Über den Foucault'schen Pendelversuch.

Dr. Tammen.

A. Einleitende Betrachtungen.

I. Zur Kritik der Vorgeschichte.

Vorarbeiter Foucault's. Wenngleich die indirekten Beweise für die Drehung der Erde um eine Achse in ihr so zahlreich als überzeugend sind, so werden doch direkte Beweise für dieses Phänomen jederzeit das Interesse der Physiker sowohl wie der Astronomen in hohem Grade in Anspruch nehmen. Diesen Gedanken sprach schon Galilaei aus; und wenn man bedenkt, daſs gerade Galilaei, besonders durch seine Betrachtungen über den freien Fall und die Pendelbewegung, in ausgezeichnetster Weise den spätern direkten Beweisen für die Erdrotation vorgearbeitet hat: so ist es vielleicht nicht uninteressant zu erfahren, daſs Galilaei die Erbringung eines solchen Beweises für ebenso unmöglich als wünschenswert erklärte.

Erst Newton erkannte die Möglichkeit der Erbringung eines direkten experimentellen Beweises für die Erdrotation; derselbe schlug nämlich am 28. Nov. 1679 in einem Briefe an Hooke der königl. Gesellschaft zu London den freien Fall eines Körpers aus groſser Höhe als ein Experiment vor, wodurch die von einigen, z. B. von Tycho Brahe noch immer bezweifelte Achsendrehung der Erde bewiesen werden könne. In den von Hooke auf diesen Vorschlag hin angestellten Versuchen betrug die Fallhöhe nicht mehr als 27 Fuſs; deshalb gaben dieselben kein Resultat. Auch die von Guglielmini im Jahre 1791 auf dem Turme degli Asinelli zu Bologna bei einer Fallhöhe von 90 Fuſs angestellten Versuche ergaben kein sicheres Resultat. Erst Benzenberg gelang es glänzend im Jahre 1802 durch Fallversuche auf dem Michaelisturme zu Hamburg bei einer Fallhöhe von 235 Fuſs, und wiederholt im Jahre 1804 durch Versuche im Steinkohlenschacht zu Schleebusch in der Grafschaft Mark bei einer Fallhöhe von 262 Fuſs, die östliche Abweichung des fallenden Körpers von der Lotlinie und damit die Rotation der Erde um ihre Achse direkt experimentell nachzuweisen. Die sehr genauen Versuche, welche Reich im Jahre 1832 im Drei-Brüder-Schachte zu Freiberg bei einer Fallhöhe von 488 Fufs anstellte, bestätigen die Versuchsresultate Benzenbergs. Über einen Fehler in der von Olbers für die Benzenberg'schen Versuche gelieferten Berechnung der östlichen Abweichung eines frei fallenden Körpers s. Arb. d. Verf. Carls Repert. Bd. XVIII p. 282.

Ein anderer bedeutender Mathematiker und Physiker, Poisson, welcher durch seine Betrachtungen über die Bewegung eines Projektils über der Oberfläche der rotierenden Erde (Journ. de l'École Polytechnique Heft 26. 1837) die wesentlichsten Schwierigkeiten für die Erbringung des zweiten direkten Beweises für die Achsendrehung der Erde aus dem Wege räumte, war über die Ausführbarkeit des von ihm vorbereiteten experimentellen Beweises einem ähnlichen Irrtum unterworfen wie Galilaei.

Der von Poisson vorbereitete Beweis für die Achsendrehung der Erde wurde durch Foucault geliefert. Derselbe setzt ein frei schwingendes Pendel voraus und zeichnet sich vor dem ersten von Benzenberg gelieferten Beweise dadurch aus, dafs aus ihm die Rotation der Erde um ihre Achse nicht so sehr erschlossen zu werden braucht, als vielmehr direkt wahrgenommen werden kann, wenn man nur die experimentell leicht zu zeigende Konstanz der Achsen rotierender Körper mit in Anschlag bringt.

Poisson aber war so weit davon entfernt, in seiner eleganten Behandlung der relativen Bewegung eine Vorbereitung und eine Anleitung zu dem s. g. Foucault'schen Pendelversuch zu erkennen, dafs er sich zu der Ansicht bekennen konnte, die Kraft perpendikulär zur Oszillationsebene des Pendels sei zu klein, als dafs sie das Pendel merklich aus seiner Ebene herausbringen und auf dessen Bewegung mefsbaren Einflufs haben könne. Poisson bedachte nicht, dafs sich die kleinen stets in demselben Sinne wirksamen Einflüsse summieren, und dafs bei einer sehr grofsen Zahl von Schwingungen die Summe der einzeln betrachtet sehr kleinen Einflüsse sehr wohl merkbar werden kann.

Ob schliefslich Foucault durch das Studium der Poisson'schen Untersuchungen zur Anstellung seines berühmten Pendelversuchs veranlafst wurde? Ich möchte es bezweifeln, gleichwie ich bezweifle, dafs Poisson zu seinen mathematischen Untersuchungen angeregt wurde durch die Kunde von den Erfahrungen der preussischen Artillerie, nach denen Geschosse, welche aus ungezogenen Geschützen geworfen sind, bei richtig erfafstem Ziel regelmäfsig

3

ein wenig rechts vom Zentrum der Zielscheibe einschlagen. Denn die Wechselwirkung zwischen der in der Sprache der s. g. höhern Mathematik, d. i. der Differentialgleichungen, gegebenen Theorie und der Erfahrung durch das Experiment ist noch jetzt keineswegs eine besonders lebhafte; und dies dürfte noch mehr gelten für die Zeit Poisson's und Foucault's.

Der Schlufs von der zeitlichen Aufeinanderfolge zweier Arbeiten auf einen innern Zusammenhang liegt bei kritisch litterarischen Betrachtungen sehr nahe; ich mag deshalb um so weniger die Schuld leichtfertiger Anwendung dieses Schlusses auf mich laden. Wenn nämlich auch feststeht, dafs Foucault die Arbeiten Poissons kannte, so steht doch dem gegenüber, dafs Foucault sich genötigt sah, Binet um eine analytische Behandlung des von ihm experimentell behandelten Problems zu bitten. Jedenfalls aber hat Foucault — also wie ich anzunehmen geneigt bin, nachträglich — ganz richtig erkannt, wie nahe Poisson der Lösung des Problems gekommen ist, durch welche er selbst Berühmtheit erlangen sollte; denn Foucault sagt Compt. rend. t. XXXII p. 135, Pogg. Ann. Bd. 82:

„Zum Schlufs noch eine Bemerkung, nämlich die: dafs die beobachteten Thatsachen unter den Umständen, in welche ich mich versetzt, vollkommen mit den Resultaten übereinstimmen, die Poisson in einer sehr merkwürdigen Abhandlung am Montage den 13. Nov. 1837 in der Akademie vorgelesen hat. In dieser Abhandlung behandelt Herr Poisson die Bewegung der Projektilen in der Luft mit Rücksicht auf die tägliche Bewegung der Erde und zeigt durch Rechnung, dafs unter unsern Breiten die gegen irgend einen Punkt des Horizontes fortgeschleuderten Projektilen stets eine Abweichung nach der Rechten des am Ausgangspunkte befindlichen und der Trajektorie zugewendeten Beobachters erleiden. Es scheint mir, dafs die Masse des Pendels vergleichbar sei einem Projektil, welches beim Entfernen von dem Beobachter rechts abweicht, und welches also notwendig bei der Rückkehr zu seinem Ausgangspunkte in umgekehrtem Sinne abweichen mufs, was dann die fortschreitende Verschiebung der mittleren Schwingung und die Richtung desselben bedingt. Jedoch bietet das Pendel den Vorzug, dafs es die Effekte häuft und sie aus dem Bereiche der Theorie in den der Beobachtung überführt.“

Ableitung des Sinusgesetzes aus der Rechtsabweichung eines Projektils. Die Poisson'schen dynamischen Differentialgleichungen sind identisch mit denjenigen, welche Kirchhoff in seiner Mechanik p. 93 abgeleitet hat. Ich wähle in Folgendem bloſs deshalb die Kirchhoff'schen von vielen Autoren adoptierten Bezeichnungen, um im weiteren Verlauf der Arbeit keine Veranlassung zu Änderungen in der Bezeichnungsweise zu haben. Nach Korrektur eines Druckfehlers lauten die von Kirchhoff p. 93 gegebenen Differentialgleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{d t^2} = 2\, w \sin \psi \dfrac{d y}{d t} \\ \dfrac{d^2 y}{d t^2} = -2\, w \left(\sin \psi \dfrac{d x}{d t} + \cos \psi \dfrac{d z}{d t} \right) \\ \dfrac{d^2 z}{d t^2} = g + 2\, w \cos \psi \dfrac{d y}{d t}\,. \end{cases}$$

Hierbei bedeutet:

g die Gravitationskonstante, sowie dieselbe aus der Erdanziehung und der Zentrifugalkraft resultiert,

w die Winkelgeschwindigkeit der Achsendrehung der Erde,

ψ die geographische Breite des Beobachtungsortes.

Die Voraussetzung unendlich kleiner Amplituden hat sich bei vollkommen strenger Behandlung des Foucault'schen Pendelproblems bis jetzt als unumgänglich erwiesen. Unter dieser Voraussetzung aber bewegt sich der Schwingungsmittelpunkt ganz wie ein Punkt auf einer Ebene um ein in dieser Ebene gelegenes Attraktionszentrum unter dem Einfluſs einer Kraft, welche dem jeweiligen Abstande des bewegten Punktes von dem festliegenden Attraktionszentrum proportional ist.

Wähle ich nun als diejenige Ebene, in welcher die Bewegung vor sich gehen soll, die Ebene der (x, y), so vereinfachen sich die Gleichungen 1) wegen der Bedingungen: $\dfrac{d z}{d t} = o$ und $\dfrac{d^2 z}{d t^2} = o$, in welchen ausgesagt ist, daſs der Massenpunkt des mathematischen oder der Schwingungsmittelpunkt des physischen Pendels auf der Ebene der (x, y) zu bleiben gezwungen sei, zu:

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{d t^2} = 2\, w \sin \psi \dfrac{d y}{d t} \\ \dfrac{d^2 y}{d t^2} = -2\, w \sin \psi \dfrac{d x}{d t}\,. \end{cases}$$

Der Schwingungsmittelpunkt befinde sich ruhend in der Ruhelage und werde durch einen momentan wirkenden Stoſs in Bewegung gesetzt. Es soll die Krümmung der Trajektorie für den

Anfangsmoment bestimmt werden; oder was auf dasselbe hinauskommt, es soll der Radius des Kreisbogens bestimmt werden, auf welchem sich der Schwingungsmittelpunkt in Folge des Stoſses fortbewegen müſste, wenn er nicht von der Ruhelage aus durch Attraktionskräfte behindert würde und sich also gleich einem frei beweglichen Projektil bewegen könnte.

Eine einmalige Integration der Gleichungen 2) ergiebt:

$$3) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2w \sin\psi . y + A \\ \dfrac{dy}{dt} = -2w \sin\psi . x + B, \end{cases}$$

und die Interpretation der Konstanten A und B hat gar keine Schwierigkeit, wenn ich voraussetze, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Untersuchung geschehen kann, daſs sich der bewegliche Massenpunkt für die Zeit $t = o$ im Koordinatenanfangspunkte befinde.

Nach Multiplikation der Gleichungen 2) mit resp. dx und dy erhalte ich nämlich durch Addition mit Berücksichtigung der Gleichungen:

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} . dx = \frac{dx}{dt} . d\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt} . dy = \frac{dy}{dt} . d\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

die leicht zu integrierende Differentialgleichung:

$$4) \quad \frac{dx}{dt} . d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt} . d\left(\frac{dy}{dt}\right) = o,$$

aus welcher folgt:

$$5) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \Gamma^2 .$$

Wenn ich demnach noch mit α den Winkel bezeichne, welchen die Richtung der Geschwindigkeit Γ (s. 5) für die Zeit $t = o$, d. i. für den Anfang des Zeitelementes, während welcher der Schwingungsmittelpunkt das betrachtete Stück Trajektorie durchläuft, mit der Richtung der x-Achse einschlieſst, so folgt:

$$6) \quad A = \Gamma . \cos\alpha ; \; B = \Gamma . \sin\alpha .$$

Setzt man aber die in 3) enthaltenen Werte der ersten Differentialquotienten in 5) ein und berücksichtigt dabei die Gleichungen 6), so erhält man:

$$(2\,w \sin\psi \,.\, y + \Gamma \cos\alpha)^2 + (2\,w \sin\psi \,.\, x - \Gamma \sin\alpha)^2 = \Gamma^2,$$

oder:

$$7) \qquad \left(y + \frac{\Gamma \cos\alpha}{2\,w \sin\psi}\right)^2 + \left(x - \frac{\Gamma \sin\alpha}{2\,w \sin\psi}\right)^2 = \frac{\Gamma^2}{4\,w^2 \sin^2\psi}.$$

Die Gleichung 7) aber ist die Gleichung eines Kreises mit dem Radius $\Gamma : 2\,w \sin\psi$ und den Mittelpunktskoordinaten

$$y_1 = \frac{-\Gamma \cos\alpha}{2\,w \sin\psi},\ x_1 = \frac{\Gamma \sin\alpha}{2\,w \sin\psi}.$$

Der Krümmungsradius der Trajektorie für das betrachtete Zeitelement ist $= \Gamma : 2\,w \sin\psi$; derselbe ist also der Geschwindigkeit der Progressivbewegung proportional. Folglich ist die Geschwindigkeit, mit welcher die Richtungsänderung der Bewegung erfolgt, von der Geschwindigkeit der Progressivbewegung unabhängig.

Könnte die Bewegung des Projektils auf unserer Erdoberfläche unter unveränderten Bewegungsbedingungen fortgesetzt werden, so würde von dem Projektil stets nach derselben Zeit die anfängliche Bewegungsrichtung wiedererlangt sein, gleichviel welche Werte die Geschwindigkeit der Bewegung während der Zeit angenommen hätte. Bei konstanter im übrigen beliebiger Geschwindigkeit würde das Projektil stets in derselben Zeit einen vollen Kreis durchlaufen haben.

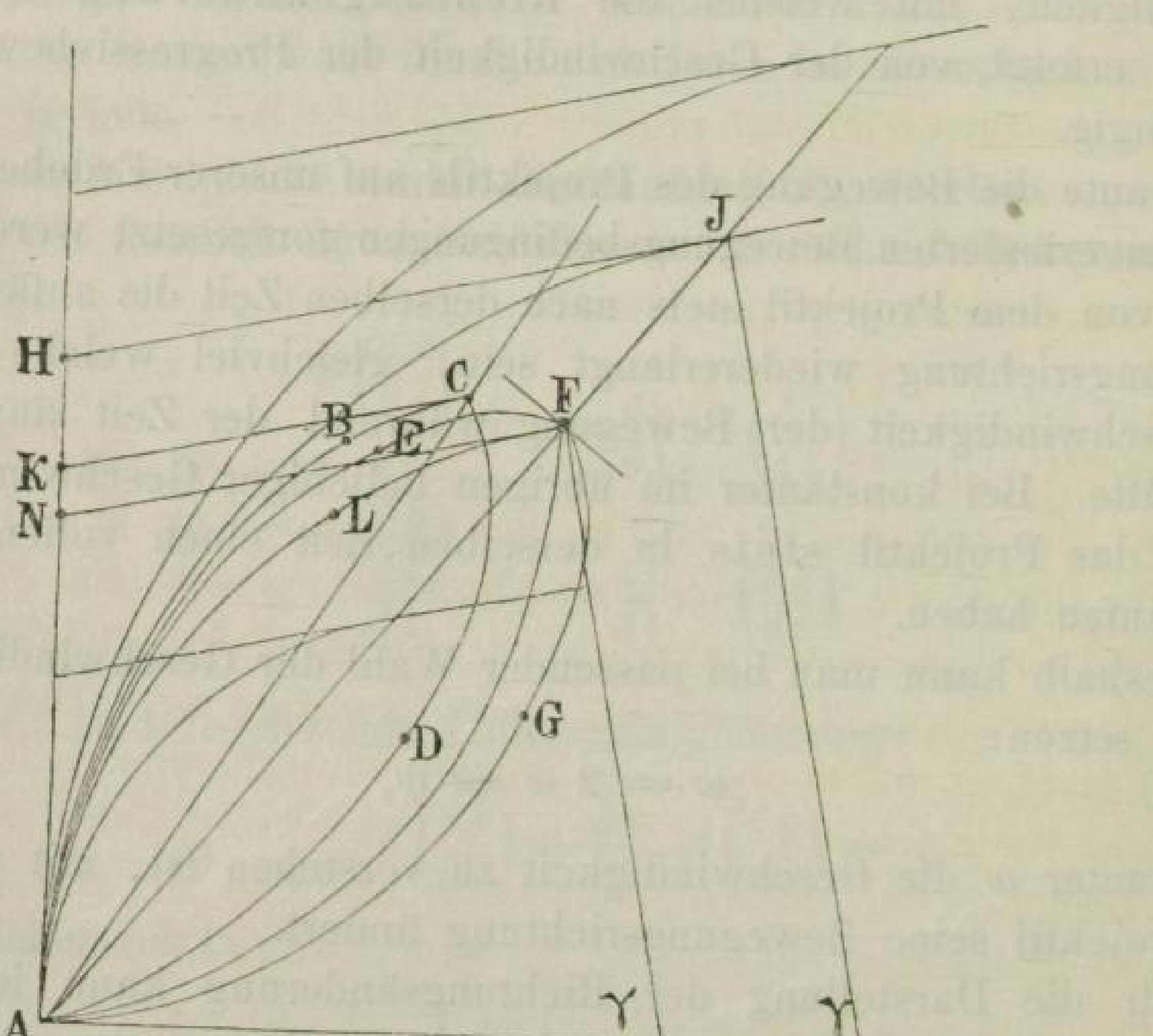
Deshalb kann man bei passender Wahl der Geschwindigkeitseinheit setzen:

$$8) \qquad \omega = 2\,w \sin\psi,$$

wobei unter ω die Geschwindigkeit zu verstehen ist, mit welcher das Projektil seine Bewegungsrichtung ändert.

Für die Darstellung der Richtungsänderung kann ich dem Schwingungsmittelpunkte während des Passierens der Ruhelage eine beliebige Geschwindigkeit zuteilen. Ich denke mir, es habe zu verschiedenen Malen der in der Ruhelage ruhende Schwingungsmittelpunkt einen Stofs von verschiedener Stärke, aber alle Male in derselben Richtung erhalten, und es bewege sich der Schwingungsmittelpunkt mit der durch den Stofs erhaltenen Geschwindigkeit während der Dauer einer halben Schwingung fort wie ein frei bewegliches Projektil; alsdann werden die Endpunkte aller der in den verschiedenen Fällen bei verschieden starken Anfangsstöfsen vom Schwingungsmittelpunkte durchlaufenen Kreisbögen auf einer geraden Linie liegen; d. h. die Sehnen sämtlicher Kreisbögen liegen auf derselben geraden Linie. Denn es müssen die Tangenten in den Endpunkten aller Kreisbögen zu einander parallel sein, da nach obigem in allen Fällen während der Dauer einer halben Schwingung die Bewegungsrichtung denselben Winkel überstrichen haben mufs. Deshalb müssen die verschiedenen Kreisbögen alle denselben Zentriwinkel haben. Es haben also die verschiedenen von den Sehnen und Radien gebildeten gleichschenkligen Dreiecke gleiche Winkel, weshalb ihre Basen eine gerade Linie bilden müssen, da sie mit einem Endpunkt der Basis und einer Schenkelseite zur Deckung gebracht sind. (s. Fig. 1.)

Fig. 1.



Während der Schwingungsmittelpunkt auf dem Kreisbogen ALF fortgeschritten ist, hat sich die Bewegungsrichtung desselben um den Winkel $FNH = \sphericalangle FMA$ gedreht. Die Schwingungsrichtung des Pendels hat aber in derselben Zeit nur eine Drehung um den Winkel FAN erfahren. Wenn wir nämlich einstweilen als Voraussetzung annehmen, dafs die Linie FA, in deren Richtung der Schwingungsmittelpunkt im Moment der Umkehr einen Impuls erfährt, eine Symmetrielinie für die während einer ganzen

Schwingungsdauer durchlaufene Bahn, von der Ruhelage A bis zurück in dieselbe, ist, so giebt die Linie FA die Schwingungsrichtung für den Moment der Umkehr an. Die in Wirklichkeit vom Schwingungsmittelpunkt durchlaufene Kurve ist eine sternförmige Hypocycloide.

Bei der Abstreifung der Voraussetzungen erfährt dieser Punkt eine eingehendere Erörterung. Vorläufig genüge es, durch die vorstehende Betrachtung dargethan zu haben, dafs nicht nur die Gröfse der Richtungsänderung der Trajektorie eines frei beweglich gedachten Massenpunktes von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängig ist, sondern dafs dasselbe gilt für den Winkel, um welchen die Richtung AF, in welcher der Schwingungsmittelpunkt bei der eingeführten Voraussetzung im Moment der Umkehr nach der Ruhelage A zurückgezogen wird, absteht von der Richtung, in welcher sich der Schwingungsmittelpunkt beim Verlassen der Ruhelage bewegte.

Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich leicht aus dem Werte für die Geschwindigkeit der Richtungsänderung eines frei beweglichen Projektils der Wert für die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Schwingungsrichtung ändert; denn es ist:

$$9)\quad \sphericalangle\, FAN = \tfrac{1}{2} \sphericalangle\, FNH.$$

Der Winkel FNH, welchen die Tangenten für die Endmomente der betrachteten halben Schwingungsdauer einschliefsen, dividiert durch die halbe Schwingungsdauer giebt ein Mafs für die Geschwindigkeit, mit welcher die Richtungsänderung erfolgte, da diese Geschwindigkeit $\omega = 2\,w \sin\psi$ konstant ist. Der Winkel FAN, dividiert durch die halbe Schwingungsdauer, giebt ebenso ein Mafs wenigstens für die *Durchschnittsgeschwindigkeit* der scheinbaren Drehung der Schwingungsebene während der Dauer einer halben Schwingung, auf welche es beim Foucault'schen Pendelproblem allein ankommt.

Die in obigem angestellten Betrachtungen gelten unverändert für alle vier Quadranten einer Doppelschwingung u. s. f. Wenn ich also mit v die Geschwindigkeit bezeichne, mit welcher sich die Schwingungsebene eines in unendlich kleinen Amplituden oszillierenden Pendels dreht, so ist:

$$10)\quad v = w \,.\, \sin\psi\,.$$

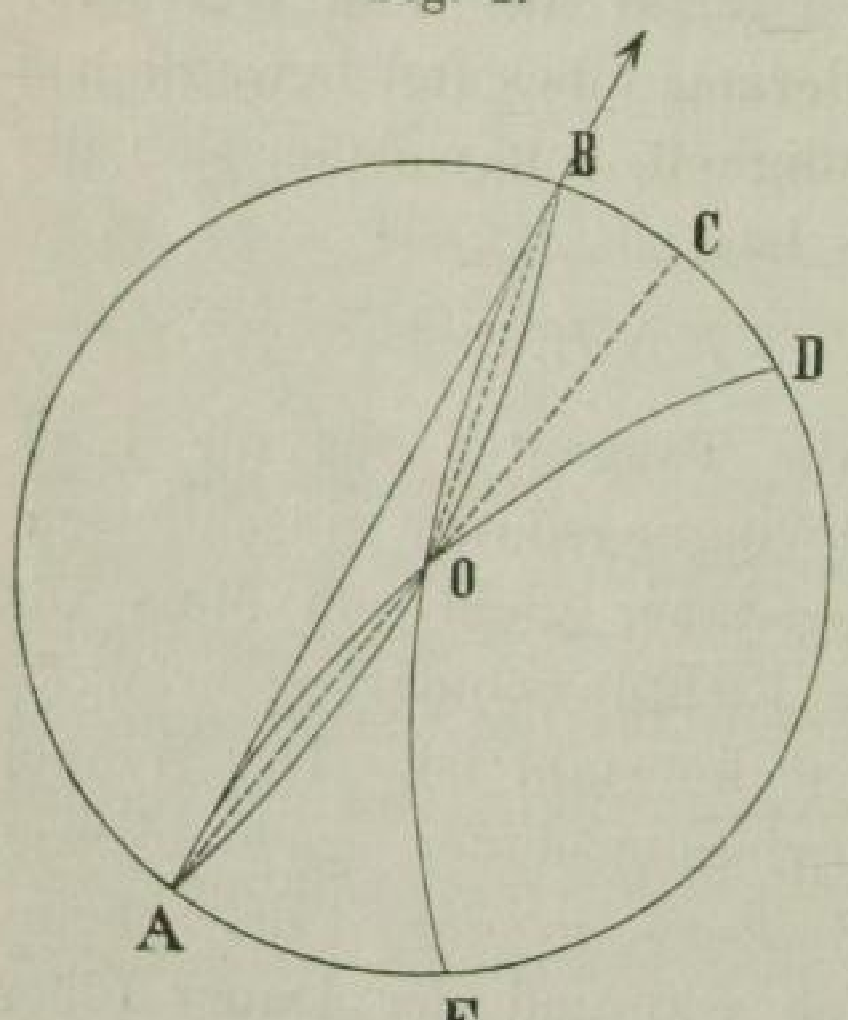
Die Geschwindigkeit der scheinbaren Drehung eines in unendlich kleinen Amplituden schwingenden Pendels wird erhalten, wenn man die

Rotationsgeschwindigkeit der Erde um ihre Achse mit dem Sinus der Breite des Beobachtungsortes multipliziert.

Wenn man die in die vorstehende Rechnung eingeführten Voraussetzungen: 1) daſs man für die Bahn des Schwingungsmittelpunktes während der Dauer einer halben Schwingung einen Kreisbogen einführen könne, und 2) daſs die Sehne dieses Kreisbogens Symmetrielinie der während der Dauer einer ganzen Schwingung durchlaufenen Trajektorie sei, festhält und dem entsprechend die Trajektorie des Schwingungsmittelpunktes aus Kreisstücken zusammensetzt; so ergiebt sich leicht die, wie mir scheint, nicht ganz uninteressante Bemerkung, daſs allemal in dem Zeitelement nach dem Umkehrmoment die Bewegung in derselben Richtung anhebt, in welcher sie in dem Zeitelement vor dem letzten vorhergehenden Umkehrmoment aufhörte.

Durch parallele Verschiebung kann man also die sämtlichen Kreisbögen der ersten Hälften aller Doppelschwingungen zusammensetzen, so daſs eine stetig gekrümmte Kurve entsteht. Denn AO und BO sind gleiche Sehnen gleicher Kreise, deshalb müssen sie mit ihren zugehörigen Tangenten gleiche Winkel einschlieſsen; und zwar Winkel gleich der Hälfte des Auſsenwinkels COB an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks AOB. Hieraus folgt aber unmittelbar, daſs AB die den beiden Kreisbögen AOD und BOE gemeinschaftliche Tangente für die Berührungspunkte A und B ist. (s. Fig. 2.)

Fig. 2.

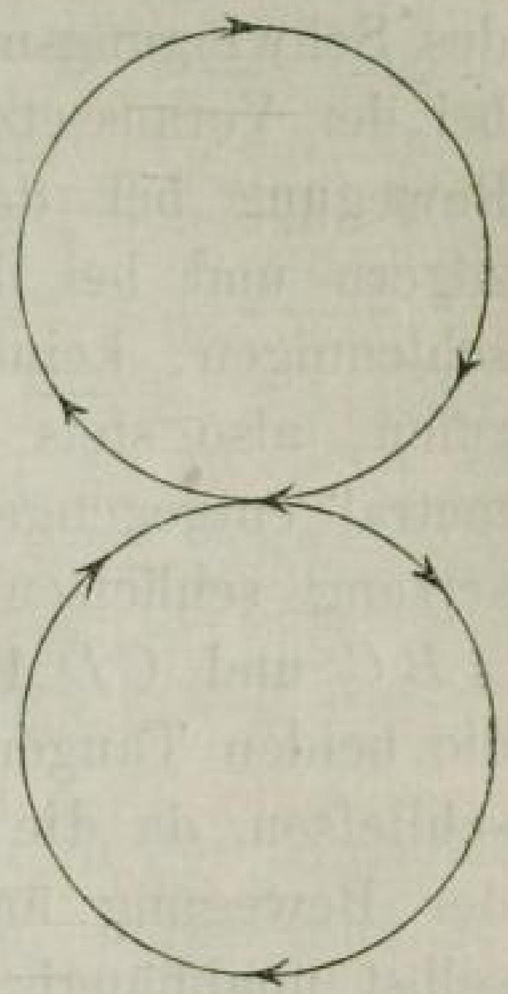


Die Summe aller dieser Kreisbögen aber ergiebt einen vollen Kreis, wenn man alle Schwingungen heranzieht, welche das Pendel vollführt haben muſs, bis sich seine Schwingungsebene scheinbar um 360° gedreht hat. In gleicher Weise ergeben die sämtlichen zweiten Hälften aller Doppelschwingungen einen vollen Kreis, und beide Kreise werden in demselben Sinne durchlaufen, für unsere nördliche Erdhälfte nämlich entgegengesetzt dem Drehungssinne des Uhrzeigers.

Ein frei bewegliches Projektil würde in der Hälfte der Zeit, in welcher sich die Schwingungsebene eines Pendels um 360°

dreht, einen vollen Kreis durchlaufen; für unsere Breite (*Zwickau*, $\psi = 50^0\ 42{,}5'$) in etwa 55 763 sek.. Würde dasselbe nach Verlauf dieser Zeit, also bei der Rückkehr in den Ausgangspunkt der Bewegung arretiert und in entgegengesetzter Richtung fortgeschleudert, so würde es in derselben Zeit von 55 763 sek. den zweiten zur vollständigen ∞ gehörigen Kreis durchlaufen. Es würde also in der Zeit von 111 526 sek. $=$ 30 h 48 m 46 sek., in welcher auch die Schwingungsebene eines Pendels ihre scheinbare Umdrehung vollendet, derselbe Weg zurückgelegt werden, welchen wir vorhin aus den Stükken der Trajektorie des Schwingungsmittelpunktes zusammengesetzt haben.

Fig. 3.



Dies entspricht dem Umstande, dafs das frei bewegliche Projektil zu seiner Bewegung nur zwei diametral entgegengesetzt zu einander gerichtete Impulse empfangen hat, während das Pendel fortgesetzt Impulse nach entgegengesetzten Richtungen erfährt. Man sieht hieraus, *dafs die Impulse nur zum Zustandekommen der Bewegung selbst nötig sind, aber auf die Richtungsänderung der Bewegung durchaus keinen Einflufs haben.*

Abstreifung der Voraussetzungen. Wäre die vorhergehende Betrachtung Schritt für Schritt vollkommen korrekt, so müfste die Kurve der Geschwindigkeit, mit welcher der Schwingungsmittelpunkt eines Pendels seine Richtung ändert, für die Umkehrpunkte Unstetigkeiten aufweisen. Dies ist schon auffällig, da die Natur in ihren Erscheinungen derartige Unstetigkeiten so regelmäfsig zu vermeiden pflegt, dafs schon die Naturphilosophen des Mittelalters dieser Erkenntnis durch den Satz: *natura non facit saltum* in ihrer Weise Ausdruck geben konnten.

Man erkennt aber auch leicht, dafs die in Vorigem festgehaltene Voraussetzung, die Trajektorie des Schwingungsmittelpunktes sei ein Kreisbogen, nicht streng zutrifft, dafs sich vielmehr die Trajektorie des Schwingungsmittelpunktes beim Herannähern an den Umkehrpunkt genau in dem Grade stärker krümmt, in welchem die Geschwindigkeit der Bewegung abnimmt, wenn man blofs den Einflufs der Geschwindigkeitsabnahme während der halben Schwingung ins Auge fafst; ja dafs schliefslich auch noch direkt durch die Attraktionskräfte, welche stetig von der Ruhelage aus auf den Schwingungsmittelpunkt einwirken, eine Verstärkung der Krümmung der Trajektorie herbeigeführt werden mufs.

In Fig. 1 p. 38 stellt die Kurve $ABCDA$ die Trajektorie des Schwingungsmittelpunktes für eine ganze Schwingungsdauer bei der Voraussetzung dar, dafs die Attraktionskräfte, welche die Bewegung bei der Hinschwingung auf dem Bogen ABC verzögern und bei der Rückschwingung auf dem Bogen CDA beschleunigen, keine Änderung in der Bewegungsrichtung hervorrufen, also stets in der Richtung der Bewegung selbst oder diametral entgegengesetzt zu derselben wirken. Bei dieser Voraussetzung schliefsen noch die beiden Tangenten der Bogen resp. ABC und CDA im Punkte C denselben Winkel ein, welchen die beiden Tangenten der Kreisbögen für den Umkehrpunkt einschliefsen, da die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Richtung der Bewegung ändert, von der Geschwindigkeit der Bewegung selbst unabhängig ist. Bei dieser Voraussetzung besteht also die Unstetigkeit in der Kurve für die Geschwindigkeit der Richtungsänderung an den Umkehrpunkten noch fort.

Die wirklich durchlaufene Trajektorie aber ist durch die Kurve $AEFGA$ dargestellt, und man erkennt leicht, dafs dieselbe auch am Umkehrpunkte F stetig gekrümmt sein mufs, da die Geschwindigkeit der Bewegung in der Richtung von der Ruhelage weg *stetig* bis zum Werte Null abnimmt und vom Umkehrmomente an in der Richtung nach der Ruhelage zu *in ganz gleicher Weise wieder stetig* zunimmt, während die Bewegungskomponente normal zu der jeweiligen Richtung nach der Ruhelage hin von den verzögernden oder beschleunigenden Kräften nicht beeinflufst wird. Im Umkehrpunkte F mufs deshalb die Bewegung normal gerichtet sein zu der Linie AF, welche den Punkt des Maximalabstandes F mit der Ruhelage A verbindet. Hieraus ist gleichzeitig die Begründung dafür zu entnehmen, dafs die Linie AF Symmetrielinie für die Trajektorie sein mufs.

Mit Hülfe der Figur 1 ist leicht zu erkennen, dafs die Ersetzung der in Wirklichkeit vom Schwingungsmittelpunkt durchlaufenen Trajektorie durch denjenigen Kreisbogen, welchen ein frei bewegliches Projektil mit der konstanten mittleren Geschwindigkeit des Schwingungsmittelpunktes durchlaufen würde, an sich durchaus unstatthaft ist, und dafs auf Grund dieser Ersetzung ein richtiges Resultat nur deshalb erhalten werden konnte, weil sich zufällig die beiden damit verknüpften Fehler kompensieren.

Auch die Bemerkung, dafs in der kurzen Zeit einer halben Schwingung ein so kleines Bogenstück durchlaufen werde, dafs sich dasselbe einem Kreisbogen mit genügender Genauigkeit anschmiege, nützt nicht. Denn wenn auch in der That das Bogenstück aufserordentlich klein ist, — es gehört zu demselben ein Zentriwinkel von etwa $3^3/_7$ Bogensekunden, wenn das Pendel zur Vollbringung einer halben Schwingung 1 Sek. Sternzeit gebraucht, der Sterntag $= 23^{\mathrm{h}}\ 56^{\mathrm{m}}\ 4{,}1^{\mathrm{sek.}}$ gesetzt, und die Breite des Beobachtungsortes $\psi = 50^0\ 42{,}5'$ genommen ist —; so ist doch zu bedenken, dafs sich der bei der Betrachtung *einer* Schwingung völlig unmerkliche Fehler mit jeder Schwingung in demselben Sinne wiederholt und deshalb schliefslich merklich genug werden kann.

Sucht man den ersten der gedachten Fehler in der Annahme eines Kreisbogens als Trajektorie zu eliminieren, indem man berücksichtigt, dafs der Krümmungsradius der Trajektorie in jedem Punkte der Geschwindigkeit, mit welcher sie durchlaufen wird, umgekehrt proportional ist, so bemerkt man leicht, dafs der Umkehrpunkt C durch diese Korrektur etwas nach links verschoben wird, so dafs nach dieser Korrektur eine um den Winkel JAC geringere Drehung der Schwingungsebene für die halbe Schwingungsdauer gefunden wird. Denn wegen der Zunahme der Krümmung ist notwendig:

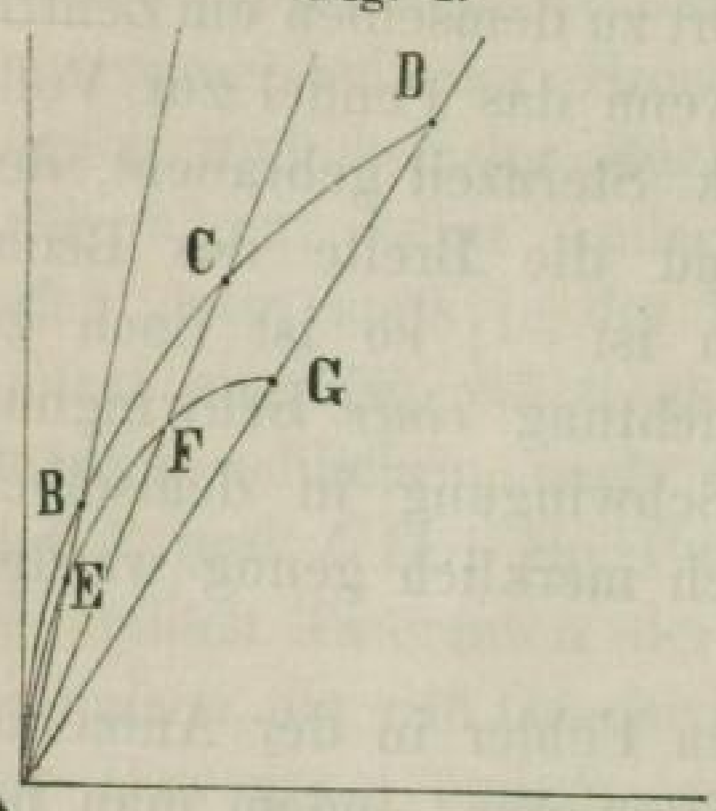
$$\frac{KC < KA}{\sphericalangle CAK < \sphericalangle KCA} \text{ und}$$
$$\sphericalangle CAK < \tfrac{1}{2} \sphericalangle CKH = \sphericalangle FAK.$$

Bei der Korrektur des zweiten der gedachten Fehler, d. i. bei der Berücksichtigung des Umstandes, dafs die von der Ruhelage aus stetig auf den Schwingungsmittelpunkt einwirkenden Kräfte eine verstärkte Krümmung der Trajektorie bedingen, ist aber auch wieder unschwer nachzuweisen, dafs der Winkel JAC durch den Einflufs dieser Attraktionskräfte gewissermafsen wieder gut gemacht wird.

Da nämlich der Schwingungsmittelpunkt mit *konstanter* Geschwindigkeit einen Kreisbogen durchlaufen würde, wenn er sich nach erhaltenem Anfangsstofs wie ein frei bewegliches Projektil bewegen könnte, so folgt sofort, dafs für diesen hypothetischen Fall auch vom Radiusvektor in gleicher Zeit gleiche Winkelräume überstrichen werden, dafs also auch die Winkelgeschwindigkeit des Radiusvektor eine konstante ist; denn die in gleichen Zeiten überstrichenen Winkelräume sind Peripheriewinkel über gleichen Bögen desselben Kreises. (s. Fig. 4.)

Die in der Wirklichkeit vom Schwingungsmittelpunkt durchlaufene Trajektorie $AEFG$ kann man aber aus dem Kreisbogenstück $ABCD$ erhalten, welches der frei beweglich gedachte Schwingungsmittelpunkt mit der Geschwindigkeit des Passierens der Ruhelage durchlaufen haben würde, indem man die Bewegung des Schwingungsmittelpunktes als eines frei beweglichen Projektils und die Bewegung desselben Schwingungsmittelpunktes in Folge der Attraktionskräfte für Endpunkte von Intervallen, welche man schliefslich unendlich kurz werden lassen kann, als sukzessiv erfolgend vorstellt, gleichwie man die parabolische Wurfbahn eines unter beliebigem Neigungswinkel gegen den Horizont geschleuderten Projektils konstruiert.

Fig. 4.



Da nun die von der Ruhelage aus auf den Schwingungsmittelpunkt geübte Einwirkung stets in der Richtung des jeweiligen Radiusvektor erfolgt, so erkennt man bei diesem Konstruktionsverfahren sofort, dafs durch diese Attraktionskräfte die Winkelgeschwindigkeit des Radiusvektor ganz unbeeinflufst bleibt. Demnach mufs auch für die in der Wirklichkeit durchlaufene Trajektorie die Winkelgeschwindigkeit des Radiusvektor konstant sein, so dafs im Endmoment der halben Schwingungsdauer der Schwingungsmittelpunkt im Punkte F der Sehne AJ Fig. 1, angelangt sein mufs. Hieraus ist zugleich ersichtlich, dafs v nicht blofs die Durchschnittsgeschwindigkeit für die halbe Schwingungsdauer, sondern die wahre *konstante* Geschwindigkeit der Drehung der Schwingungsebene angiebt, sobald man die Lage der Schwingungsebene für jeden Moment durch die Lage des Radiusvektors der Trajektorie des Schwingungsmittelpunktes bestimmt.

Es mufs also in der Wirklichkeit ebenso wie in dem zunächst der Rechnung unterworfenen hypothetischen Falle die Schwingungsrichtung des Pendels während der halben Schwingungsdauer sich um die Hälfte desjenigen Winkels gedreht haben, welchen in der gleichen Zeit die Tangenten der Trajektorie eines frei beweglichen Projektils überstreichen würden.

Obige Betrachtung läfst sich ganz unverändert auf die drei übrigen Quadranten einer Doppelschwingung ausdehnen u. s. f. Somit ist jetzt in voller Strenge für ein in unendlich kleinen Amplituden schwingendes Pendel dargethan, dafs die scheinbare Drehung der Schwingungsebene mit der Hälfte derjenigen Geschwindigkeit erfolgt, mit welcher sich die Richtung der Bewegung eines nach irgend einem Punkte des Horizonts geschleuderten Projektils dreht, dafs also die Gleichung gilt:

$$v = w \, sin. \, \psi.$$

Peirinsius. Habe ich mich in Obigem mit der Betrachtung der Beziehung derjenigen Männer zum Foucault'schen Pendelgesetz, welchen ich eine unbewufste aber wirkliche Vorarbeiterschaft zuspreche, so eingehend beschäftigt, dafs dabei der Gedankenfaden Poissons bis zur Fertigstellung eines strengen Beweises für den berühmten Sinussatz fortgesponnen wurde; so kann ich mich bei der Betrachtung der entgegengesetzten Art von vorbereitenden Gedanken um so kürzer fassen. Denn ich brauche nur eines Experimentes von Peirinsius zu gedenken, über welches etwa um die Mitte des 17. Jahrhunderts Peter Gassendi in einem Briefe an Naudé ausführlich berichtet; (s. S. Günther, Über die Vorgeschichte des Foucault'schen Pendelversuchs, Sitzungsberichte der physik.-medizinischen Societät zu Erlangen vom 26. Mai 1873).

Nach dem erwähnten Berichte soll Peirinsius mit Hülfe eines Pendels einen experimentellen Beweis für die Achsendrehung der Erde geliefert haben. Dabei soll aber das Pendel nach demselben Berichte *spontan* seine Lage in der Vertikallinie verlassen haben, zunächst nach *West-Süd-West* und *Nord-Nord-Ost* abgewichen und hierauf zurückgekehrt sein. Diese Erscheinung wird der Ebbe und Flut verglichen. Peirinsius spricht also aller Wahrscheinlichkeit nach von Ausweichungen eines *zur Ruhe gebrachten Pendels*, d. i. von Ausweichungen, für deren Ursachen man wohl nur irgend welche dem Beobachter entgangene Störungen annehmen kann.

An den Untersuchungen des Peirinsius interessiert also zunächst nur, dafs dieselben von dem Gedanken ausgehen, es müsse das Pendel durch seine Abweichungen die Rotation der Erde um ihre Achse andeuten. Ich werde übrigens noch Gelegenheit haben, auf die Experimente des Peirinsius zurückzukommen.

Foucaults Beweis für den Sinussatz. Nachdem Foucault die scheinbare Drehung der Schwingungsebene eines Pendels experimentell gezeigt, auch aus seinen Beobachtungen herausgelesen hatte, in welcher Weise die Geschwindigkeit, mit welcher die scheinbare Drehung der Schwingungsebene erfolgt, von der Achsendrehung der Erde und von der Breite des Beobachtungsortes abhängt, wandte er sich an Binet um Auskunft darüber, wie sich die von ihm beobachtete Gesetzmäfsigkeit aus den durch die Rotation der Erde gegebenen Bedingungen mit Hülfe der dynamischen Differentialgleichungen herleiten lasse. Während sich Binet noch mit der Beantwortung dieser Frage beschäftigte, trat jedoch schon Foucault selbst mit einer elementaren Ableitung des jetzt nach ihm benannten Sinusgesetzes hervor; und diese Ableitung ist dem Wesen nach unverändert in alle, selbst in die neuesten Lehrbücher der Experimentalphysik aufgenommen.

Foucault selbst scheint den von ihm gegebenen Beweis für den Sinussatz nicht für völlig streng gehalten zu haben; denn am Schlufs des Berichtes über seine Entdeckung (Compt. rend. F. XXXII p. 135) sagt er, dafs er die Richtigkeit des vorausgesehenen Phänomens sowohl seiner Richtung als seiner *wahrscheinlichen* Gröfse nach festgestellt habe. Foucault spricht ferner von gewissen *sekundären Erscheinungen*, welche er vernachläfsigt habe, freilich ohne nähere Angabe der Natur derselben; er spricht von schwer zu beurteilenden Elementen, welche für unsere Breiten die Erscheinung etwas komplizieren, während sich dieselbe unter den Polen in ihrer vollen Reinheit zeigen müsse; er wünscht lebhaft die Aufmerksamkeit der Mathematiker darauf hinzulenken etc.

Derartige Bedenken verstummten jedoch bald; und man findet in den gebräuchlichsten Lehrbüchern jetzt den elementaren Ableitungen des Sinussatzes keine Angabe der zugelassenen und doch oft recht wenig zulässigen Ungenauigkeiten beigegeben. Hierin äufsert sich ohne Zweifel eine mit wissenschaftlicher Forschung wenig verträgliche Neigung, aus der Richtigkeit eines abgeleiteten Satzes grofses Vertrauen auf die Richtigkeit der gegebenen Ableitung zu schöpfen.

Eine Kritik eines so wenig kritischen Verfahrens konnte nicht ausbleiben und ist gewifs berechtigt; aber in der Weise, in welcher solche von einigen Mathematikern geübt worden ist, scheint sie mir doch etwas am richtigen Ziel vorbeizuschiefsen. Deshalb habe ich schon gelegentlich in Carl's Repert. Bd. XVIII p. 283 einige Worte über die Existenzberechtigung elementarer Beweise einschieben zu müssen geglaubt. Ich habe hierbei historisch kritische Betrachtungen im Auge, welche wie die von O. Röthig in einer historisch-didaktischen Studie über den Foucault'schen Pendelversuch in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 24 p. 153—159 veröffentlichten, von der *Thesis* ausgehen, dafs ein billigen Anforderungen genügender und deshalb für Schulzwecke tauglicher elementarer Beweis für das Foucault'sche Pendelproblem nicht geliefert werden könne.

Diese Thesis aber findet viele Verfechter. So sagt, um nur noch einen zu nennen, G. Binder, Rektor der Realanstalt in Ulm: „Ja, ich behaupte geradezu: die sogenannten elementaren Beweise des Foucault'schen Pendelgesetzes sind notwendig und ohne Ausnahme mangelhaft.“ (s. Hoffmann's Zeitschr. Bd. 8, p. 393). Ich aber bin gerade durch das Studium der in die Theorie des Foucault'schen Pendels einschlägigen Litteratur zu der Überzeugung gelangt, dafs die elementar gehaltenen Beweise gar nicht viel weniger zu leisten im Stande sind als diejenigen, welche mit allem Aufwand der subtilsten Hülfsmittel der sog. höhern Mathematik geführt werden. Um diese Ansicht zu rechtfertigen, möchte ich jedoch einige Worte über die Unterscheidung der elementaren von der höhern Mathematik vorherzuschicken mir erlauben.

II. Zur Abgrenzung des Elementaren in der Mathematik.

Über die Zahlformen. Das Zählen sowie die möglichen direkten Vereinfachungen desselben, für welche in den Operationen der Addition, der Multiplikation und des Potenzierens Regeln gegeben sind, führen immer nur zu positiven ganzen Zahlen. Zu der Einführung der übrigen Zahlformen hat zunächst die Notwendigkeit, diese Mutter so vieler Erfindungen, gelegentlich der Verwendung der Umkehrungen zu den angeführten direkten Operationen zwingende Veranlassung gegeben. Die fortschreitende Kultur brachte mit dem Kreditwesen den Begriff der Schuld, dieses Gegenteils (nicht der Verneinung) des Vermögens, und damit die *negative* Zahl, indem die Auszahlung oder die Subtraktion von dem Barvermögen des Auszahlenden aus irgend welchen Gründen nicht vollständig ausgeführt werden konnte oder sollte. Mit der negativen Zahl giebt man den noch zu subtrahierenden Rest an.

In gleicher Weise leiteten Teilungsaufgaben, welche sich mit den positiven oder negativen ganzen Zahlen nicht ganz zu Ende führen liefsen, naturgemäfs dazu hin, dafs man sich mit der Andeutung der noch auszuführenden Teilung des ungeteilt gebliebenen

Restes begnügte. Dies geschieht durch die gebrochene Zahl. Hiermit ist das Gebiet der *rationalen Zahlen* gewonnen.

In der Praxis des zivilisierten Lebens genügt aber auch noch das ganze Gebiet der rationalen Zahlen nicht immer. Wenn ich z. B. die Seite eines Quadrates suche, dessen Flächeninhalt gleich $7 \square^m$ ist, so erhalte ich in $\sqrt{7}$ einen unendlichen unperiodischen Dezimalbruch, also eine Zahl, deren Wert mit beliebiger aber nie mit vollständiger Genauigkeit angegeben werden kann, und welche deshalb in dem Gebiet der rationalen Zahlen nicht unterzubringen ist. Der unendliche Dezimalbruch hat die Form $\infty : \infty$ und kann aus derselben in einen gswöhnlichen Bruch nur dann übergeführt werden, wenn sich in demselben eine Periode zeigt. Es läfst sich aber durch eine einfache Betrachtung zeigen, dafs der Dezimalbruch, welcher $= \sqrt{7}$ sein soll, so wenig ein Ende als eine Periode aufweisen kann. Denn es müfste sonst durch Potenzieren aus einem Bruche, welcher nicht blofs ein uneigentlicher, d. i. eine in der Bruchform versteckte ganze Zahl ist, eine ganze Zahl erhalten werden können.

Mit der Einführung der *irrationalen* Zahlen, d. h. derjenigen Zahlen, welche nicht mehr in das Gebiet der rationalen Zahlen hineinpassen, weil sie kein angebbares Verhältnis zur Einheit haben, ist die Einführung der Idee der Stetigkeit in die allgemeine Gröfsenlehre ermöglicht; denn die beim Radizieren wie in $\sqrt{7}$ gelegentlich auftretenden *irrationalen* Zahlen von der Form $\infty : \infty$ füllen das zwischen zwei rationalen Zahlen stets noch angebbare Intervall in stetiger Weise oder kontinuirlich aus. Deshalb führen naturgemäfs vorzugsweise Anwendungen der allgemeinen Gröfsenlehre auf Ausmessungen des Raumes, also Aufgaben der Geometrie des Maafses, zu irrationalen Zahlen, so z. B. die Aufgabe, das Verhältnis des Durchmessers zum Umfange eines Kreises zu bestimmen.

Erweiterung des Begriffs der irrationalen Zahl. Unsere Anschauung vom Raume sowohl als auch von der Zeit verlangt Kontinuität der Dimensionen. In der Ausmessung derselben kann deshalb die *rationale* Zahl, welche ihrem Wesen nach diskontinuirlich ist, naturgemäfs nur sehr beschränkte Anwendung erfahren; denn beim Messen, d. i. beim Vergleichen z. B. zweier Strecken, der zu messenden Strecke mit der als Einheit gewählten, ist die Voraussetzung der Kommensurabilität in Wirklichkeit strenge nur unendlich selten erfüllt.

Wie in der Analyse der Raumgebilde, so ist auch in der Analyse der Naturgeschehen die Annahme der Stetigkeit durchgehends zulässig, schon weil alle Naturgeschehen im Raume und in der Zeit vor sich gehen. Deshalb und weil wenigstens für die Klarheit der *Vorstellung* die Annahme der Stetigkeit unerläfslich ist, erklärt sich Kirchhoff in seinen Vorlesungen über mathematische Physik gegen punktuelle Ursachen der Massenbeschleunigung, und schliefst sogar alle Theorien aus, welche auf der Annahme von Molekülen beruhen*). Die Einführung einer ihrem Wesen nach nicht mehr diskontinuirlichen Zahlform ist demnnch für die mathematische Behandlung der Naturgeschehen eine *conditio sine qua non.*

Die irrationale Zahl ist die allgemeinste im Gebiete der reellen Zahlen; in der für dieselbe zu gebenden Form müssen deshalb auch die rationalen Zahlen darstellbar sein. Und in der That giebt uns der unendliche periodische Dezimalbruch ein nahe liegendes Beispiel für eine rationale Zahl in der Form $\infty : \infty$. Mehr jedoch als auf die Bestimmung der Form kommt es mir noch darauf an, das Wesen der irrationalen Zahl durch Hinweisen auf ihre Entstehungsgeschichte zu charakterisieren. Der Zahlbegriff mufste sich unserer Anschauung vom Raum und von der Zeit so weit möglich anpassen. Diese Anpassung ist nur in der Idee mit voller Strenge durchführbar. Genau ebenso wie die negative Zahl und die gebrochene Zahl an sich unausführbare Operationen anzudeuten sich begnügen, so kann auch in der irrationalen Zahl nur eine an sich unausführbare Operation angedeutet sein. Denn so lange die Forderungen, welche sich aus der Anwendung des diskontinuirlichen Zahlbegriffs auf die Ausmessung kontinuirlicher Dimensionen ergeben, mit Hülfe der rationalen Zahlen vollkommen erfüllt werden können, d. i. so lange Kommensurabilität der verglichenen Dimensionen besteht; so lange liegt ja keine zwingende Veranlassung zur Einführung einer neuen Zahlform vor.

Die irrationale Zahl enthält die Forderung des Übergangs zur Grenze ∞ oder auch 0, wie wir später sehen werden. Diese Forderung wird durch die vorgesetzte Silbe *lim.* oder durch eine hintenan gesetzte Reihe von Punkten angedeutet, ganz wie das Zeichen (—) die noch auszuführende Subtraktion und der Bruch-

*) Anmerk. Die Bedeutung der Moleküle in der heutigen mathematischen Physik kann ich nicht besser bezeichnen als durch die Bemerkung, dafs man ebensowohl ein Molekül in unendlich viele Raumelemente zerlegen als in ein Raumelement unendlich viele Moleküle hineinlegen kann.

strich oder das Zeichen (:) die noch auszuführende Division in der resp. ersten oder zweiten Erweiterung des Zahlbegriffs anzeigt. Es ist also die *irrationale* Zahl eine Zahl mit hinzugefügtem Operationszeichen wie die negative und die gebrochene Zahl. Die Operation des Grenzübergangs kann im allgemeinen nicht zu Ende geführt werden, gleichwie eine Division im allgemeinen nicht völlig zu Ende geführt werden kann. Für alle Fälle aber, in denen der Übergang zur Grenze völlig zu Ende geführt werden kann, geht die irrationale Zahl in eine speziellere, die rationale Zahl über, ganz wie die gebrochene Zahl für alle die Fälle, in denen die Division aufgeht, in die speziellere ganze Zahl übergeht. Das Wesen der irrationalen Zahl, welche in mathematischen Betrachtungen dieselbe Existenzberechtigung hat wie die negative oder die gebrochene Zahl, ist bezeichnet durch die Verquickung des Stetigkeitsprinzips in den Zahlbegriff mit Hülfe des Grenzbegriffs, welcher für sich wieder auf das Prinzip der allgemeinen Relativität hinweist. Mit Rücksicht hierauf wird sich sogleich der Begriff der irrationalen Zahl noch etwas allgemeiner fassen lassen, als dies in der Form $\infty : \infty$ zunächst geschehen ist.

Archimedes hat zuerst die Idee der Kontinuität oder das Stetigkeitsprinzip für die mathematische Wissenschaft fruchtbar gemacht, indem er dieselbe mit der sog. Exhaustionsmethode beschenkte, mit Hülfe welcher er selbst bereits das Verhältnis der Länge des Durchmessers zur Länge der Peripherie eines Kreises mit guter Annäherung bestimmte. Leibnitz aber hat meines Wissens zuerst eine klare und für mathematische Untersuchungen handliche Definition für das Stetigkeitsprinzip gegeben, welches er übrigens noch als die *lex continuitatis* bezeichnet. Leibnitz sagt, dafs zufolge dieser *lex continuitatis* die Rechnung bei stetigem Übergange zum Unendlichkleinen wie zum Unendlichgrofsen das Endglied mitumfasse. Mit dieser klaren Fassung des Stetigkeitsprinzips hängt die Ausbildung des gleichzeitig von Leibnitz gegebenen Algorithmus der Differentialrechnung enge zusammen.

Es nimmt nämlich der Differentialquotient $dx:dt$ zum Differenzenquotienten $\triangle x : \triangle t$ genau dieselbe Stellung ein wie die *irrationale* Zahl zu der einfach gebrochenen Zahl; nur dafs im Differentialquotienten der Grenzübergang nicht ins Unendlichgrofse sondern ins Unendlichkleine stattfindet. Dafs aber hierauf keine wesentliche Unterscheidung basiert werden kann, erhellt schon daraus, dafs man das Unendlichkleine als den reziproken Wert des Unendlichgrofsen auffassen und damit jeden Unterschied in den Formen $\infty : \infty$ und $0 : 0$ verwischen kann. In speziellen Fällen können auch die Zahlen dieser Form $0 : 0$ rationale Werte erhalten. So erhält man z. B. aus $y = x^2$, $\frac{dy}{dx} = 2$ also $\frac{0}{0} = 2$, ganz ebenso wie in der Form der gewöhnlichen *irrationalen* Zahl $\infty : \infty$ auch alle *rationalen* Zahlen darstellbar waren.

Die einfache oder gewöhnliche *irrationale* Zahl, der unendliche Dezimalbruch ohne Periode, hat direkt kein angebbares Verhältnis zur Einheit, bekommt aber ein solches, so wie man auf Grund des Stetigkeitsprinzips die Zahlen durch Punkte der sog. Zahlenlinie markiert und den Wert derselben durch ihren Abstand vom Nullpunkt bestimmt. In gleicher Weise hat der Differentialquotient direkt kein angebbares Verhältnis zur Einheit und ist also nach der Bedeutung des Wortes *ratio* = Verhältnis als *irrational* zu bezeichnen; denn er hat die Form $0 : 0$. Es wird aber auch das Verhältnis dieser Zahlform mit Hülfe des auf dem Stetigkeitsprinzip basierten Leibnitz'schen Algorithmus angebbar, indem unsere Raumanschauung die Rolle der freundlichen Vermittlerin spielt.

Auf die Integralrechnung läfst sich das vorhin gesagte leicht übertragen; denn diese bietet uns Gröfsen von der Form $0 . \infty$, indem es sich in derselben um Summationen unendlich vieler unendlich kleinen Summanden handelt; und auch Gröfsen dieser Form haben direkt kein angebbares Verhältnis zur Einheit. Die übrigen vieldeutigen Symbole: 0^0; ∞^0; 1^∞; $\infty - \infty$ können sich schon deshalb von den Formen $\infty : \infty$ und $0 : 0$ nicht wesentlich unterscheiden, weil sie stets auf die Formen $\infty : \infty$ oder $0 : 0$ zurückgeführt werden können und in der That in jedem speziellen Falle zurückgeführt werden müssen, wenn der diesem speziellen Falle entsprechende bestimmte Wert eruiert werden soll.

Zur Metaphysik der irrationalen Zahl. Leibnitz hat es, gewifs ohne deshalb Tadel zu verdienen, unterlassen zu untersuchen, ob solche unendlich kleinen und unendlich grofsen Gröfsen wirklich existieren *(reales)* und streng mathematisch *(in sensu rigoroso ac metaphysico)* nachzuweisen oder blofs gedachte Gröfsen sind. Die Untersuchung dieser Frage, welche für Metaphysiker vielen Reiz haben dürfte, würde wahrscheinlich eine enge Beziehung zwischen den Prinzipien der Stetigkeit und der allgemeinen Relativität zu Tage fördern. Wenigstens ist beim weitern Verfolgen des dem Leibnitz'schen Algorithmus zu Grunde liegenden Gedankens die Notwendigkeit der Einführung unendlich grofser sowohl als auch unendlich kleiner Gröfsen *höherer* Ordnung zu Tage getreten. Hierin liegt aber doch wohl eine deutliche Hinweisung auf das Prinzip der allgemeinen Relativität.

Eine solche Untersuchung erscheint mir manchmal sogar als recht wünschenswert auch noch aus einem andern Gesichtspunkte; dann nämlich, wenn ich bedenke, wie oft ich Gelegenheit gehabt habe zu beobachten, dafs den Grenzübergängen zum Unendlichgrofsen so wie zum Unendlichkleinen ein schwer zu besiegendes Mifstrauen entgegengebracht wird, ähnlich wie man früher vielfach geneigt war, für die Bezeichnung *irrationale* Gröfse als passende Übersetzung *„unvernünftige* Gröfse“ anzuerkennen, und die *immaginären* Gröfsen im Gegensatze zu den *realen* für eingebildete Gröfsen zu erklären.

Ja sogar die Stetigkeit in den Dimensionen unserer Raumanschauung ist nicht ganz unangefochten geblieben; denn Riemann deutet in seinen mathematischen Werken, herausgegeben von H. Weber, p. 267 an, dafs durch das Zurückgreifen auf das Unmefsbarkleine schliefslich vielleicht eine der wesentlichen Eigenschaften des Raumes sich verändern könne. Mir allerdings erscheint die Stetigkeit als eine fundamentale, nicht wegzudenkende Eigenschaft des Raumes, und ich kann deshalb in der angeführten Bemerkung Riemanns nur die Neigung zu einer Konzession gegen den Begriff der an sich zunächst diskontinuirlichen Zahl erblicken, zu einer Konzession also, welche der Geometer dem Analytiker machen soll. Denn in der That strebt Riemann ein Kompromis zwischen beiden an. Er strebt darnach, durch seine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit Gröfsenfunktionen in geometrische Beziehungen eines denkbaren Raumes umzuwandeln, indem jedes Gröfsensymbol als eine Raumgröfse soll gedeutet werden können. Durch eine solche Deutung wird aber in den Gröfsenbegriff die Stetigkeit verquickt, gleichviel ob mit oder ohne Andeutung von Klauseln.

Spekulative Erweiterung des Zahlbegriffs. Bis hierher ist die Einführung neuer Zahlformen von einer gewissen in dem Fortschreiten der Kultur begründeten Notwendigkeit diktiert worden; denn auch diejenigen Aufgaben, welche gelegentlich der Betrachtung kontinuirlicher Gebilde oder Vorgänge zu irrationalen Zahlen führen, haben zumeist eminent praktische Bedeutung, indem die Lösung derselben zur Beschaffung von Hülfsmitteln für die Förderung des durchschnittlichen Wohlbefindens der Menschheit unerläſslich ist. Mit Gauſs aber beginnt ein neuer Abschnitt in der sog. höhern Mathematik, in welchem der *dira necessitas* die Initiative für die Verallgemeinerung des Zahlbegriffs entrissen ist.

Gauſs hat den Begriff der ganzen Zahl erweitert; denn Gauſs nennt $p+qi$ eine *ganze komplexe* Zahl, wenn p und q ganze reelle Zahlen sind, und i in der üblichen Bezeichnung für $\sqrt{-1}$ gesetzt ist. Diese Verallgemeinerung stützt sich auf Betrachtungen über die Wurzeln der Einheit, und zwar ist die Gleichung $x^4=1$ zu Grunde gelegt, deren Wurzeln sind: 1; i; -1; $-i$. Die Gleichung $x^2=1$ mit ihren Wurzeln $+1$ und -1 liefert das gewöhnliche reelle Zahlensystem. Die Gleichung $x^3=1$, deren Wurzeln sind: 1; ϱ; ϱ^2, wenn $\varrho=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ gesetzt ist, liefert Zahlen von der Form: $p+q\varrho+r\varrho^2$ u. s. f. Es leuchtet sofort ein, daſs man bei dem Streben, nach dieser Richtung hin den Zahlbegriff zu erweitern, auch von der allgemeinen Gleichung $x^n=1$ ausgehen könnte, ja daſs man sogar mit Hülfe der Wurzeln: ϱ_1; ϱ_2; ϱ_3; ...... ϱ_n der allgemeinen Gleichung $n$ten Grades: $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots+a_n=o$ eine komplexe Zahl bilden könnte von der Form:

$$m+n\varrho_1+o.\varrho_2+p\varrho_3+\cdots+s\varrho_n.$$

Geht man von den Wurzeln der Einheit aus, so ist eine einfache Reduktion möglich, da die Summe der Wurzeln der Einheit gleich Null ist. Ganz ebenso ist aber auch in der soeben gegebenen allgemeinsten komplexen Zahl eine Reduktion möglich, indem man mit Hülfe der Gleichung:

$$\varrho_1+\varrho_2+\cdots\cdot+\varrho_n=-a_1$$

ein ϱ wegschafft; denn wenn auch auf diese Weise a_1 für das eliminierte ϱ eingeführt wird, so kann doch gleich dies a_1 mit m, dem schon vorhandenen Vielfachen der reellen Einheit, zusammengenommen werden. Das System dieser allgemeinsten komplexen Zahlen findet auf einer $n$blättrigen Riemann'schen Fläche entsprechende Darstellung wie das System der Gauſs'schen komplexen Zahlen auf einer Ebene.

Wenn ich im Vorhergehenden das Miſstrauen, welches noch vielfach den verschiedenen Formen der irrationalen Zahl entgegengebracht wird, zu zerstreuen wünschte, auch schon deshalb, weil diese Zahlformen in ihren Anwendungen auf praktisch wichtige Probleme stets in der Erfahrung eine naturgemäſse Kontrolle finden, so möchte ich umgekehrt bei den ausschliefslich auf spekulativen Erwägungen gegründeten Erweiterungen des Zahlbegriffs auf die Notwendigkeit gröfster Vorsicht aufmerksam machen; denn für die ganzen Zahlen gelten in den *erweiterten* Systemen selbst die einfachsten Sätze über die gewöhnlichen ganzen Zahlen nicht immer; z. B. der Satz, dafs eine Zahl nur in *einer* Weise in Primfaktoren zerlegt werden kann.

In seinen Vorlesungen über die Zahlentheorie machte Scheibner (Leipzig 1875) schon darauf aufmerksam, dafs sich 15 aufser in die beiden Faktoren 3 und 5 auch noch in die Faktoren $(2+\sqrt{-11})$ und $(2-\sqrt{-11})$ zerlegen lasse. Wenn man also die Form der ganzen komplexen Zahl mit Hülfe der Wurzeln $\pm\sqrt{-11}$ der Gleichung $x^2=-11$ bildet, so erhält man in der gegebenen Faktorenzerlegung $15=(2+\sqrt{-11})\,(2-\sqrt{-11})$ Faktoren von der Form der ganzen komplexen Zahl und zwar auch Primfaktoren; denn $(2+\sqrt{-11})$ und $(2-\sqrt{-11})$ sind in weitere Faktoren von der Form $p+q\sqrt{-11}$ nicht zerlegbar. Ferner sind auch $(2+\sqrt{-11})$ und $(2-\sqrt{-11})$ in 3 und 5 nicht als Faktoren enthalten, so dafs also die beiden Faktorenzerlegungen:

$$15=3.5 \text{ und}$$
$$15=(2+\sqrt{-11})\,(2-\sqrt{-11})$$

zwei von einander unabhängige Zerlegungen darstellen für dieselbe Grundform $p+q\sqrt{-11}$ der ganzen komplexen Zahl; denn 3 und 5 fügen sich dieser Form ein für den Fall $q=o$.

Über die Abgrenzung des Elementaren in der Mathematik. Ich habe die spekulative Erweiterung des Zahlbegriffs in dieser Ausführlichkeit erörtert, weil ich darauf einen Vorschlag für die Abgrenzung der Gebiete der elementaren und der höhern Mathematik gründen möchte. Bei der üblichen Abgrenzung des Elementaren in der Mathematik richtet man sich nach der durchschnittlich für die Reife zum Besuch der Universität als erforderlich festgesetzten mathematischen Schulung, wenn man nicht gar die Begriffe elementar und leicht identifiziert. Diese Schulung ist verschieden für verschiedene Länder und Landesteile, sie ist naturgemäfs nur mangelhaft bestimmt, nicht nur, wenn man einen Zeitraum von wenigstens einigen Dezennien ins Auge fafst, sondern sogar für eine bestimmte Zeit, etwa das laufende Jahr. Der Kernfehler scheint mir aber darin zu beruhen, dafs der Einteilungsgrund nicht der Mathematik selbst ja nicht einmal den Anwendungen entlehnt ist, welche die Mathematik in den verschiedenen Wissenszweigen findet.

Bei der Wahl eines Einteilungsgrundes ist stets zuerst nachzusehen, ob nicht in der abzuteilenden Sache selbst ein solcher Einteilungsgrund gefunden werden könne, und erst wenn hierfür die Unmöglichkeit oder wenn die absolute Unzweckmäfsigkeit der Abgrenzung dargethan ist, welche sich auf Grund eines der Sache selbst entnommenen Einteilungsgrundes durchführen liefse, dann mag es gestattet sein, einen Einteilungsgrund von aufsen her an die Sache hinanzutragen. Der Gröfsenbegriff bietet einen der Mathematik selbst entnommenen sogar sehr nahe liegenden Einteilungsgrund; demnach erübrigt es blofs noch nachzuweisen, dafs eine nach demselben durchgeführte Teilung nicht absolut unzweckmäfsig ist. Mit einem solchen Nachweis ist die Unzulässigkeit der üblichen Teilung dargethan.

Ich schlage vor, alle diejenigen mathematischen Betrachtungen als elementare zu bezeichnen, welche sich mit dem nicht mehr als notwendig erweiterten Zahlbegriff, also mit den Formen der allgemeinen irrationalen Zahlen, beschäftigen, während alle diejenigen Betrachtungen als der höhern Mathematik angehörig bezeichnet werden müfsten, denen Zahlformen zu Grunde liegen, auf welche nicht so sehr die zwingende Notwendigkeit als die freie Spekulation hinführte.

Es ist leicht ersichtlich, dafs bei der Wahl des Gröfsen- oder Zahlbegriffs als Einteilungsgrund der Forderung leicht genügt werden kann, dafs bei der weitern Fortsetzung der Teilung der einmal gewählte Einteilungsgrund möglichst bis zu Ende beibehalten werde. Ich werde mich jedoch, um nicht gar zu weit abzuschweifen, in Folgendem begnügen, zu zeigen, dafs man die in Vorstehendem vorgeschlagene erste Zweiteilung wohl als zweckmäfsig bezeichnen darf.

Erstlich ist nämlich mit derselben ziemlich identisch die Abgrenzung einer vorwiegend praktischer Verwendbarkeit zustrebenden Mathematik von derjenigen Mathematik, welche sich ihre höheren Ziele unbeirrt durch fremde Interessen sich selbst genügend setzt. Es wäre also die Benennung „höhere Mathematik“ gerechtfertigt, indem man das Wort „höher“ in der höhern, allerdings recht oft gemifsbrauchten Bedeutung des Wortes nimmt nach Analogie von: höhere Bildung etc. Ferner würde sich diese Abgrenzung des Elementaren sehr wohl der historischen Entwickelung der Mathematik anpassen und zugleich der Wesensverschiedenheit der in der Mathematik zur Verwendung gelangenden Methoden gebührende Rechnung tragen. Man hat nämlich bei der vorgeschlagenen Abgrenzung in der elementaren Mathematik eine vorwiegend konkrete Behandlungsweise mit liebevoller Versenkung in die einzelnen Probleme und Aufgaben, indem die Mathematik der Griechen in wenig veränderter Richtung weiter gefördert wird, während in der höhern Mathematik das Streben nach weiter Umschau, nach möglichst allgemein anwendbaren Methoden, nach Sätzen, welche möglichst alle denkbaren Beziehungen in einem möglichst grofsen Gebiete als spezielle Fälle enthalten, kurz das Streben nach der wahren und höchsten Einfachheit durch die Erkenntnis des Zusammenhangs der einzelnen Probleme durchaus dominiert. Die höhere Mathematik ist aber auch die moderne Mathematik. Die vorzüglichsten Hülfsmittel für die Gewinnung einer weiten Umschau, für die Erkenntnis des ganzen Aufbaues sind erst ermöglicht durch die prinzipielle Verwendung des von Gaufs eingeführten Begriffs der ganzen komplexen Zahl. Man denke nur an die gerade im laufenden Dezennium wie im Sturm fortschreitende neuere Geometrie oder an die Theorie der Funktionen komplexer Variablen. Schliefslich aber findet auch noch in der von mir vorgeschlagenen Zweiteilung die jetzt gewohnte Abgrenzung des Elementaren möglichste Berücksichtigung; denn grade unsere höheren Schulen sind die vorzüglichsten Stätten für die Fortbildung der Mathematik der Alten. Diese Mathematik der Alten, oder bestimmter der Griechen, ist eben ganz besonders geeignet, den Zielen unserer höhern Schulen zuzuführen, weil ganz besonders die Griechen die Mathematik vor dem Unwesen allgemeiner, und in ihrer Allgemeinheit nichts sagender Räsonnements, vor der Überstürzung bodenloser Spekulation, kurz vor allen den Fehlern bewahrt haben, welche die Philosophie in ihrer Entwickelung so sehr schädigten. Gerade die weitgehende Abstraktion, diese Quelle aller Vorzüge der höhern Mathematik, macht dieselbe für unsere höhern Schulen unbrauchbar. Ich brauche nur an geometrische Betrachtungen zu erinnern, in denen zwei immaginäre Punkte eine reelle Linie bestimmen, gleichwie zwei immaginäre Linien einen reellen Schnittpunkt haben; und mit solchen Betrachtungen beginnt jetzt die sog. neuere Geometrie. Nach hundert Jahren mag man vielleicht derartige Abstraktionen von Jünglingen zwischen dem 15ten und 20ten Jahre auch bei mäfsiger Beanlagung beanspruchen können.

Ich trage kein Bedenken, den Vorteil der Schärfe in der von mir vorgeschlagenen Grenzlinie zwischen der elementaren und der höhern Mathematik teilweise, wenigstens vorläufig, zu opfern, um der historischen Entwickelung der Mathematik zu Liebe die Aufstellungs- und Behandlungsweise der Probleme mit berücksichtigen zu können. So möchte ich fast die ganze neuere Mechanik, eben weil sie modern ist, weil sie sich dem Geiste der Mathematik der Neuzeit entsprechend zu einer Theorie der partiellen Differentialgleichungen entwickelt hat, in die höhere Mathematik verweisen, wenn auch in ihr noch nicht der Begriff der komplexen ganzen Zahl prinzipielle Anwendung findet. Das Streben nach möglichst allgemein verwendbaren Methoden, nach Gewinnung gröſsern Zusammenhangs und gröſserer Einfachheit ist schon alt im Vergleich zu der prinzipiellen Verwendung der komplexen Zahl in der Mathematik. Gleichwohl hat die prinzipielle Verwendung der komplexen Zahl sich schon in dem gröſsten Teil des Gebietes der als modern zu bezeichnenden Mathematik jedenfalls dauernd festgesetzt. Ich erinnere nur an die neuere Geometrie, die Funktionentheorie, Theorie der Gleichungen etc., und ich zweifle nicht daran, daſs bald die komplexe ganze Zahl eine unzertrennliche Begleiterin jeder modernen mathematischen Forschung sein wird, daſs sie also in allen denjenigen Gebieten festen Fuſs fassen wird, welche z. B. oft dadurch äuſserlich leicht kenntlich gemacht sind, daſs in ihnen die Ausstellung von Theorien angekündigt wird. Alsdann wird sich die Grenze, wie ich sie mir vorstelle, leicht etwas genauer zeichnen lassen.

H. Hankel illustriert den Unterschied in dem Wesen der alten und der modernen Mathematik l. c. p. 9 wie folgt: „Vergleichen wir ein mathematisches Problem mit einem gewaltigen Felsen, in dessen Inneres wir eindringen wollen, so erscheint die Arbeit der griechischen Mathematiker als die eines rüstigen Steinhauers, der mit Hammer und Meiſsel in unermüdlicher Ausdauer den Felsen langsam von auſsen her zu zerbröckeln beginnt; der moderne Mathematiker aber als ein trefflicher Minierer, der diesen Felsen zunächst mit wenigen Gängen durchzieht, von denen aus er dann den Felsblock mit einem gewaltigen Schlage zersprengt und die Schätze des Innern zu Tage fördert.“ Hieran anknüpfend möchte ich noch zur weitern Beleuchtung der nach meinem Plane zu ziehenden Grenzlinie bemerken, daſs es der elementaren Mathematik nicht so sehr um die im Innern des Felsens verborgenen

Schätze als um die abzubrechenden Stücke des Gesteins selbst zu thun ist, da aus diesem kostbaren Material — und bei solchem wendet man auch heute noch in den Brüchen Hammer und Meifsel an — die Säulen im Dome der Naturforschung aufgebaut werden sollen.

Ich glaube deshalb, dafs es ganz besonders im Interesse der Naturforschung wünschenswert ist, eine Grenze zwischen der elementaren und der höhern Mathematik in der von mir vorgeschlagenen Weise möglichst deutlich zu markieren, und wenn dadurch auch nur eine Erleichterung des Studiums für diejenigen angebahnt werden sollte, welche sich für ihre jedenfalls vorwiegend experimentellen naturwissenschaftlichen Untersuchungen eine möglichst gute mathematische Schulung erwerben wollen. Ich will keineswegs den experimentellen Physiker von dem spekulativen Physiker streng absondern, aber es ist auch noch ein weiter Weg vom spekulativen Physiker zum eigentlichen Mathematiker, und ich sehe z B. durchaus für einen unserer geachtetsten experimentellen Physiker den Nutzen davon nicht ein, dafs derselbe sich rühmen kann, als Student eifrigst Zahlentheorie gehört zu haben, an welche keine seiner zahlreichen Arbeiten auch nur mit einer Silbe erinnert. Dagegen begreife ich vollständig das Erstaunen von Magnus über diesen mathematischen Eifer seines Praktikanten, dessen Neigung zu experimentellen naturwissenschaftlichen Untersuchungen durchaus bestimmt ausgesprochen war. Ich bin überzeugt, dafs ein vorwiegend experimentellen Untersuchungen zugewendeter Physiker, Zeit seines Lebens nur die elementare Mathematik verwendbar finden wird, ja dafs derselbe selbst diejenigen Untersuchungen, deren Stellung nach der von mir vorgeschlagenen Abgrenzung des Elementaren nicht leicht in der Kürze bestimmbar ist, seiner auf das Konkrete gerichteten Denkweise möglichst anpassen, vielleicht anpassen *müssen* wird, bevor er dieselben für die Naturforschung fruchtbar macht. Um durch ein Beispiel näher zu bestimmen, in welcher Weise dies geschieht, will ich nur an die Behandlungsweise der Kugelfunktionen durch W. Hankel (Leipzig) erinnern.

Es möchte aber leicht jemand auch nach der von mir vorgeschlagenen Abgrenzung in einer sichern Handhabung der elementaren Mathematik noch keine genügende mathematische Vorbildung für den experimentellen Physiker z. B. zu erkennen geneigt sein, da ich doch immer noch die elementare Mathematik als griechisch ihrem Wesen nach bezeichnet habe. Ich wiederhole deshalb, daſs ich das Wesen der griechischen Mathematik in der Hingabe an einzelne Aufgaben oder Probleme erblicke, und bemerke, daſs mit solcher liebevollen Hingabe nicht notwendig Feindseligkeit gegen jede Abstraktion und Begriffserweiterung verbunden ist. Dies war bei den Griechen nicht der Fall und ist es noch viel weniger in der heutigen elementaren Mathematik. Es macht sich das Prinzip der allgemeinen Relativität, wie überall im Naturgeschehen, so auch in der Entwickelungsgeschichte einer Wissenschaft stets geltend; so könnte z. B. leicht jemand, ohne viel Widerspruch zu erfahren, den trefflichen p. 57 citierten Vergleich H. Hankels anstatt auf die griechischen und die modernen Mathematiker auf Euler und Lagrange anwenden. Ich gebe zu, daſs unsere Schulgeometrie, welche sich klüglich ihrer griechischen Abstammung nicht schämt, bettelarm ist an allgemeinen Gesichtspunkten im Vergleich mit der neueren Geometrie, von welcher H. Hankel rühmend sagt, daſs sie den Organismus aufgedeckt habe, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind; aber gleichwohl gilt von unserer Schulgeometrie nicht mehr, was H. Hankel an der antiken Geometrie tadelt, daſs sie die sämtlichen denkbaren, oft sehr zahlreichen Fälle von einander unabhängig, alle mit derselben Ausführlichkeit erledige, daſs sie zu Gunsten einer scheinbaren Einfachheit und Anschaulichkeit die wahre Einfachheit und die wahre Anschaulichkeit aufopfere etc. So mangelt es auch jetzt nicht mehr an Methoden, welche für ganze Klassen von Aufgaben verwendbar sind. Ich brauche nur an die Methode der geometrischen Örter zu erinnern, welche gewissermaſsen in der analytischen Geometrie allgemeine Verwendbarkeit erhalten hat; und in der Exhaustionsrechnung könnte z. B. die Formel: $\lim_{x=\infty} \frac{\Sigma x^{m-1}}{x^m} = \frac{1}{m}$ so weitgehende Verwendung finden, daſs ich sogar in einem Lehrbuch der Experimentalphysik, wie in demjenigen Wüllners, eine Beschränkung auf Rechnungen nach der Exhaustionsmethode nicht nur für möglich, sondern sogar für wünschenswert halte.

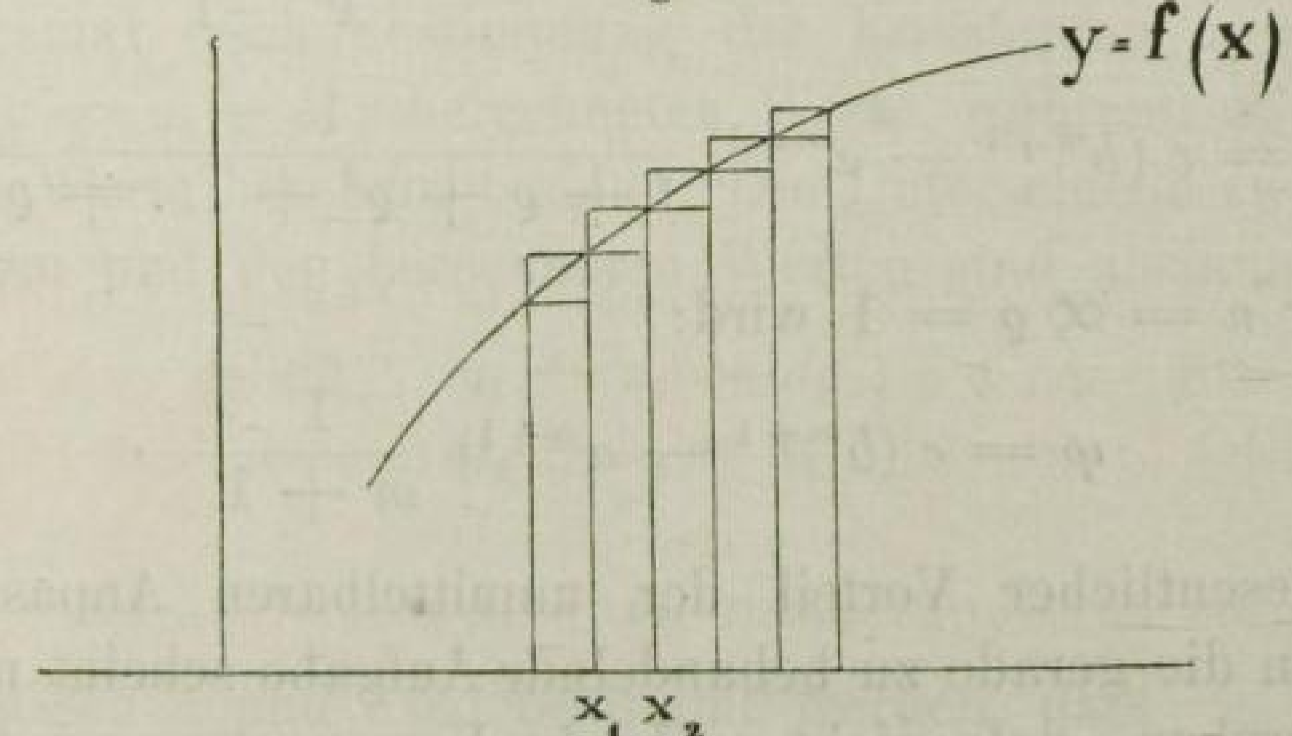
Da ich die Zweckmäſsigkeit der von mir vorgeschlagenen Abgrenzung des Elementaren in der Mathematik auch damit begründet habe, daſs in derselben auf die gewohnte Abgrenzung möglichste Rücksicht genommen sei, so möchte ich noch einem denkbaren Miſsverständnis vorbeugen, dem Gedanken nämlich, daſs ich der Meinung sei, es müfsten die Pensa der Mathematik auf unsern höhern Schulen sich der Vergröfserung des Gebietes der elementaren Mathematik entsprechend erweitern. Es steht mit den vorstehenden Betrachtungen durchaus im Einklange, dafs ich vielmehr manche Bestrebungen, Neues in die Pensa der Schulmathematik aufzunehmen, für durchaus unberechtigt halte, da in denselben dem Sinne der Schüler für das Konkrete nicht genügend Rechnung getragen wird. Ich billige es z. B. nicht, dafs manche Mathematiker die neuere Geometrie, als Geometrie der Lage, in das Gymnasium einführen möchten, denn ich glaube nicht an die Möglichkeit einer organischen Einfügung in die für das Gymnasium festzuhaltenden Lehrstoffe und Methoden. Zudem existiert gewissermafsen in der heutigen neuern Geometrie eine Geometrie der Lage nicht mehr, da man in dieselbe Mafsbestimmungen mit Hülfe eines s. g. Normalkegelschnittes eingeführt hat. Ich würde ferner recht gern den gröfsten Teil der Anwendungen des allgemeinen binomischen Lehrsatzes streichen und könnte auch diese Streichung aus den vorstehenden Betrachtungen direkt begründen. Um noch einmal an den trefflichen Vergleich H. Hankels (p. 57) zu erinnern: wer könnte es verantworten, einem Lehrling anstatt Hammer und Meifsel Dynamitpatronen zum Handwerkszeug zu geben; aber wenn der Steinmetzlehrling nicht mit Dynamitpatronen hantieren soll, folgt denn daraus, dafs er gleich alle Arbeiten mit Hammer und Meifsel soll ausführen lernen? Die Operation des Grenzübergangs würde ich allerdings gerne an den Gymnasien etwas mehr geübt sehen, als es mir, nach den gebräuchlichsten Lehrbüchern zu urteilen, jetzt durchschnittlich der Fall zu sein scheint. Von der Einführung der irrationalen Zahl in der Untersekunda an, findet sich hierzu besonders bei gleichzeitiger Pflege der Exhaustionsmethode fortwährend Gelegenheit.

Die elementare Mathematik auf der Universität. Es würde ein Student der Naturwissenschaften, wenn er wenigstens seine Vorbildung auf einem Gymnasium erhalten hat, vollauf Grund haben, noch auf der Universität an seiner mathematischen Ausbildung weiter zu arbeiten, auch wenn er keine Lust verspürt, Streifzüge über die Grenze der elementaren Mathematik hinaus in diejenigen Gebiete zu unternehmen, welche ich dem Mathematiker von Fach und Beruf reservieren möchte. Um mir nun auch über die Bedeutung dieser mathematischen Studien eines Studenten der Naturwissenschaften wenigstens etwas Klarheit zu verschaffen, frage ich:

wie unterscheidet sich denn überhaupt eine Rechnung, welche nach der Exhaustionsmethode durchgeführt wird, von der Ausrechnung eines Integrals? Denn so viel ist wohl aus dem Vorhergehenden zu entnehmen, dafs sich ein Student der Naturwissenschaften ganz besonders in der Operation des Grenzübergangs weiter zu üben hat, geschehe dies nun im Exhaustionskalkul oder im Infinitesimalkalkul; und man erkennt leicht in der Formel $\lim\limits_{x=\infty} \frac{\Sigma\, x^{m-1}}{x^m} = \frac{1}{m}$, welche besonders häufiger Verwendung im Exhaustionskalkul fähig ist, die Integralgleichung: $\frac{\int x^{m-1}\, dx}{x^m} = \frac{1}{m}$.

Im Exhaustionskalkul sind gewissermafsen noch Differentiation und Integration zu einem Stück vereinigt, indem sich die Summation oder Integration nach der Herstellung der zu summierenden Differentiale aus der Herstellungsweise der letzteren ganz von selbst ergiebt; denn es mufs sich in der Exhaustionsmethode der Übergang zur Grenze jeder speziellen Aufgabe ganz besonders anpassen. Darin ist manchmal vielleicht eine kleine Unbequemlichkeit in der Anwendung, aber auch mancher Vorteil begründet. Und auch sogar in der Berechnung eines bestimmten Integrals thut man manchmal im Interesse der Eleganz der Rechnung wohl daran, eine Anpassung an den zu integrierenden Ausdruck nicht zu verschmähen.

Fig. 5.



In der Definitionsgleichung der bestimmten Integrale:

$$\varphi = \lim_{d=o} \delta\, (f a + f\,(a + \delta) + f\,(a + 2\,\delta) + \ldots.)$$

sind die eingeschalteten intermediären Punkte $x_1\; x_2$ .. äquidistant gewählt. Der Abstand derselben ist $\delta = \frac{b-a}{n}$, wenn n die Anzahl der intermediären Punkte, und a und b die Grenzen des Integrals bezeichnen. Ist nun z. B. die Funktion der Kurve, über welche die Integration zu erstrecken ist, $y = c \cdot x^m$, so ist es weit zweckmäfsiger, die intermediären Punkte so zu wählen, dafs ihre Werte nicht die Glieder einer arithmetischen, sondern die Glieder einer geometrischen Reihe bilden. Es sei $\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \varrho$; demnach

$$x_1 = a\varrho,\ x_2 = a\varrho^2,\ x_3 = a\varrho^3 \ldots \underset{n-1}{x} = a\varrho^{n-1},\ b = a\varrho^n.$$

Alsdann ist

$$\varphi = lim \left\{ c a^m (a\varrho - a) + c (a\varrho)^m (a\varrho^2 - a\varrho) + \ldots \right.$$
$$\left. + c \left(a\varrho^{n-1}\right)^m (a\varrho^n - a\varrho^{n-1}) \right\},$$

oder $\varphi = \lim\limits_{n=\infty} \{ c a^{m+1} (\varrho - 1)(1 + \varrho^{m+1} + \varrho^{2(m+1)} + \varrho^{3(m+1)}$
$$+ \ldots + \varrho^{(n-1)(m+1)} \}$$

oder
$$\varphi = \lim_{n=\infty} \left\{ (\varrho - 1) c \cdot a^{m+1} \cdot \frac{\varrho^{n(m+1)} - 1}{\varrho^{m+1} - 1} \right\},$$

oder da $\varrho^n = \frac{b}{a}$ ist

$$\varphi = c \cdot (b^{m+1} - a^{m+1}) \lim_{n=\infty} \frac{\varrho - 1}{\varrho^{m+1} - 1},$$

oder
$$\varphi = c\,(b^{m+1} - a^{m+1}) \frac{1}{1 + \varrho + \varrho^2 + \ldots + \varrho^m},$$

also da für $n = \infty$ $\varrho = 1$ wird:

$$\varphi = c\,(b^{m+1} - a^{m+1}) \frac{1}{m+1}.$$

Ein wesentlicher Vorteil der unmittelbaren Anpassung der Rechnung an die gerade zu behandelnde Aufgabe scheint mir ferner darin zu beruhen, dafs nicht so leicht Voraussetzungen übersehen werden, wie dies bei der mehr mechanischen Anwendung allgemeiner Methoden so leicht geschieht. Wenn z. B. zwei Gröfsen in der Weise von einander abhängen, dafs die erste durch die zweite in der Form

$$y = a + b\,x$$

bedingt wird, so ergiebt sich bei der Anwendung der partiellen Differentiation in der Methode der kleinsten Quadrate sofort:

$$\frac{\delta \Sigma [y - (a + b\,x)]}{\delta a} = o$$

$$\frac{\delta \Sigma [y - (a + b\,x)]}{\delta b} = o$$

d. i.
$$\Sigma (y - a - b\,x) = o$$
$$\Sigma\, x\, (y - a - b\,x) = o$$

woraus sich für n Beobachtungen ergiebt, da $\Sigma a = a\,n$ ist:

$$a = \frac{\Sigma(x)\ \Sigma(x\,y) - \Sigma(y)\ \Sigma(x^2)}{(\Sigma(x))^2 - n\ \Sigma(x^2)}$$

$$b = \frac{\Sigma(x)\ \Sigma(y) - n\ \Sigma(x\,y)}{(\Sigma(x))^2 - n\ \Sigma(x^2)}\,.$$

Wie leicht werden hierbei die beiden folgenden Voraussetzungen übersehen: 1) Wenn man den Einfluſs des in einer Gröſse begangenen Fehlers bestimmen will, so braucht man sich um die der andern nicht zu kümmern. 2) Der Fehler im Resultat, welcher aus einem Beobachtungsfehler (oder Fehler in einer Variablen der Funktion) entsteht, wächst der Gröſse des letzteren proportional.

Viel weniger leicht gerathen diese beiden Voraussetzungen in Vergessenheit, wenn man rechnet wie folgt. Man bezeichne mit z die jedesmal nach Bestimmung der Konstanten a und b nach der Form $z = a + b\,x$ berechneten Werte, während mit y die beobachteten Werte bezeichnet sind. Die Unterschiede zwischen den beobachteten und den berechneten Werten sind alsdann:

$$y_1 - z_1 = d_1$$
$$y_2 - z_2 = d_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n - z_n = d_n,$$

und es müssen a und b so bestimmt werden, daſs

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots + d_n^2$$

möglichst klein werde. Es muſs also:

1) $[y_1 - (a + b\,x_1)]^2 + [y_2 - (a + b\,x_2)]^2 + \ldots + [y_n - (a + b x^n)]^2$

einen Wert annehmen, welcher kleiner ist als:

2) $[y_1 - (\alpha + \beta\,x_1)]^2 + [y_2 - (\alpha + \beta\,x_2)]^2 + \ldots + [y_n - (\alpha + \beta\,x_n]^2$,

wenn ich $\alpha = a \pm \varepsilon$, $\beta = b \pm \varepsilon$ setze und unter ε eine beliebig kleine Gröſse verstehe. Aus 1) und 2) erhalte ich resp.

$$\sum_1^n (y^2) - 2a \sum_1^n (y) - 2b \sum_1^n (xy) + na^2 + 2ab \sum_1^n (x) + b^2 \sum_1^n (x^2)$$

$$\sum_1^n (y^2) - 2\alpha \sum_1^n (y) \ldots\ldots$$

Wenn ich jetzt in den von a abhängigen Teil dieser Summe für α den Wert $a \pm \varepsilon$ einsetze, so ergiebt sich die Bedingung:

$$na^2 - 2a\left\{\sum_1^n (y) - b\sum_1^n (x)\right\} < n(a \pm \varepsilon)^2 - 2(a \pm \varepsilon)\left\{\sum_1^n (y) - b\sum_1^n (x)\right\}$$

Ebenso erhält man für den von β abhängigen Teil:

$$b^2 \sum_1^n (x^2) - 2b\left\{\sum_1^n (xy) - a\sum_1^n (x)\right\} < (b \pm \varepsilon)^2 \sum_1^n (x^2)$$
$$- 2(b \pm \varepsilon)\left\{\sum_1^n (xy) - a\sum_1^n (x)\right\}.$$

Hierbei ist nicht leicht zu übersehen, daſs man *nicht gleichzeitig* für α und β die Werte $a \pm \varepsilon$ und $b \pm \varepsilon$ einsetzt.

Wenn ich jetzt die rechten Seiten ausführe und die linken davon subtrahiere, so erhalte ich:

$$o < n\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon\left[na + b\sum_1^n (x) - \sum_1^n (y)\right]$$

$$o < \varepsilon^2 \sum_1^n (x^2) \pm 2\varepsilon\left[b\sum_1^n (x^2) + a\sum_1^n (x) - \sum_1^n (xy)\right].$$

Hieraus aber ergiebt sich nach einer Division mit $2\,\varepsilon$ durch den Grenzübergang $\lim \varepsilon = o$, wodurch einzeln α in a und β in b übergeführt wird:

$$na + b\sum_1^n (x) - \sum_1^n (y) = o$$

$$b\sum_1^n (x^2) + a\sum_1^n (x) - \sum_1^n (xy) = o.$$

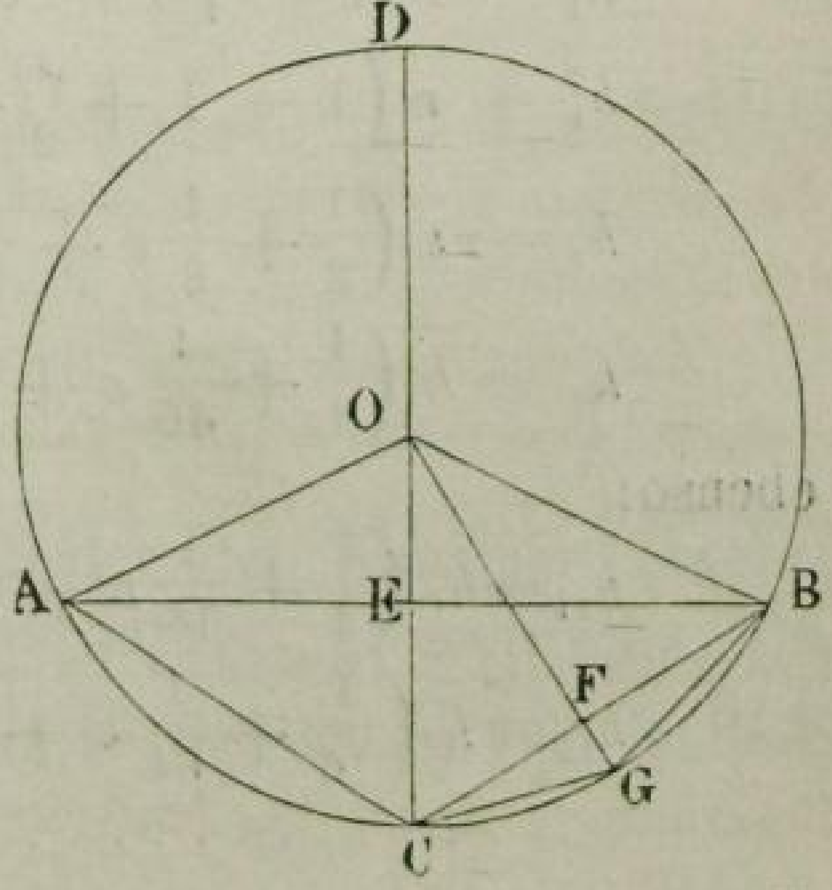
Diese beiden Gleichungen sind aber identisch mit denjenigen, welche ich p. 63 durch partielle Differentiation von $y = a + bx$ erhalten habe.

Zu allermeist aber dürfte für den wissenschaftlichen Wert elementarer d. h. solcher Darstellungen, welche sich der speziellen Aufgabe möglichst eng anpassen, die aus der Selbstbeobachtung leicht zu entnehmende Thatsache sprechen, daſs für jede eigentliche Erfindung oder vielleicht besser für jeden schöpferisch neuen Gedanken die unmittelbaren und anschaulichen Auffassungs- und Behandlungsarten das Entscheidende vorgethan haben müssen, ehe die Analysis mit ihrer Abstraktion und ihren symbolischen Kunstmitteln die vorhandenen Wahrheiten gleichsam nur in eine andere Sprache übersetzen kann.

Wenn ich aber in dieser Weise den Wert der elementaren Mathematik für den Naturforscher erhebe, so möchte mir schliefslich vielleicht jemand gegen die Zweckmäfsigkeit der von mir vorgeschlagenen Abgrenzung des Elementaren in der Mathematik einwenden, dafs viele in der elementaren Mathematik bereits alles zu besitzen glauben und deshalb vom Studium der höhern Mathematik abgehalten werden würden. Der Schaden aber wäre vielleicht nicht so grofs; denn die Geschichte der Philosophie lehrt, dafs die höhern, den Problemen einer gesunden Metaphysik nahe verwandten Ziele und Bestrebungen hinreichenden Zauber für den menschlichen Geist enthalten, so dafs sie keine Vernachlässigung zu befürchten haben. Ich halte es also blos für Gewinn, wenn ein junger Mann, welcher sich z. B. entschlossen hat, seine Studien um das Studium der Physik, auf allerdings möglichst breiter Basis aber doch zusammenhängend, zu gruppieren, nicht mehr verführt wird, im Kolleg mit äufserster Anstrengung aller Energie den deffizilen Untersuchungen der Zahlentheorie oder einer andern ins Bereich der höhern Mathematik zu verweisenden Disziplin zu folgen, blofs um eine aufserordentliche Hochachtung für genannte Untersuchungen mit sich fortzunehmen, im übrigen aber alles, auch die Ziele der einzelnen mühsamen Exkursionen möglichst bald zu vergessen, weil diese Studien für ihn notwendig isoliert und sogar meist auch untereinander ohne Zusammenhang bleiben.

Im Vorhergehenden habe ich zwar (p. 64) schon den Exhaustionskalkul auf die Theorie der kleinsten Summe der Fehlerquadrate angewendet. Da ich jedoch keine Arbeiten kenne, auf welche ich mich zum Beweis der aufserordentlichen Brauchbarkeit des Exhaustionskalkuls berufen könnte, so möge es mir noch gestattet sein, vermittels desselben eine einfache geometrische Aufgabe zu lösen. Gelegentlich der Lösung dieser Aufgabe wird sich besonders leicht zeigen lassen, worauf es in der Operation des Grenzübergangs ankommt,

Fig. 6.



und aufserdem denke ich aus derselben den Vorteil zu ziehen, dafs die nachfolgende Ableitung des Foucault'schen Sinussatzes eher als unbezweifelbar elementar anerkannt wird, da in derselben ganz ebenso verfahren wird wie in der jetzt folgenden Aufgabe. Es soll der Inhalt eines unendlich kleinen Kreisabschnittes durch die Sehne s und den Pfeil h desselben ausgedrückt werden.

Man zeichne in den Kreisabschnitt ACB Fig. 6 ein gleichschenkliges Dreieck über der Sehne s als Basis, führe über den Schenkelseiten s_1 des so erhaltenen Dreiecks die gleiche Konstruktion aus u. s. f. Man bezeichne dementsprechend:

$$CD = 2r;\ AB = s;\ EC = h;\ \frac{h}{2r} = \varepsilon;\ \frac{s}{2r} = \eta$$

$$BC = s_1\quad FG = h_1\quad \frac{h^1}{2r} = \varepsilon_1\quad \frac{s^1}{2r} = \eta_1\ .$$

. . . .

Alsdann bestehen noch die Beziehungen:

$$\eta^2 = 4\,\varepsilon\,(1 - \varepsilon)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4}\,\varepsilon + \frac{1}{16}\,\varepsilon^2 + \ldots.$$

Es ist:

$$h = r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$$

$$h_1 = r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$$

. . . .

Da nur aus: $2r : s_1 = s_1 : h$ folgt:

1) $s_1{}^2 = 2\,rh$, so erhält man:

$$h_1 = r - \sqrt{r^2 - \frac{rh}{2}} \quad \text{oder}$$

$$h_1 = r\,(1 - \sqrt{1 - \varepsilon})$$

$$h_1 = r\left(1 - 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{\varepsilon^3}{6} + \cdots\right)$$

$$h_1 = r\varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\,\varepsilon + \frac{1}{16}\,\varepsilon^2 + \ldots\right)$$

$$h_1 = h\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\,\varepsilon + \frac{1}{32}\,\varepsilon^2 + \ldots\right)$$

ebenso:

$$h_{11} = h_1\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\,\varepsilon^1 + \frac{1}{32}\,\varepsilon^2 + \ldots.\right) \quad \text{oder}$$

$$h_{11} - h\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{64}\,\varepsilon + \frac{1}{64}\,\varepsilon_1 + \frac{1}{256}\,\varepsilon\varepsilon_1 + \cdots\right)$$

. . . .

Aus 1) erhält man ferner:

$$s_1 = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}}$$

$$s_1 = r\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \eta^2}}$$

$$s_1 = r\sqrt{2 - 2\left(1 - \frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{\eta^4}{4} - \frac{1.3}{2.4}\frac{\eta^6}{6} - \ldots\right)}$$

$$s_1 = r\eta\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{4} + \frac{\eta^4}{8} + \ldots}$$

$$s_1 = r\eta\left(1 + \frac{1}{8}\eta^2 - \frac{1}{128}\eta^4 + \frac{1}{16}\eta^4 + - \ldots\right)$$

$$s_1 = \frac{s}{2}\left(1 + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{7}{128}\eta^4 + \ldots\right)$$

$$s_1 = \frac{s}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 - \frac{7}{4}\varepsilon^3 + \frac{7}{8}\varepsilon^4 + - \ldots\right)$$

ebenso

$$s_{11} = \frac{s_1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{3}{8}\varepsilon^2 - \frac{7}{4}\varepsilon^3 + - \ldots\right)$$

oder $$s_{11} = \frac{s}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_1 + \ldots\right)$$

Wenn ich jetzt die Flächen aller der nacheinander über den Sehnen konstruierten Dreiecke addiere, so ergiebt sich für den Flächeninhalt des Kreisabschnittes ABC die unendliche Reihe:

$$J = \frac{sh}{2} + 2\frac{s_1 h_1}{2} + 4\frac{s_{11} h_{11}}{2} + 8\frac{s_{111} h_{111}}{2} + \ldots$$

oder

$$J = \frac{sh}{2} + \frac{sh}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\varepsilon + \frac{1}{32}\varepsilon^2 + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 - + \ldots\right)$$

$$+ \frac{sh}{2}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{64}\varepsilon + \frac{1}{64}\varepsilon_1 + \frac{1}{256}\varepsilon\varepsilon_1 + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_1 + \ldots\right)$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

oder $$J + \frac{sh}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{15}{32}\varepsilon + \ldots\right)$$

Die nicht mit ε behafteten Glieder der Klammer ergeben bei fortgesetzter Rechnung eine unendliche geometrische Progression mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$, deren Summe demnach leicht $= \frac{4}{3}$ berechnet wird. Es ist also:

$$J = \frac{sh}{2}\left(\frac{4}{3} + \frac{15}{32}\varepsilon + \ldots.\right)$$

also:
$$J_{lim\ \varepsilon = o} = \frac{2}{3}\ sh\ .$$

Der für den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes gefundene Wert $\frac{2}{3}\ sh$ ist nur streng richtig für den Grenzfall $\varepsilon = o$, d. h. wenn der Flächeninhalt sich selbst unbegrenzt der Null nähert. Ist denn da in der vorstehenden Betrachtung überhaupt etwas gewonnen? Könnte man nicht für den Kreisabschnitt $ABGC$ das gleichschenklige Dreieck ABC setzen, welches ja auch dem wahren Werte des Kreisabschnittes unbegrenzt um so näher kommt, je kleiner ε, d. h. je gröfser der Kreisdurchmesser im Vergleich zur Pfeilhöhe des Kreisabschnittes wird. Alsdann erhielte man:

$$F_{lim\ \varepsilon = o} = \frac{1}{2}\ sh\ .$$

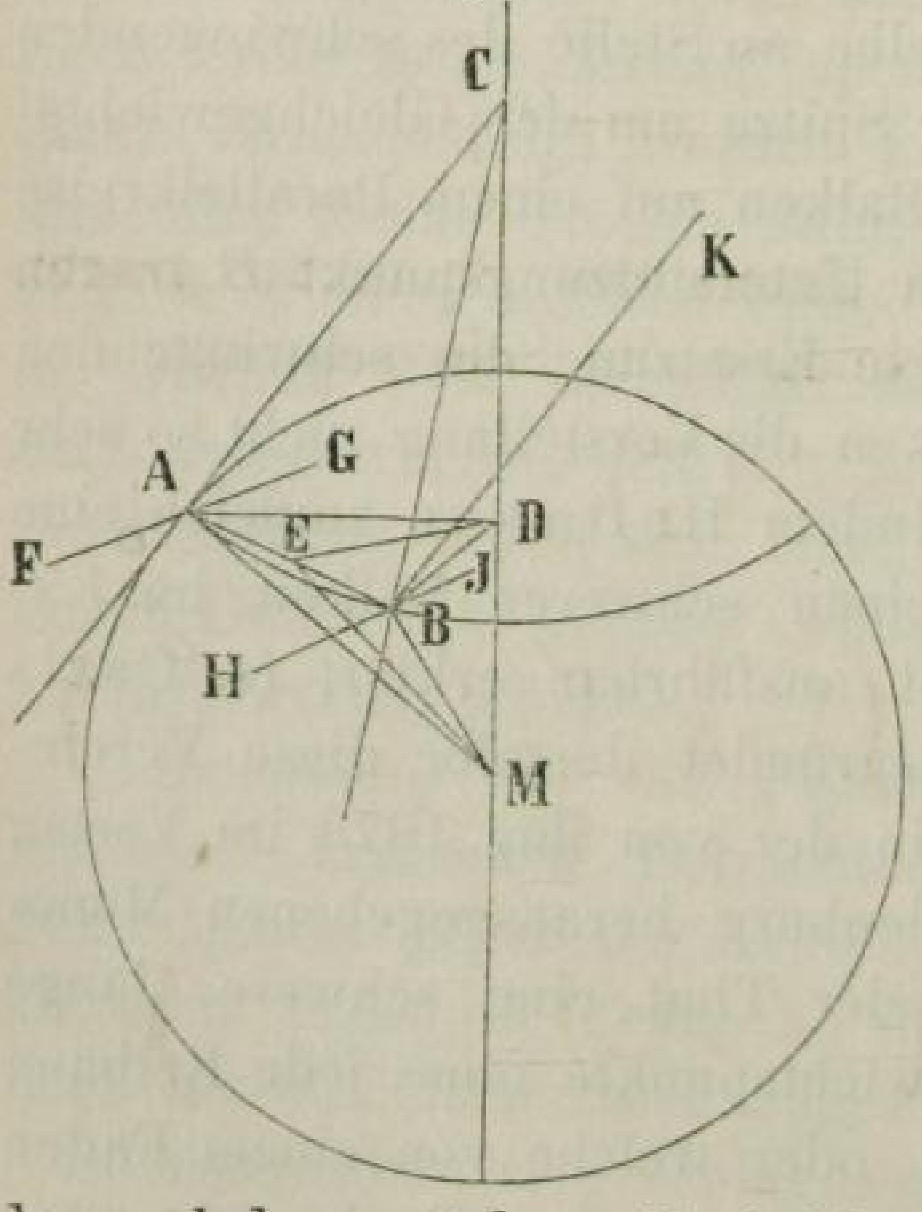
Der wesentliche Unterschied in der Bedeutung beider Grenzwerte ist der, dafs in $J_{lim\ \varepsilon = o} = \frac{2}{3}\ sh$ die vernachlässigten Gröfsen nicht nur für sich, sondern auch im Vergleich zu den berücksichtigten Gröfsen unendlich klein waren, während in $F_{lim\ \varepsilon = o} = \frac{1}{2}\ sh$ die vernachlässigten Kreisabschnitte an der Grenze $\varepsilon = o$ wohl für sich unendlich klein sind, aber da die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks gleichzeitig unendlick klein wird, doch *neben dieser* nicht vernachlässigt werden können. Im ersteren Falle wurden unendlich kleine Gröfsen zweiter und höherer Ordnung neben unendlich kleinen Gröfsen erster Ordnung vernachlässigt, während im zweiten Falle unendlich kleine Gröfsen erster Ordnung vernachlässigt wurden, was durchaus unstatthaft ist, wenn wenigstens die Rechnung durch eine Integration oder durch die Division mit einem Differential gleicher Ordnung zu endlichen Werten soll zurückgeführt werden können.

Anwendung auf das Foucault'sche Pendelgesetz. Nachdem bei historisch-kritischen Betrachtungen ein für das Foucault'sche Pendelgesetz gegebener Beweis überhaupt als solcher anerkannt ist, steht meist die Frage an der Spitze, ob der fragliche Beweis noch als ein elementarer angesehen werden könne. Nach der im Vorhergehenden vorgeschlagenen Abgrenzung des Elementaren in der Mathematik können vielleicht alle für das Foucault'sche Sinusgesetz gegebenen Beweise als elementare bezeichnet werden, da ich selbst die Lage der modernen Mechanik zu der von mir vorgeschlagenen Grenzlinie nicht ganz bestimmt zu bezeichnen wagte, sondern mich mit einem Blick in die Zukunft tröstete. Es würde sich also die erwähnte Frage vielleicht in eine andere umgestalten, auf welche jeder Lehrer oder Verfasser eines Lehrbuches der *Physik* sich selbst die Antwort zu geben hätte, in die Frage nämlich, ob er es sich getraue, den von ihm gewählten Beweis seinen Schülern zu vollem Verständnis zu bringen. Für Schüler unserer höhern Schulen dürfte sich der Beweis am vorteilhaftesten auf dem Gebiete des Exhaustionskalküls bewegen gleichwie die Beweise für die Fallgesetze etc., wenn nicht für den grade verfolgten Zweck eine Beschränkung als geboten erachtet werden sollte, dahin gehend, daſs der Grenzübergang nur in der Vorstellung, nicht aber in der dieselbe begleitenden Rechnung ganz durchgeführt wird. Für unsere Gymnasien dürfte eine solche Beschränkung weise sein. Die vielfach verneinte Frage aber, ob im Beweise für das Foucault'sche Pendelgesetz die Forderung einer strengen und zusammenhängenden Schluſsweise noch erfüllt werden könne, wenn auf die Verwendung der dynamischen Differentialgleichungen Verzicht geleistet wird, wage ich getrost zu bejahen.

Ableitung des Sinusgesetzes. Die Vorstellung von dem Verlauf der Vorgänge, welche man bei der Betrachtung des Foucault'schen Pendelversuchs ins Auge zu fassen hat, ist von Hullmann wesentlich vereinfacht, indem derselbe an Stelle des schwingenden Pendels einen schweren, auf feiner Spitze um den Gleichgewichtspunkt ohne Reibung beweglichen Balken auf einem Parallelkreise vom Unterstützungspunkt A in den Unterstützungspunkt B tragen läſst. In der That wird durch diese Ersetzung des schwingenden Pendels durch einen schweren Balken die Vorstellung nicht so sehr verändert als vielmehr beruhigt. Indem Hullmann zugleich eine Ersetzbarkeit des Pendels durch einen schweren Balken im Experiment ganz bestimmt für nicht ausführbar erklärt (s. Carls Repert. Abh. d. Verf. p. 279), begründet derselbe diese Vereinfachung der Rechnungsgrundlage in der von ihm 1873 im Verlag von Ferdinand Schmidt zu Oldenburg herausgegebenen Monographie wie folgt: „Es muſs in der That eine schwere, lange Stange, welche in ihrem Gleichgewichtspunkte ohne jede Reibung durch eine feine Spitze unterstützt, oder welche von einem Faden ohne jede Torsion getragen wird, in den nach einander folgenden Zeitmomenten dieselbe Lage einnehmen, welche die Schwingungslinie des Pendels bestimmt; denn sie folgt denselben Gesetzen: infolge ihres Beharrungsvermögens will sie sich selbst parallel bleiben, infolge ihrer Schwere ist ihre Lage stets eine horizontale. Sie weicht, da die Erde sich unter ihr wegdreht, um eine von der Zeit abhängige Gröfse von ihrer ersten Lage ab, und zwar müssen diese Abweichungen dieselbe Gröfse nach derselben Zeit haben, wie sie das frei schwingende Pendel von seiner ersten Richtung darbietet; denn jeder Punkt der Stange entspricht einem Zeitmoment des Pendels". Ich aber möchte auch bei dieser Gelegenheit auf die Verwendbarkeit des Stetigkeitsprinzips in der von Leibnitz gegebenen Fassung aufmerksam machen; denn in der von Hullmann eingeführten Vereinfachung der Vorstellung folgert man doch schliefslich die Identifizierbarkeit der Stange mit der vom Schwingungsmittelpunkt beschriebenen Bahn, indem man sich den Schwingungsmittelpunkt in *jedem Punkte seiner Bahn für jeden beliebigen Zeitmoment* fixiert vorstellt auf Grund der Bemerkung, dafs die nachfolgende Betrachtung keine Annahme über die Schwingungsdauer des Pendels enthält, so dafs man die Schwingungsdauer immer kleiner werdend vorstellen und schliefslich gleich Null werden lassen darf.

Es schliefse die Richtung des Balkens FG für den Anfangsmoment der sehr kurzen, aber noch nicht unendlich kurzen Zeit Δt mit der Nordrichtung den Winkel $\varkappa$ ein, und es mögen vorläufig die beiden Voraussetzungen festgehalten werden, 1) dafs FG anstatt in der Tangentialebene des Punktes A in der Ebene ABC liege, welche durch die beiden in A und B an die Meridiane gelegten Tangenten bestimmt ist, 2) dafs die Erdanziehung auf den Balken nicht kippend einwirke. Beide Voraussetzungen können als erfüllt betrachtet werden, sobald man von der immer noch endlichen Zeit Δt zur Grenze des Zeitdifferentials dt übergeht; denn alsdann rücken die beiden Punkte A und B unendlich nahe aneinander und die beiden Tangentialebenen der Punkte A und B

Fig. 7.



fallen mit der Ebene ABC zusammen. Bezeichne ich jetzt die Winkel, um welche sich in der Zeit $\varDelta t$ resp. der Balken scheinbar um seinen Unterstützungspunkt und die Erde um ihre Achse dreht mit resp. $\varDelta \chi$ und $\varDelta \varphi$, so kann ich noch mit Rücksicht auf den beabsichtigten Übergang zur Grenze dt annehmen, dafs $\varDelta \varphi$, $\varDelta \chi$ und $\varDelta t$ ein gemeinschaftliches Maafs ε besitzen, insofern ich den Übergang zu den Differentialen $d\varphi$, $d\chi$, dt dadurch bewirke, dafs ich schliefslich $\varepsilon = o$ werden lasse.

Schreibe ich diese Voraussetzung in der Form:

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varDelta \varphi = \varepsilon \alpha \qquad & d\varphi = \varepsilon \alpha \\ \varDelta \chi = \varepsilon \beta & d\chi = \varepsilon \beta \\ \varDelta t = \varepsilon \tau & dt = \varepsilon \tau \\ & \qquad \varepsilon = o, \end{array} \right.$$

so erkennt man leicht, dafs mit derselben das Stetigkeitsprinzip eingeführt ist, indem nämlich χ und φ *stetige* Funktionen der Zeit sein sollen. In der graphischen Darstellung bezeichnet ε eine Sehne, deren Richtungskosinusse resp. α und τ; β und τ sind.

Bezeichne ich mit HJ die Lage des Balkens für den Endmoment der Zeit $\varDelta t$ und ziehe $KB \parallel AC$, so erhalte ich $\varDelta \chi = \sphericalangle KBC = \sphericalangle ACB$, da $HJ \parallel AG$ sein mufs. Ferner ist $\varDelta \varphi = \sphericalangle ADB$. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich aus der Betrachtung der beiden gleichschenkligen Dreiecke ABC und ABD, deren gemeinschaftliche Basis in E halbiert ist:

$$\frac{AE}{AC} = \sin\left(\frac{\varepsilon\beta}{2}\right); \quad \frac{AE}{AD} = \sin\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right),$$

woraus, wenn ich noch mit ψ die Breite des Beobachtungsortes bezeichne, für die betrachteten Drehungen die Relation folgt:

$$2) \qquad \sin\left(\frac{\varepsilon\beta}{2}\right) = \sin\psi \sin\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right),$$

oder

$$\frac{\left(\frac{\varepsilon\beta}{2}\right)}{1!} - \frac{\left(\frac{\varepsilon\beta}{2}\right)^3}{3!} + - \ldots = \sin\psi\left(\frac{\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)}{1!} - \frac{\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)^3}{3!} + - \ldots\right),$$

oder

$$\frac{\beta}{2} - \frac{\varepsilon^2\left(\frac{\beta}{2}\right)^3}{3!} + - \ldots = \sin\psi\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\varepsilon^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3}{3!} + - \ldots\right),$$

also für $\varepsilon = o$

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2}\sin\psi,$$

und da nach 1) $\left.\frac{\beta}{\alpha}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{d\chi}{d\varphi}$ ist, so erhält man

$$d\chi = d\varphi \sin\psi \text{ , oder}$$

3) $$\frac{d\chi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \sin\psi \text{ .}$$

Die Rotationsgeschwindigkeit wird für einen beliebigen Zeitpunkt bestimmt durch denjenigen Winkel, welcher in der auf den betrachteten Zeitpunkt folgenden Zeiteinheit überstrichen werden würde bei unverändert festgehaltenem Bewegungszustande des betrachteten Zeitpunktes, gleichviel ob die Rotation mit konstanter oder mit variabler Geschwindigkeit erfolgt. In dem unendlich kurzen, also einem Zeitpunkt unendlich nahe kommenden Zeitelement dt wird von dem Balken scheinbar der Winkel $d\chi$ überstrichen; in der Zeiteinheit würde also der Winkel $d\chi : dt$ überstrichen werden, so daſs $d\chi : dt$ die Rotationsgeschwindigkeit für den betrachteten Zeitpunkt darstellt. Ebenso findet man die Rotationsgeschwindigkeit der Erde um ihre Achse für denselben Zeitpunkt $= d\varphi : dt$, so daſs die Gleichung 3) aussagt:

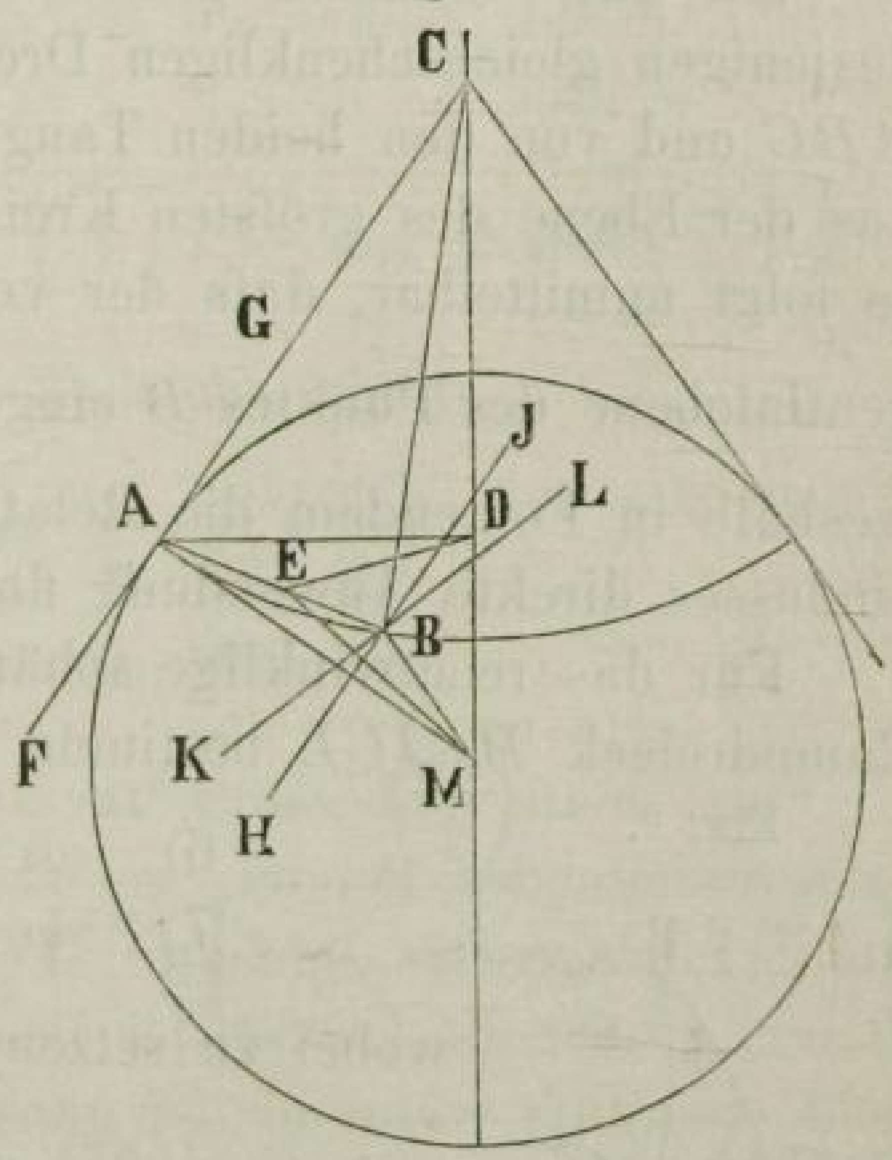
Es wird in jedem beliebigen Zeitpunkt, gleichviel nach welcher Himmelsrichtung die Stange zeigt, die Geschwindigkeit, mit welcher die scheinbare Rotation des Balkens erfolgt, erhalten, wenn man die Rotationsgeschwindigkeit der Erde um ihre Achse mit dem Sinus der Breite des Beobachtungsortes multipliziert.

Setzt man schlieſslich für den äquilibrierten Balken wieder ein schwingendes Pendel, so ist für dasselbe in Obigem das bekannte Sinusgesetz abgeleitet ohne irgend eine beschränkende Bestimmung über die Gröſse der Pendelamplituden. Denn man sieht leicht ein, daſs während der ganzen Betrachtung der Balken nicht notwendig als gerade vorgestellt werden muſs, daſs man vielmehr den Balken auch z. B. als Kreisbogen gekrümmt vorstellen kann, für welchen alsdann die durch den Unterstützungspunkt gelegte Vertikale, oder der Aufhängefaden, dieselbe Rolle spielt wie für den von der Pendelkugel beschriebenen Kreisbogen der Pendelfaden in der Ruhelage. Die träge krumme Stange läſst sich ja für den Fall endlicher Amplituden in ganz derselben Weise mit dem vom Schwingungsmittelpunkt beschriebenen Kreisbogen identifizieren, wie für den Fall unendlich kleiner Amplituden die träge grade Stange mit der vom Schwingungsmittelpunkte beschriebenen unendlich kurzen geraden Linie.

Die obige Ableitung des Sinusgesetzes dürfte für unsere höhern Schulen völlig genügen; ja man könnte wohl auch noch die Entwickelung der *Sinus* in Reihen vermeiden. Wenn ich aber auch gröfsern Ansprüchen genügen will, so mufs ich noch der Forderung Rechnung tragen, dafs mit Berücksichtigung des Kippens vor dem Übergang zur Grenze $\varepsilon = o$ ein geschlossener Ausdruck abgeleitet werde; denn in Obigem ist der Übergang zur Grenze teilweise, nämlich in der Überlegung, dafs die Tangentialebenen der Punkte A und B in der Ebene ABC zusammenfallen müfsten, wenn A und B zusammenfallen, nur in der Vorstellung, nicht aber in der dieselbe begleitenden Rechnung durchgeführt.

Um auch dieser Forderung noch gerecht zu werden, will ich zunächst den Spezialfall $k = o$ betrachten, also für den Anfangsmoment der Zeit Δt die Balkenrichtung mit der Nordrichtung zusammenfallen lassen. Alsdann liegt der Balken FG gleichzeitig in der Tangentialebene des Punktes A und in der Ebene ABC, weshalb sich der Balken im Endmoment der Zeit Δt in der Ebene ABC in der Lage $HJ \parallel FG$ befinden müfste, wenn während der Zeit Δt die Erde nicht kippend auf denselben einwirkte. Für diese Komponente der scheinbaren Drehung des Balkens gilt also die Gleichung 2) p. 71. Der vermöge derselben in der Zeit Δt überstrichene Winkel sei wieder mit $\Delta \chi$ bezeichnet. Vermöge der zweiten durch die Schwere des Balkens bedingten Bewegungskomponente werde der Winkel $JBL = \Delta \psi$ überstrichen in der zur Tangentialebene des Punktes B normalen Ebene JBL. Mit Rücksicht auf den Übergang von Δt zur Grenze dt ist die Annahme gestattet, dafs die Kippung während der ganzen Zeit Δt normal zur Tangentialebene des Punktes B erfolge. Die beiden Drehungen setzen sich demnach zu einer Drehung um den Winkel $LBC = \Delta \xi$ zusammen.

Fig. 8.



Es sei nun entsprechend wie in 1)

$$4)\quad \begin{cases} \Delta t = \varepsilon\tau & dt = \varepsilon\tau \\ \Delta\varphi = \varepsilon\alpha & d\varphi = \varepsilon\alpha \\ \Delta\chi = \varepsilon\beta & d\chi = \varepsilon\beta \\ \Delta\psi = \varepsilon\gamma & d\psi = \varepsilon\gamma \\ \Delta\xi = \varepsilon\delta & d\xi = \varepsilon\delta \end{cases}$$

$$\varepsilon = o.$$

Zur Bestimmung des Kippwinkels $\Delta\psi = \varepsilon\gamma$ mufs man den Zentriwinkel BMA als Funktion von α und ψ ausdrücken. Für $\sphericalangle BMA$ ergiebt sich aber aus der Doppelgleichung:

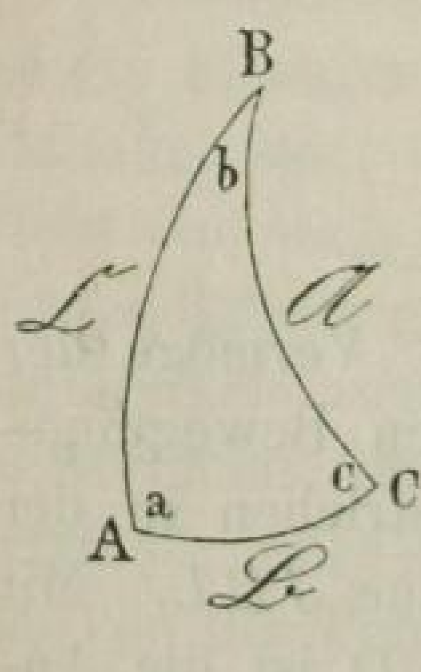
$$BE = BD \sin\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right) = BM \sin\left(\frac{BMA}{2}\right)$$

$$5)\qquad \sin\left(\frac{BMA}{2}\right) = \cos\psi \sin\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right).$$

Da nun $\sphericalangle BMA$ gleich dem Aufsenwinkel an der Spitze desjenigen gleichschenkligen Dreiecks ist, welches von der Ebene ABC und von den beiden Tangentialebenen der Punkte A und B aus der Ebene des gröfsten Kreises AMB herausgeschnitten wird, so folgt unmittelbar, dafs der von der Ebene ABC mit der Tangentialebene des Punktes B eingeschlossene Winkel $= \sphericalangle \frac{BMA}{2}$ ist, weshalb in Folgendem die Relation 5) zur Bestimmung des Kippeinflusses direkte Anwendung finden kann.

Für das rechtwinklige sphärische Dreieck, welches durch das Raumdreieck B, JCL bestimmt ist,*) gelten die Relationen:

Fig. 9.



$$6)\quad \cos\mathcal{C} = \cos\mathcal{A} : \cos\mathcal{B}$$

$$7)\quad \sin\mathcal{B} = \sin\mathcal{A} : \sin b,$$

wobei zu setzen ist:

$$\mathcal{A} = \Delta\chi = \varepsilon\beta,$$
$$\mathcal{B} = \Delta\psi = \varepsilon\gamma,$$
$$\mathcal{C} = \Delta\xi = \varepsilon\delta,$$
$$b = \frac{BMA}{2}.$$

Es ist: $$\cos(\varepsilon\beta) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\varepsilon\beta}{2}\right)$$

folglich: $$\sin(\varepsilon\beta) = \sqrt{4\sin^2\left(\frac{\varepsilon\beta}{2}\right) - 4\sin^4\left(\frac{\varepsilon\beta}{2}\right)},$$

*) Anmerk. Durch die Schreibweise B, JCL soll angedeutet werden, dafs B die Spitze, BJ, BC, BL die Kanten des räumlichen Dreiecks sind.

woraus mit Rücksicht auf 2) folgt:

$$8)\quad sin\,(\varepsilon\beta) = \sqrt{4\,sin^2\,\psi\,sin^2\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right) - 4\,sin^4\,\psi\,sin^4\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)}\,.$$

Aus 7) erhält man:

$$sin\,(\varepsilon\gamma) = sin\,(\varepsilon\beta) : sin\left(\frac{BMA}{2}\right),$$

woraus mit Rücksicht auf 5) und 8) folgt:

$$sin\,(\varepsilon\gamma) = cos\,\psi\,sin\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)\sqrt{4\,sin^2\,\psi\,sin^2\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right) - 4\,sin^4\,\psi\,sin^4\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)}\,,$$

oder:

$$sin\,(\varepsilon\gamma) = sin\,(2\,\psi)\,sin^2\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)\sqrt{1 - sin^2\,\psi\,sin^2\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)}\,.$$

Demnach ist:

$$cos\,(\varepsilon\gamma) = \sqrt{1 - sin^2\,(2\,\psi)\,sin^4\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)\left[1 - sin^2\,\psi\,sin^2\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)\right]}\,.$$

Da man schliefslich noch aus 2) leicht erhält:

$$cos\,(\varepsilon\beta) = 1 - 2\,sin^2\,\psi\,sin^2\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right),$$

so ergiebt sich endlich aus der Gleichung 6)

$$cos\,(\varepsilon\delta) = \frac{1 - 2\,sin^2\,\psi\,sin^2\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 - sin^2\,(2\,\psi)\,sin^4\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)\left[1 - sin^2\,\psi\,sin^2\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)\right]}}$$

oder

$$cos\,(\varepsilon\delta) = \sqrt{\frac{1 - 4\,sin^2\,(2\,\psi)\,sin^2\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right) + 4\,sin^4\,\psi\,sin^4\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)}{1 - sin^2\,(2\,\psi)\,sin^4\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)\left[1 - sin^2\,\psi\,sin^2\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)\right]}}$$

oder

$$cos\,(\varepsilon\delta) = \sqrt{1 - 4\,sin^2\,\psi\,sin^2\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right) - 4\,sin^2\,\psi\,cos\,(2\,\psi)\,sin^4\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)}$$
$$- 5\,sin^2\,\psi\,sin^2\,(2\,\psi)\,sin^6\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right) - \ldots\,,$$

oder

$$cos\,(\varepsilon\delta) = 1 - A\,sin^2\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right) - B\,sin^4\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right) - C\,sin^6\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right) - \ldots\,,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt ist:

$$9)\quad\begin{cases} A = 2\ sin^2\ \psi \\ B = 2\ sin^2\ \psi\ [sin^2\ \varphi + cos\ (2\ \psi)] = \frac{1}{2}\ sin\ (2\ \psi) \\ C = 12\ sin^6\ \psi + 4\ sin^4\ \psi\ cos\ (2\ \psi) + sin^2\ \psi\ sin^2\ (2\ \psi) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Führt man jetzt noch an Stelle der trigonometrischen Funktionen von $\varepsilon\,\delta$ und $\frac{\varepsilon\alpha}{2}$ die betreffenden Reihen ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(\varepsilon\delta)^2}{2!} + \frac{(\varepsilon\delta)^4}{4!} - + \dots = 1 &- A\left[\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)^4 + \frac{2}{15}\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)^6 - + \dots\right] \\ &- B\left[\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)^4 + \frac{2}{3}\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)^6 + \frac{1}{9}\left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)^8 - + \dots\right] \\ &- C\left[\dots\dots\dots\dots\right] \\ &- \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\delta^2}{2} - \varepsilon^2 . \frac{\delta}{12} + - \dots = A\,\frac{\alpha^2}{4} + \varepsilon^2 .\ \alpha^4 \left(\frac{3\,B - 16}{48}\right) + \dots$$

also für $\varepsilon = o$ mit Rücksicht auf 9)

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{1}{2}\,sin^2\ \psi\,.\,\alpha^2\,,$$

oder

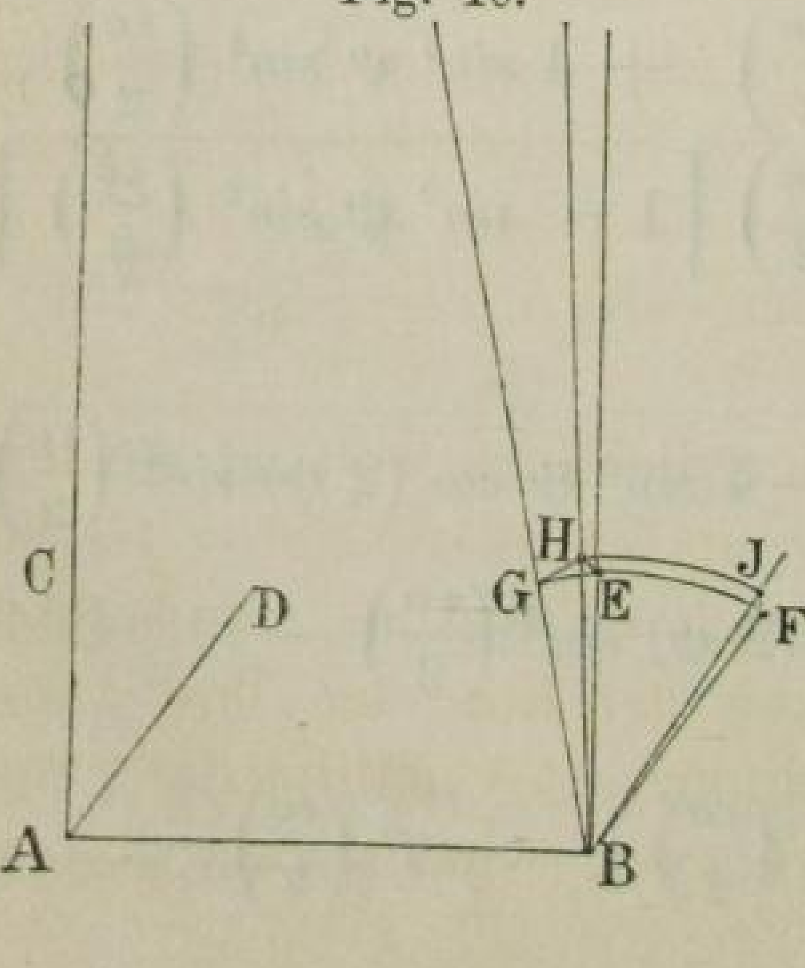
$$\delta = \alpha\ sin\ \psi\,,$$

oder

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\ sin\ \psi\ .$$

Für die Geschwindigkeit, mit welcher der Balken bei seiner scheinbaren Bewegung die Nordrichtung passiert, gilt demnach der Foucault'sche Sinussatz. Es bleibt aber noch zu zeigen, dafs jede beliebige andere Richtung mit derselben Geschwindigkeit passiert wird. Die Balkenlage werde bestimmt in Bezug auf eine scheinbar festliegende Richtung, welche mit der Nordrichtung den Winkel k einschliefst. Lege ich jetzt durch B eine Ebene parallel zur Tangentialebene des Punktes A und ziehe in dieser Ebene Parallelen BE und BF sowohl zur Nordrichtung des Punktes A als auch zu der beliebigen als festliegend gedachten Richtung, dem zweiten Schenkel des Winkels k.

Fig. 10.



so schliefsen auch diese Parallelen den Winkel k ein, und der Vorgang des Kippens, welcher die scheinbar festliegende Richtung aus der Tangentialebene des Punktes A in die Tangentialebene des Punktes B überführt, stellt sich als eine Drehung der Ebene der zweiten Schenkel des Winkels k, der Ebene $JDBF$, um resp. AC und BE dar. Hierbei wird die durch die beiden Nordrichtungen AC und BG bestimmte Ebene passiert, so dafs auch wieder der Winkel JBH in der Tangentialebene des Punktes $B = \sphericalangle k$ ist.

Bei der Zusammensetzung der Bewegungskomponenten des Balkens habe ich vorhin gewifs ohne Widerspruch mit Rücksicht auf den zum Schlufs vorzunehmenden Grenzübergang angenommen, dafs die Bewegung des Kippens während der ganzen Zeit Δt normal zur Tangentialebene des Punktes B erfolge. Mit demselben Rechte aber kann ich für die andere Komponente annehmen, dafs ihre Geschwindigkeit während der ganzen Zeit Δt derjenigen Geschwindigkeit gleichkomme, welche sie beim Passieren der durch die beiden Nordrichtungen der Punkte A und B bestimmten Ebene hat. Für diese ist aber p. 71 bereits gezeigt, dafs sie der Geschwindigkeit gleichkommt, mit welcher sich in Wirklichkeit die Nordrichtung ändert, indem die Gleichung 2) abgeleitet wurde. Die scheinbare Drehung des Balkens ist deshalb gemessen durch den Winkel HBG, dessen Wert man durch eine der vorstehenden fast ganz gleiche Betrachtung findet. Da in diesem Falle für b (s. Fig. 9) nicht wie in Vorstehendem $\frac{BMA}{2}$, sondern BMA zu setzen ist, so erhält man an Stelle der Gleichung 5)

$$\sin (BMA) = 2 \cos \psi \sin \left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right) \sqrt{1 - \cos^2 \psi \sin^2 \left(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\right)} \; ,$$

und wenn man mit dieser Substitution die Rechnung durchführt ganz wie vorhin bei der Betrachtung des Spezialfalles $K = o$ geschehen ist, so ändert sich schliefslich blofs der Wert der Konstante C in: $C = 12 \sin^6 \psi + 4 \sin^4 \psi \cos (2\psi) + 9 \sin^2 (2\psi)$, was für das Resultat gleichgültig ist.

Der Balken passiert also nicht nur die Nordrichtung, sondern auch jede beliebige in unserm Horizontalkreise scheinbar festliegende Richtung mit einer Geschwindigkeit, welche man erhält, wenn man die Rotationsgeschwindigkeit der Erde um ihre Achse mit dem Sinus der Breite des Beobachtungsortes multipliziert; und die p. 72 gegebene Überlegung führt auch wieder vom Balken zum Pendel hinüber.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)