BRECHUNG UND REFLEXION
DES LICHTS AN ZWILLINGSFLÄCHEN
OPTISCH-EINAXIGER VOLLKOMMEN DURCHSICHTIGER MEDIEN.

VON
JOSEPH GRAILICH.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 1. FEBRUAR 1855

ÜBER DIE BRECHUNG UND REFLEXION DES LICHTS AN ZWILLINGSFLÄCHEN OPTISCH-EINAXIGER KRYSTALLE.

Der geometrische Charakter der Zwillingsbildungen ist seit dem Beginne dieses Jahrhunderts ein Gegenstand scharfsinniger und erschöpfender Arbeiten gewesen; die Schöpfer und ausgezeichnetsten Fortbilder der heutigen Mineralogie haben nach einander die bewunderungswürdige Kraft ihrer Anschauung an dem Studium der Hemitropien versucht, und es ist zu erwarten, dass Leydolt's schöne Methode den letzten Stein zur Vollendung dieses Werkes liefern werde.

Über den geometrisch-krystallographischen Charakter hinaus erstrecken sich aber diese Forschungen nicht. Die Physik dieser Bildungen blieb bisher unbeachtet, oder doch unbetrachtet. Es ist einleuchtend, dass in den Gesetzen, welche die Molekularactionen der Individuen aussprechen, auch die der Zwillingsbildungen enthalten sein müssen. Aber aus dem symmetrischen Gefüge muss ein Zusammenhang zwischen den Erscheinungen dies- und jenseits der Zusammensetzungsfläche resultiren, welcher das Gepräge jener Symmetrie wiederspiegelt und den Geist, der sich überall am Harmonischen und Gesetzmässigen erfreut, zur Betrachtung einladet. Dazu gesellt sich ein anderer Umstand, durch den die optische Untersuchung, welche wir hier mittheilen, eine Ergänzung und Vervollständigung einer physikalischen Theorie wird. Man hat nämlich die Gesetze der Brechung und Reflexion studirt für den Fall sowohl, wo die beiden sich begrenzenden Medien isophan sind — Fresnel, Green, Cauchy — als auch für den, wo das eine Medium krystallinisch und doppelbrechend, das andere einfach brechend ist — Neumann, Mac-Cullagh, Cauchy (vergleiche den zweiten Abschnitt); der Fall aber, wo beide Mittel anisophan sind, wurde noch nicht in Untersuchung gezogen. Es würde kaum der Mühe werth sein, so lange noch eine grosse Zahl von wichtigen Fragen ungelöst vorliegt, dieses Problem allgemein aufzulösen, da zwar nichts im Wege steht, es als eine Aufgabe mathematischer Natur aufzufassen, dagegen die physikalische Bedeutung wesentlich fehlte, indem weder die Natur noch auch die heutige Kunst optische Combinationen von verschiedenartigen Krystallen aufzuweisen hat. Nur in den Zwillingsbildungen, wo zwei Individuen derselben Natur in verwendeter Stellung — etwa wie Bild und Spiegelbild — gesetzmässig mit einander verbunden sind, zeigt sich ein Gegenstand für diese erweiterte Anwendung der Theorie. So habe ich die Aufgabe aufgefasst und ich werde versuchen darzustellen, welche specielle Modificationen die allgemeinen Gesetze der Lichtbewegung unter dem Einflusse der symmetrisch gelagerten Moleküle der hemitropen Combinationen erleiden. Dabei beschränke ich mich auf die Betrachtung optisch einaxiger Medien, um die verwickelten Formeln durch eine allgemeinere Behandlung nicht noch complicirter zu machen.

ERSTER ABSCHNITT.

§. 1.

RICHTUNG DER REFLECTIRTEN UND GEBROCHENEN WELLEN UND STRALEN.

In den Differentialgleichungen der Lichtbewegung treten als Variable die Coordinaten des Raumes x, y, z und die Zeit t auf; da es nach Cauchy's frühesten Untersuchungen zu einerlei Ergebniss führt, ob man die Differentialgleichungen durch Wellenflächen doppelter Krümmung oder durch ebene Wellen integrirt, welche die Wellenfläche einhüllen, und da die Oscillationsbewegung eine nach Zeit und Ort periodische ist, so kann man die particulären Integrale proportional setzen einer Exponential- oder trigonometrischen Function des Quadrinoms $ux + vy + wz - st$, wo u, v, w proportional sind den Cosinussen der Winkel, welche die Normale einer ebenen Welle mit den Coordinatenaxen einschliesst. Da an der Trennungsebene zweier Medien die Bewegung, welche ein Äthermolekül erhält, insoferne sie sich auf jene Grenze bezieht, dieselbe sein muss für alle Wellen, und in einem doppelbrechenden Medium jede einfallende Welle an der Grenzfläche die Entstehung von zwei reflectirten Wellen erregt, so dass in einem Zwillinge die Zahl der an der Zwillingsfläche wirksamen Bewegungen 5 sein wird, die Functionen sind von .

$$
\begin{array}{l}
k\ (u\ x + v\ y + w\ z) - st \\
k'_o\ (u'_o\ x + v'_o\ y + w'_o\ z) - s'_o\ t \\
k'_e\ (u'_e\ x + v'_e\ y + w'_e\ z) - s'_e\ t \\
k''_o\ (u''_o\ x + v''_o\ y + w''_o\ z) - s''_o\ t \\
k''_e\ (u''_e\ x + v''_e\ y + w''_e\ z) - s''_e\ t
\end{array}
$$

(wo die einfach gestrichelten Buchstaben sich auf die reflectirte, die doppelt gestrichelten auf die gebrochene, der Index o auf die ordentliche, e auf die ausserordentliche Bewegung bezieht: u, v, w, ... die Cosinusse der Normalen bedeuten und $\frac{2\pi}{k} = l$ die Wellenlänge, $\frac{2\pi}{s} = T$ die Oscillationsdauer bezeichnet), so hat man für den Fall, dass die Trennungsfläche der zwei Individuen die XY Ebene ist, für $z = o$

$$
k\,(u x_1 + v y) - st = k'_o\,(u'_o\,x + v'_o\,y) - s'_o\,t = k'_e\,(u'_e\,x + v'_e\,y) - s'_e\,t = k''_o\,(u''_o\,x + v''_o\,y) - s''_e\,t = k''_e\,(u''_e\,u + v''\ \ y) - s''_e\,t.
$$

Dies ist es, was Cauchy das Princip der correspondirenden Bewegungen nennt. Da diese Gleichung unabhängig von den speciellen Werthen der Variabeln sein soll, so muss

$$
\begin{aligned}
ku &= k'_o\, u'_o = k'_e\, u'_e = k''_o\, u''_o = k''_e\, u''_e \\
kv &= k'_o\, v'_o = k'_e\, v'_e = k''_o\, v''_o = k''_e\, v''_e \\
s &= \quad s'_o = \quad s'_e = \quad s''_o = \quad s''_e
\end{aligned}
$$

sein. Die letzte dieser Gleichungen zeigt, dass

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T'_o} = \frac{2\pi}{T'_e} = \frac{2\pi}{T''_o} = \frac{2\pi}{T''_e}$$

ist, folglich bei der Reflexion und Brechung an Zwillingsfläche keine Farbenänderung stattfinden kann; die ersten zwei Gleichungen weisen nach, dass die Tracen der einfallenden reflectirten und gebrochenen Wellen in eine einzige Gerade zusammenfallen. Nennt man φ, φ'_o . . . den Einfalls-, Reflexions . . . . . Winkel, ω das Azimuth der Einfallsebene der Wellennormalen, so hat man

$$
\begin{aligned}
u &= \sin\varphi\ \cos\omega \quad & v &= \sin\varphi\ \sin\omega \quad & w &= \cos\varphi \\
u'_o &= \sin\varphi'_o \cos\omega'_o \quad & v'_o &= \sin\varphi'_o \sin\omega'_o \quad & w'_o &= \cos\varphi'_o \\
&\ldots & &\ldots & &\ldots
\end{aligned}
$$

folglich

$$
\begin{aligned}
k\sin\varphi\ \cos\omega &= k'_o \sin\varphi'_o \cos\omega'_o = k'_e \sin\varphi'_e \cos\omega'_e = k''_o \sin\varphi''_o \cos\omega''_o = k''_e \sin\varphi''_e \cos\omega''_e \\
k\sin\varphi\ \sin\omega &= k'_o \sin\varphi'_o \sin\omega'_o = k'_e \sin\varphi'_e \sin\omega'_e = k''_o \sin\varphi''_o \sin\omega''_o = k''_e \sin\varphi''_e \sin\omega''_e .
\end{aligned}
$$

Dividirt man die zweite Zeile durch die erste, so findet man

$$tg\,\omega = tg\,\omega'_o = tg\,\omega'_e = tg\,\omega''_o = tg\,\omega''_e$$

d. i. die Wellennormalen bleiben in der Einfallsebene; folglich

$$k\sin\varphi = k'_o \sin\varphi'_o = k'_e \sin\varphi'_e = k''_o \sin\varphi''_o = k''_e \sin\varphi''_e$$

und dies gilt, wenn man für k, k'_o . . . die Werthe setzt und bedenkt, dass $\frac{l}{T}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit Ω der Welle ist, wegen Erhaltung der Schwingungsdauer

$$\sin\varphi : \sin\varphi'_o : \sin\varphi'_e : \sin\varphi''_o : \sin\varphi''_e = \Omega : \Omega'_o : \Omega'_e : \Omega''_o : \Omega''_e .$$

§. 2.

Diese für Combinationen beliebig zweier Krystalle allgemein geltenden Sätze sind nun auf Zwillinge optisch einaxiger Medien anzuwenden. Dies ist bereits in zwei früheren Aufsätzen geschehen, welche sich in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, mathem. naturw. Cl. Band XI, 817 (Betrachtung einer einzelnen Welle, eines einzelnen Strales) und Band XII, 230 (Betrachtung eines Wellen-, Stralenkegels beim Durchgange durch die Zwillingsebene) abgedruckt finden. Wir verweisen auf die dort erhaltenen Resultate, um sie hier weiter zu verfolgen. Es fand sich, dass die Brechungswinkel gleich sind den Reflexionswinkeln; da nun für eine einfallende ordentliche Welle der Reflexionswinkel der ordentlich reflectirten Welle gleich ist dem Einfallswinkel, so wird dies auch der Brechungswinkel; folglich pflanzt sich die einfallende gewöhnliche Welle ohne Richtungsänderung in das zweite Medium fort. Ist die einfallende Welle eine ausserordentliche, so finden ebenfalls einfache Verhältnisse zwischen ihr und den durch sie erregten ausserordentlichen reflectirten und gebrochenen Wellen statt; wir fanden nämlich, dass, wenn ξ, η, ζ die Cosinusse der Winkel, welche der einfallende Stral mit den Coordinatenrichtungen einschliesst (und es ist der Hauptschnitt des Krystalles für die XZ, die Zwillingsfläche für die XY gesetzt), und $\xi_e'', \eta_e'', \zeta_e''$ die entsprechenden Cosinusse des gebrochenen und $\xi_e', \eta_e', \zeta_e'$ die des reflectirten Strales bezeichnen, und

$$Q = \left(\frac{o^2}{e^2} - 1\right) \sin\alpha . \cos\alpha$$

$$P = 1 - \left(\frac{o^2}{e^2} - 1\right) \sin\alpha^2$$

bedeutet — wo o, e die Geschwindigkeit der ordentlichen und ausserordentlichen Wellen senkrecht zur optischen Axe, und α die Neigung der optischen Axe gegen die Zwillingsfläche ist — folgende Relationen

$$\xi''_e = -\frac{P\xi - 2Q\zeta}{\sqrt{4Q\zeta(Q\zeta - P\zeta) + P^2}} \quad \eta''_e = -\frac{P\eta}{\sqrt{4Q\zeta(Q\zeta - P\zeta) + P^2}} \quad \zeta''_e = -\frac{P\zeta}{\sqrt{4Q(Q\zeta - P\zeta) + P^2}}.$$

Aus diesen Gleichungen ziehen wir nun folgende Resultate:

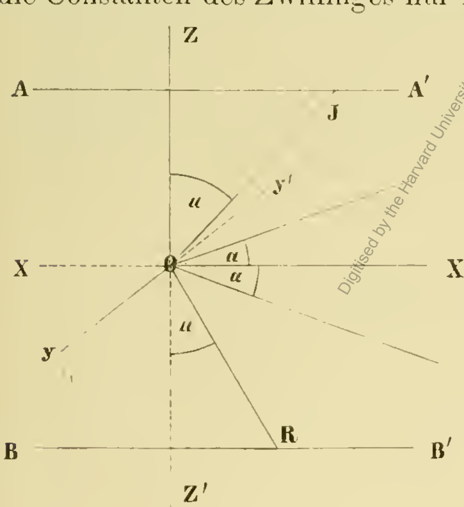
1. Da $\frac{\eta_e''}{\zeta_e''} = \frac{\eta}{\zeta}$, so muss der gebrochene Stral mit dem einfallenden und der Axe der X stets in einer Ebene bleiben; die Axe der X aber ist die Projection der optischen Axe auf die Zwillingsfläche.

Da für den reflectirten Stral $\xi'_e = \xi''_e$, $\eta'_e = \eta''_e$, $\zeta'_e = -\zeta''_e$ ist, so wird $-\frac{\eta'_e}{\zeta'_e} = \frac{\eta}{\zeta}$; es wird daher, wenn wir die Ebene, die durch den Stral S, S'_e, S''_e und eine der Coordinatenaxen durch (S, X), $(S'_e X)$ ..... bezeichnen, der Winkel (S, X) (XZ) gleich sein dem Winkel $(S'_e X)$ (XY).

Diese zwei Sätze enthalten eine merkwürdige Erweiterung des oben erwähnten, zwischen den ordentlichen Stralen waltenden Gesetzes. Sie lassen sich folgendermassen aussprechen:

Nennen wir die Ebene, welche sich durch irgend einen ausserordentlichen Stral und die Projection der optischen Axe legen lässt, die Ebene dieses Strales, und den Winkel, den diese Ebene mit der Zwillingsfläche einschliesst den Incidenz-, Reflexions-, Brechungswinkel der Ebene des einfallenden, reflectirten, gebrochenen Strales, so ist der Reflexions- und Brechungswinkel immer gleich dem Einfallswinkel der Stralen.

2. Dividiren wir in jeder der drei Gleichungen Zähler und Nenner durch P, so kommen die Constanten des Zwillinges nur noch unter der Form $\frac{Q}{P}$ vor. Nun ist dieser Quotient nichts anders, als die Tangente des Einfallswinkels jenes Strales, der zu einer Welle gehört, die parallel ist der Zwillingsebene. In der beistehenden Figur ist AA' die einfallende ausserordentliche Welle, welche auch im zweiten Individuum parallel der Zwillingsfläche XY bleibt, und durch BB' bezeichnet ist. In diesem Falle wird der einfallende Stral JO nach RO gebrochen ($\angle JOZ = \angle ROZ'$), und es ist $tg\, JOZ = tg\, ROZ' = \frac{Q}{P} = tg\,\mu$. Dieser Winkel μ, durch den der Zwilling vollständig charakterisirt ist, nenne ich den charakteristischen Winkel des Zwillingskrystalles und die Formeln für den gebrochenen Stral werden dann:



$$\xi''_e = -\frac{\xi - 2\,tg\,\mu\,\zeta}{\sqrt{1 + 4\,\zeta\,tg\,\mu\,(tg\,\mu\,.\,\zeta - \xi)}}\;\eta''_e = -\frac{\eta}{\sqrt{1 + 4\,\zeta\,tg\,\mu\,(\zeta\,tg\,\mu - \xi)}}\;\zeta'_e = -\frac{\zeta}{\sqrt{1 + 4\,\zeta\,tg\,\mu\,(\zeta\,tg\,\mu - \xi)}}.$$

3. Der gebrochene Stral wird aus der Einfallsebene abgelenkt. Nennen wir das Azimuth der Einfalls-, Reflexions- und Brechungsebene ω, ω'_e, ω''_e, die Winkel des einfallenden, reflectirten und gebrochenen Strales mit dem Einfallslothe φ, φ'_e, φ''_e, so ist

$$tg\,\omega = \frac{\eta}{\xi} \qquad \frac{cotg\,\varphi}{cos\,\omega} = \frac{\zeta}{\xi}$$

$$tg\,\omega'_e = \frac{\eta'_e}{\xi'_e} = \frac{\eta''_e}{\xi''_e} \quad \frac{cotg\,\varphi'_e}{cos\,\omega'_e} = \frac{\zeta'_e}{\xi'_e} = -\frac{\zeta''_e}{\xi''_e}$$

$$tg\,\omega''_e = \frac{\eta''_e}{\xi''_e} \qquad \frac{cotg\,\varphi''_e}{cos\,\omega''_e} = \frac{\zeta''_e}{\xi''_e}.$$

Der reflectirte Stral bleibt mit dem gebrochenen und dem Einfallslothe in einer Ebene. Nennen wir die Azimuthabweichung (d. i. den Winkel, den die Reflexions- oder Brechungsebene mit der Einfallsebene einschliesst) δ, so ist $\omega - \omega'_e = \omega - \omega''_e = \delta$ und dies nach den gegebenen Formeln entwickelt, führt nach einigen leichten Reductionen auf den Ausdruck

$$tg\,\delta = \frac{2\,sin\,\omega\,tg\,\mu}{tg\,\varphi - 2\,cos\,\omega\,tg\,\mu}.$$

Man sieht, dass die Abweichung nur im Hauptschnitte verschwindet. Am grössten wird sie für Stralen, die senkrecht einfallen; denn da die Formel dafür $\delta = \omega$ gibt, das Azimuth eines senkrecht einfallenden Strales aber beliebig gross, also auch 90^0 genommen werden kann, so ist in diesem Falle das Maximum der möglichen Abweichung gegeben. In der That, setzen wir $\omega = 90^0$, d. i. lassen wir die Stralen einfallen in einer Ebene, die senkrecht auf dem Hauptschnitte steht, so wird

$$tg\,\delta = \frac{2\,tg\,\mu}{tg\,\varphi},$$

dies gibt für δ einen Werth, der sich ohne Ende 90^0 nähert, je kleiner der Einfallswinkel φ wird.

4. Die innigen Beziehungen, welche zwischen den ausserordentlichen Stralen und der Projection der optischen Axe herrschen, machen es interessant zu untersuchen, welche Verhältnisse stattfinden zwischen den Winkeln, welche diese Richtungen unter einander einschliessen. Nennen wir den Winkel, den irgend ein einfallender ausserordentlicher Stral mit der Axe der X einschliesst, χ und den Winkel des zugehörigen, gebrochenen Strales χ''_e, so ist $\xi_e = cos\,\chi$, $\xi''_e = cos\,\chi''_e$; nennen wir ferner den Winkel, den die Ebene des Strales mit dem Hauptschnitte einschliesst, τ, so ist, da nach 1) τ gleich ist $\tau'_e = \tau''_e$, der gebrochene (reflectirte) Stral vollkommen bestimmt durch die Gleichung

$$cos\,\chi''_e = \frac{cos\,\chi - 2\,tg\,\mu\,cos\,\tau\,sin\,\chi}{\sqrt{1 + 4\,tg\,\mu\,cos\,\tau\,sin\,\chi\,(tg\,\mu\,cos\,\tau\,sin\,\chi - cos\,\chi)}}$$

welche sich auf den, den gewöhnlichen aufs Einfallsloth bezogenen Formeln analogen Ausdruck

$$\frac{sin\,\chi''^2_e}{sin\,\chi^2} = \frac{1}{1 - 4\,tg\,\mu\,cos\,\tau\,sin\,\chi\,(cos\,\chi - tg\,\mu\,cos\,\tau\,sin\,\chi)}$$

bringen lässt. Es stellt somit der Ausdruck rechts einen variablen Brechungsindex, bezüglich der Projection der optischen Axen dar.

Für den Hauptschnitt gibt dies wegen $\tau = o$

$$sin\, \chi''^{\,2}_{e} = \frac{sin\, \chi^2}{1 - 4\, tg\, \mu\, sin\, \chi\, (cos\, \chi - tg\, \mu\, sin\, \chi)}$$

und für die auf dem Hauptschnitte senkrechte Ebene

$$sin\, \chi''^{\,2}_{e} = \frac{1}{1 + 4\, tg\, \mu^2\, cos\, \tau^2}.$$

Dies zeigt, dass sämmtliche Stralen, welche in einer Einfallsebene liegen, die senkrecht auf dem Hauptschnitte stehen, durch Brechung wieder in eine Ebene zu liegen kommen, welche durch die Axe der Y geht und mit dem Einfallslothe einen Winkel λ einschliesst, dessen Tangente doppelt so gross ist, als die Tangente des charakteristischen Winkels. Denn setzt man in der Gleichung in 2) $\xi = o$ so wird

$$\xi''_{e} = \frac{2\, tg\, \mu\, \zeta}{\sqrt{1 + 4\, \zeta\, tg\, \mu^2}} \quad \eta''_{e} = \frac{-\eta}{\sqrt{1 + 4\, \zeta\, tg\, \mu^2}} \quad \zeta''_{e} = \frac{-\zeta}{\sqrt{1 + 4\, \zeta\, tg\, \mu^2}}.$$

Eliminirt man zwischen der ersten und dritten Gleichung ζ, so findet man den eben ausgesprochenen Satz. Hieraus ergibt sich nun folgende Construction für die gebrochenen Stralen, wenn die Einfallsebene senkrecht auf deren Hauptschnitte steht:

Man legt zuerst eine Ebene senkrecht gegen den Hauptschnitt, die mit der Zwillingsfläche den Winkel $90 - \lambda$ einschliesst, wo λ durch die Gleichung $tg\, \lambda = 2\, tg\, \mu$ gegeben ist; hierauf eine zweite Ebene durch den einfallenden Stral und die Projection der optischen Axe auf die Zwillingsfläche. Der Durchschnitt der beiden Ebenen ist die Richtung des gebrochenen Strales.

Ich bemerke, dass dieser Winkel λ die allgemeinen Gleichungen in 2) noch einfacher macht, wenn man ihn für μ substituirt; doch schien mir der Winkel μ so merkwürdig wegen der Eigenthümlichkeit, dass für ihn der Einfallswinkel gleich ist dem Brechungswinkel und der reflectirte Stral schief nach rückwärts in die Richtung des einfallenden geworfen wird, dass ich es vorzog, diesen als charakteristischen Winkel des Zwillings hervorzuheben.

Die reflectirten Stralen werden auf dieselbe Weise gefunden, nur muss dann die Ebene, welche senkrecht auf dem Hauptschnitte steht, im ersten Medium construirt werden. Übrigens muss sie in beiden Fällen so gestellt werden, dass sie zwischen das Einfallsloth und die optische Axe des betreffenden Individuums fällt.

Wenn die einfallenden Stralen sämmtlich in einer Ebene liegen, so werden die gebrochenen und reflectirten im Allgemeinen in einem Kegel vierten Grades sich befinden, mit Ausnahme der beiden Fälle, wo die betrachteten Stralen in dem Hauptschnitte liegen, oder in einer Ebene senkrecht dagegen. Nennen wir im letzten Falle $\frac{\xi}{\zeta} = a$, so wird

$$\xi''_{e} = \frac{-a + 2\, tg\, \mu}{\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} + 4\, tg\, \mu\, (tg\, \mu - a)}} \quad \eta''_{e} = \frac{-\frac{\eta}{\zeta}}{\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} + 4\, tg\, \mu\, (tg\, \mu - a)}} \quad \zeta''_{e} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} + 4\, tg\, \mu\, (tg\, \mu - a)}}$$

und die Neigung der Ebene, in der die gebrochenen (reflectirten) Stralen liegen, ist gegeben durch

$$\frac{\xi''_{e}}{\zeta''_{e}} = a - 2\, tg\, \mu, \quad \frac{\xi'_{e}}{\zeta'_{e}} = 2\, tg\, \mu - a.$$

Da nun jeder einfallende Stral in einer Ebene liegt, die senkrecht auf dem Hauptschnitte steht (denn man braucht, um diese zu finden, nur durch den Stral und die Axe der Y eine Ebene zu legen), so erhält man folgendes allgemeine Constructionsverfahren, durch welches die Lage des gebrochenen Strales gefunden wird, ohne Zuhilfenahme der Huyghens'schen Construction:

Man lege durch den einfallenden Stral eine Ebene, die senkrecht steht auf dem Hauptschnitte und bestimme den Winkel r, den diese Ebene mit der Zwillingsebene einschliesst. Die Cotangente dieses Winkels ist a. Nun construire man eine zweite Ebene senkrecht auf dem Hauptschnitte, welche mit der Zwillingsfläche einen Winkel einschliesst, dessen Cotangente $a - 2\,tg\,\mu$ ist; und lege endlich durch den einfallenden Stral und die Projection der optischen Axe eine Ebene, so ist der Durchschnitt der zwei letztgezeichneten Ebenen die Richtung des gebrochenen Strales.

ZWEITER ABSCHNITT.

§. 1.

ÜBER DIE PRINCIPIEN, WELCHE DER UNTERSUCHUNG ÜBER DIE INTENSITÄT DES REFLECTIRTEN UND GEBROCHENEN LICHTS ZU GRUNDE GELEGT WERDEN.

Vielleicht in keinem Kapitel der Optik tritt die Unzulänglichkeit der Emissionshypothese und die allumfassende Fruchtbarkeit des Undulationssystems so klar hervor, als bei dieser Frage: während erstere nicht einmal eine erste Vermuthung rechtfertigt, nicht die einfachste Thatsache ableiten lässt, ist letzteres eben an dieser schwierigen Aufgabe stark geworden und gross gewachsen. Zwei merkwürdige Entdeckungen, die der Polarisation durch Reflexion unter einem bestimmten Winkel [1]), und das Tangentengesetz [2]), nach welchem jener Einfallswinkel der Polarisationswinkel ist, für den der reflectirte Stral senkrecht steht auf dem gebrochenen Strale, mussten vorhergehen, ehe die Frage theoretisch ergriffen werden konnte; sie reichten aber völlig hin, dem genialsten unter den Physikern dieses Jahrhunderts die Macht

1) Entdeckt durch Malus 1808.

2) Entdeckt durch Brewster 1815. Malus scheint nach einem Gesetze gesucht zu haben; in seiner Théorie de la double réfraction p. 224 sagt er, dass der Polarisationswinkel im Allgemeinen grösser sei für stärker brechende Körper, dass sich aber keine bestimmte Relation angeben lasse; vom Kalkspath wird p. 241 behauptet, dass er sich wie ein einfach brechender Körper verhalte. Ganz ausdrücklich aber spricht sich Malus aus in Gilb. Ann. 1811, 1 und 1811, 7; am letzteren Orte sagt er: J'ai déterminé sur beaucoup de substances l'angle de reflexion sous lequel la lumière incidente est le plus complètement polarisée et j'ai reconnu ne suit ni l'ordre des puissances refractives ni celui des forces dispersives. C'est une propriété des corps indépendante des autres modes d'action qu'ils exercent sur la lumière. Brewster gibt 1815 (Phil. trans.) 18 Substanzen (unter denen jedoch 6 doppelbrechende: Quarz, Kalkspath, Schwefel, Topas, Zirkon, Spinell und der starkbrechende Diamant) an denen er sein Gesetz constatirt; später (Phil. trans. 1819) macht er auf die Abweichungen, die aus der Doppelbrechung entspringen, aufmerksam; jedoch erst durch Seebeck (Observationes de corporum lucem simpliciter refringentium angulis polarisationis 1830; Pg. XX, 27; XXI, 290; XXII, 126; XXXVIII 276) werden Beobachtungsreihen an einfachbrechenden Substanzen und am Kalkspath gegeben, an denen eine feinere Theorie sich erproben konnte. Hierher gehören auch Neumann's ausgezeichnete photometrische Untersuchungen, von denen unten.

zu bieten, unter der leitenden Idee einer glücklichen Hypothese die Schleier zu lüften, unter denen die wunderbaren Erscheinungen des Lichts für immer verborgen zu bleiben bestimmt schienen. Fresnel hatte erst die Allgemeinheit des Brewster'schen Gesetzes bezweifelt [1]: doch bald überzeugte er sich von der Giltigkeit desselben, wenigstens innerhalb der Grenzen, welche durch die ihm zu Gebote stehenden Beobachtungsmittel gesteckt wurden. Indem er seine hieher bezüglichen theoretischen Arbeiten mit der kühnen Hypothese der Transversalität der Ätherschwingungen beginnt, behandelt er zuerst den Fall, wo die Schwingungen senkrecht gegen die Einfallsebene stehen [2]; bald aber gibt er eine allgemeine Theorie für geradlinige Oscillationen jeder Art [3]. Seine Annahmen sind:

1. Jene Vibrationscomponenten der einfallenden, reflectirten und gebrochenen Wellen, welche parallel der Trennungsfläche der beiden Mittel entfallen, ändern sich nicht weiter, wenn die Schwingungen sich von dieser entfernen. Diese Hypothese soll die Berechtigung bieten aus den Beobachtungen der Eigenschaften des reflectirten oder gebrochenen Strales einen Schluss zu ziehen auf die Veränderungen, die an der Trennungsfläche die Amplitude und Phase erfahren.

2. Die horizontalen Componenten der absoluten Geschwindigkeit (wenn nämlich die Trennungsebene horizontal gedacht wird), welche die einfallende Welle herbeiführt, hinzugefügt zu der horizontalen Componente der absoluten Geschwindigkeit, welche die reflectirte Welle erzeugt (genommen mit dem ihr zukommenden Zeichen), muss gleich sein der horizontalen Componente der absoluten Geschwindigkeit, welche die Moleküle des zweiten Mediums in der durchgelassenen Welle besitzen. Von den Componenten, die senkrecht gegen die Trennungsfläche entfallen, wird dabei gänzlich abgesehen.

3. Die Erhaltung der lebendigen Kraft, d. i. wenn 1, v, u die absolute Geschwindigkeit der Moleküle in der einfallenden, reflectirten und gebrochenen Welle, und m, m_v, m_u die in gleichen Zeitabschnitten erregten Massen in diesen Wellen bezeichnet, das jedesmalige Stattfinden der Gleichung $m = m_v v^2 + m_u u^2$.

4. Gleiche Elasticität in beiden Medien bei verschiedener Dichte. Diese Annahme ist wesentlich wegen der Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche hiernach umgekehrt proportional der Quadratwurzel der Dichtigkeit in jedem Mittel ist; d. i. wenn c_v, c_u, d_v, d_u die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ersten und zweiten, und ebenso die Dichte bezeichnet $c_v : c_u = \sqrt{d_u} : \sqrt{d_v}$.

Bei der Totalreflexion beobachtete Fresnel schon sechs Jahre ehe er seine Reflexionstheorie veröffentlichte, eine theilweise Depolarisation des einfallenden polarisirten Lichts; die Erscheinung liess sich erklären, wenn man annahm, dass diejenige Componente der einfallenden Schwingungen, welche in die Einfallsebene entfällt, um einen Bruchtheil einer Undulation gegen die senkrecht gegen die Einfallsebene entfallende Componente der einfallenden Schwingungen beschleunigt werde, oder, wie Fresnel sich ausdrückt, dass die beiden Componenten nicht in gleichen Tiefen reflectirt werden. Die bekannten Interferenzregeln geben dann sämmtliche Phänomene. Es wird nicht überflüssig sein, zu zeigen, auf welchem Wege Fresnel

---

[1] Thomson, Chemie, Paris 1822, p. 93; Pg. Ann. XII, p. 225.

[2] Betrachtungen über die Polarisation des Lichts. Ann. phys. chim. XVII. 179, 312 (1821); Pg. XXII, 68.

[3] Über das Gesetz der Modificationen, welche die Reflexion dem polarisirten Lichte einprägt. Ann. ph. ch. XLVI, 205: eigentlich schon 7. Jan. 1823 der Akademie vorgelesen und erst 1830 unter den Papieren Fourier's wieder aufgefunden. — Pg. XXII. 90.

zur Ableitung dieser Resultate aus seinen Formeln gelangte. Er gesteht zu, dass sie die wirkliche Erscheinung in der Natur nur näherungsweise darstellen können, da sie nur für den speciellen Fall angelegt seien, wo die Elasticität des Äthers in beiden Mitteln dieselbe ist, während in der Natur dies nur in wenigen Fällen stattfinden könne; da sie ferner auf Annahmen beruhen, die nur für diejenigen Wellen evident sind, deren Vibrationen senkrecht auf der Einfallsebene stehen, während sie im entgegengesetzten Falle des Beweises bedürfen: sonderbarer Weise aber gewinnen durch die ausgezeichnete Übereinstimmung der Formeln mit der Erfahrung in einigen speciellen Fällen dieselben ein so entscheidendes Übergewicht gegen alle Zweifel, welche die von Brewster schon 1819 bemerkte Unvollständigkeit der Polarisation durch einmalige Reflexion in Fresnel erregen musste, dass er nach Abwägung aller Bedenken erklärt Ursache zu haben, sie für strenge zu halten, da sie nicht blos durch Thatsachen bestätigt seien, sondern auch auf, schon an sich sehr wahrscheinlichen theoretischen Betrachtungen beruhen. Hierauf stützt sich seine Überzeugung, dass sie auch die Erscheinungen der Totalreflexion, welche dem Lichte Modificationen ganz eigener Art einprägten, errathen lassen müssen. Setzt man in den Formeln $\sin i' = \theta \sin i$ (wo θ der Brechungsindex), so erhält man, wenn $\theta \sin i > 1$, allgemein für jede der beiden Intensitätsformeln einen Ausdruck von der Gestalt $a + b\sqrt{-1}$ und zugleich in beiden $a^2 + b^2 = 1$. Da nun nach dem Interferenzprincip das durchgelassene Licht (wenigstens für einen Punkt der sich verglichen mit einer Wellenlänge in sehr grosser Entfernung von der Trennungsfläche befindet) in diesem Falle Null ist, folglich nach dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft die Intensität des reflectirten Lichtes gleich der Intensität des einfallenden sein muss, so zeigt die Intensitätsformel allerdings an, dass das ganze Licht reflectirt wird, sobald man nur annimmt, dass der reelle und imaginäre Theil die Amplituden zweier in derselben Ebene schwingenden aber um eine Viertelundulation gegen einander verschobenen Wellensysteme anzeigen: denn die Interferenzformeln zeigen, dass in diesem Falle das Quadrat der Amplitude des resultirenden Strales gleich ist der Summe der Quadrate der Amplituden der componirenden Stralen. Es zeigt daher die imaginäre Form eine Verschiebung der Phasen an: da im Allgemeinen diese Verschiebung für den Stral, der in der Einfallsebene schwingt, eine andere ist, als die der senkrecht dagegen vibrirende Stral erfährt, so muss, sobald der einfallende Stral ein anderes Azimuth als 0 oder 90° (und Vielfache davon) besitzt, der durch Totalreflexion entstandene Stral elliptisch polarisirt sein, und die Ellipticität desselben bestimmt Fresnel nach den von ihm gegebenen Interferenzregeln.

§. 2.

Fresnel's Theorie wurde zum Nachtheile der Wissenschaft durch mehrere Jahre der Öffentlichkeit vorenthalten; der Anstoss, den seine und Brewster's Forschungen gegeben, äusserte sich darum eine Zeit lang vorzüglich in der Aufsammlung von neuen Thatsachen. Seebeck[1]) setzte die von Brewster begonnenen Untersuchungen über den Einfluss krystallinischer Körper auf das reflectirte Licht mit grosser Präcision fort und versuchte,

---

[1]) Über den Polarisationswinkel am Kalkspath. Pg. XXI, 290. Nachtrag hierzu XXII. 126. — Bemerkung über die Polarisirung des Lichtes durch Spiegelung besonders an doppelbrechenden Körpern. XXXVIII, 277. — Über die Polarisirung des Lichts durch Spiegelung an Krystallen. XL, 462.

sobald die Fresnel'sche Abhandlung bekannt wurde, die Ableitung seiner empirischen Formeln aus der gegebenen Theorie; Brewster[1]) lieferte durch seine Beobachtungen über die elliptische Polarisation des von Metallflächen reflectirten Lichtes eine Reihe ganz neuer der damaligen Theorie völlig unzugänglicher Thatsachen[2]) und Airy's Beobachtungen über die an der Oberfläche des Diamanten bewirkten Veränderungen in den Phasen der einfallenden Stralen[3]) schienen einen Zusammenhang anzudeuten zwischen der Reflexion an durchsichtigen und metallischen Oberflächen.

Dieses vermehrte Material, das zu bewältigen die Fresnel'schen Annahmen nicht ausreichten, suchte Neumann und Mac-Cullagh durch Einführung umfassenderer Grundhypothesen unter theoretische Gesichtspunkte einzuordnen. Der Metallreflexion gegenüber, gestehen sie offen die Unzulänglichkeit der Theorie. „Man darf nicht hoffen", sagt Neumann, die Erscheinungen, welche das an Metallflächen reflectirte Licht zeigt, aus einer allgemeinen Theorie des Lichts zu deduciren, bis man eine genaue optische Definition hat von dem, wodurch der grössere oder geringere Grad von Undurchsichtigkeit bewirkt wird, wozu ungeachtet der Vorarbeiten durch die mannichfaltigen Untersuchungen über die Absorption des Lichts namentlich von Brewster und Herschel, doch der Schlüssel noch zu fehlen scheint"[4]). In seiner Untersuchung[5]) geht er daher von folgenden Annahmen aus:

1. Zerlegt man die Schwingungen im reflectirten Strale nach der Einfallsebene und senkrecht dagegen und nennt die Vibrationsintensität in den ersteren R_s, die in den anderen R_p, so hängt das Verhältniss $R_p : R_s$ von der Grösse des Einfallswinkels ab, und zwar so, dass es ein Kleinstes ist für den Polarisationswinkel und von da an nach beiden Seiten hin wachsend, an den Grenzen 0 und 90° die Einheit als Maximum erreicht. Das Licht würde sich demnach dem partiell reflectirten an unkrystallinischen durchsichtigen Medien analog verhalten, wo auch $R_p : R_s$ ein Minimum unter dem Polarisationswinkel erreicht und von da aus wachsend an den Grenzen der Einheit gleich wird, während bei der Totalreflexion $R_p : R_s$ constant bleibt.

2. Dass wie bei der Totalreflexion der zu R_p gehörige Stral gegen den zu R_s gehörigen um einen Bruchtheil einer Wellenlänge zurückbleibt, jedoch dergestalt, dass diese Verzögerung an einer von den Grenzen 0° und 90° verschwindet, an der andern ein Maximum erreicht und einer halben Wellenlänge gleich wird, während bei der Totalreflexion an durchsichtigen Substanzen die grösste Verzögerung zwischen den Grenzen der totalen Reflexion liegt und ihre Grösse von den Brechungsverhältnissen der beiden Mittel abhängt, an deren Grenze die Totalreflexion stattfindet. Die Verzögerung beträgt genau eine Viertelundulation unter dem Polarisationswinkel, da eine zweimalige Reflexion unter diesem Winkel die geradlinige Polarisation wiederherstellt.

Dass unter diesen Annahmen die Brewster'schen Beobachtungen sich ableiten lassen kann nicht verwundern, da sie in der That dieselben sind, die sich als Folgerungen einer Theorie ergeben, die sich in all ihren Consequenzen so wunderbar der Natur anschliesst, dass man sie

---

[1]) On the phenomena and laws of elliptical polarization by the action of metals on the light. Phil. Trans. 1830. II, 287, Pg. XXI, 219.

[2]) Brewster kann mit Recht der Entdecker der empirischen Gesetze der metallischen Reflexion genannt werden; denn die Arbeiten von Arago (Pg. XXVI), Nobili (Pg. XXII) und Airy (Pg. XXVI) lieferten mehr Anregung als Aufklärung über die absonderlichen Erscheinungen.

[3]) Pogg. Ann. XXVIII.

[4]) Über den Einfluss der Krystallfl. bei der Reflexion des Lichtes. Berlin 1835, p. 3.

[5]) Theorie der elliptischen Polarisation des Lichts, welche durch die Metallreflexion erzeugt wird. Pg. XXVI, 89.

wohl als Massstab der Richtigkeit an alle früheren Versuche legen darf; Neumann's Grundhypothesen finden sich mit geringen Modificationen unter den Corollarien der Cauchy'schen Analyse.

Mac-Cullagh[1]) leitet seine Formeln aus einer analytischen Fiction ab, die zwar gar keine physikalische Auslegung zulässt, doch mit Anwendung der Fresnel'schen Gleichungen auf die Beobachtungen führt. Er setzt nämlich in den Fresnel'schen Intensitätsformeln den Brechungsindex imaginär, indem er ihn unter der Gestalt

$$m\,(\cos\chi + \sin\chi\,.\,\sqrt{-1})$$

in die Rechnung einführt. Er findet unter dieser Voraussetzung Formeln, die genau die Cauchy'schen sind; eigentlich beruhen sie doch nur auf einer Erweiterung des Fresnel'schen Raisonnements, denn Mac-Cullagh leitet zuerst einen imaginären Ausdruck $\alpha(\cos\delta + \sin\delta\sqrt{-1})$ für die Amplitude ab, deutet diesen wie Fresnel seinen totalreflectirten Stral und setzt sodann die beiden, senkrecht zur Einfallsebene und in derselben vibrirenden componirenden Stralen zusammen.

Mac-Cullagh vergleicht seine Rechnungen mit Potter's[2]) Messungen und findet alle Übereinstimmung die bei Potter's Beobachtungsmethode nur irgend zu erwarten war.

Mit grösserer Sicherheit fassen die beiden Forscher das Problem der krystallinischen Reflexion an vollkommen durchsichtigen Medien an und obschon beide unabhängig von einander, und von verschiedenen Gesichtspunkten aus, an die Lösung gehen, so gelangen sie doch zu denselben Grundannahmen. Es kann auch kaum von einer Priorität die Rede sein, da beider Arbeiten nahezu in dieselbe Zeit fallen, in den Zwischenraum zwischen den Jahren 1835 und 1840.

Neumann [3]) legt seiner Theorie folgende Voraussetzungen zu Grunde:

1. Die Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in verschiedenen Mitteln, oder die Brechung des Lichts, rührt bei vollkommen durchsichtigen Medien allein her von der Verschiedenheit der Elasticität des Äthers; die Dichtigkeit desselben ist in allen diesen Mitteln gleich. Es ersetzt dies die vierte Annahme Fresnel's: da man sich für eine der beiden entscheiden muss, so glaubt Neumann sich für den von ihm ausgesprochenen Grundsatz entscheiden zu müssen, da man sich wohl verschiedene Elasticität nach verschiedenen Richtungen, nicht aber verschiedene Dichtigkeit denken könne[4]). „Beide Voraussetzungen zugleich schliesst die Natur der durchsichtigen Körper aus, da alle Phänomene der Reflexion und Refraction allein vom Brechungsindex abhängen: es wäre aber möglich, dass bei den metallischen und anderen in so weit sie nicht vollkommen durchsichtig sind, eine Verschiedenheit in der Elasticität und Dichte zugleich stattfände."

2. Das einfallende Licht besteht aus Transversalschwingungen und erzeugt bei der Reflexion und Refraction nur eben solche Schwingungen.

---

1) On the laws of reflexion from metals. Phil. Mg. X, 382. Über seine Reclamation de priorité rélativement à certaines form. cet. s. unter Cauchy.

2) Edinb. Journ. of Science III, 278 (1831). Pg. XXII, 606. — Phil. Mg. VIII, 60.

3) Theorie der doppelten Stralenbrechung. Pg. XXV, 418 (1832). — Über den Einfluss der Krystallflächen bei der Reflexion des Lichts und über die Intensität des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strales (1835). Aus den Abh. der Berl. Akad. Berlin 1837. — Photometrische Versuche die Intensität der ordentlichen und ausserordentlichen Stralen zu bestimmen. Bemerkungen zu Hrn. Cauchy's Vervielfältigung des Lichts in der totalen Reflexion. Reproduction der Fresnel'schen Formeln über totale Reflexion. Pg. XL, 497. — Beobachtungen über den Einfluss der Krystallfläche auf das reflectirte Licht und über die Intensität der ordentlichen und ausserordentlichen Stralen. Pg. XLII, 1 (1837).

4) Vergl. Mac-Cullagh, Trans. J. Ac. XVIII, p. 69.

3. Die Richtung der Vibrationen liegt überall in krystallinischen und nicht-krystallinischen Medien, in der Wellenebene. (Nach Neumann's Theorie der doppelten Stralenbrechung macht die Richtung der Bewegung der Theilchen im Allgemeinen einen kleinen Winkel mit der Wellenebene.)

4. Die Polarisationsebene fällt mit der Schwingungsebene zusammen. Eine nothwendige Folge dieser Annahme ist, dass der Stral immer senkrecht steht auf der Richtung der Bewegung der Äthermoleküle (die Äthermoleküle der ausserordentlichen Welle schwingen senkrecht gegen die Ebene, die sich durch Stral und Wellennormale legen lässt).

5. Über die Reflexion und Refraction an der Oberfläche vollkommen durchsichtiger Körper werden folgende Vorstellungen zu Grunde gelegt:

Die Tracen der reflectirten und gebrochenen ebenen Wellensysteme schreiten gleichförmig längs der Trennungsfläche fort, so dass sie stets in eine gerade Linie zusammenfallen.

Die Geschwindigkeit der verschiedenen Wellensysteme ist den Sinussen der Winkel proportional, welche die Wellenebenen mit der Trennungsebene einschliessen.

Die Componenten der Bewegung, welche den Theilchen der Trennungsebene von der einfallenden und reflectirten Wellenebene ertheilt wird, sind gleich den Componenten der Bewegung, welche ihnen von der gebrochenen Wellenebene mitgetheilt wird.

Diese Voraussetzung, die die Fresnel'sche 2. ersetzt, berücksichtigt die Gesammtwirkung der transversalen Vibrationen, und folgt aus den Navier'schen Grundgleichungen, welche Neumann seiner Theorie der doppelten Stralenbrechung zu Grunde gelegt.

6. Die lebendige Kraft in der einfallenden Wellenebene ist gleich der Summe der lebendigen Kräfte in den reflectirten Wellenebenen und in den gebrochenen Wellenebenen.

„Dieses Princip," sagt Neumann, „hat die hier zu entwickelnde Theorie gemeinschaftlich mit der Fresnel'schen Theorie. Ich gestehe aber, dass es dasjenige ist, welches von der theoretischen Seite am meisten Zweifel in Beziehung auf seine Zuverlässigkeit erregen muss: denn man begreift nicht, wie nicht ein Theil der lebendigen Kraft der einfallenden Wellenebene zu longitudinal schwingenden Wellen, die nicht als Lichtwellen wahrgenommen werden, sollte verwandt werden: es müsste ein Theil des Lichts immer verschwinden, weil seine Intensität eben durch die lebendige Kraft der transversal schwingenden Wellenebenen gemessen wird, und es existirten eigentlich keine vollkommen durchsichtigen Körper. Dieses Princip kann also nur auf den Grund der Erfahrung genommen werden, dass es wirklich Körper gibt, bei welchen die Intensität des einfallenden Lichts gleich ist der Summe der Intensitäten, mit welchen das Licht reflectirt und gebrochen wird."

Die aus diesen Annahmen abgeleiteten Gleichungen geben die Fresnel'schen Intensitätsformeln wieder. Für den Kalkspath findet Neumann folgende Relationen, die wir hier mittheilen, da wir uns im Verlaufe unserer Untersuchungen auf dieselben zu beziehen bemüssigt sehen werden. Sind R_p, R_s, D', D'' die Amplituden der senkrecht zur Einfallsebene und parallel dieser schwingenden, reflectirten und der ordentlich und ausserordentlich gebrochenen Welle, so ist:

$$D' = 2\frac{\sqrt{1-\gamma'^2}\cdot \sin\varphi\cos\varphi}{N}\Big\{P\sin(\varphi+\varphi'')\,A\sin\omega - S\,[C\,(\sin\varphi''\cos\varphi\sin\varphi+\cos\varphi''\sin\varphi'^2)$$
$$- A\cos\omega\,(\cos\varphi''\cos\varphi\sin\varphi+\sin\varphi''\cos\varphi'^2)\,]\Big\} \qquad 1)$$

$$2)\quad D'' = 2\,\frac{\sqrt{1-\gamma''^2}\sin\varphi\cos\varphi}{N}\Big\{P\sin(\varphi+\varphi')(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi') + S\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')A\sin\omega\Big\}$$

$$3)\quad R_p = p\,P + s\,S \qquad R_s = p'\,P + s'\,S$$

wo $$p = \frac{1}{N}\Big\{\sin(\varphi+\varphi')(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')\big[C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi''\sin\varphi'^2) - A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi''\cos\varphi'^2)\big] + A^2\sin\omega^2\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi+\varphi'')\Big\}$$

$$s = \frac{1}{N}\Big\{\sin(\varphi-\varphi')(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')\big[C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi''\sin\varphi'^2) - A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi''\cos\varphi'^2)\big] + A^2\sin\omega^2\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi-\varphi'')\Big\}$$

$$p' = -\frac{1}{N}\Big[A\sin\omega(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')\sin 2\varphi\sin(\varphi'-\varphi'')\Big]$$

$$s' = -\frac{1}{N}\Big[A\sin\omega(C\sin\varphi' + A\cos\omega\cos\varphi')\sin 2\varphi\sin(\varphi'-\varphi'')\Big]$$

$$N = \sin(\varphi+\varphi')(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')\big[C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi''\sin\varphi'^2) - A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi''\cos\varphi'^2)\big] + A^2\sin\omega^2\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi'')$$

wo φ, φ', φ'' der Einfallswinkel und die Brechungswinkel der ordentlichen und ausserordentlichen Welle, ω das Azimuth der Einfallsebene ist, γ' γ'' die Cosinusse der Winkel, welche die ordentliche und ausserordentliche Wellennormale mit der optischen Axe einschliesst. A und C die Cosinusse der Winkel, welche die Normale der brechenden Ebene mit der optischen Axe und einer in der Einfallsebene liegenden auf der optischen Axe senkrechten Richtung einschliesst. P und S sind die Amplituden der senkrecht zur Einfallsebene und in derselben oscillirenden einfallenden Wellen.

Die Übereinstimmung dieser Ausdrücke mit der Natur hat Neumann nachträglich durch sorgfältige photometrische Messungen constatirt, welche aber, wie es scheint, nicht weiter bekannt worden sind, da Cauchy noch vor kurzem einiger ungefähren Messungen erwähnt, die er mit Soleil angestellt, und die durch Neumann's Versuchsreihen reichlich geboten worden wären.

Mac-Cullagh [1]) wurde durch eine eigenthümliche geometrische Construction auf seine Theorie geleitet. Indem er unter dem Namen der Transversalen eines polarisirten Strals diejenige Gerade in Betracht zog, welche senkrecht gegen den Stral in die Polarisationsebene fällt, fand er aus den Fresnel'schen Gleichungen, dass die Transversalen des einfallenden, reflectirten und gebrochenen Strals bei isophanen Mitteln in eine Ebene zu

---

[1]) Mac-Cullagh's hierhergehörige Untersuchungen, welche in seiner Heimath mit der grössten Auszeichnung aufgenommen und mit der höchsten wissenschaftlichen Ehren gekrönt wurden (sein Biograph im Phil. Mg. stellt ihn neben Newton), während sie im Auslande nicht überall dieselbe hingebende Bewunderung gefunden, sind theils in den Transactions of the royal Irish Academy, theils in den Proceedings derselben und dem Philosophical Magazin enthalten. Die oben mitgetheilte kurze Darstellung ist aus folgenden Abhandlungen gezogen: On the laws of crystalline reflexion and refraction 9. Jan. 1837. Transact. XVIII, 31. — An Essay towards a dynamical Theory of crystalline Reflexion and Refraction 9. Dez. 1839. Trans. XXI, 17. — On the laws of reflexion from crystallized surfaces. 1835. Phil. Mg. VIII, 103. — On the laws of crystalline reflexion Dez. 1836. Phil. Mg. X, 42. 1837. XI, 134. Die erste Erwähnung seines Principes der Äquivalenz der Vibrationen finde ich in einer Note vom Aug. 1835: A short account of some recent investigations concerning the laws of reflexion and refraction at the surface of crystals Phil. Mg. VII, 295.

liegen kommen; und was noch auffallender erschien: es zeigte sich, wenn man die Transversalen gleich den Amplituden machte, dass dieselben in einem solchen Verhältnisse stehen, wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel, d. i. die Vibrationsgrössen setzen sich zusammen nach dem Kräftenparallelogramme. Nun fallen aber nach Fresnel's Theorie die Schwingungen senkrecht gegen die Polarisationsebene, während die Transversalen in dieser liegen, und es lag nahe, zu vermuthen, dass Fresnel's Ansicht von der Natur abweiche; doch dann entstand eine neue Schwierigkeit, indem bei Mac-Cullagh's Constructionsweise die Erhaltung der lebendigen Kräfte verletzt wurde, sobald man nicht im Gegensatz zu Fresnel annahm, dass die Dichte des Äthers in allen Mitteln gleich sei. Mac-Cullagh hält aber gerade diese Annahme a priori für die plausiblere, da eine Verschiedenheit der Dichte nach verschiedenen Richtungen in Krystallen von doppelter Brechung etwas Undenkbares sei [1]). Darum hält er sich für berechtigt von Fresnel's Grundansichten abzugehen und seine Construction auch auf anisophane Mittel auszudehnen: sie ist in der That ein Denkmal eines gewaltigen synthetischen Geistes, und rechtfertigt die Bewunderung seines Biographen [2]).

Mac-Cullagh hat eine dynamische Theorie entworfen, welche zu diesen Constructionen führt; er setzt voraus:

1. Dass die Dichte des Lichtäthers eine unveränderliche Grösse ist, und zwar unveränderlich sowohl durch die Bewegungen, die Licht hervorbringen, als auch durch die Gegenwart materieller Partikel, so dass sie dieselbe ist im freien Raume und in Körpern und dieselbe bleibt selbst bei den heftigsten Vibrationen.

2. Dass die Vibrationen in einer ebenen Welle geradlinig sind, und dass, während die Welle parallel mit sich selbst fortschreitet, die Vibrationen parallel einer fixen geraden Linie bleiben; dabei ist die Grösse und Richtung dieser Geraden eine Function der Richtung der Wellennormale.

Aus diesen beiden Voraussetzungen folgt mit Nothwendigkeit, dass nur transversale Wellen entstehen können. Dadurch unterscheidet sich diese Theorie von der Green's und Cauchy's von vorneherein. Die Gesetze der Lichtbewegung werden nach der von Lagrange in der Mécanique analytique vorgezeichneten Methode entwickelt. Ist x, y, z der Ort eines Partikels vor, $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ nach der Verschiebung, wo ξ, η, ζ Functionen des Orts und der Zeit

---

[1]) Those who maintain that the density of the ether is different in different media ought to consider the following question: What function of the 3 principal indices of a doubly refracting crystal, represents the density of the ether within the crystal? Diese Frage scheint kaum schwieriger zu beantworten, als wenn man statt density setzt elasticity; eine anschauliche Vorstellung von verschiedenen Dichten hat mir im Gegentheile immer leichter geschienen und die Anschaulichkeit in den Principien kann nicht strenge genug gefordert werden.

[2]) Es sei O der Incidenzpunkt auf dem Krystalle, OT und OT'' die gebrochenen Stralen, T und T' auf der Wellenfläche gelegen. Entsprechend dem T, T'' gibt es zwei andere Punkte P und M auf einer anderen Fläche, welche die reciproke der Wellenfläche ist. Die Lage von P und M wird nach einer einfachen Regel bestimmt. Um nun zu erfahren, nach welcher Richtung der einfallende Stral polarisirt sein muss um OT' verschwinden zu machen, lege man durch O eine Ebene A senkrecht auf OTP und parallel TP. Diese schneidet die Ebene der einfallenden und reflectirten Welle in 2 Geraden, welche die Transversalen dieser Wellen sind, so dass wenn der einfache Stral polarisirt ist parallel dem ersten Schnitt, der reflectirte parallel dem zweiten polarisirt ist und nur der einfach gebrochene Stral OT vorhanden ist. Eine Gerade durch O senkrecht zu OTP liegt in jener Ebene und ist die Transversale von OT, und wenn man vom Punkte O die Länge der 3 Transversalen misst, welche die Amplituden darstellen, so ist die Amplitude des gebrochenen Strales die Diagonale eines Parallelogrammes, welches durch die 2 Amplituden im einfallenden und reflectirten Strale gebildet wird. Ganz so wird verfahren, wenn nur OT' vorhanden ist. Ist der einfallende Stral polarisirt in einer mittleren Richtung zwischen den 2 Transversalrichtungen, die einen einzigen gebrochenen Stral geben, so kann er zerlegt werden in 2 Vibrationen parallel diesen Transversalen. Die reflectirten Vibrationen, die von jedem der componirenden des einfallenden Strales entstehen, werden nach der vorhergehenden Regel gefunden und dann zusammengesetzt.

sind, so ist durch die gleichzeitige Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten und des d'Alembert'schen Princips

$$\iiint dx\, dy\, dz \left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\,\delta\xi + \frac{d^2\eta}{dt^2}\,\delta\eta + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\,\delta\zeta\right) = \iiint dx\, dy\, dz\,.\,\delta V$$

und es ist nur die Function V zu bestimmen: da diese aber für das Differentialelement $dx\,.\,dy\,.\,dz$ nur von der Richtung der Krystallaxen und der durch die Vibrationsverschiebung eintretenden Winkelveränderung in den Seiten dieses parallelepipedischen Elementes abhängen kann, und δV für den Zustand des Gleichgewichtes verschwinden muss[1]), die Lage des Coordinaten werde gewählt wie immer, so ist (unter Vernachlässigung der Potenzen, die die zweite überschreiten)

$$V = -\tfrac{1}{2}\left[a^2\left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right)^2 + b^2\left(\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}\right)^2 + c^2\left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]$$

wo a, b, c constante Grössen und die Coordinatenaxen die Hauptaxen des Krystalles sind. Substituirt man dies in der obigen Gleichung, so erhält man rechts ein dreifaches und 3 zweifache Integrale: jenes repräsentirt die allgemeinen Bewegungsgesetze innerhalb eines und desselben Mittels und zeigt, dass nur in der Wellenebene Bewegung stattfindet, wie es nach den Grundannahmen der Theorie nicht anders zu erwarten ist[2]). Die Doppelintegrale beziehen sich auf die coordinirten Ebenen und jedes derselben gibt die Bedingungen, welche sich auf die Trennungsfläche zweier Medien beziehen, je nachdem man diese oder jene dieser Ebenen als brechende Fläche wählt; sie geben das Sinusgesetz, die Erhaltung der Schwingungsdauer, die Äquivalenz der Amplituden und die Erhaltung der lebendigen Kraft.

Diese Theorie, so plausibel sie scheint, enthält nichts, was nur den geringsten Aufschluss über die elliptische Polarisation zu geben vermöchte, die bei der Reflexion bei weitem das allgemeinere Phänomen ist[3]). Dass das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte, wie es bei jeder richtigen Theorie der Intensität des Lichts geschehen muss, aus dieser als Corollarium hervorgeht, darf nicht irre machen: es folgt nur unter der Voraussetzung, dass bei der Reflexion und Brechung die Phasen ungeändert bleiben.

---

[1]) Mac-Cullagh wendet hier dasselbe Raisonnement an, das Lagrange in einem analogen Falle gebrauchte. Mecan. Anal. I, 68.

[2]) In the ingenious but altogether unsatisfactory theory by which Fresnel has endeavoured to account for his beautiful laws the direction of the elastic force brought into play by the displacements of the ethereal molecules is in general inclined to the plane of the wave. He supposes however that the force normal to that plane does not produce any appreciable effect by reason of the great resistance which the ether offers to compression. Das Unbefriedigende der Fresnel'schen Theorie liegt aber nach dem, was die Untersuchungen Greens, Cauchy's und Jamin's lehren, gewiss nicht darin, dass nach ihr Longitudinalschwingungen möglich sind, vielmehr in der ungerechtfertigten Elimination derselben.

[3]) Was die metallische Reflexion betrifft, so sagt Mac-Cullagh selbst: If we wished to give a reason for the hypothesis of Equivalence of vibrations we might say that the motion of a particle of ether at the common surface of two media ought to be the same, to which soever medium the particle is conceived to belong: and as the incident and reflected vibrations are superposed in one medium and the refracted vibrations in the other, we might infer that the resultant of the former vibrations ought to be the same, both in length and direction as the resultant of the latter. At first sight this reasoning appears sufficiently plausible; but it will not bear a close examination. For as the argument is general it would prove that the principle of the equivalence of vibrations is true for metals as well as for crystals, which it certainly is not. It is not easy to see why the principle should hold in the one case and not in the other; but it is probably prevented from holding in the case of metals by the same cause, whatever it is, which produces a change of phases in metallic reflexion. In einer Note sagt er allerdings: a few days after this paper was read I found reason to persuade myself that in metals the vibrations parallel to the surface are equivalent but not those perpendicular to it, and that in metals as well as in crystals the vis viva is preserved; doch ist Mac-Cullagh ein viel zu klarer und nüchterner Forscher, um nicht einzusehen, dass dies höchstens zu der Hoffnung berechtigt „that kindred subjects, such as metallic and crystalline reflexion will one day be brought under the same theory", eine Hoffnung, die zur Zeit als sie ausgesprochen wurde, bereits realisirt war, wenn auch auf anderem Wege und durch andere Männer, als Mac-Cullagh erwartet hatte.

§. 3.

Das vorzüglichste Resultat, das Neumann's und Mac-Cullagh's Arbeiten für die Theorie geliefert, darf ein negatives genannt werden; man sieht nämlich, dass unter der blossen Berücksichtigung transversaler Wellen weder die metallische Reflexion noch die am Diamanten, noch irgend eine andere wo Phasenverschiebung stattfindet, erklärt werden kann. Neumann sah, wie die oben mitgetheilte Stelle aus seiner ausgezeichneten Untersuchung über die Reflexion an Krystallen deutlich zeigt, die Nothwendigkeit der Betrachtung der Mitwirkung longitudinaler Oscillationen an der Trennungsfläche zweier Medien, sehr klar ein; doch der erste, der sie wirklich in den Calcul aufnimmt, ist Green[1]) (Cauchy schon vor ihm, wie man aus dessen Briefen an Libri und Ampère vom Jahre 1836 sieht: doch gibt er seine Theorie im Zusammenhange erst 1840, und von der zusammenhängenden Theorie ist hier die Rede).

Green's Arbeit ist ausserdem noch dadurch höchst merkwürdig, dass sie für die durch Cauchy in dem letzten Jahrzehend gegebenen theoretischen Ansichten, die durch Jamin's Experimental-Arbeiten eine so schöne Bestätigung gefunden, noch einen weiteren der Theorie selbst entnommenen Beweis der hohen Wahrscheinlichkeit derselben liefern; indem beide Forscher, von denselben Principien ausgehend, einen verschiedenen Weg in der Analyse einschlagen, ihre Differentialgleichungen durch etwas abweichende particuläre Integrale befriedigen, und (wenigstens mit Berücksichtigung der in der Note citirten Bemerkungen Haughton's) auch zu verschiedenen, wie es scheint auf einander nicht reducirbaren Endgleichungen gelangen, welche gleichwohl mit gleicher Vollkommenheit die Naturerscheinungen wiederspiegeln. Green bedient sich des Calculs, den Lagrange in der *Mécanique analytique* angegeben, und von dem auch Mac-Cullagh Gebrauch gemacht; es liegt nicht im Plane dieses Aufsatzes, der nur die Principien anzugeben hat, eine Mittheilung dieser Analyse zu bieten. Das Gesetz der Reflexion, das Sinusgesetz, die Erhaltung der Schwingungsdauer wird in der *Theory of Sound* im Allgemeinen für jede Oscillationsbewegung abgeleitet; für das Licht werden folgende Annahmen gemacht:

1. Der Lichtäther besteht aus einem System von auf einander anziehend und abstossend wirkenden Molekülen. Wie diese auch auf einander wirken mögen, immer wird die Summe der Producte aus den inneren Kräften in die Elemente ihrer respectiven Richtungen ein vollständiges Differentiale irgend einer Function sein, da sonst jede Lichterregung in alle Ewigkeit fortvibriren müsste.

2. Wo immer bei der Brechung die Direction der Vibrationen sich ändert, da müssen longitudinale Oscillationen entstehen und dieselben dürfen in der Rechnung nicht vernachlässiget werden.

3. Die Wirkungssphäre eines Moleküls ist verschwindend klein gegen eine Wellenlänge.

4. Die Dichte der verschiedenen Medien ist verschieden. Ihre Elasticität wird gleich angenommen, indem in einem analogen Falle, nämlich bei der Schallfortpflanzung in Gasen es nachgewiesen ist, dass die Elasticität unabhängig ist von der Natur der verschiedenen Gase und

[1]) On the laws of the Reflexion and Refraction of Light at the common Surface of two non crystallized Media (11. Dec. 1837). Cambr. Phil. trans. VII, 1. Die darin entwickelten Gesetze werden unter einer einfacheren Form mitgetheilt in einem Supplement to the Memoir on the Reflexion and Refraction of Light (6. Mai 1839) VII, 115; er bringt sie da unter gleiche Form wie die Gleichungen. welche in der gleichzeitig mit der ersteren gelesenen und mit dieser im innigsten Zusammenhange stehenden Abhandlung: On the Reflexion and Refraction of Sound Cambr. Phil. trans. VI. 102 gegeben sind. Die Modificationen Haughton's an Green's Formeln. wodurch diese mit den Cauchy'schen gleichwerthig. wenn schon nicht gleichlautend werden, s. Phil. Mag. VI, 82.

diese Annahme so lange durch ihre Einfachheit sich empfehlen muss, als nicht Thatsachen von ihrer Unrichtigkeit zeugen.

5. Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der longitudinalen Oscillationen ist unendlich gross gegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Vibrationen.

Letztere Voraussetzung ist von Haughton dahin modificirt worden, dass dies Verhältniss nur sehr gross, nicht aber unendlich gross sei. Cauchy selbst hatte vermuthet, dass es unendlich sei, indem er $f=1$ setzte: doch da er die Formeln in ihrer allgemeinsten Form gab, so vermied er diesen Irrthum.

Unter diesen Voraussetzungen gelangt Green zu folgenden Resultaten:

1. Die Bedingungen, welche an der Grenze zweier Mittel stattfinden (wenn $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ die Verschiebungen im ersten und zweiten Medium, x, y, z die Coordinatenrichtungen, $z\,y$ die Trennungsfläche und x das Einfallsloth bedeuten, und die einfallende Welle der Axe der z parallel fortschreitet), sind für $x=o$, für die Oscillationen senkrecht zur Einfallsebene

$$\zeta = \zeta_1, \quad \frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\zeta_1}{dx}$$

und für die Oscillationen in der Einfallsebene

$$\xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1, \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\xi_1}{dx}, \quad \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta_1}{dx}$$

dies sind die beiden von Cauchy mit dem Namen der Principien der Äquivalenz der Schwingungen und der Continuität der Bewegung bezeichneten Gesetze. Da aber im Falle der totalen Reflexion die Bewegung nicht in das zweite Mittel hineinschreitet, oder doch nur auf eine höchst geringe Distanz von der Trennungsfläche, so muss die Verschiebung im zweiten Medium statt durch eine Kreisfunction, durch eine Exponentielle dargestellt werden, deren Modulus eine negative Constante ist, da die Bewegung im Fortschreiten erlischt; dadurch werden aber in die Differentialausdrücke, welche die Bedingungen an der Grenze zweier isophanen Medien enthalten, sowohl Cosinusse als Sinusse treten, und es wird denselben nur so Genüge geleistet werden können, dass die Bögen, deren Sinus die Bewegung im einfallenden und reflectirten Systeme proportional ist, um gewisse Constante vermehrt werden; wodurch der analytische Beweis für die Nothwendigkeit der Phasenverschiebung geliefert ist.

Vergleicht man Green's Theorie mit der Cauchy's, so zeigt sie in Principien und Resultaten (worunter wir zunächst die in den Bedingungen für die Grenzfläche enthaltenen Gesetze der Äquivalenz der Vibrationen und der Continuität der Bewegung rechnen möchten, da sie aus den höhern Principien der Theorie gefolgert werden und daher nicht wie Haughton es thut, unter diese Principien selbst gereiht werden können) die wesentlichste Übereinstimmung; Cauchy's Theorie, auf die wir nun übergehen, hat aber den grossen Vorzug allgemein und vollständig zu sein. Wir wollen versuchen mit einigen Zügen eine Idee von den unterscheidenden Principien zu geben, nach welchen der grosse Forscher seine Theorie geschaffen hat[1]).

---

[1]) Da ein ausführliches Eingehen in die Theorie Cauchy's im Texte nicht möglich ist, so ergänzen wir das oben Angedeutete durch ein möglichst vollständiges Verzeichniss der Literatur, in welcher Cauchy's Arbeiten über diesen Theil der theoretischen Optik enthalten sind. In Férussac's Bulletin des sciences befindet sich der erste Artikel „Sur la réflexion et la refraction de la lumière" Jul. 1830, wo angenommen wird, die Polarisationsebene falle mit der Oscillationsebene zusammen, und die Bedingungen bezüglich der Trennungsfläche aus der Gleichheit gewisser Pressionen abgeleitet werden, wobei die Dichte constant gesetzt ist. Doch schon im August 1836 liess Cauchy in Budweis ein Memoire „Sur la Theorie de la lumière" lithographiren, das die Grundzüge der ganzen heutigen Theorie enthält (deutsch bearbeitet v. Prof. Moth, Wien 1842); gleichzeitig erschienen die Briefe an Libri und Ampère, in denen die neuen Principien sammt einigen Folgerungen bezüglich der elliptischen Polarisation durch Reflexion an durchsichtigen

§. 4.

Cauchy beginnt nicht damit den Lichtäther in den differenten Medien mit bestimmten Eigenschaften auszurüsten, und daraus die Bewegungs- und Bedingungsgleichungen abzuleiten, sondern er behandelt die Gleichungen unendlich kleiner Bewegungen in ihrer allgemeinsten Form und zeigt dann nur, dass die Lichtbewegung ein specieller Fall derselben ist.

Da nach diesen Gleichungen die Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der in einem solchen Medium möglichen Stralen durch eine Gleichung des dritten Grades gegeben sind, so muss bei der Reflexion auch auf den dritten Stral Rücksicht genommen werden, der zwar

---

und opaken Körpern mitgetheilt wurde (Compt. rend. 1836, 1, 341, 427, 455 — 182, 207, 364; Pg. Ann. XXXIX, 48); die Bedingungen an der Grenze zweier Medien wurden ausführlicher entwickelt im Mémoire sur la dispersion de la lumière (Prag 1836) §. 5, §. 10 und in den Nouv. Exerc. de Math. VII livr. 1836. Mit dem Jahre 1838 beginnt eine fortlaufende Reihe von Memoiren in den Comptes rendus; der VII. und VIII. Band enthält das Mémoire sur la réflexion et la refraction de lumière (besonders abgedruckt im Récueil de mém. sur divers points de phys. math. p. 1—63); worin nur der allgemeine Gang der Operationen und die Resultate angegeben werden ohne Zuziehung des Calculs; im „Méthode générale propre à fournir les équations de condition rélatives aux limites des corps" (C. r. VIII, 1839 — Rec. 64—94) werden die Bedingungsgleichungen, welche in den früheren Memoiren v. 1836 angedeutet sind, strenge abgeleitet, die dann unter elementarerer Form, Band X (17. Febr., 2. März 1840), XV (1842, 12. Sept.), XXVII (1848, 24. Juli) mitgetheilt werden; B. XVI (Jan. 1843) enthält eine „Note sur les pressions supportées dans un corps solide ou fluide par 2 portions de surface très voisines, l'une à l'exterieur l'autre à l'interieur à ce même corps" die sich auf die physikalische Begründung jener Bedingungen bezieht. Die Formeln, die aus diesen Principien für die Intensität und Phasenverschiebung abgeleitet werden, sind in folgenden Memoiren enthalten: Note sur la quantité de lumière réfléchie sous les diverses incidences par les surfaces des corps opaques et spécialement des métaux (C. r. VIII, 553. 15. Apr. 1839: erste Bekanntmachung der Formeln für metallische Reflexion). — Sur l'intensité de la lumière polarisée et réfléchie par des surfaces métalliques (VIII, 658. Anwendung dieser Formeln auf 4 Metalle). — Mémoire sur la réflexion et la refraction d'un mouvement simple (C. r. VIII, IX, 1839. Exerc. d'Annal. et de Phys. Math. 133—177; die Schlussformeln für das in der Einfallsebene schwingende Licht sind unrichtig, und das Versehen wird in einer späteren Note berichtigt. Ex. 233). — Mémoire sur la polarisation des rayons réfléchis ou refractés par la surface de séparation de 2 corps isophanes et transparents (C. r. IX, 1839 — Ex. 212—260, nächst der Méthode générale das Hauptwerk). Notes sur les milieux dans lesquels un rayon simple peut être complètement polarisé par réflexion (C. r. IX, 726). — Mém. sur la polarisation incomplète produite à la surface de séparation de certains milieux par la réflexion d'un rayon simple. (C. r. IX. 727, 1839, 2. Dec.) — Sur la réflexion des rayons lumineux produite par la seconde surface d'un corps isophane et transparent (C. r. IX, 764). — Die bisher entwickelte Theorie befindet sich besprochen mit besonderer Hervorhebung der Principien durch v. Ettingshausen, Pg. L, 409. Cauchy fügte nur noch zwei Noten hinzu (C. r. X, 347, XV, 418). Dann ruhten diese Arbeiten bis Jamin's Untersuchungen ihn aufs neue auf diesen Gegenstand zurückführten; er begann damit auf seine schon früher gegebenen Metallreflexionsformeln aufmerksam zu machen (C. r. XXVI, 86; Pg. Ann. LXXIV, 543) und seine Theorie bei Gelegenheit der Besprechung der Jamin'schen Messungen zu erläutern (C. r. XXVIII, 121; XXXI. 112). Dabei verliess er aber die Form der Bedingungsgleichungen, welche er in der Méthode générale mitgetheilt hatte, indem er die oben im Texte mitgetheilten Principien aufstellte und nach diesen die Formeln für isophane Körper, welche Rotationsvermögen besitzen, entwickelte (C. r. XXXI, 160, 1850. 5. Aug.; XXXI, 225) und endlich auf Krystalle ausdehnte (Mém. sur la réflexion des rayons lumineux à la surface exter. ou inter. d'un cristal XXXI, 257, 1850, 26. Aug. Dazu zwei Noten XXXI, 666 — XXXI, 766). Im XXXI. B. der C. r. p. 532 wird auch angegeben, dass Cauchy ein Mém. sur les lois de la réflexion et refraction opérées par la surface d'un cristal überreicht habe und dass dies im XXIII. B. der Mém. de l'Acad. erscheinen sollte; leider ist dies unterblieben. Endlich hat noch Cauchy in den letzten Jahren ein besonderes Interesse der speciellen Betrachtung der evanescirenden Strahlen zugewandt (C. r. XXVII. 621; XXVIII 8. u. 15. Jan. 1849; XXXI, 297). Eine lichtvolle Besprechung sämmtlicher hier erwähnten Arbeiten gibt Moigno im Repertoire d'optique moderne, I, IV. die zum Theile aus den Einleitungen Cauchy's zu seinen verschiedenen Memoiren gezogen ist und sich im Ausdrucke strenge an das Original schliesst. Da Cauchy von seinen Formeln die Ableitung nicht mittheilt und überhaupt trotz der staunenswerthen Anzahl seiner Mittheilungen doch mehr zerstreute Andeutungen und Verweisungen auf später Auszuführendes gibt, so hat Beer die sehr dankenswerthe Arbeit unternommen, die Theorie durch die vollständige Ableitung der gegebenen Endformeln aus den gegebenen Principien zu ergänzen (Begründung der Reflexionstheorie durch Herleitung der verschiedenen Stralen aus den allgemeinen Differentialgleichungen der Lichtbewegung. Pg. XCII, 522. Herleitung der allgemeinen Cauchy'schen Reflexionsformeln für durchsichtige und undurchsichtige Körper. Pg. XCII, 402. Herleitung der Cauchy'schen Formeln für durchsichtige Mittel, Pg. XCI, 467 — für Totalreflexion, Pg. XCI, 268 — für Metallflächen, XCI, 561 — Herleitung der Fresnel'schen Formeln, XCI, 115). Wir bedauern nur dass der Verfasser die Cauchy'sche Ausdrucksweise verlassen und in Zeichen und Richtungen Veränderungen getroffen, welche dem an Cauchy's Analysen Gewöhnten fremdartig sind. Die Architektur der Cauchy'schen Methoden wird an Leichtigkeit und Eleganz nur schwer übertroffen und darum nirgends gern vermisst werden.

bis jetzt nicht gesehen werden konnte, dessen Existenz aber eben wegen der nur durch seine Mitwirkung erzielten elliptischen Polarisation des reflectirten Lichts nicht bezweifelt werden kann, ja Cauchy vermuthet, dass es nicht unmöglich sei, dass man ihn mittelst geschickter Versuche sichtbar machen werde; die Moleküle dieses Strals bewegen sich in Ellipsen, welche in der Einfallsebene liegen, während die Wellen senkrecht stehen auf der Einfallsebene und der brechenden Fläche. Die zwei ersten Wurzeln der erwähnten Gleichung, welche die sichtbaren Stralen liefern, sind gleich für isophane nicht rotatorische Medien, während sie ungleich, aber nur wenig verschieden sind für doppelbrechende Körper, dieselben seien Krystalle oder isophane Mittel mit Rotationsvermögen.

Bezüglich der Grenzfläche macht Cauchy die Voraussetzung, dass der Halbmesser der Wirkungssphäre eines Moleküls verschwindend klein sei gegen die Länge einer Lichtwelle, dadurch aber wird die Dispersion unmöglich, da sie gerade aus den höheren Gliedern der Reihe $e^{ux+vy+wx} - 1$ abgeleitet wird, welche nach dieser Voraussetzung vernachlässiget werden müssen: diese Voraussetzung ist aber nothwendig, man bediene sich der in der *Méthode générale* dargestellten Ableitungsmethode oder des Princips der Continuität der Bewegung[1]).

Über die Verschiedenheit der Constitution der beiden Medien werden a priori keine Voraussetzungen gemacht, doch geht aus der näheren Untersuchung der einfachen Lichtbewegung (*Théorie de la dispers. § 9*) hervor, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Raume eine reine Function der Dichte ist, und somit in verschiedenen Medien der Äther gewiss in verschiedener Dichte enthalten ist.

Die Gesetze der Reflexion und Brechung werden aus dem Princip der correspondirenden Bewegungen und dem der Continuität der Bewegung abgeleitet. Das erstere gibt die Gleichungen, welche die Richtungen der Wellenzüge bestimmen, und wir haben uns desselben im ersten Abschnitte bedient. Es ist bereits von Fresnel, Neumann, Mac-Cullagh — kurz von allen, die sich mit den Reflexionsgesetzen beschäftigt, angewendet worden. Nach dem zweiten wird die Verschiebung eines Äthermoleküls gemessen längs den drei rechtwinkeligen Coordinatenaxen in einer unendlich geringen Distanz von der Trennungsfläche denselben Werth behaupten, während die Bewegung aus dem ersten in das zweite Medium sich fortpflanzt, und dasselbe gilt für die Derivirten dieser Verschiebungscomponente, genommen in Bezug einer Coordinate, die senkrecht steht auf der reflectirenden Ebene. Dies sind sonach dieselben Bedingungsgleichungen, die wir oben bei Green's Theorie mitgetheilt. Die aus diesen Principien abgeleiteten Formeln werden durch Jamin's[2]) Messungen für isophane Körper vollständig bestätigt. Die elliptische Polarisation unter dem Polarisationswinkel (eigentlich

---

[1]) Vergl. C. r. X, 266—273; XVI, 151—155, wo nachgewiesen wird, dass Poisson's Annahmen über die Grenze der Körper nicht streng richtig sind. Über die erwähnten Dispersionsglieder s. ausser den Mém. sur la disp. die Mém. sur les mouv. inf. p. Ex de M. p. 7, und sur la réfl. Ex. p. 150. Dass sie wegfallen auch in der späteren Theorie s. Green Cambr. Tr. VII, 4. Trotzdem sagt Cauchy 18. Dec. 1848: dans le cas où les équations sont d'un dégré plus élevé que le second on devra joindre de nouvelles conditions aux précédentes que l'on deduire immediatement du principe énoncé, d. i. aus dem Princip der Continuität, und er spricht kurz darauf (15. Jan. 1849) von einer Intensitätstheorie mit Berücksichtigung der Dispersionsglieder. Wie die Theorie jetzt steht, schliessen sich aber Dispersion und Regelmässigkeit in den Reflexionserscheinungen gegenseitig aus.

[2]) Mém. sur la polarisation métallique, C. r. XXI, 430; XXII, 477; XXIII, 1103. Pg. LXIX, 459. Erg. B. 299, 437. Mém. sur les couleurs des métaux C. r. XXVI, 83. Ann. Ph. Ch. (III) XXII, 311. Pg. LXXIV, 528. — Mém. sur la réfl. de la lum. par les subst. transp. C. r. XXVI, 383. Pg. LXXIV. 248. — Mém. sur la réfl. de la lum. C. r. XXVII, 147. — Mém. sur la réfl. de la lum. à la surf. des corps transp. C. r. XXVIII, 120. — Mém. sur la réfl. totale XXXI, 1. Pg. Ann. LXXXII, 149. — Mém. sur la réfl. des liquides C. r. XXXI. 696. Pg. LXXXII, 279. — Hierzu kömmt nun noch Haughton: On some new laws of reflexion of pol. light. Phil. Mg. Nro. 55, p. 507 über die Lage der Axen der Ellipsen.

incidence principale) ist die allgemeine Erscheinung: geradlinig wird sie am Minilit und der Hexaederfläche des Alauns. Während bei Metallen die Phasendifferenz von der senkrechten bis zur streifenden Incidenz von der Grenze π bis 2π allmählich anwächst bleibt sie für die gewöhnlichen durchsichtigen Substanzen in der Nähe jener Grenzincidenzen constant π und 2π und erst in der Nähe desjenigen Incidenzwinkels, für welchen der reflectirte Stral sich senkrecht gegen den gebrochenen stellt, geht sie von π in 2π über; im Allgemeinen ist dieser Übergang rascher bei schwächer brechenden Substanzen; für die obengenannten zwei Körper, für welche die Fresnel'schen Gleichungen gelten, ist derselbe plötzlich. Jamin hat als zweite Constante die Differenz $\varepsilon = \frac{k}{k_{,,}} - \frac{k}{k''}$ bestimmt; $k_{,,}$, k'' sind die Exstinctions-Coëfficienten Cauchy's für die verschiedenen Stralen unter der senkrechten Incidenz in den zwei Medien; ε ist Jamin's Ellipticitäts-Coëfficient.

Wir bemerken, dass Cauchy das Princip der Continuität nur für isophane, also nicht krystallinische Körper in der *Méthode générale* abgeleitet hat; die Bedingungsgleichungen, welche er dort, so wie in den Memoiren des IX. Bandes der *Comptes rendus* und der Exerc. findet, sind unter der Beschränkung angewandt, dass sich die 6 Constanten der allgemeinen Bewegungsgleichungen auf 2 zurückführen lassen. Aber es ist klar, dass die Bedingungsgleichungen für krystallinische Medien sich in derselben Weise entwickeln lassen, und Cauchy schlägt daher den kürzeren Weg ein, indem er das Princip der Continuität ohne weiteres auf doppelbrechende Körper anwendet. Er findet dann 3 Ellipticitäts-Coëfficienten und berechnet die Veränderungen, welche der einfallende Stral bei seinem Übergange in den reflectirten und gebrochenen erleidet, näherungsweise; doch ist diese ganze Theorie noch sehr skizzenhaft, wenigstens so wie sie in den *Comptes rendus* enthalten ist; das in der Note erwähnte Memoire waren wir aber noch nicht so glücklich zu Gesichte zu bekommen. Die Folgerungen, die Cauchy stellenweise mittheilt stimmen mit Neumann's Resultaten, und die Messungen, welche Cauchy zur Constatirung seiner Folgerungen erwähnt, sind von Neumann schon vor Jahren in umfassender Weise ausgeführt worden. Und doch wäre eine vollständige Theorie der Reflexion an krystallisirten Körpern wie wir sie für isophane Medien seit Cauchy's (und setzen wir hinzu Beer's) Arbeiten besitzen, in hohem Grade zu wünschen, seit durch Haidinger's merkwürdige Forschungen über Körperfarben ein neues, für die Theorie, wegen der unausbleiblichen Anknüpfung an die Frage der Dispersion, wahrhaft unabsehbares Feld sich eröffnet hat.

§. 5.

Wir kommen nun zur Darlegung der Principien, welchen wir bei der Lösung der Intensitätsfrage gefolgt sind.

Aus der in den vorigen Paragraphen gegebenen Darstellung ist ersichtlich, dass diejenige Theorie, welche Longitudinalschwingungen für den Incidenzpunkt mit in Rechnung zieht, wenn die Oscillationen der einfallenden Wellen in der Einfallsebene vor sich gehen, nicht nur mit den anschaulichen Vorstellungen, die wir uns von den Äthervibrationen bilden müssen, im vollsten Einklange steht, sondern dass sie auch in allen ihren Folgerungen durch die Erfahrung bekräftigt und bestätigt wird. Es ist desshalb auch der Cauchy'sche Beweis für die Lage der Polarisationsebene so kräftig als der von Stokes; beide Beweise stützen sich auf den allgemeinen

Satz: wenn zwei Voraussetzungen sich gegenseitig ausschliessen, eine davon aber nothwendig stattfinden muss, und die Folgerungen aus beiden in allen Fällen gleich sind, bis auf einen, so reicht dieser eine Fall vollständig hin, über die Richtigkeit der einen oder der andern Voraussetzung zu entscheiden.

An der Trennungsfläche zweier Krystallindividuen werden nun gewiss durch die Reflexion und Brechung evanescirende Stralen erregt, die sich in Ellipsen fortrollen, welche gegen die brechende Fläche und Einfallsebene eine gewisse Neigung haben, ohne jedoch bedeutend von der letzteren abzuweichen. Die Differenz in den Abmessungen und Neigungen dieser Ellipsen bewirkt die Correction, welche die Fresnel'schen Formeln erhalten müssen um die Erscheinung wirklich zu repräsentiren. Aus der Symmetrie der Zwillingsbildung folgt aber, die einfallende Welle sei eine ordentliche oder ausserordentliche, dass die Abmessungen dieser Ellipsen in beiden Individuen gleich, die Bewegungen in denselben aber entgegengesetzt sein werden, so dass sich die evanescirenden Stralen gegenseitig in ihrer Wirkung annulliren. Es werden hier somit jene Correctionsglieder wegfallen.

Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte involvirt zwei andere Sätze. Zuerst die Erhaltung der Phasen ausserhalb der Grenzen der totalen Reflexion; dies ist in Mac-Cullagh's Analyse nachgewiesen und folgt von selbst, wenn man die Bedeutung jenes Princips überlegt, sowie es wenigstens in den Intensitätsforschungen eingeführt wird. Es heisst nämlich hier weiter nichts, als dass die ganze Bewegungsgrösse, welche das Auge im einfallenden Lichte wahrnimmt, von demselben in der Summe des reflectirten und gebrochenen Lichts empfunden werden wird. Da aber ein Theil der einfallenden Bewegung auf die Bildung longitudinaler, vom Auge als Licht nicht empfindbarer und nach der Natur des Lichtäthers auch nicht über die unmittelbare Nähe der brechenden Fläche sich fortpflanzender Vibrationen verwendet wird, wobei nothwendig eine Phasenverschiebung eintreten muss, für welche das Auge unmittelbar keine Empfindung besitzt, so kann der Satz der lebendigen Kräfte in der Weise, wie ihn Fresnel, Mac-Cullagh und Neumann in Rechnung führen, nicht auf vollkommen genaue Ergebnisse führen. Bei Zwillingskrystallen aber, wo eigentlich dies- und jenseits dasselbe Medium vorliegt, kann keine Phasenverschiebung stattfinden. — Der zweite Satz, den man bei Anwendung des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte in die Rechnung legt, ist der der Erhaltung der Oscillationsdauer; denn indem man die Geschwindigkeit in den zwei Medien den Sinussen des Einfalls-, Reflexions- und Brechungswinkels proportional setzt, und ebenso bei Berechnung der bewegten Massen die Dimensionen der Volumina senkrecht gegen die Wellenebene nach demselben Masse misst, supponirt man dass das homogene einfallende Licht seine Farbe nicht ändere. Der letztere Satz liegt übrigens durch das Cauchy'sche Princip der correspondirenden Bewegungen, das wir im ersten Abschnitte der Untersuchung über die Richtungen der reflectirten und gebrochenen Stralen zu Grunde gelegt, bereits in unseren Gleichungen. Der erstere hingegen macht es uns möglich das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte bei der Lösung unserer Aufgabe beizubehalten. Es haben uns hiezu noch folgende Betrachtungen bewogen.

Die verschiedene Phasenverschiebung in den 2 senkrecht gegen einander polarisirten Componenten (in die sich jeder einfache Stral zerlegen lässt) kann nur in dem Falle, wo das Medium, in welchem sich die reflectirte Bewegung fortpflanzt, isophan ist, durch die Ellipticität der Oscillationen des reflectirten Strales gemessen werden; aber welches Mittel gibt es, diese Verschiebung zu messen, wo die zwei reflectirten Componenten nicht in dieselbe Richtung fallen, wie dies bei Zwillingskrystallen geschieht? Wir würden die ohnehin höchst verwickelte

Rechnung noch mehr compliciren, wollten wir die Anomalie der zwei Stralen, die, wie wir gezeigt haben, gewiss von der Nulle nur äusserst wenig, ja wahrscheinlich gar nicht verschieden ist, aufsuchen, und dann doch nur Formeln liefern, für deren empirische Bewahrheitung, wenigstens gegenwärtig, es gar kein Mittel gibt. Wir haben uns daher auf die Bestimmung des Verhältnisses der Amplituden beschränkt, und zwar in einer Approximation, die, wie Neumann's Messungen zeigen, der Vorwurf geringer Genauigkeit nicht trifft. Wir verweisen auf die Resultate, die er Poggend. Ann. XLII, 1 — 30 mittheilt: und diese beziehen sich doch auf einen Fall, wo das Mitwirken longitudinaler Vibrationen ausser Zweifel gesetzt ist. Einer Theorie, die zu solchen Ergebnissen führt schliessen wir uns um so zuversichtlicher an, als es uns bei der Aufgabe, die wir uns gestellt, mehr um die empirische als theoretische Seite derselben zu thun war, mehr um die Constatirung des Thatsächlichen, als um die Erhärtung einer theoretischen Ansicht. Und es haben ausgezeichnete Autoren in ähnlichen Fällen ähnlich gethan; Herschel, in seinem *Treatise on light*, leitet die Richtung der im Doppelspath gebrochenen Stralen aus dem Principe der kleinsten Wirkung, also der Emissionstheorie ab, obschon Herschel gleichzeitig gewiss nicht minder fest von der Wahrheit der Wellenlehre, als der Verfasser von der Richtigkeit der Cauchy'schen Theorie überzeugt ist. Es hat mich vorzüglich die voraussichtliche unvermeidliche Complication der Rechnung bewogen, mich an Neumann's schöne Arbeit anzuschliessen, da die obigen Betrachtungen die Überzeugung gaben, dass dieselbe in dem speciellen Falle der Zwillingskrystalle zu demselben Resultate führen müsse wie die Theorie, welche auch longitudinale Vibrationen berücksichtigt.

Ehe ich zur Entwickelung der Grundformeln schreite, fühle ich mich noch gedrungen, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Regierungsrathe von Ettingshausen, für die äusserste Liberalität zu danken, mit welcher er meine Arbeit in jeder Beziehung unterstützt hat.

DRITTER ABSCHNITT.

ENTWICKELUNG DER GRUNDGLEICHUNGEN FÜR DIE INTENSITÄTSVERHÄLTNISSE.

ORDENTLICHE WELLE.

§. 1.

Wir behalten dasselbe Coordinatensystem bei, welches in den beiden im ersten Abschnitte erwähnten Aufsätzen zur Bezeichnung der Richtungen des Lichtstrales gegen die Constanten des Krystalls gebraucht wurde. Die Zwillingsfläche ist die Ebene der XY, das Einfallsloth die dritte coordinirte Axe: die Ebene, welche durch die optische Axe und das Einfallsloth geht, ist die XZ, folglich die Abscissenaxe die Richtung der Projection der optischen Axe. Wir stellen uns dabei den Krystall in eine solche Lage gebracht vor, dass diese Projection nach rechts hin fällt, und betrachten die Abscissen positiv in derselben Richtung.

Die Cosinusse der Winkel, welche die Normale der einfallenden Welle mit den Coordinatenaxen einschliesst, bezeichnen wir mit

$$u,\ v,\ w$$

die Cosinusse der Winkel, welche die Normale der reflectirten ordentlichen und die der reflectirten ausserordentlichen Welle mit den Coordinatenaxen einschliesst, mit

$$u'_o\ v'_o\ w'_o$$
$$u'_e\ v'_e\ w'_e$$

die Cosinusse der Winkel, welche die Normale der gebrochenen odentlichen und die der gebrochenen ausserordentlichen Welle mit den Coordinatenaxen einschliesst, mit

$$u''_o\ v''_o\ w''_o$$
$$u''_e\ v''_e\ w''_e$$

und bedienen uns zur Bezeichnung der Richtungen der zu diesen Wellen gehörigen Stralen der Buchstaben $\xi,\ \eta,\ \zeta;\ \xi'_o,\ \eta'_o,\ \zeta'_o;\ \xi'_e,\ \eta'_e,\ \zeta'_e;\ \xi''_o,\ \eta''_o,\ \zeta''_o;\ \xi''_e,\ \eta''_e,\ \zeta''_e$. Dabei kann gleich jetzt bemerkt werden, dass nach dem Satze, dass der Reflectionswinkel der ordentlichen und ausserordentlichen Welle gleich ist dem Brechungswinkel der ordentlichen und ausserordentlichen Welle

$$u'_o = u''_o\ \ v'_o = v''_o\ \ w'_o = -w''_o$$
$$u'_e = u''_e\ \ v'_e = v''_e\ \ w'_e = -w''_e$$

sein muss, wo noch aus der Natur des Zwillingskrystalles die Gleichungen

$$\begin{aligned} u &= -u'_o = -u''_o \\ v &= -v'_o = -v''_o \\ w &= \ \ \ w'_o = -w''_o \end{aligned}$$

hinzukommen.

Die Oscillationsrichtungen werden dann analog mit den grossen Buchstaben bezeichnet; es stellen daher

$$U,\ V,\ W$$

die Cosinusse dar, welche die Oscillationen der einfallenden Welle mit den Coordinatenaxen einschliessen;

$$U'_o\ V'_o\ W'_o$$
$$U'_e\ V'_e\ W'_e$$

die Cosinusse der Winkel, welche die Oscillationen der reflectirten ordentlichen und ausserordentlichen Wellen

$$U''_o\ V''_o\ W''_o$$
$$U''_e\ V''_e\ W''_e$$

die Cosinusse der Winkel, welche die Oscillationen der gebrochenen ordentlichen und ausserordentlichen Wellen mit den Coordinatenaxen einschliessen. Wir müssen vor allem diese als Functionen der Richtungen der Normalen und der Richtung der optischen Axe darstellen.

a) Einfallende Welle. Ihre Oscillationsebene geht durch die Normale und optische Axe, welche mit den 3 Axen Winkel macht, deren Cosinusse

$$\cos a\,,\ o\,,\ \sin a$$

sind; die Gleichung der Schwingungsebene ist somit

$$-v \sin a\, x + (u \sin a - w \cos a)\, y + v \cos a \,.\, z = 0$$

die Schwingungen U, V, W stehen senkrecht auf der Normale, daher

$$Uu + Vv + Ww = 0$$

sie liegen in der Einfallsebene, folglich

$$-v \sin a \,.\, U + (u \sin a - w \cos a)\, V + v \cos a \,.\, W = 0$$

und es ist

$$U^2 + V^2 + W^2 = 1$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{uw \sin a - (1-u^2) \cos a}{\sqrt{1-(w \sin a + u \cos a)^2}} \\ V &= \frac{v\,(w \sin a + u \cos a)}{\sqrt{1-(w \sin a + u \cos a)^2}} \\ W &= \frac{uw \cos a - (1-w^2) \sin a}{\sqrt{1-(w \sin a + u \cos a)^2}} \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

b) Reflectirte ordentliche Welle. Die Gleichung der Reflexionsebene ist dieselbe, wie die Einfallsebene:

$$v \sin a \,.\, x - (u \sin a - w \cos a)\, y - v \cos a \,.\, z = 0$$

und die Schwingungen U'_o, V'_o, W'_o stehen senkrecht auf der Normale, daher

$$U'_o u + V'_o v - W'_o w = 0$$

sie liegen in der Einfallsebene, folglich

$$v \sin a \,.\, U'_o - (u \sin a - w \cos a)\, V'_o - v \cos a \,.\, W'_o = 0$$

und es ist

$$U'^2_o + V'^2_o + W'^2_o = 1$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man

5)
$$U'_o = -\frac{uw\, sin\, a + (1-u^2)\, cos\, a}{\sqrt{1-(w\, sin\, a - u\, cos\, a)^2}}$$

$$V'_o = -\frac{v\,(w\, sin\, a - u\, cos\, a)}{\sqrt{1-(w\, sin\, a - u\, cos\, a)^2}}$$

$$W'_o = -\frac{uw\, cos\, a + (1-w^2)\, sin\, a}{\sqrt{1-(w\, sin\, a - u\, cos\, a)^2}}$$

c) Reflectirte ausserordentliche Welle. Die Schwingungen U'_e, V'_e, W'_e stehen senkrecht auf der Normale, daher

$$U'_e\, u'_e + V'_e\, v'_e + W'_e\, w'_e = 0$$

sie stehen senkrecht auf der Axe, folglich

$$U'_e\, cos\, a + W'_e\, sin\, a = 0$$

und es ist

$$U'^2_e + V'^2_e + W'^2_e = 1$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man

6)
$$U'_e = -\frac{v'_e\, sin\, a}{\sqrt{1-(w'_e\, sin\, a + u'_e\, cos\, a)^2}}$$

$$V'_e = \frac{u'_e\, sin\, a - w'_e\, cos\, a}{\sqrt{1-(w'_e\, sin\, a + v'_e\, cos\, a)^2}}$$

$$W'_e = \frac{v'_e\, cos\, a}{\sqrt{1-(w'_e\, sin\, a + u'_e\, cos\, a)^2}}$$

d) Gebrochene ordentliche Welle. Die Oscillationsebene ist

$$-\, v\, sin\, a\, .\, x + (u\, sin\, a + w\, cos\, a)\, y - v\, cos\, a\, .\, z = 0 \quad . \; . \; . \quad (E''_o),$$

welche Gleichung sich nur durch die Beziehung auf die untere Axe von der Gleichung der Einfallsebene unterscheidet. Die Schwingungen U''_o, V''_o, W''_o stehen senkrecht auf der Normale, daher

$$U''_o u + V''_o v + W''_o w = 0$$

sie liegen in der Ebene (E''_o), folglich

$$-\, v\, sin\, a\, .\, U''_o + (u\, sin\, a + w\, cos)\, V''_o - v\, cos\, a\, W''_o = 0$$

und es ist

$$U''^2_o + V''^2_o + W''^2_o = 1$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

7)
$$U''_o = -\frac{uw\, sin\, a + (1-u^2)\, cos\, a}{\sqrt{1-(w\, sin\, a - u\, cos\, a)^2}}$$

$$V''_o = -\frac{v\,(w\, sin\, a - u\, cos\, a)}{\sqrt{1-(w\, sin\, a - u\, cos\, a)^2}}$$

$$W''_o = \frac{uw\, cos\, a + (1-w^2)\, sin\, a}{\sqrt{1-(w\, sin\, a - u\, cos\, a)^2}}$$

e) Gebrochene ausserordentliche Welle. Die Schwingungen U''_e, V''_e, W''_e stehen senkrecht auf der Normale, daher

$$U''_e\, u''_e + V''_e\, v''_e + W''_e\, w''_e = 0$$

sie stehen senkrecht auf der optischen Axe, folglich

$$U''_e \cos a - W''_e \sin a = 0$$

und es ist

$$U''^2_e + V''^2_e + W''^2_e = 1$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned} U''_e &= \frac{v''_e \sin a}{\sqrt{1-(w''_e \sin a - u''_e \cos a)^2}} \\ V''_e &= -\frac{u''_e \sin a + w''_e \cos a}{\sqrt{1-(w''_e \sin a - u''_e \cos a)^2}} \\ W''_e &= \frac{v''_e \cos a}{\sqrt{1-(w''_e \sin a - u''_e \cos a)^2}} \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

Da wir im Folgenden, der einfacheren Operationen wegen, häufig Hilfsgrössen in die Rechnung einführen werden, so wird es zweckmässig sein, dieselben vor dem Beginn der eigentlichen Untersuchung zu entwickeln, um den Gang derselben nicht durch eingeflochtene Hilfsoperationen noch zu verlangsamen. Wir werden auch die mit einem Striche bezeichneten Cosinusse u'_e, v'_e, w'_e in 6) durch die doppelt-gestrichenen ersetzen, so dass wir statt 6) folgende Werthe für die Oscillationsrichtungen in der ausserordentlich reflectirten Welle erhalten:

$$\left.\begin{aligned} U'_e &= -\frac{v''_e \sin a}{\sqrt{1-(w''_e \sin a - u''_e \cos a)^2}} \\ V'_e &= \frac{u''_e \sin a + w''_e \cos a}{\sqrt{1-(w''_e \sin a - u''_e \cos a)^2}} \\ W'_e &= \frac{v''_e \cos a}{\sqrt{1-(w''_e \sin a - u''_e \cos a)^2}} \end{aligned}\right\} \quad 9)$$

Man sieht, dass auch in den Oscillationsrichtungen dies- und jenseits der Zwillingsebene eine Übereinstimmung stattfindet: es ist nämlich aus 5) und 7)

$$\left.\begin{aligned} U'_o &= U''_o \\ V'_o &= V''_o \\ W'_o &= -W''_o \end{aligned}\right\} \quad 10)$$

und aus 8) und 9)

$$\left.\begin{aligned} U'_e &= -U''_e \\ V'_e &= -V''_e \\ W'_e &= W''_e \end{aligned}\right\} \quad 11)$$

Wir werden im Folgenden die Buchstaben-Indices weglassen und blos die Striche beibehalten, da weiter kein Zweifel mehr entstehen kann, was u'', v'', w'' — U', V', W' — U'', V'', W'' bedeutet.

Ist ω das Azimuth der Einfallsebene, und, da wir nur Wellennormalen, keine Stralen, betrachten, auch das der Reflexions- und Brechungsebene, und φ der Einfalls-, φ' der Brechungs- und Reflexionswinkel der ordentlich gebrochenen und reflectirten, φ'' der Brechungs- und Reflexionswinkel der ausserordentlich gebrochenen und reflectirten Welle, so erhalten wir, da $\varphi' = \varphi$

12)
$$\begin{aligned}
u &= \sin\varphi \cos\omega \\
v &= \sin\varphi \sin\omega \\
w &= \cos\varphi \\
u' &= -\sin\varphi \cos\omega \\
v' &= -\sin\varphi \sin\omega \\
w' &= \cos\varphi \\
u'' &= -\sin\varphi'' \cos\omega \\
v'' &= -\sin\varphi'' \sin\omega \\
w'' &= -\cos\varphi''
\end{aligned}$$

Nennen wir ferner γ den Cosinus des Winkels, den die Wellennormale mit der optischen Axe einschliesst für die einfallende, γ'_o für die ordentliche reflectirte, γ'_e für die ausserordentliche reflectirte, γ''_o für die ordentliche gebrochene, γ''_e für die ausserordentliche gebrochene Welle, so folgt aus der Symmetrie der Zwillingsgestalt

$$\gamma'_o = \gamma''_o$$
$$\gamma'_e = \gamma''_e$$

so dass wir auch hier die Buchstaben-Indices weglassen können. Man findet

13)
$$\begin{aligned}
\gamma &= u \cos\alpha + w \sin\alpha = \sin\varphi \cos\omega \cos\alpha + \cos\varphi \sin\alpha \\
\gamma' &= -u \cos\alpha + w \sin\alpha = -\sin\varphi \cos\omega \cos\alpha + \cos\varphi \sin\alpha \\
\gamma'' &= -u'' \cos\alpha + w \sin\alpha = -\sin\varphi'' \cos\omega \cos\alpha + \cos\varphi'' \sin\alpha
\end{aligned}$$

Wir nennen Hauptschnitt einer Welle die Ebene, die sich durch die Krystallaxe und Wellennormale legen lässt; sind A, B, C die Cosinusse der Winkel, welche die Normale auf den Wellenhauptschnitt mit den Coordinatenaxen einschliesst, so erhalten wir

14)
$$\begin{aligned}
A &= \frac{-v \sin\alpha}{\sqrt{1-\gamma''^2}} & B &= \frac{u \sin\alpha - w \cos\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}} & C &= \frac{v \cos\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}} \\
A'_o &= \frac{v \sin\alpha}{\sqrt{1-\gamma''^2}} & B'_o &= -\frac{u \sin\alpha + w \cos\alpha}{\sqrt{1-\gamma'^2}} & C'_o &= -\frac{v \cos\alpha}{\sqrt{1-\gamma'^2}} \\
A'_e &= -\frac{v'' \sin\alpha}{\sqrt{1-\gamma''^2}} & B'_e &= \frac{u'' \sin\alpha + w'' \cos\alpha}{\sqrt{1-\gamma''^2}} & C'_e &= \frac{v'' \cos\alpha}{\sqrt{1-\gamma''^2}} \\
A''_o &= -\frac{v \sin\alpha}{\sqrt{1-\gamma'^2}} & B''_o &= \frac{u \sin\alpha + w \cos\alpha}{\sqrt{1-\gamma'^2}} & C''_o &= -\frac{v \cos\alpha}{\sqrt{1-\gamma'^2}} \\
A''_e &= \frac{v'' \sin\alpha}{\sqrt{1-\gamma''^2}} & B''_e &= -\frac{u'' \sin\alpha + w'' \cos\alpha}{\sqrt{1-\gamma''^2}} & C''_e &= \frac{v'' \cos\alpha}{\sqrt{1-\gamma''^2}}
\end{aligned}$$

Die Cosinusse der Winkel, welche die Normale der Einfallsebene mit den Coordinatenaxen einschliesst, sind:

$$-\sin\omega,\ \cos\omega,\ o$$

Man hat daher wenn man mit θ den Winkel bezeichnet, den der Wellenhauptschnitt mit der Einfallsebene einschliesst:

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{v\sin\omega\sin a + (u\sin a - w\cos a)\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \frac{\sin\varphi\sin a - \cos\varphi\cos a\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma^2}}\\
\cos\theta'_o &= \frac{-v\sin\omega\sin a - (u\sin a + w\cos a)\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} = -\frac{\sin\varphi\sin a + \cos\varphi\cos a\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\\
\cos\theta'_e &= \frac{v''\sin\omega\sin a + (u''\sin a + w''\cos a)\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}} = \frac{\sin\varphi''\sin a + \cos\varphi''\cos a\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}} \qquad 15)\\
\cos\theta''_o &= \frac{v\sin\omega\sin a + (u\sin a + w\cos a)\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} = \frac{\sin\varphi\sin a + \cos\varphi\cos a\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\\
\cos\theta''_e &= \frac{-v''\sin\omega\sin a - (u''\sin a + w''\cos a)\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}} = \frac{\sin\varphi''\sin a + \cos\varphi''\cos a\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}
\end{aligned}$$

Aus 14) sieht man, dass

$$\begin{aligned}
A'_o &= -A''_o \qquad B'_o = -B''_o \qquad C'_o = C''_o\\
A'_e &= -A''_e \qquad B'_e = -B''_e \qquad C'_e = C''_e
\end{aligned} \qquad 16)$$

und aus 15, dass

$$\cos\theta'_o = -\cos\theta''_o \qquad \cos\theta'_e = -\cos\theta''_e \qquad 17)$$

Wir werden daher in der Folge die Buchstaben-Indices weglassen, und unter $\cos\theta'$ den auf die ordentlich reflectirte, unter $\cos\theta''$ den auf die ausserordentlich gebrochene Welle bezüglichen Werth verstehen.

§. 2.

Es sind nun die Gleichungen aufzustellen, welche sich aus der Bedingung der Gleichheit der Componenten ergeben. Nennen wir die Amplituden der Schwingungen

der einfallenden Welle: $\mathfrak{A}$,
der reflectirten ordentlichen Welle: $\mathfrak{A}'_o$,
der reflectirten ausserordentlichen Welle: $\mathfrak{A}'_e$,
der gebrochenen ordentlichen Welle: $\mathfrak{A}''_o$,
der gebrochenen ausserordentlichen Welle: $\mathfrak{A}''_e$,

so ergibt sich folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}U + \mathfrak{A}'_o U'_o + \mathfrak{A}'_e U'_e &= \mathfrak{A}''_o U''_o + \mathfrak{A}''_e U''_e\\
\mathfrak{A}V + \mathfrak{A}'_o V'_o + \mathfrak{A}'_e V'_e &= \mathfrak{A}''_o V''_o + \mathfrak{A}''_e V''_e\\
\mathfrak{A}W + \mathfrak{A}'_o W'_o + \mathfrak{A}'_e W'_e &= \mathfrak{A}''_o W''_o + \mathfrak{A}''_e W''_e
\end{aligned}$$

welche sich unter Berücksichtigung von 10) und 11) des vorigen Paragraphes in die einfacheren verwandeln

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}U + \mathfrak{A}'_o U' - \mathfrak{A}'_e U'' &= \mathfrak{A}''_o U' + \mathfrak{A}''_e U''\\
\mathfrak{A}V + \mathfrak{A}'_o V' - \mathfrak{A}'_e V'' &= \mathfrak{A}''_o V' + \mathfrak{A}''_e V''\\
\mathfrak{A}W + \mathfrak{A}'_o W' + \mathfrak{A}'_e W'' &= -\mathfrak{A}''_o W' + \mathfrak{A}''_e W''
\end{aligned} \qquad 18)$$

Multiplicirt man die erste dieser 3 Gleichungen mit u, die zweite mit v, die dritte mit w, und addirt diese, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}(Uu + Vv + Ww) + \mathfrak{A}'_o(U'u + V'v + W'w) - \mathfrak{A}'_e(U''u + V''v - W''w) =\\
= \mathfrak{A}''_o(U'u + V'v - W'w) + \mathfrak{A}''_e(U''u + V''v + W''w)
\end{aligned}$$

Nun ist, wenn man auf 4) und 13) Rücksicht nimmt:

$$Uu + Vv + Ww = 0;$$

ferner, aus 5) und 13):

$$U'u + V'v + W'w = -2w \frac{[(1 - w^2)\sin a + uw \cos a]}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}$$

aus 9) und 13):

$$U''u + V''v - W''w = + \frac{(uv'' - u''v)\sin a - (vw'' + v'w)\cos a}{\sqrt{1 - \gamma''^2}}$$

$$U''u + V''v + W''w = + \frac{(uv'' - u''v)\sin a + (v''w - vw'')\cos a}{\sqrt{1 - \gamma''^2}}$$

aus 5) und 13):

$$U'u + V'v - W'w = 0$$

wodurch wir folgende Gleichung erhalten:

$$19)\quad \begin{aligned} \frac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1 - \gamma'^2}} 2w \Big[(1 - w^2)\sin a + uw \cos a\Big] + \frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1 - \gamma''^2}}\Big[(uv'' - u''v)\sin a - (vw'' + v''w)\cos a\Big] \\ = \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1 - \gamma''^2}}\Big[(vu'' - uv'')\ \sin a + (vw'' - v''w)\cos a\Big] \end{aligned}$$

Multiplicirt man aber die erste der Gleichungen 18) mit A, die zweite mit B, die dritte mit C, und addirt diese 3 Gleichungen, so findet man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(UA + VB + WC) + \mathfrak{A}'_o(U'A + V'B + W'C) - \mathfrak{A}'_e(U''A + V''B - W''C) = \\ \mathfrak{A}''_o(U'A + V'B - W'C) + \mathfrak{A}''_e(U''A + V''B + W''C). \end{aligned}$$

Mit Berücksichtigung von 4) und 14) findet man:

$$UA + VB + WC = 0$$

von 5) und 14):

$$U'A + V'B + W'C = -\frac{2vw \cos a\,(u \cos a + w \sin a)}{\sqrt{(1 - \gamma'^2)(1 - \gamma^2)}}$$

von 8) und 14):

$$U''A + V''B - W''C = -\frac{\sin a^2\,(uu'' + vv'') - \sin a \cos a\,(u''w - uw'') + \cos a^2\,(vv'' + ww'')}{\sqrt{(1 - \gamma''^2)(1 - \gamma^2)}}$$

von 5) und 14):

$$U'A + V'B - W'C = \frac{2v \sin a \cos a}{\sqrt{(1 - \gamma'^2)(1 - \gamma^2)}}$$

von 8) und 14):

$$U''A + V''B + W''C = \frac{-\sin a^2\,(uu'' + vv'') + \cos a^2\,(vv'' + ww'') + \sin a \cos a\,(u'w - uw')}{\sqrt{(1 - \gamma''^2)(1 - \gamma^2)}}$$

wodurch wir folgende Gleichung erhalten:

$$-\frac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\,2\,vw\cos\alpha\,(u\cos\alpha+w\sin\alpha)+\frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\Big[\sin\alpha^2(uu''+vv'')-\sin\alpha\cos\alpha(u''w-uw'')+$$
$$+\cos\alpha^2\,(vv''-ww'')\Big]=\frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\,2\,v\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\Big[-\sin\alpha^2\,(uu''+vv'')+ \qquad 20)$$
$$\cos\alpha^2\,(vv''+ww'')+\sin\alpha\cos\alpha\,(u''w-uw'')\Big]$$

Ebenso findet man, wenn man die 3 Gleichungen 18) der Reihe nach mit $-u$, $-v$, w multiplicirt und dann addirt:

$$\mathfrak{A}\,(Uu+Vv-Ww)+\mathfrak{A}'_o\,(U'u+V'v-W'w)-\mathfrak{A}'_e\,(U''u+V''v+W''w)=$$
$$\mathfrak{A}''_o\,(U'u+V'v+W'w)+\mathfrak{A}''_e\,(U''u+V''v-W''w)$$

Mit Berücksichtigung von 4) und 13) findet sich:

$$Uu+Vv-Ww=\frac{uv\,[uw\cos\alpha-(1-w^2)\sin\alpha]}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

von 5) und 13):

$$U'u+V'v-W'w=0$$

von 8) und 13):

$$U''u+V''v+W''w=-\frac{\sin\alpha\,(uv''-u''v)+\cos\alpha\,(v''w-vw'')}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

von 5) und 13):

$$U'u+V'v+W'w=\frac{2\,w\,[uw\cos\alpha+(1-w^2)\sin\alpha]}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$

von 8) und 13):

$$U''u+V''v-W''w=\frac{\sin\alpha\,(u''v-uv'')+\cos\alpha\,(v''w+w''v)}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

woraus man folgende Gleichung erhält:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\,uv\,[uw\cos\alpha-(1-w^2)\sin\alpha]+\frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}[\sin\alpha(uv''-u''v)+\cos\alpha(v''w-vw'')]=$$
$$\frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\,2\,w[(1-w^2)\sin\alpha+uw\cos\alpha]+\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}[\sin\alpha\,(u''v-uv'')+\cos\alpha\,(v''w+w''v)] \qquad 21)$$

Multiplicirt man dagegen die drei Gleichungen 18) der Reihe nach mit A'_o, B'_o, C'_o und addirt dieselben, so hat man:

$$\mathfrak{A}\,(UA'_o+VB'_o+WC'_o)+\mathfrak{A}'_o(U'A'_o+V'B'_o+W'C'_o)-\mathfrak{A}'_e\,(U''A'_o+V''B'_o-W''C'_o)=$$
$$\mathfrak{A}''_o\,(U'A'_o+V'B'_o-W'C'_o)+\mathfrak{A}''_e\,(U''A'_o+V''B'_o+W''C'_o)$$

wo man wieder nach 4), 13) und 14) findet:

$$UA'_o+VB'_o+WC'_o=-\frac{2v\,w\cos\alpha\,(u\cos\alpha+w\sin\alpha)}{\sqrt{1-\gamma^2}}.$$

nach 8), 13) und 14):

$$U''A'_o+V''B'_o-W''C'_o=-\frac{\sin\alpha^2\,(vv''+uu'')-\sin\alpha\cos\alpha\,(uw''+u''w)-\cos\alpha^2\,(ww''+vv'')}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

nach 5), 13) und 14):

$$U'A'_o + V'B'_o + W'C'_o = 0$$

nach 8), 13) und 14):

$$U''A'_o + V''B'_o + W''C'_o = \frac{\sin a^2\,(uu'' + vv'') + \sin a \cos a\,(uw'' + u''w) - \cos a^2\,(vv'' - ww'')}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

ach 5), 13) und 14):

$$U'A'_o + V'B'_o - W'C'_o = -\,\frac{2\,v \cos a\,[uw \cos a + (1 - w^2) \sin a]}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$

es ist daher, wenn man diese Ausdrücke substituirt, die obige Gleichung:

$$-\,\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\,2\,vw\,(w \sin a + u \cos a) + \frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,[-\sin a^2\,(uu'' + vv'') - \sin a \cos a\,(uw'' + u''w)$$

$$\text{22)}\qquad -\cos a^2\,(ww'' + vv'')] = -\,\frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\,2\,v \cos a\,[uw \cos a + (1 - w^2) \sin a] +$$

$$\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,[\sin a^2\,(uu'' + vv'') + \sin a \cos a\,(uw'' + u''w) + \cos a^2\,(uw'' - vv'')]$$

Ebenso erhält man durch die Multiplication der ersten Gleichung mit u'', der zweiten mit v'', der dritten mit $-\,w''$, und durch die Addition:

$$\mathfrak{A}\,(Uu'' + Vv'' - Ww'') + \mathfrak{A}'_o\,(U'u'' + V'v'' - W'w'') - \mathfrak{A}'_e\,(U''u'' + V''v'' + W''w'') =$$

$$\mathfrak{A}''_o\,(U'u'' + V'v'' + W'w'') + \mathfrak{A}''_e\,(U''u'' + V''v'' - W''w'')$$

substituirt man aus 4) mit Berücksichtigung von 13), so findet man:

$$Uu'' + Vv'' - Ww'' = \frac{\sin a\,[w\,(uu'' + vv'') + w''\,(1 - w^2)] + \cos a\,[u\,(vv'' - ww'') - u''\,(1 - u^2)]}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

und aus 5) und 13):

$$U'u'' + V'v'' - W'w'' = \frac{\sin a\,[w''\,(1 - w^2) - w\,(uu'' + vv'')] + \cos a\,[u\,(vv'' + ww'') - u''\,(1 - u^2)]}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$

und aus 8) und 13):

$$U''u'' + V''v'' + W''w'' = 0$$

aus 5) und 13):

$$U'u'' + V'v'' + W'w'' = -\,\frac{\sin a\,[w\,(uu'' + vv'') + w''\,(1 - w^2)] + \cos a\,[u\,(ww'' - vv'') + u''\,(1 - u^2)]}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$

aus 8) und 13):

$$U''u'' + V''v'' - W''w'' = -\,\frac{2\,v''w'' \cos a}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

wodurch obige Gleichung folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\Big(\sin a\,[w\,(uu'' + vv'') - w''\,(1 - w^2)] + \cos a\,[u\,(vv'' + ww'') - u''\,(1 - u^2)]\Big) +$$

$$\text{23)}\qquad \frac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\Big(\sin a\,[w''\,(1 - w^2) - w\,(uu'' + vv'')] + \cos a\,[u\,(vv'' + ww'') - u''\,(1 - u^2)]\Big) +$$

$$\frac{\mathfrak{A}_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\Big(\sin a\,[w\,(uu'' + vv'') + w''\,(1 - w^2)] + \cos a\,[u\,(ww'' - vv'') + u''\,(1 - u^2)]\Big) +$$

$$\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,2\,v''w'' \cos a = 0$$

Multiplicirt man dagegen die 3 Gleichungen der Reihe nach mit $\cos a$, o, $\sin a$, so erhält man:

$$\mathfrak{A}\,(U\cos a + W\sin a) + \mathfrak{A}_o'\,(U'\cos a + W'\sin a) + \mathfrak{A}_e'\,(-U''\cos a + W''\sin a) =$$
$$\mathfrak{A}''_o\,(U'\cos a - W'\sin a) + \mathfrak{A}''_e\,(U''\cos a + W''\sin a)$$

wo man wieder, durch Berücksichtigung von 4) und 13) findet:

$$U\cos a + W\sin a = -\sqrt{1-\gamma^2}$$

von 5) und 13):

$$U'\cos a + W'\sin a = -\sqrt{1-\gamma'^2}$$

von 8) und 13):

$$-U''\cos a + W''\sin a = 0$$

von 5) und 13):

$$U'\cos a - W'\sin a = \frac{(1-w^2)\sin a^2 - (1-u^2)\cos a^2}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$

von 8) und 13):

$$U''\cos a + W''\sin a = \frac{2v''\sin a\cos a}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

wodurch wir folgende Gleichung erhalten:

$$\mathfrak{A}\sqrt{1-\gamma^2} + \mathfrak{A}'_o\sqrt{1-\gamma'^2} + \frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\left[(1-w^2)\sin a^2 - (1-u^2)\cos a^2\right] +$$
$$+\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,2v''\sin a\cos a = 0. \qquad 24)$$

Auf dieselbe Weise finden wir ferner durch Multiplication der Gleichungen 18) mit $+u''$, $+v''$, $+w''$ und Addition derselben:

$$\mathfrak{A}\,(Uu'' + Vv'' + Ww'') + \mathfrak{A}_o'\,(U'u'' + V'v'' + W'w'') - \mathfrak{A}_e'\,(U''u'' + V''v'' - W''w'') =$$
$$\mathfrak{A}_o''\,(U'u'' + V'v'' - W'w'') + \mathfrak{A}_e''\,(U''u'' + V''v'' + W''w'')$$

d. i. wenn man 4) und 13) berücksichtigt:

$$Uu'' + Vv'' + Ww'' = \frac{\sin a\,[w\,(uu'' + vv'') - w''\,(1-w^2)] + \cos a\,[u\,(vv'' + ww'') - u''\,(1-u^2)]}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

und wenn 5) und 13):

$$U'u'' + V'v'' + W'w'' = -\frac{\sin a\,[w\,(uu'' + vv'') + w''\,(1-w^2)] + \cos a\,[u\,(ww'' - vv'') + u''\,(1-u^2)]}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$

und wenn 8) und 13):

$$U''u'' + V''v'' - W''w'' = -\frac{2\,v''\,w''\cos a}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

und wenn 5) und 13):

$$U'u'' + V'v'' - W'w'' = \frac{\sin a\,[w''\,(1-w^2) - w\,(uu'' + vv'')] + \cos a\,[u\,(vv'' + ww'') - u''\,(1-u^2)]}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$

und wenn 8) und 13):

$$U''u'' + V''v'' + W''w'' = 0$$

folglich wird unsere Gleichung:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\Big(\sin\alpha\left[w\,(uu''+vv'')-w''\,(1-w^2)\right]+\cos\alpha\left[u\,(vv''+ww'')-u''\,(1-u^2)\right]\Big)- \\ 25)\quad &-\frac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\Big(\sin\alpha\left[w\,(uu''+vv'')+w''\,(1-w^2)\right]+\cos\alpha\left[u\,(ww''-vv'')+u''(1-u^2)\right]\Big)+ \\ &+\frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\Big(\sin\alpha\left[w\,(uu''+vv'')-w''\,(1-w^2)\right]+\cos\alpha\left[u''(1-u^2)-u\,(vv''+ww'')\right]\Big)+ \\ &+\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,2\,v''\,w''\cos\alpha=0 \end{aligned}$$

Und ebenso, wenn man die erste Gleichung mit $\cos\alpha$, die zweite mit o, die dritte mit $-\sin\alpha$ multiplicirt und addirt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}\,(U\cos\alpha - W\sin\alpha) + \mathfrak{A}'_o\,(U'\cos\alpha - W'\sin\alpha) - \mathfrak{A}'_e\,(U''\cos\alpha + W''\sin\alpha) = \\ = \mathfrak{A}''_o\,(U'\cos\alpha + W'\sin\alpha) + \mathfrak{A}''_e\,(U''\cos\alpha - W''\sin\alpha) \end{aligned}$$

wo, mit Rücksichtnahme auf 4) und 13,

$$U\cos\alpha - W\sin\alpha = -(1-u^2)\cos\alpha^2 + (1-w^2)\sin\alpha^2$$

ist, wodurch diese Gleichung sich in folgende verwandelt:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left[(1-w^2)\sin\alpha^2-(1-u^2)\cos\alpha^2\right]+\frac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\left[(1-w^2)\sin\alpha^2-(1-u^2)\cos\alpha^2\right]- \\ 26)\quad &-\frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,2\,v''\sin\alpha\cos\alpha+\mathfrak{A}''_o\sqrt{1-\gamma'^2}=0 \end{aligned}$$

Die Gleichungen 19) bis 26) können nur zur Elimination dreier Unbekannten dienen; doch lassen sie sich viel einfacher darstellen, wenn man statt der Cosinusse $u\ldots$, $u'\ldots$ die Einfalls- und Brechungswinkel und das Azimuth der Einfallsebene in dieselben einführt. Aus 12) sieht man nämlich, dass

$$2\,w\,(\sin\alpha\,(1-w^2)+uw\cos\alpha) = +\sin 2\,\varphi\,(\sin\alpha\sin\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\omega)$$

$$\sin\alpha\,(uv''-u''v)-\cos\alpha\,(vw''+v''w) = \cos\alpha\sin\omega\sin(\varphi+\varphi'')$$

$$\sin\alpha\,(uv''-u''v)+\cos\alpha\,(v''w-vw'') = \cos\alpha\sin\omega\sin(\varphi-\varphi'')$$

was mit Berücksichtigung von 15) die Gleichung 19) in die folgende verwandelt:

$$27)\qquad -\mathfrak{A}'_o\sin 2\,\varphi\cos\theta' + \frac{\sin w\cos\alpha}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\left(\mathfrak{A}'_e\sin(\varphi+\varphi'')-\mathfrak{A}''_e\sin(\varphi-\varphi'')\right)=0$$

ferner wenn wir

$$28)\qquad \sin\omega\cos\alpha = \sin\delta$$

setzen.

$$2\,vw\,(u\cos\alpha + w\sin\alpha) = \sin 2\varphi \sin\delta\,(\sin\varphi\cos\omega\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha)$$

$$\sin\alpha^2\,(uu'' + vv'') - \sin\alpha\cos\alpha\,(u''w - uw'') + \cos\alpha^2\,(vv'' - ww'') =$$

$$\cos\alpha^2\cos(\varphi + \varphi'') - \sin\alpha\cos\alpha\cos\omega\sin(\varphi - \varphi'') - \sin\varphi\sin\varphi''\,(\sin\alpha^2 - \cos\alpha^2\cos\omega^2)$$

$$2\,v\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\varphi\sin\alpha\sin\delta$$

$$-\sin\alpha^2\,(uu'' + vv'') + \sin\alpha\cos\alpha\,(u''w - uw'') + \cos\alpha\,(vv'' + ww'') =$$

$$-\cos\alpha^2\cos(\varphi - \varphi'') + \sin\alpha\cos\alpha\cos w\sin(\varphi - \varphi'') + \sin\varphi\sin\varphi''\cos\delta^2$$

was in die Gleichung 20) zu substituiren ist:

$$-\frac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin 2\varphi\sin\delta\,(\sin\varphi\cos\omega\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha) + \frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,[\cos\alpha^2\cos(\varphi - \varphi'') -$$
$$-\sin\alpha\cos\alpha\cos\omega\sin(\varphi - \varphi'') - \sin\varphi\sin\varphi''\,(\sin\alpha^2 - \cos\alpha^2\cos\omega^2)] = \frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,2\sin\varphi\sin\alpha\sin\delta + \quad 29)$$
$$+\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}[-\cos\alpha^2\cos(\varphi - \varphi'') + \sin\alpha\cos\alpha\cos\omega\sin(\varphi - \varphi'') + \sin\varphi\sin\varphi''\cos\delta^2]$$

Es ist ferner:

$$\sin\alpha\,[w\,(uu'' + vv'') + w''\,(1 - w^2)\,] + \cos\alpha\,[u\,(vv'' - ww'') - u''\,(1 - u^2)]$$
$$= -\sin(\varphi + \varphi'')\,(\sin\varphi\sin\alpha - \cos\varphi\cos\alpha\cos\omega)$$

$$\sin\alpha\,[w''\,(1 - w^2) - w\,(uu'' + vv'')] + \cos\alpha\,[u\,(vv'' + ww'') - u''\,(1 - u^2)]$$
$$= -\sin(\varphi - \varphi'')\,(\sin\varphi\sin\alpha + \cos\varphi\cos\alpha\cos\omega)$$

$$\sin\alpha\,[w\,(uu'' + vv'') + w''\,(1 - w^2)\,] - \cos\alpha\,[u\,(vv'' - ww'') - u''\,(1 - u^2)]$$
$$= -\sin(\varphi + \varphi'')\,(\sin\varphi\sin\alpha + \cos\varphi\cos\alpha\cos\omega)$$

$$2\,v''\,w''\cos\alpha = \sin 2\varphi''\sin\omega\cos\alpha$$

was mit Berücksichtigung von 15) und 28) die Gleichung 23) in folgende einfachere verwandelt:

$$-\mathfrak{A}\sin(\varphi + \varphi'')\cos\theta + \mathfrak{A}'_o\sin(\varphi - \varphi'')\cos\theta' + \mathfrak{A}''_o\sin(\varphi + \varphi'')\cos\theta' + \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin 2\varphi''\sin\delta = 0 \quad 30)$$

d. i.

$$-\mathfrak{A}\sin(\varphi + \varphi'')\cos\theta + \cos\theta'\,[\sin\varphi\cos\varphi''\,(\mathfrak{A}'_o + \mathfrak{A}''_o) - \cos\varphi\sin\varphi''\,(\mathfrak{A}'_o - \mathfrak{A}''_o)] +$$
$$+\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin 2\varphi''\sin\delta = 0 \quad 31)$$

ferner

$$\sin\alpha^2\,(1 - w^2) - \cos\alpha^2\,(1 - u^2) = \sin\varphi^2\,(\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2\cos\omega^2) - \cos\alpha^2$$
$$2\,v''\sin\alpha\cos\alpha = -2\sin\varphi''\sin\delta\sin\alpha$$

was mit Berücksichtigung von 28) die Gleichung 24) in folgende verwandelt:

$$\mathfrak{A}\sqrt{1-\gamma^2} + \mathfrak{A}'_o\sqrt{1-\gamma'^2} + \frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,(\sin\varphi^2\cos\delta^2 - \cos\alpha^2) - \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,2\sin\varphi''\sin\delta\sin\alpha = 0 \quad 32)$$

Ebenso findet man

$$\sin\alpha\,[w\,(uu''+vv'')-w''\,(1-w^2)]+\cos\alpha\,[u\,(vv''+ww'')-u''\,(1-u^2)]=$$
$$=\sin(\varphi-\varphi'')\,(\sin\alpha\sin\varphi-\cos\alpha\cos\varphi\cos\omega)$$

$$-\sin\alpha\,[w\,(uu''+vv'')+w''\,(1-w^2)]+\cos\alpha\,[u\,(vv''-ww'')-u''\,(1-u^2)]=$$
$$=\sin(\varphi+\varphi'')\,(\sin\alpha\sin\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\omega)$$

$$\sin\alpha\,[w\,(uu''+vv'')-w''\,(1-w^2)]-\cos\alpha\,[u\,(vv''+ww'')-u''\,(1-u^2)]=$$
$$=\sin(\varphi-\varphi'')\,(\sin\alpha\sin\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\omega)$$
$$2\,w''\,v''\cos\alpha=\sin 2\varphi''\sin\omega\cos\alpha$$

was mit Berücksichtigung von 15) und 28) die Gleichung 25) in folgende verwandelt:

33) $\mathfrak{A}\sin(\varphi-\varphi'')\cos\theta-\mathfrak{A}'_o\sin(\varphi+\varphi'')\cos\theta'-\mathfrak{A}''_o\sin(\varphi-\varphi'')\cos\theta'+\dfrac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin 2\varphi''\sin\delta=0$

d. i.

34) $$\mathfrak{A}\sin(\varphi-\varphi'')\cos\theta-\cos\theta'\,[\sin\varphi\cos\varphi''\,(\mathfrak{A}'_o+\mathfrak{A}''_o)+\cos\varphi\sin\varphi''\,(\mathfrak{A}'_o-\mathfrak{A}''_o)]+$$
$$+\frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin 2\varphi''\sin\delta=0$$

ferner

$$\sin\alpha^2\,(1-w^2)-\cos\alpha^2\,(1-u^2)=\sin\varphi^2\cos\delta^2-\cos\alpha^2$$

was die Gleichung 26) in die folgende verwandelt:

35) $\left(\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}+\dfrac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\right)(\sin\varphi^2\cos\delta^2-\cos\alpha^2)+\dfrac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,2\sin\varphi''\sin\delta\sin\alpha+\mathfrak{A}''_o\sqrt{1-\gamma'^2}=0.$

Der Gleichungen 30), 32), 33) und 35) können wir uns nun bedienen um 3 der Unbekannten als Functionen einer Unbekannten und der bekannten Grösse $\mathfrak{A}$ auszudrücken.

Eliminirt man nämlich $\mathfrak{A}''_o$ aus 30), und 32), so erhält man:

36) $$\mathfrak{A}''_e=\frac{a''_e\,\mathfrak{A}+b''_e\,\mathfrak{A}'_o}{c''_e}$$

wo $a''_e=\sin(\varphi+\varphi'')\sqrt{1-\gamma''^2}\,[\cos\theta\,(\sin\varphi^2\cos\delta^2-\cos\alpha^2)+\cos\theta'\sqrt{(1-\gamma^2)}\,(1-\gamma'^2)]$

37) $b''_e=\cos\theta'\sqrt{1-\gamma''^2}\,[(1-\gamma'^2)\sin(\varphi+\varphi'')-(\sin\varphi^2\cos\delta^2-\cos\alpha^2)\sin(\varphi-\varphi'')]$

$c''_e=2\sin\varphi''\sin\delta\,[\cos\varphi''\,(\sin\varphi^2\cos\delta^2-\cos\alpha^2)+\sin\alpha\cos\theta'\sqrt{1-\gamma'^2}\sin(\varphi+\varphi'')]$

Eliminirt man ferner $\mathfrak{A}''_o$ aus 33) und 25), so erhält man:

38) $$\mathfrak{A}'_e=\frac{a'_e\,\mathfrak{A}+b'_e\,\mathfrak{A}'_o}{c'_e}$$

wo $a'_e=-\sin(\varphi-\varphi'')\sqrt{(1-\gamma'^2)(1-\gamma''^2)}\,[\cos\theta\sqrt{(1-\gamma'^2)(1-\gamma^2)}+\cos\theta'(\sin\varphi^2\cos\delta^2-\cos\alpha^2)]$

39) $b'_e=\cos\theta'\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\gamma''^2)}\,[(1-\gamma'^2)\sin(\varphi+\varphi'')-\sin(\varphi-\varphi'')\,(\sin\varphi^2\cos\delta^2-\cos\alpha^2)]$

$c'_e=2\sin\varphi''\sin\delta\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\gamma'^2)}\,[\cos\varphi''\sqrt{1-\gamma'^2}+\sin\alpha\cos\theta\sin(\varphi-\varphi'')]$

Eliminirt man endlich $\mathfrak{A}''_e$ aus 30) und 32), so erhält man:

40) $$\mathfrak{A}''_o=\frac{a''_o\,\mathfrak{A}+b''_o\,\mathfrak{A}'_o}{c''_o}$$

wo
$$a''_o = \sqrt{1-\gamma'^2}\,[\sin(\varphi+\varphi'')\cos\theta\sin\alpha - \cos\varphi''\sqrt{1-\gamma^2}]$$
$$b''_o = -\sqrt{1-\gamma'^2}\,[\sin(\varphi-\varphi'')\cos\theta'\sin\alpha + \cos\varphi''\sqrt{1-\gamma'^2})] \qquad 41)$$
$$c''_o = \sin(\varphi+\varphi'')\cos\theta'\sqrt{1-\gamma'^2}\sin\alpha + \cos\varphi''\,(\sin\varphi^2\cos\delta^2 - \cos\alpha^2).$$

§. 3.

Zu diesen 3 Gleichungen 36), 38), 40) tritt nun noch die vierte, welche die Bedingung der Erhaltung der lebendigen Kräfte in sich enthält. Nehmen wir, getreu der Hypothese Neumann's, an, die Dichte in den verschieden brechenden Mitteln sei gleich, so können wir die Massen proportional setzen den Voluminibus, welche von der Bewegung diesseits und jenseits der Zwillingsfläche in gleichen Zeiten durchschritten werden. Diese Volumina werden wir zunächst bestimmen. Nennen wir

R den Raum, der sämmtliche Bewegungszustände der einfallenden Welle innerhalb einer gewissen Zeiteinheit in sich enthält;

R'_o dasselbe für die reflectirte ordentliche Welle;

R'_e dasselbe für die reflectirte ausserordentliche Welle;

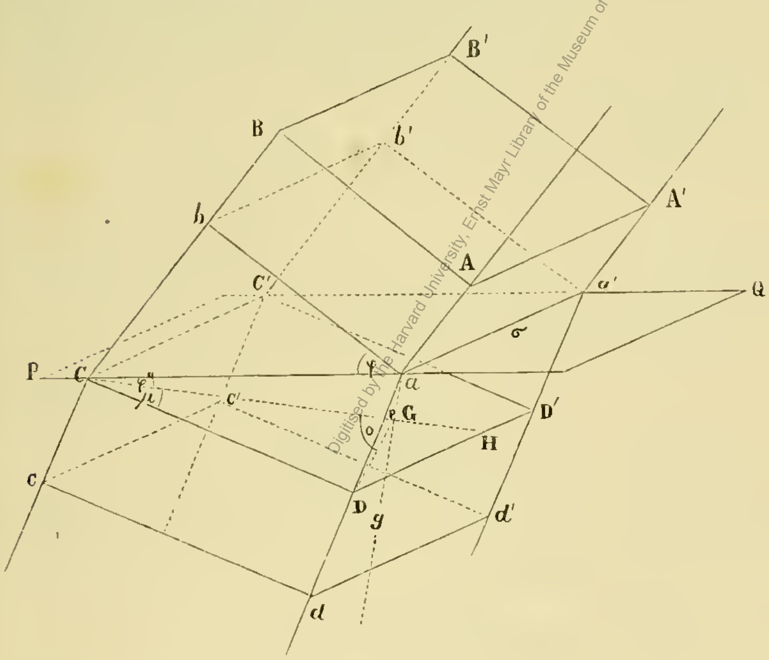
R''_o dasselbe für die gebrochene ordentliche Welle;

R''_e dasselbe für die gebrochene ausserordentliche Welle;

so ersehen wir wieder schon im vorhinein, dass gemäss der Gesetze der Gleichheit der Reflexions- und Brechungswinkel, bei der Symmetrie der Zwillingscombination

$$R = R'_o = R''_o$$
$$R'_e = R''_e$$

sein müsse, wesshalb wir nur die Volumina R und R''_e aufzusuchen haben.



Es stelle PQ die Zwillingsebene dar; Aa sei ein einfallender ordinärer, ad der zugehörige ausserordentlich gebrochene Stral. Die Lineareinheit sei Ca, $aa' = \sigma$ ein begrenztes Stück der einfallenden Welle; wir nehmen an, dass in dem Augenblicke, wo eine einfallende Welle durch die Ebene $AA'\,BB'$ schreitet, eine gebrochene sich in der Lage $CC'\,DD'$ befindet und dass in der Zeit, innerhalb welcher die ordinäre einfallende Welle bis $bb'\,aa'$ gelangt, die extraordinäre gebrochene die Lage $cc'\,dd'$ erreicht. Es ist dann $AA'\,BB'\,aa'\,bb' = R$

$CC'\,DD'\,cc'\,dd' = R''$

a) Das Volum R ist, da der Stral mit der Wellennormale in der einfallenden Welle zusammenfällt, gleich dem Producte aus der Basis $aa'\,bb'$ in die Höhe aA, d. i.

$$R = ab\,.\,\sigma\,.\,Aa.$$

Nun ist ab offenbar $= \cos\varphi$, und $Aa =$ der Geschwindigkeit der einfallenden Welle, diese aber ist diesseits und jenseits der Zwillingsebene, proportional dem Sinus des Winkels, den die Welle mit dieser Ebene einschliesst, hier also proportional $\sin\varphi$: folglich wenn wir in vorhinein schon den gemeinschaftlichen Factor weglassen

42) $$R = \sigma.\,\sin\varphi\,\cos\varphi.$$

b) Das Volum R'' ist, da der Stral in der extraordinären Welle nicht mit der Normale coincidirt, gleich dem Producte aus der Basis $CC'\,DD'$ in die durch die Normale ag gemessene Höhe Gg; d. i.

$$R'' = CC'\,DD'.\,Gg$$

$CC'\,DD'$ ist ein Parallelogramm; legt man durch Ca eine auf diesem Parallelogramm senkrecht stehende Ebene, so schneidet diese in CH, und nehmen wir den Winkel dieser Trace mit der schiefen Seite $cD = \mu$, so finden wir

43) $$CC'\,DD' = CC'\,.\,CD\cos\mu = \sigma\,.\,CD\cos\mu.$$

Es ist aber

$$CD\cos\mu = CG + GH = CG - GD\cos\theta;$$

denn es ist Cag die Brechungsebene der Wellennormalen, Dag der Hauptschnitt der gebrochenen Welle. Die Ebene, welche die Normale und den Stral enthält, muss auch die optische Axe in sich fassen; denn jede Berührungsebene an ein Rotationsellipsoid steht senkrecht auf der Ebene, die sich durch den Berührungspunkt und die Pole (Stral und Axe) legen lässt, es muss daher letztere Ebene die Wellennormale in sich enthalten. Die Winkel dieser beiden Ebenen aber haben wir θ'' genannt (s. 15). Nennen wir ferner p den Winkel zwischen Normale und Stral, so haben wir (s. Sitzungsber. 1853, Seite 830):

$$\xi'' = \frac{[1 + (q-1)\cos a^2]\,u'' - (q-1)\sin a\cos a\,.\,w''}{\sqrt{1 + \gamma''^2 (q^2-1)}}$$

$$\eta'' = \frac{v''}{\sqrt{1 + \gamma''^2 (q^2-1)}}$$

$$\zeta'' = \frac{[1 + (q-1)\sin a^2]\,w'' - (q-1)\sin a\cos a\,.\,u''}{\sqrt{1 + \gamma''^2 (q^2-1)}}$$

wo $q = \frac{o^2}{e^2}$: folglich

44) $$\cos p = u''\,\xi'' + v''\,\eta'' + w''\,\zeta'' = \frac{e^2 + (o^2 - e^2)\,\gamma''^2}{\sqrt{e^4 + (o^4 - e^4)\,\gamma''^2}}$$

Nun ist

$$GC = \cos\varphi''$$

$$GD = aG\,.\,tg p = \sin\varphi''\,tg p$$

folglich

$$CD\cos\mu = \cos\varphi'' - \sin\varphi''\,tg\,p\,\cos\theta''$$

d. i. wenn wir aus 44) und 15) substituiren

$$CD\ \cos\mu = \cos\varphi'' - \sin\varphi'' . \frac{(e^2-o^2)\gamma''\sqrt{1-\gamma''^2}}{e^2-(e^2-o^2)\gamma''^2} . \frac{\sin\varphi''\sin\alpha + \cos\varphi''\cos\alpha\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}} .$$

Es ist aber

$$\sin\varphi''(\sin\varphi''\sin\alpha + \cos\varphi''\cos\alpha\cos\omega) = \sin\alpha - \gamma''\cos\varphi''$$

folglich endlich

$$CD\ \cos\mu = \cos\varphi'' - \frac{(e^2-o^2)\gamma''(\sin\alpha-\gamma''\cos\varphi'')}{e^2-(e^2-o^2)\gamma''^2} = \cos\varphi''\left[1 - \frac{(e^2-o^2)\gamma''\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi''}-\gamma''\right)}{e^2-(e^2-o^2)\gamma''^2}\right]$$

was in 43) substituirt werden kann. Man erhält

$$CC'\ DD' = \sigma\cos\varphi''\left[1 - \frac{(e^2-o^2)\gamma''\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi''}-\gamma''\right)}{e^2-(e^2-o^2)\gamma''^2}\right]$$

und da die Höhe Gg wieder proportional dem $\sin\varphi''$ ist, so erhalten wir

$$R'' = \sigma\cos\varphi''\sin\varphi''\left[1 - \frac{(e^2-o^2)\gamma''\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi''}-\gamma''\right)}{e^2-(e^2-o^2)\gamma''^2}\right] \qquad 45)$$

folglich die Gleichung

$$R(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{A}_o'^2 - \mathfrak{A}_o''^2) = R''(\mathfrak{A}_e'^2 + \mathfrak{A}_e''^2)$$

welche die Erhaltung der lebendigen Kräfte ausspricht, durch Substitution von R und R'' aus 42) und 45)

$$(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{A}_o'^2 - \mathfrak{A}_o''^2)\sin\varphi\cos\varphi = (\mathfrak{A}_e'^2 + \mathfrak{A}_e''^2)\sin\varphi''\cos\varphi''\left[1 + \frac{(o^2-e^2)\gamma''\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi''}-\gamma''\right)}{e^2+(o^2-e^2)\gamma''^2}\right] \qquad 46)$$

Untersuchen wir nun ob diese quadratische Gleichung sich durch die im vorigen Paragraphe abgeleiteten Relationen in Factoren zerlegen lässt.

Addiren wir 30) und 33), so erhalten wir

$$\mathfrak{A}\cos\theta[\sin(\varphi-\varphi'') - \sin(\varphi+\varphi'')] + \mathfrak{A}'_o\cos\theta'[\sin(\varphi-\varphi'') - \sin(\varphi+\varphi'')] +$$
$$\mathfrak{A}''_o\cos\theta'[\sin(\varphi+\varphi'') - \sin(\varphi-\varphi'')] + (\mathfrak{A}''_e + \mathfrak{A}'_e)\frac{\sin 2\varphi''\sin\delta}{\sqrt{1-\gamma''^2}} = 0$$

Subtrahiren wir dagegen:

$$-\mathfrak{A}\cos\theta[\sin(\varphi-\varphi'') + \sin(\varphi+\varphi'')] + \mathfrak{A}'_o\cos\theta'[\sin(\varphi-\varphi'') + \sin(\varphi+\varphi'')] +$$
$$\mathfrak{A}''_o\cos\theta'[\sin(\varphi+\varphi'') + \sin(\varphi-\varphi'')] + (\mathfrak{A}''_e - \mathfrak{A}'_e)\frac{\sin 2\varphi''\sin\delta}{\sqrt{1-\gamma''^2}} = 0$$

Nun ist

$$\sin(\varphi-\varphi'') - \sin(\varphi+\varphi'') = -2\sin\varphi''\cos\varphi$$
$$\sin(\varphi+\varphi'') + \sin(\varphi-\varphi'') = 2\sin\varphi\cos\varphi''$$

wodurch die beiden Gleichungen folgende Gestalt erhalten

$$\cos\varphi[\mathfrak{A}\cos\theta + (\mathfrak{A}'_o - \mathfrak{A}''_o)\cos\theta'] = (\mathfrak{A}''_e + \mathfrak{A}'_e)\cos\varphi''\frac{\sin\delta}{(1-\gamma''^2)} \qquad 47)$$

$$\sin\varphi[\mathfrak{A}\cos\theta - (\mathfrak{A}'_o + \mathfrak{A}''_o)\cos\theta'] = (\mathfrak{A}''_e - \mathfrak{A}'_e)\sin\varphi''\frac{\sin\delta}{1-\gamma''^2} \qquad 48)$$

Multiplieiren wir 47) mit 48). so wird das Product

$$[(\mathfrak{A}\cos\theta - \mathfrak{A}''_o \cos\theta')^2 - \mathfrak{A}'^2_o \cos\theta'^2] \cos\varphi \sin\varphi = (\mathfrak{A}''^2_e - \mathfrak{A}'^2_e)\frac{\sin\varphi''\cos\varphi''}{1-\gamma''^2}\sin\delta^2 \tag{49}$$

Addiren wir hiezu die Gleichung 46), in der wir der Kürze halber

$$\frac{(o^2-e^2)\gamma''\left(\frac{\sin a}{\cos\varphi''}-\gamma''\right)}{e^2+(o^2-e^2)\gamma''^2} = k \tag{50}$$

setzen, so finden wir

$$\begin{aligned}\Big\{\mathfrak{A}^2\left[\frac{\cos\theta^2(1-\gamma''^2)}{\sin\delta^2}+\frac{1}{1+k}\right] - \mathfrak{A}'^2_o\left[\frac{\cos\theta'^2(1-\gamma''^2)}{\sin\delta^2}+\frac{1}{1+k}\right] + \mathfrak{A}''^2_o\left[\frac{\cos\theta'^2(1-\gamma''^2)}{\sin\delta^2}+\frac{1}{1+k}\right] \\ - 2\,\mathfrak{A}\mathfrak{A}''_o\frac{\cos\theta\cos\theta'(1-\gamma''^2)}{\sin\delta^2}\Big\}\cos\varphi\sin\varphi = 2\,\mathfrak{A}''^2_e\cos\varphi''\sin\varphi''.\end{aligned} \tag{51}$$

Vergleichen wir hiemit die Gleichung 32) und dividiren wir die entsprechenden Coëfficienten, so haben wir

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{\mathfrak{A}''^2_e}{1-\gamma''^2}\cdot\sin\delta^2\sin\varphi''\cos\varphi''}{\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin\delta\sin\varphi''\sin a} = \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin\delta\frac{\cos\varphi''}{\sin a} = \mathfrak{A}''_e\,\mathfrak{a}''_e \\
&\frac{\mathfrak{A}^2\left(\cos\theta^2+\frac{\sin\delta^2}{(1+k)(1-\gamma''^2)}\right)}{\mathfrak{A}\sqrt{1-\gamma^2}} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left(\frac{\sin\delta^2+(1+k)(1-\gamma''^2)\cos\theta^2}{(1+k)(1-\gamma''^2)}\right) = \mathfrak{A}\,\mathfrak{a} \\
&\frac{-\mathfrak{A}'^2_o\left(\cos\theta'^2+\frac{\sin\delta^2}{(1+k)(1-\gamma''^2)}\right)}{\mathfrak{A}'_o\sqrt{1-\gamma'^2}} = -\frac{\mathfrak{A}'}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\left(\frac{\sin\delta^2+(1+k)(1-\gamma''^2)\cos\theta'^2}{(1+k)(1-\gamma''^2)}\right) = -\mathfrak{A}'_o\,\mathfrak{a}'_o \\
&\frac{\mathfrak{A}''^2_o\left(\cos\theta'^2-\frac{\sin\delta^2}{(1+k)(1-\gamma''^2)}\right)}{\frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}(\sin\varphi^2\cos\delta^2-\cos a^2)} = \mathfrak{A}''_o\sqrt{1-\gamma'^2}\left(\frac{\cos\theta'^2(1+k)(1-\gamma''^2)-\sin\delta^2}{(1+k)(1-\gamma''^2)(\sin\varphi^2\cos\delta^2-\cos a^2)}\right) = \mathfrak{A}''_o\,\mathfrak{a}''_o.
\end{aligned} \tag{52}$$

Wenn wir nun 32) in folgender Gestalt schreiben

$$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{A}'_o\alpha'_o + \mathfrak{A}''_o\alpha''_o = \mathfrak{A}''_e\alpha''_e$$

und diese Gleichung mit einer ähnlichen, von der Gestalt

$$\cos\varphi\sin\varphi\,(\mathfrak{A}\,\mathfrak{a} - \mathfrak{A}'_o\mathfrak{a}'_o + \mathfrak{A}''_o\mathfrak{a}''_o) = \mathfrak{A}''_e\mathfrak{a}''_e \tag{53}$$

(wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'_o$, $\mathfrak{a}''_o$, $\mathfrak{a}''_e$ die aus 52) ersichtlichen Werthe repräsentiren), multiplieiren, so erhalten wir das Product

$$\begin{aligned}\cos\varphi\sin\varphi\,\Big\{\mathfrak{A}^2\alpha\,\mathfrak{a} - \mathfrak{A}'^2_o\alpha'_o\mathfrak{a}'_o + \mathfrak{A}''_o\alpha''_o\mathfrak{a}''_o + \mathfrak{A}\left[\mathfrak{A}'_o(\alpha'_o\mathfrak{a} - \alpha\,\mathfrak{a}'_o) + \mathfrak{A}''_o(\alpha\,\mathfrak{a}''_o + \alpha''_o\mathfrak{a})\right] \\ + \mathfrak{A}'_o\mathfrak{A}''_o(\alpha'_o\mathfrak{a}''_o - \alpha''_o\mathfrak{a}'_o)\Big\} = \mathfrak{A}''^2_e\alpha''_e\mathfrak{a}''_e\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
\alpha\,\mathfrak{a} &= \cos\theta'^2 + \frac{\sin\delta^2}{(1-\gamma''^2)(1+k)} \\
\alpha'_o\,\mathfrak{a}'_o &= \cos\theta'^2 + \frac{\sin\delta^2}{(1-\gamma''^2)(1+k)} \\
\alpha''_o\mathfrak{a}''_o &= \cos\theta'^2 - \frac{\sin\delta^2}{(1-\gamma''^2)(1+k)} \\
\alpha''_e\mathfrak{a}''_e &= 2\cos\varphi''\sin\varphi''\,\frac{\sin\delta^2}{1-\gamma''^2}
\end{aligned}$$

ist, und es muss, damit 53) ein Factor von 51) sei

$$\begin{aligned} \alpha'_o \mathfrak{a} - \alpha \mathfrak{a}'_o &= 0 \\ \alpha \, \mathfrak{a}''_o + \alpha''_o \mathfrak{a} &= -2 \cos\theta \cos\theta' \\ \alpha'_o \mathfrak{a}''_o - \alpha''_o \mathfrak{a}'_o &= 0 \end{aligned}$$

sein. Dies soll zunächst untersucht werden. Es ist

$$\alpha'_o \mathfrak{a} = \sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma^2}} \cdot \frac{\sin\delta^2 + (1+k)(1-\gamma''^2)\cos\theta^2}{(1+k)(1-\gamma''^2)}$$

$$\alpha \mathfrak{a}'_o = \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{1-\gamma'^2}} \cdot \frac{\sin\delta^2 + (1+k)(1-\gamma''^2)\cos\theta'^2}{(1+k)(1-\gamma''^2)}.$$

Setzen wir die beiden Ausdrücke einander gleich und sondern wir die Glieder mit dem Factor $(1+k)$ aus, so erhalten wir

$$(1+k)(1-\gamma''^2)\left[\cos\theta^2(1-\gamma'^2) - \cos\theta'^2(1-\gamma^2)\right] = \sin\delta^2(\gamma'^2-\gamma^2). \qquad 54)$$

Ebenso ist

$$\alpha'_o \mathfrak{a}''_o = (1-\gamma'^2)\frac{\cos\theta'^2(1+k)(1-\gamma''^2) - \sin\delta^2}{(1+k)(1-\gamma''^2)(\sin\varphi^2\cos\delta^2 - \cos\alpha^2)}$$

$$\alpha''_o \mathfrak{a}'_o = \frac{\sin\varphi^2\cos\delta^2 - \cos\alpha^2}{1-\gamma'^2} \cdot \frac{\sin\delta^2 + (1+k)(1-\gamma''^2)\cos\theta'^2}{(1+k)(1-\gamma''^2)}.$$

Setzen wir die beiden Ausdrücke einander gleich und sondern wir die Glieder mit dem Factor $(1+k)$ aus, so erhalten wir

$$\begin{gathered}(1+k)(1-\gamma''^2)\cos\theta'^2\left[(1-\gamma'^2)^2 - (\sin\varphi^2\cos\delta^2-\cos\alpha^2)^2\right] = \\ \sin\delta^2\left[(\sin\varphi^2\cos\delta^2-\cos\alpha^2)^2 + (1-\gamma'^2)^2\right].\end{gathered} \qquad 55)$$

Dividiren wir 54) durch 55) und multipliciren hierauf beiderseits mit den Nennern, so fällt $(1+k)(1-\gamma''^2)$ heraus und wir erhalten die Gleichung

$$\begin{gathered}\left[\cos\theta^2(1-\gamma'^2) - \cos\theta'^2(1-\gamma^2)\right]\left[(\sin\varphi^2\cos\delta^2-\cos\alpha^2)^2 + (1-\gamma'^2)^2\right] = \\ (\gamma'^2-\gamma^2)\left[(1-\gamma'^2)^2 - (\sin\varphi^2\cos\delta^2-\cos\alpha^2)^2\right]\cos\theta'^2.\end{gathered}$$

Wenn wir nun in diese Gleichung die entsprechenden Werthe substituiren und die Rechnung ausführen, deren Detail wir jedoch ihres negativen Resultates so wie ihrer grossen Ausdehnung wegen nicht mittheilen, so finden wir dass sich dieselbe auf Null nicht reducirt, dass folglich 46) nicht den Factor 32) in sich enthält und dass wir uns allgemein mit der Auflösung der quadratischen Gleichung befassen müssen, wodurch eine Zweideutigkeit in die Ausdrücke der Amplituden der gebrochenen und reflectirten Wellen kommt, die eigentlich in der Natur der Aufgabe, in der Begrenzung innerhalb welcher wir sie auffassen, nicht enthalten ist. Über die Wahl der Zeichen wurde daher nach speciellen Fällen entschieden, welche aber erst im folgenden Abschnitte mitgetheilt werden können. Aus 36), 38), 40) und 46) erhalten wir

$$\mathfrak{A}'_o = \mathfrak{A}\,\frac{p'_o - c''_o\, c'_e\, c''_e \sqrt{q'_o}}{s'_o} \qquad 56)$$

wo

$$p'_o = -n\, a''_o\, b''_o\, c'^2_e\, c''^2_e - n''\, c''^2_o\, (a'_e\, b'_e\, c''^2_e + a''_e\, b''_e\, c'^2_e)$$

$$q'_o = c'^2_e\, c''^2_e\, n^2\, (c''^2_o + b''^2_o - a''^2_o) + n n'' \left[c''^2_o \left(c'^2_e\, (b''^2_e - a''^2_e) + c''^2_e\, (b'^2_e - a'^2_e)\right) - c''^2_e (a''_o\, b'_e - a'_e\, a''_o)^2 - c'^2_e (b''_o\, b''_e - a''_e\, b''_o)^2\right] - n''^2\, c''^2_o\, (a''_e\, b'_e - a'_e\, b''_e)^2$$

$$s'_o = n\, c'^2_e\, c''^2_e\, (c''^2_o + b''^2_o) + c''^2_o\, n''\, (b'^2_e\, c''^2_e + b''^2_e\, c'^2_e)$$

ferner

57) $$\mathfrak{A}'_e = \mathfrak{A}\, \frac{p'_e + c''_o\, b'_e\, c''_e\, \sqrt{q'_e}}{s'_e}$$

wo

$$p'_e = c'_e \left(c''^2_e\, n \left[a'_e\, (b''^2_o + c''^2_o) - a''_o\, b'_e\, b''_o\right] + b''_e\, c''^2_o\, n''\, (a'_e\, b''_e - a''_e\, b'_e)\right)$$

$$q'_e = q'_o$$

$$s'_e = s'_o$$

ferner

58) $$\mathfrak{A}''_o = \mathfrak{A}\, \frac{p''_o - b''_o\, c'_e\, c''_e\, \sqrt{q''_o}}{s''_o}$$

wo

$$p''_o = a''_o\, c'^2_e\, c''^2_e\, c''_o\, n + c''_o\, n'' \left[b'_e\, c''^2_e\, (a''_o\, b'_e - a'_e\, b''_o) + b''_e\, c'^2_e\, (a''_o\, b''_e - a''_e\, b''_o)\right]$$

$$q''_o = q'_o$$

$$s''_o = s'_o$$

endlich

59) $$\mathfrak{A}''_e = \mathfrak{A}\, \frac{p''_e + c''_o\, c'_e\, b''_e\, \sqrt{q''_e}}{s''_e}$$

wo

$$p''_e = c''_e \left[c'^2_e\, n \left(a''_e\, (c''^2_o + b''^2_o) - a''_o\, b''_e\, b''_o\right) + c''^2_o\, b'_e\, n''\, (a''_e\, b'_e - a'_e\, b''_e)\right]$$

$$q''_e = q'_o$$

$$s''_e = s'_o$$

Ehe wir zur Discussion dieser Gleichungen übergehen, wollen wir die analogen Grössen für die einfallende ausserordentliche Welle aufsuchen.

AUSSERORDENTLICHE WELLE.

§. 4.

Wir bedienen uns zur Bezeichnung der hier in Betracht kommenden Grössen analoger Zeichen, wie bei der ordentlichen Welle; so nennen wir auch hier

$$u \quad v \quad w$$

die Cosinusse der Winkel, welche die Normale der einfallenden Welle mit den Coordinatenaxen einschliesst:

$$u'_o\; v'_o\; w'_o$$
$$u'_e\; v'_e\; w'_e$$

die Cosinusse der Winkel, welche die Normalen der reflectirten ordentlichen und ausserordentlichen Wellen;

$$u''_o\; v''_o\; w''_o$$
$$u''_e\; v''_e\; w''_e$$

die Cosinusse der Winkel, welche die Normalen der gebrochenen ordentlichen und ausserordentlichen Wellen mit den Coordinatenaxen einschliessen. Dabei ist wieder, nach dem Gesetze der Gleichheit der Reflexions- und Brechungswinkel

$$u'_o = u''_o \quad v'_o = v''_o \quad w'_o = -w''_o$$
$$u'_e = u''_e \quad v'_e = v''_e \quad w'_e = -w''_e$$

doch kann nicht mehr $u = u'_e = u''_e$ u. s. f. gesetzt werden, da hier auch bei der einfallenden Welle der Winkel in Betracht kommt, den die Normale derselben mit der optischen Axe einschliesst. Ferner nennen wir ebenso

$$U\; V\; W$$

die Cosinusse der Winkel, welche die Oscillationsrichtung der einfallenden Welle mit den Coordinatenaxen einschliesst:

$$U'_o\; V'_o\; W'_o$$
$$U'_e\; V'_e\; W'_e$$

die Cosinusse der Winkel, welche die Oscillationsrichtungen der ordentlichen und ausserordentlichen reflectirten:

$$U''_o\; V''_o\; W''_o$$
$$U''_e\; V''_e\; W''_e$$

die Cosinusse der Winkel, welche die Oscillationsrichtungen der ordentlichen und ausserordentlichen gebrochenen Welle mit den Coordinatenaxen einschliessen. Diese müssen zunächst als Functionen der Richtungen der betreffenden Wellennormalen dargestellt werden.

a) Einfallende Welle. Die Schwingungen $U\; V\; W$ stehen senkrecht auf der Normale, folglich

$$Uu + Vv + Ww = 0$$

sie stehen senkrecht auf der Axe, folglich

$$U \cos a + W \sin a = 0$$

und es ist

$$U^2 + V^2 + W^2 = 1$$

woraus folgende Werthe abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} U &= \frac{-v \sin a}{\sqrt{1 - (u \cos a + w \sin a)^2}} \\ V &= \frac{u \sin a - w \cos a}{\sqrt{1 - (u \cos a + w \sin a)^2}} \qquad 60) \\ W &= \frac{v \cos a}{\sqrt{1 - (u \cos a + w \sin a)^2}} \end{aligned}$$

b) Reflectirte ordentliche Welle. Die Schwingungen U'_o V'_o W'_o stehen senkrecht auf der Normale, folglich

$$U'_o\, u' + V'_o\, v' + W'_o\, w' = 0.$$

sie liegen in der Ebene, die sich durch die Normale und Axe legen lässt: folglich

$$-U'_o\, v' \sin\alpha + V'_o\,(u' \sin\alpha - w' \cos\alpha) + W'_o\, v' \cos\alpha = 0$$

und es ist

$$U'^2_o + V'^2_o + W'^2_o = 1,$$

woraus folgende Werthe abgeleitet werden:

61)
$$U'_o = \frac{u'w' \sin\alpha - (1 - u'^2)\cos\alpha}{\sqrt{1 - (u'\cos\alpha + w'\sin\alpha)^2}}$$
$$V'_o = \frac{v'\,(w'\sin\alpha + u'\cos\alpha)}{\sqrt{1 - (u'\cos\alpha + w'\sin\alpha)^2}}$$
$$W'_o = \frac{u'w'\cos\alpha - (1 - w'^2)\sin\alpha}{\sqrt{1 - (u'\cos\alpha + w'\sin\alpha)^2}}.$$

c) Reflectirte ausserordentliche Welle. Die Schwingungen U'_e V'_e W'_e stehen senkrecht auf der Normale, folglich

$$U'_e\, u'' + V'_e\, v'' - W'_e\, w'' = 0,$$

sie stehen senkrecht auf der Axe, folglich

$$U'_e \cos\alpha + W'_e \sin\alpha = 0$$

und es ist

$$U'^2_e + V'^2_e + W'^2_e = 1,$$

woraus folgende Werthe abgeleitet werden:

62)
$$U'_e = \frac{-v''\sin\alpha}{\sqrt{1 - (u''\cos\alpha - w''\sin\alpha)^2}}$$
$$V'_e = \frac{u''\sin\alpha + w''\cos\alpha}{\sqrt{1 - (u''\cos\alpha - w''\sin\alpha)^2}}$$
$$W'_e = \frac{v''\cos\alpha}{\sqrt{1 - (u''\cos\alpha - w''\sin\alpha)^2}}.$$

d) Gebrochene ordentliche Welle. Die Schwingungen U''_o, V''_o, W''_o stehen senkrecht auf der Normale, folglich

$$U''_o\, u' + V''_o\, v' - W''_o\, w' = 0,$$

sie liegen in der Ebene, die sich durch Normale und Axe legen lässt, folglich

$$U''_o\, v' \sin\alpha + V''_o\,(w'\cos\alpha - u'\sin\alpha) + W''_o\, v'\cos\alpha = 0$$

und es ist

$$U''^2_o + V''^2_o + W''^2_o = 1,$$

woraus folgende Werthe abgeleitet werden:

63)
$$U''_o = \frac{u'w'\sin\alpha - (1 - u'^2)\cos\alpha}{\sqrt{1 - (u'\cos\alpha + w'\sin\alpha)^2}}$$
$$V''_o = \frac{v'\,(u'\cos\alpha + w'\sin\alpha)}{\sqrt{1 - (u'\cos\alpha + w'\sin\alpha)^2}}$$
$$W''_o = \frac{-u'w'\cos\alpha + (1 - w'^2)\sin\alpha}{\sqrt{1 - (u'\cos\alpha + w'\sin\alpha)^2}}.$$

e) Gebrochene ausserordentliche Welle. Die Schwingungen U''_e V''_e W''_e stehen auf der Normale senkrecht, folglich

$$U''_e\, u'' + V''_e\, v'' + W''_e\, w'' = 0,$$

sie stehen senkrecht auf der Axe

$$U''_e \cos\alpha - W''_e \sin\alpha = 0$$

und es ist

$$U''^2_e + V''^2_e + W''^2_e = 1,$$

woraus folgende Werthe abgeleitet werden:

$$\left.\begin{aligned} U''_e &= \frac{v'' \sin\alpha}{\sqrt{1-(u''\cos\alpha - w''\sin\alpha)^2}} \\ V''_e &= \frac{u''\sin\alpha + w''\cos\alpha}{\sqrt{1-(u''\cos\alpha - w''\sin\alpha)^2}} \\ W''_e &= \frac{v''\cos\alpha}{\sqrt{1-(u''\cos\alpha - w''\sin\alpha)^2}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad 64)$$

Man sieht, dass auch hier eine Übereinstimmung zwischen den Oscillationsrichtungen dies- und jenseits der Zwillingsebene stattfindet; es ist nämlich nach 61) und 63)

$$\begin{aligned} U'_o &= U''_o = U' \\ V'_o &= V''_o = V' \\ W'_o &= -W''_o = W' \end{aligned}$$

und ebenso nach 62) und 64)

$$\begin{aligned} -U'_e &= U''_e = U'' \\ -V'_e &= V''_e = V'' \\ W'_e &= W''_e = W'' \end{aligned}$$

der letzteren Symbole werden wir uns künftig bedienen um die Buchstaben-Indices zu vermeiden.

Wir müssen nun wieder Rücksicht nehmen auf den Zusammenhang zwischen den Cosinussen der Winkel der Normalen, und dem Einfalls-, Reflexions- und Brechungswinkel. Nennen wir wieder

φ den Einfallswinkel;

$\varphi'_o = \varphi''_o = \varphi'$ den Reflexions- (Brechungs-) Winkel der ordentlich reflectirten (gebrochenen) Welle;

$\varphi'_e = \varphi''_e = \varphi''$ den Reflexions- (Brechungs-) Winkel der ausserordentlich reflectirten (gebrochenen) Welle;

ω das Azimuth der Einfalls- (Reflexions-, Brechungs-) Ebene; so finden wir

$$\left.\begin{aligned} u &= \sin\varphi \cos\omega \\ v &= \sin\varphi \sin\omega \\ w &= \cos\varphi \\[4pt] u' &= -\sin\varphi' \cos\omega \\ v' &= -\sin\varphi' \sin\omega \\ w' &= \cos\varphi' \\[4pt] u'' &= -\sin\varphi'' \cos\omega \\ v'' &= -\sin\varphi'' \sin\omega \\ w'' &= -\cos\varphi'' \end{aligned}\right\} \qquad 65)$$

Nennen wir ferner, wie oben

γ den Cosinus des Winkels zwischen Normale der einfallenden Welle und Axe;

$\gamma'_o = \gamma''_o = \gamma'$ den Cosinus des Winkels zwischen der Normale der ordentlich reflectirten (gebrochenen) Welle und optischen Axe;

$\gamma'_e = \gamma''_e = \gamma''$ den Cosinus des Winkels zwischen der Normale der ausserordentlich reflectirten (gebrochenen) Welle und optischen Axe; so erhalten wir

$$
66)\quad
\begin{aligned}
\gamma &= u \cos a + w \sin a = \sin\varphi \cos\omega \cos a + \cos\varphi \sin a\\
\gamma' &= u' \cos a + w' \sin a = -\sin\varphi' \cos\omega \cos a + \cos\varphi' \sin a\\
\gamma'' &= u'' \cos a - w'' \sin a = -\sin\varphi'' \cos\omega \cos a + \cos\varphi'' \sin a.
\end{aligned}
$$

Sind A, B, C die Cosinusse der Winkel, welche die Normale des Wellenhauptschnittes (s. oben §. 1) mit den Coordinatenaxen einschliesst, so erhalten wir

$$
67)\quad
\begin{aligned}
A &= \frac{-v \sin a}{\sqrt{1-\gamma^2}} & B &= \frac{u \sin a - w \cos a}{\sqrt{1-\gamma^2}} & C &= \frac{v \cos a}{\sqrt{1-\gamma^2}}\\
A'_o &= \frac{-v' \sin a}{\sqrt{1-\gamma'^2}} & B'_o &= \frac{u' \sin a - w' \cos a}{\sqrt{1-\gamma'^2}} & C'_o &= \frac{v' \cos a}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\\
A'_e &= \frac{-v'' \sin a}{\sqrt{1-\gamma''^2}} & B'_e &= \frac{u'' \sin a + w'' \cos a}{\sqrt{1-\gamma''^2}} & C'_e &= \frac{v'' \cos a}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\\
A''_o &= \frac{v' \sin a}{\sqrt{1-\gamma'^2}} & B''_o &= \frac{-u' \sin a + w' \cos a}{\sqrt{1-\gamma'^2}} & C''_o &= \frac{v' \cos a}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\\
A''_e &= \frac{v'' \sin a}{\sqrt{1-\gamma''^2}} & B''_e &= \frac{-u'' \sin a - w'' \cos a}{\sqrt{1-\gamma''^2}} & C''_e &= \frac{v'' \cos a}{\sqrt{1-\gamma''^2}}.
\end{aligned}
$$

Man hat daher wenn wieder θ den Winkel zwischen Wellenhauptschnitt und Einfallsebene bezeichnet:

$$
68)\quad
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{v \sin a \sin\omega + (u \sin a - w \cos a)\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \frac{\sin\varphi \sin a - \cos\varphi \cos a \cos\omega}{\sqrt{1-\gamma^2}}\\
\cos\theta'_o &= \frac{v' \sin a \sin\omega + (u' \sin a - w' \cos a)\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} = -\frac{\sin\varphi' \sin a + \cos\varphi' \cos a \cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\\
\cos\theta'_e &= \frac{v'' \sin a \sin\omega + (u'' \sin a + w'' \cos a)\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}} = -\frac{\sin\varphi'' \sin a + \cos\varphi'' \cos a \cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\\
\cos\theta''_o &= \frac{-v' \sin a \sin\omega + (w' \cos a - u' \sin a)\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} = \frac{\sin\varphi' \sin a + \cos\varphi' \cos a \cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\\
\cos\theta''_e &= \frac{-v'' \sin a \sin\omega - (u'' \sin a + w'' \cos a)\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}} = \frac{\sin\varphi'' \sin a + \cos\varphi'' \cos a \cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}.
\end{aligned}
$$

Auch hier ist sonach

$$
\begin{aligned}
\cos\theta'_o &= -\cos\theta''_o = \cos\theta'\\
\cos\theta'_e &= -\cos\theta''_e = -\cos\theta''.
\end{aligned}
$$

§. 5.

Die Amplituden der verschiedenen in Betracht kommenden Wellen bezeichnen wir so wie es oben bei der ordentlichen einfallenden Welle geschah; die Gleichungen, welche aus der Gleichheit der Componenten abgeleitet werden, sind sodann:

$$
69)\quad
\begin{aligned}
\mathfrak{A}U + \mathfrak{A}'_o U' - \mathfrak{A}'_e U'' &= \mathfrak{A}''_o U' + \mathfrak{A}''_e U''\\
\mathfrak{A}V + \mathfrak{A}'_o V' - \mathfrak{A}'_e V'' &= \mathfrak{A}''_o V' + \mathfrak{A}''_e V''\\
\mathfrak{A}W + \mathfrak{A}'_o W' + \mathfrak{A}'_e W'' &= -\mathfrak{A}''_o W' + \mathfrak{A}''_e W''.
\end{aligned}
$$

Aus diesen drei Gleichungen werden wir wieder zur künftigen Benützung eine Reihe von Gleichungen ableiten, deren jede um eine Unbekannte weniger in sich enthält.

Multipliciren wir zu dem Ende die erste derselben durch u, die zweite durch v, die dritte durch w und addiren wir:

$$A\,(Uu + Vv + Ww) + \mathfrak{A}'_o\,(U'u + V'v + W'w) - \mathfrak{A}'_e\,(U'''u + V'''v - W'''w) =$$
$$\mathfrak{A}''_o\,(U'u + V'v - W'w) + \mathfrak{A}''_e\,(U'''u + V'''v + W'''w).$$

Nun ist nach 60) und 66)

$$Uu + Vv + Ww = 0$$

nach 61) und 66)

$$U'u + V'v + W'w = \frac{[w'\,(uu' + vv') - w\,(1 - w'^2)]\,\sin a + [u'\,(vv' + ww') - u\,(1 - u'^2)]\,\cos a}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}$$

$$U'u + V'v - W'w = \frac{[w'\,(uu + vv') + w\,(1 - w'^2)]\,\sin a + [u'\,(vv' - ww') - u\,(1 - u'^2)]\,\cos a}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}$$

nach 63) und 66)

$$U'''u + V'''v - W'''w = \frac{(uv'' - u''v)\,\sin a - (vw'' + v''w)\,\cos a}{\sqrt{1 - \gamma''^2}}$$

$$U'''u + V'''v + W'''w = \frac{(uv'' - u''v)\,\sin a - (vw'' - v''w)\,\cos a}{\sqrt{1 - \gamma''^2}}$$

wodurch die obige Gleichung folgende Gestalt gewinnt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\Big([w'\,(uu' + vv') - w\,(1 - w'^2)]\,\sin a + [u'\,(vv' + ww') - u\,(1 - u'^2)]\cos a\Big) + \\
&\qquad \frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,[\sin a\,(u''v - uv'') + \cos a\,(vw'' + v''w)] = \\
&\frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\Big([w'\,(uu' + vv') + w\,(1 - w'^2)]\,\sin a + [u'\,(vv' - ww') - u\,(1 - u'^2)]\cos a\Big) + \\
&\qquad \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,[(uv'' - u''v)\,\sin a - (vw'' - v''w)\,\cos a].
\end{aligned} \tag{70}$$

Wenn wir dagegen die erste Gleichung mit $\cos a$, die zweite mit 0, die dritte mit $\sin a$ multipliciren, und addiren:

$$\mathfrak{A}\,[U\cos a + W\sin a] + \mathfrak{A}'_o\,[U'\cos a + W'\sin a] + \mathfrak{A}'_e\,[-U''\cos a + W'''\sin a] =$$
$$\mathfrak{A}''_o\,[U'\cos a - W'\sin a] + \mathfrak{A}''_e\,[U''\cos a + W''\sin a].$$

Nun ist nach 60) und 66)

$$U\cos a + W\sin a = 0$$

nach 61) und 66)

$$U'\cos a + W'\sin a = -\sqrt{1 - \gamma'^2}$$

$$U'\cos a - W'\sin a = \frac{(1 - w'^2)\,\sin a^2 - (1 - u'^2)\,\cos a^2}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}$$

nach 63) und 66)

$$-U''\cos a + W'''\sin a = 0$$

$$U''\cos a + W'''\cos a = \frac{2\sin a\cos a\,.\,v''}{\sqrt{1 - \gamma''^2}}$$

wodurch unsere Gleichung folgende Gestalt gewinnt:

$$\frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\,[(1 - u'^2)\,\cos a^2 - (1 - w'^2)\,\sin a^2] = \mathfrak{A}'_o\,\sqrt{1 - \gamma'^2} + \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,2\,v''\sin a\cos a \tag{71}$$

Multiplieiren wir weiter die drei Gleichungen der Reihe nach durch u' v' w' und addiren wir

$$\mathfrak{A}\,(Uu' + Vv' + Ww') + \mathfrak{A}_o'\,(U'u' + V'v' + W'w') - \mathfrak{A}_e'\,(U''u' + V''v' - W''w') =$$
$$= \mathfrak{A}_o''\,(U'u' + V'v' - W'w') + \mathfrak{A}_e''\,(U''u' + V''v' + W''w').$$

Es ist nach 60) und 66)

$$Uu' + Vv' + Ww' = \frac{\sin a\,(ur' - u'r) + \cos a\,(rw' - r'w)}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

nach 61) und 66)

$$U'u' + V'v' + W'w' = 0$$
$$U'u' + V'v' - W'w' = -\frac{2\,w'\,[(1 - w'^2)\sin a - u'\,w'\cos a]}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$

nach 63) und 66)

$$U''u' + V''v' - W''w' = \frac{\sin a\,(u''\,r' - u'\,v'') + \cos a\,(r'\,w'' + v''\,w')}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$
$$U''u' + V''v' - W''w' = \frac{\sin a\,(u'\,v'' - u''\,r') - \cos a\,(r'\,w'' - r''\,w')}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

wodurch die obige Gleichung in folgende sich verwandelt:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\,[(ur' - u'v)\sin a + (vw' - v'w)\cos a] + \frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,[(u''v' - u'v'')\sin a + $$
72)
$$+ (v'w'' + v''w')\cos a]$$
$$= \frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\,2w'\,[(1-w'^2)\sin a - u'w'\cos a] + \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,[(u'v'' - u''v')\sin a - (v'w'' - v''w')\cos a].$$

Wenn wir dagegen die erste Gleichung mit A'_o, die zweite mit B'_o, die dritte mit C''_o multiplicieren, und addiren:

$$\mathfrak{A}\,(UA'_o + VB'_o + WC'_o) + \mathfrak{A}'_o\,(U'A'_o + V'B'_o + W'C'_o) - \mathfrak{A}'_e\,(U''A'_o +$$
$$+ V''B'_o - W''C'_o) =$$
$$\mathfrak{A}''_o\,(U'A'_o + V'B'_o - W'C'_o) + \mathfrak{A}''_e\,(U''A'_o + V''B' + W''C').$$

Es ist nach 60), 66) und 67)

$$UA'_o + VB'_o + WC'_o = \frac{\sin a^2\,(uu' + vv') - \sin a\cos a\,(u'w + uw') + \cos a^2\,(vv' + ww')}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

nach 61), 66) und 67)

$$U'A'_o + V'B'_o + W'C'_o = o$$
$$U'A'_o + V'B'_o - W'C'_o = -\frac{2\,v'\cos a\,[u'w'\cos a - (1 - w'^2)\sin a]}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$

nach 63), 66) und 67)

$$U''A'_o + V''B'_o - W''C'_o = -\frac{\sin a^2\,(u'u'' + v'v'') + \sin a\cos a\,(u'w'' - u''w') + \cos a^2\,(v'v'' - w'w')}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$
$$U''A'_o + V''B'_o + W''C'_o = -\frac{\sin a^2\,(u'u'' + v'v'') - \sin a\cos a\,(u''w' - u'w'') - \cos a^2\,(v'v'' + w'w'')}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

wodurch die obige Gleichung nachfolgende Gestalt gewinnt:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left[\sin\alpha^2(uu'+vv')-\sin\alpha\cos\alpha(u'w+uw')+\cos\alpha^2(vv'+ww')\right]+\frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$
$$\left[\sin\alpha^2(u'u''+v'v'')+\sin\alpha\cos\alpha(u'w''-u''w')+\cos\alpha^2(v'v''-w'w'')\right]=\frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}} \qquad 73)$$
$$2\,v'\cos\alpha\left[(1-w'^2)\sin\alpha-u'w'\cos\alpha\right]+\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\left[\cos\alpha^2(v'v''+w'w'')+\cos\alpha\sin\alpha\right.$$
$$\left.(u''w'-u'w'')-\sin\alpha^2(u'u''+v'v'')\right]$$

Multiplicirt man ferner die 3 Gleichungen der Reihe nach mit u'', v'', $-w''$ und addirt:

$$\mathfrak{A}(Uu''+Vv''-Ww'')+\mathfrak{A}'_o(U'u''+V'v''-W'w'')-\mathfrak{A}'_e(U''u''+V''v''+W''w'')$$
$$=\mathfrak{A}''_o[U'u''+V'v''+W'w'']+\mathfrak{A}''_e(U''u''+Vv''-W''w'').$$

Nun ist nach 60) und 66)

$$Uu''+Vv''-Ww''=\frac{(uv''-u''v)\sin\alpha-(v''w+vw'')\cos\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

nach 61) und 66)

$$U'u''+V'v''-W'w''=\frac{[w''(1-w'^2)+w'(u'u''+v'v'')]\sin\alpha-[u''(1-u'^2)-u'(v'v''-w'w'')]\cos\alpha}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$
$$U'u''+V'v''+W'w''=\frac{[-w''(1-w'^2)+w'(u'u''+v'v'')]\sin\alpha-[w''(1-u'^2)-u'(vv''+w'w'')]\cos\alpha}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$

nach 64) und 66)

$$U''u''+V''v''+W''w''=0$$
$$U''u''+V''v''-W''w''=-\frac{2\,v''w''\cos\alpha}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

und es verwandelt sich unsere Gleichung in die folgende:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left[\sin\alpha(uv''-u''v)-\cos\alpha(v''w+vw'')\right]+\frac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\Big[\sin\alpha\Big(w''(1-w'^2)+$$
$$+w'(u'u''+v'v'')\Big)-\cos\alpha\Big(w''(1-u'^2)-u'(v'v''-w'w'')\Big)\Big]=\frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}} \qquad 74)$$
$$\Big[\sin\alpha\Big(w'(u'u''+v'v'')-w''(1-w'^2)\Big)+\cos\alpha\Big(u'(v'v''+w'w'')-u''(1-u'^2)\Big)\Big]-$$
$$-\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,2\,v''w''\cos\alpha.$$

Wenn man dagegen die erste Gleichung mit $\cos\alpha$, die zweite mit o, die dritte mit $\sin\alpha$ multiplicirt und addirt:

$$\mathfrak{A}(U\cos\alpha+W\sin\alpha)+\mathfrak{A}'_o(U'\cos\alpha+W'\sin\alpha)-\mathfrak{A}'_e(U''\cos\alpha-W''\sin\alpha)=$$
$$=\mathfrak{A}''_o(U'\cos\alpha-W'\sin\alpha)+\mathfrak{A}''_e(U''\cos\alpha+W''\sin\alpha)$$

und es ist nach 60) und 66)

$$U\cos\alpha+W\sin\alpha=0$$

nach 61) und 66)

$$U'\cos\alpha+W'\sin\alpha=-\sqrt{1-\gamma'^2}$$
$$U'\cos\alpha-W'\sin\alpha=\frac{(1-w'^2)\sin\alpha^2-(1-u'^2)\cos\alpha^2}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$

nach 64) und 66)

$$U'' \cos \alpha - W'' \sin \alpha = 0$$
$$U'' \cos \alpha + W'' \sin \alpha = \frac{2\, v'' \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

wodurch unsere Gleichung diese Gestalt erhält:

$$-\mathfrak{A}'_o \sqrt{1-\gamma'^2} = \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma'^2}} \left[(1-w'^2) \sin \alpha - (1-u'^2) \cos \alpha\right] + \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\, 2\, v'' \sin \alpha \cos \alpha.$$

Multiplicirt man ferner die drei Gleichungen der Reihe nach mit u', v', $-w'$, und addirt:

$$\mathfrak{A}\,(Uu' + Vv' - Ww') + \mathfrak{A}'_o\,(U'u' + V'v' - W'w') - \mathfrak{A}'_e\,(U''u' + V''v' + W''w'') =$$
$$= \mathfrak{A}''_o\,(U'u' + V'v' + W'w') + \mathfrak{A}''_e\,(U''u' + V''v' - W''w')$$

wo wieder nach 60) und 66)

$$Uu' + Vv' - Ww' = \frac{(uv' - u'v) \sin \alpha - (v'w + vw') \cos \alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

nach 61) und 66)

$$U'u' + V'v' - W'w' = 2\, w' \frac{(1-w'^2) \sin \alpha - u'w' \cos \alpha}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$
$$U'u' + V'v' + W'w' = 0$$

nach 64) und 66)

$$U''u' + V''v' + W''w' = -\frac{(u''v' - u'v'') \sin \alpha + (v'w'' - v''w') \cos \alpha}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$
$$U''u' + V''v' + W''w' = -\frac{(u''v' - u'v'') \sin \alpha + (v'w'' + v''w') \cos \alpha}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

ist, wodurch unsere Gleichung folgende Gestalt gewinnt:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left[(uv' - u'v) \sin \alpha - (vw' + v'w) \cos \alpha\right] + \frac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\, 2\, w \left[(1-w'^2) \sin \alpha - u'w' \cos \alpha\right] +$$

75) $$\frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\left[\sin \alpha\, (u''v' - u'v'') + \cos \alpha\, (v'w'' - v''w')\right] =$$
$$\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\left[\sin \alpha\, (u'v'' - u''v') - \cos \alpha\, (v'w'' + v''w')\right].$$

Wenn man dagegen die erste Gleichung durch A''_o, die zweite durch B''_o, die dritte durch C''_o und addiren wir

$$\mathfrak{A}\left[UA''_o + VB''_o + WC''_o\right] + \mathfrak{A}'_o\left[U'A''_o + V'B''_o + W'C''_o\right] - \mathfrak{A}'_e\left[U''A''_o + V''B''_o - W''C''_o\right] =$$
$$\mathfrak{A}''_o\left[U'A''_o + V'B''_o - W'C''_o\right] + \mathfrak{A}''_e\left[U''A''_o + V''B''_o + W''C''_o\right]$$

und es ist nach 60), 66) und 67)

$$UA''_o + VB''_o + WC''_o = \frac{-(uu' + vv') \sin \alpha^2 + (vv' - ww') \cos \alpha^2 + (u'w + uw') \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

nach 61), 66) und 67)

$$U'A''_o + V'B''_o + W'C''_o = \frac{2\, v' \cos \alpha\, \left[u'w' \cos \alpha - (1-w'^2) \sin \alpha\right]}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$
$$U'A''_o + V'B''_o - W'C''_o = 0$$

nach 64), 66) und 67)

$$U''A''_o + V''B''_o - W''C''_o = \frac{(u'u'' + v'v'')\, sin\, a^2 + (u''w' - u'w'')\, sin\, a\, cos\, a + (v'v'' + w'w'')\, cos\, a^2}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

$$U''A''_o + V''B''_o + W''C''_o = \frac{(u'u'' + v'v'')\, sin\, a^2 + (u'w'' - u'w'')\, sin\, a\, cos\, a + (v'v'' - w'w'')\, cos\, a^2}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

wodurch unsere Gleichung folgende Gestalt gewinnt:

$$\begin{gathered}\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left[-(uu' + vv')\, sin\, a^2 + (u'w + uw')\, sin\, a\, cos\, a + (vv' - ww')\, cos\, a^2\right] + \\ \frac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\, 2\, v'\, cos\, a\left[u'w'\, cos\, a - (1 - w'^2)\, sin\, a\right] + \frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\left[-(u''u' + v''v')\, sin\, a^2 + \right. \\ \left.(u''w' - u'w'')\, sin\, a\, cos\, a + (v'v'' + w'w'')\, cos\, a^2\right] = \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\left[(u'u'' + v'v'')\, sin\, a^2 + \right. \\ \left.(u'w'' - u''w')\, sin\, a\, cos\, a + (v'v'' - w'w'')\, cos\, a^2\right].\end{gathered} \qquad 76)$$

Multiplicirt man die 3 Gleichungen endlich der Reihe nach durch u'', v'', w'', und addirt:

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}\left[Uu'' + Vv'' + Ww''\right] + \mathfrak{A}'_o\left[U'u'' + V'v'' + W'w''\right] - \mathfrak{A}'_e\left[U''u'' + V''v'' - W''w''\right] = \\ \mathfrak{A}''_o\left[U'u'' + V'v'' - W'w''\right] + \mathfrak{A}''_e\left[U''u'' + V''v'' + W''w''\right]\end{gathered}$$

und es ist nach 60) und 66)

$$Uu'' + Vv'' + Ww'' = \frac{sin\, a\, (uv'' - u''v) - cos\, a\, (v''w - v\, w'')}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

nach 61) und 66)

$$U'u'' + V'v'' + W'w'' = \frac{sin\, a\left[w'(u'u'' + v'v'') - w''(1 - w'^2)\right] + cos\, a\left[u'(v'v'' + w'w'') - u''(1 - u'^2)\right]}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$

$$U'u'' + V'v'' - W'w'' = \frac{sin\, a\left[w'(u'u'' + v'v'') + w''(1 - w'^2)\right] + cos\, a\left[u'(v'v'' - w'w'') - u''(1 - u'^2)\right]}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$

nach 64) und 66)

$$U''u'' + V''v'' - W''w'' = -\frac{2\, v''w''\, cos\, a}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

$$U''u'' + V''v'' + W''w'' = 0$$

wodurch wir durch Substitution zu folgender Gleichung gelangen:

$$\begin{gathered}\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left[sin\, a\,(uv'' - u''v) - cos\, a\,(v''w - vw'')\right] + \frac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\left[sin\, a\left(w'(u'u'' + v'v'') - \right.\right. \\ \left.\left.(1 - w'^2)\, w''\right) + cos\, a\left(u'(v'v'' + w'w'') - u''(1 - u'^2)\right)\right] + \frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\, 2\, v''w''\, cos\, a = \\ \frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\left[sin\, a\left(w'(u'u'' + v'v'') + w''(1 - w'^2)\right) + cos\, a\left(u'(v'v'' - w'w'') - u''(1 - u'^2)\right)\right].\end{gathered} \qquad 77)$$

Wenn wir dagegen die erste Gleichung durch *cos a*, die zweite durch 0, die dritte durch — *sin a* multipliciren, und addiren:

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}\left[U\, cos\, a - W\, sin\, a\right] + \mathfrak{A}'_o\left[U'\, cos\, a - W'\, sin\, a\right] - \mathfrak{A}'_e\left[U''\, cos\, a + W''\, sin\, a\right] = \\ \mathfrak{A}''_o\left[U'\, cos\, a + W'\, sin\, a\right] + \mathfrak{A}''_e\left[U''\, cos\, a - W''\, sin\, a\right]\end{gathered}$$

welche Gleichung durch Substitution aus 60), 61), 64), 66) sich in nachfolgende verwandelt:

78)
$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\, 2\, v \sin\alpha \cos\alpha - \frac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}} \left[\sin\alpha^2 \left(1 - w'^2\right) - \cos^2\alpha \left(1 - u'^2\right)\right] +$$
$$\frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\, 2\, v'' \sin\alpha \cos\alpha = - \mathfrak{A}''_o \sqrt{1\ \gamma'-^2}.$$

Diese Gleichungen lassen sich nun wieder durch Einführung von φ, φ', φ'' und ω mannigfaltig vereinfachen und kürzer fassen; aus 65) folgt nämlich

$$\begin{aligned}
uu' + vv' &= - \sin\varphi \sin\varphi' \\
uu' - vv' &= - \sin\varphi \sin\varphi' \cos 2\omega \\
uu' \pm ww' &= - \sin\varphi \sin\varphi' \cos\omega^2 \pm \cos\varphi'^2 \\
uu'' + vv'' &= - \sin\varphi \sin\varphi'' \\
uu'' - vv'' &= - \sin\varphi \sin\varphi' \cos 2\omega \\
uu'' \pm ww'' &= - \sin\varphi \sin\varphi'' \cos\omega^2 \mp \cos\varphi \cos\varphi'' \\
uv' + u'v &= - \sin\varphi \sin\varphi' \sin 2\omega \\
uv' - u'v &= 0 \\
uv'' + u''v &= - \sin\varphi \sin\varphi'' \sin 2\omega \\
uv'' - u''v &= 0 \\
uw' \pm u'w &= \pm \sin(\varphi \mp \varphi') \cos\omega \\
uw'' \pm u''w &= - \sin(\varphi \pm \varphi'') \cos\omega \\
u'u'' + v'v'' &= \sin\varphi' \sin\varphi'' \\
u'u'' - v'v'' &= \sin\varphi' \sin\varphi'' \cos 2\omega \\
u'u'' \pm w'w'' &= \sin\varphi' \sin\varphi'' \cos\omega^2 \mp \cos\varphi' \cos\varphi'' \\
u'v'' + u''v' &= \sin\varphi' \sin\varphi'' \sin 2\omega \\
u'v'' - u''v' &= 0 \\
u'w'' \pm u''w' &= \sin(\varphi' \mp \varphi'') \cos\omega \\
vv' \pm ww' &= - \sin\varphi \sin\varphi' \sin\omega^2 \pm \cos\varphi \cos\varphi' \\
vv'' \pm ww'' &= - \sin\varphi \sin\varphi'' \sin\omega^2 \mp \cos\varphi \cos\varphi'' \\
vw' \pm v'w &= \sin(\varphi \mp \varphi') \sin\omega \\
vw'' \pm v''w &= - \sin(\varphi \pm \varphi'') \sin\omega \\
v'v'' \pm w'w'' &= \sin\varphi' \sin\varphi'' \sin\omega^2 \mp \cos\varphi' \cos\varphi'' \\
v'w'' \pm v''w' &= \sin(\varphi' \mp \varphi'') \sin\omega.
\end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke, so findet man:

$$\left[w'(uu' + vv') - w(1 - w'^2)\right] \sin\alpha + \left[u'(vv' + ww') - (1 - u'^2)\, u\right] \cos\alpha = -$$
$$\sin\varphi' \sin(\varphi + \varphi') \sin\alpha - \left[\sin\varphi' \cos(\varphi + \varphi') + \sin\varphi\right] \cos\omega \cos\alpha$$
$$(u''v - uv'') \sin\alpha + (vw'' + v''w) \cos\alpha = - \sin(\varphi + \varphi'') \cos\alpha \sin\omega$$
$$\left[w'(uu' + vv') + w(1 - w'^2)\right] \sin\alpha + \left[u'(vv' - ww') - u\,(1 - u'^2)\right] \cos\alpha = -$$
$$\sin\varphi' \sin(\varphi - \varphi') \sin\alpha + \left[\sin\varphi' \cos(\varphi - \varphi') - \sin\varphi\right] \cos\omega \cos\alpha$$
$$(uv'' - u''v) \sin\alpha - (vw'' - v''w) \cos\alpha = \sin(\varphi - \varphi'') \sin\omega \cos\alpha$$

wodurch die Gleichung 70) in folgende sich verwandelt:

$$\frac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\Big[\sin(\varphi+\varphi')\sin\varphi'\sin\alpha+\big(\sin\varphi'\cos(\varphi+\varphi')+\sin\varphi\big)\cos\omega\cos\alpha\Big]+$$
$$+\frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin(\varphi+\varphi'')\cos\alpha\sin\omega=+\frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\Big[\sin(\varphi-\varphi')\sin\varphi'\sin\alpha- \qquad 79)$$
$$-\big(\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi')-\sin\varphi\big)\cos\omega\cos\alpha\Big]-\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin(\varphi-\varphi'')\cos\alpha\sin\omega$$

ferner wird durch Substitution:

$$(1-u'^2)\cos\alpha^2-(1-w'^2)\sin\alpha^2=\cos\alpha^2-\sin\varphi'^2(1-\cos\alpha^2\sin\omega^2)$$
$$2\sin\alpha\cos\alpha\,v''=-\sin\varphi''\sin 2\alpha\sin\omega$$

wodurch die Gleichung 71) in folgende sich verwandelt:

$$\mathfrak{A}'_o\sqrt{1-\gamma'^2}=\frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\left[\cos\alpha^2-\sin\varphi'^2(1-\sin\omega^2\cos\alpha^2)\right]+\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin\varphi''\sin 2\alpha\sin\omega \qquad 80)$$

ferner wird durch Substitution:

$$\sin\alpha\,(uv'-u'v)+\cos\alpha\,(vw'-v'w)=\sin(\varphi+\varphi')\sin\omega\cos\alpha$$
$$\sin\alpha\,(u''v'-u'v'')+\cos\alpha\,(v'w''+v''w')=\sin(\varphi'-\varphi'')\sin\omega\cos\alpha$$
$$2w'\left[(1-w'^2)\sin\alpha-u'w'\cos\alpha\right]=2\sin\varphi'\cos\varphi'(\sin\varphi'\sin\alpha+\cos\varphi'\cos\alpha\cos\omega$$
$$\sin\alpha\,(u'v''-u''v')-\cos\alpha\,(v'w''-v''w')=-\sin(\varphi'+\varphi'')\sin\omega\cos\alpha$$

wodurch mit Berücksichtigung von 68) die Gleichung 72) in folgende sich verwandelt:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin(\varphi+\varphi')+\frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin(\varphi'-\varphi'')+\mathfrak{A}''_o\frac{\sin 2\varphi'\cos\theta'}{\sin\omega\cos\alpha}+\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin(\varphi'+\varphi'')=0 \qquad 81)$$

ferner durch Substitution

$$\sin\alpha^2(uu'+vv')-\sin\alpha\cos\alpha\,(u'w+uw')+\cos\alpha^2(vv'+ww')=\cos\alpha^2(\cos\varphi\cos\varphi'-$$
$$\sin\varphi\sin\varphi'\sin\omega^2)-\sin\varphi\sin\varphi'\sin\alpha^2-\sin(\varphi-\varphi')\sin\alpha\cos\alpha\cos\omega$$
$$\sin\alpha^2(v'v''+u'u'')+\sin\alpha\cos\alpha\,(u'w''-u''w')+\cos\alpha^2(v'v''-w'w'')=\cos\alpha^2(\cos\varphi'\cos\varphi''+$$
$$+\sin\varphi'\sin\varphi''\sin\omega^2)+\sin\varphi'\sin\varphi''\sin\alpha^2+\sin(\varphi'+\varphi'')\sin\alpha\cos\alpha\cos\omega$$
$$-2v'\cos\alpha\left[u'w'\cos\alpha-(1-w'^2)\sin\alpha\right]=-2\sin\varphi'^2\cos\alpha\sin\omega\,(\sin\varphi'\sin\alpha+\cos\varphi'\cos\alpha\cos\omega)$$

was wieder mit Rücksichtnahme auf di e Relationen 68) die Gleichung 73) in folgende verwandelt:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left[\cos\alpha^2(\cos\varphi\cos\varphi'-\sin\varphi\sin\varphi'\sin\omega^2)-\sin\alpha^2.\sin\varphi\sin\varphi'-\sin\alpha\cos\alpha\,.\sin(\varphi-\varphi')\cos\omega\right]$$
$$+\frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\left[\cos\alpha^2(\cos\varphi'\cos\varphi''+\sin\varphi'\sin\varphi''\sin\omega^2)+\sin\alpha^2.\sin\varphi'\sin\varphi''+\sin\alpha\cos\alpha\sin(\varphi'+\varphi'')\cos\omega\right]$$
$$=\mathfrak{A}''_o\,2\sin\varphi'^2\cos\alpha\sin\omega\cos\theta'+\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\left[\cos\alpha^2(\sin\varphi'\sin\varphi''\sin\omega^2-\cos\varphi'\cos\varphi'')-\sin\alpha\cos\alpha\right. \qquad 82)$$
$$\left.\sin(\varphi'+\varphi'')\cos\alpha-\sin\alpha^2\,.\,\sin\varphi'\sin\varphi''\right]$$

ferner durch Substitution

$$\sin\alpha\,(uv'' - u''v) - \cos\alpha\,(v''w + vw'') = \sin(\varphi + \varphi'')\sin\omega\cos\alpha$$

$$\sin\alpha\left[w''(1 - w'^2) + w'(u'u'' + v'v'')\right] - \cos\alpha\left[u''(1 - u'^2) - u'(v'v'' - ww'')\right] = -\sin(\varphi' - \varphi'')$$
$$(\sin\varphi'\sin\alpha + \cos\varphi'\cos\alpha\cos\omega)$$

$$\sin\alpha\left[w'(u'u'' + v'v'') - w''(1 - w'^2)\right] + \cos\alpha\left[u'(v'v'' + w'w'') - u''(1 - u'^2)\right] = \sin(\varphi' + \varphi'')$$
$$(\sin\varphi'\sin\alpha + \cos\varphi'\cos\alpha\cos\omega)$$

$$2\cos\alpha\, v''w'' = \sin 2\varphi''\sin\omega\cos\alpha$$

was wieder mit Berücksichtigung von 68) die Gleichung 74) in nachfolgende verwandelt:

$$83)\quad \left[\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin(\varphi + \varphi'') + \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin 2\varphi''\right]\sin\omega\cos\alpha + \left[\mathfrak{A}'_o\sin(\varphi' - \varphi'') + \mathfrak{A}''_o\sin(\varphi' + \varphi''\right]\cos\theta' = 0$$

ferner durch Substitution

$$\sin\alpha\,(uw' - u'v) - \cos\alpha\,(vw' + v'w) = -\sin(\varphi - \varphi')\sin\omega\cos\alpha$$
$$2w'\left[(1 - w'^2)\sin\alpha - u'w'\cos\alpha\right] = \sin 2\varphi'(\sin\varphi'\sin\alpha + \cos\varphi'\cos\alpha\cos\omega)$$
$$\sin\alpha\,(u''v' - u'v'') + \cos\alpha\,(v'w'' - v''w') = \sin(\varphi' + \varphi'')\sin\omega\cos\alpha$$
$$\sin\alpha\,(u''v' - u'v'') + \cos\alpha\,(v'w'' + v''w') = \sin(\varphi' - \varphi'')\sin\alpha\cos\alpha$$

was wieder mit Berücksichtigung von 68) die Gleichung 75) in die folgende verwandelt:

$$84)\quad -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin(\varphi - \varphi') - \mathfrak{A}'_o\frac{\sin 2\varphi'\cos\theta'}{\sin\omega\cos\alpha} + \frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin(\varphi' + \varphi'') + \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin(\varphi' - \varphi'') = 0$$

ferner durch Substitution

$$-(uu' + vv')\sin\alpha^2 + (vv' - ww')\cos\alpha^2 + (u'w + uw')\sin\alpha\cos\alpha = -\cos\alpha^2(\sin\varphi\sin\varphi'\sin\omega^2 +$$
$$+ \cos\varphi\cos\varphi') + \sin\alpha\cos\alpha\sin(\varphi - \varphi')\cos\omega + \sin\varphi\sin\varphi'\sin\alpha^2$$
$$2v'\cos\alpha\left(u'w'\cos\alpha - (1 - w'^2)\sin\alpha\right) = +2\sin\varphi'^2\sin\omega\cos\alpha(\sin\varphi'\sin\alpha + \cos\varphi'\cos\alpha\cos\omega)$$
$$-(u'u'' + v'v'')\sin\alpha^2 + (v'v'' + w'w'')\cos\alpha^2 + (u''w' - u'w'')\sin\alpha\cos\alpha = \cos\alpha^2(\sin\varphi'\sin\varphi''\sin\omega^2 -$$
$$- \cos\varphi'\cos\varphi'') - \sin\alpha\cos\alpha\sin(\varphi' + \varphi'')\cos\omega - \sin\varphi'\sin\varphi''\sin\alpha^2$$
$$(u'u'' + v'v'')\sin\alpha^2 + (v'v'' - w'w'')\cos\alpha^2 + (u''w' - u'w'')\sin\alpha\cos\alpha = \cos\alpha^2(\sin\varphi'\sin\varphi''\sin\omega^2 +$$
$$+ \cos\varphi'\cos\varphi'') + \sin\alpha\cos\alpha\sin(\varphi' + \varphi'')\cos\omega + \sin\varphi'\sin\varphi''\sin\alpha^2$$

wodurch die Gleichung 76) folgende Gestalt gewinnt:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left[\sin\alpha^2 . \sin\varphi\sin\varphi' + \sin\alpha\cos\alpha . \sin(\varphi - \varphi')\cos\omega - \cos\alpha^2(\sin\varphi\sin\varphi'\sin\omega^2 + \cos\varphi\cos\varphi')\right] -$$
$$85)\quad - \mathfrak{A}'_o 2\sin\varphi'^2\sin\omega\cos\alpha . \cos\theta' + \frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\left[-\sin\varphi'\sin\varphi''\sin\alpha^2 - \sin\alpha\cos\alpha . \sin(\varphi' + \varphi'')\cos\omega +\right.$$
$$\left. + \cos\alpha^2(\sin\varphi'\sin\varphi''\sin\omega^2 - \cos\varphi'\cos\varphi'')\right] = \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\left[\sin\varphi'\sin\varphi''\sin\alpha^2 + \sin\alpha\cos\alpha\sin(\varphi' + \varphi'')\cos\omega\right.$$
$$\left. + \cos\alpha^2(\sin\varphi'\sin\varphi''\sin\omega^2 + \cos\varphi'\cos\varphi'')\right]$$

ferner durch Substitution:

$$(uv'' - u''v)\sin\alpha + (v''w + vw'')\cos\alpha = -\sin\omega\cos\alpha\sin(\varphi - \varphi'')$$

$$[w'(u'u'' + v'v'') - w''(1 - w'^2)]\sin\alpha + [u'(v'v'' + w'w'') - u''(1 - u'^2)]\cos\alpha = \sin(\varphi' + \varphi'')$$
$$(\sin\varphi'\sin\alpha + \cos\varphi'\cos\alpha\cos\omega)$$

$$2\,v''w''\cos\alpha = \sin 2\,\varphi''\sin\omega\cos\alpha$$

$$[w'(u'u'' + v'v'') + w''(1 - w'^2)]\sin\alpha + [u'(v'v'' - w'w'') - u''(1 - u'^2)]\cos\alpha = -\sin(\varphi' - \varphi'')$$
$$(\sin\varphi'\sin\alpha + \cos\varphi'\cos\alpha\cos\omega)$$

wodurch die Gleichung 77) folgende Gestalt annimmt, wenn man zugleich auf 68) Rücksicht nimmt:

$$\left[-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin(\varphi - \varphi'') + \frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin 2\,\varphi''\right]\sin\omega\cos\alpha = [\mathfrak{A}'_o\sin(\varphi' + \varphi'') + \mathfrak{A}''_o\sin(\varphi' - \varphi'')]\cos\theta' \quad 86)$$

und endlich durch Substitution:

$$2\,v\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\varphi\sin\omega\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\sin\alpha^2(1 - w'^2) - \cos\alpha^2(1 - u'^2) = -\cos\alpha^2 + \sin\varphi'^2(\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2\cos\omega^2)$$
$$2\,v''\sin\alpha\cos\alpha = -2\sin\varphi''\sin\omega\sin\alpha\cos\alpha$$

wodurch die Gleichung 78) folgende Gestalt gewinnt:

$$2\left(-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin\varphi + \frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin\varphi''\right)\sin\omega\sin\alpha\cos\alpha + \mathfrak{A}''_o\sqrt{1-\gamma'^2} -$$
$$-\frac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2(\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2\cos\omega^2)] = 0. \quad 87)$$

Der Gleichungen 80), 83), 86) und 87) können wir uns bedienen um drei der Unbekannten als Functionen einer Unbekannten und der bekannten Grösse $\mathfrak{A}$ auszudrücken. Wir nennen wieder

$$\sin\omega\cos\alpha = \sin\delta$$

daher

$$\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2\cos\omega^2 = \cos\delta^2.$$

Durch Elimination von $\mathfrak{A}''_o$ aus 80) und 83) erhält man:

88) $$\mathfrak{A}''_e = \frac{\mathfrak{A}a''_e + b''_e\,\mathfrak{A}'_o}{c''_e} \quad 88)$$

wo

$$a''_e = [\sin(\varphi + \varphi'')(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2)\sin\delta]\sqrt{1-\gamma''^2}$$
$$b''_e = [\sin(\varphi' - \varphi'')(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2) + \sin(\varphi' + \varphi'')(1 - \gamma'^2)]\cos\theta'\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\gamma''^2)}$$
$$c''_e = [\sin(\varphi' + \varphi'')\cos\theta'\sqrt{1-\gamma'^2}\sin\alpha - \cos\varphi''(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2)]\,2\sin\varphi''\sin\delta\sqrt{1-\gamma^2}$$

durch Elimination von $\mathfrak{A}''_o$ aus 86) und 87) erhält man:

$$\mathfrak{A}'_e = \frac{a'_e\,\mathfrak{A} + b'_e\,\mathfrak{A}'_o}{c'_e} \quad 89)$$

wo $a'_e = [\sin(\varphi - \varphi'')\sqrt{1-\gamma'^2} + 2\sin(\varphi' - \varphi'')\sin\varphi\cos\theta'\sin\alpha]\,\sin\delta\sqrt{(1-\gamma'^2)(1-\gamma''^2)}$

$b'_e = [\sin(\varphi' + \varphi'')(1-\gamma'^2) + \sin(\varphi' - \varphi'')(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2)]\cos\theta'\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\gamma''^2)}$

$c'_e = [\sin(\varphi' - \varphi'')\cos\theta'\sin\alpha + \cos\varphi''\sqrt{1-\gamma'^2}]\,2\sin\varphi''\sin\delta\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\gamma'^2)}$

durch Elimination von $\mathfrak{A}'_e$ aus 86) und 87) erhält man:

$$\mathfrak{A}''_o = \frac{a''_o\,\mathfrak{A} + b''_o\,\mathfrak{A}'_o}{c''_o} \tag{90}$$

wo $a''_o = \sin(\varphi + \varphi'')\sin\delta\sin\alpha\sqrt{1-\gamma'^2}$

$b''_o = -[\sin(\varphi' + \varphi'')\cos\theta'\sqrt{1-\gamma'^2}\sin\alpha + (\cos\alpha^2 - \cos\delta^2\sin\varphi'^2)\cos\varphi'']\sqrt{1-\gamma^2}$

$c''_o = \sqrt{(1-\gamma^2)(1-\gamma'^2)}\,[\sin(\varphi' - \varphi'')\cos\theta'\sin\alpha - \cos\varphi''\sqrt{1-\gamma'^2}]$.

§. 6.

Es ist nun die aus der Bedingung der Erhaltung der lebendigen Kräfte resultirende Gleichung einzuführen, und wir verfahren genau so, wie es oben für die ordentliche einfallende Welle geschah, nur mit dem Unterschiede den die Verschiedenheit der hier betrachteten Elemente bedingt. Die einfallende Welle ist extraordinär; es wird daher das Quadrat der Amplitude derselben mit dem Volum jenes schiefen Prismas zu multipliciren sein, welches die Bewegungen der Welle während einer beliebigen Zeiteinheit in sich schliesst; zur reflectirten und gebrochenen ausserordentlichen Welle gehören wieder zwei schiefe, zur reflectirten und gebrochenen ordentlichen zwei gerade Prismen.

Wir nennen wieder diese Volumina:

$$R,\ R'_o\ R'_e\ R''_o\ R''_e$$

und bemerken, dass auch hier

$$R'_o = R''_o = R' \quad R'_e = R''_e = R''$$

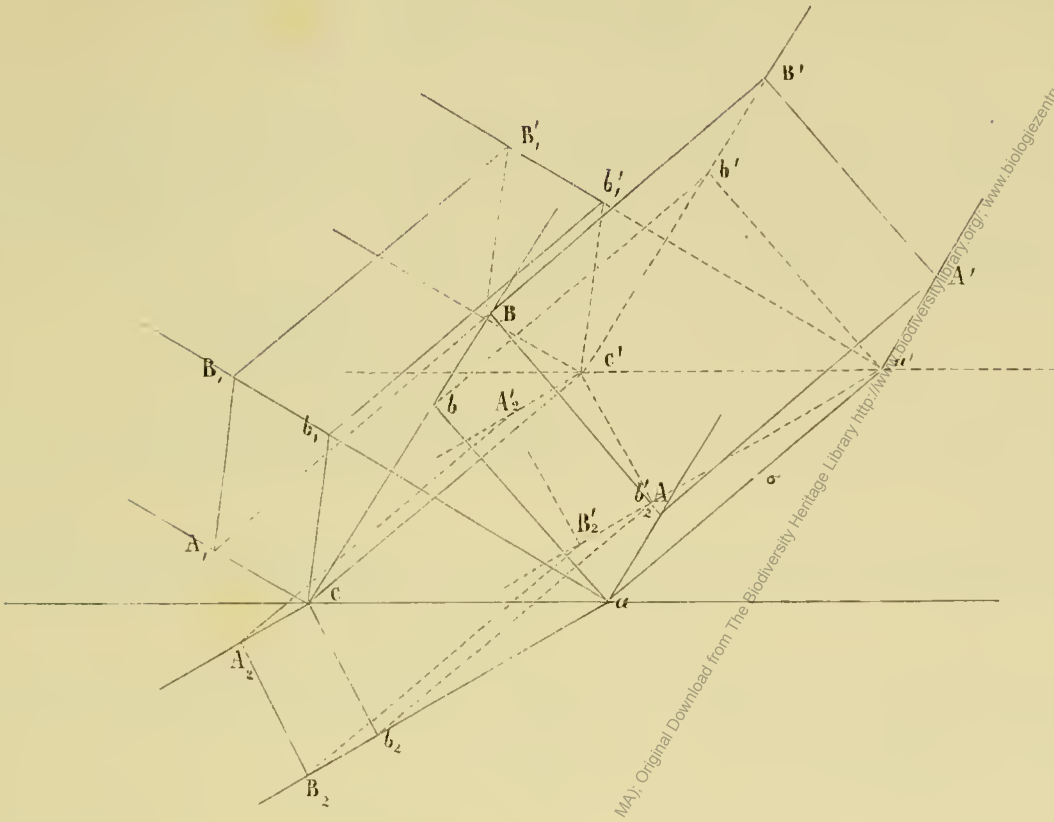
sein muss, während jedoch R von allen diesen verschieden ist, aus demselben Grunde, durch welchen die Verschiedenheit des φ von φ' und φ'' bedingt wird.

a) Zur Entwickelung des Werthes von R braucht nur das oben angewandte Verfahren umgekehrt zu werden. Es sei nämlich ad der einfallende Stral, ag die Normale auf die zugehörige Welle und cd ein gewisses begrenztes Stück der Welle, so wird eine bereits an die Trennungsebene der beiden hemitropen Individuen gelangte Lichtwelle im zweiten Individuum als ordentliche Welle (Stral) bis aA vorrücken, während cd bis CD gelangt. Das Volum $cdd'c'CDD'C'$ stellt unser R, das Volum $BAB'A'bab'a'$ dagegen unser R' dar.

Nun ist

$$R = CDC'D'\,.\,Gg$$

da Gg senkrecht steht auf CD'; fällt man von C ein Perpendikel auf die gegenüberstehende Seite des Rhomboides $CDC''D'$ und nennt den Winkel $DCH = \mu$, so ist



$$ab\,a'b' = aa' \,.\, ab \cos\mu = aa' \,(Ga' - Gb \cos\theta)$$

und es ist

$$Ga = \cos\varphi \quad Gb = CG \,.\, tg\, p$$

und

$$tg\, p = \frac{(e^2 - o^2)\,\gamma \sqrt{1 - \gamma^2}}{e^2 + (o^2 - e^2)\,\gamma^2} \text{ und } CG = \sin\varphi, \text{ folglich}$$

$$ab \cos\mu = \cos\varphi - \frac{(e^2 - o^2)\,\gamma \sqrt{1 - \gamma^2}}{e^2 + (o^2 - e^2)\,\gamma^2} \sin\varphi \,.\, \cos\theta$$

und da Gg wieder proportional ist dem Sinus des Einfallswinkels

$$AA'\,bb' = aa' \,.\, Ca \,.\, \sin\varphi\left(\cos\varphi + \frac{(o^2 - e^2)\,\gamma \sqrt{1 - \gamma^2}}{e^2 + (o^2 - e^2)\,\gamma^2} \sin\varphi \cos\theta\right),$$

wo wieder

$$\sin\varphi \cos\theta \sqrt{1 - \gamma^2} = \sin\alpha - \gamma \cos\varphi,$$

wodurch endlich

$$R = \sigma \,.\, Ca \sin\varphi \cos\varphi \left(1 + \frac{(o^2 - e^2)\,\gamma \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} - \gamma\right)}{e^2 + (o^2 - e^2)\,\gamma^2}\right).$$

[1]) Um die Figur durch Überladung nicht unverständlich zu machen, sind in derselben die Buchstaben G, g, H, μ, p weggelassen, welche aus der Figur §. 3 leicht zu ergänzen sind.

b) Das Volum, das zur ordentlichen Welle gehört, ist das gerade Prisma

$$R' = CC'\,.\,Cb_,\,.\,b_,B$$

wo $Cb_, = \cos\varphi'$, und $b_,B_,$ proportional $\sin\varphi'$ folglich

$$R' = \sigma\,.\,Ca\,.\cos\varphi'\,\sin\varphi'$$

c) Das Volum, das zur ausserordentlich reflectirten und gebrochenen Welle gehört, wird gefunden wie das einfallende: ohne die Ableitung, welche nach der vorstehenden Figur leicht wird, zu wiederholen, schreiben wir es sogleich hin, indem wir überall für φ, γ, das zu diesen Wellen gehörige φ'', γ'' substituiren. Wir erhalten somit

$$R'' = \sigma\,.\,Ca\,\sin\varphi''\,\cos\varphi''\left(1 + \frac{(o^2-e^2)\,\gamma''\left(\frac{\sin a}{\cos\varphi''} - \gamma''\right)}{e^2 + (o^2-e^2)\,\gamma''^2}\right).$$

denn auch hier ist $\cos\theta''\sqrt{1-\gamma''^2}\,\sin\varphi'' = \sin a - \gamma''\cos\varphi''$.

Wir haben somit die gesuchte Gleichung, wenn wir die gemeinschaftlichen Factoren beiderseits weglassen

$$91)\quad \mathfrak{A}^2\sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \frac{(o^2-e^2)\,\gamma\left(\frac{\sin a}{\cos\varphi} - \gamma\right)}{e^2 + (o^2-e^2)\,\gamma^2}\right) - (\mathfrak{A}'^{\,2}_e + \mathfrak{A}''^{\,2}_e)\sin\varphi''\cos\varphi''\left(1 + \frac{(o^2-e^2)\,\gamma''\left(\frac{\sin a}{\cos\varphi''} - \gamma''\right)}{e^2 + (o^2-e^2)\,\gamma''^2}\right)$$
$$= (\mathfrak{A}'^{\,2}_o + \mathfrak{A}''^{\,2}_o)\sin\varphi'\cos\varphi'.$$

Wir werden zunächst die Irresolubilität dieser quadratischen Gleichung durch irgend eine der oben entwickelten linearen Gleichungen nachweisen.

Addiren wir zunächst 83) und 86), so erhalten wir

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left[\sin(\varphi+\varphi'') + \sin(\varphi-\varphi'')\right]\sin\delta + (\mathfrak{A}'_o + \mathfrak{A}''_o)\left[\sin(\varphi'+\varphi'') + \sin(\varphi'-\varphi'')\right]\cos\theta'$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}''_e - \mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin 2\varphi''\sin\delta = 0,$$

und da

$$\sin(\varphi+\varphi'') + \sin(\varphi-\varphi'') = 2\sin\varphi\cos\varphi''$$
$$\sin(\varphi'+\varphi'') + \sin(\varphi'-\varphi'') = 2\sin\varphi'\cos\varphi''$$

so erhalten wir durch Weglassung des gemeinschaftlichen Factors $2\cos\varphi''$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin\varphi\sin\delta + (\mathfrak{A}'_o + \mathfrak{A}''_o)\cos\theta'\sin\varphi' + \frac{\mathfrak{A}''_e - \mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin\varphi''\sin\delta = 0.$$

Subtrahirt man dagegen 86) von 83), so findet man

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left[\sin(\varphi+\varphi'') - \sin(\varphi-\varphi'')\right]\sin\delta + (\mathfrak{A}''_o - \mathfrak{A}'_o)\left[\sin(\varphi'+\varphi'') - \sin(\varphi'-\varphi'')\right]\cos\theta'$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}''_e + \mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin 2\varphi''\sin\delta = 0.$$

und da

$$\sin(\varphi+\varphi'') - \sin(\varphi-\varphi'') = 2\sin\varphi''\cos\varphi$$
$$\sin(\varphi'+\varphi'') - \sin(\varphi'-\varphi'') = 2\sin\varphi''\cos\varphi'$$

so erhalten wir durch Weglassung des gemeinschaftlichen Factors $2\sin\varphi''$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\cos\varphi\sin\delta + (\mathfrak{A}''_o - \mathfrak{A}'_o)\cos\varphi'\cos\theta' + \frac{\mathfrak{A}''_e + \mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\cos\varphi''\sin\delta = 0.$$

Bringen wir in den zwei Gleichungen die Summe und die Differenz der Amplituden der ordentlich reflectirten und gebrochenen Wellen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens und multipliciren sodann die zwei Ausdrücke, so finden wir

$$(\mathfrak{A}''^2_o - \mathfrak{A}'^2_o) \sin\varphi' \cos\varphi' = \frac{\sin\delta^2}{\cos\theta'^2}\Big[\frac{\mathfrak{A}^2}{1-\gamma^2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\mathfrak{A}''^2_e - \mathfrak{A}'^2_e}{1-\gamma''^2}\sin\varphi''\cos\varphi'' + \qquad 92)$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\Big(\frac{\mathfrak{A}''_e + \mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin\varphi\cos\varphi'' + \frac{\mathfrak{A}''_e - \mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin\varphi''\cos\varphi\Big)\Big].$$

Multipliciren wir nun 80) durch

$$\frac{\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2}{\sqrt{1-\gamma'^2}},$$

so erhalten wir

$$-\mathfrak{A}'_o(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2) + \frac{\mathfrak{A}''_o}{1-\gamma'^2}(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2)^2 +$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}''_e\, 2\sin\varphi''\sin\delta}{\sqrt{(1-\gamma'^2)(1-\gamma''^2)}}(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2)\sin\alpha = 0,$$

multiplicirt man dagegen 87) durch

$$\sqrt{1-\gamma'^2},$$

so findet man

$$\mathfrak{A}\, 2\sin\varphi\sin\delta\sin\alpha\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma^2}} + \mathfrak{A}'_o(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2) - \mathfrak{A}'_e\, 2\sin\varphi''\sin\delta\sin\alpha\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2}} -$$
$$-\mathfrak{A}''_o(1-\gamma'^2) = 0;$$

addirt man nun diese beiden Gleichungen, so bekommt man

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\, 2\sin\varphi\sin\delta\sin\alpha\,.\sqrt{1-\gamma'^2} + \frac{\mathfrak{A}''_o}{1-\gamma'^2}\left[(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2)^2 - (1-\gamma'^2)^2\right] -$$
$$-\frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\, 2\sin\varphi''\sin\delta\sin\alpha\sqrt{1-\gamma'^2} + \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\, 2\sin\varphi''\sin\delta\sin\alpha\,\frac{\cos\alpha^2 - \sin\varphi^2\cos\delta^2}{\sqrt{1-\gamma'^2}} = 0.$$

Nun ist aber, wenn man 66) und 68) berücksichtigt

$$\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2 = 1 - \gamma'^2 + 2\sin\alpha\sin\varphi'\cos\theta'\sqrt{1-\gamma'^2}$$

folglich

$$(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2)^2 - (1-\gamma'^2)^2 = 4\sin\alpha\sin\varphi'\cos\theta'(1-\gamma'^2)(\sqrt{1-\gamma'^2} + \sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha)$$

und ebenso

$$\sin\varphi''\sin\alpha\sin\delta(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2) = \sin\varphi''\sin\alpha\sin\delta(\sqrt{1-\gamma'^2} + 2\sin\alpha\sin\varphi'\cos\theta')\sqrt{1-\gamma'^2}$$

substituirt man diese Ausdrücke in unsere letzte Gleichung, so verwandelt diese sich in die folgende

$$\mathfrak{A}''_o\, 2\sin\varphi'\cos\theta'\frac{(\sqrt{1-\gamma'^2} + \sin\alpha\sin\varphi'\cos\theta')}{\sin\delta} = \frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin\varphi''\sqrt{1-\gamma'^2} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin\varphi\sqrt{1-\gamma'^2} \qquad 93)$$
$$-\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin\varphi''(\sqrt{1-\gamma'^2} + 2\sin\alpha\sin\varphi'\cos\theta').$$

Multipliciren wir ferner 80) durch

$$\sqrt{1-\gamma'^2}$$

so erhalten wir

$$-\mathfrak{A}'_o(1-\gamma'^2) + \mathfrak{A}''_o(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2) + \mathfrak{A}''_e\, 2\sin\varphi''\sin\delta\sin\alpha\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2}} = 0$$

und 87) durch

$$\frac{\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$$

so finden wir

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\, 2 \sin\varphi \sin\delta \sin\alpha \frac{\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2 \cos\delta^2}{\sqrt{1-\gamma'^2}} + \frac{\mathfrak{A}'_o}{1-\gamma'^2}(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2)^2 - \mathfrak{A}''_o(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2)$$
$$-\frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\, 2 \sin\varphi'' \sin\delta \sin\alpha \frac{\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

addirt man diese beiden Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\, 2 \sin\varphi \sin\delta \sin\alpha \frac{\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2}{\sqrt{1-\gamma'^2}} + \frac{\mathfrak{A}'_o}{1-\gamma'^2}\left[(\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2)^2 - (1-\gamma'^2)^2\right]$$
$$-\frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\, 2\sin\varphi''\sin\delta\sin\alpha \frac{\cos\alpha^2 - \sin\varphi'^2\cos\delta^2}{\sqrt{1-\gamma^2}} + \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\,.\,2\sin\varphi''\sin\delta\sin\alpha\,.\sqrt{1-\gamma'^2} = 0,$$

was sich wieder durch die oben angeführten Reductionen in folgende Gleichung verwandeln lässt:

$$94)\quad \mathfrak{A}'_o\, 2\sin\varphi'\cos\theta' \frac{(\sqrt{1-\gamma'^2} + \sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha)}{\sin\delta} = \frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin\varphi''(\sqrt{1-\gamma'^2} + 2\sin\alpha\sin\varphi'\cos\theta')$$
$$-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin\varphi(\sqrt{1-\gamma'^2} + 2\sin\alpha\sin\varphi'\cos\theta') - \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin\varphi''\sqrt{1-\gamma'^2}.$$

Addiren wir 92) zu 91), so finden wir, wenn wieder der Kürze halber

$$\frac{(o^2-e^2)\gamma\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\varphi} - \gamma\right)}{e^2 + (o^2-e^2)\gamma^2} = k$$
$$\frac{(o^2-e^2)\gamma''\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\varphi''} - \gamma''\right)}{e^2 + (o^2-e^2)\gamma''^2} = k''$$

nennen, folgende Summe:

$$\mathfrak{A}''^2_o\, 2\sin\varphi'\cos\varphi' = \mathfrak{A}^2\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{\sin\delta^2}{\cos\theta'^2(1-\gamma^2)} + (1+k)\right) - \mathfrak{A}'^2_e\sin\varphi''\cos\varphi''$$
$$95)\quad \left(1 + k'' + \frac{\sin\delta^2}{\cos\theta'^2(1-\gamma''^2)}\right) - \mathfrak{A}''^2_e\cos\varphi''\sin\varphi''\left(1 + k'' - \frac{\sin\delta^2}{\cos\theta'^2(1-\gamma''^2)}\right) + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\frac{\sin\delta^2}{\cos\theta'^2}$$
$$\left(\frac{\mathfrak{A}''_e + \mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin\varphi\cos\varphi'' + \frac{\mathfrak{A}''_e - \mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin\varphi''\cos\varphi\right),$$

subtrahiren wir aber 92) von 91), so erhalten wir folgende Gleichung:

$$\mathfrak{A}'^2_o\, 2\sin\varphi'\cos\varphi' = \mathfrak{A}^2\sin\varphi\cos\varphi\left(1 + k - \frac{\sin\delta^2}{\cos\theta'^2(1-\gamma^2)}\right) - \mathfrak{A}'^2_e\sin\varphi''\cos\varphi''$$
$$96)\quad \left(1 + k'' - \frac{\sin\delta^2}{\cos\theta'^2(1-\gamma''^2)}\right) - \mathfrak{A}''^2_e\sin\varphi''\cos\varphi''\left(1 + k'' + \frac{\sin\delta^2}{\cos\theta'^2(1-\gamma''^2)}\right) - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\gamma''^2)}}\frac{\sin\delta^2}{}$$
$$\left[(\mathfrak{A}''_e + \mathfrak{A}'_e)\sin\varphi\cos\varphi'' + (\mathfrak{A}''_e - \mathfrak{A}'_e)\sin\varphi''\cos\varphi\right].$$

Soll nun die quadratische Gleichung in rationale Factoren zerlegbar sein, so muss 93) ein Factor von 95), und 94) ein Factor von 96) sein. Dividiren wir gliedweise, so finden wir

$$\frac{\mathfrak{A}''^2_o\, 2\sin\varphi'\cos\varphi'\cos\theta'^2\sin\delta}{\mathfrak{A}''_o\, 2\sin\varphi'\cos\theta'\left(\sqrt{1-\gamma'^2} + \sin\alpha\sin\varphi'\cos\theta'\right)} = \frac{\mathfrak{A}''_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\cdot\frac{\cos\theta'\sqrt{1-\gamma'^2}\sin\delta}{\left(\sqrt{1-\gamma'^2} + \sin\alpha\sin\varphi'\cos\theta'\right)}\cos\varphi' = \mathfrak{A}''_o(\mathfrak{a}''_o)'$$

$$\frac{\mathfrak{A}^2\sin\varphi\cos\varphi\left(\dfrac{\sin\delta^2}{1-\gamma^2} + (1+k)\cos\theta'^2\right)}{-\mathfrak{A}\sin\varphi\sqrt{\dfrac{1-\gamma'^2}{1-\gamma^2}}} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\cdot\frac{\sin\delta^2 + (1+k)\cos\theta'^2(1-\gamma^2)}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\cos\varphi = -\mathfrak{A}\ (\mathfrak{a})'$$

$$\frac{-\mathfrak{A}'^2_e \sin\varphi'' \cos\varphi'' \left(\frac{\sin\delta^2}{1-\gamma''^2} + (1+k'')\cos\theta'^2\right)}{\mathfrak{A}'_e \sin\varphi'' \sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2}}} = -\frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}} \cdot \frac{\sin\delta^2 + (1+k'')\cos\theta'^2 (1-\gamma''^2)}{\sqrt{1-\gamma'^2}} \cos\varphi'' = -\mathfrak{A}'_e (\mathfrak{a}'_e)'$$

$$\frac{\mathfrak{A}''^2_e \sin\varphi'' \cos\varphi'' \left(\frac{\sin\delta^2}{1-\gamma''^2} - (1+k'')\cos\theta'^2\right)}{-\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}} \sin\varphi'' \left(\sqrt{1-\gamma'^2} + 2\sin a \sin\varphi' \cos\theta'\right)} = -\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}} \cdot \frac{\sin\delta^2 - (1+k'')\cos\theta'^2 (1-\gamma''^2)}{\sqrt{1-\gamma'^2} + 2\sin a \cos\varphi' \cos\theta'} \cos\varphi'' = -\mathfrak{A}''_e (\mathfrak{a}''_e)'$$

$$\frac{\mathfrak{A}'^2_o\, 2\sin\varphi' \cos\varphi' \cos\theta'^2 \sin\delta}{\mathfrak{A}'_o\, 2\sin\varphi' \cos\theta' \left(\sqrt{1-\gamma'^2} + \sin\varphi' \cos\theta' \sin a\right)} = \frac{\mathfrak{A}'_o}{\sqrt{1-\gamma'^2}} \cdot \frac{\sin\delta \,.\, \cos\theta' \sqrt{1-\gamma'^2}}{\sqrt{1-\gamma'^2} + \sin\varphi' \cos\theta' \sin a} \cos\varphi' = \mathfrak{A}'_o (\mathfrak{a}'_o)''$$

$$\frac{\mathfrak{A}^2 \sin\varphi \cos\varphi \left[(1+k)\cos\theta'^2 - \frac{\sin\delta^2}{1-\gamma^2}\right]}{-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}} \sin\varphi \left[\sqrt{1-\gamma'^2} + 2\sin\varphi' \cos\theta' \sin a\right]} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1-\gamma^2}} \cdot \frac{\sin\delta^2 - (1+k)\, \mathrm{sos}\, \theta'^2 (1-\gamma^2)}{\sqrt{1-\gamma^2} + 2\sin\varphi' \cos\theta' \sin a} \cos\varphi = \mathfrak{A}\ (\mathfrak{a})''$$

$$\frac{-\mathfrak{A}'^2_e \sin\varphi'' \cos\varphi'' \left[(1+k'')\cos\theta'^2 - \frac{\sin\delta^2}{1-\gamma''^2}\right]}{\frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}} \sin\varphi'' \left[\sqrt{1-\gamma'^2} + 2\sin\varphi' \cos\theta' \sin a\right]} = \frac{\mathfrak{A}'_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}} \cdot \frac{\sin\delta^2 - (1+k'')\cos\theta'^2 (1-\gamma''^2)}{\sqrt{1-\gamma'^2} + 2\sin\varphi' \cos\theta' \sin a} \cos\varphi'' = \mathfrak{A}'_e (\mathfrak{a}'_e)''$$

$$\frac{-\mathfrak{A}''^2_e \sin\varphi'' \cos\varphi'' \left[(1+k'')\cos\theta'^2 + \frac{\sin\delta^2}{1-\gamma''^2}\right]}{-\frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}} \sin\varphi'' \sqrt{1-\gamma'^2}} = \frac{\mathfrak{A}''_e}{\sqrt{1-\gamma''^2}} \cdot \frac{\sin\delta^2 + (1+k'')\cos\theta'^2 (1-\gamma''^2)}{\sqrt{1-\gamma'^2}} \cos\varphi'' = \mathfrak{A}''_e (\mathfrak{a}''_e)''$$

Schreiben wir nun 93) kurz folgendermassen:

$$\mathfrak{A}''_o (\alpha''_o)' = \mathfrak{A}'_e (\alpha'_e)' - \mathfrak{A} (\alpha)' - \mathfrak{A}''_e (\alpha''_e)'$$

und ebenso 94)

$$\mathfrak{A}'_o (\alpha'_o)'' = \mathfrak{A}'_e (\alpha'_e)'' - \mathfrak{A} (\alpha)'' - \mathfrak{A}''_e (\alpha''_e)''$$

und multipliciren wir die erstere mit der Gleichung

$$\mathfrak{A}''_o (\mathfrak{a}''_o)' = -\mathfrak{A} (\mathfrak{a})' - \mathfrak{A}'_e (\mathfrak{a}'_e)' - \mathfrak{A}''_e (\mathfrak{a}''_e)'$$

und die zweite mit der Gleichung

$$\mathfrak{A}'_o (\mathfrak{a}'_o)'' = \mathfrak{A} (\mathfrak{a})'' + \mathfrak{A}'_e (\mathfrak{a}'_e)'' + \mathfrak{A}''_e (\mathfrak{a}''_e)''$$

so muss in dem Producte

$$\mathfrak{A}''^2_o (\alpha''_o)' (\mathfrak{a}''_o)' = \mathfrak{A}^2 (\alpha)' (\mathfrak{a})' - \mathfrak{A}'^2_e (\alpha'_e)' (\mathfrak{a}'_e)' + \mathfrak{A}''^2_e (\alpha''_e)' (\mathfrak{a}''_e)' + \mathfrak{A}\Big[\mathfrak{A}'_e \big((\alpha)' (\mathfrak{a}'_e)' - (\alpha'_e)'(\mathfrak{a})'\big) +$$
$$+ \mathfrak{A}''_e \big((\alpha)' (\mathfrak{a}''_e)' + (\alpha''_e)' (\mathfrak{a})'\big)\Big] + \mathfrak{A}'_e \mathfrak{A}''_e \left[(\alpha''_e)' (\mathfrak{a}'_e)' - (\alpha'_e)' (\mathfrak{a}''_e)'\right]$$

für den Fall der Zerlegbarkeit

$$(\alpha)' \ (\mathfrak{a}'_e)' - ('\alpha_e)' \ (\mathfrak{a})' = \frac{\sin(\varphi - \varphi'') \sin\delta^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\gamma''^2)}}$$

$$(\alpha)' \ (\mathfrak{a}''_e)' + (\alpha''_e)' (\mathfrak{a})' = \frac{\sin(\varphi + \varphi'') \sin\delta^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\gamma''^2)}}$$

$$(\alpha''_e)' \ (\mathfrak{a}'_e)' - (\alpha'_e)' \ (\mathfrak{a}''_e)' = 0$$

und in dem Producte

$$\mathfrak{A}'^2_o (\alpha'_o)'' (\mathfrak{a}'_o)'' = -\mathfrak{A}^2 (\alpha)'' (\mathfrak{a})'' + \mathfrak{A}'^2_e (\alpha'_e)'' (\mathfrak{a}'_e)'' - \mathfrak{A}''^2_e (\alpha''_e)'' (\mathfrak{a}''_e)'' + \mathfrak{A}\Big[\mathfrak{A}'_e \big((\alpha'_e)'' (\mathfrak{a})'' -$$
$$- (\alpha)'' (\mathfrak{a}'_e)''\big) - \mathfrak{A}''_e \big((\alpha)'' (\mathfrak{a}''_e)'' + (\alpha''_e)'' (\mathfrak{a}')''\big)\Big] + \mathfrak{A}'_e \mathfrak{A}''_e \left[(\alpha'_e)'' (\mathfrak{a}''_e)'' - (\alpha''_e)'' (\mathfrak{a}'_e)''\right]$$

für den Fall der Zerlegbarkeit

$$(\alpha'_e)''\,(\mathfrak{a})'' - (\alpha)''\,(\mathfrak{a}'_e)'' = -\frac{\sin(\varphi-\varphi'')\sin\delta^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\gamma''^2)}}$$

$$(\alpha)''\,(\mathfrak{a}''_e)'' + (\alpha''_e)''\,(\mathfrak{a})'' = -\frac{\sin(\varphi+\varphi'')\sin\delta^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\gamma''^2)}}$$

$$(\alpha'_e)''\,(\mathfrak{a}''_e)'' - (\alpha''_e)''\,(\mathfrak{a}'_e)'' = 0$$

sein. Dies wird nun zu untersuchen sein.

Substituiren wir in die erste dieser sechs Bedingungsgleichungen die entsprechenden Werthe, so erhalten wir nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors $\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\gamma''^2)}$ folgende Gleichung:

$$\left(\sin\delta^2 + (1+k'')(1-\gamma''^2)\cos\theta'^2\right)\cos\varphi''\sin\varphi - \left(\sin\delta^2 + (1+k)(1-\gamma^2)\cos\theta'^2\right)\sin\varphi''\cos\varphi = \\ = \sin(\varphi-\varphi'')\sin\delta^2,$$

ordnen wir diese nach den Coëfficienten von $\sin\delta^2$ und $\cos\theta'^2$

$$\sin\delta^2\sin(\varphi-\varphi'') + \cos\theta'^2\left[(1+k'')(1-\gamma''^2)\cos\varphi''\sin\varphi - (1+k)(1-\gamma^2)\sin\varphi''\cos\varphi\right] = \\ \sin(\varphi-\varphi'')\sin\delta^2$$

folglich

97) $$(1+k'')(1-\gamma''^2)\cos\varphi''\sin\varphi = (1+k)(1-\gamma^2)\sin\varphi''\cos\varphi.$$

Substituiren wir dagegen in die vierte Bedingungsgleichung die entsprechenden Werthe, so finden wir nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors $\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\gamma''^2)}$ folgende Gleichung:

$$\left(\sin\delta^2 - (1+k)(1-\gamma^2)\cos\theta'^2\right)\sin\varphi''\cos\varphi - \left(\sin\delta^2 - (1+k'')(1-\gamma''^2)\cos\theta'^2\right)\sin\varphi\cos\varphi'' = \\ = -\sin(\varphi-\varphi'')\sin\delta^2,$$

ordnen wir auch hier nach den Coëfficienten von $\sin\delta^2$ und $\cos\theta'^2$

$$-\sin\delta^2\sin(\varphi-\varphi'') - \cos\theta'^2\left[(1+k)(1-\gamma^2)\sin\varphi''\cos\varphi - (1+k'')(1-\gamma''^2)\cos\varphi''\sin\varphi\right] = \\ = -\sin(\varphi-\varphi'')\sin\delta^2$$

was somit auf dieselbe Relation

$$(1+k)(1-\gamma^2)\sin\varphi''\cos\varphi = (1+k'')(1-\gamma''^2)\cos\varphi''\sin\varphi$$

führt. Substituiren wir nun in die zweite und fünfte Bedingungsgleichung und multipliciren wir beiderseits mit

$$(\sqrt{1-\gamma'^2} + 2\sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha)\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\gamma'^2)(1-\gamma''^2)}$$

so erhalten wir

$$(1-\gamma'^2)\left(\sin\delta^2 - (1+k'')(1-\gamma''^2)\cos\theta'^2\right)\cos\varphi''\sin\varphi + (\sqrt{1-\gamma'^2} + 2\sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha)^2\left(\sin\delta^2 + \right. \\ \left. + (1+k)(1-\gamma^2)\cos\theta'^2\right)\sin\varphi''\cos\varphi = \sin(\varphi+\varphi'')\sin\delta^2\sqrt{1-\gamma'^2}\,(\sqrt{1-\gamma'^2} + 2\sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha)$$

$$\sqrt{1-\gamma'^2} + 2\sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha)^2\left(\sin\delta^2 + (1+k'')(1-\gamma''^2)\cos\theta'^2\right)\cos\varphi''\sin\varphi + (1-\gamma'^2)\left(\sin\delta^2 - \right. \\ \left. -(1+k)(1-\gamma^2)\cos\theta'^2\right)\sin\varphi''\cos\varphi = -\sin(\varphi+\varphi'')\sin\delta^2\sqrt{1-\gamma'^2}\,(\sqrt{1-\gamma'^2} + 2\sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha).$$

Addiren wir und ordnen wir zugleich nach $\sin\delta^2$ und $\cos\theta'^2$, so finden wir

$$\sin\delta^2 \sin(\varphi+\varphi'')\left[(1-\gamma'^2)+(\sqrt{1-\gamma'^2}+2\sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha)^2\right]=\cos\theta'^2\left[(1-\gamma'^2)-(\sqrt{1-\gamma'^2}+\right.$$
$$\left.+2\sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha)^2\right]\left[(1+k'')(1-\gamma''^2)\sin\varphi\cos\varphi''+(1+k)(1-\gamma^2)\sin\varphi''\cos\varphi\right] \qquad 98)$$

Substituiren wir dagegen in die dritte und sechste Bedingungsgleichung, so erhalten wir, indem wir jede derselben mit

$$\frac{\sqrt{1-\gamma'^2}\,(\sqrt{1-\gamma'^2}+2\sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha)}{\sin\varphi''\cos\varphi''}$$

multipliciren, aus jeder die Relation

$$(\sqrt{1-\gamma'^2}+2\sin\varphi'\cos\theta'^2\sin\alpha)^2\left(\sin\delta^2+(1+k'')(1-\gamma''^2)\cos\theta'^2\right)=(1-\gamma'^2)\left(\sin\delta^2-(1+k'')\right.$$
$$\left.(1-\gamma''^2)\cos\theta'^2\right)$$

und wenn wir auch hier nach $\sin\delta^2$ und $\cos\theta'^2$ ordnen

$$(1+k'')(1-\gamma''^2)\cos\theta'^2\left[(1-\gamma'^2)+(\sqrt{1-\gamma'^2}+2\sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha)^2\right]=\sin\delta^2\left[(1-\gamma'^2)\right.$$
$$\left.-(\sqrt{1-\gamma'^2}+2\sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha)^2\right]. \qquad 99)$$

Dividirt man durch diese Gleichung die Relation 98), und substituirt man in diese aus 97) den Werth von $(1+k'')(1-\gamma''^2)\sin\varphi\cos\varphi''$, so erhält man schliesslich die Gleichung

$$\sin(\varphi+\varphi'')\frac{(1-\gamma'^2)+(\sqrt{1-\gamma'^2}+2\sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha)^2}{(1-\gamma'^2)-(\sqrt{1-\gamma'^2}+2\sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha)^2}=2\sin\varphi\cos\varphi''\,\frac{(1-\gamma'^2)-(\sqrt{1-\gamma'^2}+2\sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha)^2}{(1-\gamma'^2)+(\sqrt{1-\gamma'^2}+2\sin\varphi'\cos\theta'\sin\alpha)^2}$$

welche, wenn man sie auflöst sich nicht auf Null reducirt; womit der Beweis der Unauflösbarkeit geführt ist.

Nennen wir in 91)

$$\begin{aligned}(1+k)\ \sin\varphi\ \cos\varphi &= n\\ (1+k'')\sin\varphi''\cos\varphi'' &= n''_e\\ \sin\varphi'\ \cos\varphi' &= n'_o\end{aligned}$$

so erhalten wir aus 88), 89), 90) und 91)

$$\mathfrak{A}'_o = -\mathfrak{A}\,\frac{p'_o - c'_e\, c''_e\, c''_o \sqrt{q'_o}}{s'_o}. \qquad 100)$$

wo $p'_o = n''_e\, c''^2_o\,(a'_e\, b'_e\, c''^2_e + a''_e\, b''_e\, c'^2_e) + n'_o\, a''_o\, b''_o\, c'^2_e\, c''^2_e$

$q'_o = n\left[(b'^2_e\, c''^2_e + b''^2_e\, c'^2_e)\, n''_e\, c''^2_o + (c''^2_o + b''^2_o)\, n'_o\, c'^2_e\, c''^2_e\right] - n''^2_e\, c''^2_o\,(a'_e\, b''_e -$
$- a''_e\, b'_e)^2 - n'^2_o\, c'^2_e\, c''^2_e\, a''^2_o - n'_o\, n''_e\left[(a''_o\, b'_e - a'_e\, b''_o)^2\, c''^2_e(+a''_o\, b''_e -\right.$
$\left.- a''_e\, b''_o)^2\, c'^2_e + (a'^2_e\, c''^2_e + a''^2_e\, c'^2_e)\, c''^2_o\right]$

$s'_o = n''_e\, c''^2_o\,(b'^2_e\, c''^2_e + b''^2_e\, c'^2_e) + n'_o\, c'^2_e\, c''^2_e\,(b''^2_o + c''^2_o)$

ferner

$$\mathfrak{A}''_o = -\mathfrak{A}\,\frac{p''_o - c'_e\, c''_e\, b''_o \sqrt{q''_o}}{s''_o} \qquad 101)$$

wo $p''_o = n''_e\, c'_o\left[b'_e\, c''^2_e\,(a'_e\, b''_o - a''_o\, b'_e) + b''_e\, c'^2_e\,(a''_e\, b''_o - a''_o\, b''_e)\right] - n'_o\, a''_o\, c''_o\, c'^2_e\, c''^2_e$

$q''_o = q'_o$

$s''_o = s'_o$

ferner

102) $$\mathfrak{A}'_e = -\mathfrak{A}\,\frac{p'_e - b'_e\, c''_e\, c''_o \sqrt{q'_e}}{s'_e}$$

wo
$$p'_e = n''_e\, c''^2_o\, c'_e\, b''_e\, (a''_e\, b'_e - a'_e\, b''_e) - n'_o\, c'_e\, c''^2_e\, [a'_e\, (b''^2_o + c''^2_o) - b'_e\, a''_o\, b''_o]$$
$$q'_e = q'_o$$
$$s'_e = s'_o$$

endlich

103) $$\mathfrak{A}''_e = -\mathfrak{A}\,\frac{p''_e - c'_e\, b''_e\, c''_o \sqrt{q''_e}}{s''_e}$$

wo
$$p''_e = n''_e\, c''^2_o\, c''_e\, b'_e\, (a'_e\, b''_e - a''_e\, b'_e) - n'_o\, c'^2_e\, c''_e\, [a''_e\, (b''^2_o + c''^2_o) - b''_e\,.\,a''_o\, b''_o)$$
$$q''_e = q'_o$$
$$s''_e = s'_o$$

Die einfachen Gesetze, welche in diesen Gleichungen enthalten sind, werden im folgenden Abschnitte abgeleitet.

(Schluss im nächsten Bande.)