Kristallprojektion und WULFFsches Netz II.[1)]

Von H. TERTSCH, Wien.

Wir wählen einen stengeligen Gips-Kristall (Abb. 7), an dem leicht die tafeligen, ausgezeichneten Spaltflächen b (010) zu erkennen sind. In der Stengelrichtung findet man dann noch die prismatischen Flächen m (110) und schräg abgeschnitten wird die Säule durch die Flächen l (111). Mit irgend einem Goniometer[2)] wurden die Winkel bm = 55 3/4° und bl = 71 3/4° gemessen. Es ist auch gut, den Winkel zwischen zwei benachbarten mm-Flächen (68½°), bzw. ll-Flächen (36½°) zu messen. Jedenfalls benötigen wir aber noch den Winkel zwischen m und l (110-111) = 49°. Schon bei den Winkelmessungen fällt auf, daß ∢ bm oder ∢ bl gleich bleiben, ob man sie auf der rechten oder linken Seite des Kristalles mißt, bzw. daß ∢ bm + ∢ mm + ∢ bm als Summe genau 180° geben. Diese Flächen, die alle einer Zone angehören, verteilen sich also symmetrisch zu einer Ebene, die mit b (010) parallel läuft.

Diese ausgezeichnete Zone soll vertikal bestellt werden (Vertikalzone) und als Grundzone dienen. Die Flächenpole dieser Grundzone müssen also alle im Grundkreis liegen und wir haben nur mit Hilfe des Netzes im Grundkreis die entsprechenden Winkelwerte abzustecken. Dazu legen wir die beiden Durchmesser des Netzes in die NS-und OW-Richtung und tragen im Grundkreis im O-Ende des Durchmessers den Flächenpol b (010) ein, dann liegt am anderen (W-)Ende des Durchmessers die parallele Gegenfläche b ($0\bar{1}0$). Wir zählen nun im Grundkreis nach vorne und hinten jeweils die ∢ bm ab und erhalten damit die vier Punkte des Grundkreises, die die m-Pole darstellen.

Nun ist der Flächenpol von l zu bestimmen. Es handelt sich dabei auf der Kugeloberfläche um die gleiche Konstruktion, wie bei der Zeichnung eines Dreieckes aus den drei Seiten. Die "Grundseite" bm ist schon gegeben. Der Flächenpol l muss auf Kleinkreisen liegen, die von b um den Winkel bl und von m um den ∢ lm abstehen. Da beide sphärischen Zentren für diese Kleinkreise im Grundkreis liegen (b und m), benützen wir die "Parallelkreise" des Netzes, um diese zu ziehen. Dazu verlegen wir den Poldurchmesser des Netzes zunächst einmal in die OW-Richtung, so daß der Pol selbst in b liegt. Dann suchen wir im Netz jenen Parallelkreis, der von b um den verlangten Winkel (71 3/4°) absteht. Dieser Kleinkreis ist zwar im Netz nicht selbst verzeichnet, doch läßt er sich leicht zwischen den Breitekreisen für 70° und 72° interpolieren und wird auf der Pause mindestens im vorderen Quadranten sorgfältigst nachgezogen. Dann kommt der Pol des Netzes in die Lage von m und man zieht in gleicher Weise

---

1) Fortsetzung des gleichnamigen Aufsatzes aus der Folge 22 des "Karinthins" vom 15.Mai 1953, S. 231-237.

2) Verwendet man ein Reflexionsgoniometer, dann erhält man unmittelbar die zur Projektion nötigen Normalenwinkel. Ein Anlegegoniometer liefert dagegen die Flächenwinkel selbst, deren Supplemente (s. Abb.2) dann als Normalenwinkel verwendet werden müssen.

jenen Parallelkreis nach, der von m um 49° absteht. Beide Kleinkreise schneiden sich in dem Punkt, der den Flächenpol von l darstellt. Um den symmetrisch dazu gelegenen l-Pol zu erreichen, lassen sich mehrere Wege einschlagen. Entweder man wiederholt die beiden Kleinkreis-Eintragungen mit den links liegenden Flächen b und m, oder man verwendet die Zone [bllb] . Aus dem Kristallbild ist ersichtlich, daß diese Flächen sich jedenfalls in parallelen Kanten schneiden, also einer Zone angehören. Diese Zone ist in der Projektion aber schon festgelegt, da wir 2 (3) Punkte dieses Gross-(Meridian-) Kreises schon kennen, b und l, bzw. die Gegenfläche b. Wir drehen das Netz also wieder so, daß b und deren Gegenfläche auf die Netzpole zu liegen kommen. Dann ist es leicht, jenen Gross-(Meridian-)Kreis nachzuzeichnen, der durch l hindurchgeht. Die zweite l-Fläche muß dann von dem (jetzt vertikal liegenden) Äquatordurchmesser genau so weit nach links abstehen, wie die zuerst bestimmte Fläche nach rechts. Diese Winkelentfernung längs eines Großkreises kann man mit Hilfe der vom Grosskreis durchschnittenen Parallelkreise leicht abzählen, wie man die "Breite" längs eines Meridiankreises bestimmt. Bis zum "Äquator" sollen es 18 1/4° sein, d.h. der Winkelabstand der beiden oben sichtbaren l-Flächen ist dann $36\frac{1}{2}°$, was eine ausgezeichnete Bestätigung für die Winkelmessungen, bzw. die Genauigkeit der Konstruktion gibt.

Man erhält ein Projektionsbild, das deutlich eine und nur eine Symmetrieebene aufweist, die von vorne nach hinten zieht. Das entspricht der Symmetrie des monoklinen Systemes. Es ist üblich (wenn nicht besondere Gründe für eine andere Lage sprechen), die Projektion eines monoklinen Kristalles so anzulegen, daß die Längsflächen b (010) rechts und links in den Enden eines Netzdurchmessers liegen, dann müssen die Flächenpole für die Querfläche (100) und die Basisfläche (001) in der Symmetrale, im anderen Netzdurchmesser, liegen. Die Querfläche gehört der Vertikalzone an, befindet sich also in der Grundzone dort, wo diese die Symmetrale schneidet. Im gegebenen Falle ist sie zwar am Kristall nicht entwickelt, aber sie ist kristallographisch möglich (mit x bezeichnet). Es fehlt nur noch die Lage der dritten Endfläche, der Basis (001). Aus dem Zonenverband ergibt sich die allgemein gültige Regel: Endfläche, Grundpyramide und Grundprisma liegen immer in der gleichen Zone. Da wir dreierlei Endflächen haben, muß es auch dreierlei Hauptprismenzonen geben. Eine davon läßt sich aus der Projektion leicht entnehmen, nämlich [110-111-001] , wobei allerdings die Lage der möglichen Basis noch nicht bekannt ist, aber rasch bestimmt werden kann. Wir legen dazu durch m(110) und l(111), bzw. den Gegenpol m($\bar{1}\bar{1}0$) einen Meridiankreis des Netzes, wobei die Netzpole in (110) und ($\bar{1}\bar{1}0$) zu liegen kommen. Dieser Großkreis wird nachgezogen. Das Gleiche machen wir mit ($1\bar{1}0$), ($1\bar{1}1$) und ($\bar{1}10$). Beide Großkreise müssen sich im gesuchten Flächenpol (001) schneiden, der gleichzeitig in der Symmetrale liegen muss.

Der neu gewonnene, mögliche (001)-Pol befindet sich nicht im Projektionsmittelpunkt M, sondern weicht gegen vorne davon ab, diese Basisfläche ist also gegen vorne geneigt (monoklin) und wenn wir die zugehörige Achsenzone [010-001-010] mit Hilfe des Netzes zeichnen wollen (Netzpole nun O-W), zeigt sich diese als Großkreisbogen, der um 9° von der Mitte gegen vorne geneigt ist. Diese Exzentrizität läßt sich mit grosser Sicherheit an dem (nun von vorne nach hinten ziehenden) Äquator des Netzes mit Hilfe der Meridiankreise abzählen. ("Länge"). Die Flächenpole (100) und (001) stehen also 81° von einander ab. Da die aus der Projektion ablesbaren Normalenwinkel supplementär zu den Flächenwinkeln sind, müssen die möglichen Endflächen (100) und (001) unter dem Winkel (180°-81°) = 99° (genau 98°58') gegeneinander geneigt sein, das ist aber gleichzeitig der für das monokline Grundparameterverhältnis des Gipses kennzeichnende $\Delta\beta$.

In ähnlicher Weise liefert die Hauptprismenzone [010-111-$\bar{1}\bar{1}$1-0$\bar{1}$0] im Schnitt mit der "Achsenzone" [100-001-$\bar{1}$00] das Grundprisma (101), eine weitere mögliche Fläche.

Wie deutlich erkennbar, gibt eine solche Projektion nicht nur Auskunft über die tatsächlich beobachteten Flächenverhältnisse, sondern gestattet auch die Ableitung anderer, morphologischer Beziehungen, wenn man nur den Zonenverband möglichst weitgehend verfolgt und ausnützt. Gerade hiefür ist aber das WULFFsche Netz sehr geeignet, weil es ohne jede Mühe gestattet, mit Hilfe seiner Meridiankreise die Zonen zwischen den verschiedensten Flächen festzulegen, bzw. auf solchen Zonenkreisen den (Normal-) Winkelabstand beliebiger Flächen abzuzählen. So kann man z.B. auch eine Zone durch die mögliche (100) und (111) hindurchlegen (zu ($\bar{1}$00) führend) und liest auf dieser den Winkel (100-111) mit 54° ab. Die aus der Projektion an den Zonenkreisen mit dem WULFFschen Netz ablesbaren Winkelabstände kann man mit dem Goniometer leicht nachprüfen und so eine ausgezeichnete Kontrolle für die Richtigkeit der Projektion, bzw. die Genauigkeit der Winkelmessungen gewinnen.

Es ist leicht einzusehen, daß man auch umgekehrt aus dem gegebenen Grundparameterverhältnis eine Projektion anfertigen kann deren Gültigkeit für einen fraglichen Kristall leicht durch geeignete Winkelmessungen nachgeprüft werden kann. Grundlegend ist vor allem die Kenntnis der Lage der Endflächen (100, 010, 001). Bei triklinen Kristallen legt man wieder die Zone [100-010] in den Grundkreis und bestimmt aus den bekannt vorausgesetzten Winkeln (100-001) und (010-001) die wirkliche Lage des Poles (001). Im monoklinen System liegen (100) und (010) in den Polen der beiden Netzdurchmesser und (001) in der Symmetrale, um den Winkel (180°-β) gegen vorne geneigt. In allen Systemen mit rechtwinkeligen Bezugsachsen, also rhombisch, tetragonal und kubisch, sind die Endflächen ein für alle Male festgelegt in den Polen der beiden Netzdurchmesser und im Mittelpunkt der Projektion (001).

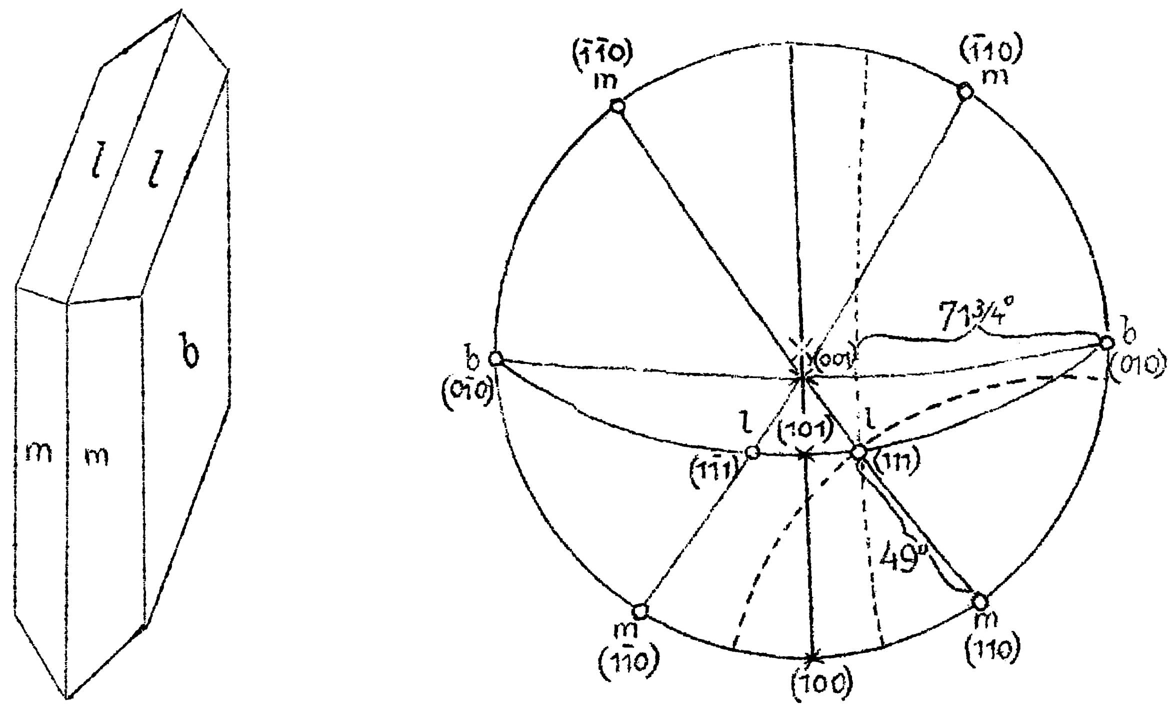
l
l
b
m
m
(1̄1̄0)
m
(1̄10)
m
b
(01̄0)
(001)
71¾°
b
(010)
l
(1̄01)
l
(11̄1)
(111)
49°
m
(11̄0)
(1̄00)
m
(110)

Abb. 7

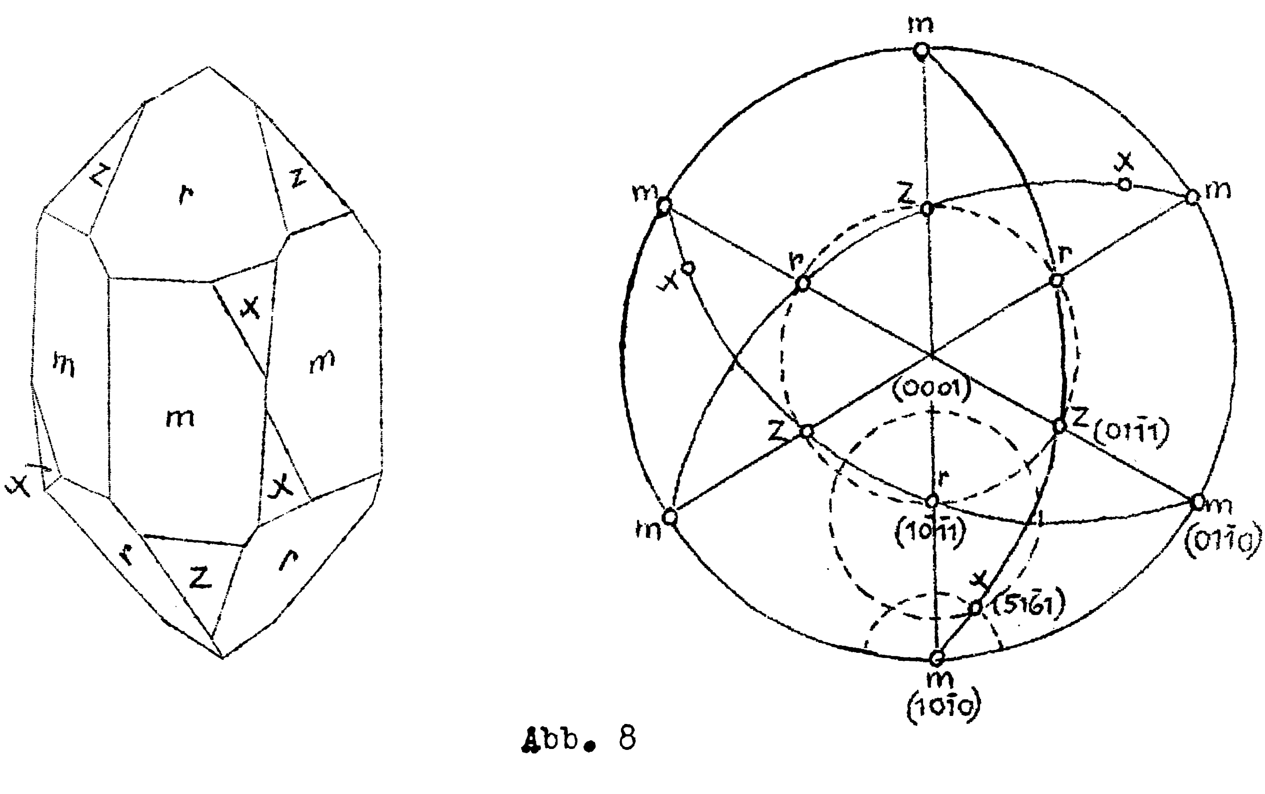
z
r
z
x
m
m
m
x
x
r
z
r
m
x
m
m
z
r
r
x
(0001)
z
z
(011̄1)
r
(101̄1)
m
m
(011̄0)
x
(5161)
m
(101̄0)

Abb. 8

Etwas anders liegen die Verhältnisse im hexagonalen und trigonalen (rhomboedrischen) System. Für beide Systeme kann man als Endflächenform das regelmässig-sechsseitige Prisma mit der horizontalen Basisfläche ansehen. In diesem Falle liegt wieder der Basispol in der Mitte der Projektion, die sechs Flächenpole der aufrechten, sechsseitigen Säule sind auf dem Grundkreis verteilt. Die Querfläche bleibt in der Lage vorne erhalten, die weiteren Pole liegen in Abständen von 60° in der Grundzone. Hier wird man also zweckmässig eine Sextanteneinteilung der Projektion zugrunde legen, die leicht am Netzgrundkreis abgezählt werden kann.

Es sei ein Quarz-Kristall gegeben (Abb.8) mit den Flächen des sechsseitigen Prismas (m = $10\bar{1}0$) und den beiden Rhomboedern, (positiv) r = $10\bar{1}1$ und (negativ) z = $01\bar{1}1$, die beide gegen die anstoßenden Flächen des aufrechten Prismas unter 38 1/4° geneigt sind. Die Kanten zwischen dem Prisma und dem unmittelbar darüber stehenden Rhomboeder sind horizontal, ein sicheres Zeichen, daß diese beiden Flächen mit der möglichen, horizontalen Basisfläche, (die allerdings nur äußerst selten verwirklicht ist), in Zone liegen. Da diese Zonen durch den Mittelpunkt der Projektion gehen (Pol der möglichen Basisfläche) erscheinen sie als Durchmesser, auf denen leicht der Normalenwinkel zwischen Prisma und Rhomboeder mit Hilfe der Breitenkreise vom Grundkreis aus abgesteckt werden kann. Da alle drei Flächen des positiven und die drei des negativen Rhomboeders der Oberseite gegen die zugehörigen Prismenflächen gleich geneigt sind, bzw. den gleichen "Polabstand" vom Mittelpunkt der Projektion haben, ergeben sich die anderen 5 Flächenlagen, indem man einfach um den Mittelpunkt einen konzentrischen Kleinkreis mit dem Radius (90° - 38 1/4°) zieht. In den Schnitten mit den drei Durchmesserzonen liegen dann die gesuchten Flächen.

Nun ist nur noch die am Bild sichtbare Trapezoederfläche x = 5161 winkelrichtig einzutragen. Dazu seien die Winkel xm = 12° und xr = 31 1/3° goniometrisch gemessen. Man legt also einen Netzpol in den im Grundkreis liegenden Flächenpol ($10\bar{1}0$) und zieht den davon um 12° abstehenden Parallelkreis nach. Nun gilt es nur noch, jenen Kleinkreis zu konstruieren, der von der Rhomboederfläche r um 31 1/3° absteht. Hier ist das WULFFsche Netz nicht unmittelbar verwendbar, gestattet aber leicht die dazu benötigten Hilfskonstruktionen.

Wie schon früher bemerkt (s.S. 234), bilden sich zwar auch alle Kleinkreise ebenso wie die Großkreise in der Projektion gleichfalls als Kreise ab, doch stimmt der geometrische Mittelpunkt des projizierten Kleinkreises im allgemeinen nicht mit dem sphärischen Mittelpunkt (jenem Pol, um den herum auf der Kugeloberfläche der Kleinkreis beschrieben wurde) überein. Bisher hatten wir nur Kleinkreise zu ziehen, deren sphärische Mittelpunkte entweder im Grundkreis oder im Projektionsmittelpunkt lagen. Um im gegebenen Falle den Kleinkreis mit dem Zirkel ziehen zu können, bedarf man dreier Punkte, oder mindestens der Endpunkte eines Durchmessers. Letzteres ist leicht zu erreichen. Man legt den sphärischen Mittelpunkt (in unserem Falle r) in einen Netzdurchmesser und zählt nun auf diesem Durchmesser beiderseits des Flächenpoles r den verlangten Winkelabstand (Radius des Kleinkreises auf der Kugel) ab. Mit diesen beiden Punkten ist der geometrische Durchmesser des projizierten Kleinkreises gegeben und der dazugehörige geometrische Mittelpunkt liegt einfach in der Halbierung der Durchmesserstrecke.

Der Schnitt dieses Kleinkreises mit dem um m gezogenen Parallelkreis liefert die gesuchte Lage des Flächenpoles x. Eigentlich erhält man zwei Schnittpunkte, doch ist in unserem Falle nur einer davon, der rechte, durch eine Fläche besetzt. Es handelt sich also um eine rechte Trapezoederfläche (Rechtsquarz). In ganz gleichartiger Weise finden sich Quarze, bei denen nur der linke Schnittpunkt der Kleinkreise durch eine Fläche besetztist (linkes Trapezoeder, Linksquarz).

Was wäre aber zu machen, wenn z.B. der sphärische Mittelpunkt des geforderten Kleinkreises dem Grundkreis so nahe liegt, daß man auf dem hindurch gelegten Netzdurchmesser zwar auf der Seite gegen den Mittelpunkt den gewünschten Winkel abzählen kann, nicht aber auf der Gegenseite, da hier der Winkel schon über den Grundkreis hinaus reicht? Auch hier gelingt auf einem kleinen Umweg die Konstruktion, nur muss man hiezu für den durch den Flächenpol gehenden Netzdurchmesser dessen Äquator wählen und über dem dazu senkrecht liegenden Poldurchmesser des Netzes jenen Großkreis ziehen, der durch den Flächenpol (sphärischen Mittelpunkt) läuft. Der Flächenpol ist dabei der Scheitel dieser Zone. Auf der so gewonnenen Zone zählt man wieder beiderseits vom Flächenpol den geforderten Winkel ab. Damit und mit dem auf dem Äquator abgesteckten Winkelwert sind drei Punkte gegeben, durch die der Kleinkreis eindeutig festgelegt ist (Konstruktion eines Kreises, wenn drei Punkte seines Umfanges gegeben sind). Der Mittelpunkt muss jedenfalls im Netzdurchmesser liegen.

Auch hier lassen sich einige interessante Zonenverbände feststellen. Legt man z.B. die Netzpole in m (1010) und dessen Gegenfläche, so kann man leicht eine durch z und r laufende Zone ziehen und beobachten, daß auch die Fläche x in diese Zone hinein fällt. In der gleichen Zone läßt sich der Winkel zwischen z und r mit 46 1/4° ablesen, was sehr leicht goniometrisch überprüft werden kann. Ebenso lassen sich durch je zwei r-Flächen oder je zwei z-Flächen Zonen legen. Jene Punkte in denen diese Zonen den Grundkreis schneiden (die Netzpole), liegen dabei genau in der Mitte zwischen zwei benachbarten Prismen-(m-)Flächen. Der für beide Rhomboeder (r-r und z-z) ablesbare Winkel von 85 3/4° läßt sich gleichfalls goniometrisch leicht überprüfen.

Schluß folgt.