XIII.

Ist es erforderlich, eine nach andern als den allgemeinen Gravitations-Gesetzen wirkende anziehende Kraft anzunehmen, um die Erscheinungen der Cohäsion zu erklären?

Von
Prof. G. G. Schmidt in Gieſsen.

Die Beantwortung der aufgeworfenen Frage hat gegenwärtig ein um so höheres Intereſse, da durch Berthollet's neu eröfnete Ansichten von den chemischen Verwandtschaften die Classe von Phänomenen, welche man unter den chemischen Anziehungen begreift, nicht mehr isolirt da steht, sondern verbunden mit den Wirkungen der Cohäsion und der allgemeinen Massenanziehung erscheint. Wie schön wäre es, wenn sich mit mathematischer Evidenz darthun lieſse, daſs es eine und dieselbe Kraft sey, welche Millionen von Welten unverrückt in ihren Bahnen erhält, und in diesen Welten den ewigen Wechsel der Formen erzeugt! Welcher Triumph wäre dieſs für Newton's Lehre von der allgemeinen Anziehung, und für die mathematische Naturforschung überhaupt!

Wir

Wir dürfen indessen sogleich bey dem Eingang dieser Abhandlung nicht verschweigen, daſs es gerade der unsterbliche Stifter von der Lehre der Gravitation ist, welcher an der Spitze derjenigen Naturforscher steht, die die Uebereinstimmung zwischen den Gesetzen der allgemeinen Anziehung, wodurch die Erscheinungen der Cohäsion und der Wechsel der chemischen Bestandtheile bewirkt werden, läugnen.

Es liegt uns daher vor allen Dingen ob, die Gründe darzustellen, worauf Newton und die Physiker, welche ihm gefolgt sind, ihre Behauptung stützen.

Es ist bekannt genug, daſs die Wirkungen der allgemeinen Anziehung sich durch den ganzen Weltraum verbreiten, und lediglich von der Gröſse der Massen und dem verkehrten Verhältniſse der Quadrate der Entfernungen abhängen; da hingegen die Kräfte, wodurch die einzelnen gleichartigen Theile desselben Körpers zusammenhalten, so wie diejenigen, wodurch die ungleichartigen Bestandtheile sich zu einem gleichartigen Ganzen vereinigen, nur in sehr kleinen Entfernungen, wo nicht blos bey der unmittelbaren Berührung, thätig erscheinen.

Eben so bekannt ist es, daſs die Kraft, womit die aneinander 'gränzenden Elemente eines starren Körpers zusammenhalten, keineswegs von der Gesammtmasse des Körpers, sondern blos von der Dichte und Beschaffenheit der sich berührenden Theile abhänge. Ein Gleiches glaubte man ziemlich allgemein von der Wirkung der chemischen Wahlanziehung behaupten zu müssen, bis Berthollet durch eine Menge Erscheinungen bewies, daſs die Masse bey den sogenannten Verwandschaften allerdings berücksichtiget werden müsse; indem die chemischen Wirkungen in dem zusammengesetzten Verhältniſse der Gröſse der Massen und der Stärke der Anziehungen seyen. Da indessen der Gegenstand dieser Abhandlung blos die

die Beantwortung der Frage betrifft, ob die Erscheinungen der Cohäsion sich auf die Gesetze der allgemeinen Attraction zurückführen lassen, so können wir dieſsmal Berthollet's Ansichten von den chemischen Verwandtschaften bey Seite setzen. Wir behalten uns aber vor, zu einer andern Zeit hierauf zurückzukommen.

Wer die aufgestellte Frage bejahend beantworten wollte, müſste darthun, wie aus dem newtonischen Attractionsgesetz folge, daſs die Wechselanziehung zweyer sich unmittelbar berührender Theilganze eines Körpers unendlich groſs, in Vergleichung mit der gesammten Maſsenanziehung des Körpers gegen jedes Theilganze in endlicher Entfernung, sey.

Dieſs ist aber gerade der Satz, welchen Newton läugnet. Seine Gründe sind kürzlich folgende.

Proposit. LXXI. Theor. XXI. Philosophiae nat. princip. mathem. wird bewiesen *), daſs ein auſserhalb der Oberfläche einer Kugel gele-

*) Newton's Beweis des oben angeführten Satzes ist kürzlich folgender: „Es seyen „ahkb, AHKB *) zwey Sphären von gleichen Durchmessern; p, P zwey „Puncte auſserhalb der Sphären in den verlängerten Durchmessern ab, AB. „Von den Puncten P und p seyen gleiche Segmente, HK, hk, von den beyden „Sphären abgeschnitten; der verschwindende Bogen KL sey = kl, und PL, pl „gezogen. Aus den Mittelpuncten beyder Sphären seyen auf PK und pk, DS „und ds perpendicular, auf PL und pl, SE und se perpendicular. Ferner „seyen QI und qi auf PB und pb, so wie RI und ri auf PK und pk perpen„dicular. Nach diesen Voraussetzungen hat man: DS = ds, SE = se, die „verschwindenden Winkel DPE = dpe; auch kann man die Linien PE = PF, „pe = pf, so wie die verschwindenden Linien DF = df setzen, weil „ihre Gränze bey der Verschwindung der Winkel DPE, dpe das „Verhältniſs der Gleichheit ist.

„Dieſs angenommen, hat man ferner
„PI : PF = RI : DF
„pf : pi = (df = DF) : ri
„PI. pf : Pf. pi = RI : ri = HI : ih (I

„PI

*) Fig. 1 und 2 der Xten Tafel.

gelegener Punct, welcher nach allen Puncten der Kugeloberfläche gravitirt, von der Kugeloberfläche nach ihrem Mittelpuncte, in dem um-

„$PI : PS = IQ : SE$
„$\underline{ps : pi = (se = SE) : iq}$
„$PI.\ ps : PS.\ pi = IQ : iq$ (II
„I und II verbunden
„$PI^2.\ pf.\ ps : pi^2\ PF.\ PS = RI.\ IQ : ri.\ iq = IH.\ IQ : ih.\ iq.$
„Das Verhältnifs IH. IQ zu ih. iq drückt das Verhältnifs der zu den Bögen
„IH, ih gehörigen Kugelstreifen, welche durch die Umdrehung der beyden Fi-
„guren um die Linien pb, PB, als Axen, erzeuget werden, aus. Das Verhält-
„nifs der anziehenden Kräfte beyder Kugelstreifen gegen die Puncte P und p ist,
„nach dem Gesetz der Gravitation, aus der Gröfse der Flächen und der Qua-
„drate der Entfernungen verkehrt genommen, zusammengesetzt:
„das ist

$$\frac{IH.\ IQ}{PI^2} : \frac{ih.\ iq}{pi^2} = pf.\ ps : PF.\ PS$$

„Aus der Anziehung nach PI und pi folgt, vermöge der Zerlegung der Kräfte,
„die Anziehung in der Richtung der Durchmesser

$$= \frac{PQ}{PI} = \frac{PF}{PS} \text{ und } \frac{pq}{pi} = \frac{pf}{ps}.$$

„Daher erhält man das Verhältniss der Anziehungen der beyden Kugelstreifen
„auf die Puncte P und p in der Richtung der Durchmesser AB, ab

$$\frac{PF.\ pf.\ ps}{PS} : \frac{pf.\ PF.\ PS}{ps} = ps^2 : PS^2$$

„Auf ähnliche Weise kann der Satz von den zu den Bögen KL und kl gehöri-
„gen Kugelstreifen erwiesen werden.

„Denkt man sich nun beyde Sphären in gleiche und ähnliche Kugelstreifen
„abgetheilt, so gilt der Satz für je zwey zusammengehörige Kugelstreifen, also
„für ihre beyderseitige Summen, d. i. für die beyden Kugeloberflächen.

Gegen diesen von Newton geführten Beweis haben wir einzuwenden, dafs das Verhältnifs der verschwindenden Linien DF und df nicht unbedingt das Verhältnifs der Gleichheit sey; sondern, bey ungleichen Abständen der Puncte P und p von den Mittelpuncten der Kugeln, nur in dem Fall für das Verhältnifs der Gleichheit genommen werden dürfe, wenn die Entfernung des nächsten Punctes P von dem Mittelpuncte der Kugel, gegen den Halbmesser der Kugel, unendlich grofs gedacht wird. Um unsere Behauptung sogleich durch die Anschauung zu rechtfertigen, mögen Fig. 3 und 4 *) die beyden entgegengesetzten Fälle darstellen. Die dritte Figur nimmt den Punct P unendlich entfernt von der Oberfläche der Kugel, die vierte den Punct p in Berührung mit der Oberfläche der Kugel an.

Man

*) Fig. 3 et 4.

umgekehrten Verhältnifse des Quadrates seiner Entfernung von dem Mittelpuncte, gezogen werden.

Denkt

Man sieht hier sogleich, dafs für die gleichen, aber verschwindenden Bögen KL, kl das Verhältnifs von $DF : df = 2 : 1$ sey; und dafs, zwischen diesem Verhältnifs und dem Verhältnifse der Gleichheit, alle mögliche Mittelverhältnifse Statt finden können, wenn der Punct p von der Berührung der Oberfläche der Kugel bis in das Unendliche hinausrückt.

Durch Rechnung läfst sich der Beweis für diese Behauptung folgendergestalt führen: Es heifse der Winkel KPB *) $= P$

$$LPB = P',\ SA = R,\ AP = D;$$

so hat man

$$SD = (R + D) \operatorname{Sin} P$$
$$SE = (R + D) \operatorname{Sin} P'$$
$$SD - SE = (R + D)\ (\operatorname{Sin} P - \operatorname{Sin} P').$$

Nimmt man den Bogen KL verschwindend an, so wird, wegen des zugleich verschwindenden Winkels ESD,

$$SD - SE = DF = (R + D).\ d\ (\operatorname{Sin} P)$$

oder $DF = (R + D) \operatorname{cosin} P dP.$

Läfst man in der ersten Figur die kleinen Buchstaben ähnliche Gröfsen bedeuten, so hat man eben so **)

$$df = (r + d) \operatorname{cosin} p dp.$$

Die Sehne HK heifse $= A$, die Linie $HP = Z$, so hat man aus den bekannten Eigenschaften des Kreises

$$D : Z = Z + A : D + 2R$$
$$D^2 + 2RD = Z^2 + AZ$$
$$-\tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{D^2 + 2RD + \tfrac{1}{4}A^2} = Z$$
$$PD = Z + \tfrac{1}{2}A = \sqrt{D^2 + 2RD + \tfrac{1}{4}A^2}$$
$$\operatorname{cosin} P = \frac{PD}{PS} = \frac{\sqrt{D^2 + 2RD + \tfrac{1}{4}A^2}}{D + R}$$

eben so

$$\operatorname{cosin} p = \frac{\sqrt{d^2 + 2rd + \tfrac{1}{4}a^2}}{d + r}$$

Daher

$$DF : df = \sqrt{(D^2 + 2RD + \tfrac{1}{4}A^2)}.\ dP : \sqrt{(d^2 + 2rd + \tfrac{1}{4}a^2)} \cdot dp.$$

Es

*) Fig. 2.

**) Fig. 1.

Denkt man sich eine Kugel aus einer unzähligen Menge unendlich dünner, über einander liegender, concentrischer Kugelschichten zusammengesetzt, so gilt der Satz für jede Kugelschichte, also auch für die Summe aller Schichten, das ist, für die ganze Kugel. Es ist daher im Bezug auf die Wirkung gegen den gezogenen Punct völlig einerley, ob man sich die anziehende Kugel, oder ihre gesammte Maſse in dem Mittelpuncte vereinigt denke. Man nennt daher diesen Punct auch den Mittelpunct der Anziehung.

Setzt man nun zwey Puncte in verschiedenen Entfernungen von dem Mittelpuncte einer Kugel, so werden sich die Anziehungen der Kugel gegen beyde Puncte, verkehrt wie die Quadrate ih-

Ver-

Es ist ferner $dP : dp = \frac{KL}{KP} : \frac{kl}{kp}$,

wenn man voraussetzt, daſs die Elemente der verschwindenden Bögen KL, kl einerley Neigung gegen die Sehnen HK, hk haben, welches hier verstattet ist, weil die Sehnen zu ähnlichen und gleichen Abschnitten gehören. Setzt man weiter $KL = kl$, $R = r$, $A = a$, so erhält man für das Verhältniſs

$$DF : df = \frac{\sqrt{D^2 + 2RD + \frac{1}{4}A^2}}{KP} : \frac{\sqrt{d^2 + 2Rd + \frac{1}{4}A^2}}{kp},$$

oder weil

$$KP = \tfrac{1}{2}A + \sqrt{D^2 + 2RD + \tfrac{1}{4}A^2}$$

$$kp = \tfrac{1}{2}A + \sqrt{d^2 + 2Rd + \tfrac{1}{4}A^2}$$

ist,

$$DF : df = \frac{\sqrt{D^2 + 2RD + \frac{1}{4}A^2}}{\frac{1}{2}A + \sqrt{D^2 + 2RD + \frac{1}{4}A^2}} : \frac{\sqrt{d^2 + 2Rd + \frac{1}{4}A^2}}{\frac{1}{2}A + \sqrt{d^2 + 2Rd + \frac{1}{4}A^2}}.$$

Nimmt man in dem allgemeinen Ausdrucke D sowohl als d gegen A und R unendlich groſs an, so erhält man $DF : df = 1 : 1$.

Setzt man hingegen $D = \infty$, $d = 0$,

so erhält man $DF : df = 1 : \frac{1}{2} = 2 : 1$.

Strenge genommen hat daher Newton seinen Satz blos für den Fall bewiesen, wenn die Entfernungen der angezogenen Puncte gegen die Halbmesser der Kugeln unendlich groſs gedacht werden.

Es läſst sich indessen der newtonische Lehrsatz, wie die Folge zeigen wird, auf eine andere Weise, auch für endliche Entfernungen der angezognen Puncte demonstriren.

rer Entfernungen von dem Mittelpuncte der Kugel verhalten. Dieses Verhältnifs wird auch dann noch endlich bleiben, wenn der eine Punct die Oberfläche der Kugel unmittelbar berührt, der andere aber in irgend einer gegebenen Entfernung von der Oberfläche der Kugel liegt.

Daraus folgert ferner Newton, dafs die anziehenden Kräfte, wodurch die Erscheinungen der Cohäsion bewirkt würden, nach einem gröfsern Verhältnifse, als dem verkehrten der Quadrate der Entfernungen (etwa dem verkehrten der Würfel oder der Biquadrate etc. etc. der Entfernungen) abnehmen müfsten, weil nur dadurch begreiflich werde, wie die Anziehung bey der unmittelbaren Berührung unendlich grofs gegen die Anziehung in einer endlichen Entfernung seyn könne.

La Place hat bereits gegen die Behauptung Newton's erinnert, dafs, da die physische Continuität der Körper nur scheinbar sey, man die Durchmesser der kleinsten Theilchen gegen ihre Zwischenräume blofs verschwindend setzen dürfe, um zu begreifen, wie aus demselben Gesetze der anziehenden Kräfte die Erscheinungen der Cohäsion, so wie der allgemeinen Attraction folgen.

Wir wollen nun versuchen die Gründe darzulegen, welche uns bestimmen, der Meinung des grofsen französischen Geometers beyzutreten, und werden in dem Verfolge derselben auf den oben angeführten newtonischen Satz nochmals zurückkommen.

I.

Es bezeichne AB *) einen unendlich schmalen Cylinder von gegebener Länge, p einen Punct in der verlängerten Axe des Cylinders. Man sucht die Gröfse der Anziehung des Cylinders gegen den Punct p.

Die

*) Fig. 5.

Die Entfernung des Punctes p von dem Ende A des Cylinders heiſse = d, ein Element des Cylinders = $e^2 dx$, und die veränderliche Entfernung des Elementes von dem gezogenen Puncte p sey = $d+x$; so erhält man für die Anziehung des Elementes gegen den Punct, nach dem newtonischen Gravitationsgesetz:

$$\frac{e^2\, dx}{(d+x)^2}$$

und für die Anziehung des Cylinders

$$S\frac{e^2\, dx}{(d+x)^2} = -e^2\,(d+x)^{-1} + \text{const.}$$

Da nun das Integral für $x = o$ verschwinden soll, so ist die Constante

$$= \frac{e^2}{d}$$

und das vollständige Integral

$$\frac{e^2}{d} - \frac{e^2}{d+x} = \frac{e^2 x}{d(d+x)}.$$

Es ist aber $e^2 x$ die körperliche Masse des Cylinders. Man heiſse die Entfernung des Mittelpuncts der Anziehung des Cylinders von dem gezognen Puncte p gleich z; so erhält man auch für die Gröſse der Anziehung gegen den Punct

$$\frac{e^2 x}{z^2};$$

daher $$\frac{e^2 x}{z^2} = \frac{e^2 x}{d(d+x)};$$

folglich $$z = \sqrt{d(d+x)}.$$

Setzt man nun d gegen x verschwindend, so wird $z = o$, und die Gröſse der Anziehung unendlich.

Dieſs heiſst soviel: ein schmaler Cylinder zieht einen seine Grundfläche unmittelbar berührenden Punct (wofür man auch einen der Grundfläche gleichen verschwindend kleinen Kreis setzen darf) mit

mit einer unendlich stärkern Kraft, als jeden Punct, der sich in einer endlichen Entfernung innerhalb der Axe des Cylinders befindet.

II.

Es bezeichne tvsm *) einen abgestutzten Kegel, p einen physischen Punct innerhalb der Axe, da, wo die Spitze des abgeschnittenen Kegels hinfällt. Man denke sich einen unendlich schmalen Ring des abgestutzten Kegels mnrsvt, und suche die Gröſse der Anziehung des Rings gegen den Punct p in der Richtung der Axe des Kegels.

Zu dem Ende denke man sich die Höhe p'k des abgestutzten Kegels in sehr viele gleiche Theile getheilt, durch alle Theilungspuncte Parallellinien, und da, wo die Parallellinien die Seiten des Kegels in m, q, u. s. w., schneiden, die mit der Axe parallelen Linien mo, qn etc. gezogen; so entstehen unzählig viele kleine Rechtecke, wie mnqo eines darstellt. Es drehe sich die Figur um die Linie pk, wie um eine Axe, so beschreibt jedes kleine Rechteck, wie mnqo, einen schmalen cylindrischen Ring. Die Summe aller cylindrischen Ringe von ms bis tv bildet einen schmalen Ring des abgestutzten Kegels: oder, bestimmter zu reden, es nähert sich die Summe aller cylindrischen Ringe dem Kegelring desto mehr, — je kleiner man die Theile, und je mehrere man ihrer in der Axe des abgestutzten Kegels nimmt.

Es heiſse ferner $pp' = a$; $p'k$ oder die Höhe des abgestutzten Kegels $= x$; $km = z$; $mn = dz$; $mo = dx$, und der Winkel $mpk = y$: so hat man für den körperlichen Raum des cylindrischen Ringes mnrs

$$2 z \pi \, dz. \, dx,$$

oder, weil

$$z = (a + x) \tang y,$$
$$dz = \tang y. \, dx,$$

für eben den Raum

$$2 \pi \tang^2 y \, (a + x) \, dx.$$

Der

*) Fig. 6.

Der Zug des cylindrischen Ringes gegen den Punct p ist

$$\frac{2\ \pi\ \text{tang}^2\ y\ (a+x)\ dx}{(a+x)^2.\ \text{Sec}^2\ y},$$

und der hieraus entstehende, nach der Axe pk gerichtete Zug (welcher sich zu dem schiefen Zug = pk : pm verhält),

$$\frac{2\ \pi\ \text{tang}^2\ y.\ dx}{(a+x).\ \text{Sec}^2\ y}.\ \text{cosin.}\ y =$$

$$= \frac{\pi\ \text{tang}^2\ y.\ \text{cosin.}^3\ y}{(a+x)}.\ dx =$$

$$= \frac{2\pi \text{Sin.}^2 y.\ \text{cosin.}\ y}{(a+x)}.\ dx.$$

Hiervon das Integral so genommen, daſs es für x = o verschwindet, giebt für den Zug des Kegelringes auf den Punct p nach der Richtung der Axe

$$2\ \pi\ \text{Sin.}^2 y\ \text{cosin.}\ y\ \log.\left(\frac{a+x}{a}\right).$$

Setzt man in diesem Ausdruck a = o, so verwandelt sich der Ring des abgekürzten Kegels in den Ring des vollkommenen Kegels nmp′sr, welcher den Punct p′ in seiner Spitze unmittelbar berührt. Es heiſse der Winkel mp′k = y′, so erhält man für den Zug des vollkommnen Kegelringes gegen das ihn in der Spitze berührende Element p′, nach der Richtung der Axe p′k

$$2\ \pi\ \text{Sin.}^2\ y'\ \text{cosin.}\ y'\ \log.\left(\frac{o+x}{o}\right) = \infty.$$

Das ist, der Zug des vollkommnen Kegelrings gegen ein ihn in der Spitze berührendes Element ist unendlich groſs, im Verhältniſs des Zuges, welchen der Ring eines abgestutzten Kegels gegen einen innerhalb seiner Axe in einer endlichen Entfernung liegenden Punct ausübt. Da nun dieselben Schlüſse für je zwey zusammengehörige Ringe des abgestutzten und des vollkommenen Kegels gelten; so folgt daraus, daſs die Anziehung irgend eines Kegels gegen ein ihn in der Spitze berührendes Element unendlich groſs sey, in

Ver-

Vergleichung der Anziehung eines abgekürzten Kegels auf einen Punct innerhalb seiner Axe, mit dem er nicht in unmittelbarer Berührung steht.

Hieraus läfst sich denn ferner folgern, dafs die Anziehung von je zwey sich unmittelbar berührenden physischen Flächenelementen unendlich grofs gegen die Massenanziehung eines Körpers auf eines der Elemente sey, vorausgesetzt, dafs der Mittelpunct der Anziehung des Körpers sich in einer endlichen Entfernung von dem gezognen Flächenelemente befinde.

Zusatz.

Man mufs sich eigentlich, nach der Art, wie der Beweis des vorstehenden Satzes II geführt worden ist, unter dem Punct p′ Fig. 6 eine sehr kleine physische Kreisfläche *) von dem Halbmesser mn, so wie unter dem kegelförmigen Ring mnp′rs ein, wenn gleich sehr kleines, doch nicht absolut verschwindendes Element des Kegels denken. Alsdann wird jedes parallel mit den Seiten des Kegels genommenes Element, welches innerhalb dem äufsersten liegt, mit p′ nicht in unmittelbarer Berührung seyn, und die Anziehung eines jeden innern Elementes auf p′ wird gegen die Anziehung des äussern verschwinden.

Wollte man p′ als einen mathematischen, oder wenigstens als einen verschwindenden physischen Punct betrachten, der also auch nur mit einem verschwindenden Puncte des Körpers (dieser mag eine Gestalt haben, welche er will) in Berührung seyn kann; so würden sich daraus andere Gesetze der Anziehung, als die vorgetragenen, ergeben. Diefs mögen die folgenden Sätze erläutern.

III.

*) Fig. 6.

III.

Es sey bda *) ein Kreis, p ein Loth aus desselben Mittelpuncte aufgerichtet; innerhalb des Lothes befinde sich irgendwo der Punct p; man frägt, wie stark der Punct p von der Kreisfläche nach der Richtung pc gezogen werde?

Man stelle sich ein unendlich schmales ringförmiges Element am Rande der Kreisfläche vor. Jeder Punct des Elementes, wie a, zieht den Punct p nach einer Richtung ap, und aus der Summe aller Züge des Kreiselementes rund um auf den Punct p entsteht eine Kraft nach pc, welche sich zu dem schiefen Zug, wie pc : pa verhält. Der Halbmesser des Kreises heiſse $= x$, die Entfernung des Punctes p vom Mittelpunct $= a$. Die Gröſse des ringförmigen Kreiselementes ist

$$2\,x\,dx\,\pi,$$

der Zug desselben nach der Richtung pc

$$\frac{2\,x\,dx\,\pi}{a^2 + x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Hiervon das Integral so genommen, daſs es für $x = o$ verschwindet, giebt für den Zug des Kreises nach der Richtung pc

$$2\pi\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) = 2\pi\left(\frac{\sqrt{(a^2 + x^2)} - a}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right).$$

Setzt man $a = o$, so verwandelt sich der Ausdruck in 2π.

Hieraus folgt, daſs die Anziehung des Kreises gegen den Punct p nach der Richtung pc zwar mit der Abnahme der Entfernung des Puncts vom Kreise wachse, jedoch nicht unendlich, sondern zu jeder Anziehung in einer endlichen Entfernung ein bestimmtes Verhältniſs habe.

Zusatz 1.

Da der so eben bewiesene Satz III den Sätzen I und II gewissermaſsen zu widersprechen scheint, so wird es nicht undienlich seyn;

*) Fig. 7.

seyn, noch etwas länger dabey zu verweilen, um diesen scheinbaren Widerspruch zu lösen.

Gegen einen senkrechten Zug des Elementes c im Mittelpuncte des Kreises auf den Punct p giebt es unzählig viele schiefe Züge gegen denselben Punct. Aus der Summe aller schiefen Züge gegen den Punct p resultirt ein senkrechter Zug

$$= 2\pi \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right).$$

Der senkrechte Zug des Elementes im Mittelpuncte gegen den Punct p

$$\text{ist} = \frac{dx^2\, \pi}{a^2}.$$

Beyde Züge verhalten sich gegen einander wie

$$dx : 2a^2 \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) = \frac{1}{\infty^2} : z,$$

so lange a und x endlich sind, und z eine endliche Gröfse bezeichnet.

Es heifse $a = v$, und werde gegen x verschwindend, so verwandelt sich das Verhältnifs in

$$dx^2 : 2v^2,$$

in ein endliches Verhältnifs, weil v und dx als Unendlichkleine von derselben Ordnung angesehen werden.

Nimmt man aber selbst v gegen dx als verschwindend an, wie bey der unmittelbaren Berührung zweyer Flächenelemente der Fall ist, wo denn v sich in dv verwandeln soll; so wird der Ausdruck

$$\frac{dx^2\, \pi}{dv^2} = \infty^2;$$

das heifst, der senkrechte Zug zweyer sich berührender Elemente ist unendlich grofs gegen die Summe aller schiefen Züge eines Kreises gegen ein Element, das sich in einer endlichen Entfernung lothrecht über seinem Mittelpuncte befindet.

Zusatz 2.

Wenn gleich das Element p′ nicht lothrecht über dem Mittelpuncte des Kreises ab *), sondern lothrecht über irgend einem andern Elemente c′ des Kreises liegt, so gilt doch der Zusatz 1 auch für das Element p′. Dieſs erhellt leicht folgendermassen.

Die Züge des Kreises gegen die Elemente p und p′ werden jederzeit in einem endlichen Verhältniſse stehen, weil die anziehenden Massen dieselben, und die Entfernungen der Elemente p und p′ von den anziehenden Puncten in endlichen Verhältniſsen gegen einander sind.

Die Anziehung der Elemente c′ und p′ bey der Berührung ist aber der Anziehung der Elemente p und c bey der Berührung völlig gleich. Daher muſs auch die Anziehung der Elemente p′ und c′, bey der Berührung, unendlich groſs, in Vergleichung mit der Anziehung des Kreises ab gegen das Element p′ in einer endlichen Entfernung seyn.

Zusatz 3.

Aus den Zusätzen 1 und 2 folgt ferner, daſs die Anziehung zweyer paralleler und gleicher Kreise, in jeder endlichen Entfernung von einander, gegen die Anziehung der Kreise bey der unmittelbaren Berührung verschwinden.

IV.

Es sey adbc **) eine Kugel von gegebener Gröſse und Lage. In dem verlängerten Durchmesser ed der Kugel befinde sich irgendwo ein Punct p; man sucht die Gröſse der Anziehung der Kugel gegen den Punct nach der Richtung pd.

acb

*) Fig. 7.

**) Fig. 8.

acb sey ein auf den Durchmesser dc senkrecht gelegter Kreis der Kugel, dessen Halbmesser $cb = y$, Entfernung dc vom Pol $d = x$, Entfernung des Poles vom Puncte $p = a$; so erhält man für die Anziehung des Kreises nach der Richtung pc, wenn man in III

für a hier $a + x$,
x hier y

schreibt,

$$2\pi\left(1 - \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}}\right).$$

Man multiplicire den vorstehenden Ausdruck mit dx, schreibe darin für $y^2 = 2rx - x^2$, aus der bekannten Gleichung für den Kreis, und nehme das Integral so, daſs es für $x = o$ verschwinde: so erhält man die Anziehung eines beliebigen Kugelabschnittes gegen den Punct p; und um die Anziehung der ganzen Kugel zu erhalten, darf man in dem gefundenen Integral nur $x = 2r$ setzen. Die Rechnung stellt sich folgendermassen dar.

Das Differential der Anziehung des Kugelabschnittes ist

$$2\pi\, dx - \frac{2\pi(a+x)\,dx}{\sqrt{a^2 + 2(a+r)x}}.$$

Es kommt hier vorzüglich darauf an, das Integral von $\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+2(a+r)x}}$ zu finden, da die beyden übrigen Integrale bekannt genug sind.

Man schreibe für das obige Differential

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x}},$$

und $(\alpha+\beta x)^{-\frac{1}{2}} = z$

$$(\alpha+\beta x)^{\frac{1}{2}} = z^{-1}$$

$$x = \frac{z^{-2}-\alpha}{\beta}$$

$$dx = -\frac{2}{\beta} z^{-3}\,dz;$$

so

so erhält man

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x}} = \frac{z^{-2}-\alpha}{\beta} \cdot -\frac{2}{\beta} z^{-3} dz . z =$$

$$= -\frac{2}{\beta^2}\left(z^{-2}-\alpha\right) z^{-2} dz$$

$$= \frac{-2z^{-4}dz + 2\alpha z^{2} dz}{\beta^2}.$$

Diefs giebt

$$S \frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x}} = \frac{\frac{2}{3}z^{-3} - 2\alpha z^{-1}}{\beta^2}.$$

Drückt man hier alles wieder in x aus, und substituirt für α und β ihre Werthe, so erhält man, nach gehöriger Rechnung,

$$S \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+2(a+r)x}} = \frac{\frac{2}{3}(a^2+2(a+r)x)^{\frac{3}{2}} - 2a^2(a^2+2(a+r)r)^{\frac{1}{2}}}{4(a+r)^2}. \qquad (1.$$

Eben so erhält man

$$S \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2+2(a+r)x}} = \frac{a}{a+r}\sqrt{a^2+2(a+r)x} \qquad (2.$$

$$S\,dx \qquad = x \qquad (3.$$

Die beyden ersten Integrale von dem dritten abgezogen, alles mit 2π multiplicirt, und die beständigen Gröfsen hinzugesetzt, giebt das gesuchte Integral

$$2\pi\left\{x - \sqrt{a^2+2(a+r)x}\left(\frac{\frac{2}{3}(a^2+2(a+r)x)+2a^2+4ar)}{4(a+r)^2} + a\frac{(\frac{8}{3}a^2+4ar)}{4(a+r)^2}.\right\}$$

Um die Anziehung der gesammten Kugel zu finden, mufs man $a = 2r$ setzen. Thut man diefs, bringt in der Formel alles unter eine Benennung, rechnet aus, und streichet weg, was sich aufhebt; so erhält man für die Anziehung der Kugel gegen den Punct p

$$\frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{(a+r)^2}.$$

Es

Es ist aber $\frac{4}{3}r^3\pi$ der körperliche Inhalt der Kugel, und $a+r$ die Entfernung des Punctes p von dem Mittelpuncte der Kugel. Man kann sich daher die gesammte anziehende Masse der Kugel in ihrem Mittelpuncte vereinigt denken.

Diefs ist der im Eingang unserer Abhandlung erwähnte Satz Newton's.

Zusatz 1.

Setzt man in dem allgemeinen Ausdruck für die Anziehung der Kugel $a=0$, so verwandelt er sich in

$$\frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{r^2};$$

das ist, es verhalten sich die Anziehungen einer Kugel gegen zwey Puncte, wovon der eine sich in einer Entfernung a von der Oberfläche der Kugel, der andere in der Oberfläche befindet, wie

$$\frac{1}{(a+r)^2} : \frac{1}{r^2}.$$

Setzt man im Gegentheil r gegen a verschwindend, so geht der allgemeine Ausdruck in den $\frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{a^2}$ über.

Denkt man sich nun die Entfernung a veränderlich, und bis zum Verschwinden abnehmend; so wächst die Anziehung mit der abnehmenden Entfernung, und wird für eine verschwindende Entfernung, die unsern Sinnen als eine unmittelbare Berührung erscheint, unendlich grofs. Diefs ist der von la Place aufgestellte Satz.

Zusatz 2.

Der Beweis IV des newtonischen Lehrsatzes gründet sich auf die Voraussetzung, dafs die Anziehung eines verschwindenden Kugelabschnittes auf einen Punct aufserhalb unbedingt, gegen die Anziehung eines endlichen Segmentes gegen denselben Punct, verschwinde;

denn

denn unter dieser Voraussetzung sind die beständigen Gröfsen der Integrale gefunden worden. Da nun die Voraussetzung, wie billig, in Zweifel gezogen werden mufs, wenn das verschwindende Segment den gezogenen Punct unmittelbar berühret; so lassen sich gegen den Beweis IV des newtonischen Lehrsatzes von der Anziehung der Sphären dieselben Erinnerungen machen, welche wir in den Zusätzen 1 und 2 des Satzes III gemacht haben.

Wir glauben daher, trotz des newtonischen Lehrsatzes, die Behauptung erwiesen zu haben: dafs die Anziehung zweyer sich unmittelbar berührender Elemente, gegen eine jede Anziehung eines endlichen Körpers, welcher sich in einer endlichen Entfernung von dem gezognen Elemente befindet, unendlich grofs sey; *und dafs daher die Erscheinungen der Cohäsion, als Wirkungen einer Flächenkraft, unabhängig von den Massenanziehungen der Körper existiren können, obgleich beyde sich auf eine und dieselbe Grundkraft der Materie, welche in endlichen sowohl, als in unendlich kleinen und unendlich grofsen Entfernungen, nach einem Gesetze wirkt, zurückführen lassen.*

Schlufsbemerkung.

Sollte es uns nicht gelungen seyn, die aufgestellte Frage befriedigend gelöset zu haben, so wollen wir uns wenigstens mit dem Bewufstseyn begnügen, die Aufmerksamkeit der Naturforscher auf einen so wichtigen Gegenstand auf's neue erregt, und eben dadurch zur endlichen Aufklärung desselben mitgewirkt zu haben.

Wir können indessen nicht umhin, unter der Voraussetzung, dafs der Beweis unsers Satzes fest stehe, am Schlufs dieser Abhandlung noch eine Bemerkung hinzuzufügen, wodurch sich, wie wir glauben, eine Aussicht eröfnet, warum die chemischen Wirkungen,

gen, nach Umständen, mehr oder weniger abhängig von der allgemeinen Massenanziehung und den Wirkungen der Cohäsion erscheinen.

Angenommen, die chemischen Wirkungen seyen Folgen von Anziehungen, welche in sehr kleinen, aber nicht absolut verschwindenden, Entfernungen erfolgen: so kommt es nun darauf an, in welchem Verhältnifse die chemisch auf einander wirkenden Theilchen zu ihren Entfernungen von einander stehen. Denkt man sich die Theilchen gegen ihre Entfernungen verschwindend, so tritt der von La Place aufgestellte Satz ein: die chemische Wirkung der sich zunächst liegenden Theilchen erfolgt unabhängig von der allgemeinen Massenanziehung. Nimmt man hingegen die Gröfse der auf einander wirkenden Theilchen zu ihren Entfernungen in einem endlichen Verhältnifse an, so gilt Newton's Satz: die chemische Anziehung ist von der allgemeinen Massenanziehung abhängig, und wird durch dieselbe modificirt. Denkt man sich endlich, drittens, durch die chemische Anziehung der ersten Art die verschwindenden Theilchen bereits in gewifse Gruppen geformt, welche nicht gerade sphärisch sind, sondern den ihnen zunächst liegenden Theilchen gewifse Flächen darbiethen (mit einem Worte, so etwas wie Hauy's molecules constituantes des crystaux); so wird nun die Flächenanziehung vorzüglich thätig werden, und es können durch die Kraft der Cohäsion und Crystallisation Ausscheidungen und Verbindungen erfolgen, welche durch die chemische Anziehung allein nicht bewirkt worden wären.