Kristallprojektion und WULFFsches Netz.

Von H.TERTSCH, Wien.

Die Darstellung von Kristallen kann je nach dem verfolgten Zweck in zweifacher Art erfolgen, 1.) in Trachtbildern, wo das Aussehen der Kristalle hinsichtlich Form und Grösse ihrer Flächen wiedergegeben wird, 2.) in Winkelprojektionen, die unter Ausserachtlassung der gegebenen, einmaligen Form möglichst eindeutig die gegenseitigen Lagen- und Winkelverhältnisse der begrenzenden Flächen zum Ausdruck bringen. So verlockend und anschaulich die einfache Bilddarstellung ist, so wenig vermag diese genaue, mathematisch einwandfreie Auskunft über den Bau, die Symmetrie des Kristalles zu geben. Man beachte nur, daß in den allerseltensten Fällen sich die Kristalle ohne Wachstumsstörungen, also unverzerrt bilden, und es ist schwer, aus dem Bilde eines solchen verzerrten Kristalles den wahren Bau herauszuschälen (Abb.1). Vielfach taucht sogar die Frage auf, wie es überhaupt möglich sei, kristallographisch gleiche Flächen als solche zu erkennen, wenn sie am Kristall selbst infolge der Wachstumsstörungen die verschiedensten Formen und Größen annehmen.

Hier hilft nur die alte Erfahrung, die sich auch theoretisch leicht verstehen läßt, daß Flächen, die am unverzerrten Kristall gleichwertig sind (spiegelbildlich, oder deckbar gleich), gegen ihre Nachbarflächen auch der Reihe nach die gleichen Neigungswinkel aufweisen und im Idealfall auch gleiche Form und Grösse besitzen. Man kann also auch aus verzerrten Formen den Modellkristall ableiten, wenn man die Neigungswinkel der Flächen untereinander kennt und deren Gleichheit oder Ungleichheit in Betracht zieht. In der Tat hatte auch die erste, messende Behandlung von Kristallen durch Nik. STENSEN (STENO) mit einem Schlag zwei grundlegende Tatsachen deutlich gemacht, nämlich das eigentümliche Anlagerungswachstum der Kristalle durch parallelschichtigen Ansatz neuer Bausteine an die Oberfläche und ausserdem die Erkenntnis, daß für jedes Mineral im Kristallzustand die begrenzenden Flächen unter ganz bestimmten, charakteristischen Winkeln gegeneinander geneigt sind, die auch in der verzerrtesten Kristallform immer unverändert erhalten bleiben (Gesetz der Winkelkonstanz), denn bei parallelschichtigem Wachstum, wo sich also die Flächen parallel zu sich verschieben, können zwar die Formen verzerrt werden, nicht aber die Winkel zu den Nachbarflächen. Da also das "Gesetz der Winkelkonstanz" die gesamte Kristallwelt beherrscht und auch für den verzerrtesten Kristall gilt, ist es verständlich, daß man bei Kristallen weniger den bildhaften Eindruck festzuhalten trachtet, sondern einen Weg sucht, die kennzeichnenden Winkelverhältnisse möglichst einfach darzustellen. Man suchte also nach geeigneten Projektionsmethoden für die gültigen Winkelwerte, denn die Bilddarstellung läßt sich aus den bekannten Winkelverhältnissen unschwer ableiten, aber nicht umgekehrt, d.h. es ist kaum möglich, aus einem Kristallbild unverfälscht alle kennzeichnenden Winkel zu erschliessen.

Um eine solche Winkelprojektion übersichtlich durchführen zu können, war es notwendig, die gegenseitigen Lagen der begrenzenden Flächen in einer anderen Form festzustellen, wobei die Form und Grösse der Flächen nicht mehr in Betracht gezogen wird. Das geschieht einfach dadurch, daß man die Winkellage und Verteilung der Flächennormalen statt der Flächen selbst verwendet. Da von einem Punkt aus nur eine Normale auf eine Ebene gefällt werden kann, ist sofort klar, daß man die vom Mittelpunkt des Kristalles auf die begrenzenden Flächen gezogenen Normalen als eindeutigen Ersatz für die Flächen selbst verwenden kann. In Abb.2 sind die einfachen Winkelbeziehungen zwischen Flächen- und Normalenwinkel leicht zu überblicken. Die Normalenwinkel sind zu den Flächenwinkeln supplementär. Damit werden die zweidimensionalen Flächen mathematisch einwandfrei durch eindimensionale Gerade, die Normalen, ersetzt. Nun gilt es, die nach allen Raumrichtungen vom Mittelpunkt ausstrahlenden "Normalen" in ihrer gegenseitigen Lage abzubilden. Das gelingt, wenn wir konzentrisch um den Kristallmittelpunkt eine Kugel legen und die einzelnen Normalen (Kugelradien) bis zum Durchstoß mit der Kugelfläche verfolgen. Dadurch bildet sich jede Normale in dem Durchstoßpunkt ab und es handelt sich nur darum, die mit den Durchstoßpunkten besäte Kugelfläche geometrisch richtig abzubilden.[1) 1a)]

Es ist das die gleiche Aufgabe wie bei der Darstellung der Sternörter in der Astronomie und die dafür von HIPPARCH im zweiten Jahrhundert v.Chr. entwickelte "stereographische Projektion" ist auch für die Zwecke der Kristallbeschreibung in hervorragendem Maße geeignet, denn sie besitzt zwei Vorteile, die gerade für die Projektion der charakteristischen Winkel von unschätzbarer Bedeutung sind. Diese Projektionsart ist nämlich winkeltreu d.h. aus der Projektion kann man die Winkel unverzerrt ablesen und sie hat

---

1) Zu den gleichen Punkten käme man auch, wenn man die Kristallflächen parallel zu sich selbst so weit vorschiebt, bis sie die Kugeloberfläche tangieren.

1a) In der Praxis braucht der "Mittelpunkt des Kristalls" weder bekannt sein, noch bestimmt werden. An Stelle der gedanklichen Fällung von Flächennormalen vom Kristallmittelpunkt aus, ist der Vorgang vielleicht noch leichter vorstellbar, wenn der Kristall - er kann auch stark verzerrt sein - irgendwo um den Mittelpunkt der Kugel gedacht wird und die Normalen auf alle seine Flächen vom eindeutig definierten Kugelmittelpunkt ausstrahlen. Eine Parallelverschiebung des Kristalls ändert nichts, für jede Kristallfläche gibt es vom Kugelmittelpunkt aus bloss eine Flächennormale, bloss einen Durchstoßpunkt auf der Kugeloberfläche. H.Mx.

weiters die Eigenschaft, daß alle auf der Projektionskugel gezogenen Kreise auch in der Projektions-(Zeichen-)Ebene als Kreise erscheinen, also in aller Schärfe mit dem Zirkel gezogen werden können. Die "stereogr. Proj." ist also wie keine andere für kristallographische Aufgaben geeighet und das "WULFFsche Netz" ist nur eine Anwendung davon, wodurch die Arbeiten in dieser Projektionsart erleichtert werden.

Zunächst müssen wir uns aber mit den Grundlagen der stereogr. Proj. vertraut machen. Es sei ein Kristall gegeben, um dessen Mittelpunkt wir konzentrisch die Projektionskugel legen (siehe S. 232, Fußnote 1a)). Vom Mittelpunkt aus werden Normale auf alle Flächen gefällt und mit der Kugeloberfläche zum Durchstoss gebracht. Für die Fläche (P) (Abb.3) erreicht die Normale aus M die Kugel im Punkt P. Man bezeichnet diesen Punkt als den Flächenpol. Die Kugelfläche mit den verschiedenen Flächenpolen soll nun in der Projektions-(Äquator-)Ebene abgebildet werden. Die dazu senkrechte Richtung (NS) ist die Projektionsachse und ein Punkt dieser Projektionsachse soll als Projektionszentrum dienen, von dem aus die "Sehstrahlen" zu den einzelnen "Polen" der Kugelfläche laufen. Das für die stereogr. Proj. gültige Projektionszentrum ist nun der Südpol (S), wie wir ihn, in Anlehnung an die Kartendarstellung nennen wollen.

Zieht man von S aus die Sehstrahlen zu einzelnen Flächenpolen der Projektionskugel, dann wird die Projektions-(Äquator-)Ebene in bestimmten Punkten durchstossen (P' auf dem Sehstrahl SP) und diese Punkte der Zeichenebene sind die stereogr. Projektionen der Flächenpole. Steht der Flächenpol P um den Winkel ρ von der Projektionsachse NS ab, so ist der zu P', also zu dem Projektionspol führende Sehstrahl aus S um den zugehörigen Peripheriewinkel $\rho/2$ gegen die Projektionsachse geneigt. Die Zeichenebene schneidet die Projektionskugel im Äquator. Alle Flächenpole, die im Äquator liegen, bilden sich in sich selbst ab und der Schnitt zwischen Proj.-Ebene und Kugel (Äquator) ist der Grundkreis. Es ist sofort ersichtlich, daß sich alle Flächenpole der "Nord"-Hälfte der Kugel innerhalb des Grundkreises abbilden, dagegen jene der "Süd"-Hälfte ausserhalb dieses Kreises, die Flächenpole des Äquators liegen im Grundkreis selbst, ein allenfalls in N liegender Flächenpol bildet sich im Mittelpunkt M des Grundkreises ab.

Während also die Abbildung der Nordhälfte streng im Rahmen des Grundkreises bleibt, reicht ausserhalb das Projektionsfeld der Südhälfte allseits ins Unendliche. Der Südpol selbst bildet sich ringsum im Unendlichen ab. Praktisch rücken die Projektionspole der Südhälfte so rasch vom Grundkreis nach aussen ab, daß man Flächenpole, die mehr als etwa 130° - 140° vom N-Pol abstehen, nicht mehr gut darstellen kann. Dem kann man dadurch abhelfen, daß man die Südhälfte aus dem Punkt N (Nordpol) projiziert, genau so wie man die Nordhälfte aus S projiziert. Dann bleiben auch die Projektionspole der Südhälfte innerhalb des Grundkreises, doch ist es notwendig, nun die "Ober"- und "Unter"-seitenpole durch verschiedene Zeichen zu unterscheiden.

Bevor wir daran gehen, die Anfertigung einer stereogr.Proj. aus bekannten Flächen-(Normalen-)Winkeln zu beschreiben, muß einer der wichtigsten Besonderheiten in der Verteilung der Kristallflächen gedacht werden, nämlich der Bildung von Flächen-Zonen. Je flächenreicher ein Kristall ist, desto auffälliger ist die Tatsache, daß an ihm mehrfach ganze Reihen von Flächen zu beobachten sind, die untereinander parallele Kanten besitzen, die also alle dieser einen Richtung ("Zonenachse") parallel sind. Fällt man aus dem Kristallmittelpunkt auf alle Flächen einer Zone die zugehörigen Normalen, so ist sofort ersichtlich, daß diese alle in ein und dieselbe Ebene ("Zonenebene") hineinfallen, wie die Speichen eines Rades, und die auf der Kugeloberfläche liegenden Flächenpole müssen darum alle auf dem gleichen Grosskreis ("Zonenkreis") liegen, der durch den Schnitt der zentralen Zonenebene mit der Projektionskugel gegeben ist. Da jede Fläche von verschiedenen Kanten umgeben ist, bedeutet das, daß sich die Flächenpole im Schnitt mehrerer (mindestens zweier) Zonenkreise finden müssen, wodurch das Aufsuchen dieser Flächenpole und damit auch ihrer Projektionspole sehr erleichtert wird. Umgekehrt liefert die Verbindung zweier Flächenpole durch einen Grosskreis (dessen Mittelpunkt ja im Kristallzentrum liegt), die Gewinnung eines neuen Zonenkreises. Zwei Zonen bestimmen die Lage eines Flächenpoles, zwei Flächenpole die Lage eines Zonenkreises. Auf dieser Grundlage baut sich die ganze Projektion eines Kristalles auf.

Wie schon bemerkt, projizieren sich in der stereogr.Proj. die Kreise auf der Projektionskugel gleichfalls als Kreise, wenn auch nicht immer mit dem Halbmesser der Kugel. Ein einziger Grosskreis, nämlich der Äquator bildet sich in der Zeichenebene mit dem Radius der Proj.-Kugel ab. Ein Grosskreis, der durch NS geht, also senkrecht auf der Zeichenebene steht, entartet zu einer Geraden, zu einem Durchmesser des Grundkreises (AB), d.h. zu einem Kreis mit $r = \infty$. Über dem gleichen "Zonendurchmesser" geneigt liegende Großkreise (APB) projizieren sich als Kreisbögen (AP'B) (Abb.4), deren Halbmesser dem Kugelradius immer näher kommen, je mehr der Zonenscheitel P an den Äquator (Grundkreis) heranrückt. Auf jeden Fall sind es aber Kreisbögen, also mit dem Zirkel ziehbar.

Häufig ordnen sich auf der Proj. Kugel Flächenpole auch so, daß mehrere von ihnen von einem gegebenen Flächenpol um den gleichen Winkel (Bogen) abstehen, d.h. sie liegen auf einem Kleinkreis, dessen Ebene nicht durch den Kugelmittelpunkt geht. Auch diese Kleinkreise leisten bei der Anfertigung einer Kristallprojektion auf stereogr. Grundlage die wertvollsten Dienste. Auch hier gelten für den Kleinkreis selbst und dessen Projektion verschiedene Halbmesser. Vor allem fällt der sphärische Mittelpunkt des Kleinkreises (O in Abb.5) bzw. dessen Projektion (O') fast nie mit dem geometrischen Mittelpunkt des mit dem Zirkel gezogenen Kleinkreises zusammen, worauf später noch zurückgekommen wird. Während alle

Großkreise der Kugel gleiche Grösse besitzen, kann die Grösse (Halbmesser) der Kleinkreise alle Werte von Null bis zum Kugelradius (im Äquator) annehmen. Es ist das genau das gleiche Verhältnis, wie bei dem Gradnetz der Erde, wobei die Meridiane den Großkreisen, die Breiten- oder Parallelkreise den Kleinkreisen entsprechen.

Da nun die Konstruktion von Grosskreisen mit verschiedener Neigung gegen NS und für Kleinkreise mit ihren stark wechselnden Radien zwar nicht schwer, aber gelegentlich doch langwierig ist, schuf G. WULFF[2)] in Angleichung an das Gradnetz der Erde ein Netz, in dem über dem gleichen Durchmesser von 2 zu 2 Graden Grosskreise in stereogr. Proj. eingetragen sind und rund um die beiden "Pole", gleichfalls in 2° Abstand die Klein-(Parallel-) Kreise (Abb.6). Um dieses Netz für möglichst viele Projektionen gebrauchen zu können, zeichnet man auf einer Pause, die konzentrisch über das Netz gelegt wird. Es ist dabei sorgfältig darauf zu achten, daß der Projektions-Mittelpunkt und das Zentrum des Netzes auch bei den vielfach nötigen Drehungen immer genau übereinander fallen. Am sichersten und ohne Beschädigung des Netzes geschieht das dadurch, daß man die Enden des Pol- und Äquator-Durchmessers auf der Pause durch ⊤ -Zeichen genau bezeichnet und den Projektionsmittelpunkt selbst entweder durch ein Ringlein oder ein Quadrat einrahmt. Bei jeder beliebigen Drehung des Netzes gegen die Pause müssen die Durchmesserenden (⊤) immer genau auf dem Grundkreis des Netzes gleiten und der Projektionsmittelpunkt immer im Zentrum des Ringes oder Quadrates bleiben.

Unsere Aufgabe ist es nun, ein solches Netz zur Anfertigung von stereogr. Kristallprojektionen auszunützen.

Fortsetzung folgt.

---

2) Die Erweiterung über den Grundkreis hinaus auf die Südhälfte brachte H. MEIXNER heraus. (Radex-Rundschau, 1953, 51-53, mit $r = 5$ cm Netz bis $\varrho = 142^\circ$)

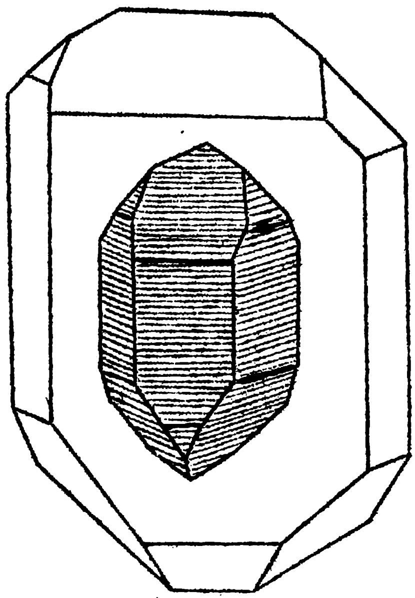

Abb.1

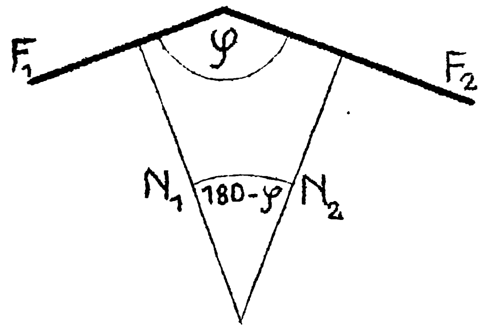

Abb.2

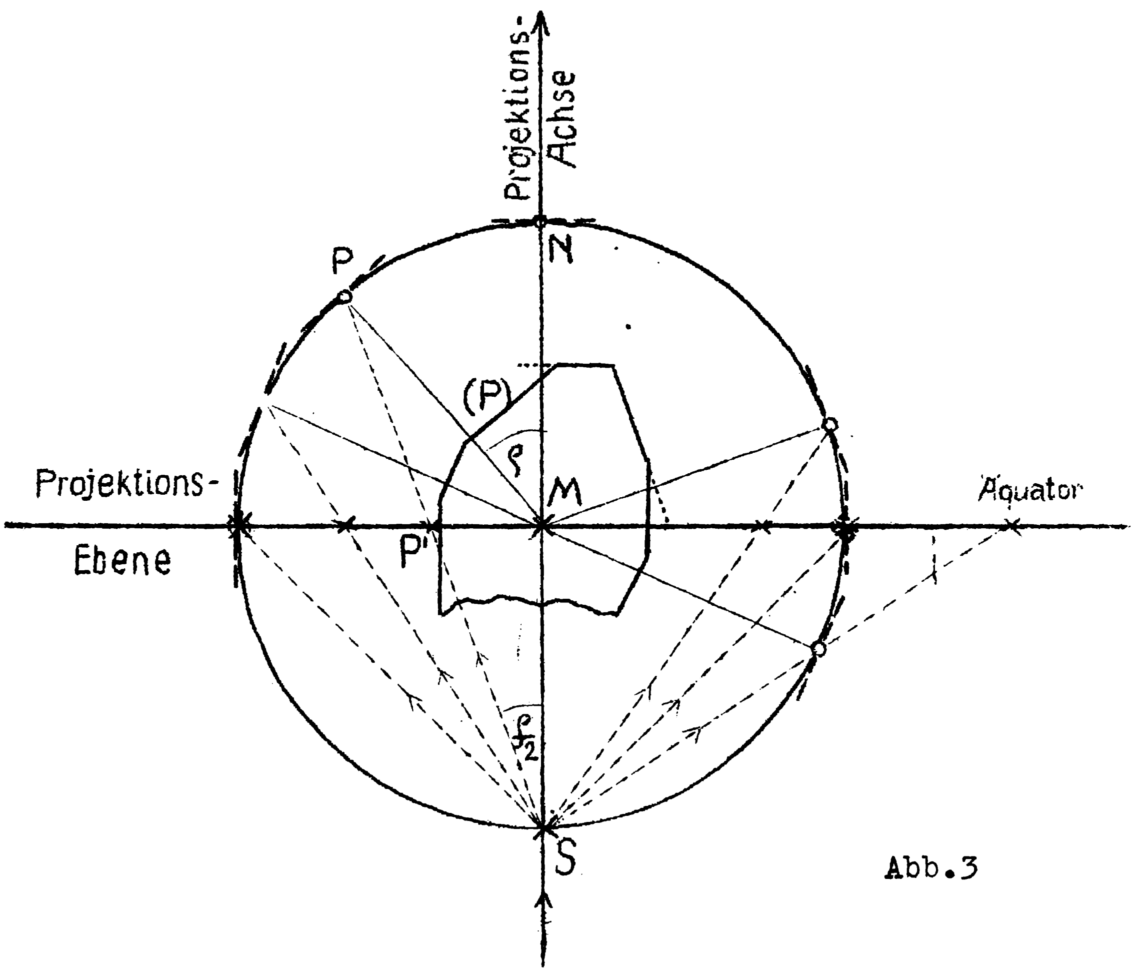

Abb.3

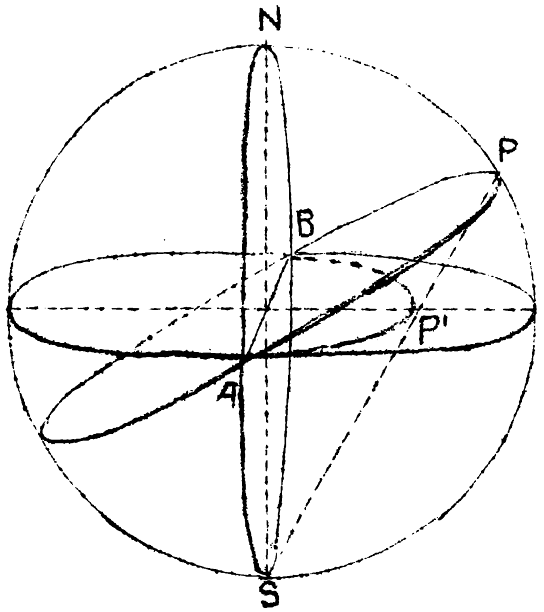

Abb.4

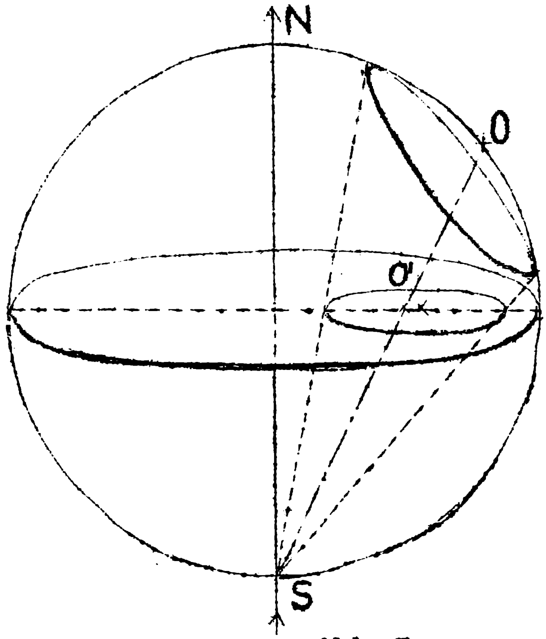

Abb.5

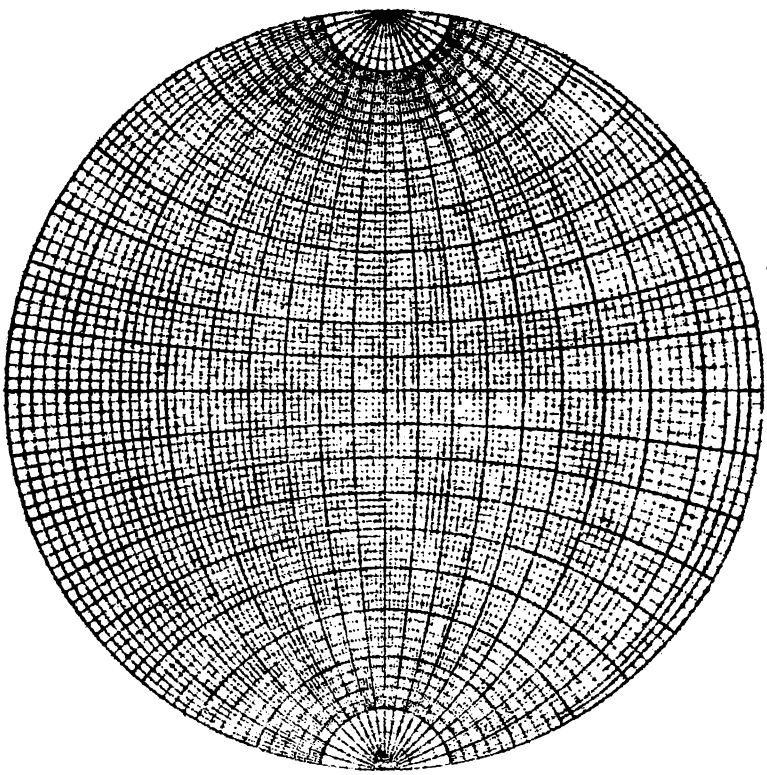

Abb.6