einem Satze von Lebesgue[1] ist aber dann für jede in $< a, b >$ integrierbare Funktion $F(\xi)$:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b F\,(\xi)\, \Phi\,(\xi, n)\, d\xi = 0.$$

Nach (14) und (15) haben wir also auch:

(18) $$\lim_{n=\infty} \int_{a'}^{b'} \left| \int_{\mathfrak{B}_x} f\,(\xi)\, \varphi\,(\xi, x, n)\, d\xi \right| dx = 0.$$

Die Formeln (10), (11), (12), (18) aber ergeben zusammen: es ist für alle hinlänglich großen $n$:

$$\int_{a'}^{b'} |I_n\,(f, x) - f\,(x)|\, dx < \varepsilon\,(M\,(b' - a') + 1),$$

und da $\varepsilon$ beliebig war, ist das die Behauptung (7) von Satz II.

Man kann sich vielfach eine Untersuchung, ob Bedingung 3. von Satz II erfüllt ist, ersparen durch die Bemerkung:

II'. Ist bekannt, daß, abgesehen von einer Nullmenge, für jedes in $< a, b >$ integrierbare $f$ in jedem Punkte $x$ von $< a', b' >$, in dem:

(19) $$\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_0^h |f\,(x + t) - f\,(x)|\, dt = 0$$

ist, die Beziehung:

(20) $$\lim_{n=\infty} I_n\,(f, x) = f\,(x)$$

gilt, so ist Bedingung 3. von Satz II erfüllt.

In der Tat, sei $\mathfrak{A}$ eine den Punkt $x$ enthaltende Menge, die im Punkte $x$ die Dichte 1 hat und sei $f\,(\xi) = 1$ in den Punkten von $\mathfrak{A}$, sonst $= 0$, so ist (19) erfüllt, es gilt somit wegen (20):

$$\lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{A}} \varphi\,(\xi, x, n)\, d\xi = 1,$$

somit ist Bedingung 3. von Satz II erfüllt.

---

[1] Annales de Toulouse, Serie 3, Bd. 1, p. 52 (Satz I meiner 1. Mitteilung.)

Von den zahlreichen Anwendungen von Satz II seien einige hervorgehoben.

Sei $r_n < 1$ und $\lim\limits_{n=\infty} r_n = 1$. Wir setzen:

$$\varphi(\xi, x, n) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-r_n^2}{1-2r_n\cos(\xi-x)+r_n^2}. \tag{21}$$

Da die Beziehung:

$$\lim_{r=1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\xi-x)+r^2}\,d\xi = f(x)$$

für jede in $< -\pi, \pi >$ integrierbare Funktion in jedem Punkte $x$ von $(-\pi, \pi)$ gilt, in dem $f$ Ableitung seines unbestimmten Integrales ist,[1] entnehmen wir aus II' sofort, daß für den Kern (21) alle Bedingungen von Satz II erfüllt sind für $-\pi \leqq \xi \leqq \pi$; $-\pi \leqq x \leqq \pi$.

Setzen wir noch, der Übersichtlichkeit halber:[2]

$$P(r, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\xi-x)+r^2}\,d\xi,$$

so haben wir also für die Annäherung des Poisson'schen Integrales an eine beliebige in $< -\pi, \pi >$ integrierbare Funktion $f(x)$:

$$\lim_{r=1-0}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P(r, x)|\,dx = 0.$$

Diese Eigenschaft des Poisson'schen Integrales wurde bewiesen von W. Groß.[3]

Setzen wir:

$$\varphi(\xi, x, n) = \frac{1}{2n\pi}\left(\frac{\sin n\,\dfrac{\xi-x}{2}}{\sin\dfrac{\xi-x}{2}}\right)^2,$$

so wird:

$$F_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\,\varphi(\xi, x, n)\,d\xi$$

bekanntlich das Fejér'sche arithmetische Mittel aus den $n$ ersten Gliedern der Fourier'schen Reihe von $f(x)$. Da die Fejér'schen Mittel für jedes in $< -\pi, \pi >$ integrierbare $f$ überall in $(-\pi, \pi)$ konvergieren, wo:[4]

$$\lim_{h=0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|\,dt = 0,$$

sind die Bedingungen von Satz II erfüllt, und wir erhalten folgenden Satz über die Konvergenz der Fejér'schen Mittel gegen $f(x)$: Es ist für jede in $< -\pi, \pi >$ integrierbare Funktion $f$:

$$\lim_{n=\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_n(x)|\,dx = 0.$$

---

[1] Zuerst bewiesen von P. Fatou; siehe meine I. Mitteilung, p. 69 [653].

[2] Es ist dies das sog. Poisson'sche Integral. Bekanntlich ist, wenn mit $a_\nu$, $b_\nu$ die Koefizienten der Fourier'schen Reihe von $f(x)$ bezeichnet werden:

$$P(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x) \quad (\text{für } 0 \leqq r < 1).$$

[3] Wien. Ber., Abt. IIa, Bd. 124, p. 1024.

[4] H. Lebesgue Ann. de Toulouse, Serie 3, Bd. 1, p. 88.

Dasselbe gilt für die von de la Vallée Poussin angegebene Summierung der Fourier'schen Reihe: setzen wir:

$$\varphi(\xi, x, n) = \frac{1}{\pi} \cdot 2^{2n-1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \left(\cos \frac{\xi - x}{2}\right)^{2n},$$

so wird,[1] wenn mit $a_\nu$, $b_\nu$ die Koeffizienten der Fourier'schen Reihe von $f(x)$ bezeichnet werden:

$$V_n(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+\nu)} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x).$$

und es ist für jedes in $< -\pi, \pi >$ integrierbare $f$:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} V_n(x)$$

in jedem Punkte $x$ von $(-\pi, \pi)$, in dem $f(x)$ Ableitung seines unbestimmten Integrales ist.[2] Es ist daher Satz II anwendbar, und ergibt für die de la Vallée Poussin'sche Summierung der Fourier'schen Reihe, bei beliebigem in $< -\pi, \pi >$ integrierbarem $f(x)$:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - V_n(x)|\, dx = 0.$$

Setzen wir endlich, nach Landau und de la Vallée Poussin:

$$\varphi(\xi, x, n) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \{1 - (\xi - x)^2\}^n,$$

so wird:

$$L_n(x) = \int_0^1 f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi$$

ein Polynom in $x$, und es ist für jedes in $< 0, 1 >$ integrierbare $f$:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} L_n(x)$$

in jedem Punkte $x$ von $(0, 1)$, in dem $f(x)$ Ableitung seines unbestimmten Integrales ist.[3] Daher ist Satz II anwendbar und ergibt für die Annäherung der Landau'schen Polynome an die beliebige in $< -1, 1 >$ integrierbare Funktion $f(x)$:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 |f(x) - L_n(x)|\, dx = 0.$$

## § 2.

Wir wollen nun die bisher bewiesenen Sätze auf unendliche Intervalle übertragen:

*Ia.* Sei $\varphi(\xi, x)$ eine in der ganzen $\xi x$-Ebene meßbare Funktion. Als Funktion von $x$ sei sie für alle $\xi$, abgesehen von einer Nullmenge, integrierbar in $(-\infty, +\infty)$, und es gebe ein $M$, so daß, wieder abgesehen von einer Nullmenge:

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi, x)|\, dx < M \quad \text{für alle } \xi.$$

[1] Ch. J. de la Vallée-Poussin, Bull. Bruxelles, Classe des sciences, 1908, p. 232.

[2] Zuerst bewiesen von H. Lebesgue, vgl. meine 1. Mitteilung, p. 47 [631].

[3] Zuerst bewiesen von Fr. Riesz; vgl. meine 1. Mitteilung, p. 47 [631].

Ist dann $f(\xi)$ integrierbar in $(-\infty, +\infty)$, so existiert das Integral:

$$J(f, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi(\xi, x)\, d\xi \tag{2}$$

für alle $x$, abgesehen von einer Nullmenge, und ist eine in $(-\infty, +\infty)$ integrierbare Funktion.

Es genügt wieder, den Beweis unter der Annahme:

$$\varphi(\xi, x) \geqq 0, \quad f(\xi) \geqq 0 \tag{3}$$

zu führen. Wir zeigen zunächst, daß für jedes endliche Intervall $< a, b >$ das Integral:

$$J^*(f, x) = \int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x)\, d\xi$$

für alle $x$, abgesehen von einer Nullmenge, existiert und eine in $(-\infty, +\infty)$ integrierbare Funktion von $x$ darstellt. Wird $\Phi_\nu(\xi, x)$ eingeführt, wie beim Beweise von Satz I, so wird es genügen, die Existenz des Doppelintegrales:

$$\int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\nu(\xi, x)\, d\xi\, dx \tag{4}$$

nachzuweisen, da im übrigen der Beweis derselbe bleibt, wie für Satz I.

Für jedes endliche $A > 0$ existiert sicherlich das Doppelintegral:

$$\int_a^b \int_{-A}^{A} \Phi_\nu(\xi, x)\, d\xi\, dx.$$

Wegen (3) ist $\Phi_\nu(\xi, x) \geqq 0$, so daß das Integral:

$$\int_{-A}^{A} \Phi_\nu(\xi, x)\, dx$$

mit $A$ monoton wächst. Es ist somit:

$$\int_a^b \left( \lim_{A=+\infty} \int_{-A}^{A} \Phi_\nu(\xi, x)\, dx \right) d\xi = \lim_{A=+\infty} \int_a^b \left( \int_{-A}^{A} \Phi_\nu(\xi, x)\, dx \right) d\xi,$$

wo das links stehende Integral sicher existiert, da wegen (1):

$$\int_{-A}^{A} \Phi_\nu(\xi, x)\, dx \leqq f(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, x)\, dx \leqq M f(\xi)$$

ist. Da nun aber:

$$\lim_{A=+\infty} \int_a^b \left( \int_{-A}^{A} \Phi_\nu(\xi, x)\, dx \right) d\xi = \lim_{A=+\infty} \int_a^b \int_{-A}^{A} \Phi_\nu(\xi, x)\, d\xi\, dx = \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\nu(\xi, x)\, d\xi\, dx$$

ist, so ist die Existenz des Doppelintegrales (4) bewiesen.

Um nun Satz I $a$ selbst zu beweisen, wird es wieder genügen, die Existenz des Doppelintegrales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\nu(\xi, x)\, d\xi\, dx \tag{5}$$

nachzuweisen. Nach dem eben Bewiesenen existiert für jedes endliche $A > 0$ das Integral:

$$\int_{-A}^{A} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\nu(\xi, x)\, d\xi\, dx = \int_{-A}^{A} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\nu(\xi, x)\, dx \right) d\xi \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \left( f(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, x)\, dx \right) d\xi,$$

und wegen (1) hat die rechte Seite dieser Ungleichung einen endlichen Wert. Daraus folgt die Existenz eines endlichen Grenzwertes:

$$\lim_{A=+\infty}\int_{-A}^{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_\nu(\xi, x)\, d\xi\, dx,$$

da das unter dem Limeszeichen stehende Integral mit $A$ monoton wächst. Dieser Grenzwert ist aber nichts anderes als das Doppelintegral (5), dessen Existenz hiemit bewiesen ist.

Wie Satz I, kann auch Satz I*a* ergänzt werden durch die Bemerkung:

I′*a*. Unter den Voraussetzungen von Satz I*a* existiert das Doppelintegral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\varphi(\xi, x)\, d\xi\, dx$$

und der Wert von

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J(f, x)\, dx$$

ist gleich diesem Doppelintegrale.

Auch die zu I″ analoge Bemerkung bleibt richtig.

Wir lassen wieder $\varphi(\xi, x)$ abhängen von einer natürlichen Zahl $n$ und setzen:

$$J_n(f, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\varphi(\xi, x, n)\, d\xi.$$

Dann können wir den zu II analogen Satz beweisen:

II*a*. Sei $\varphi(\xi, x, n)$ für jede natürliche Zahl $n$ meßbar in der ganzen $\xi x$-Ebene. Abgesehen von einer Nullmenge sei $\varphi(\xi, x, n)$ für jedes $x$ nach $\xi$ integrierbar in $(-\infty, +\infty)$; ebenso sei, abgesehen von einer Nullmenge, $\varphi(\xi, x, n)$ für jedes $\xi$ integrierbar nach $x$ in $(-\infty, +\infty)$. Ferner genüge $\varphi(\xi, x, n)$ folgenden Bedingungen:

1. Es gibt ein $M$, so daß für alle $x$ (abgesehen von einer Nullmenge) und alle $n$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi, x, n)|\, d\xi < M.$$

2. Es gibt ein $M$, so daß für alle $\xi$ (abgesehen von einer Nullmenge) und alle $n$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi, x, n)|\, dx < M.$$

3. Für jede geschränkte Punktmenge $\mathfrak{A}_x$ der Veränderlichen $\xi$, die im Punkte $\xi = x$ die Dichte 1 hat, gilt:

$$\lim_{n=\infty}\int_{\mathfrak{A}_x}\varphi(\xi, x, n)\, d\xi = 1.$$

4. Für jedes $h > 0$ und jedes $\xi$ ist:

$$\lim_{n=\infty}\int_{-\infty}^{\xi-h} |\varphi(\xi, x, n)|\, dx = 0; \quad \lim_{n=\infty}\int_{\xi+h}^{+\infty} |\varphi(\xi, x, n)|\, dx = 0.$$

Dann gilt für jede in $(-\infty, +\infty)$ integrierbare Funktion $f(x)$ die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - J_n(f, x)|\, dx = 0. \tag{6}$$

Um das zu beweisen, können wir ganz ähnlich vorgehen, wie beim Beweise von Satz II. Sei $g(x)$ eine durchwegs positive, in $(-\infty, +\infty)$ integrierbare Funktion, und sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben.

Wir wählen ein beliebiges $h > 0$, bezeichnen mit $\mathfrak{A}_x$ die Menge aller Punkte $\xi$ von $< x-h, x+h >$, in denen:

$$|f(\xi) - f(x)| \leqq \varepsilon \cdot g(x), \tag{7}$$

und bezeichnen mit $\mathfrak{B}_x$ das Komplement von $\mathfrak{A}_x$. Nun schreiben wir:

$$J_n(f,x) - f(x) = \int_{\mathfrak{A}_x} (f(\xi) - f(x))\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi + f(x) \left\{ \int_{\mathfrak{A}_x} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi - 1 \right\} + \\ + \int_{\mathfrak{B}_x} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi. \tag{8}$$

Aus (7) folgt:

$$\left| \int_{\mathfrak{A}_x} (f(\xi) - f(x))\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi \right| \leqq \varepsilon \cdot g(x) \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi, x, n)|\, d\xi,$$

und mithin, wegen Bedingung 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{\mathfrak{A}_x} (f(\xi) - f(x))\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi \right| \leqq \varepsilon \cdot M \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx. \tag{9}$$

Ganz so, wie Gleichung (12) in § 1 nachgewiesen wurde, wird hier gezeigt:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) \left\{ \int_{\mathfrak{A}_x} \varphi(\xi, x, n)\, d\xi - 1 \right\} \right| dx = 0. \tag{10}$$

Wir setzen auch hier: $\overline{\varphi}(\xi, x, n) = |\varphi(\xi, x, n)|$ in den Punkten von $\mathfrak{B}_x$, sonst $= 0$. Die durch (14) und (15) von § 1 ausgedrückte Schlußweise ergibt (bei Berufung auf Satz I'$a$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{\mathfrak{B}_x} f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi \right| dx \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |f(\xi)| \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}(\xi, x, n)\, dx \right\} d\xi. \tag{11}$$

Wir setzen nun zur Abkürzung:

$$\Phi(\xi, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}(\xi, x, n)\, dx,$$

und zeigen, daß $\Phi(\xi, n)$ folgenden zwei Bedingungen genügt:

$\alpha$) Es gibt ein $M$, sodaß, abgesehen von einer Nullmenge, für alle $\xi$ und alle $n$:

$$|\Phi(\xi, n)| < M.$$

$\beta$) In jedem endlichen Intervalle $< \alpha, \beta >$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(\xi, n)\, d\xi = 0. \tag{12}$$

Bedingung $\alpha$) ist eine unmittelbare Folge von Bedingung 2. von Satz II $a$. Was Bedingung $\beta$) anlangt, so wählen wir $A$ so groß, daß $< \alpha, \beta >$ in $(-A, A)$ liegt und setzen:

$$\Phi_1(\xi, n) = \int_{-A}^{A} \overline{\varphi}(\xi, x, n)\, dx$$

$$\Phi_2(\xi, n) = \int_{-\infty}^{-A} \overline{\varphi}(\xi, x, n)\, dx + \int_{A}^{+\infty} \overline{\varphi}(\xi, x, n)\, dx,$$

so daß wir haben:

$$\Phi(\xi, n) = \Phi_1(\xi, n) + \Phi_2(\xi, n).$$

Nun ist:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi_1 (\xi, n)\, d\xi = \int_{-A}^{A} \left( \int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi} (\xi, x, n)\, d\xi \right) dx.$$

Aus Bedingung 3. folgt unmittelbar für jedes $x$:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi} (\xi, x, n)\, d\xi = 0;$$

aus Bedingung 1. folgt:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi} (\xi, x, n)\, d\xi \right| < M \text{ für alle } n.$$

Es ist daher:

(13) $$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi_1 (\xi, n)\, d\xi = 0.$$

Ferner ist nach Bedingung 4. für alle $\xi$ von $<\alpha, \beta>$:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{-A} \overline{\varphi} (\xi, x, n)\, dx = 0; \quad \lim_{n=\infty} \int_{A}^{+\infty} \overline{\varphi} (\xi, x, n)\, dx = 0,$$

und wegen Bedingung 2. für alle $\xi$ von $<\alpha, \beta>$ und alle $n$:

$$\left| \int_{-\infty}^{-A} \overline{\varphi} (\xi, x, n)\, dx \right| < M; \quad \left| \int_{A}^{+\infty} \overline{\varphi} (\xi, x, n)\, dx \right| < M,$$

und somit:

(14) $$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi_2 (\xi, n)\, d\xi = 0.$$

Die Beziehungen (13) und (14) zeigen nun, daß (12) erfüllt ist, das heißt, daß $\Phi (\xi, n)$ auch der Bedingung $\beta$) genügt.

Da nun $\Phi (\xi, n)$ den Bedingungen $\alpha$) und $\beta$) genügt, so ist[1] für jedes in $(-\infty, +\infty)$ integrierbare $F$:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F (\xi)\, \Phi (\xi, n)\, d\xi = 0.$$

Es ist also insbesondere auch:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f (\xi)| \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi} (\xi, x, n)\, dx \right) d\xi = 0.$$

und mithin nach (11):

(15) $$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{\mathfrak{B}_x} f (\xi)\, \varphi (\xi, x, n)\, d\xi \right| dx = 0.$$

Die Beziehungen (8), (9), (10) und (15) ergeben aber (6), so daß II $a$ bewiesen ist.

Es sei zunächst folgende Anwendung von Satz II $a$ erwähnt: wir setzen nach Weierstraß:

$$\varphi (\xi, x, k) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 (\xi - x)^2}.$$

Dann wird für jedes $k > 0$, wenn $f (\xi)$ in $(-\infty, +\infty)$ integrierbar ist, der Ausdruck:

(16) $$W (x, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f (\xi)\, \varphi (\xi, x, k)\, d\xi$$

---

[1] Nach Satz I $a$ meiner I. Mitteilung.

eine ganze transzendente Funktion [1] in $x$, und es gilt an jeder Stelle $x$, wo $f$ Ableitung seines unbestimmten Integrales ist:[2]

$$f(x) = \lim_{k=+\infty} W(x, k).$$

Daraus entnimmt man, daß Bedingung 3 von Satz II$a$ erfüllt ist, und da die anderen Bedingungen dieses Satzes offenkundig erfüllt sind, haben wir: das Weierstrass'sche Integral (16) liefert zu jeder in $(-\infty, +\infty)$ integrierbaren Funktion $f(x)$ eine ganze Funktion $W(x, k)$, für die die Beziehung gilt:

$$\lim_{k=+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - W(x, k)|\, dx = 0. \tag{17}$$

Man könnte glauben, daß Bedingung 4 für die Giltigkeit von Satz II $a$ überflüssig ist. Es sei also noch an einem Beispiele gezeigt, daß eine Bedingung dieser Art jedenfalls erforderlich ist.

Sei $\varphi_n(u) = \frac{n}{2}$ in $< -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} >$, $\varphi_n(u) = 1$ in $< n, n+1 >$, sonst $\varphi_n(u) = 0$. Wir setzen:

$$J_n(f, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \varphi_n(\xi - x)\, d\xi,$$

und haben offenbar, wenn $f(x)$ integrierbar ist in $(-\infty, +\infty)$, in jedem Punkte $x$, in dem $f$ Ableitung seines unbestimmten Integrales ist:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} J_n(f, x),$$

woraus man entnimmt, daß Bedingung 3 von Satz II $a$ erfüllt ist. Daß Bedingung 1 und 2 erfüllt sind, ist offenkundig, ebenso daß Bedingung 4 nicht erfüllt ist.

Wir haben:

$$J_n(f, x) - f(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(\xi)\, d\xi - f(x) + \int_{x+n}^{x+n+1} f(\xi)\, d\xi.$$

Aus Satz II$a$ folgt ohneweiteres, daß:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(\xi)\, d\xi \right| dx = 0$$

ist. Hingegen haben wir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{x+n}^{x+n+1} f(\xi)\, d\xi \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{x}^{x+1} f(\xi)\, d\xi \right) dx.$$

Diese Größe ist von $n$ unabhängig, und im allgemeinen gewiß $\neq 0$, so daß (6) nicht bestehen kann.

Zum Schlusse seien noch von Satz II $a$ zwei Anwendungen auf die Theorie der Fourier'schen Integrale gemacht.

Wie ich in meiner I. Mitteilung gezeigt habe,[3] gilt für jede in $(-\infty, +\infty)$ integrierbare Funktion $f(x)$ die Beziehung:

$$f(x) = \lim_{\rho=+0} \frac{1}{\pi\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \frac{1}{1 + \left(\frac{\xi - x}{\rho}\right)^2} d\xi$$

[1] Siehe zum Beispiel É. Borel, Leçons sur les fonctions de variables réelles, p. 53.

[2] Siehe meine I. Mitteilung, p. 50 [334].

[3] p. 67 [651], 71 [655].

in jedem Punkte $x$, in dem $f(x)$ Ableitung seines unbestimmten Integrales ist. Daraus folgt, daß, wenn $\rho_n$ irgend eine Folge positiver Zahlen mit $\lim\limits_{n=\infty} \rho_n = 0$ bezeichnet, der Kern

$$\varphi(\xi, x, n) = \frac{1}{\pi \cdot \rho_n} \frac{1}{1+\left(\frac{\xi - x}{\rho_n}\right)^2},$$

der offenbar den Bedingungen 1, 2 und 4 von Satz II $a$ genügt, auch der Bedingung 3 dieses Satzes genügt. Setzen wir also:

$$\Pi(x, \rho) = \frac{1}{\pi \cdot \rho} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \frac{1}{1+\left(\frac{\xi - x}{\rho}\right)^2} d\xi,$$

so lehrt Satz II $a$ das Bestehen der Beziehung:

$$\lim_{\rho=+0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - \Pi(x, \rho)|\, dx = 0 \tag{18}$$

für jede in $(-\infty, +\infty)$ integrierbare Funktion $f(x)$. Nun hat man aber,[1] wenn gesetzt wird:

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi\, d\xi; \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi\, d\xi, \tag{19}$$

die Beziehung:

$$\Pi(x, \rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho\lambda} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x)\, d\lambda,$$

und es kann die Formel:

$$f(x) = \lim_{\rho=+0} \Pi(x, \rho)$$

als eine Summationsformel für das Fourier'sche Integral betrachtet werden, die, da sie der Poisson'schen Summierung der Fourier'schen Reihe analog ist, auch hier als die Poisson'sche Summierung bezeichnet werden möge.

Wir haben also, in Analogie mit einem in § 1 für die Poisson'sche Summierung der Fourier'schen Reihe bewiesenen Satze: Für die Poisson'schen Summierungsausdrücke $\Pi(x, \rho)$ des Fourier'schen Integrales einer beliebigen in $(-\infty, +\infty)$ integrierbaren Funktion $f(x)$ gilt die Beziehung (18).

Um ein zweites Resultat ähnlicher Natur zu erhalten, knüpfen wir an die bekannte Formel[2] an:

$$\int_0^{+\infty} e^{-v^2} \cos 2\alpha v\, dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2}.$$

Setzen wir hierin:

$$\alpha = k(\xi - x); \quad 2kv = \lambda,$$

so erhalten wir:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{\lambda}{2k}\right)^2} (\cos \lambda\xi \cos \lambda x + \sin \lambda\xi \sin \lambda x)\, d\lambda = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2(\xi - x)^2}.$$

Führt man dies ins Weierstrass'sche Integral (16) ein, so erhält man, wenn man wieder von der Bezeichnungsweise (19) Gebrauch macht: für jede in $(-\infty, +\infty)$ integrierbare Funktion $f(x)$ gilt in jedem Punkte, in dem sie Ableitung ihres unbestimmten Integrales ist, die Formel:

$$f(x) = \lim_{\rho=+0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho\lambda^2} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x)\, d\lambda.$$

[1] Vgl. I. Mitteilung, p. 71 [655].

[2] Siehe zum Beispiel Ch. J. de la Vallée-Poussin, Cours d'analyse II, 2. ed., p. 82.

Auch diese Formel kann als eine Summationsformel für das Fourier'sche Integral betrachtet werden. Da sie auch durch einen Grenzübergang aus der de la Vallée-Poussin'schen Summierung der Fourier'schen Reihe gewonnen werden kann, so möge sie als die de la Vallée-Poussin'sche Summierung des Fourier'schen Integrales bezeichnet werden.

Setzen wir noch:

$$V(x, \rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho\lambda^2} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x)\, d\lambda,$$

so lehrt die für das Weierstrass'sche Integral bewiesene Beziehung (17): für die de la Vallée-Poussin'schen Summierungsausdrücke $V(x, \rho)$ des Fourier'schen Integrales einer beliebigen in $(-\infty, +\infty)$ integrierbaren Funktion $f(x)$ gilt die Beziehung:

$$\lim_{\rho = +0} \int_{-\infty}^{+\infty} |(f(x) - V(x, \rho)|\, dx = 0.$$

## § 3.

Wir müssen nun zwei Hilfsätze beweisen, die wir im Folgenden benötigen werden. [1]

III. Ist $\varphi_n(\xi)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge in $< a, b >$ integrierbarer Funktionen, für die:

$$\lim_{n = \infty} \int_a^b |\varphi_n(\xi)|\, d\xi = +\infty \tag{1}$$

ist, so gibt es eine in $< a, b >$ stetige Funktion $g(\xi)$, für die:

$$\overline{\lim_{n = \infty}} \int_a^b g(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi = +\infty. \tag{2}$$

Sei $h_n(\xi)$ definiert durch:

$$h_n(\xi) = 1, \quad \text{wo } \varphi_n(\xi) \geqq 0$$
$$h_n(\xi) = -1, \quad \text{wo } \varphi_n(\xi) < 0.$$

Dann ist, wegen (1), auch:

$$\overline{\lim_{n = \infty}} \int_a^b h_n(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi = +\infty.$$

Es hat keinerlei Schwierigkeit, [2] aus den, im allgemeinen unstetigen, $h_n(\xi)$ stetige Funktionen $g_n(\xi)$ herzuleiten, die der Ungleichung genügen:

$$|g_n(\xi)| \leqq 1, \tag{3}$$

und für die gleichfalls:

$$\overline{\lim_{n = \infty}} \int_a^b g_n(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi = +\infty \tag{4}$$

ist. — Wäre nun für eine dieser stetigen Funktionen $g_i(\xi)$ die Folge der Integrale:

$$\int_a^b g_i(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi \quad (n = 1, 2 \ldots) \tag{5}$$

[1] Der Beweis dieser Hilfssätze beruht auf einem von A. Haar und H. Lebesgue zu ähnlichem Zwecke verwendeten Gedanken. Vgl. § 2 meiner 1. Mitteilung.

[2] Vgl. meine 1. Mitteilung, p. 9 [593].

nicht geschränkt, so wäre damit unsere Behauptung bewiesen; wir hätten nur $g(\xi) = g_i(\xi)$ oder $= -g_i(\xi)$ zu wählen. Wir werden also annehmen, es sei für jedes einzelne $i$ die Folge der Integrale (5) geschränkt:

$$\left| \int_a^b g_i(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi \right| < M_i \quad (n = 1, 2 \ldots). \tag{6}$$

Wir setzen noch zur Abkürzung:

$$\int_a^b |\varphi_n(\xi)|\, d\xi = L_n \quad \text{und} \quad I_n(u) = \int_a^b u(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi.$$

Wir können nun aus der Folge der Indizes $n = 1, 2, \ldots,$ eine Teilfolge $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ herausgreifen nach folgender Vorschrift:

Es sei $n_1 = 1$. Ist $n_i$ gefunden, so werde $n_{i+1}$ $(> n_i)$ in nachstehender Weise bestimmt:

1. Es sei:

$$L_{n_{i+1}} > L_{n_i}. \tag{7}$$

2. Ist:

$$I_m\left(g_{n_1} + \frac{1}{2\,L_{n_1}}\, g_{n_2} + \ldots + \frac{1}{2^{i-1} L_{n_{i-1}}}\, g_{n_i}\right) < N_i \quad \text{für alle } m, \tag{8}$$

so werde $n_{i+1}$ so groß gewählt, daß:

$$I_{n_{i+1}}(g_{n_{i+1}}) > (N_i + i + 1)\, 2^i \cdot L_{n_i}. \tag{9}$$

Forderung 1 kann erfüllt werden, wegen Voraussetzung (1). Was Forderung 2 anlangt, so ist zunächst eine Ungleichung der Form (8) tatsächlich erfüllt für alle $m$ wegen (6), und es kann $n_{i+1}$ so groß gewählt werden, daß (9) gilt, wegen (4).

Setzen wir nun:

$$g(\xi) = g_{n_1}(\xi) + \frac{1}{2\,L_{n_1}}\, g_{n_2}(\xi) + \ldots + \frac{1}{2^{i-1} L_{n_{i-1}}}\, g_{n_i}(\xi) + \ldots,$$

so ist, wegen (3) und (7), diese Reihe gleichmäßig konvergent, und es ist daher $g(\xi)$ stetig in $< a, b >$. Ferner ist:

$$I_m(g) = I_m(g_{n_1}) + \frac{1}{2\,L_{n_1}}\, I_m(g_{n_2}) + \ldots + \frac{1}{2^{i-1} L_{n_{i-1}}}\, I_m(g_{n_i}) + \ldots$$

Wir haben also:

$$I_{n_i}(g) \geqq \frac{1}{2^{i-1} L_{n_{i-1}}}\, I_{n_i}(g_{n_i}) - \left| I_{n_i}\left(g_{n_1} + \frac{1}{2\,L_{n_1}}\, g_{n_2} + \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2^{i-2} L_{n_{i-2}}}\, g_{n_{i-1}}\right) \right| - \left| \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1} L_{n_{k-1}}}\, I_{n_i}(g_{n_k}) \right|. \tag{10}$$

Hierin ist, wegen (9):

$$\frac{1}{2^{i-1} L_{n_{i-1}}}\, I_{n_i}(g_{n_i}) > N_{i-1} + i; \tag{11}$$

sodann wegen (8):

$$I_{n_i}\left(g_{n_1} + \frac{1}{2\,L_{n_1}}\, g_{n_2} + \ldots + \frac{1}{2^{i-2} L_{n_{i-2}}}\, g_{n_{i-1}}\right) < N_{i-1}; \tag{12}$$

endlich folgt aus (3):

$$|I_{n_i}(g_{n_k})| \leqq L_{n_i},$$

und daher weiter, unter Berücksichtigung von (7):

$$\left| \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1} L_{n_{k-1}}} I_{n_i}(g_{n_k}) \right| \leqq 1. \tag{13}$$

Aus (10) zusammen mit (11), (12), (13) aber ergibt sich:

$$I_{n_i}(g) > i-1. \tag{14}$$

Damit ist unsere Behauptung (2) erwiesen. In ganz derselben Weise zeigt man:

III *a*. »Ist $\varphi_n(\xi)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge in $(-\infty, +\infty)$ integrierbarer Funktionen, für die:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(\xi)|\, d\xi = +\infty$$

ist, so gibt es eine in $(-\infty, +\infty)$ geschränkte, für jedes $\xi$ stetige Funktion $g(\xi)$, für die:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi = +\infty«.$$

Wir kommen zum Beweise des zweiten Hilfsatzes:

IV. Ist $\varphi_n(\xi)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge in $< a, b >$ integrierbarer Funktionen, und gibt es in $< a, b >$ eine Folge von Teilintervallen $< \alpha_i, \beta_i >$ und eine Folge von Indizes $n_i$ mit $\lim_{i=\infty} n_i = \infty$, so daß:

$$\lim_{i=\infty} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \varphi_{n_i}(\xi)\, d\xi = +\infty, \tag{15}$$

so gibt es eine in $< a, b >$ absolut stetige Funktion $g(\xi)$, für die:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \int_{a}^{b} g(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi = +\infty.$$

Wir beschränken nicht die Allgemeinheit, wenn wir die Voraussetzung (15) ersetzen durch:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \varphi_n(\xi)\, d\xi = +\infty, \tag{15a}$$

da das darauf hinausläuft, statt der vorgelegten Folge der $\varphi_n(\xi)$ eine Teilfolge zu betrachten.

Sei $h_n(\xi)$ definiert durch:

$$h_n(\xi) = 1 \quad \text{in } < \alpha_n, \beta_n >$$
$$h_n(\xi) = 0 \quad \text{außerhalb } < \alpha_n, \beta_n >.$$

Dann ist wegen (15 *a*) auch:

$$\lim_{n=\infty} \int_{a}^{b} h_n(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi = +\infty.$$

Wir wählen nun ein $\sigma_n > 0$ so klein, daß:

$$\sigma_n < \frac{\beta_n - \alpha_n}{2},$$

und so klein, daß:

$$\int_{\alpha_n}^{\alpha_n+\sigma_n} |\varphi_n(\xi)|\, d\xi + \int_{\beta_n-\sigma_n}^{\beta_n} |\varphi_n(\xi)|\, d\xi < 1.$$

Sodann definieren wir $g_n(\xi)$ durch die Festsetzung: in $< \alpha_n + \sigma_n, \beta_n - \sigma_n >$ und außerhalb $< \alpha_n, \beta_n >$ stimmt $g_n(\xi)$ mit $h_n(\xi)$ überein, in $< \alpha_n, \alpha_n + \sigma_n >$ aber, sowie in $< \beta_n - \sigma_n, \beta_n >$ mit derjenigen linearen Funktion, die in den Endpunkten des betreffenden Intervalles $= h_n(\xi)$ ist. Dann ist offenbar:

$$\left| \int_a^b g_n(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi - \int_a^b h_n(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi \right| \leqq 1,$$

und wir haben in den $g_n(\xi)$ eine Folge absolut stetiger Funktionen vor uns mit folgenden Eigenschaften: Es ist

$$0 \leqq g_n(\xi) \leqq 1;$$

die Totalvariation von $g_n(\xi)$ in $< a, b >$ hat den Wert 2, und es ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b g_n(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi = +\infty. \tag{16}$$

Wäre nun für eine dieser Funktionen $g_i(\xi)$ die Folge der Integrale:

$$\int_a^b g_i(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

nicht geschränkt, so wäre damit unsere Behauptung erwiesen, indem wir $g(\xi) = g_i(\xi)$ oder $= -g_i(\xi)$ setzen. Wir werden also annehmen, es gelte für jedes $i$ eine Ungleichung der Form (6).

Die beim Beweise von Satz III eingeführten Abkürzungen $L_n$ und $I_n(u)$ behalten wir bei. Wie dort bestimmen wir die Teilfolge der Indizes: $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ Daß (7) erfüllt werden kann, folgt nun aus Voraussetzung (15), daß (9) erfüllt werden kann, aus (16).

Wie dort definieren wir die Funktion $g(\xi)$ und wollen uns überzeugen, daß sie absolut stetig ist in $< a, b >$. Das heißt wir haben zu zeigen: ist $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so gehört dazu ein $\eta > 0$, so daß für jede Menge sich nicht überdeckender Teilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \ldots$ von $< a, b >$, deren Gesamtinhalt:

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k + \ldots < \eta \tag{17}$$

ist, die Ungleichung besteht: [1]

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(g, \delta_k) < \varepsilon. \tag{18}$$

Da jedes $g_n(\xi)$ in $< a, b >$ die Totalvariation 2 hat, kann zunächst $i_0$ so groß gewählt werden, daß:

$$g^*(\xi) = \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1} L_{n_{i-1}}}\, g_{n_i}(\xi)$$

in $< a, b >$ eine Totalvariation $< \frac{\varepsilon}{2}$ hat. Dann ist erst recht, für jede Menge sich nicht überdeckender Teilintervalle $\delta_k$ von $< a, b >$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(g^*, \delta_k) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19}$$

Da jede der endlich vielen Funktionen $g_{n_1}(\xi), g_{n_2}(\xi), \ldots, g_{n_{i_0}}(\xi)$ absolut stetig ist, kann $\eta > 0$ so klein gewählt werden, daß aus (17) folgt:

$$\sum_{h=1}^{\infty} V(g_{n_i}, \delta_k) < \frac{\varepsilon}{2^{i_0+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, i_0). \tag{20}$$

Aus (19) und (20) aber folgt (18), womit die absolute Stetigkeit von $g(\xi)$ nachgewiesen ist.

---

[1] Es bedeutet $V(g, \delta_k)$ die Totalvariation von $g$ im Intervalle $\delta_k$.

Endlich beweist man wie oben das Bestehen von Ungleichung (14), womit der Beweis von Satz IV beendet ist.

Ganz ebenso beweist man:

IV *a.* »Ist $\varphi_n(\xi)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge in $(-\infty, +\infty)$ integrierbarer Funktionen, und gibt es eine Folge von Intervallen $<\alpha_i, \beta_i>$ und von Indizes $n_i$ mit $\lim_{i=\infty} n_i = \infty$, so daß (15) gilt, so gibt es eine in $(-\infty, +\infty)$ geschränkte, in jedem endlichen Intervalle absolut stetige Funktion $g(\xi)$, für die:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi = +\infty.«$$

## § 4.

Sei $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_\nu(x), \ldots$ ein normiertes Orthogonalsystem des Intervalles $<a, b>$, das heißt es sei:

$$\int_a^b \omega_\mu(x) \cdot \omega_\nu(x)\, dx = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

$$\int_a^b (\omega_\nu(x))^2\, dx = 1.$$

Das Orthogonalsystem heißt vollständig, wenn es keine Funktion $\omega(x)$ gibt, deren Quadrat in $<a, b>$ integrierbar ist, und für die:

$$\int_a^b \omega(x) \cdot \omega_\nu(x)\, dx = 0 \quad (\nu = 1, 2 \ldots); \qquad \int_a^b (\omega(x))^2\, dx \neq 0$$

wäre.

Für jede Funktion $f(x)$, deren Quadrat in $<a, b>$ integrierbar ist, existieren die »Fourier'schen Konstanten« in bezug auf unser Orthogonalsystem:[1]

$$f_\nu = \int_a^b f(\xi)\, \omega_\nu(\xi)\, d\xi \quad (\nu = 1, 2 \ldots), \tag{1}$$

und bekanntlich ist das Orthogonalsystem ein vollständiges dann und nur dann, wenn für jede Funktion $f(x)$, deren Quadrat in $<a, b>$ integrierbar ist, die Gleichung besteht:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu^2 = \int_a^b (f(\xi))^2\, d\xi.$$

Eine unmittelbare Folge daraus ist, daß für jedes Paar in $<a, b>$ quadratisch integrierbarer Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, deren Fourier'sche Konstanten in bezug auf unser Orthogonalsystem $f_\nu$ und $g_\nu$ seien, die Gleichung besteht:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \cdot g_\nu = \int_a^b f(\xi) \cdot g(\xi)\, d\xi. \tag{2}$$

Wir wollen diese Formel als die Parseval'sche Formel bezeichnen,[2] weil sie die Verallgemeinerung des bekannten Parseval'schen Theoremes aus der Theorie der Fourier'schen Reihe[3] auf beliebige normierte vollständige Orthogonalsysteme darstellt.

[1] In der Tat ist in der Definition des normierten Orthogonalsystemes die Tatsache enthalten, daß jede seiner Funktion $\omega_\nu(x)$ in $<a, b>$ von integrierbarem Quadrate ist.

[2] D. Hilbert bezeichnet sie als »Vollständigkeitsrelation.«

[3] Siehe zum Beispiel Ch. J. de la Vallée Poussin, Cours d'analyse, tome II (2 éd), p. 165.

Es existieren die Fourier'schen Konstanten (1) nicht nur für jede in $< a, b >$ samt ihrem Quadrate integrierbare Funktion, sondern für jede in $< a, b >$ integrierbare Funktion dann und nur dann, wenn jede einzelne Funktion $\omega_\nu(x)$ unseres Orthogonalsystemes in $< a, b >$ geschränkt ist, abgesehen höchstens von einer Nullmenge.

In der Tat, ist ein $\omega_\nu(x)$ nicht geschränkt, und kann es auch nicht durch Abänderung seiner Werte in einer Nullmenge in eine geschränkte Funktion verwandelt werden, so gibt es sicher eine in $< a, b >$ integrierbare Funktion $f(x)$, für die das Integral:

$$\int_a^b f(x)\,\omega_\nu(x)\,dx$$

nicht existiert.[1]

Wir nehmen also an, es sei jedes einzelne $\omega_\nu(x)$ in $< a, b >$ geschränkt (abgesehen höchstens von einer Nullmenge). Ist dann $f(x)$ in $< a, b >$ integrierbar und $g(x)$ in $< a, b >$ geschränkt, so existiert das Integral:

$$\int_a^b f(\xi)\,g(\xi)\,d\xi,$$

und wir können die Frage aufwerfen, ob nun die Parseval'sche Formel (2) für jedes Funktionenpaar $f(x)$, $g(x)$ gilt, von denen in $< a, b >$ die eine integrierbar, die andere geschränkt ist.

Sei zunächst $g(x)$ eine gegebene in $< a, b >$ geschränkte Funktion. Dann gilt der Satz:

V. Damit bei gegebenem, in $< a, b >$ geschränkten $g(x)$ die Parseval'sche Formel (2) für jedes in $< a, b >$ integrierbare $f$ gelte, ist notwendig und hinreichend, daß es ein $M$ gibt, so daß für alle $x$ von $< a, b >$, abgesehen von einer Nullmenge, und alle $n$:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu\,\omega_\nu(x)\right| < M. \tag{3}$$

In der Tat, die Frage nach der Giltigkeit von (2) ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Giltigkeit von:

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b f(\xi)\left\{g(\xi)-\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu\,\omega_\nu(\xi)\right\}d\xi = 0. \tag{4}$$

Wir setzen:

$$g(\xi)-\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu\,\omega_\nu(\xi) = \varphi_n(\xi).$$

Nach einem Satze von Lebesgue[2] gilt nun (4) für jedes in $< a, b >$ integrierbare $f$ dann und nur dann, wenn $\varphi_n(\xi)$ folgenden Bedingungen genügt:

1. Es gibt ein $M$, so daß, abgesehen von einer Nullmenge, für alle $x$ von $< a, b >$ und alle $n$:

$$|\varphi_n(\xi)| < M.$$

2. Für jedes Teilintervall $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$ ist:

$$\lim_{n=\infty}\int_\alpha^\beta \varphi_n(\xi)\,d\xi = 0.$$

Hievon ist, da nach Voraussetzung $g(\xi)$, abgesehen von einer Nullmenge, geschränkt ist, Bedingung 1. gleichbedeutend mit (3), und Bedingung 2. ist sicher erfüllt. In der Tat setzen wir: $f(\xi) = 1$ in

[1] H. Lebesgue, Ann. de Toul. Serie 3, Bd. 1, p. 38.

[2] Satz I meiner 1. Mitteilung.

$< \alpha, \beta >$ und $= 0$ außerhalb $< \alpha, \beta >$, so können wir, da die Funktionen $f(\xi)$ und $g(\xi)$ nun beide in $< a, b >$ samt ihrem Quadrate integrierbar sind, Formel (2) anwenden und erhalten:

$$\int_\alpha^\beta g(\xi)\, d\xi = \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu \int_\alpha^\beta \omega_\nu(\xi)\, d\xi.$$

Damit ist Satz V bewiesen. Wir sind nun auch in der Lage, die aufgeworfene Frage zu beantworten:

VI. Damit die Parseval'sche Formel (2) für jedes Funktionenpaar $f(x), g(x)$ gelte, von denen in $< a, b >$ die eine geschränkt, die andere integrierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß es ein $M$ gibt, so daß für alle $x$ von $< a, b >$ (abgesehen von einer Nullmenge) und alle $n$:

$$\int_a^b \left| \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(\xi)\, \omega_\nu(x) \right| d\xi < M. \tag{5}$$

Die Bedingung ist hinreichend: in der Tat, sei $g(x)$ in $< a, b >$ geschränkt:

$$|g(x)| < G \quad \text{in } < a, b >.$$

Dann ist (abgesehen von einer Nullmenge):

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu\, \omega_\nu(x) \right| = \left| \int_a^b \sum_{\nu=1}^{n} g(\xi)\, \omega_\nu(\xi)\, \omega_\nu(x)\, d\xi \right| \leqq G \int_a^b \left| \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(\xi)\, \omega_\nu(x) \right| d\xi < G \cdot M.$$

Es ist also für jedes einzelne geschränkte $g(x)$ Bedingung (3) von Satz V erfüllt.

Die Bedingung ist notwendig: angenommen, sie sei nicht erfüllt; es gäbe dann zu jeder natürlichen Zahl $i$ eine in $< a, b >$ gelegene Menge $M_i$ mit von Null verschiedenem Inhalte, so daß zu jedem Punkte $x$ von $M_i$ ein Index $n_x$ gehört, für den:

$$\int_a^b \left| \sum_{\nu=1}^{n_x} \omega_\nu(\xi)\, \omega_\nu(x) \right| d\xi > i. \tag{6}$$

Abgesehen von einer Nullmenge ist überall in $< a, b >$ $\omega_\nu(x)$ Ableitung seines unbestimmten Integrales. Es sind daher auch weiter überall in $< a, b >$, abgesehen von einer Nullmenge, sämtliche $\omega_\nu(x)$ Ableitung ihrer unbestimmten Integrale, und es gibt daher auch in jeder Menge $M_i$ einen Punkt $x_i$, in dem jedes $\omega_\nu(x)$ Ableitung seines unbestimmten Integrales ist.

Wir entnehmen also aus (6): es gibt eine Punktfolge $x_i$ in $< a, b >$, sowie eine Indizesfolge $n_i$, so daß:

$$\overline{\lim_{i=+\infty}} \int_a^b \left| \sum_{\nu=1}^{n_i} \omega_\nu(\xi)\, \omega_\nu(x_i) \right| d\xi = +\infty,$$

und so, daß in jedem Punkte $x_i$ jedes $\omega_\nu(x)$ Ableitung seines unbestimmten Integrals ist.

Indem wir nun in Satz III setzen:

$$\varphi_i(\xi) = \sum_{\nu=1}^{n_i} \omega_\nu(\xi)\, \omega_\nu(x_i),$$

sehen wir: es gibt eine in $< a, b >$ geschränkte (und überdies stetige) Funktion $g(x)$, für die:

$$\overline{\lim_{i=\infty}} \int_a^b \sum_{\nu=1}^{n_i} g(\xi)\, \omega_\nu(\xi)\, \omega_\nu(x_i)\, d\xi = +\infty$$

ist. Da aber:

$$\int_a^b g(\xi)\,\omega_\nu(\xi)\,d\xi = g_\nu$$

ist, haben wir weiter:

$$(7) \qquad \overline{\lim_{i=\infty}} \sum_{\nu=1}^{n_i} g_\nu\,\omega_\nu(x_i) = +\infty.$$

Zufolge der Wahl der Punkte $x_i$ ist nun in jedem Punkte $x_i$ die Funktion:

$$(8) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu\,\omega_\nu(x)$$

Ableitung ihres unbestimmten Integrales, so daß (7) besagt: die rechtsseitige obere Ableitung des unbestimmten Integrales von (8) ist nicht nach oben geschränkt für alle $n$ und alle $x$ von $< a, b >$. Nun unterscheidet sich der Ausdruck (8) von dieser rechtsseitigen oberen Ableitung nur in einer Nullmenge; und da eine geschränkte rechtsseitige obere Ableitung ihre obere Grenze in einem Intervalle nicht ändert, wenn Nullmengen vernachlässigt werden,[1] so sehen wir, daß der Ausdruck (8) auch nicht durch bloße Wertänderung in einer Nullmenge in einen für alle $x$ von $< a, b >$ und alle $n$ geschränkten Ausdruck verwandelt werden kann; es genügt also die Funktion $g(x)$ der Bedingung (3) von Satz V **nicht**. Damit ist Bedingung (5) von Satz VI als notwendig erwiesen.

Als Beispiel eines die Bedingung von Satz VI erfüllenden Orthogonalsystemes diene das bekannte Haar'sche Orthogonalsystem.[2] Ein Beispiel eines die Bedingung von Satz VI nicht erfüllenden Orthogonalsystemes liefert das trigonometrische Orthogonalsystem; denn es ist bekanntlich:

$$(9) \qquad \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} (\cos \nu\xi \cos \nu x + \sin \nu\xi \sin \nu x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\xi - x)}{\sin \frac{\xi - x}{2}}$$

und:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\xi - x)}{\sin \frac{\xi - x}{2}} \right| d\xi = +\infty.$$

Es gibt also in $< -\pi, \pi >$ eine integrierbare Funktion $f$ und eine stetige Funktion $g$, für die die Parseval'sche Formel aus der Theorie der Fourier'schen Reihen nicht gilt.

VII. Damit die Parseval'sche Formel (2) für jedes Funktionenpaar $f(x), g(x)$ gelte, von denen in $< a, b >$ die eine geschränkt und von geschränkter Variation, die andere integrierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß es ein $M$ gibt, so daß für alle Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $< a, b >$, alle $x$ von $< a, b >$, abgesehen von einer Nullmenge, und alle $n$:

$$(10) \qquad \left| \int_\alpha^\beta \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(\xi)\,\omega_\nu(x)\,d\xi \right| < M.$$

Die Bedingung ist hinreichend. Denn ist

$$|g(x)| < G \quad \text{in} < a, b >,$$

---

[1] Siehe zum Beispiel H. Lebesgue Leçons sur l'intégration, p. 80.

[2] Math. Ann. 69, p. 361 ff.

und ist $V$ die Totalvariation von $g$ in $\langle a, b \rangle$, so liefert der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung [1] (abgesehen von einer Nullmenge):

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu \, \omega_\nu(x) \right| = \left| \int_a^b g(\xi) \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(\xi)\, \omega_\nu(x)\, d\xi \right| \leqq (G+V)\cdot M.$$

Es ist also für jedes einzelne $g(x)$ geschränkter Variation Bedingung (3) von Satz V erfüllt.

Die Bedingung ist notwendig. Angenommen, sie sei nicht erfüllt. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl $i$ eine Teilmenge $M_i$ von $\langle a, b \rangle$ mit von 0 verschiedenem Inhalte, zu deren jedem Punkte $x$ ein Teilintervall $\langle \alpha_x, \beta_x \rangle$ von $\langle a, b \rangle$ und ein Index $n_x$ gehört, so daß:

$$\left| \int_{\alpha_x}^{\beta_x} \sum_{\nu=1}^{n_x} \omega_\nu(\xi)\, \omega_\nu(x)\, d\xi \right| > i.$$

Wie beim Beweise von Satz VI sehen wir: es gibt in $\langle a, b \rangle$ eine Folge von Teilintervallen $\langle \alpha_i, \beta_i \rangle$ und eine Punktfolge $x_i$, sowie eine Indizesfolge $n_i$, so daß:

$$\lim_{i=\infty} \left| \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \sum_{\nu=1}^{n_i} \omega_\nu(\xi)\, \omega_\nu(x_i)\, d\xi \right| = +\infty,$$

und so, daß in jedem Punkte $x_i$ jedes $\omega_\nu(x)$ Ableitung seines unbestimmten Integrales ist.

Somit gibt es also nach Satz IV (oder IV$a$) eine Funktion $g(x)$, die in $\langle a, b \rangle$ geschränkt und von geschränkter Variation (ja sogar absolut stetig) ist und für die:

$$\overline{\lim_{i=+\infty}} \int_a^b g(\xi) \sum_{\nu=1}^{n_i} \omega_\nu(\xi)\, \omega_\nu(x_i)\, d\xi = \overline{\lim_{i=+\infty}} \sum_{\nu=1}^{n_i} g_\nu\, \omega_\nu(x_i) = +\infty,$$

woraus man, wie beim Beweise von Satz VI weiter schließt, daß $g(x)$ der Bedingung (3) von Satz V nicht genügt. Damit ist gezeigt, daß Bedingung (10) von Satz VII notwendig ist.

Satz VII lehrt für das trigonometrische Orthogonalsystem, daß die Parseval'sche Formel in der Theorie der Fourier'schen Reihen gilt für jedes Paar von Funktionen $f$ und $g$, von denen in $\langle -\pi, \pi \rangle$ die eine integrierbar, die andere von geschränkter Variation ist;[2] es folgt dies nach Satz VII unmittelbar daraus, daß für den Kern (9) bekanntlich eine Ungleichung gilt:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\xi - x)}{\sin \frac{\xi - x}{2}}\, d\xi \right| < M$$

für alle $n$, alle $x$ von $\langle -\pi, \pi \rangle$ und alle Teilintervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ von $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Wählt man für $g(x)$ speziell die Funktion, die $= 1$ ist in einem Teilintervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ von $\langle -\pi, \pi \rangle$, sonst $= 0$, so liefert die Parseval'sche Formel das bekannte Theorem [3] von der Integration der Fourier'schen Reihe einer beliebigen in $\langle -\pi, \pi \rangle$ integrierbaren Funktion $f$.

Satz V liefert übrigens unmittelbar, indem man unter $g(x)$ die Funktion versteht, die $= 1$ ist in $\langle \alpha, \beta \rangle$, sonst $= 0$:

Damit für jede in $\langle a, b \rangle$ integrierbare Funktion $f$ und jedes Teilintervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ von $\langle a, b \rangle$ die Formel gelte:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \int_\alpha^\beta \omega_\nu(x)\, dx, \tag{11}$$

---

[1] Siehe zum Beispiel H. Lebesgue Ann. de Toul. Serie 3, Bd. 1, p. 37.

[2] Zuerst bemerkt von W. H. Young, Proc. Royal Soc. A, 85, p. 412.

[3] Siehe zum Beispiel de la Vallée Poussin, Cours d'analyse, tome II (2. éd), p. 134.

ist notwendig und hinreichend, daß zu jedem Teilintervalle $<\alpha, \beta>$ von $<a, b>$ ein $M$ gehört, so daß für alle $n$, und alle $x$ von $<a, b>$ (abgesehen von einer Nullmenge):

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \int_{\alpha}^{\beta} \omega_\nu(\xi)\, d\xi \cdot \omega_\nu(x)\right| < M. \tag{12}$$

Diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn die Bedingung von Satz VII erfüllt ist.

Hingegen reicht Bedingung (12) noch keineswegs aus, um das Bestehen folgender Beziehung sicherzustellen, die wesentlich mehr besagt als (11):

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \left|f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\, \omega_\nu(x)\right| dx = 0. \tag{13}$$

Das Bestehen dieser Beziehung für jedes in $<a, b>$ integrierbare $f$ hat nämlich, wie aus einem Satze von Lebesgue[1] folgt, das Bestehen der Parseval'schen Formel für jedes integrierbare $f$ und geschränkte $g$ zur Folge. Es kann also, wenn es sich zum Beispiel um Fourier'sche Reihen handelt, (13) nicht für jedes integrierbare $f$ gelten.

## § 5.

Nachdem wir gesehen haben, daß die Parseval'sche Formel keineswegs für jedes vollständige normierte Orthogonalsystem $\omega_\nu(x)$ und jedes Paar von Funktionen $f(x), g(x)$ gilt, von denen die eine geschränkt, die andere integrierbar ist, wollen wir die Frage behandeln, ob sich nicht Summationsverfahren angeben lassen, durch die aus der Reihe:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu\, g_\nu$$

eine Folge von Ausdrücken hergeleitet wird, die stets gegen:

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

konvergiert, wenn von den beiden Funktionen $f$ und $g$ in $<a, b>$ die eine geschränkt, die andere integrierbar ist. Zur Lösung dieser Aufgabe werden wir geführt durch folgenden Satz:

VIII. Es genüge der Kern $\varphi(\xi, x, n)$ allen Voraussetzungen von Satz II. Ist dann $f(x)$ in $<a, b>$ integrierbar und $g(x)$ in $<a, b>$ geschränkt, so ist:

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b I_n(f, x)\, g(x)\, dx. \tag{1}$$

In der Tat, nach Satz II ist:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b |f(x) - I_n(f, x)|\, dx = 0,$$

daher, wenn $g(x)$ in $<a, b>$ geschränkt ist, auch:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b |g(x)| \cdot |f(x) - I_n(f, x)|\, dx = 0,$$

und somit auch:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b g(x)\,(f(x) - I_n(f, x))\, dx = 0, \tag{2}$$

wodurch (1) bewiesen ist.

[1] Satz III meiner ersten Mitteilung.

Dieser Satz wurde unter wesentlich engeren Voraussetzungen über $\varphi(\xi, x, n)$ bereits von H. Lebesgue bewiesen.[1]

Eine unmittelbare Folge aus Satz VIII ist folgende Bemerkung:

Sei $\omega_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Intervalles $< a, b >$, und sei jedes einzelne $\omega_\nu(x)$ in $< a, b >$ geschränkt. Es existieren dann in bezug auf dieses Orthogonalsystem sowohl die Fourier'schen Konstanten $f_\nu$ von $f(x)$ als auch die Fourier'schen Konstanten $F_\nu(n)$ von $I_n(f, x)$ und zwar ist:

$$f_\nu = \lim_{n=\infty} F_\nu(n). \tag{3}$$

In der Tat, wir haben, um (3) zu erhalten, in (1) nur $g(x)$ durch $\omega_\nu(x)$ zu ersetzen. Dies legt den Gedanken nahe, daß man das gewünschte Summationsverfahren einfach erhält, indem man in der Reihe:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu g_\nu$$

immer $f_\nu$ durch $F_\nu(n)$ ersetzt und den Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty}$ bildet. Wir werden sehen, daß dies in der Tat, unter weiteren Einschränkungen über $\varphi(\xi, x, n)$ richtig ist, und zwar ohne jede Einschränkung bezüglich des Orthogonalsystems der $\omega_\nu(x)$.

IX. Es genüge $\varphi(\xi, x, n)$ für $a \leqq \xi \leqq b$, $a \leqq x \leqq b$ außer den Voraussetzungen 1., 2., 3., von Satz II noch folgender Voraussetzung:

4. Zu jedem $n$ gibt es ein $M_n$, so daß im ganzen Quadrate: $a \leqq \xi \leqq b$, $a \leqq x \leqq b$ die Ungleichung gilt:

$$|\varphi(\xi, x, n)| < M_n.$$

Ist dann $\omega_\nu(x)$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem in $< a, b >$, und wird gesetzt:

$$F_\nu(n) = \int_a^b \left( \int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi \right) \cdot \omega_\nu(x)\, dx,$$

so gilt für jedes in $< a, b >$ integrierbare $f$ und jedes in $< a, b >$ geschränkte $g$ die Formel:

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(n) \cdot g_\nu. \tag{4}$$

Unter Berufung auf Satz VIII genügt es nachzuweisen, daß:

$$\int_a^b I_n(f, x)\, g(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(n) \cdot g_\nu. \tag{5}$$

ist. Wegen unserer Voraussetzung 4. ist nun aber:

$$|I_n(f, x)| \leqq \int_a^b |f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)|\, d\xi \leqq M_n \int_a^b |f(\xi)|\, d\xi,$$

das heißt für jedes einzelne $n$ ist $I_n(f, x)$ in $< a, b >$ geschränkt. Da nun die $F_\nu(n)$ nichts anderes sind, als die Fourier'schen Konstanten von $I_n(f, x)$ und für jedes Paar geschränkter (und somit samt ihrem Quadrate integrierbarer) Funktionen das Parseval'sche Theorem gilt, ist (5), und damit Satz IX bewiesen.

[1] Ann. de Toul. Ser. 3, Bd. 1, p. 105.

Um aus Satz IX speziell Resultate über die Koeffizienten der Fourier'schen Reihe zu erhalten, haben wir für die $\omega_\nu(x)$ das trigonometrische Orthogonalsystem für das Intervall $<-\pi, \pi>$ zu nehmen:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \nu x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \nu x \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Wir setzen:

$$a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos \nu\xi \, d\xi; \quad b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin \nu\xi \, d\xi,$$

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi) \cos \nu\xi \, d\xi; \quad \beta_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi) \sin \nu\xi \, d\xi.$$

Wir nehmen weiter an, der Kern $\varphi(\xi, x, n)$ habe die Gestalt:

$$\varphi(\xi, x, n) = \varphi(\xi - x, n),$$

wo $\varphi(u, n)$ für jedes $n$ in $<-2\pi, 2\pi>$ definiert sei und den Relationen:

$$\varphi(-u) = \varphi(u); \quad \varphi(u + 2\pi) = \varphi(u)$$

genüge. Setzen wir noch:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u, n) \cos \nu u \, du = \varphi_\nu(n),$$

so wird:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \varphi(\xi - x, n) \, d\xi \right) \cos \nu x \, dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \left( \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u, n) \cos \nu(\xi - u) \, du \right) d\xi = \sqrt{\pi} \cdot \varphi_\nu(n) \, a_\nu,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \varphi(\xi - x, n) \, d\xi \right) \sin \nu x \, dx = \sqrt{\pi} \, \varphi_\nu(n) \cdot b_\nu,$$

und (4) geht über in:

$$\text{(4a)} \qquad \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \, g(x) \, dx = \lim_{n=\infty} \left\{ \varphi_0(n) \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(n) (a_\nu \alpha_\nu + b_\nu \beta_\nu) \right\}.$$

Hier wird also die Parseval'sche Reihe summiert, indem ihre Glieder mit den Konvergenz erzeugenden Faktoren $\varphi_\nu(n)$ multipliziert werden.

Wählen wir dann für $\varphi(u, n)$ den Poisson'schen Kern:

$$\varphi(u, n) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r_n^2}{1 - 2 r_n \cos u + r_n^2} \quad (r_n < 1, \lim_{n=\infty} r_n = 1),$$

so wird:

$$\varphi_\nu(n) = r_n^\nu,$$

und Formel (4a) ergibt:

$$\text{(6)} \qquad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, g(x) \, dx = \frac{1}{2} a_0 \alpha_0 + \lim_{r=1-0} \sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu (a_\nu \alpha_\nu + b_\nu \beta_\nu)$$

für jedes Paar von Funktionen $f, g$, von denen in $<-\pi, \pi>$ die eine integrierbar, die andere geschränkt ist. Formel (6) wurde bewiesen von W. Groß.[1]

[1] Wien. Ber. Abt. IIa, Bd. 124, p. 1025. Sie ergibt sich übrigens, ebenso wie die Formeln (7) und (8) auch als Spezialfall einer Überlegung von W. H. Young, Proc. Royal Soc. A., 85, p. 401 ff.

Wählt man für $\varphi(u, n)$ den Fejér'schen Kern:

$$\varphi(u, n) = \frac{1}{2n\pi} \left\{ \frac{\sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right\}^2,$$

so geht (4 $a$) über in:

(7) $$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx = \frac{1}{2} a_0 \alpha_0 + \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) (a_\nu \alpha_\nu + b_\nu \beta_\nu).$$

Wählt man für $\varphi(u, n)$ den Kern von de la Vallée Poussin:

$$\varphi(u\, n) = \frac{1}{\pi} 2^{2n-1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \left(\cos \frac{u}{2}\right)^{2n},$$

so geht (4 $a$) über in:

(8) $$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2} a_0 \alpha_0 + \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n!)^2}{(n-\nu)!\,(n+\nu)!} (a_\nu \alpha_\nu + b_\nu \beta_\nu),$$

und die Formeln (7), (8) gelten für jedes Paar von Funktionen, von denen in $< -\pi, +\pi >$ die eine integrierbar, die andere geschränkt ist.

## § 6.

Der im letzten Paragraphen zur Summation der Parseval'schen Reihe verwendete Gedanke kann auch zur Summation der Reihenentwicklung:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu\, \omega_\nu(x)$$

einer gegebenen Funktion $f(x)$ nach den Funktionen $\omega_\nu(x)$ eines vollständigen normierten Orthogonalsystemes verwendet werden. Man erhält so augenblicklich folgendes Summationstheorem:

X. Ist $\varphi(\xi, x, n)$ für jedes $n$ und jedes $x$ von $(a, b)$ nach $\xi$ samt seinem Quadrate integrierbar in $< a, b >$, und wird gesetzt:

(1) $$\Phi_\nu(x, n) = \int_a^b \varphi(\xi, x, n)\, \omega_\nu(\xi)\, d\xi,$$

so gilt, wenn $f(x)$ in $< a, b >$ samt seinem Quadrate integrierbar ist, die Formel:

(2) $$f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu\, \Phi_\nu(x, n)$$

in jedem Punkte $x$ von $(a, b)$, in dem:

(3) $$f(x) = \lim_{n=\infty} \int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi;$$

sie gilt gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(a, b)$, in dem (3) gleichmäßig gilt.

Bedingungen für $\varphi(\xi, x, n)$ unter denen (3) in jedem Punkte von $(a, b)$ gilt, in dem die Funktion $f$ stetig, oder erste Ableitung ihres unbestimmten Integrales, oder $m$-te Ableitung ihres $m$-fach iterierten unbestimmten Integrales ist, sowie Bedingungen, unter denen (3) gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(a, b)$ gilt, in dessen sämtlichen Punkten $f(x)$ stetig ist, findet man in der wiederholt zitierten, für diese Theorie grundlegenden Abhandlung von H. Lebesgue,[1] sowie in meiner 1. Mitteilung über diesen Gegenstand.

Es handelt sich noch darum, uns von der Voraussetzung frei zu machen, daß auch das Quadrat von $f$ in $< a, b >$ integrierbar sei. Damit die Fourier'sche Konstanten $f_\nu$ für jedes integrierbare $f$ existieren, müssen wir dabei wieder voraussetzen, daß jedes einzelne $\omega_\nu(\xi)$ geschränkt ist in $< a, b >$.

Satz V liefert uns dann folgendes Summationstheorem:

XI. Sei $\varphi(\xi, x, n)$ für jedes einzelne $n$ und jedes einzelne $x$ von $(a, b)$ eine in $< a, b >$ geschränkte Funktion von $\xi$. Ferner gebe es zu jedem $n$ und jedem $x$ von $(a, b)$ ein $M$, so daß für die durch (1) definierten Funktionen $\Phi_\nu(x, n)$ die Ungleichung:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\mu} \Phi_\nu(x, n)\, \omega_\nu(\xi)\right| < M$$

gilt für alle $\mu$ und alle $\xi$ von $< a, b >$.

Dann gilt für jedes in $< a, b >$ integrierbare $f$ die Formel (2) in jedem Punkte $x$ von $(a, b)$ in dem (3) gilt; sie gilt gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(a, b)$, in dem (3) gleichmäßig gilt.

Besonders einfach gestaltet sich, wie M. Schechter bemerkte,[2] die Summationsformel (2) für den Fall des trigonometrischen Orthogonalsystemes im Intervalle $< -\pi, \pi >$, wenn $\varphi(\xi, x, n)$ die Form hat:

$$\varphi(\xi, x, n) = \varphi(\xi - x, n),$$

wo $\varphi(u, n)$ eine in $< -2\pi, 2\pi >$ definierte, gerade Funktion der Periode $2\pi$ ist.

Sind dann $a_\nu, b_\nu$ die Koeffizienten der Fourier'schen Reihe von $f$, und wird wieder (wie in § 5) gesetzt:

$$\varphi_\nu(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u, n) \cos \nu u \, du,$$

so nimmt (2) die Form an:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{1}{2} \varphi_0(n)\, a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(n)\, (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \right\}. \tag{4}$$

Alle gebräuchlichen Summationsformeln der trigonometrischen Reihen sind Spezialfälle dieser Formel.

In meiner 1. Mitteilung habe ich Bedingungen für $\varphi(\xi, x, n)$ entwickelt, unter denen überall, wo die $m$-te Ableitung $f^{(m)}(x)$ von $f(x)$ existiert, die Relation gilt:

$$f^{(m)}(x) = \lim_{n=\infty} \int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x, n)\, d\xi, \tag{5}$$

sowie Bedingungen, unter denen diese Relation gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(a, b)$ gilt, in dem $f(x)$ $m$-mal stetig differenzierbar ist. Und wir sehen:

XII. Gilt (5) in jedem Punkte $x$ von $(a, b)$, in dem $f^{(m)}(x)$ existiert, und zwar gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(a, b)$, in dem $f(x)$ $m$-mal stetig differenzierbar ist, so gilt, vorausgesetzt, daß $\varphi(\xi, x, n)$ den Bedingungen von Satz XI (beziehungsweise Satz X) genügt, dasselbe von der Formel:

$$f^{(m)}(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu\, \Phi_\nu(x, n) \tag{6}$$

---

[1] Sur les intégrales singulières, Ann. de Toul. Serie 3, Bd. 1, p. 25 ff.

[2] Monatsh. f. Math. Bd. 22, p. 224.

für jede in $< a, b >$ integrierbare (beziehungsweise samt ihrem Quadrate integrierbare) Funktion $f(x)$.

Handelt es sich um das trigonometrische Orthogonalsystem und hat $\varphi(\xi, x, n)$ die Form $\varphi(\xi - x, n)$, wo $\varphi(u, n)$ gerade und von der Periode $2\pi$ ist (dies kommt nur bei geradem $m$ in Betracht), so reduziert sich (6) wieder auf:

$$(7) \qquad f^{(m)}(x) = \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{1}{2} \varphi_0(n)\, a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(n)\, (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \right\}.$$

Hat hingegen (was bei ungeradem $m$ in Betracht kommt), $\varphi(\xi, x, n)$ die Form $\varphi(\xi - x, n)$, wo $\varphi(u, n)$ eine ungerade Funktion der Periode $2\pi$ ist, so reduziert sich (6) auf:

$$(7a) \qquad f^{(m)}(x) = \lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{\varphi}_\nu(n)(-a_\nu \sin \nu x + b_\nu \cos \nu x) \right\},$$

worin gesetzt ist:

$$\bar{\varphi}_\nu(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u, n) \sin \nu u \, du.$$

Wohl der einfachste Kern eines singulären Integrales ist der folgende, wo $h$ eine beliebige positive Zahl bedeutet:

$$(8) \qquad \varphi(\xi, x, h) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h} & \text{in } (x-h, x+h) \\ 0 & \text{außerhalb } (x-h, x+h). \end{cases}$$

Setzt man:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

so wird:

$$\int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x, h)\, d\xi = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h},$$

und somit gilt die Beziehung:

$$(9) \qquad f(x) = \lim_{h=0} \int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x, h)\, d\xi$$

in jedem Punkte $x$ von $(a, b)$, wo:

$$(10) \qquad f(x) = \lim_{h=0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$$

ist, insbesondere also dort, wo $f$ Ableitung seines unbestimmten Integrales ist. Nach Satz XVIII meiner 1. Mitteilung gilt (9) gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(a, b)$, in dessen sämtlichen Punkten $f$ stetig ist. Aus X und XI haben wir also:

XIII. Für jedes normierte Orthogonalsystem von $< a, b >$ gilt die Formel:

$$(11) \qquad f(x) = \lim_{h=0} \frac{1}{2h} \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \int_{x-h}^{x+h} \omega_\nu(\xi)\, d\xi$$

für jede in $< a, b >$ samt ihrem Quadrate integrierbare Funktion $f$ in jedem Punkte von $(a, b)$, in dem (10) gilt; sie gilt gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(a, b)$, in dessen sämtlichen Punkten $f$ stetig ist. — Dies gilt für alle in $< a, b >$ integrierbaren Funktionen, falls es zu jedem Teilintervall $< \alpha, \beta >$ von $(a, b)$ ein $M$ gibt, so daß:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\mu} \int_a^\beta \omega_\nu(\xi)\, d\xi \cdot \omega_\nu(x) \right| < M \tag{12}$$

für alle $x$ von $< a, b >$ und alle $\mu$.

Der einfachste Kern, der $f'(x)$ durch $f(x)$ darstellt, ist der folgende:

$$\varphi(\xi, x, h) = \frac{1}{4h^2} \text{ in } (x, x+2h), \qquad = -\frac{1}{4h^2} \text{ in } (x-2h, x), \quad \text{sonst} = 0. \tag{13}$$

Wir haben hier:

$$\int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x, h)\, d\xi = \frac{F(x+2h) - 2F(x) + F(x-2h)}{4h^2},$$

und es gilt die Beziehung:

$$f'(x) = \lim_{h=0} \int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x, h)\, d\xi$$

in jedem Punkte $x$ von $(a, b)$, in dem $f'(x)$ existiert. Sie gilt nach Satz XI meiner 1. Mitteilung gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(a, b)$, in dem $f(x)$ stetig differenzierbar ist. Aus Satz XII haben wir also:

XIV. Für jedes normierte Orthogonalsystem von $< a, b >$ gilt die Formel:

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{1}{4h^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \left\{ \int_x^{x+2h} \omega_\nu(\xi)\, d\xi - \int_{x-2h}^{x} \omega_\nu(\xi)\, d\xi \right\} \tag{14}$$

für jede in $< a, b >$ samt ihrem Quadrate integrierbare Funktion $f$, in jedem Punkte von $(a, b)$, in dem $f'(x)$ existiert; sie gilt gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(a, b)$, in dem $f$ stetig differenzierbar ist. — Ist Bedingung (12) erfüllt, so gilt dies auch für jede in $< a, b >$ integrierbare Funktion $f$.

Um zur Darstellung der höheren Ableitungen $f^{(m)}(x)$ zu gelangen, definieren wir $\varphi(\xi, x, h)$ für $h > 0$ durch die Vorschrift:

$$\varphi(\xi, x, h) = (-1)^k \frac{1}{(2h)^{m+1}} \binom{m}{k} \text{ in } (x+(m-2k-1)h,\ x+(m-2k+1)h)\ (k = 0, 1, \ldots, m), \tag{15}$$

außerhalb aller dieser Intervalle sei $\varphi(\xi, x, h) = 0$.

Wie man sieht, wird dann, wenn $h$ so klein ist, daß das Intervall $< x-(m+1)h, x+(m+1)h >$ in $< a, b >$ liegt:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\xi)\, \varphi(\xi, x, h)\, d\xi &= \frac{1}{(2h)^{m+1}} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \{F(x+(m-2k+1)h) - F(x+(m-2k-1)h)\} \\ &= \frac{1}{(2h)^{m+1}} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} F(x+(m-2k+1)h). \end{aligned} \tag{16}$$

Wählen wir $f(x) = x^i$, so wird:

$$F(x) = \frac{(x-a)^{i+1}}{i+1},$$

und da bekanntlich:

$$(17)\qquad \frac{1}{(2h)^{m+1}}\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}F(x+(m-2k+1)h)=\begin{cases}0 \text{ für } F(x)=(x-a)^i\ (i=0,1,\ldots,m)\\ (m+1)! \text{ für } F(x)=(x-a)^{m+1}\end{cases}$$

ist, so sehen wir, daß der Kern (15) alle Voraussetzungen von Satz VII und Satz XI meiner 1. Mitteilung erfüllt. Das liefert den Satz:

XV. Für jedes normierte Orthogonalsystem von $< a, b >$ gilt die Formel:

$$(18)\qquad f^{(m)}(x)=\lim_{h=0}\frac{1}{(2h)^{m+1}}\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu\cdot\left(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\int_{x+(m-2k-1)h}^{x+(m-2k+1)h}\omega_\nu(\xi)\,d\xi\right)$$

für jede in $< a, b >$ samt ihrem Quadrate integrierbare Funktion $f$, in jedem Punkte von $(a, b)$, in dem $f^{(m)}(x)$ existiert; sie gilt gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(a, b)$ in dem $f$ $m$-mal stetig differenzierbar ist. — Ist Bedingung (12) erfüllt, so gilt dies für jede in $< a, b >$ integrierbare Funktion $f$.

Wir wollen nun die Formeln (11), (14), (18), speziell auf die trigonometrischen Reihen anwenden, für die Bedingung (12) bekanntlich erfüllt ist. Da der Kern (8) die für die Giltigkeit von (4) erforderliche Gestalt hat, kann (4) angewendet werden.[1] Dabei ist:

$$\varphi_\nu(u)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\cos\nu u\,du=\frac{\sin\nu h}{\nu h},$$

so daß (11) hier lautet: In jedem Punkte $x$ von $(-\pi, \pi)$ in dem $f$ zu seinem unbestimmten Integrale $F$ in der Beziehung steht:

$$f(x)=\lim_{h=0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h},$$

gilt für jedes in $< -\pi, \pi >$ integrierbare $f$ die Formel:

$$(19)\qquad f(x)=\lim_{h=0}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu h}{\nu h}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\right\};$$

sie gilt gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(-\pi, \pi)$, in dessen sämtlichen Punkten $f$ stetig ist.

Betrachten wir nun den Kern (13), so kann (7 $a$) für $m = 1$ angewendet werden. Dabei ist:

$$\bar{\varphi}_\nu(u)=\frac{1}{4h^2}\int_0^{2h}\sin\nu u\,du-\frac{1}{4h^2}\int_{-2h}^{0}\sin\nu u\,du=\nu\cdot\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right)^2,$$

und wir erhalten: Für jedes in $< -\pi, \pi >$ integrierbare $f$ gilt in jedem Punkte von $(-\pi, \pi)$, in dem die Ableitung $f'$ existiert die Formel:

$$(20)\qquad f'(x)=\lim_{h=0}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right)^2(-\nu\cdot a_\nu\sin\nu x+\nu\cdot b_\nu\cos\nu x);$$

sie gilt gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(-\pi, \pi)$, in dem $f$ stetig differenzierbar ist.

Betrachten wir den Kern (15) für ungerades $m$, so können wir wieder (7 $a$) anwenden, und zwar erhalten wir nach (16):

$$\bar{\varphi}_\nu(u)=-\frac{1}{(2h)^{m+1}}\frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}\cos(m-2k+1)\nu\cdot h.$$

[1] Vgl. M. Schechter a. a. O., p. 232.

Das ist der reelle Teil von:

$$-\frac{1}{(2h)^{m+1}}\,\frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}e^{(m+1-2k)\nu h i}=-\frac{1}{(2h)^{m+1}}\,\frac{1}{\nu}\,(e^{\nu h i}-e^{-\nu h i})^{m+1}=$$

$$=-i^{m+1}\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right)^{m+1}\nu^m,$$

und da $m$ ungerade ist, so ist $i^{m+1}$ reell, und es ist somit:

$$\varphi_\nu(n)=-i^{m+1}\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right)^{m+1}\cdot\nu^m.$$

Betrachten wir den Kern (15) für geradesm $m$, so können wir (7) anwenden, und zwar erhalten wir nach (16):

$$\varphi_\nu(n)=\frac{1}{(2h)^{m+1}}\,\frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}\sin(m-2k+1)\,\nu h.$$

Das ist der imaginäre Teil von:

$$\frac{1}{(2h)^{m+1}}\,\frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}e^{(m+1-2k)\nu h i}=i^{m+1}\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right)^{m+1}\nu^m,$$

und da $m$ gerade ist, so ist $i^{m+1}$ rein imaginär, und es ist somit:

$$\varphi_\nu(n)=i^m\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right)^{m+1}\cdot\nu^m.$$

Wir haben somit das Resultat: Für jedes in $<-\pi,\pi>$ integrierbare $f$ gilt in jedem Punkte von $(-\pi,\pi)$, in dem die $m$-te Ableitung $f^{(m)}$ existiert bei ungeradem $m$:

(21) $$f^{(m)}(x)=-i^{m+1}\lim_{h=0}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right)^{m+1}(-\nu^m a_\nu\sin\nu x+\nu^m b_\nu\cos\nu x),$$

bei geradem $m$:

(21 *a*) $$f^{(m)}(x)=i^m\lim_{h=0}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right)^{m+1}(\nu^m a_\nu\cos\nu x+\nu^m b_\nu\sin\nu x).$$

Diese Formeln gelten gleichmäßig in jedem Teilintervalle $<\alpha,\beta>$ von $(-\pi,\pi)$, in dem $f$ $m$-mal stetig differenzierbar ist.

Wie man sieht, erhält man die rechte Seite dieser Formeln, indem man die Fourier'sche Reihe von $f$ gliedweise $m$-mal differenziert, jedes Glied multipliziert mit $\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right)^{m+1}$ und den $\lim\limits_{h=0}$ bildet.

Bemerken wir zunächst, daß, wie die Herleitung der Formeln (21) und (21 *a*) zeigt, auf ihrer linken Seite $f^{(m)}(x)$ ersetzt werden kann durch den etwas allgemeineren Ausdruck:

$$\lim_{h=0}\frac{1}{(2h)^{m+1}}\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}F(x+(m-2k+1)h),$$

in dem $F(x)$ das unbestimmte Integral von $f(x)$ bedeutet.

Setzen wir bei ungeradem $m$:

$$F_m^*(x)=-i^{m-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^m}(-a_\nu\sin\nu x+b_\nu\cos\nu x).$$

bei geradem $m$:

$$F_m^*(x) = i^m \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^m}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

so ist $F_m^*(x)$ ein $m$-fach iteriertes unbestimmtes Integral von $f(x) - \frac{a_0}{2}$. Wenden wir auf $F_{m-1}^*(x)$ die entsprechende der beiden Formeln (21), (21 $a$) an, so erhalten wir den Satz:

Für jedes in $< -\pi, \pi >$ integrierbare $f$ gilt in jedem Punkte von $(-\pi, \pi)$, in dem $f$ mit seinem $m$-fach iterierten unbestimmten Integrale $F_m(x)$ in der Beziehung steht:

$$f(x) = \lim_{h=0} \frac{1}{(2h)^m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} F_m(x + (m-2k)h), \tag{22}$$

insbesondere also überall dort, wo $f(x)$ $m$-te Ableitung von $F_m(x)$ ist, die Formel:[1]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{h=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \nu h}{\nu h}\right)^m (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x). \tag{23}$$

Diese Formel gilt gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(-\pi, \pi)$, in dessen sämtlichen Punkten $f$ stetig ist.

Ebenso wie die Formeln (21), (21 $a$) lediglich einen Spezialfall von (18) darstellen, ebenso ist (23) lediglich ein spezieller Fall eines allgemeinen Summationstheorems für Reihen nach Orthogonalfunktionen, das noch kurz erwähnt sei.

Wir bezeichnen den Kern (15) mit $\varphi^{(m)}(\xi, x, h)$:

$$\varphi^{(m)}(\xi, x, h) = (-1)^k \frac{1}{(2h)^{m+1}} \binom{m}{k} \quad \text{in } (x + (m-2k-1)h,\ x + (m-2k+1)h) \quad (k = 0, 1, \ldots, m) \tag{24}$$

$$\varphi^{(m)}(\xi, x, h) = 0 \quad \text{außerhalb dieser Intervalle,}$$

und führen die iterierten unbestimmten Integrale von $\varphi^{(m)}(\xi, x, h)$ ein durch:

$$\Phi_0^{(m)}(\xi, x, h) = \varphi^{(m)}(\xi, x, h); \quad \Phi_{i+1}^{(m)}(\xi, x, h) = \int_{x-(m+1)h}^{\xi} \Phi_i^{(m)}(\xi, x, h)\, d\xi. \tag{25}$$

Zunächst sehen wir, daß wir außerhalb $(x - (m+1)h,\ x + (m+1)h)$ haben:

$$\Phi_i^{(m)}(\xi, x, h) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, m). \tag{26}$$

In der Tat, dies ist richtig für $i = 0$. Angenommen, es sei richtig für $i \leqq i_0$, so wird es auch für $i_0 + 1$ gelten, wenn:

$$\int_{x-(m+1)h}^{x+(m+1)h} \Phi_{i_0}^{(m)}(\xi, x, h)\, d\xi = 0 \tag{27}$$

ist. Durch mehrmalige partielle Integration finden wir aber:

$$\int_{x-(m+1)h}^{x+(m+1)h} \Phi_{i_0}^{(m)}(\xi, x, h)\, d\xi = \frac{(-1)^{i_0}}{i_0!} \int_{x-(m+1)h}^{x+(m+1)h} \varphi^{(m)}(\xi, x, h) \cdot \xi^{i_0}\, d\xi,$$

und wie wir in (17) gesehen haben, ist dies tatsächlich $= 0$ für $i_0 < m$, wodurch (27) bestätigt ist. Und damit ist (26) durch vollständige Induktion bewiesen.

[1] Für $m = 2$ ist dies die bekannte Riemann'sche Summationsmethode, vgl. M. Schechter a. a. O., p. 233.

Sei nun $x$ ein Punkt von $(a, b)$, und $h > 0$ so klein gewählt, daß $< x-(m+1)\,h,\ x+(m+1)\,h >$ in $(a, b)$ liegt. Dann haben wir, unter Berücksichtigung von (26), durch partielle Integration (wobei mit $F_i(x)$ die iterierten unbestimmten Integrale[1] von $f(x)$ bezeichnet sind):

$$\int_a^b F_m(\xi)\,\varphi^{(m)}(\xi, x, h)\,d\xi = (-1)^m \int_a^b f(\xi)\,\Phi_m^{(m)}(\xi, x, h)\,d\xi.$$

Da nun, wie wir wissen:

$$f(x) = \lim_{h=0} \int_a^b F_m(\xi)\,\varphi^{(m)}(\xi, x, h)\,d\xi$$

ist in jedem Punkte von $(a, b)$, in dem $f(x)$ die $m$-te Ableitung von $F_m(x)$ ist, oder allgemeiner, wo:

$$f(x) = \lim_{h=0} \frac{1}{(2\,h)^{m+1}} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} F_{m+1}(x+(m-2\,k+1)\,h) \tag{28}$$

ist, so ist in jedem solchen Punkte auch

$$f(x) = \lim_{h=0} (-1)^m \int_a^b f(\xi)\,\Phi_m^{(m)}(\xi, x, h)\,d\xi.$$

Wenden wir auf dieses Integral die Parseval'sche Formel an, so erhalten wir schließlich:

XVIII. Sei der Kern $\Phi_m^{(m)}(\xi, x, h)$ nach (25) aus dem Kerne (24) hergeleitet und es werde gesetzt:

$$(-1)^m \int_a^b \Phi_m^{(m)}(\xi, x, h)\,\omega_\nu(\xi)\,d\xi = \Omega_\nu^{(m)}(x, h).$$

Für jedes normierte Orthogonalsystem von $< a, b >$ gilt dann die Formel:

$$f(x) = \lim_{h=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu\,\Omega_\nu^{(m)}(x, h) \tag{29}$$

für jede in $< a, b >$ samt ihrem Quadrate integrierbare Funktion $f$, in jedem Punkte von $(a, b)$, in dem (28) gilt, insbesondere also in jedem Punkte von $(a, b)$, in dem $f$ $(m+1)$te Ableitung seines $(m+1)$-fach iterierten unbestimmten Integrales ist; sie gilt gleichmäßig in jedem Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(a, b)$, in dessen sämtlichen Punkten $f$ stetig ist.

Dies gilt für alle in $< a, b >$ integrierbaren Funktionen $f$, falls es ein $M$ gibt, so daß

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\mu} \int_\alpha^\beta \omega_\nu(\xi)\,d\xi \cdot \omega_\nu(x) \right| < M \tag{30}$$

für alle Teilintervalle $< \alpha, \beta >$ von $(a, b)$, alle $x$ von $< a, b >$ und alle $\mu$.

Eines Beweises bedarf nach dem Gesagten nur mehr der letzte Teil der Behauptung, und auch dieser Teil wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß, wenn Voraussetzung (30) gilt, auf das Integral:

$$\int_a^b f(\xi)\,\Phi_m^{(m)}(\xi, x, h)\,d\xi$$

[1] Das heißt, es ist $F_0(x) = f(x)$; $F_{i+1}(x) = \int F_i(x)\,dx$

für jedes in $< a, b >$ integrierbare $f$ das Parseval'sche Theorem angewendet werden kann. Dies aber wird, nach Satz V, der Fall sein, wenn es zu jedem $h > 0$ und jedem $\bar{x}$ von $(a, b)$ ein $N$ gibt, so daß:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\mu} \int_a^b \Phi_m^{(m)} (\xi, \bar{x}, h)\, \omega_\nu (\xi)\, d\xi \cdot \omega_\nu (x) \right| < N \tag{31}$$

für alle $\mu$ und alle $x$ von $< a, b >$. Nun ist jedes $\Phi_m^{(m)} (\xi, x, h)$ in $< a, b >$ geschränkt und von geschränkter Variation. Bezeichnet $\Phi (\bar{x}, h)$ eine obere Schranke für $|\Phi_m^{(m)} (\xi, \bar{x}, h)|$ für alle $\xi$ von $< a, b >$ und $V (\bar{x}, h)$ die Totalvariation von $\Phi_m^{(m)} (\xi, \bar{x}, h)$ in $< a, b >$, so liefert der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung, bei Berufung auf (30):

$$\left| \int_a^b \Phi_m^{(m)} (\xi, \bar{x}, h) \sum_{\nu=1}^{\mu} \omega_\nu (\xi)\, \omega_\nu (x)\, d\xi \right| \leqq (\Phi (\bar{x}, h) + V (\bar{x}, h)) \cdot M,$$

wodurch (31) bewiesen ist. Damit ist der Beweis von Satz XVIII beendet.

Die Berechnung der Ausdrücke $\Omega_\nu^{(m)} (x, h)$ in (29) ergibt für $m = 1$ und $m = 2$:

$$\Omega_\nu^{(1)} (x, h) = \frac{1}{(2\,h)^2} \int_{x-2h}^{x} (\xi - x + 2\,h)\, \omega_\nu (\xi)\, d\xi - \frac{1}{(2\,h)^2} \int_{x}^{x+2h} (\xi - x - 2\,h)\, \omega_\nu (\xi)\, d\xi.$$

$$\Omega_\nu^{(2)} (x, h) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\,h)^3} \int_{x-3h}^{x-h} (\xi - x + 3\,h)^2\, \omega_\nu (\xi)\, d\xi - \frac{1}{(2\,h)^3} \int_{x-h}^{x+h} \{(\xi - x)^2 - 3\,h^2\}\, \omega_\nu (\xi)\, d\xi + $$
$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{(2\,h)^3} \int_{x+h}^{x+3h} (\xi - x - 3\,h)^2\, \omega_\nu (\xi)\, d\xi.$$

Endlich sei noch erwähnt, daß wir, unter Berufung auf Satz II und auf Formel ($4a$) von § 5, die durch (23) gegebenen Summationsformeln der trigonometrischen Reihen ergänzen können durch die Theoreme:

Setzt man:

$$R^{(m)} (x, h) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \frac{\sin \nu h}{\nu h} \right)^m (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

so gilt die Beziehung:

$$\lim_{h=0} \int_{-\pi}^{\pi} |f (x) - R^{(m)} (x, h)|\, dx = 0.$$

Für jedes Paar von Funktionen $f$ und $g$, von denen in $< -\pi, \pi >$ die eine integrierbar, die andere geschränkt ist, gilt:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f (x)\, g (x)\, dx = \frac{a_0\, \alpha_0}{2} + \lim_{h=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \frac{\sin \nu h}{\nu h} \right)^m (a_\nu \alpha_\nu + b_\nu \beta_\nu).$$