ANALYSE DER LAPLACE'SCHEN KOSMOGONIE

VON

K. HILLEBRAND

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 4. JULI 1918

Die Laplace'sche Vorstellung über die Entwicklung des Sonnensystems kann mit einigen, allerdings wesentlichen Modifikationen als diejenige kosmogonische Hypothese betrachtet werden, die in allen ihren Konsequenzen der Konstitution dieses Systems am besten gerecht wird und sicherlich ihrer einfachen Voraussetzungen wegen in ihren Grundzügen als der wahrscheinlichste Entstehungsprozeß gelten kann.

Die epochalen Arbeiten von Poincaré und Darwin auf dem Gebiete der Kosmogonie ergaben neue und fundamentale Gesichtspunkte: die Theoreme über die Serien von Gleichgewichtsfiguren, die damit in Zusammenhang stehenden Fragen der Stabilität, die Vorgänge im Zweikörpersystem deformabler Massen — werden wohl die Grundlagen für alle weiteren Untersuchungen auf diesem Gebiete sein. In ihren Ausführungen wird nun immer vollkommene Homogenität der Urmasse vorausgesetzt. Vom rein spekulativen Standpunkt aus hat diese Annahme ihre völlige Berechtigung: stellt sie doch den einfachsten Fall jener Arten des Ausgangszustandes dar, der den Typus der Nebularhypothesen charakterisiert: den am wenigsten differentiierten Zustand; auch physikalisch ist sie durchaus berechtigt: ein Verhalten der Urmaterie, das dem einer inkompressiblen Flüssigkeit nahekommt, würde die typischen Züge des der Poincaré-Darwin'schen Theorie entsprechenden Prozesses aufweisen und es ist auch kaum zweifelhaft, daß eine Klasse kosmischer Systeme unter Bedingungen entstanden ist, die diesem Verhalten nahekommen. Andrerseits liegen aber in unserem Sonnensystem die Verhältnisse so, daß — mit einer einzigen Ausnahme — an einen Abtrennungsprozeß, wie er bei einer homogenen Masse erfolgt, nicht gedacht werden kann: die Begleitmassen sind um vieles kleiner als es das Ergebnis dieser Theorie zuläßt. Mit dem Aufgeben der Voraussetzung vollkommener oder wenigstens näherungsweiser Homogenität entfiele aber natürlich diese Unstimmigkeit, wenn theoretisch nachgewiesen werden könnte, daß ein ähnlicher Vorgang auch bei einer gegen das Innere zunehmenden Dichte möglich wäre: da die abgetrennten Begleitmassen aus den äußeren weniger dichten Schichten des primären Körpers bestritten werden, so könnten sie offenbar ihrer Masse nach einer viel niedrigeren unteren Grenze des Verhältnisses zur Hauptmasse genügen. Leider ist es bis jetzt nicht möglich gewesen, diesen allgemeineren und den wirklichen physikalischen Bedingungen entsprechenderen Fall einer exakten Analyse zuzuführen.

Unter diesen Umständen gewinnt nun die Laplace'sche Hypothese eine erhöhte theoretische Bedeutung: sie stellt gegenüber der vollkommenen Homogenität das andere Extrem des allgemeinen Dichtigkeitsverlaufes dar: den sprungweisen Übergang von der unendlich kleinen Dichte einer äußeren Hülle zu einer räumlich relativ kleinen aber starken zentralen Verdichtung. Der tatsächlich anzunehmende

Ausgangszustand wird zwischen diesen Extremen gelegen sein. Der Laplace'schen Hypothese wird also eine gleichmäßig rotierende Masse zugrunde gelegt mit einer zentralen Verdichtung, deren Ausdehnung und demgemäß auch Formveränderung vernachlässigt werden kann, umgeben von einer überaus großen Gashülle, deren Masse als verschwindend klein gegenüber der zentralen Masse angenommen wird.

Die mathematische Behandlung bietet bei dieser Annahme gar keine Schwierigkeiten, da hier die Niveauflächen von vornherein gegeben sind und sich in sehr einfacher Weise diskutieren lassen. Allerdings hat gerade dieser Umstand — bis jetzt wenigstens — verhindert, daß man darauf eine vermittelnde analytische Darstellung für den zwischenliegenden realen Fall der stetig zunehmenden Dichte hätte gründen können.

Die von Laplace in seiner »L'Exposition du Système du Monde« gegebenen allgemeinen Umrisse seiner kosmogonischen Theorie sind erst von E. Roche einer eingehenderen mathematischen Behandlung unterzogen worden.[1] Wesentliche Ergänzungen und Modifikationen erhielt diese Theorie durch Poincaré.[2]

Es sind insbesondere die Ausführungen von Roche, die vielfach Anregungen zu einem weiteren Ausbau dieser Theorie bieten, ja stellenweise einen solchen notwendig erscheinen lassen, um so mehr, als die auf dem anderen eben erwähnten Gebiet entstandenen neuen Anschauungen eine Revision seiner Darlegungen verlangen.

Eine Vervollständigung der Laplace-Roche'schen Kosmogonie in diesem Sinne soll der Zweck der nachfolgenden Untersuchungen sein, die auch Anhaltspunkte für eine quantitative Abschätzung bieten sollen, insofern der behandelte kosmogonische Prozeß für unser Sonnensystem in Frage kommt.

1. Die Niveauflächen der Gashülle.

Es sei M die Masse der zentralen Verdichtung, deren Dimensionen als unendlich klein angenommen werden, ω die Rotationsgeschwindigkeit der Nebelmasse, r die Distanz eines Punktes derselben von M, ϑ der Winkel von r mit der Rotationsachse, dann ist die Gleichung einer Niveaufläche

$$\frac{k^2 M}{r} + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \vartheta = C$$

zugleich auch die Gleichung der Meridiankurve dieser Rotationsfläche. Führt man den Parameter r_0 durch die Gleichung

$$r_0^3 = \frac{k^2 M}{\omega^2}$$

so ist r_0 jene Distanz in der Äquatorebene, in der sich die Attraktion von M und die Zentrifugalkraft das Gleichgewicht halten. Die Gleichung kann dann in die Form gebracht werden

$$\frac{2}{r} + \frac{r^2 \sin^2 \vartheta}{r_0{}^3} = \frac{3c}{r_0}$$

wo c eine willkürliche Konstante, und zwar eine wesentlich positive, dimensionslose Zahl ist. Diese Gleichung dritten Grades in r, der man auch die Form

$$\left(\frac{r}{r_0} \sin \vartheta\right)^3 - 3c \cdot \frac{r}{r_0} \sin \vartheta + 2 \sin \vartheta = 0$$

[1] Siehe E. Roche: Mémoire sur la figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné. P. 1., 2. u. 3. Acad. des sciences et lettres de Montpellier. 1849, 1850 u. 1851. Ferner: Mémoire sur la figure des atmosphères des corps célestes ibid. 1854, und insbes.: Essai sur la Constitution et l'origine du Système Solaire. Ibid. 1873.

[2] Siehe H. Poincaré: Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques. Paris, 1911.

geben kann, hat nur dann reelle, positive Wurzeln, wenn

$$c^3 > \sin^2 \vartheta,$$

und zwar sind die beiden positiven Wurzeln gegeben durch

$$\frac{r}{r_0} \sin \vartheta = 2 \sqrt{c} \cos\left(\frac{\pi}{3} \pm \frac{1}{3} \operatorname{arc} \cos \frac{\sin \vartheta}{c^{3/2}}\right).$$

Ist demnach $c \gtreqless 1$, so sind sämtliche Werte ϑ, also geschlossene Kurven, beziehungsweise geschlossene Niveauflächen möglich, während für $c < 1$ ein Grenzwert ϑ_0 existiert, der durch $\sin \vartheta_0 = c^{3/2}$ gegeben ist, so daß die Niveauflächen nicht geschlossen, physikalisch also bedeutungslos sind.

Aus

$$\frac{dr}{r d\vartheta} = \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 \sin \vartheta \cos \vartheta}{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^3 \sin^2 \vartheta} = 0$$

erhält man die extremen Werte von r für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Als Polarachse, $\vartheta = 0$, erhält man

$$R_1 = \frac{2}{3c} r_0 \quad \text{und} \quad r = \infty.$$

Für die Äquatordimension, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, existieren nur für $c > 1$ reelle Größen, die gegeben sind durch

$$R_0 = 2 r_0 \sqrt{c} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{arc} \cos \frac{1}{c^{3/2}}\right) \quad \text{und}$$

$$R_0^1 = 2 r_0 \sqrt{c} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arc} \cos \frac{1}{c^{3/2}}\right).$$

Setzt man $\sqrt{c} = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos \gamma}}$, so sind diese beiden Werte

$$r_0 \cdot \frac{\cos \frac{\gamma}{3} \mp \sqrt{3} . \sin \frac{\gamma}{3}}{\sqrt[3]{\cos \gamma}}.$$

Da

$$\cos \frac{\gamma}{3} \mp \sqrt{3} \cdot \sin \frac{\gamma}{3} \lessgtr \sqrt[3]{\cos \gamma}$$

ist (die Ausführung ergibt die evidenten Ungleichungen

$$2 \sin \frac{2}{3} \gamma \mp \sqrt{3} \lessgtr 0,$$

wo γ im ersten Quadranten ist), so ist daraus ersichtlich, daß $R_0 < r_0$, $R'_0 > r_0$ ist.

Die Meridiankurve besteht also im Falle $c > 1$ aus zwei getrennten Zweigen: einem geschlossenen mit den Hauptachsen R_0 und R_1, und einem Zweige, der die Äquatorachse im Punkte R'_0 schneidet und asymptotisch gegen eine zur Rotationsachse parallelen Geraden verläuft. Der erstere liegt ganz innerhalb, der letztere ganz außerhalb eines Kreises mit dem Halbmesser r_0. Offenbar hat nur der erstere physikalische Bedeutung.

Für diesen ersten, geschlossenen Zweig der Meridiankurve ist also

$$r = \frac{2\, r_0 \sqrt{c}}{\sin \vartheta} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos \frac{\sin \vartheta}{c^{3/2}}\right).$$

Die Reihenentwicklung ergibt

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{r_0}{c}\left(1 + \frac{2^2}{3^3}\frac{\sin^2 \vartheta}{c^3} + \frac{2^4}{3^5}\frac{\sin^4 \vartheta}{c^6} + \ldots\right)$$

$$= \frac{2}{3} r_0 \cos^{2/3}\gamma \left[1 + \frac{2^2}{3^3}(\cos\gamma \sin\vartheta)^2 + \frac{2^4}{3^5}(\cos\gamma\sin\vartheta)^4 + \ldots\right].$$

Die beiden Achsen

$$R_0 = 2\, r_0 \frac{\cos\frac{1}{3}(\pi + \gamma)}{\cos^{1/3}\gamma} \quad \text{und} \quad R_1 = \frac{2}{3} r_0 \cos^{2/3}\gamma$$

nehmen mit wachsendem c ab, die Niveaufläche nähert sich der Kugelgestalt, da

$$\lim \frac{R_1}{R_0} = \lim_{\gamma = \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{3}\cos\gamma}{\cos\left(\frac{\pi + \gamma}{3}\right)} = 1 \quad \text{ist.}$$

Von besonderer Bedeutung für die kosmogonischen Vorgänge ist der Grenzfall $c = 1$.

Die beiden Achsen des geschlossenen Zweiges werden hier

$$R_0 = r_0 \quad \text{und} \quad R_1 = \frac{2}{3} r_0,$$

der Äquatorhalbmesser ist also gleich der Distanz, in welcher sich Attraktion und Zentrifugalkraft das Gleichgewicht halten. Es wird weiter $R'_0 = R_0 = r_0$: die beiden Zweige vereinigen sich hier in einem Doppelpunkt, in welchen die Tangenten an beiden Zweigen einen Winkel von 120° einschließen.[1] Die entsprechende Niveaufläche hat also eine linsenartige Form, mit der Kante in der Äquatorebene. Die Gleichung der Meridiankurve ist

$$\frac{2}{r} + \frac{r^2 \sin^2 \vartheta}{r_0^{\,3}} = \frac{3}{r_0},$$

woraus

$$r = 2\, r_0 \frac{\sin\frac{\vartheta}{3}}{\sin\vartheta}$$

folgt. Für den Winkel zwischen dem Radiusvektor und der Normalen erhält man

$$tg\,(n, r) = \frac{1}{3\, r_0}\sqrt{(3\, r - 2\, r_0)(r + 2\, r_0)} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(3\frac{\sin\frac{\vartheta}{3}}{\sin\vartheta} - 1\right)\left(\frac{\sin\frac{\vartheta}{3}}{\sin\vartheta} + 1\right)}.$$

Ist $c < 1$, so hat ϑ den Grenzwert ϑ_0 aus

$$\sin^2\vartheta_0 = c^3,$$

[1] Über diese und andere Eigenschaften der Meridiankurven finden sich in etwas anderer Formulierung ausführlichere Darstellungen in den oben erwähnten Arbeiten von Roche und Poincaré. Vergl. auch Tisserand: Méc. cél. t. IV chap. 14.

die Kurve schneidet also die Äquatorachse nicht mehr. Die beiden Werte von r fallen für ϑ_0 zusammen und werden gleich $\frac{r_0}{c}$: der Radiusvektor berührt die Kurve, die also hier von Einem zusammenhängenden Zweig gebildet wird, der in der Distanz

$$R_1 = \frac{2\,r_0}{3\,c}$$

die Rotationsachse schneidet und asymptotisch zu einer zu dieser Achse parallelen Geraden verläuft. Ist $c < 1$ nur wenig von der Einheit verschieden, etwa $c = 1 - \varepsilon$, wo ε eine kleine Größe erster Ordnung ist, so ist der berührende Radiusvektor $r_0(1+\varepsilon)$ und bildet mit der Äquatorebene den Winkel $\sqrt{3\,\varepsilon}$.

2. Abtrennungsprozeß.

Für den Ausgangszustand wird man die Nebelmasse als begrenzt von einer geschlossenen Niveaufläche anzunehmen haben. Ihre Hauptachsen seien R_0 und R_1, wobei also $R_0 < r_0$ ist. Der Entwicklungsprozeß wird bedingt sein durch die infolge der Wärmeausstrahlung stattfindende Kontraktion der Nebelmasse, so daß die mit der Zeit stetig zunehmende Dichte derselben als unabhängige Veränderliche zu betrachten und zunächst die Frage zu erledigen ist, in welcher Weise dadurch die Parameter der begrenzenden Niveaufläche geändert werden.

Die Abhängigkeit von der Dichte ist durch die Forderung gegeben, daß die Masse, das Rotationsmoment und die Größe $\omega^2 r_0^3$, gemäß der Definition von r_0, konstant bleiben müssen.

Ist m die Masse, q die (mittlere) Dichte der Nebelhülle, so ist

$$m = \frac{4\pi}{3}\, q \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

wo r der Wert für die Oberfläche ist, also nach dem früheren

$$r = \frac{2}{3}\cdot\frac{r_0}{c}\left(1 + \frac{2^2}{3^3}\,\frac{\sin^2\vartheta}{c^3} + \frac{2^4}{3^5}\,\frac{\sin^4\vartheta}{c^6} + \ldots\right)$$
$$= R_1\, f(\vartheta, c),$$

wenn die Reihe

$$1 + \frac{2^2}{3^3}\,\frac{\sin^2\vartheta}{c^3} + \frac{2^4}{3^5}\,\frac{\sin^4\vartheta}{c^6} + \ldots = f(\vartheta, c)$$

gesetzt wird. Es ist also

$$m = \frac{4\pi}{3}\, q \left(\frac{2\,r_0}{3\,c}\right)^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^3(\vartheta, c)\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Die Ausführung der Integration ergibt für die ersten Glieder

$$m = \frac{4\pi q}{3}\left(\frac{2\,r_0}{3\,c}\right)^3\left[1 + \frac{8}{27}\cdot\frac{1}{c^3} + \frac{256}{3645}\,\frac{1}{c^6} + \ldots\right] \quad \text{oder}$$

$$m = \frac{4\pi}{3}\, q\, R_1^3\left[1 + \frac{2^3}{3^3}\,\frac{1}{c^3} + \frac{2^8}{5.3^6}\,\frac{1}{c^6} + \ldots\right] = \frac{4\pi}{3}\, q\, R_1^3\, F(c).$$

Für das Trägheitsmoment bezüglich der Rotationsachse ergibt sich

$$J = \frac{4\pi}{5} q \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5 \sin^3 \vartheta \, d\vartheta = \frac{4\pi}{5} q \left(\frac{2 r_0}{3 c}\right)^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^5 (\vartheta, c) \sin^3 \vartheta \, d\vartheta,$$

woraus die Reihenentwicklung folgt

$$J = \frac{4\pi q}{5} \left(\frac{2 r_0}{3 c}\right)^5 \frac{2}{3} \left[1 + \frac{16}{27} \cdot \frac{1}{c^3} + \frac{640}{1701} \frac{1}{c^6} + \dots\right] \quad \text{oder}$$

$$J = \frac{2}{5} \cdot \frac{4\pi q}{3} R_1^5 \left[1 + \frac{2^4}{3^3} \cdot \frac{1}{c^3} + \frac{5.2^7}{7.3^5} \frac{1}{c^6} + \dots\right] = \frac{2}{5} \frac{4\pi q}{3} R_1^5 F_1(c).$$

Da m, $J\omega$ und $\omega^2 r_0^3$ unverändert bleiben, so sind demnach

$$q \left(\frac{r_0}{c}\right)^3 F(c) = H, \quad \omega q \left(\frac{r_0}{c}\right)^5 F_1(c) = K, \quad \omega^2 r_0^3 = C \quad \text{Konstante.}$$

Die Elimination von ω und r_0 ergibt, daß

$$c^3 q^{1/3} \cdot \frac{F^{7/3}(c)}{F_1^2(c)} = \frac{H^{7/3} C}{K^2}$$

konstant bleiben muß. Wird nach einer bestimmten Zeit die Dichte q in $\frac{q}{\lambda^3}$ vergrößert, wo $\lambda < 1$ als Kontraktionsfaktor der mittleren linearen Dimension der Nebelmasse aufgefaßt werden kann, und geht c gleichzeitig in $c\gamma$ über, so muß nach der letzten Bedingungsgleichung

$$\gamma^3 = \lambda \frac{F_1^2(c\gamma)}{F_1^2(c)} : \frac{F^{7/3}(c\gamma)}{F^{7/3}(c)}.$$

Der Faktor von λ ist wenig von der Einheit verschieden und ändert sich nur sehr langsam mit γ, so daß man in erster Näherung $\gamma = \sqrt[3]{\lambda}$ annnehmen kann. Es ist daher auch $\gamma < 1$, das heißt, eine lineare Kontraktion λ verkleinert auch das c der begrenzenden Niveaufläche auf $c\sqrt[3]{\lambda}$. Eine genauere Ermittlung von γ kann an diesem Resultat wesentlich nichts ändern. Denn setzt man etwa

$$\frac{1}{\gamma^3} = 1 + \varepsilon$$

so ist näherungsweise

$$\frac{F(c\gamma)}{F(c)} = 1 + \frac{8}{27} \cdot \frac{\varepsilon}{c^3}, \quad \frac{F_1(c\gamma)}{F_1(c)} = 1 + \frac{16}{27} \cdot \frac{\varepsilon}{c^3}$$

und der Faktor von

$$\lambda : 1 + \frac{40}{81} \frac{\varepsilon}{c^3}, \quad \text{daher}$$

$$\gamma = \sqrt[3]{\lambda} \left(1 + \frac{40}{243} \frac{\varepsilon}{c^3}\right),$$

so daß die Abnahme von c etwas weniger rasch vor sich geht, als die Proportionalität mit $\sqrt[3]{\lambda}$ angibt. Da γ nahezu gleich $1 + \frac{40}{243} \frac{\varepsilon}{c^3} - \frac{\varepsilon}{3}$ ist, so bleibt jedenfalls $\gamma < 1$ bestehen. Da nun der ursprünglichen geschlossenen Niveaufläche ein $c > 1$ entspricht, so nähert sich mit zunehmender Kontraktion die Oberfläche der Nebelmasse immer mehr und mehr jener Grenzfläche $c = 1$, für die die Attraktion im Äquator gerade durch die Zentrifugalkraft kompensiert wird.

Was die Änderung der beiden übrigen Parameter ω und r_0 anbelangt, so führt ihre Abhängigkeit von λ zu folgendem Resultat.

Aus

$$\frac{H}{C} = \frac{q}{\omega^2 c^3} F(c)$$

folgt, wenn ω durch die Kontraktion in $\nu\omega$ übergeht, daß

$$\frac{1}{\nu^2 \lambda^3 \gamma^3} \frac{F(c\gamma)}{F(c)} = 1$$

somit nach Substitution für γ

$$\nu = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{F(c\gamma)}{F(c)}\right)^{5/3} \cdot \frac{F_1(c)}{F_1(c\gamma)} = \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - \frac{8}{81} \cdot \frac{\varepsilon}{c^3}\right),$$

das heißt: die Rotationsgeschwindigkeit vergrößert sich nahezu im Verhältnis $\frac{1}{\lambda^2}$.

Ist μ der Reduktionsfaktor für die Grenzdistanz r_0 der geschlossenen Flächen, so erhält man aus

$$\omega^2 r_0^3 = C \qquad \nu^2 \mu^3 = 1 \qquad \text{woraus}$$

$$\mu = \lambda^{\frac{4}{3}} \left(\frac{F_1(c\gamma)}{F_1(c)}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{F(c)}{F(c\gamma)}\right)^{\frac{10}{9}}$$

oder näherungsweise

$$\mu = \lambda^{\frac{4}{3}} \left(1 + \frac{16}{243} \frac{\varepsilon}{c^3}\right) \quad \text{folgt.}$$

Während sich also die linearen Ausdehnungen der Gasmasse auf das λ-fache reduzieren, ziehen sich die Dimensionen der Grenzfläche auf das $\lambda^{\frac{4}{3}}$-fache zusammen, also rascher als die ersteren: die Kontraktion bewirkt also eine beständige Annäherung dieser äußersten geschlossenen Niveaufläche an die Oberfläche der Nebelmasse.

Die einzelnen Dimensionen der letzteren ändern sich natürlich nicht streng im Verhältnis λ, wenn man immer das sofortige Annehmen der der neuen Dichte entsprechenden Gleichgewichtsfigur voraussetzt.

Ist ρ der Reduktionsfaktor für den Radiusvektor

$$r = \frac{2 r_0}{3 c} f(\vartheta, c),$$

so ergibt sich aus dieser Gleichung

$$\rho = \lambda \left(\frac{F(c)}{F(c\gamma)}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{f(\vartheta, c\gamma)}{f(\vartheta, c)}$$

oder näherungsweise

$$\rho = \lambda \left[1 - \frac{8}{81} \frac{\varepsilon}{c^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta\right)\right].$$

Die Äquatorachse R_0 reduziert sich also auf den Betrag $\lambda R_0 \left(1 + \frac{4}{81} \frac{\varepsilon}{c^3}\right)$, die Polarachse R_1 auf $\lambda R_1 \left(1 - \frac{8}{81} \frac{\varepsilon}{c^3}\right)$. Wie man sieht, wird die Abplattung größer.

Der ursprüngliche Wert

$$\frac{R_0 - R_1}{R_0} = \frac{2^2}{3^3} \frac{1}{c^3} \left(1 + \frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{1}{c^3} + \dots\right)$$

geht nach der Kontraktion über in

$$\frac{R_0 - R_1}{R_0} + \frac{2^2}{3^3} \cdot \frac{R_1}{R_0} \cdot \frac{\varepsilon}{c^3} + \ldots$$

Solange nun $c > 1$, demnach $R_0 < r_0$ ist, vollzieht sich die Kontraktion der Nebelmasse ohne Änderung ihres Zusammenhanges. Schließlich wird, gemäß den gegebenen Proportionen der Änderungen der Parameter, für die Oberfläche jene Grenzfläche $c = 1$ erreicht werden, deren Äquatorachse $R_0 = r_0$ bis zu jenem singulären Punkt reicht, in welchem sich die Anziehung der zentralen Verdichtung und die Fliehkraft das Gleichgewicht halten. Um die Größenordnung der zur Erreichung dieses Zustandes nötigen Kontraktion zu erhalten, hat man hier $\gamma = \frac{1}{c}$ zu setzen, daher mit genügender Annäherung zu ihrer Bestimmung $\lambda = \frac{1}{c^3}$.

Mit derselben Genauigkeit kann hier für die Masse der Nebelhülle

$$m = \frac{4\pi}{3} \cdot q \left(\frac{2r_0}{3c}\right)^3$$

gesetzt werden, woraus mit Berücksichtigung von $r_0^3 \omega^2 = k^2 M$ folgt

$$\lambda = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{m}{q} \frac{\omega^2}{M}.$$

Versteht man unter R einen mittleren Radius der ursprünglichen Nebelmasse, so daß $\frac{m}{q} = \frac{4\pi}{3} R^3$ ist, so wird

$$\lambda = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \frac{\omega^2 R}{\frac{k^2 M}{R^2}},$$

das heißt, die zur Erreichung jener Grenzfigur nötige lineare Kontraktion ist ihrer Größenordnung nach bestimmt durch das Verhältnis der Fliehkraft im Äquator zur Anziehung der zentralen Verdichtung auf der ursprünglichen Begrenzungsfläche.

Bei einer weiteren Kontraktion, welche die physischen Dimensionen auf das λ-fache verringert, werden die Dimensionen der äußersten geschlossenen Niveaufläche auf das $\lambda^{\frac{4}{3}}$-fache reduziert, sie fällt also innerhalb der physischen Oberfläche, die außerhalb liegende Schichte wird sich längs einer um den Äquator offenen Niveaufläche auszubreiten suchen, das heißt also: in der Äquatorebene abströmen.

Dieses Abströmen wird nun allerdings nur bis auf relativ kleine Distanz über r_0 stattfinden: die Niveauflächen setzen die allen Massenteilchen gemeinsame Rotationsgeschwindigkeit voraus; bei der hier erfolgenden starken Zerstreuung der Materie ist kaum anzunehmen, daß die Rotationsgeschwindigkeit erhalten bleibt, die lineare Geschwindigkeit also proportional der wachsenden Distanz zunimmt. Die abströmenden Gasmoleküle werden vielmehr schon in unmittelbarer Nähe der Distanz r_0 selbständige Bahnen zu beschreiben beginnen und das um so eher, als — wie eine spätere Überlegung zeigen wird — die innere Reibung bei dem ganzen Prozeß kaum eine merkliche Rolle spielen kann. Da nun für die Äquatorpunkte die Relation $\omega^2 r_0^3 = k^2 M$ besteht, so ist für die aus der Umgebung des Äquators abströmenden Teilchen die Bedingung einer Kreisbahn nahezu erfüllt.

Der Abtrennungsprozeß der Äquatorteilchen wird also in der Weise stattfinden, daß diese in der Äquatorebene abgelagert werden mit der ihrer Distanzen entsprechenden Kreisgeschwindigkeiten, so daß die abgelöste Materie eine flache Scheibe bilden wird, deren Umlaufsgeschwindigkeiten von ihrer Distanz a vom Zentrum des Nebels nach der Relation $\omega^2 a^3 = k^2 M$ abhängen.

Die aus höheren Breiten längs der Niveaufläche $c = 1$ gegen den Äquator ableitenden Teilchen haben eine kleinere lineare Geschwindigkeit, dringen also in der Äquatorebene in mehr oder weniger exzentrischen elliptischen Bahnen wieder in das Innere der Nebelmasse.

Der ganze Prozeß würde auf diese Weise ein kontinuierlicher sein und insbesondere keinen Anlaß zur Bildung isolierter ringartiger Abtrennungsfiguren geben.

3. Ringbildung.

a) Innere Ringe.

Die Bildung innerer Ringe, auf deren Möglichkeit zuerst Roche aufmerksam gemacht hat, beruht auf dem Umstand, daß die aus höheren Breiten abströmenden Teilchen der äußersten Nebelschichte wieder, wie eben erwähnt, in das Innere der Nebelmasse eindringen.

Die Geschwindigkeit eines aus der Poldistanz ϑ in die Äquatorebene gelangenden Teilchens ist

$$g = \omega r \sin\vartheta = 2\,\omega\, r_0 \sin\frac{\vartheta}{3},$$

wird also in dieser um M als Brennpunkt eine Ellipse beschreiben, deren Apheldistanz r_0 ist und der eine Aphelgeschwindigkeit g entspricht. Ist g_0 die Geschwindigkeit eines Äquatorpunktes vermöge der gemeinsamen Rotation, so ist

$$g_0 = \omega\, r_0 = k\sqrt{\frac{M}{r_0}} \quad \text{und} \quad g = 2\, g_0 \sin\frac{\vartheta}{3}.$$

Für die Halbachse a und die Exzentrizität ε der elliptischen Bahn findet man aus

$$a(1+\varepsilon) = r_0 \quad \text{und} \quad \frac{k^2 M}{a}\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = 4\, g_0^2 \sin^2\frac{\vartheta}{3}$$

$$\varepsilon = 1 - 4\sin^2\frac{\vartheta}{3} \qquad a = \frac{1}{2}\cdot\frac{r_0}{1-2\sin^2\frac{\vartheta}{3}},$$

die Periheldistanz

$$q = \frac{2\, r_0 \sin^2\frac{\vartheta}{3}}{1-2\sin^2\frac{\vartheta}{3}}$$

und den Parameter

$$p = 4\, r_0 \sin^2\frac{\vartheta}{3}.$$

Die Geschwindigkeitskomponente im Radiusvektor

$$\frac{dr}{dt} = k^2 M \frac{\varepsilon \sin v}{\sqrt{p}} = g_0 \frac{1-4\sin^2\frac{\vartheta}{3}}{2\sin\frac{\vartheta}{3}} \sin v,$$

wo v die wahre Anomalie des Partikels in der elliptischen Bahn bedeutet.

Da der Schnittpunkt zweier zum selben ϑ gehörigen Bahnen gleichen, entgegengesetzten Anomalien entspricht, so wird der Totaleffekt des Durchkreuzens aller dieser elliptischen Bahnen im Durchschnitt das Nullwerden dieser Radialkomponente nach sich ziehen; im selben Sinn wirkt auch ein möglicherweise merklicher Widerstand der rotierenden Hauptmasse. Es werden also schließlich nur Geschwindigkeiten senkrecht zum Radiusvektor erhalten bleiben können, also Kreisströme resultieren (die Roche'schen »inneren Ringe«).

Die Winkelgeschwindigkeit in der ursprünglich elliptischen Bahn ist gegeben durch

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{Mp}}{r^2} = \frac{\omega}{8\sin^3\frac{\vartheta}{3}}\left[1+\left(1-4\sin^2\frac{\vartheta}{3}\right)\cos v\right]^2 = \frac{2\,\omega\sin\frac{\vartheta}{3}\cdot r_0^2}{r^2}$$

also im Perihel

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 = \frac{\omega}{2\sin^3\frac{\vartheta}{3}}\left(1-2\sin^2\frac{\vartheta}{3}\right)^2,$$

daher

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 \gtreqless \omega .$$

Die Distanz vom Zentrum, in welcher sich die resultierenden Kreisströme bewegen werden, hängt lediglich davon ab, einen wie großen Widerstand man der rotierenden Hauptmasse zuschreiben will. Ist dieser als unendlich klein zu veranschlagen, so werden nach Vernichtung der Radialkomponenten nur jene Bahnen von dauerndem Bestand sein, die die Bedingung der Kreisbewegung um ein Attraktionszentrum erfüllen, für welche als die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{M}}{r^{3/2}},$$

das ist aber nach dem Flächensatz für $r = p$ erfüllt.

Übt also die rotierende Gasmasse keinen merklichen Widerstand aus, so werden sich die aus der Poldistanz ϑ abströmenden Teilchen zu einem inneren Ring vom Radius $4\,r_0\,\sin^2\frac{\vartheta}{3}$ vereinigen, mit einer der Kreisbahn entsprechenden Rotationsgeschwindigkeit, die demnach größer ist als die gemeinsame Rotation der Hauptmasse, nämlich

$$\frac{\omega}{8\sin^3\frac{\vartheta}{3}}.$$

Setzt man hingegen einen erheblichen Widerstand der Gasmasse voraus, so werden die günstigsten Bedingungen für die Umwandlung in einen Kreisstrom dort sein, wo $\frac{dv}{dt} = \omega$ ist, nach der obigen Relation also in einer Distanz

$$r_0\sqrt{2\sin\frac{\vartheta}{3}},$$

die demnach größer ist, als der demselben ϑ entsprechende Ringradius bei vernachlässigbarem Widerstand.

Es entsprechen also jedem Breitenkreise ϑ der abströmenden Schichte zwei bestimmte Radien von Kreisbahnen innerhalb der Nebelmasse, je nachdem der Widerstand der letzteren als unmerklich oder als die Vorgänge beeinflußend angenommen wird, die also gegeben sind durch

$$h = 4\,r_0\sin^2\frac{\vartheta}{3} \quad \text{und} \quad h' = r_0\sqrt{2\sin\frac{\vartheta}{3}}.$$

Die Existenz dieser Kreisströme führt Roche zur Vorstellung der Bildung innerer Ringe, die das Bestehen solcher Begleitkörper erklären sollen, die sich innerhalb der Grenzdistanz r_0 bewegen, die der gegenwärtigen, also maximalen Rotationsgeschwindigkeit eines Hauptkörpers entspricht, mit anderen Worten: innerhalb der theoretischen Atmosphärengrenze des letzten Entwicklungsstadiums.

Roche setzt voraus, daß ein derartiger Kreisstrom ein Kondensationszentrum für die umgebenden Massen bildet und so Anlaß zur Bildung innerer Ringe gibt (s. »Essai....« p. 246).

Ein solcher Vorgang ist indessen kaum wahrscheinlich, da sich die Kreisströme der einen oder der anderen Art kontinuierlich über die Äpuatorebene der Nebelmasse verteilen und im allgemeinen keine irgendwie bevorzugte Kondensationsdistanz eintreten wird. Die Möglichkeit einer solchen ist aber immerhin nicht ausgeschlossen, allerdings auf eine von der Roche'schen Anschauung verschiedene Weise.

Man kann nach dem früheren annehmen, daß die Dimension der abströmenden Schichte in der Richtung des Radiusvektors diesem proportional ist, die Dicke der Schichte also gegeben ist durch

$$\varepsilon r \cos(r, n),$$

wo ε eine sehr kleine konstante Größe und $\sphericalangle(r, n)$ der Winkel zwischen dem Radius und der Flächen normalen ist. Auf dem Oberflächenelement

$$\frac{r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{\cos(r, n)}$$

liegt also ein Massenelement der Schichte, welches proportional ist der Größe

$$\varepsilon r^3 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 8\varepsilon r_0^3 \frac{\sin^3\frac{\vartheta}{3}}{\sin^2\vartheta}\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Dieses Massenelement gelangt nun durch den früher gegebenen Vorgang in die Äquatorebene im Innern der Nebelmasse, und zwar in die Distanz h und bedeckt dort das Flächenelement $hd\varphi dh$; die Dichte der eingedrungenen Materie wird demnach an dieser Stelle proportional sein der Größe

$$\frac{\varepsilon r^3 \sin\vartheta\, d\vartheta}{h\, dh}.$$

Bei der Kreisbahnbildung ohne Widerstandseffekt ist

$$h = 4 r_0 \sin^2\frac{\vartheta}{3}, \qquad h\, dh = \frac{32}{3} r_0^2 \sin^3\frac{\vartheta}{3} \cos\frac{\vartheta}{3},$$

demnach die Dichte proportional der Größe

$$D = \frac{3}{4} \cdot \frac{\varepsilon r_0}{\sin^2\vartheta \cos\frac{\vartheta}{3}}.$$

Der variable Faktor $\dfrac{1}{\sin^2\vartheta \cos\frac{\vartheta}{3}}$ fällt vom Anfangswert ∞ bis zu einem Minimum bei $\vartheta = 84° 52'$ im Betrage von $1 \cdot 145$ und wird für $\vartheta = 90°$ gleich $1 \cdot 155$. Anfangs- und Endwert sind natürlich für die Bildung der inneren Kreisströme belanglos, da die Umgebung von $\vartheta = 0$ sich mit der zentralen Verdichtung vereinigen wird, während die von $\vartheta = 90$ der sich abtrennenden Materie angehört.

Der zweite Fall, die Bildung von Kreisströmen bei merklichem Widerstand, gibt für die Dichte derselben

$$\frac{\varepsilon r^3 \sin\vartheta\, d\vartheta}{h'\, dh'},$$

wo $h' = r_0 \sqrt{2 \sin\frac{\vartheta}{3}}$ ist. Die Substitution gibt für die analoge proportionale Größe

$$D' = 24\varepsilon r_0 \frac{\sin^3\frac{\vartheta}{3}}{\sin^2\vartheta \cos\frac{\vartheta}{3}},$$

eine Größe, die mit dem Wert Null beginnt und — wie leicht einzusehen ist, bis $\vartheta = 90°$ beständig anwächst.

Man sieht, daß keine dieser Dichteverteilungen für sich Anlaß zu einer ringartigen Konzentration innerhalb der Nebelmasse bietet.

Zur besseren Übersicht der beiden Verteilungen sollen die Proportionalgrößen D und D' als Funktionen des Abstandes vom Zentrum der Nebelmasse gegeben werden.

Setzt man $\frac{h}{r_0} = \rho$, so ist für $D: \rho = 4 \sin^2 \frac{\vartheta}{3}$ und für D': $\rho = \sqrt{2 \sin \frac{\vartheta}{3}}$; so wird dann

$$D = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\rho \left(1 - \frac{\rho}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{\rho}{4}\right)^{1/2}} \quad \text{und} \quad D' = \frac{4}{3} \frac{\rho^2}{\left(1 - \frac{\rho^4}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{\rho^4}{4}\right)^{1/2}}.$$

Man erhält daraus

ρ	D	D'
0·0	∞	0·000
0·1	4·839	0·013
0·2	2·617	0·053
0·3	1·902	0·121
0·4	1·559	0·218
0·5	1·368	0·350
0·6	1·255	0·533
0·7	1·189	0·796
0·8	1·155	1·208
0·9	1·145	2·436
1·0	1·155	3·464

Das Minimum von D 1·1448 ist bei $\rho = 0·898$.

Wie aus der Gleichung

$$\left(\frac{1 - \frac{\rho^4}{3}}{1 - \frac{\rho}{3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1 - \frac{\rho^4}{4}}{1 - \frac{\rho}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3\rho^3$$

hervorgeht, sind die Dichten in beiden Fällen für die Distanz $\rho = 0·79$ dieselben.

Nun folgt aber aus den bisherigen quantitativen Beziehungen der bemerkenswerte Umstand, daß eine Verschiedenheit des physikalischen Verhaltens der Schichten der Nebelmasse Veränderungen in der Dichteverteilung der inneren Kreisströme hervorbringen, die den Charakter von ringförmigen Kondensationen haben können.

Es sei beispielsweise die zentrale Verdichtung so beschaffen, daß auftreffende Massenteilchen von ihr festgehalten, also dauernd der Nebenhülle entzogen werden, von letzterer werde aber kein merklicher Widerstand geleistet. Dann kommen für die Ringbildung nur jene Teilchen in Betracht, deren Periheldistanzen größer sind als der Äquatorhalbmesser dieses zentralen Kernes. Es sei dieser ρ_0 in Einheiten r_0; da die Periheldistanz q, die dem Breitenkreis ϑ entspricht,

$$q = \frac{2 r_0 \sin^2 \frac{\vartheta}{3}}{1 - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{3}}.$$

ist, so ist der Grenzwert ϑ_0 gegeben durch

$$\sin^2 \frac{\vartheta_0}{3} = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{1+\rho_0}$$

und die Ströme werden aus Partikeln gebildet, deren ursprüngliche Poldistanz $\vartheta > \vartheta_0$ war.

Die innerste Kreisbahn erster Art ist daher vom Radius

$$\bar{\rho} = 2 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{3} = 2 \frac{\rho_0}{1+\rho_0},$$

also bei der hier immer vorausgesetzten Kleinheit von ρ_0 in nahezu doppelter Äquatordistanz. Zieht man nun dabei den Umstand in Rechnung, daß die Dichte D dieser Kreisströme in größerer Distanz relativ gering und nur wenig variabel ist, in unmittelbarer Umgebung der Zentralmasse aber außerordentlich rasch ansteigt, bei $\bar{\rho}$ aber nahezu unvermittelt auf Null sinkt — Zusammenstöße in dieser Region $< \bar{\rho}$ lassen Tangentialgeschwindigkeiten übrig, die das Teilchen wieder aus dieser Zone bringen — so resultiert offenbar etwas außerhalb $\bar{\rho}$ eine ausgeprägte ringartige Kondensation.

(Es möge hier bemerkt werden, daß die Gesamtheit der Saturnringe diesen Verhältnissen entspricht). Es ist klar, daß analoge, wenn auch vielleicht weniger ausgeprägte Schwankungen im Verlauf der Dichte der Kreisströme eintreten werden, wenn man gewisse Zonen verschiedenen physikalischen Verhaltens der Nebelmasse annimmt, wie es auch in der Natur der Sache liegt.

Die wahrscheinlichste Annahme wird wohl die sein, daß unmittelbar nach der zentralen Verdichtung, die quantitativ die Hauptmasse nach der Laplace'schen Hypothese bildet, eine Zone merklichen Widerstandes mit der hinzukommenden Dichteverteilung D' folgt und erst in den äußeren Schichten die Bedingungen für die von der gemeinsamen Rotation unabhängigen Kreisbahnen gegeben sind.

Nimmt man, um nur dem Wesentlichen dieser Verhältnisse Rechnung zu tragen, in der Äquatordistanz ρ_1 ein sprungweises Aufhören der Widerstandsfähigkeit der Nebelhülle an, so wird die Verteilung D sicher bis zur Distanz

$$\bar{\rho}_1 = 2 \frac{\rho_1}{1+\rho_1}$$

stattfinden, weil bis zu diesem Wert $\bar{\rho}_1$ die entsprechenden ϑ Ellipsen ergeben, deren Periheldistanzen außerhalb ρ_1 liegen, das heißt: von der Oberfläche der Nebelmasse an bis zur Distanz $\bar{\rho}_1 > \rho_1$ werden ausschließlich Kreisbahnen auftreten, die der von ω unabhängigen Keppler'schen Bewegung entsprechen. Da $\vartheta = 90°$ oder $\rho = 1$ schon der sich nach Außen abtrennenden Materie angehört, so kann man annehmen, daß die Dichte dieser inneren Kreisbahnen erster Art von dem Minimalbetrag unmittelbar unter der Grenzfläche bis zur Distanz $\bar{\rho}_1$ in der in der Tabelle angegebenen Weise ansteigt.

Andrerseits ist aber klar, daß keine derartigen Kreisbahnen mehr gebildet werden können, wenn die Stelle $r = p$, an der die laterale Geschwindigkeitskomponente der Kreisbewegung entspricht, innerhalb ρ_1 liegt.

Es wird daher die Dichte D dieser Kreisbahnen innerhalb $\bar{\rho}_1$ zunächst weniger rasch zunehmen, als es bei ausschließlichem Vorkommen dieser Bahnen, wie es die Tabelle voraussetzt, der Fall sein würde — schließlich abnehmen und in ρ_1 Null werden. Es ist demnach hier wieder die Bedingung für ein Maximum, also für eine ringartige Kondensation für die von der gemeinsamen Rotation unabhängigen Kreisbahnen gegeben, und zwar an einer zwischen ρ_1 und $\bar{\rho}_1$ liegenden Stelle.

Innerhalb ρ_1 werden nur Kreisströme von der gemeinsamen Rotationsgeschwindigkeit ω auftreten, deren Dichteverlauf D' demnach bis ρ_1 den in der Tabelle gegebenen Zahlen entspricht.

Außerhalb ρ_1 wird die Dichte D' dieser Bahnen rasch auf Null sinken, also auch für diese, die bis ρ_1 anwächst, ein Maximum eintreten.

Nebenbei bemerkt wird auch D' nicht schon von der Oberfläche des zentralen Kernes von Null ansteigen, sondern erst von der Distanz $2\frac{\rho_0}{1+\rho_0}$ an, wenn ρ_0 der Äquatorhalbmesser des Kernes ist, also in einer Entfernung $\rho_0 \cdot \frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}$ von der Oberfläche des letzteren, die bei der Kleinheit von ρ_0 nahezu gleich dieser Größe ist.

Wie der tatsächliche Verlauf von D und D' zwischen ρ_1 und $\bar{\rho}_1$ stattfindet, ist ohne einer weitläufigen Wahrscheinlichkeitsbetrachtung, die außerdem auf ziemlich willkürlichen Grundlagen aufgebaut sein müßte, schwer anzugeben; das Wesentliche der gegebenen Folgerungen liegt in dem Umstand, daß für beide Arten von Kreisströmen innerhalb dieser Zone eine Maximaldichte existiert: für D' in der unmittelbaren Umgebung von ρ_1 und für D etwas innerhalb $\bar{\rho}_1 > \rho_1$. Im allgemeinen wird das innere — für D' geltende — Maximum um vieles kleiner sein als das äußere, durch D gegebene. Die Superposition beider in dieser Zone wird für die Maximumstellen, in denen die Dichte der anderen Bahnen verschwindend klein ist, bedeutungslos sein.

(Nimmt man als Grenze ρ_1 des verschiedenen Verhaltens der Nebelmasse etwa $0 \cdot 5$ an, so ist die Dichte D' im ersten Maximum durch die Zahl $0 \cdot 35$ gegeben. Dann ist $\bar{\rho}_1 = 0 \cdot 67$, in die innere Umgebung dieser Distanz fällt das zweite Maximum D, das ungefähr der Zahl $1 \cdot 3$ proportional ist, also etwa den vierfachen Betrag des ersten hat.)

Das Ringsystem des Planeten Saturn würde dem Sinn dieser Folgerungen entsprechen.

Roche denkt sich diese inneren Kreisströme, herrührend von den erkalteten Partikeln der Oberflächenschichte, von wesentlich anderer Konstitution als die Nebelhülle, etwa als Meteoritenströme in dieser.

Es muß hier noch auf einen Umstand hingewiesen werden, der für die Vorgänge bei der Bildung äußerer Ringe von Belang sein wird.

Für die außerhalb ρ_1 sich bildenden, von ω unabhängigen Kreisströme können, wie oben bemerkt, nur solche ursprünglich elliptische Bahnen in Betracht kommen, für welche der Parameter $\frac{p}{r_0} > \rho_1$, weil nur dann in der widerstandslosen Region die für eine Kreisbahn notwendige Winkelgeschwindigkeit erreicht wird. Diese Bedingung gibt als Grenze eine ursprüngliche Poldistanz ϑ_1, die bestimmt ist durch

$$\sin\frac{\vartheta_1}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{\rho_1}.$$

Alle Teilchen, deren ursprüngliche Lage $\vartheta < \vartheta_1$ war, werden zu den Kreisströmen zweiter Art innerhalb der Widerstandszone ρ_1 beitragen. Nun entspricht andrerseits nach dem Obigen die Winkelgeschwindigkeit ω in der Distanz ρ_1 einer elliptischen Bahn, die aus der Poldistanz ϑ_1' erzeugt wird, wo

$$\sin\frac{\vartheta_1'}{3} = \frac{1}{2}\rho_1^2,$$

demnach $\vartheta_1' < \vartheta_1$ ist.

Die aus der Zone zwischen ϑ_0 und ϑ_0' abströmenden Teilchen werden also die Winkelgeschwindigkeit ω in einem Punkt ihrer elliptischen Bahn erreichen, der innerhalb des Bereiches ρ_1 liegt und damit den angegebenen regulären Verlauf der Dichte D' ergeben. Die aus der Zone zwischen ϑ_1' und ϑ_1 nehmen aber insofern eine Ausnahmsstellung ein, als sie außerhalb ρ_1 eine zu geringe Winkelgeschwindigkeit haben, um eine Keppler'sche Kreisbahn in diesen widerstandslosen Außenraum auszuführen, also in den Raum ρ_1 gelangen müssen, wo sie aber schon an der Grenze ρ_1 eine größere Winkelgeschwindigkeit als ω besitzen. Ihre Aufnahme in diesen Raum und die durch den Widerstand bewirkte Umwandlung ihrer größeren Winkelgeschwindigkeit in die gemeinsame Rotationsgeschwindigkeit ω wird einerseits einen weiteren Zuwachs über dem gegen ρ_1 zu stattfindenden regulären Ansteigen der Dichte D' ergeben also ein noch ausgeprägteres Maximum bei ρ_1 bewirken, andrerseits aber auch die Tendenz haben die Rotation dieses inneren Teiles mit merklichem Widerstand zu beschleunigen, ein Umstand, der für die folgenden Betrachtungen von Bedeutung ist.

b) Äußere Ringe.

Der oben nachgewiesene Abtrennungsprozeß besteht in einer kontinuierlichen Ablagerung von Teilchen der äußersten abströmenden Schichte aus der Umgebung des Äquators in der jeweiligen Distanz r_0 und mit einer Rotationsgeschwindigkeit, die die Bedingung einer Kreisbahn erfüllt, so daß in der Äquatorebene ein flacher Ring zurückbleibt, in welchem die Rotationsgeschwindigkeiten ω in den Distanzen r_0 nach dem Gesetze $\omega^2 r_0^3 = k^2 M$ verteilt sind, der sich also stetig bis an die jeweilige Oberfläche der Nebelmasse fortsetzt. Eine Abtrennung im eigentlichen Sinne, die Bildung isolierter ringförmiger Begleitmassen, findet nach dem Bisherigen demnach nicht statt. Es wurde dabei eine durch die Abkühlung bedingte gleichmäßige und gleichzeitige Kontraktion der ganzen Nebelmasse vorausgesetzt und gezeigt, daß einer linearen Kontraktion λ der physischen Dimensionen der Masse eine Reduktion $\lambda^{\frac{4}{3}}$ der Dimensionen der theoretischen Atmosphärengrenze entspricht, woraus das kontinuierliche Abströmen der äußersten Schichte gefolgert werden konnte. Tatsächlich wird nun eine solche gleichmäßige Kontraktion nicht stattfinden können, sondern als primärer Prozeß bei den Oberflächenschichten beginnen. Es kann gezeigt werden, daß dadurch ein intermittierender Abtrennungsvorgang, also die Bildung isolierter Ringe eingeleitet wird, und daß die stärkere Verkleinerung der theoretischen Grenfläche gegenüber der der physischen Oberfläche nur das durchschnittliche Verhalten dieser beiden Änderungen anzeigen kann.

Der Grund dieses Alternierens liegt in der Wirkungsweise zweier einfacher extremer Fälle.

Angenommen, eine Kontraktion erstrecke sich nur über eine Oberflächenschichte von der relativ geringen Dicke δ, deren Masse also proportional der Größe

$$q\,[(R+\delta)^3 - R^3],$$

wo q die Dichte und R ein mittlerer Radius ist.

Bei der Kontraktion bleibt — mit genügender Näherung —

$$q\,\frac{\delta}{R}\left(1+\frac{\delta}{R}\right)$$

unverändert. Die Masse μ der Schichte ist proportional ($\sim$)

$$\mu \sim q\,R^3\,\frac{\delta}{R}\left(1+\frac{\delta}{R}\right).$$

Mit der gleichen Näherung ist das Trägheitsmoment j der Schichte

$$j \sim q\,R^5\,\frac{\delta}{R}\left(1+2\,\frac{\delta}{R}\right) \quad \text{oder}$$

$$j \sim \mu\,R^2\left(1+\frac{\delta}{R}\right).$$

Wenn man nun auch voraussetzt, daß die durch oberflächliche Kontraktion bedingte Beschleunigung sich zunächst nur auf diese Schichte bezieht, also größer ist als nach Übertragung auf die ganze Masse, so ändert sich diese so, daß ωj konstant bleibt. Es werde also δ in $\lambda\,\delta$ verändert, dann wird wegen $\omega\,\mu\,R^2\left(1+\frac{\delta}{R}\right) = \text{Const.}$ aus ω: $\omega\left[1+(1-\lambda)\,\frac{\delta}{R}\right]$ und wegen $\omega^2 r_0^3 = \text{Const.}$ die Dimensionen der Grenzfläche in das $1-\frac{2}{3}(1-\lambda)\frac{\delta}{R}$ fache verwandelt, während der Reduktionsfaktor der physischen Dimensionen $1-(1-\lambda)\frac{\delta}{R}$, also kleiner ist: im Falle einer bloß oberflächlichen Kontraktion bleibt die Verkleinerung der Grenzfläche hinter der der physischen Oberfläche zurück, es findet demnach kein Abströmen statt.

Nimmt man andrerseits an, die Kontraktion erstrecke sich nur auf den zentralen Kern M, dessen mittlerer Radius h_0 sehr klein gegen r_0 ist. Die Verkleinerung der äußeren Dimensionen der Nebelhülle ergibt sich aus der Bedingung, daß $r_0^3-h_0^3$ konstant bleibt. Wird h_0 in λh_0 geändert, so geht die Äquatordimensionen r_0 auf einen Betrag

$$R_0=r_0\left(1-\frac{1-\gamma^3}{3}\cdot\frac{h_0^3}{r_0^3}\right)$$

zurück, also um eine Größe, die numerisch höher ist als dritter Ordnung in $\frac{h_0}{r_0}$. Es wird also zunächst überhaupt keine merkliche Änderung in den Verhältnissen der Oberfläche der Nebelhülle eintreten, nur ein Zurückweichen von der theoretischen Grenze um einen außerordentlich kleinen Betrag. Letztere bleibt ja konstant, so lange die Rotation der äußeren Schichten nicht geändert wird. Die Kontraktion des Kernes erteilt diesem eine vergrößerte Rotationsgeschwindigkeit, die nach und nach auch den äußeren Schichten eine Beschleunigung erteilen wird, so daß schließlich auch die Grenzfläche sich zusammenzieht. Man kann nun sofort erkennen, daß diese Reduktion niedriger Ordnung, also ungleich größer ist, als die der physischen Dimensionen, so daß also nach dem Ausgleich der Rotationsgeschwindigkeiten ein Abströmen der äußeren Schichte eintreten wird.

Man kann für das Trägheitsmoment J annehmen

$$J\sim h_0^2 M+r_0^2 m$$

wo m wieder die Masse der Nebelhülle ist. Nach der zentralen Kontraktion ist

$$J'\sim\lambda^2 h_0^2 M+R_0^2 m$$

woraus für die geänderte gemeinsame Rotationsgeschwindigkeit ω' folgt

$$\frac{\omega}{\omega'}=1-\frac{1-\lambda^2+\frac{2}{3}(1-\lambda^3)\frac{h_0}{r_0}\cdot\frac{m}{M}}{1+\frac{r_0^2}{h_0^2}\cdot\frac{m}{M}}.$$

Da der zweite Teil des Zählers viel höherer Ordnung ist, so genügt es zur Beurteilung der Größenordnung der Änderung von ω zu setzen:

$$\frac{\omega}{\omega'}=1-\frac{1-\lambda^2}{1+\frac{r_0^2}{h_0^2}\cdot\frac{m}{M}}.$$

Die geänderte Grenzdimension r_0' erhält man aus

$$\left(\frac{r_0'}{r_0}\right)^3=\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2$$

$$\frac{r_0'}{r_0}=1-\frac{2}{3}\frac{1-\lambda^2}{1+\frac{r_0^2}{h_0^2}\cdot\frac{m}{M}}.$$

Während also die physischen Äquatordimension um den unmerklichen Betrag

$$\frac{1}{3}(1-\lambda^3)\frac{h_0^3}{r_0^3}\cdot r_0$$

zurückgeht, verkürzt sich die Distanz des Äquatorpunktes der Atmosphärengrenze um die Größe

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\lambda^2}{1+\frac{r_0^2}{h_0^2}\cdot\frac{m}{M}}r_0$$

die offenbar niedrigerer Ordnung ist, als die vorige, wie immer man auch die Größenordnung von $\frac{m}{M}$ gegen $\frac{h_0}{r_0}$ veranschlagen will.

Es ist jedenfalls

$$2\frac{1-\lambda^2}{1+\frac{r_0^2}{h_0^2}\cdot\frac{m}{M}} > (1-\lambda^3)\frac{h_0^3}{r_0^3}$$

oder

$$\frac{2}{1+\frac{\lambda^2}{1+\lambda}} > \frac{h_0}{r_0}\cdot\frac{m}{M}+\frac{h_0^3}{r_0^3}$$

woraus hervorgeht, daß die Verkleinerung der physischen Dimensionen mindestens als eine kleine Größe zweiter Ordnung gegen die der Atmosphärengrenze anzunehmen ist. Während also eine oberflächliche Kontraktion ein momentanes Zurückweichen der Oberfläche der Nebelhülle vor der Grenzfläche zur Folge hat, wird eine zentrale Kontraktion zunächst keine merkliche Änderung an der Nebelhülle hervorrufen, nach einer gewissen Zeit aber, die durch die Wirkungsweise der inneren Reibung gegeben ist, ein Eindringen der Grenzfläche in die Nebelmasse und somit ein Abströmen der äußeren Schichte veranlassen.

Es kann gezeigt werden, daß diese beiden entgegengesetzten Folgen einen gewissen Rythmus in die äußere äquatoriale Ablagerung der Nebelmasse und damit die Möglichkeit einer Ringbildung bringen.

Es soll hier nur nebenbei bemerkt werden, daß die Annahme einer bis an die äußersten Schichten wirksamen inneren Reibung in keinem Widerspruch steht mit der einer merklich widerstandlosen äußeren Zone, die sich ja auf den Grad der Wirkung auf stark kondensierte Partikel der äußersten Schichte bezieht.

Unmittelbar nach dem Abströmen einer Oberflächenschichte ist die nun freigewordene Oberfläche identisch mit der momentanen Grenzfläche. Kennzeichnet man wieder, wie oben, die physische Oberfläche durch ihre Äquatordimension R_0, die theoretische Atmosphärengrenze durch die analoge Größe r_0, so ist in diesem Moment $R_0 = r_0$.

Das Freiwerden dieser neuen Oberfläche wird nun für die benachbarten Schichten eine unvermittelt raschere Wärmeausstrahlung und Kondensation zur Folge haben, demnach den oben erwähnten ersten Fall statuieren, in welchem R_0 rascher abnimmt als r_0; es wird also unmittelbar darauf $R_0 < r_0$, der Abströmungsprozeß also unterbrochen. Da — wie in 2. gezeigt wurde — bei gleichmäßiger Kondensation der ganzen Masse $R_0 > r_0$ bleibt, so wird beim Fortschreiten der Kondensation nach dem Innern sich dieses Verhältnis wieder einstellen, daher die Abströmung von Neuem beginnen, allerdings verzögert durch die fortgesetzte stärkere Kondensation der äußersten Schichten. Andrerseits bewirkt aber die Bildung der inneren Ströme offenbar eine Beschleunigung des Wiedereintretens der Abströmung, weil durch diese eine Vergrößerung der Rotationsgeschwindigkeit von den zentralen

Regionen aus besorgt wird. Durchschnittlich erzeugen ja die primären elliptischen Bahnen überhaupt eine Verzögerung in den äußeren und eine Beschleunigung in den inneren Schichten, bei Voraussetzung einer widerstandslosen äußeren Zone mindestens keine Beschleunigung in dieser; die dort entstehenden Kreisströme sind ja ohne merklichen Einfluß auf die Rotation der Nebelmasse. Die inneren widerstandsfähigen Zonen und insbesondere die zentrale Verdichtung erfahren aber jedenfalls — wie oben bemerkt wurde — eine Rotationsbeschleunigung. Es ist fraglich, ob — wie Poincaré anzunehmen scheint — eine Beschleunigung als sekundäre Wirkung dadurch eintritt, daß die abgeströmten Oberflächenteilchen niedrigerer Temperatur in den zentralen Teil eine Kondensation und Vergrößerung der Geschwindigkeit der Rotation hervorrufen, weil dieser Vorgang wohl durch ihren eigenen Geschwindigkeitsverlust und Wärmegewinn ganz kompensiert werden kann. Jedenfalls findet durch das Auftreten der inneren Ströme eine Beschleunigung der Rotation der zentralen Teile ohne merkliche Abnahme der äußeren Dimensionen der Nebelhülle statt, also der eben diskutierte zweite Fall, bei dem die schließliche Übertragung der entsprechenden Beschleunigung auf die Oberflächenpartien ein plötzliches Sinken der Grenzfläche unter die physische Oberfläche bewirkt. Es wird demnach die wieder eintretende, den Durchschnittsverhältnissen entsprechende Umgleichung $R_0 > r_0$ verstärkt.

Einer Unterbrechung der Abströmung folgt also eine gesteigerte Wiederaufnahme des äquatorealen Abtrennungsprozesses, womit die Bildung äußerer isolierter Nebelringe als eine durchaus natürliche Folge der Kondensationsvorgänge erscheint.

Der hier entwickelte alternierende Abtrennungsprozeß, der im Großen und Ganzen den Anschauungen von E. Roche über die Bildung äußerer Ringe entspricht, beruht, wie man sieht, wesentlich auf der Laplace'schen Annahme, daß die ursprüngliche Materie aus zwei, ihrem physikalischen Verhalten nach ganz verschiedenen Teilen besteht: einem zentralen Teil von überwiegender Masse und großer Dichte und einer Nebelhülle, deren Masse und Widerstandsfähigkeit dagegen als unendlich klein anzunehmen ist. Dabei ist aber nicht zu übersehen, daß die ganze Überlegung eigentlich nur zeigt, daß aus diesen gegebenen Ausgangsverhältnissen die Möglichkeit eines derartigen intermittierenden Ablösungsvorganges gefolgert werden kann. Immerhin ist es von vornherein ebensogut denkbar, daß die beiden Momente, die diese Periodizität bedingen: oberflächliche Abkühlung und Akzeleration von den zentraleren Gegenden aus, sich zu einer simultanen Resultanten zusammensetzen und so eine Art stationären Prozesses erzeugen, der dann natürlich auf den Durchschnittseffekt des ständigen Abströmens hinauskommen muß. Das eine ist aber klar, daß, falls ein solcher stationärer Zustand eingetreten ist, jede Störung in einem dieser Vorgänge ein derartiges Alternieren im Zurückgehen der physischen Oberfläche und der Grenzfläche einleiten muß, so daß dieser stationäre Abströmungszustand wohl kaum als ein stabiler zu betrachten sein wird. Nun ist der Beginn des Abtrennungsprozesses sicher mit einem Nacheinander der beiden entgegengesetzten Effekte verbunden.

Das ursprüngliche Annähern der Oberfläche des Nebels an die Grenzform ist ein stetiger Prozeß, der nach erfolgter Koinzidenz der beiden das erste Abströmen zur Folge hat. Unmittelbar darauf tritt die Unterbrechung ein, die erst wieder nach Übergreifen dieser Kondensation auf die zentralen Gebiete oder durch die viel spätere indirekte Winkung der inneren Ströme aufgehoben wird. Es ist also wohl anzunehmen, daß sich die Bedingung für den alternierenden Vorgang schon anfänglich eingestellt haben wird.

Der Prozeß der aufeinanderfolgenden Ringbildungen wird dann überhaupt ein Ende nehmen, wenn die dem Ausgangsstadium der Laplace'schen Hypothese entsprechenden räumlichen quantitativen und physikalischen Verhältnisse nicht mehr stattfinden. Es liegt nahe, zu vermuten, daß sich nach starker Verminderung der Nebelhülle und Vergrößerung der zentralen Verdichtung schließlich der stationäre Abströmungszustand einstellt, bis diese endlich jene Serie von Formen annimmt, für welche die homogene rotierende Flüssigkeitsmasse ein annäherndes Bild gibt.

4. Allgemeine Bedingung für äquatoriale Abströmungen.

Das wesentliche aller jener Kosmogonien, die dem Typus der Nebularhypothesen angehören, besteht naturgemäß in der Annahme eines Ausgangszustandes, der sowohl in der Verteilung der Materie als auch bezüglich der ursprünglichen Bewegungsverhältnisse den geringsten Grad von Differentierung enthält, also eines Zustandes, der möglichst weit von dem eines gegliederten kosmischen Systems entfernt ist, ohne daß — zunächst wenigstens — die anderen, rein physikalischen Seiten dieser Annahme in Erwägung gezogen werden. So wäre der homogene, gleichförmig rotierende Gasball jener Urzustand, der im weitesten Sinne der Idee der Nebularhypothesen entsprechen würde. Laplace mußte diese einfachste Annahme eines primären Zustandes ablehnen, da nach dem damaligen Stand der Kenntnisse über homogene Gleichgewichtsfiguren ein solcher zu keiner Systembildung führen konnte. Die auf Laplace und Jakobi folgenden Untersuchungen von Poincaré und Darwin haben diese Anschauungen gründlich geändert und völlig neue Gesichtspunkte für die Erörterung dieser Fragen geschaffen. Wie eingangs erwähnt, führen diese Untersuchungen zu Abtrennungsformen, deren Massenverhältnisse im allgemeinen in unserem Sonnensystem nicht realisiert sind. Die Annahme Laplace's, die als die einfachste ursprüngliche Massenverteilung gelten konnte, bei der Abtrennungsvorgänge möglich sind, bleibt demnach für unser Sonnensystem als die wahrscheinlichste und vom Standpunkt der Nebularhypothesen am meisten gerechtfertigte bestehen. Das charakteristische dieser Hypothese, die Möglichkeit ringartiger Abtrennungen und damit die Anfangsbedingungen einer Systembildung zu geben, ist eine Folge der angenommenen extremen Massenverteilung und der vorausgesetzten gleichförmigen Rotation.

Das ganz andere Verhalten homogener Massen, wie es die Untersuchungen von Poincaré und Darwin zeigen, legt die Frage nahe, worin eigentlich die wesentlichen Momente für die Möglichkeit äquatorialer Ringbildungen liegen und innerhalb welcher Grenzen Abweichungen von der Laplace'schen Annahme dieser Möglichkeit bestehen lassen. Es ist ja immerhin denkbar, daß physikalische Erwägungen eine Modifikation der Anfangsbedingungen notwendig erscheinen lassen. So hat die Annahme einer durchaus gleichförmigen Rotation a priori gewiß dieselbe Berechtigung, wie alle derartigen einfachsten Annahmen bei diesem Typus kosmogonischer Hypothesen; zieht man andrerseits die enorme Länge jener Zeiträume in Betracht, die notwendig sind, um selbst bei bedeutender innerer Reibung Geschwindigkeiten in Gasmassen auszugleichen, so scheint es keineswegs eine müssige Frage zu sein, unter welchen Bedingungen auch eine nicht gleichmäßige Rotationsgeschwindigkeit einen derartigen Abtrennungsprozeß noch ermöglicht.

Poincaré hat über diesen Punkt in dem oben erwähnten Werk: »Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques« Andeutungen gegeben, dier hier in etwas allgemeinerer Weise zur Ausführung gelangen sollen.

Es sei $V(x,y,z)$ das Gravitationspotential der kosmischen Masse, $\omega(x,y,z)$ die Rotationsgeschwindigkeit eines Punktes x, y, z derselben. Es soll dabei nichts weiter vorausgesetzt werden, als daß die Rotationen um eine gemeinsame Achse erfolgen, daß der Körper ein Rotationskörper und die Äquatorebene eine Symmetrieebene ist. Setzt man die innere Reibung als unmerklich voraus, was für die äußeren Schichten und daher für die Bestimmung der Oberfläche erlaubt sein wird, ist p der Druck und q die Dichte, ferner

$$\Pi = \int \frac{dp}{q}$$

so lauten die hydrostatischen Gleichungen, wenn die gemeinsame Rotationsachse als z-Achse gewählt wird:

$$\frac{\partial (V - \Pi)}{\partial x} + \omega^2 x = 0$$

$$\frac{\partial (V - \Pi)}{\partial y} + \omega^2 y = 0$$

$$\frac{\partial (V - \Pi)}{\partial z} = 0 .$$

Daraus ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung

$$\omega^2 R dR = d(\Pi - V)$$

wo $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, der Abstand von der Rotationsachse, ist.

Da rechts ein vollständiges Differential steht, so muß ω eine bloße Funktion von R sein. Führt man statt dieser eine Funktion $\varphi(R)$ von R ein durch die Definitionsgleichung

$$\omega^2 R = \frac{d\varphi}{dR},$$

so ist die Gleichung der Oberfläche dann gegeben durch

$$V(x, y, z) + \varphi(R) = C.$$

Die Gleichung der Meridiankurve wird, wenn man für $y = 0$ die Funktionsbezeichnung beibehält,

$$U(x, z) = V(x, z) + \varphi(x) = C.$$

Vorausgesetzt, daß überhaupt eine Gleichgewichtsfigur möglich ist, muß für einen gewissen Bereich der willkürlichen Konstanten C eine Schar geschlossener Zweige dieser Kurven existieren. Soll nun die Möglichkeit einer Abströmung bestehen, so muß sich geometrisch das so äußern, daß der geschlossene Zweig sich für einen bestimmten Wert der Konstanten C mit einem der nicht geschlossenen in einem mehrfachen Punkt vereinigt und über diesen Wert hinaus dann dafür ein einziger nicht geschlossener Kurvenzug besteht. Notwendige Bedingung ist also die Existenz eines reellen singulären Punktes, der — so wie der zugehörige Wert der Konstanten — aus den Gleichungen

$$U(x, z) = C, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

folgt. Das Nullwerden der z-Komponente $\frac{\partial U}{\partial z}$ findet gemäß der vorausgesetzten Symmetrie in der Äquatorachse, also für $z = 0$, statt; das Verschwinden der x-Komponente $\frac{\partial U}{\partial x}$ bedeutet aber, daß sich an dieser Stelle Attraktion und Fliehkraft das Gleichgewicht halten müssen. Dort wird also die Abströmung einsetzen. Diese Bedingung kann auch so formuliert werden: faßt man die Konstante C gemäß der Gleichung $C = U(x, 0)$ als Funktion des Schnittpunktes der Kurve mit der Äquatorachse auf, so muß diese Funktion an der singulären Stelle einen stationären Wert haben.

Die letzten Gleichungen genügen aber nicht zum Bestehen der geforderten Verhältnisse, da sie nur die Bedingung für einen singulären Punkt geben; es sollen sich hier zwei reelle Kurvenzweige kreuzen und für diesen Fall muß die Diskriminante

$$D = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial z}\right)^2$$

negativ sein.

Nun ist $\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z}$, die z-Komponente der Attraktion, Null für alle Punkte der Äquatorachse, also

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial z} = 0.$$

Dieselbe Komponente wird von dieser Achse an für positive z negativ und umgekehrt, das heißt, es ist

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_{z=0} < 0.$$

Es muß demnach $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ positiv sein, das heißt also $U(x, 0)$ an der singulären Stelle im Minimum haben. Faßt man wieder C als Funktion des Äquatorpunktes auf, so erhält man den Satz:

Notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit äquatorialer Abströmungen ist die, daß die Konstante der Niveauflächen als Funktion des Äquatorschnittpunktes ein Minimum besitzt.[1]

Es läßt sich daraus eine Grenze für die Art der Geschwindigkeitsverteilung angeben, innerhalb welcher eine Systembildung in der Art der Laplace'chen Hypothese möglich ist. Sind wieder V und φ die obigen Funktionen für $y = 0$ und $z = 0$, so muß für jene Werte, die der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

genügen, die Umgleichung bestehen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} > 0$$

oder für

$$\omega^2 x + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad \text{muß} \qquad \omega^2 + 2\,\omega\, x \frac{d\omega}{dx} + \frac{d^2 V}{dx^2} > 0 \quad \text{sein.}$$

Eliminiert man durch die Gleichung einen in V auftretenden Parameter des Problems, so ergibt die Ungleichung eine allgemeine für die betreffende Gattung der Gleichgewichtsfiguren geltende Grenze der Geschwindigkeitserteilung. Für den Fall der Laplace'schen Hypothese ist

$$V = \frac{k^2 M}{x}, \text{ demnach } \omega^2 x^3 = k^2 M \text{ und}$$

$$3\,\omega^2 + 2\,\omega\, x \frac{d\omega}{dx} \quad \text{oder}$$

$$\frac{d(\omega^2 x^3)}{dx} > 0.$$

Die Geschwindigkeiten müssen also weniger rasch abnehmen, als der Verteilung bei isolierten Kreisbahnen entspricht.

(Es ist auch insbesonders eine Verteilung unmöglich, die der Erhaltung eines für alle Teilchen gleichen Flächenmomentes entspricht, da in diesem Falle

$$\omega x^2 = c, \text{ einer Konstanten wäre, also}$$

$$\omega^2 x^3 = \frac{c}{x} \quad \text{und} \quad \frac{d(\omega^2 x^3)}{dx} < 0).$$

---

[1] (Wurde von Poincaré für den Fall der Laplace'schen Massenverteilung a. a. O. ausgesprochen.)

5. Bildung der Planeten.

Unmittelbar nach der Bildung eines äußeren Ringes sind die in diesem stattfindenden Rotationsgeschwindigkeiten gegeben durch die Relation

$$\omega^2 r^3 = k^2 M$$

so daß also das Gefälle der Rotationsgeschwindigkeit

$$\frac{d\omega}{dr} = -\frac{3}{2}\frac{k\sqrt{M}}{r^{5/2}}$$

ist.

Die nächste Änderung in der Konstitution dieses Ringes ist eine weitere Kontraktion desselben. Eine solche hat nun eine Verminderung des Geschwindigkeitsgefälles zur Folge. Findet eine lineare Kontraktion λ um einen mittleren unverändert bleibenden Elementarring r_0 statt, so erhält durch diese irgend ein Ringradius r den Wert r' aus

$$r' - r_0 = \lambda(r - r_0) \quad \text{oder} \quad r' - r = (r_0 - r)(1 - \lambda)$$

$$\text{so daß } r' \gtrless r, \text{ je nachdem } r \lessgtr r_0.$$

Da bei Erhaltung des Flächenmomentes die entsprechende neue Rotationsgeschwindigkeit ω' der Gleichung

$$\omega' r'^2 = \omega r^2$$

genügt, so erhält man für diese

$$\omega' = \frac{k\sqrt{M}}{r'^{3/2}}\sqrt{1 + \frac{1-\lambda}{\lambda}\cdot\frac{r'-r_0}{r'}}.$$

Für die innerhalb r_0 gelegenen Partikeln ist $r' < r_0$, demnach ω' kleiner als die der Distanz r' entsprechende Kreisbahngeschwindigkeit, für die außerhalb gelegenen ist ω' größer als diese, die Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit mit der Distanz ist also durchschnittlich langsamer als bei der ursprünglichen Verteilung.

Das Geschwindigkeitsgefälle $\frac{d\omega}{dr}$ selbst wird demzufolge auch nach der Kontraktion geringer sein als zu Beginn, wenigstens innerhalb der hier vorauszusetzenden Ringdimensionen. Es ergibt sich dafür

$$\frac{d\omega'}{dr'} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{k\sqrt{M}}{r'^{5/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{1-\frac{4}{3}(1-\lambda)\frac{r_0}{r'}}{\sqrt{1-(1-\lambda)\frac{r_0}{r'}}}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{1-\frac{4}{3}(1-\lambda)\frac{r_0}{r'}}{\sqrt{1-(1-\lambda)\frac{r_0}{r'}}} < 1$$

für alle $\frac{r}{r_0} < \frac{5}{3}$, demnach $\frac{d\omega'}{dr'}$ dem absoluten Betrage nach kleiner als die ursprüngliche Abnahme $\frac{3}{2}\frac{k\sqrt{M}}{r^{5/2}}$.

Da die innere Reibung, die bei fortschreitender Kondensation merklich werden kann, den gleichen Effekt hat, so kann man annehmen, daß der weitere Prozeß durch eine Zunahme der Dichte und einen allmählichen Ausgleich der Rotationsgeschwindigkeiten bedingt wird.

Die zunächst zu behandelnde Frage wäre nun die nach der Möglichkeit des Bestehens solcher ringartiger Massenanordnungen bei gegebener Geschwindigkeitsverteilung. In dieser Allgemeinheit und insbesondere auch bei der näher kaum angebbaren Art der intermittierenden Ringablagerung ist es wohl nicht möglich, ein Stabilitätskriterium zu formulieren, das allen im weiteren Verlauf auftretenden physikalischen Verhältnissen Rechnung trägt. Alle über ringförmige Massen oder Massenanordnungen angestellten Untersuchungen setzen Verhältnisse voraus, die von den hier anzunehmenden wesentlich verschieden sind.

Für das Anfangsstadium können allerdings jene Verhältnisse als gegeben angenommen werden, die den Maxwell'schen Untersuchungen über das System der Saturnringe zugrunde gelegt sind, die diese als Meteoritenringe betrachtet, deren einzelne Teilchen selbständige Kreisbahnen ausführen. Die Stabilität dieses stationären Bewegungszustandes hängt von dem Verhältnis der Ringmasse zu der des Hauptkörpers ab, das unter einer bestimmten angebbaren Grenze liegen muß.[1]

Als eine weitere Konsequenz ergibt sich daraus für eine kontinuierliche Ringmasse eine angenähert bestimmbare obere Grenze der Dichte q, die der Bedingung genügen muß

$$4\pi k^2 q < \frac{\omega^2}{14}$$

eine Bedingung, die ja bei den Anfangsbedingungen dieser Hypothese immer erfüllt sein kann. Da bei der folgenden Kondensation die Dichte beständig zunimmt, der Mittelwert der Rotationsgeschwindigkeiten aber merklich derselbe bleibt, so wird irgend einmal die Stabilität aufhören zu bestehen und ein Zerfall des Ringkontinuums eintreten.

Es kann nun gezeigt werden, daß dieses Stadium schon früher eintreten muß, als der vollständige Ausgleich der Rotationsgeschwindigkeiten sich vollzogen, was wieder eine wesentliche Modifikation der Laplace'schen Anschauungen nach sich zieht.

Poincaré hat nämlich gezeigt, daß unter Umständen für gewisse Bereiche der Ringmasse auch eine untere Grenze der Dichte angegeben werden kann.

Unter Beibehaltung der in Nr. 4 gebrauchten Bezeichnungen ist die Gleichgewichtsbedingung einer gemäß der Funktion $\varphi(R)$ rotierenden Flüssigkeitsmasse

$$V + \varphi - \Pi = \text{Konst.}$$

Π ist eine wesentlich positive Größe, die wegen

$$\frac{d\Pi}{dp} = \frac{1}{q} > 0$$

mit p zugleich zu- oder abnimmt. Da p an der Oberfläche Null ist, daher im Innern ein Maximum haben muß, so muß dasselbe auch mit Π der Fall sein, daher auch $V + \varphi$ im Innern ein Maximum haben muß, oder es muß einen Bereich geben, in welchem

$$\frac{\delta^2(V+\varphi)}{\delta x^2} < 0 \quad \frac{\delta^2(V+\varphi)}{\delta y^2} < 0, \quad \frac{\delta^2(V+\varphi)}{\delta z^2} < 0.$$

Daraus leitet nun Poincaré ab, daß dort

$$4\pi k^2 q > 3\omega^2 + 2\omega r \frac{d\omega}{dr}$$

sein muß.[3]

---

[1] Siehe Maxwell: On the stability of the motion of Saturn's ring. Cambridge 1859.

[2] Siehe auch Poincaré: Hypothèses cosmogeniques p. 44.

[3] Poincaré l. c. p. 45 bis 48.

Ist der rechts stehende Ausdruck positiv, das heißt, nimmt $\omega^2 r^3$ mit r zu, so bedeutet das für jenen Bereich eine untere Grenze der Dichte. Unmittelbar nach der Ringbildung ist $\omega^2 r^3$ konstant, die rechte Seite daher Null und diese Bedingung immer erfüllt. Da bei zunehmender Kondensation das Gefälle von ω immer geringer wird, $\omega^2 r^3$ also mit r zunimmt, so stellt diese Ungleichung tatsächlich eine weitere Bedingung für die Dichte vor.

Das Maxwell'sche Stabilitätskriterium läßt übrigens von vornherein erkennen, ob man bei einem kosmischen System den Laplace'schen Entstehungsvorgang annehmen kann oder nicht. Sei r_0 wie oben die Äquatordimension bei Beginn des Abtrennungsprozesses, q_0 die (mittlere) Dichte der Nebelhülle, so wird diese Bedingung wegen $\omega^2 r^3 = k^2 M$, die Form annehmen

$$4\pi q_0 r_0^3 < \frac{1}{14} M.$$

Die Masse der Nebelhülle, deren Hauptachsen r_0 und $\frac{2}{3} r_0$ sind, ist der Größenordnung nach gegeben durch

$$m = \frac{8}{9} \pi q_0 r_0^3$$

woraus

$$m < \frac{M}{63}$$

also eine obere Grenze für die Gesamtmasse der Begleitkörper folgt, eine Bedingung, die in unserem Sonnensystem und auch in seinen Sekundärsystemen erfüllt ist, und zwar sind die Massenverhältnisse mit Ausnahme des Systems Erde-Mond weit unter dieser Grenze.

Ein bemerkenswerter Umstand soll noch erwähnt werden. Nimmt man an, daß die äußeren Teile der Nebelhülle homogen sind, so wird sich die Dichte derselben mit der Zeit merklich so ändern, wie $\frac{1}{r^3}$ das heißt, der Verlauf der Dichte der Ringmaterie wird so sein, daß $q r^3$ nahezu konstant bleibt. Ist also die obige Ungleichung beim Beginn der Abströmung erfüllt, so bleibt die Möglichkeit der Bildung stabiler Ringe auch weiter erhalten. Erst wenn die Abströmungen auf die inneren relativ dichteren Schichten übergreifen, wird schließlich die Stabilitätsbedingung nicht mehr erfüllt sein und die Bildung der Ringe ein Ende gefunden haben. Die weiteren Abströmungen werden eine Zone zerstreuter Materie bilden, deren kondensierte Partikel als eine meteoritische Wolke, die den Zentralkörper umgibt, bestehen bleiben werden.

Für einen unmittelbar nach dem Entstehen stabilen Ring wird also die Größe

$$\frac{56\pi k^2 q}{\omega^2} = \alpha < 1$$

sein. Eine Kontraktion, die die linearen Dimensionen des Querschnittes auf den λ-fachen Betrag reduziert, vergrößert die Dichte auf $\frac{q}{\lambda^2}$, während die mittlere Rotationsgeschwindigkeit unverändert bleibt. Zum Bestehen der Stabilität ist daher notwendig, daß $\frac{\alpha}{\lambda^2} < 1$ ist, und diese wird für eine Kontraktion $\lambda = \sqrt{\alpha}$ aufhören.

(Gilt genau genommen nur für einen mittleren Elementarring, allgemein müßte

$$\alpha < \lambda^2 \left(\frac{r}{r'}\right)^4$$

sein, wie aus den obigen Relationen für die Kontraktionsvorgänge folgt, wo $r' - r = (r_0 - r)(1 - \lambda)$ ein kleiner Betrag ist, so daß wesentlich an der Größe der zum Aufhören der Stabilität nötigen

Kontraktion nichts geändert wird.) Die zum Zerfall notwendige Kontraktion hängt nach diesem Kriterium — wie es ja selbstverständlich ist — von einer Größe α ab, die ein Maß für die Abweichung des ursprünglichen Zustandes von der Stabilitätsgrenze ist. Die Poincaré'sche Ungleichung läßt aber folgern, daß die Kontraktion überhaupt nicht unter ein bestimmtes angebbares Maß sinken darf, wenn der Ring bestehen können soll. Die Forderung, daß einerseits

$$4\pi k^2 q < \frac{1}{14}\,\omega^2$$

sein soll, andrerseits, wenigstens in einem bestimmten Bereich der Ringmasse

$$4\pi k^2 q > 3\,\omega^2 + 2\,\omega r \frac{d\omega}{dr}$$

sein muß, läßt erkennen, daß der Bestand eines Ringes dann unmöglich ist, wenn an jeder Stelle desselben

$$3\,\omega^2 + 2\,\omega r \frac{d\omega}{dr} > \frac{1}{14}\,\omega^2$$

ist. Der Grenzfall wird also eintreten, wenn an irgend einer Stelle

$$\frac{41}{14}\,\omega + 2\,r \frac{d\omega}{dr} = 0$$

und im übrigen > 0 ist.

Führt man nun in diese Bedingung ω als solche Funktion von r ein, wie sie nach der Kontraktion λ stattfindet, so ergibt sich, daß sie dann sicher nicht mehr bestehen kann, wenn in allen seinen Punkten die Größe

$$\frac{41}{14} \cdot \frac{1}{r^{3/2}\sqrt{\lambda}} \sqrt{1-(1-\lambda)\frac{r_0}{r}} - 2\,r . \frac{3}{2} \frac{1}{r^{5/2}\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{1-\frac{4}{3}(1-\lambda)\frac{r_0}{r}}{\sqrt{1-(1-\lambda)\frac{r_0}{r}}}$$

einen positiven Wert hat. Die Ausführung ergibt, daß dann

$$15\,(1-\lambda)\frac{r_0}{r} \gtreqless 1$$

ist. Ist r_a der äußere Ringhalbmesser, so wird diese Ungleichung für

$$\lambda = 1 - \frac{1}{15}\frac{r_a}{r_0}$$

überall erfüllt sein. Da man die Breite des Ringes als klein gegen seinen Radius voraussetzen kann, so wird nach einer Kontraktion, die in den linearen Dimensionen um Geringes weniger als $\frac{14}{15}$ beträgt, der Ring nicht mehr bestehen können.

Dabei ist zu bemerken, daß hier nur die Verringerung des Geschwindigkeitsgefälles in Rechnung gezogen wurde, die von der Kontraktion allein verursacht wird, also die Wirkung einer inneren Reibung nicht berücksichtigt wurde, so daß die zur Erreichung der angegebenen kritischen Kontraktion erforderliche Zeit eine Maximaldauer des Bestandes eines Ringes bedeutet.

Da für das Grenzstadium die Rotationsgeschwindigkeit in der Distanz r näherungsweise gegeben ist d rch

$$\omega = \frac{k\sqrt{M}}{r^{3/2}}\left[1 + \frac{1}{30}\frac{r_a}{r_0}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\right]$$

so erkennt man, daß die Geschwindigkeitsverteilung noch wenig von der ursprünglichen abweicht, jedenfalls noch weit von der gleichförmigen Rotation entfernt ist.

Die Vorgänge, die nach dem Aufhören der Bedingungen für das Bestehen des Ringes eintreten, entziehen sich natürlich vollkommen einer Analyse: sie werden ja wesentlich bedingt durch zufällige Inhomogenitäten oder sonstige Unregelmäßigkeiten der Konfiguration. Es ist möglich, daß eine bereits vorhandene Stelle eines Dichtemaximums ein Konzentrationszentrum wird und zur unmittelbaren Bildung eines einheitlichen Himmelskörpers Anlaß gibt; es kann aber auch sein, daß der Ring in eine größere Zahl von Fragmenten zerfällt, die dann bei den geringsten Differenzen ihrer Distanzen, daher auch ihrer Umlaufszeiten und bei genügend großen Dimensionen im weiteren Zeitverlauf kollidieren und so durch ihre Wiedervereinigung zu einer Planetenbildung führen — es kann aber auch sein, daß die mechanischen Bedingungen für das Bestehen eines im Gleichgewicht befindlichen Massenkontinuums überhaupt nicht mehr vorhanden sind und eine Zone zerstreut bleibender Materie resultiert.

Kommt es aber auf die eine oder andere Weise zur Bildung einer einzigen Begleitmasse, so ist das eine sicher, daß diese eine retrograde Rotation haben wird, da das Aufhören der Ringstabilität bei einer Verteilung der Geschwindigkeiten eintritt, die noch wenig von dem ursprünglichen Abfall mit größer werdender Distanz verschieden ist. Wie immer auch der Vorgang der Vereinigung des instabil gewordenen Ringes zu einem geschlossenen Körper sein mag, so läßt sich doch von vornherein ein Schluß auf das Vorzeichen und die Größenordnung des Rotationsmomentes ziehen, das dem neuen um die Zentralmasse kreisenden Begleiters zukommt. Ist, wie oben, r_0 der Radius jenes Ringelementes, um das die Kontraktion stattgefunden hat, so daß die zugehörige Rotationsgeschwindigkeit ω_0 die Kreisbahnbedingung noch weiter erfüllt, und identifiziert man diese mit der Progressivbewegung des sich bildenden Planeten, was ja für den vorliegenden Gesichtspunkt ohneweiters erlaubt ist, so bestimmen die Relativgeschwindigkeiten der den verschiedenen r angehörigen Teilchen das Rotationsmoment des Planeten.

Ist $\omega_0 r_0 = g_0$, $\omega r = g$, so hat man offenbar $(g - g_0)(r - r_0)\,dm$ über die ganze Masse des Ringes zu summieren, um das Rotationsmoment des daraus entstehenden Planeten zu finden. Die Masse des zum Halbmesser r gehörigen Ringelementes ist $2\pi r q \delta\, dr$, wo δ die als sehr gering anzunehmende Dicke des Ringes bedeutet, für die irgend ein Mittelwert gedacht ist. Die Dichte q wird man proportional der reziproken dritten Potenz von r voraussetzen können. Nimmt man allgemeiner an

$$r q = r_0 q_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^n$$

und setzt $r = r_0(1 + \varepsilon)$, wo ε als kleine Größe erster Ordnung angesehen werden kann, so ist

$$dm = 2\pi q_0 r_0^2 \delta (1 - n\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Andrerseits war gefunden worden

$$\omega = \frac{k\sqrt{M}}{r^{3/2}} \sqrt{1 + \pi\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)}$$

wo $\alpha = \dfrac{1 - \lambda}{\lambda}$ nach dem Vorigen eine kleine Größe ist, dann ist

$$g = \frac{k\sqrt{M}}{\sqrt{r_0}}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}(1 - \alpha)\right)$$

und

$$g - g_0 = -\frac{1}{2}\varepsilon g_0 (1 - \alpha).$$

Man erhält daraus für das Ratationsmoment

$$-\pi r_0^3 q_0 g_0 \delta (1-\alpha) \int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_2} \varepsilon^2 (1-n\varepsilon)\, d\varepsilon$$

also eine negative Größe, die nur unmerklich von der Veränderlichkeit der Dichte innerhalb des Ringes abhängt und deren angenäherter Wert

$$-\frac{2}{3}\pi r_0^3 q_0 g_0 \delta (1-\alpha)\varepsilon^3$$

ist, wo εr_0 die halbe Ringbreite bedeutet.

Die Masse des Ringes ist

$$4\pi\varepsilon r_0^2 \delta q_0$$

entspricht also einer Kugel mit dem Halbmesser $\sqrt[3]{3\varepsilon r_0^2 \delta} = h$. Das Trägheitsmoment dieser Kugel in Bezug auf einen Durchmesser ist

$$\frac{2^3 . 2^{2/3}}{5} \pi \varepsilon^{5/3} r_0^{10/3} \delta^{5/3} q_0.$$

Die Rotationsgeschwindigkeit des aus dem Ring sich bildenden Planeten wird — der Größenordnung nach — gegeben sein durch

$$\omega = -\frac{5}{2^2 . 3^{5/3}} \frac{\varepsilon^{4/3}}{r^{1/3} \delta^{2/3}} (1-\alpha) g_0.$$

Ist ω_0 die mittlere Rotationsgeschwindigkeit des Ringes, also $g_0 = r_0 \omega_0$, setzt man weiter das Verhältnis der Ringdicke zur Breite

$$\frac{\delta}{2\varepsilon r_0} = \eta$$

so erhält man

$$\omega = -\frac{5}{2^{8/3}\, 3^{5/3}} (1-\alpha) \left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^{2/3} \omega_0$$

also eine retrograde Rotation, deren Größenordnung wesentlich bedingt ist durch die Verhältnisse der ursprünglichen Ringdimensionen.

(Der numerische Koeffizient ergibt

$$\omega = -0 \cdot 126 (1-\alpha) \left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^{2/3} \omega_0).$$

Die nächste Frage ist nun die, unter welchen Bedingungen überhaupt die Bildung einer einzigen zusammenhängenden Masse möglich ist. Man wird dabei zunächst zu unterscheiden haben, ob in der gegebenen Distanz von der Zentralmasse die durch diese bedingte deformierende Kraft als merklicher Betrag anzunehmen ist oder nicht.

Ein weiterer Unterschied in der Beurteilung der Möglichkeit einer Planetenbildung wird in dem Umstand liegen, ob die sich vereinigende Masse als nahezu homogen anzusehen ist oder ob diese Vereinigung um eine schon vorgebildete zentrale Verdichtung vor sich geht. Da im ursprünglichen Ring die Dichte nur um sehr geringe Beträge variiert, so ist der erstere Fall immerhin denkbar, wenn es sich um die sukzessive Vereinigung gleichartiger Ringfragmente handelt.

Was den ersten Punkt, den Einfluß der Attraktion der Zentralmasse auf die Gleichgewichtsfigur des Begleitkörpers anbelangt, so ist die Größenordnung einer Gezeitendeformation ζ, wenn man diese in Einheiten eines mittleren Halbmessers ausdrückt, gegeben wurch

$$\zeta \sim \frac{M}{m}\left(\frac{h}{r_0}\right)^3$$

so daß also diese Deformation vernachlässigt werden kann, wenn $\left(\frac{h}{r_0}\right)^3$ eine kleine höhere Ordnung ist, als $\frac{m}{M}$ (gleichgiltig, welche Annahme man über die Massenverteilung von m macht). Im Falle der Homogenität, wo man $h^3 = 3\varepsilon r_0 \delta = 6\varepsilon^2 \eta r_0^3$ setzen kann, ist

$$\zeta \sim \frac{M}{m}\varepsilon^2 \eta$$

so daß es hier auf die Größenordnung der Dimensionsverhältnisse des ursprünglichen Ringes in Bezug auf das Massenverhältnis ankommt.

Die Weiterentwicklung des planetarischen Nebels wird sich wesentlich verschieden gestalten, je nachdem ζ zu vernachlässigen oder ein endlicher Betrag ist.

6. Planetenbildung ohne merkliche Gezeitenwirkung.

Die Bedingungen für das Bestehen einer Gleichgewichtsfigur werden demnach in diesem Fall diejenigen sein, die für eine rotierende Masse gelten, deren Teilchen nur unter ihrer gegenseitigen Gravitatioswirkung stehen. Poincaré hat für diesen Zustand ganz allgemein eine obere Grenze der Rotationsgeschwindigkeit angeben können, die aus der notwendigen Bedingung folgt, daß die resultierende Normalkomponente in einem Oberflächenpunkt gegen das Innere der Masse gerichtet sein muß.[1] Dieselbe lautet

$$\omega^2 < \frac{2\pi k^2 m}{v}$$

wo v das Volumen der rotierenden Masse m ist. Es läßt sich ohne eine Annahme über die Dichtigkeitsverteilung in m a priori nur der Schluß ziehen, daß bei genügender Verdünnung die Bildung eines einzigen Körpers aus der Gesamtmasse m unmöglich werden kann. Nimmt man an, daß die Ansammlung der planetarischen Nebelmasse um einen schon stark kondensierten Kern stattfindet, so daß neu hinzukommende Massen nur das Volumen vergrößern, die Masse aber merklich nicht ändern, so wird diese weitere Aufnahme der Nebelmaterie höchstens bis zu jenem v stattfinden können, für welches $\omega^2 = \frac{2\pi k^2 m}{v}$ ist, was natürlich mit dem Erreichen der theoretischen Atmosphärengrenze identisch ist. Ist aber schon zu Beginn für die ganze Masse die obige Bedingung erfüllt, so wird durch die weitere Kontraktion ebenfalls diese Grenzform erreicht werden. Auf jeden Fall beginnt irgend einmal der gleiche Abtrennungsprozeß, wie beim ursprünglichen Sonnennebel, falls die physikalischen Bedingungen dafür auch weiter erhalten bleiben, der zur Bildung eines Sekundärsystems führen kann.

Dem Falle anfänglicher Homogenität sind allerdings engere Grenzen gezogen. Während die allgemeine Poincaré'sche Forderung dafür

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 q_0} < 1$$

[1] Siehe Bull. astr. II. 1885 p. 117, und auch Poincaré: Figures d'équilibre d'une masse fluide. Paris 1902, p. 11.

ist, verlangt eine ganze Klasse homogener Gleichgewichtsfiguren, nämlich die der elliptischen zu ihrer Stabilität die Bedingung, daß

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 q_0} < 0 \cdot 1871.$$

Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß andere Gleichgewichtsformen mit anderen Stabilitätsgrenzen existieren, jedenfalls kann aus diesem Einzelfall der Schluß gezogen werden, daß auch für andere Flächengattungen die hinreichenden Stabilitätsbedingungen wesentlich engere Grenzen ergeben, als die allgemein gültige notwendige Grenzbedingung Poincaré's.

Die Annahme, daß die Bildung eines anfänglich homogenen Planeten an die Ermittlung der ellipsoidischen Stabilitätsbedingung gebunden ist, wird demnach für die vorliegenden Betrachtungen gerechtfertigt sein, bei denen es sich ja doch nur um die allgemeinen Umrisse quantitativer Beziehungen handeln kann.

Auch hier wird im weiteren Verlauf eine sekundäre Systembildung stattfinden können, aber in der Art des Poincaré-Darwin'schen Abtrennungsprozesses.

In beiden Fällen ist die Umlaufsbewegung der entstandenen Satelliten eine rückläufige in Bezug auf die Planetenbewegung. Wesentlich dasselbe Resultat wird aber auch eintreten, wenn die Gezeitenwirkung nicht gerade verschwindend klein, aber doch nicht so groß ist, um die durch die Kontraktion bedingte Änderung der Rotationsgeschwindigkeit aufzuheben. Die Bedingung für das Bestehen solcher Verhältnisse ergibt sich aus den Untersuchungen G. H. Darwin's über die durch Flutreibung erzeugten Säcularstörungen der Bahnelemente. Darnach ist in sinngemäßer Anwendung auf den vorliegenden Fall die Änderung der mittleren Entfernung a gegeben durch

$$\frac{d\sqrt{a}}{dt} \sim \nu \left(\frac{M}{m}\right)^2 \frac{h^9}{a^6} (\omega - n)$$

wo ν der Viskositätskoeffizient, ω die Rotationsgeschwindigkeit, n die mittlere Umlaufsgeschwindigkeit ist und h, m, M die frühere Bedeutung haben.[1]

Da hier ω das entgegengesetzte Vorzeichen von n hat, so findet eine Abnahme der mittleren Entfernung statt. Der Endzustand unter alleiniger Wirkung der Flutreibung würde entweder die Wiedervereinigung mit der Zentralmasse oder das asymptotische Erreichen einer gewissen Minimaldistanz sein, der eine stabile stationäre Bewegung entspricht. Welcher von den beiden Fällen eintreten wird, hängt von dem Verhältnis der Absolutbeträge des Rotationsmomentes $C\omega$ und des Revolutionsmomentes ma^2n ab (C das Trägheitsmoment der Masse m bezüglich der Rotationsachse). Ist

$$C\omega < m a^2 n$$

so tritt der zweite Fall ein: der Vorgang endet mit einer stabilen Bahn von m um M.[2]

Bei dem hier vorausgesetzten Abtrennungsprozeß wird nun diese Ungleichung immer erfüllt sein. Sie kann näherungsweise ersetzt werden durch die Bedingung

$$h^2 \omega < a^2 n.$$

Zwischen den Absolutbeträgen von ω und n besteht aber nach dem Früheren die approximative Beziehung

$$\omega = \frac{1}{10} \left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^{2/3} n$$

[1] Siehe Darwin: »On the analytical expressions wich give the history of a fluid planet of small viscosity, attented by a single satellite.« Proc. of the Royal Soc. vol. XXX. Vgl. auch das Referat von Darwin's einschlägigen Arbeiten in Poincaré: »Hypothèses cosmogéniques«.

[2] Siehe Darwin l. c. und auch Darwin: The determination of the secular effects of tidal friction by a graphical method. Proc. of the royal soc. XXIX.

daher soll

$$\frac{\varepsilon}{\eta} < \left(\frac{a}{h}\right)^3 \cdot 10^{3/2}.$$

Gemäß der Bedeutung von ε und η ist aber

$$6\,\varepsilon^2 \eta\, a^3 = h^3$$

woraus für die obige Bedingung folgt

$$\varepsilon^3 < \frac{10^{3/2}}{6} \qquad \text{oder} \qquad \varepsilon < 1\cdot 74$$

eine Ungleichung, die ja immer erfüllt sein muß. Man kann das Bestehen der obigen Ungleichung übrigens auch aus folgender Überlegung einsehen. Für eine sphärische homogene Masse m soll nach dieser

$$\frac{\omega}{n} < \frac{5}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2.$$

Im ursprünglichen Ring sind die linearen Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen geben durch

$$g = \frac{k\sqrt{M}}{\sqrt{a}}$$

das Geschwindigkeitsgefälle demnach durch

$$\frac{dg}{da} = -\frac{k\sqrt{M}}{a^{3/2}} = -\frac{1}{2}n$$

eine Größe, die zugleich ein Maß für die Rotationsgeschwindigkeit aus zwei unendlich benachbarten Teilchen ist. Durch eine vorangegangene Kontraktion $\lambda < 1$, wird dieses Gefälle und damit ω im Verhältnis $\frac{1}{\lambda}$ vergrößert, so daß also $\frac{\omega}{n} = \frac{1}{2\lambda}$ ist. Damit die obige Ungleichung nicht mehr erfüllt ist, müßte die Kontraktion zur Zeit der Vereinigung der Ringmaterie zu einer Planetenmasse bereits einen Betrag

$$\lambda < \frac{1}{5}\left(\frac{h}{a}\right)^2$$

erreicht haben, was nach den Verhältnissen beim Eintritt der Instabilität des Ringes ausgeschlossen erscheint.

Die durch die Flutreibung bedingte säkulare Änderung der mittleren Entfernung wird also jedenfalls in einer bei stetiger Verkleinerung stattfindenden asymptotischen Annäherung an einen stabilen stationären Endzustand bestehen. Es handelt sich nun darum, aus der kombinierten Wirkung der Flutreibung und der allmählichen Kontraktion auf die Rotation der Planetenmasse die Bedingung zu finden, unter welcher der Einfluß der letzteren überwiegt, so daß der Entwicklungsprozeß dieses Sekundärsystems unter wesentlich gleichen Verhältnissen stattfindet, wie der des ursprünglichen Sonnennebels.

Zum Zwecke des quantitativen Vergleiches sollen hier in Kürze die Ergebnisse der Darwin'schen Untersuchungen über den Einfluß der Flutreibung angeführt werden mit dem für den vorliegenden Fall nötigen Abänderungen, beziehungsweise erlaubten Vereinfachungen: der Fluterreger ist hier die Zentralmasse, die Rotationsebene der Begleitmasse fällt mit der Bahnebene zusammen und die Bahn selbst ist eine Kreisbahn. Die undeformierte Planetenmasse wird als kugelförmig angenommen.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Deformationsgröße ζ gegeben durch

$$\frac{\zeta}{h} = \frac{M}{m}\left(\frac{h}{a}\right)^3 P^{(2)}(\cos\sigma)$$

wo σ die Zenitdistanz der störenden Masse M und $P^{(2)}$ die Kugelfunktion zweiter Ordnung ist.

Ist ϑ das Komplement der Breite, λ die Länge des Oberflächenelementes, gezählt von irgend einem Nullmeridian, s die Sternzeit in letzterem und l die Rektaszension der störenden Masse, so ist

$$\cos\sigma = \sin\vartheta\cos(s+\lambda-l).$$

Versteht man unter $P_{n,m}$ die Neumann'schen zugeordneten Kugelfunktionen, so ist

$$\frac{\zeta}{h} = \frac{M}{m}\left(\frac{h}{a}\right)^3 \left[-P_{2,0}(\cos\vartheta) + \frac{1}{4}P_{2,2}(\cos\vartheta)\cos 2\lambda\cos 2(s-l) - \frac{1}{4}P_{2,2}(\cos\vartheta)\sin 2\lambda\sin 2(s-l)\right]$$

wo also $\dfrac{ds}{dt} = \omega$ $\dfrac{dl}{dt} = n$ ist.

Infolge der inneren Reibung findet für die einzelnen periodischen Glieder in ζ sowohl eine Verkleinerung der Amplitude als auch eine Phasenverzögerung statt, und zwar in folgender Weise: ein Glied in ζ, das ursprünglich die Form

$$h^p\, Y^{(p)}(\vartheta,\lambda)\cos\theta$$

hatte, wo $Y^{(p)}$ eine Kugelflächenfunktion p Ordnung, θ eine Funktion der Zeit ist, nimmt vermöge der inneren Reibung die Form an

$$h^p\, Y^{(p)}(\vartheta,\lambda)\cos\eta\cos(\theta-\eta)$$

wo

$$\eta = \nu\frac{(2p+3)(p-1)}{p}\cdot\frac{h}{k^2 m q}\cdot\frac{d\theta}{dt},$$

ν der Viskositätskoeffizient, q die Dichte an der Oberfläche und k die Gravitationskonstante ist.[1]

Im vorliegenden Falle ist

$$\eta = 7\frac{\nu h}{k^2 m q}(\omega - n)$$

und die Gezeitendeformation gegeben durch

$$\frac{\zeta}{h} = \frac{M}{m}\left(\frac{h}{a}\right)^3\cos\eta\left[-P_{2,0}(\cos\vartheta) + \frac{1}{4}P_{2,2}(\cos\vartheta)(\cos 2\lambda\cos(2s-2l-\eta) - \sin 2\lambda\sin(2s-2l-\eta))\right]$$

Die durch die Attraktion von M auf diese Gezeitenprotuberanz bedingte Störungsfunktion ist

$$W = k^2\frac{M}{m}\int_s \frac{q\zeta\, d\sigma}{\Delta}$$

wo Δ die Distanz des Oberflächenelements $d\sigma$ von M ist und das Integral sich auf die Kugeloberfläche bezieht.

Nach der Entwicklung von $\dfrac{1}{\Delta}$ nach Kugelfunktionen ergibt die Integration vermöge der Orthogonalitätseigenschaften dieser Funktionen

$$W = \frac{2\pi}{5}k^2\left(\frac{M}{m}\right)^2 q\,\frac{h^8}{a^6}\cos\eta\left[1 + \frac{3}{2}\cos(2\bar{l} - 2l - \eta)\right]$$

wo $\bar{l}$ dieselbe Koordinate des störenden Körpers wie l bedeutet, insofern sie durch die Entwicklung der reziproken Distanz in die Formel eintritt. (Nur auf diese Größen beziehen sich die partiellen Ableitungen in den Störungsgleichungen.)

---

[1] Siehe Darwin: On the bodily tides of viscous and semi-elastic spheroids and on the occantides upon a yielding nucleus. Phil. Trans. P. I. vol. 170. 1879.

Die Störungsgleichung für die mittlere Entfernung ist

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{an} \frac{\partial W}{\partial M_0}$$

oder

$$k\sqrt{M+m}\,\frac{d\sqrt{a}}{dt} = \frac{\partial W}{\partial M_0}$$

wo unter M_0 die in $\bar{l}$ eintretende Anfangskonstante zu verstehen ist.

Setzt man nach der Differentiation $\bar{l} = l$, so wird, wegen der Kleinheit von η

$$\frac{\partial W}{\partial M_0} = \frac{6\pi}{5} k^2 \frac{M^2}{m^3} q \frac{h^8}{a^6} \eta$$

und mit Rücksicht auf den obigen Ausdruck für η

$$k\sqrt{M+m}\,\frac{d\sqrt{a}}{dt} = \frac{42}{5} \nu \pi \frac{M^2}{m^3} \cdot \frac{h^9}{a^6} (\omega - n)$$

$$\left(\text{zugleich auch der Ausdruck für} \qquad k^{4/3} (M+m)^{2/3} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right).$$

Die Änderung der Rotationsgeschwindigkeit ω folgt nun aus dem Flächensatz. Das Flächenmoment der translatorischen Bewegung in Bezug auf den gemeinsamen Schwerpunkt ist

$$\frac{Mm}{M+m} a^2 n = \frac{Mm}{M+m} k\sqrt{M+m}\,\sqrt{a}.$$

Ist C das Trägheitsmoment der Masse m bezüglich der Rotationsachse, so lautet der Flächensatz

$$C\omega + \frac{Mm}{M+m} k\sqrt{M+m}\,\sqrt{a} = \text{Konst.}$$

daher ist nach der Störungsgleichung in a

$$\frac{d(C\omega)}{dt} = -\frac{42}{5} \pi \nu \frac{M^3}{(M+m)\,m^2} \cdot \frac{h^9}{a^6} (\omega - n).$$

(Die hier wesentlich vereinfachten Einzelresultate sind in ganz allgemeiner und weit ausführlicherer Darstellung gegeben in Darwin's »On the precession of a viscous spheroid, and on the remote history of the Earth«. Phil. Trans. P. II. vol. 170, und in »Problems connected with the tides of a viscous spheroid« ibid.)

Würde man C als konstant annehmen, so würden die obigen Relationen unmittelbar die durch die Gezeitenwirkung allein bedingte Säkularstörung der Relation ergeben. Da hier die Kontraktionswirkung mit dieser verglichen werden soll, so hat man vorauszusetzen, daß das Trägheitsmoment einer säkularen Änderung unterliegt. Setzt man mit der bisherigen Annäherung

$$C = \frac{2}{5} m h^2$$

so ist h mit der Zeit veränderlich, und zwar soll diese Abhängigkeit in der Form

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = -\frac{\sigma}{2}$$

vorausgesetzt werden, wo σ eine wesentlich positive Größe ist, die im übrigen noch von h abhängig sein kann.

Aus der Gleichung

$$\frac{d}{dt}(h^2\omega) = -\frac{21\pi\nu}{M+m}\cdot\left(\frac{M}{m}\right)^3\frac{h^9}{a^6}(\omega-n)$$

folgt dann

$$\frac{d\omega}{dt} = \sigma\omega - B\frac{h^7}{a^6}(\omega-n)$$

wenn die konstante Größe

$$\frac{21\pi\nu}{M+m}\left(\frac{M}{m}\right)^3 = B$$

gesetzt wird.

Am Beginn der Planetenbildung ist die Rotation retrograd. Ist der Absolutbetrag der Rotationsgeschwindigkeit $|\omega|$, also $\omega = -|\omega|$, so ist die Änderung desselben

$$\frac{d|\omega|}{dt} = \sigma|\omega| - B\frac{h^7}{a^6}(|\omega|+n).$$

Die Rotation in diesem Sinn wird also erhalten bleiben, beziehungsweise vergrößert werden, wenn

$$\sigma \gtreqless B\frac{h^7}{a^6}\left(1+\frac{n}{|\omega|}\right).$$

Wie immer auch die physikalischen Verhältnisse beschaffen sein mögen, für genügend große Distanzen a kann diese Bedingung erfüllt sein und es ist zu bemerken, daß diese Ungleichung dann auch erhalten bleibt. Es ist nämlich die Ableitung des veränderlichen Teiles nach der Zeit

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{h^7}{a^6}\left(1+\frac{n}{|\omega|}\right)\right] = \left(1+\frac{n}{|\omega|}\right)\left(7a\frac{dh}{dt}-6h\frac{da}{dt}\right)\frac{h^6}{a^7}+\frac{1}{|\omega|^2}\left(|\omega|\frac{dn}{dt}-n\frac{d|\omega|}{dt}\right)\frac{h^7}{a^6}$$

nach der gemachten Voraussetzung eine negative Größe. Da

$$\frac{da}{dt} = -\frac{4}{5}\frac{h^9}{na^7}B(|\omega|+n) \quad \text{und} \quad \frac{dh}{dt} = -h\frac{\sigma}{2}$$

so wird die erste Klammergröße

$$-\frac{7}{2}ah\sigma + \frac{24}{5}\frac{h^{10}}{na^7}B(|\omega|+n)$$

jedenfalls negativ, weil wegen der obigen Ungleichung sicher

$$\sigma > \frac{48}{35}\frac{|\omega|}{n}\cdot\left(\frac{h}{a}\right)^2\cdot B\frac{h^1}{a^6}\left(1+\frac{n}{|\omega|}\right)$$

ist.

Das Gleiche gilt für den zweiten Teil. Berücksichtigt man den obigen Wert für $\frac{d|\omega|}{dt}$ und den Wert für

$$\frac{dn}{dt} = \frac{6}{5}\frac{h^9}{a^8}B(|\omega|+n)$$

so wird die zweite Klammergröße

$$-n|\omega|\sigma + \frac{h^7}{a^6}\left(n+\frac{6}{5}|\omega|\frac{h^2}{a^2}\right)B(|\omega|+n)$$

ebenfalls negativ, da die dafür notwendige Bedingung

$$\sigma > B\frac{h^7}{a^6}\left(1+\frac{n}{|\omega|}\right)\left[1+\frac{6}{5}\frac{|\omega|}{n}\cdot\left(\frac{h}{a}\right)^2\right]$$

sich nur um eine Größe zweiter Ordnung von der vorausgesetzten Ungleichung unterscheidet. (Es überwiegt übrigens ohnehin das erste negative Glied.)

Es nimmt daher die rechte Seite der verlangten Ungleichung beständig ab. Nun kann allerdings σ selbst noch einer Potenz von h protortional sein, also h kleiner werden, sicher aber — der physikalischen Bedeutung nach — einer niedrigeren als der siebenten, so daß die Ungleichung erhalten bleibt.

Die Bedingung

$$\sigma > B\frac{h^7}{a^6}\left(1+\frac{n}{|\omega|}\right)$$

ist demnach hinreichend für das beständige Überwiegen der Kontraktionswirkung über den Einfluß der Flutreibung; ist diese für ein Anfangsstadium erfüllt, so sind die Voraussetzungen für die Entwicklung eines Sekundärsystems mit retrograder Umlaufsbewegung gegeben.

7. Planetenbildung bei überwiegender Gezeitenwirkung.

In diesem Falle ist also

$$\sigma > B\frac{h^7}{a^6}\left(1+\frac{n}{|\omega|}\right)$$

der Absolutbetrag $|\omega|$ der retrograden Winkelgeschwindigkeit ω nimmt ab. Die Änderung der Größen a, n und $|\omega|$ findet daher in einem solchen Sinn statt, daß diese Ungleichung verstärkt wird. Dem steht die Abnahme von h gegenüber, die aber durch eine in σ möglicherweise enthaltene h-Potenz teilweise kompensiert sein kann. Da überdies bei dem Durchgang von ω durch Null die obige Bedingung jedenfalls erfüllt ist, so kann bei der relativen Kleinheit des ursprünglichen Wertes von $|\omega|$ angenommen werden, daß die Ungleichung bis zur Umkehrung der Rotationsrichtung erhalten bleibt.

Übrigens läßt sich aus der oben gegebenen Ableitung der veränderlichen Größe

$$\frac{h^7}{a^6}\left(1+\frac{n}{|\omega|}\right)$$

leicht die Bedingung erkennen, unter welcher diese beständig zunimmt. Man erhält nach Einführung der Differentialquotienten von a, h, n und $|\omega|$

$$\frac{7}{2}\sigma\left(1+\frac{9}{7}\frac{n}{|\omega|}\right) < B\frac{h^7}{a^6}\left(1+\frac{n}{|\omega|}\right)\left[\frac{n}{|\omega|}+\left(\frac{h}{a}\right)^2\cdot\frac{6}{5}\left(5+4\frac{|\omega|}{n}\right)\right]$$

oder, nach Unterdrückung des belanglosen Gliedes mit $\left(\frac{h}{a}\right)^2$:

$$\sigma < B\frac{h^7}{a^6}\left(1+\frac{n}{|\omega|}\right)\frac{2}{q+7\frac{|\omega|}{n}}.$$

Da der zweite Faktor beständig zunimmt, für den ersten allein aber anfänglich die Ungleichung erfüllt war, so ist damit das ständige Abnehmen der retrograden Rotation gesichert.

Für den Durchgang durch Null ist

$$\frac{d\omega}{dt} = B\frac{h^7}{a^6}n$$

es findet also ein Anwachsen im positiven Sinn unabhängig von der Kontraktionswirkung statt.

Der weitere Verlauf der nun rechtläufig gewordenen Rotationsbewegung ist gegeben durch

$$\frac{d\omega}{dt} = \sigma\omega + B\frac{h^7}{a^6}(n - \omega).$$

Da zunächst $n > \omega$ ist, so nimmt die Rotationsgeschwindigkeit weiter zu. Nun ist

$$\frac{dn}{dt} = \frac{6}{5}\left(\frac{h}{a}\right)^2 B\frac{h^7}{a^6}(n - \omega),$$

die Änderung von n demnach im Verhältnis $\left(\frac{h}{a}\right)^2$ höherer Ordnung; ω wird also einmal den Betrag n erreichen, das heißt es wird jedenfalls ein Zustand gleicher Rotations- und Revolutionsgeschwindigkeit eintreten. In diesem Moment ist n stationär, ω nimmt aber, gemäß

$$\frac{d\omega}{dt} = \sigma\omega$$

weiter zu, so daß von da ab $\omega > n$ ist, wodurch die Zunahme von ω verringert und n selbst wieder kleiner wird.

Nun kann man schon aus dem unmittelbaren Anblick der beiden Gleichungen erkennen, daß der weitere Verlauf zwei ganz verschiedenen Endzuständen zustreben wird, je nach dem Verhältnis der noch bestehenden Gezeitenwirkung zum Kontraktionseffekt.

Die Gleichungen in ω und n haben die Form

$$\frac{d\omega}{dt} = \sigma\omega - \Gamma(\omega - n)$$

$$\frac{dn}{dt} = -\Gamma_1(\omega - n)$$

wo Γ_1 höherer Ordnung als Γ ist: bis auf einen numerischen Faktor ist $\Gamma_1 = \left(\frac{h}{a}\right)^2 \Gamma$.

Von dem Moment an, wo $\omega = n$ ist, nimmt ω zu, demnach n wieder ab, daher wird $\frac{d\omega}{dt} < \sigma\omega$.

Überwiegt nun die Gezeitenwirkung beträchtlich, ist also um vieles $\Gamma > \sigma$, so kann im weiteren Verlauf $\frac{d\omega}{dt}$ wieder negativ werden, und zwar in dem Moment, wo

$$\omega = \frac{\Gamma}{\Gamma - \sigma} n$$

es kann darauf $\frac{dn}{dt} > 0$ werden, so daß schließlich $\frac{d\omega}{dt}$ wieder positiv wird und sich der Vorgang im wesentlichen wiederholt, so daß also ω in irgend einen um n liegenden Bereich varriieren wird.

Ist aber σ beträchtlich größer als Γ, so kann $\frac{d\omega}{dt}$ beständig positiv bleiben, ω also so lange zunehmen, als überhaupt eine merkliche Kontraktionswirkung noch vorhanden ist.

Die Diskussion der obigen Gleichungen bestätigt diese Überlegung in präziserer Weise. Man erhält durch Subtraktion

$$\frac{d(\omega - n)}{dt} = \sigma\omega - (\Gamma - \Gamma_1)(\omega - n).$$

Setzt man die Differenz $\omega - n = \zeta$, so erhält man das Gleichungssystem

$$\frac{d\zeta}{dt} = (\sigma - \Gamma + \Gamma_1)\,\zeta + \sigma n$$

$$\frac{dn}{dt} = -\Gamma_1 \zeta.$$

Setzt man zunächst σ, Γ und Γ_1 als konstant voraus, eine Annahme, die für eine längere Zeitdauer wenigstens annähernd realisiert sein und ein im wesentlichen richtiges Bild von der Wirkungsweise der beiden Einflüsse geben kann, so folgt für ζ die folgende Differentialgleichung

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + (\Gamma - \Gamma_1 - \sigma)\frac{d\zeta}{dt} + \sigma\Gamma_1\zeta = 0.$$

Das partikuläre Integral $\zeta = e^{\lambda t}$ ergibt für λ die Werte

$$\lambda = -\frac{1}{2}(\Gamma - \Gamma_1 - \sigma) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\Gamma - \Gamma_1 - \sigma)^2 - \sigma\Gamma_1}.$$

Der Radikand hat die zwei positiven Wurzeln

$$\sigma = \Gamma + \Gamma_1 \pm 2\sqrt{\Gamma\Gamma_1}$$

und wird für die dazwischen liegenden Werte σ negativ. λ hat also entweder reelle Werte von der Form $-\alpha \pm \beta$, wo $|\beta| < |\alpha|$, oder komplexe Werte $-\alpha \pm i\beta$.

Das allgemeine Integral

$$\zeta = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t}$$

wird, wenn t von dem Moment, wo $\omega = n$ war, gezählt wird:

$$\zeta = a(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}).$$

Je nach dem Größenverhältnis von σ zu Γ ergeben sich für ζ Funktionen, die ganz verschiedenen Endzuständen entsprechen.

Bedenkt man, daß

$$\Gamma + \Gamma_1 - 2\sqrt{\Gamma\Gamma_1} < \Gamma - \Gamma_1,$$

so grenzen die aufeinanderfolgenden Größen

$$\Gamma + \Gamma_1 - 2\sqrt{\Gamma\Gamma_1}, \quad \Gamma - \Gamma_1 \quad \text{und} \quad \Gamma + \Gamma_1 + 2\sqrt{\Gamma\Gamma_1}$$

vier Bereiche für σ ab, denen ebensoviele Funktionsarten für ζ entsprechen.

Es ist für

$\sigma < \Gamma + \Gamma_1 - 2\sqrt{\Gamma\Gamma_1}$	$\zeta = a^{-(\alpha-\beta)t}(1 - e^{-2\beta t})$
$\Gamma + \Gamma_1 - 2\sqrt{\Gamma\Gamma_1} < \sigma < \Gamma - \Gamma_1$	$\zeta = a e^{-\alpha t}\sin\beta t$
$\Gamma - \Gamma_1 = \sigma$	$\zeta = a\sin\beta t$
$\Gamma - \Gamma_1 < \sigma < \Gamma + \Gamma_2 + 2\sqrt{\Gamma\Gamma_1}$	$\zeta = a e^{+\alpha t}\sin\beta t$
$\Gamma + \Gamma_1 + 2\sqrt{\Gamma\Gamma_1} < \sigma$	$\zeta = a e^{\alpha t}(e^{+\beta t} - e^{-\beta t})$.

Dabei ist zu bemerken, daß $\alpha - \beta$ von der Größenordnung Γ_1, also höherer Ordnung als α und β ist, daß ferner α eine wesentlich positive Größe ist, wie aus dem Sinne der Änderung von $\omega - n$ für $t = 0$ hervorgeht.

Im ersten Fall wird zunächst ω größer als n, um sich nach einem gewissen Maximalbetrag der Distanz $\omega - n$ asymptotisch der Revolutionsgeschwindigkeit n zu nähern; im zweiten schwankt ω um den Wert n mit immer kleiner werdender Amplitude, um für den Grenzfall $\sigma = \Gamma - \Gamma_1$, in eine konstant bleibende Libration überzugehen. Im vierten Fall findet ein Schwanken von ω um einen mittleren Wert n mit immer größer werdender Amplitude und im fünften endlich ein Anwachsen der Rotationsgeschwindigkeit gegen n statt. Der Bereich einer auftretenden Periodizität ist übrigens ein sehr enger, da ja σ dafür innerhalb Grenzen liegen muß, die näherungsweise durch

$$\Gamma\left(1 \pm 2\frac{h}{a}\right)$$

gegeben sind.

Wie schon früher geschlossen wurde, sind es also zwei wesentlich verschiedene Endzustände, denen der ganze Verlauf je nach dem Größenverhältnis von σ und Γ zustreben kann: entweder bleibt ω in einer gewissen, immer kleiner werdenden Umgebung von n, oder wächst um beliebige Beträge über diese Winkelgeschwindigkeit.

Die obigen Lösungsformen sollen natürlich nur das wesentliche dieser beiden Möglichkeiten charakterisieren, ohne eine vollkommene richtige analytische Darstellung des Prozesses geben zu können: ist Γ schon wegen a und h selbst eine veränderliche Größe, so werden sich ja auch die physikalischen Größen σ und ν, sowie die Deformabilität stetig ändern, so daß insbesonders der Fall der ständigen Zunahme von ζ nichts anderes als die asymptotische Annäherung von ω an einen gewissen Maximalbetrag bedeuten kann.

Offenbar kann es nur in der zweiten Gruppe der obigen Fälle, bei beständig zunehmender Rotationsgeschwindigkeit, zu Satellitenbildungen kommen, die also zu einem Sekundärsystem mit direkten Umlaufsbewegungen führen werden.

Man muß übrigens auch hier zunächst die Frage aufwerfen, unter welchen Umständen denn überhaupt die Formation einer zusammenhängenden Masse aus dem Nebelring möglich ist. Hier handelt es sich aber um Gleichgewichtsfiguren bei Anwesenheit einer entfernten attrahierenden Masse M.

Da im vorliegenden Fall als Abschluß des ersten Entwicklungsstadiums die Gleichheit von Rotation und Umlaufsbewegung eintreten muß, so kann man diesen besonderen Zustand der Betrachtung der Möglichkeit einer Gleichgewichtsfigur zugrunde legen. Man wird auch hier wieder die zwei extremen Fälle zu unterscheiden haben: die Nebelmasse sammelt sich um einen stark kondensierten Kern von kleinen Dimensionen aber überwiegender Masse an oder aber: die ganze den Planeten bildende Masse ist merklich homogen. Ist die Konstitution der Planetenmaterie der ersten Art, also von derselben extremen Massenverteilung wie die des primären Sonnennebels, so ergeben sich natürlich keinerlei Beschränkungen für das Bestehen einer Gleichgewichtsfigur überhaupt, sondern lediglich gewisse Grenzen für die Dimensionen dieses planetarischen Nebels, bedingt durch die theoretische Atmosphärengrenze, die aber nun wegen der Wirkung der außerhalb liegenden Masse M von wesentlich anderer Gestalt ist, als bei dem Sonnennebel.

Der andere, a priori viel wahrscheinlichere Fall einer — wenigstens zu Beginn der Entwicklung — nahezu homogenen Planetenmasse führt aber zu einer ganz bestimmten Grenzbedingung zwischen der Dichte und der mit der Umlaufsgeschwindigkeit gleichen Rotationsgeschwindigkeit.

Roche hat in seiner Abhandlung: »Figure d'une masse fluide, soumise à l'attraction d'un point éloigné« I. partie, Mémoires de la section des sciences de l'Académie de Montpellier 1849, gezeigt, daß in diesem Fall, das heißt bei rotierenden homogenen Flüssigkeitsmassen, die unter dem Einfluß einer störenden Masse von derselben Umlaufszeit stehen, dreiachsige ellipsoide Gleichgewichtsfiguren sein können.[1] Das Ergebnis ist folgendes:

Von den drei Achsen $a > b > c$

liegt c in der Rotationsachse und a ist, bei den stabilen Lagen, gegen die störende Masse gerichtet.

---

[1] Siehe auch Tisserand: Traité de mécanique céleste, t. II. c. VIII.

Setzt man $\frac{c^2}{a^2} = s$ $\frac{c^2}{b^2} = t$ ferner das Verhältnis der Flüssigkeitsmasse zur störenden Masse $\frac{m}{M} = \mu$ und

$$\lambda = \frac{\omega^2}{2\pi k^2 q}$$

so bestehen für das Gleichgewicht die Bedingungsgleichungen

$$\frac{\lambda}{1+\mu} = \frac{(1-s)s}{3\mu + s} \int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+u)(1+su)D}$$

$$= \frac{(1-t)t}{\mu + t} \int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+u)(1+tu)D}$$

$$= \frac{st(t-s)}{(3+\mu)t - \mu s} \int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+su)(1+tu)D}$$

wo $D^2 = (1+su)(1+tu)(1+u)$.

Die Gleichungen stellen nur zwei unabhängige Relationen vor: eine transzendente Gleichung zwischen den Größen s und t, und eine Relation die die Beziehung zwischen einem der Wertepaare s und t einerseits und der physikalischen Größe λ andrerseits herstellt. Nun zeigt die Diskussion dieser Gleichungen, daß auf dem in Frage kommenden Teil der st-Kurve (s von 0 bis 1) die Größe λ vom Wert Null bis zu einem vom Massenverhältnis μ abhängigen Maximalbetrag ansteigt, um für den Endpunkt wieder auf Null zu sinken, so daß bei gegebenem Massenverhältnis über einem gewissen Wert für λ keine ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren existieren.

Da im vorliegenden Fall m als sehr klein gegen M angenommen werden muß, für $\mu = 0$ aber als dieser Maximalbetrag von λ: 0·046 gefunden wird,[1] so erhält man als Bedingung für die Dichte q und die Rotationsgeschwindigkeit $\omega = n$

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 q} > 0{\cdot}046.$$

Da $\omega^2 = \frac{k^2 M}{a^3}$ und $a^3 q$ bei Homogenität der Nebelhülle im Verlauf der Kontraktion derselben nahezu konstant bleibt, so wird diese Bedingung, wenn sie einmal erfüllt war, auch bei den folgenden Ringbildungen erhalten bleiben, oder bei gegen das Innere zunehmender Dichte umso mehr erfüllt sein.

Auch hier wird die früher genannte Bemerkung Platz finden können, daß die Bedingung zwar nur für ellipoidische Gleichgewichtsfigurren gilt, aber immerhin einen Anhaltspunkt für die Größenordnung der oberen Grenze der charakteristischen Größe

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 q}$$

geben kann.

Stellt man übrigens diese Bedingung dem Maxwell'schen Stabilitätskriterium gegenüber, so erhält man eine Vorstellung von dem Grade der Kontraktion, die zur Bildung homogener planetarischer Massen notwendig ist. Nach dem letzteren wird der Ring sicher zu bestehen aufhören, wenn

[1] Siehe Roche l. c.

$4\pi k^2 q = \frac{1}{14}\omega^2$ ist, wo ω näherungsweise der mittleren Winkelbewegung n des Planeten und diese wieder gleich der Rotationsgeschwindigkeit des letzteren im betrachteten Stadium gleich gesetzt werden kann. In diesem muß die Größe $4\pi k^2 q$ über dem Betrag $\frac{\omega^2}{0\cdot 046}$ liegen, die Dichte also etwa dreihundertmal größer sein, was einer Kontraktion auf ein Siebentel des ursprünglichen Volumens entspricht. Eine derartige Kondensation muß also stattgefunden haben von dem Moment des Zerfalles des Ringes bis zu dem Stadium der Gleichheit von Rotation und Revolution.

Die Möglichkeit des Verhältnisses der dazu nötigen Zeiträume entzieht sich natürlich schon wegen der Verlagerung der Ringmaterie jeder Beurteilung. Für unser Sonnensystem ist übrigens diese Frage — mit einer einzigen Ausnahme — von keiner aktuellen Bedeutung, da die Massenverhältnisse der Satelliten die Entstehung der Sekundärsysteme aus homogenen planetarischen Massen ausschließen, vielmehr auf ähnliche Massenverteilungen, wie beim ursprünglichen Sonnennebel hinweisen.

8. Bildung von Sekundärsystemen.

Was die Bildung von Satelliten anbelangt, so erledigen sich zwei extreme Fälle unmittelbar. Ist die Gezeitenwirkung so groß, daß dauernd im Mittel $\omega = n$ erhalten bleibt, so ist eine solche von vornherein ausgeschlossen. Das wird bei den den Zentralkörper zunächst umkreisenden Planetenmassen der Fall sein. Ist die Gezeitenwirkung unmerklich, so können sich auch hier die ungestörten Abtrennungsvorgänge vollziehen: bei Homogenität der Poincaré-Darwin'sche, bei überwiegender zentraler Verdichtung die Laplace'sche Ringbildung, und so die Ursache von Sekundärsystemen mit rückläufiger Umlaufsbewegung werden. Das entspricht den Verhältnissen der entferntesten Planetenmassen. Zwischen diesen extremen Fällen liegen nun jene mittleren Verhältnisse, bei welchem wohl die Gezeitenwirkung die Umwandlung der ursprünglich retrograden Rotation in die direkte $\omega = n$ vollziehen kann, aber nicht mehr im stande ist, die beschleunigende Kontraktionswirkung aufzuheben, so daß ω auch von diesem Stadium an noch weiter zunimmt. Im Falle der Homogenität der Planetenmaterie kann sich, wie oben gezeigt wurde, der Beginn der rechtläufigen Rotation erst in einem weit vorgeschrittenen Zustand der Kondensation einstellen; es ist deshalb anzunehmen, daß bei fortwährend verringertem Gezeiteneinfluß und vergrößerter Rotationsgeschwindigkeit jene Gleichgewichtsfiguren angenommen werden, die bei Abwesenheit äußerer Kräfte auftreten, so daß auch hier eine Satellitenbildung auf dem Wege des Poincaré-Darwin'schen Prozesses möglich ist. Allerdings besitzt dieser Vorgang aus den angeführten Gründen eine geringere Wahrscheinlichkeit.

Handelt es sich aber um das andere Extrem der Massenverteilung, eine solche mit überwiegender zentraler Verdichtung, so kann bei genügender Verkleinerung der Dimensionen und Unmerklichwerden der deformierenden Wirkung des Zentralkörpers sich auch hier der Laplace'sche Prozeß wiederholen und so wie im Falle der Homogenität die Bildung rechtläufiger Sekundärsysteme veranlassen. In diesem zweiten Fall kann sich aber schon vor dem Eintreten der Bedingungen für den Laplace'schen Vorgang, also noch bei merklicher Deformationswirkung ein Abströmungsprozeß anderer Natur einstellen, der begründet ist durch die Form der Gashüllen unter der Wirkung einer äußeren störenden Masse. Ausführliche Untersuchungen darüber sind von E. Roche in der eingangs zitierten Arbeit angestellt worden: »Mémoire sur la figure des atmosphères des corps célestes«. Acad. d. sciences de Montpellier 1854. Für den vorliegenden Fall ist die folgende Betrachtung ausreichend.

Es seien unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen die Masse der zentralen Verdichtung des Planeten gleich m, und die Koordinaten eines Punktes der Oberfläche der Atmosphäre

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi \qquad y = r \sin\vartheta \sin\varphi \qquad z = r \cos\vartheta$$

bezogen auf die gemeinsame Rotations- und Bahnebene und einer nach dem Zentralkörper M gerichteten X-Achse.

Ist a der Radius der Kreisbahn, so ist das Potential der durch M bewirkten deformierenden Kraft mit genügender Annäherung gleich

$$\frac{1}{2} k^2 M \frac{r^2}{a^3} (3 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta - 1).$$

Das Gesamtpotential ist demnach

$$\frac{k^2 m}{r} + \frac{1}{2} k^2 M \frac{r^2}{a^3} (3 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta - 1) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta = U.$$

Setzt man $\frac{m}{M} = \mu$ und $\frac{\omega^2}{n^2} = \gamma$, wo n die Umlaufswinkelgeschwindigkeit, also $n^2 a^3 = k^2 (M + m)$ ist, so wird die Gleichung der Oberfläche

$$\frac{2\mu}{r} + \frac{r^2}{a^3} (3 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta - 1) + \frac{r^2}{a^3} \gamma (1 + \mu) \sin^2 \vartheta = C$$

oder

$$\frac{2\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{a^3} (2x^2 - y^2 - z^2) + \frac{1}{a^3} \gamma (1 + \mu)(x^2 + y^2) = C$$

eine Fläche, die also symmetrisch zu den gewählten Koordinatenachsen verläuft. Die Diskussion derselben führt zu ganz ähnlichen Resultaten, wie in dem einfacheren Fall des primären Sonnennebels. Es existieren insbesonders auch hier für einen bestimmten Wert der Konstanten C singuläre Stellen, die aber hier nicht ein Kontinuum in der Äquatorebene bilden, sondern sich auf zwei entgegengesetzte Punkte in dieser beschränken (wenigstens bei der angenommenen Näherung). Die Bedingung für diese sind

$$\frac{\delta U}{\delta x} = 0 \qquad \frac{\delta U}{\delta y} = 0 \qquad \frac{\delta U}{\delta z} = 0.$$

Der symmetrischen Verhältnisse wegen lassen die beiden letzteren erkennen, daß die betreffenden Stellen in der X-Achse liegen müssen, während die erste besagt, daß sich dort Zentrifugalkraft und deformierende Kraft mit der Attraktion des Kondensationszentrums das Gleichgewicht halten, so daß mit dem dadurch bestimmten Wert der Konstanten C die Atmosphärengrenze definiert ist.

Aus den Bedingungsgleichungen ergibt sich für diesen besonderen Wert der Konstanten

$$C_0 = \frac{3 \mu^{\frac{2}{3}}}{a} \sqrt[3]{2 + (1 + \mu)\gamma}$$

und für die Distanz r_0 — der halben großen Achse dieser Grenzfläche der Betrag

$$r_0 = a \sqrt[3]{\frac{\mu}{2 + (1 + \mu)\gamma}}.$$

Bei dem hier vorliegenden Entwicklungsstadium nimmt ω beständig zu, n ab, daher wächst γ beständig und die Grenzdistanz r_0 wird immer kleiner. Zu Abströmungen an den singulären Stellen wird es aber nur dann kommen, wenn die Abnahme der physischen Dimensionen weniger rasch vor sich geht. Das ist nun hier im Gegensatz zu der ungestörten Atmosphärengrenze nur bedingungsweise der Fall.

Setzt man μ als kleine Größe voraus, so ist

$$\frac{dr_0}{dt} = -\frac{r_0}{3}\frac{1}{2+\gamma}\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{2r_0}{3}\frac{\gamma}{2+\gamma}\left(\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{n}\frac{dn}{dt}\right)$$

oder, da $\frac{dn}{dt}$ höherer Ordnung als $\frac{d\omega}{dt}$ ist und

$$\frac{d\omega}{dt} = \sigma\omega - \Gamma(\omega - n)$$

$$\frac{dr_0}{dt} = -\frac{2}{3}r_0\frac{\gamma}{2+\gamma}\left[\sigma - \Gamma\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\right].$$

Dabei war die Verringerung der physischen Dimensionen nach der Relation

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{2}h\sigma$$

vorausgesetzt. Eine Abströmung wird nun dann stattfinden, wenn für $r_0 = h$ dem absoluten Betrag nach

$$\left|\frac{dr_0}{dt}\right| > \left|\frac{dn}{dt}\right|$$

was auf die Bedingung $\frac{\gamma - 6}{6(2+\gamma)}\sigma > \Gamma\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)$ führt, die im Anfangsstadium $\gamma = 1$ überhaupt nicht erfüllt sein kann und selbst für sehr große Werte von γ verlangt, daß $\Gamma < \frac{\sigma}{6}$ ist; das sind aber Verhältnisse, die sich jedenfalls schon sehr denjenigen nähern, die eine Ringabtrennung ermöglichen.

Roche glaubt übrigens, daß bei dieser Art der Abströmung die physikalischen Bedingungen für eine Satellitenbildung überhaupt nicht gegeben sind. Man sieht, daß schon das Zustandekommen einer derartig lokalisierten Abströmung, wenigstens in ausgeprägter Weise, kaum wahrscheinlich ist. Man kann wohl annehmen, daß im allgemeinen eine Satellitenbildung erst dann stattfinden wird, wenn die Kontraktion und Rotationsgeschwindigkeit so weit vorgeschritten ist, daß die Bedingungen für den ursprünglichen Laplace'schen Abtrennungsprozeß nahezu wieder hergestellt sind.

9. Die kosmogonischen Verhältnisse unseres Sonnensystems.

Die grundlegenden Daten für diese sind die beiden Konstanten eines kosmogonischen Prozesses: die Gesamtmasse des Systems und das Rotationsmoment. Unter der Voraussetzung, daß mit der Neptunsbahn tatsächlich jene Grenze erreicht ist, innerhalb der sich merkliche Massen befinden, ist die Gesamtmasse des Systems in Einheiten der Sonnenmasse

$$1 + \frac{1}{745 \cdot 9} = 1 \cdot 0013406.$$

Nimmt man weiter als Zeit- und Längeneinheit den mittleren Sonnentag und die mittlere Entfernung Erde-Sonne, so findet man für das Rotationsmoment der Sonne

$$K_\odot = 0 \cdot 000\ 001\ 364.$$

Das Moment aus den Revolutionen der Planeten

$$\Sigma m a^2 n = k \Sigma m \sqrt{M+m}\sqrt{a}$$

ergibt

$$K_p = 0 \cdot 000\ \ 060\ \ 866$$

also etwa den sechzigfachen Betrag.

Das Gesamtmoment, die zweite Konstante des Systems ist demnach

$$K = 0\cdot000\ \ 062\ \ 230.$$

Derselbe Betrag muß der gemeinsamen Rotationsbewegung der ganzen Masse vor Abtrennung des Neptunringes entsprochen haben. Im Moment der Abtrennung war die Gashülle begrenzt von jener linsenförmigen Fläche, die die theoretische Atmosphärengrenze bildet, mit einem Äquatorhalbmesser gleich der mittleren Entfernung Sonne-Neptun und einer Rotationsgeschwindigkeit gleich der mittleren täglichen siderischen Bewegung dieses Planeten: n.

Ist das Trägheitsmoment der zentralen Verdichtung J_0, das der Nebelhülle $J_{(m)}$, so ist demnach

$$(J_{(m)} + J_0)\, n = K.$$

Nach den in 2. gegebenen Formeln für Masse und Trägheitsmoment der homogenen atmosphärischen Gleichgewichtsfiguren findet sich für den Grenzfall ($c = 1$) des linsenförmigen Körpers

$$m = \frac{4\pi}{3} q\, r_0^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(1 + \frac{8}{27} + \frac{256}{3645} + \ldots\right) = \frac{4\pi}{3} q\, r_0^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 1\cdot367$$

$$= \frac{4\pi}{3} 0\cdot405 \,.\, r_0^3\, q = 1\cdot696\, r_0^3\, q$$

und für das Trägheitsmoment bezüglich der Rotationsachse

$$J = \frac{4\pi}{5} q\, r_0^5 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(1 + \frac{16}{27} + \frac{640}{1701} + \ldots\right)$$

$$= \frac{4\pi}{5} q\, r_0^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot 1\cdot969 = 0\cdot434\, r_0^5\, q,$$

so daß also sehr nahe

$$J = \frac{1}{4} m\, r_0^2$$

für einen derartigen Körper ist.

Für Neptun ist $n = 0\cdot000\,104\,405$, man erhält somit für $\dfrac{K}{n}$ oder für die Summe der Trägheitsmomente von Nebelhülle und der zentralen Verdichtung für diesen Anfangszustand

$$J_{(m)} + J_0 = 0\cdot596.$$

Nimmt man letztere als kugelförmig an, so muß für dieses primäre Stadium, wenn a die mittlere Neptundistanz ist,

$$\frac{1}{4}(m)\, a^2 + \frac{2}{5} M_0\, h_0^2 = 0\cdot596$$

sein, wo M_0 und h_0 Masse und Halbmesser des zentralen Teiles und $a = 30\cdot11$ ist. Man ist nun keinesfalls berechtigt, die Masse (m) der Hülle etwa mit der Summe m der Planetenmassen und M_0 mit der Sonnenmasse zu identifizieren, weil nur ein Teil der abströmenden Schichte zur Bildung der äußeren Ringe beiträgt, der übrige aber wieder von der Nebelhülle aufgenommen wird. Es würde auch tatsächlich die Annahme $(m) = 0\cdot0013406$ und $M_0 = 1$ zu ganz unwahrscheinlichen Dimensionen der Zentralmasse führen: man würde für h_0 den Betrag von $0\cdot844$ in astronomischen Einheiten, also etwa das 230fache des gegenwärtigen Sonnenradius erhalten. Andrerseits ergibt aber die Gleichung ein h_0, das nahe gleich diesem ist, wenn man $(m) = 1\cdot96\, m$ setzt, das heißt, wenn man die Masse der ursprünglichen Nebelhülle etwa auf das Doppelte der Gesamtmasse der Planeten veranschlagt. Man erhält dadurch Veränderungen der Dimensionen der Zentralmasse, die in völlig plausiblen Grenzen liegen. Würde man die ursprüngliche Masse (m) der Hülle noch größer annehmen, so würden sich kleinere Dimensionen für die Zentralmasse als die gegenwärtigen ergeben, was an sich keinen Widerspruch enthalten, sondern nur besagen würde, daß die Kontraktion der Zentralmasse mehr als aufgehoben wird durch Ansammlung von Materie an diesem Kern, die ja schon durch die Abströmung aus den polnahen Teilen der äußersten Schichten erfolgen muß. Jedenfalls hat die Annahme $(m) = 1 \cdot 96\, m$ und das damit verbundene merkliche Konstantbleiben der Dimensionen des Kernes die Berechtigung eines wahrscheinlichen mittleren Zustandes.

Was die ursprüngliche Dichte der Nebelhülle anbelangt, so ergibt sich diese in Einheiten der gegenwärtigen mittleren Dichte der Sonne $q_\odot$ aus

$$\frac{q}{q_\odot} = \frac{5}{2}(m)\left(\frac{h}{a}\right)^3$$

als von der Größenordnung $q = q_\odot \cdot 10^{-14}$.

Man kann nun daraus die ursprüngliche Dichte der einzelnen Planetenringe finden, wenn man die durch die Ringabsonderung erfolgte bekannte Massenverringerung und die den mittleren Planetendistanzen entsprechende Kontraktion der übrigbleibenden Nebelmasse in Rechnung zieht. Daraus ergibt sich aber das Volumen der Ringe und mit Rücksicht auf die bekannte Länge der Ringachse auch der Querschnitt derselben. Letzterer soll durch den Radius ρ eines gleich großen Kreises charakterisiert werden.

Man erhält, wenn man die ursprüngliche Dichte der Nebelmasse $= 1$ setzt, folgende Zahlen:

Erzeugender Ring für:	Dichte	ρ des Querschnittes in Einheiten: mittlere Entfernung Sonne—Erde	Abstand der Bahnen
Neptun	1·0	1·357	
			10·89
Uranus	3·8	0·804	
			9·66
Saturn	30	1·030	
			4·25
Jupiter	166	1·088	
			3·68
Mars	3965	0·0076	
			0·52
Erde	14020	0·0151	
			0·28
Venus	36120	0·0100	
			0·34
Merkur	235250	0·0014	

Die ursprüngliche Dichte des Merkurringes war demnach

$$q = 3 . 10^{-9} q_\odot .$$

Das Bestehen der planetarischen Ringe ist an gewisse Grenzen gebunden, innerhalb deren die Dichte liegen muß, wie in 5. gezeigt wurde. Die Bedingung für die untere Grenze ist nun bei der anfänglichen Geschwindigkeitsverteilung jedenfalls erfüllt, als notwendige Bedingung für die Möglichkeit einer Ringbildung bleibt also nur die Maxwell'sche Stabilitätsbedingung

$$4\pi k^2 q < \frac{\omega^2}{14}$$

oder wegen der Eigenschaft der Kreisbahn

$$4\pi q a^3 < \frac{1}{14} M.$$

Da die Masse einer homogenen Nebelhülle vom Äquatorhalbmesser a gleich $4\pi . 0 \cdot 135 a^3 q = m$ ist, so muß

$$m < \frac{1}{100} M,$$

das heißt, die Ringdichte muß so klein sein, daß eine ihr entsprechende homogene Hülle eine Masse kleiner als ein Hundertel der Zentralmasse haben müßte. Da der wahrscheinliche Wert der ursprünglichen Nebelmasse (m) in der Umgebung von $0 \cdot 0026$ liegt, so ist diese Bedingung unter Voraussetzung näherungsweiser Homogenität erfüllt und wird auch erfüllt bleiben, da dann bei der Kondensation $a^3 q$ merklich konstant bleibt — eigentlich wegen der Ringabtrennungen sogar etwas kleiner wird.

Wenn aber in irgend einer Region der Nebelhülle eine starke Abweichung von der Homogenität stattfindet, etwa eine Zunahme der Dichte, so daß für die aufeinander folgenden Ringbildungen die Größe $a^3 q$ zunimmt, so kann von irgend einer Abtrennungsdistanz a an die Möglichkeit einer Ringbildung nicht mehr gegeben sein und nur eine Zone zerstreuter Materie entstehen. Wie man aus dem wahrscheinlichen Wert für (m) erkennt, würde das bei dem vierfachen Betrag der mittleren Dichte eintreten. Bei einem derartigen zerstreuten Zustand ist nun allerdings eine Vereinigung zu einer zusammenhängenden Planetenmasse von vornherein ebenso denkbar, wie nach einem Ringzerfall, nur ist hier diese Vereinigung schon wegen der offenbar viel größeren Zerstreuung sehr unwahrscheinlich, kann aber unter Umständen ganz unmöglich werden. Man kann nämlich wohl annehmen, daß es sich dabei zunächst um die Bildung kleinerer homogener Massen handeln wird. Für die Vereinigung zu größeren homogenen Massen, die schon einer merklichen Gezeitenwirkung unterliegen, muß aber nach der Grenzbedingung für homogene Gleichgewichtsfiguren unter diesen Verhältnissen

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 q} < 0 \cdot 046 \quad \text{oder} \quad 4\pi k^2 q > 43\,\omega^2$$

die Dichte über einem bestimmten Betrage liegen, der, wie man unmittelbar sieht, noch sehr weit von jenem entfernt ist, der die Ringbildung unmöglich gemacht hat. Das wahrscheinliche Resultat wird also eine Zone zahlreicher kleiner Begleitkörper sein.

Die Umstände für die Bildung einer einzigen Planetenmasse liegen nach dem Zerfall eines Ringes viel günstiger. Abgesehen von der wahrscheinlich viel geringeren Zerstreuung kann in diesem vorgeschrittenen Stadium die Dichte für die Bildung größerer homogener Massen bereits den erforderlichen Betrag erreicht haben; möglicherweise ist aber schon ein Kondensationszentrum vorgebildet, dann ist die Laplace'sche Massenanordnung mit dem der Masse nach überwiegenden Kern gegeben und bei einer solchen existiert nur eine Bedingung für die Dimension der atmosphärischen Hülle (der in 8. gegebenen Größe r_0).

Nimmt somit schon in dem ursprünglichen Laplace'schen Sonnennebel die Dichte der Gashülle gegen den Kern stetig zu, so werden für die ersten Abtrennungen die Bedingungen für die Ringbildung und daraus sich entwickelnder Laplace'scher Sekundärsysteme gegeben sein; in jener Distanz, in welcher für die Grenzschichte

$$4\pi k^2 q > \frac{\omega^2}{14}$$

wird, wird eine Zone kleinerer Körper beginnen, die dort enden wird, wo

$$4\pi k^2 q > 43\,\omega^2$$

ist, und die Möglichkeit des Zusammenballens der abströmenden Massen zu dichteren homogenen Körpern ohne vorhergehende Ringbildung beginnt.

Wie man sieht, ergibt sich aus dieser Annahme das Charakteristische der Konstitution unseres Sonnensystems mit dem zwei Planetenkategorien trennenden Asteroidenring.

Es ist zu bemerken, daß Roche für die Entstehung des letzteren gerade die entgegengesetzte Annahme gemacht hat: eine Zone geringerer Dichte, beziehungsweise eine Abnahme der charakteristischen Größe $a^3 q$. Roche berücksichtigt nur die Bedingung für die Bildung homogener Planetenmassen, die eine untere Grenze für die Dichte bestimmt, muß demnach für die Masse der Nebelhülle am Beginn der Planetenbildungen einen unwahrscheinlich hohen Betrag annehmen und für das Intermittieren innerhalb der Asteroidenzone einen Rückgang im Verlauf der Dichte, die ziemlich willkürlich als Folge einer vermehrten Kondensation um die Zentralmasse angenommen wird.

Diese Zwischenzone des Dichteverlaufes, die für die Bildung größerer zusammenhängender Planetenmassen ungeeignet ist, kann noch schärfer durch die Bildung der inneren Ringe ausgeprägt sein. Angenommen, es würde für den regulären Verlauf der Dichte etwa innerhalb der Marsbahndistanz die Region merklichen Widerstandes der Nebelmasse begonnen haben. Nach den Betrachtungen in 2. *a* würden dann die inneren Kreisströme vom Typus D zwischen dieser und der — näherungsweise — doppelten Distanz eine Häufungsstelle besitzen, daher ein abnormales Ansteigen der Dichte verursachen und die asteroidische Zone in die Umgebung der Maximaldichte verlegen, so daß nach dieser Zone noch einmal ein Laplace'scher Körper möglich wäre, worauf das Massenverhältnis der Marssatelliten hinweist.

Die physikalischen Verhältnisse der inneren Planeten hingegen lassen eher auf eine direkte Vereinigung aus der abgeströmten Materie zu einem nahezu homogenen Körper ohne vorhergehende Ringbildung schließen, was auch durch das Massenverhältnis des Erdmondes zu seinem Hauptkörper bestätigt wird.

Wie aus den hier durchgeführten Betrachtungen hervorgeht, lassen sich die Laplace'schen Vorstellungen über den Ausgangszustand und die Entwicklung unseres Sonnensystems, sowie die von Roche daran geknüpften Ausführungen, soweit sie die großen Züge betreffen, völlig aufrecht erhalten. Aus der Kenntnis gewisser Stabilitätsbedingungen, ferner aus der durch die Arbeiten Darwins gegebenen Einsicht in die Bedeutung der Gezeitenwirkung bei kosmogonischen Vorgängen haben sich allerdings in einzelnen Punkten wesentliche Modifikationen ergeben müssen. Diese letzteren haben aber das ganze Bild des Entstehungsprozesses nicht nur einheitlicher gestaltet und durch Annahmen, die völlig in der Natur des Ausgangszustandes gelegen sind, von Schwierigkeiten befreit, die auch noch von Roche nur durch etwas erzwungene Hilfshypothesen beseitigt werden konnten — sondern sind auch imstande, gewisse Einwände zu entkräften, die gegen die Laplace'sche Kosmogonie erhoben wurden.

Es soll noch bemerkt werden, daß die quantitativen Verhältnisse der äußeren großen Planeten und ihrer Sekundärsysteme sich restlos dem Laplace'schen Entwicklungsprozeß anpassen. Die ziffermäßigen Nachweise finden sich ausführlich in Roche's schon mehrfach zitiertem »Essai sur la constitution et l'origine du système solaire« Montpellier 1873, worauf hier, um Wiederholungen zu vermeiden, hingewiesen werden muß, einer Arbeit, welche in diesem Teil keiner weiteren Ergänzungen oder Berichtigungen bedarf (vielleicht mit Ausnahme der Betrachtung über das Ringsystem

Saturns, dessen bereits in 3. *a* der vorliegenden Abhandlung gedacht wurde). Wesentlich andere Vorgänge liegen der Entwicklung der inneren Planeten zugrunde, zu deren ausführlicher Analyse die Fundamente in den die wissenschaftliche Kosmogonie begründenden großen Arbeiten Poincaré's und Darwin's gegeben sind.

Ihre ausschließliche Geltung dürften diese letzteren wohl in der Entwicklung der Doppel- und mehrfachen Systeme haben, während die Verhältnisse in unserem Sonnensystem im großen und ganzen zweifellos die Laplace'schen Anschauungen als gegeben erscheinen lassen.

Die Laplace'sche kosmogonische Hypothese — mit den hier erörterten Modifikationen — erscheint daher in der Einfachheit ihrer Voraussetzungen und der inneren Konsequenz ihrer Folgerungen, die keiner weiteren ergänzenden Hypothesen bedürfen, sowie in ihrer Widerspruchslosigkeit mit den realen quantitativen Verhältnissen, wohl als die wahrscheinlichste und am besten begründete Anschauung über die Entwicklungsgeschichte unseres Sonnensystems.