Über den Foucault'schen Pendelversuch.

Dr. Tammen.

II. Teil.

Pendelversuche im Brückenbergschacht No. 3 zu Zwickau i/S.

Beschreibung der Versuche. Vom Versuchsorte, dem Schacht No. 3, welcher noch im Abteufen steht und bis auf ca. 300 m ausgemauert ist, habe ich auf Taf. 4, Fig. 1 u. 2 Grundrifs und Aufrifs gegeben. Zur Zeit der Ausführung meiner Versuche wurden nur die bei einer Teufe von ca. 110 m abgefangenen Schachtwasser durch eine aus zwei unterirdisch aufgestellten Dampfpumpen bestehende Wasserhaltung gehoben. Zur Aufhängung des Pendels bot sich in dem mittleren leeren Trume x_1 (Taf. 4, Fig. 2) der beste Raum.

Bei der ersten Einrichtung war ein I-Träger unmittelbar unter dem Schachtdeckel auf der Oberkante der Schachtmauerung in fester Lage aufgelegt. Durch den Steg des I-Trägers war in der Mitte ein Loch von ca. 15 mm Durchmesser gebohrt, damit durch dieses der Pendelfaden, ein Stahldraht von 2,5 mm Durchmesser, hindurchgeführt werde. Der Draht wurde in dieser Durchführung mit Blei umgossen und darauf mit zwei starken Klemmen befestigt, welche der Quere übereinander gelegt waren und unmittelbar auf dem Blei aufsafsen, wie dies Fig. 3, Taf. 4 dargestellt ist. An den 60 m langen Stahldraht war die über 4 ctr schwere eiserne Birne eines Fallzeuges gehängt. Die mit einem Zeigerstift versehene Birne hatte ungefähr die in Fig. 4, Taf. 4 wiedergegebene tropfenförmige Gestalt. Im Schacht war dicht unter der Birne eine Bühne eingebaut, so dafs man die Pendelschwingungen mit Hülfe des erwähnten Zeigerstiftes bequem beobachten konnte über einem Teilkreise, dessen Durchmesser ich gleich 750 mm gemacht hatte.

Die Umkehrpunkte des in Intervallen von durchschnittlich 4 Stunden beobachteten schwingenden Pendels wurden auf der Teilung, oder wenn sie über dieselbe hinausfielen, auf der Bühne selbst mit Papierzwecken abgesteckt, die Ausmessungen aber erst

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/83

gemacht mit Hülfe eines Fadens, welcher über je zwei diametral entgegengesetzt gesteckte Zweckenköpfe ausgespannt wurde, nachdem die Versuchsreihe abgeschlossen und die Pendelkugel wieder zur Vorbereitung für die nächste Versuchsreihe in der gewünschten Ablenkung durch einen Faden in ruhiger Lage festgehalten war. Während 12 Stunden, bis zum Beginn der neuen Versuchsreihe durch Abbrennen des Fadens, konnte sich die Pendelkugel möglichst vollkommen beruhigen. Die kleine Achse *b* der ja sehr nahe elliptischen Bahn des Zeigerstiftes wurde bestimmt, indem man einen Meterstab möglichst senkrecht zur grossen Achse *a* durch die Ruhelage unterschob und beobachtete, über welchen Punkten des Maſsstabes die Spitze hinstrich.

Mit den Versuchen wurde in den ersten Tagen des September 1881 begonnen. Bis zum 2. Dez. 1881 habe ich mit dem Herrn Maschinentechniker Hesse abwechselnd beobachtet. Von dem Termin ab sind die Beobachtungen von zwei Maschinenwärtern, Schiller und Hausdörfer, welche bis dahin schon abwechselnd bei den Beobachtungen zugegen gewesen waren, in der Weise ausgeführt, daſs sie die Ablesungen gelegentlich des Schichtwechsels stets zusammen vornahmen. Die erste Zeit, länger als zwei Wochen, bin ich täglich wenigstens zu Anfang und Ende des Versuchs zugegen gewesen, habe aber die Ablesungen und Aufzeichnungen nie selbst ausgeführt, sondern mich auf die Kontrolle beschränkt. Später bin ich durchschnittlich etwa jeden zweiten oder dritten Tag zu möglichst unregelmäſsigen Stunden des Tages und der Nacht hinausgegangen.

Das Wasser, welches schon bei 16 m Teufe die Schachtmauerung an einer Stelle zu durchdringen begann, in Tropfen von den Einstrichhölzern herabfiel und beim Aufschlagen auf tiefere Einstrichhölzer zerstäubte, wurde im Verlaufe der Versuche mehr und mehr durch Traufendächer abgefangen, jedoch gelang dies nicht zur vollen Zufriedenheit. Ja, während die Feuchtigkeit bis etwa zum 27. Nov. 1881 stetig im Abnehmen begriffen war, zeigte sich von der Zeit an wieder eine Zunahme, vermutlich deshalb besonders, weil die zum Abfangen und Ablenken des Spritzwassers an immer mehr Stellen schräg an die Schachtwände angelegten Bretter durchtränkt waren. Nebenbei ist allerdings wohl auch der Witterungswechsel, welcher zu dieser Zeit eintrat, von Einfluſs gewesen.

Um endlich von den Störungen durch Spritzwasser frei zu werden, habe ich das Pendel mit unveränderter Aufhängevorrich-

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/84

tung 15 m über Tag unmittelbar unter dem Dach des Schachtgebäudes aufgehängt. Im Dachstuhl wurden Balken von einem Spannriegel zum andern gelegt (s. Fig. 1, Taf. 4), und hierauf der bereits erwähnte I-Träger verlagert. Das Pendel reichte noch nahe 24 m in den Schacht hinein zu einer Tiefe, in welcher eine Thür durch einen ellipsenförmigen Durchbruch *d* des Wetterscheiders *w* das Einsteigen vom Fahrschacht *f* aus ermöglichte. Bei dieser geringen Tiefe gelang es schliefslich Mitte Dezember durch sorgfältig konstruierte Traufendächer die störenden Spritzwasser zu beseitigen.

Von dieser Zeit ab traten aber Störungen durch Luftzug um so bemerklicher hervor. Unmittelbar neben dem Schachte x_1 nämlich, in welchem das Pendel schwang, geht noch ein zweiter Schacht x_2 nieder, derselbe, in welchem ich bei der ersten Aufhängung des Pendels 60 m tief zur Pendelbirne hinabgelangte. Von der Seite dieses Schachtes her machte sich ein Luftzug bemerklich, besonders so lange die Ellipsenthür, durch welche man vom Fahrschacht aus zum Pendel gelangte, geöffnet war. Ich habe deshalb bis zu einer Höhe von 3 m von der Bühne ab diese Seite des Schachtes mit Brettern möglichst dicht verschlagen lassen, so dafs sich also die Pendelbirne etwa in einem Kubus hin und her bewegte, welcher nach fünf Seiten völlig geschlossen, nur nach oben geöffnet war.

Jedoch auch diese Vorrichtung gab noch nicht hinreichenden Schutz gegen Luftzug; denn der Schacht hat eine natürliche Wetterführung. Da der ganze Schacht durch den Wetterscheider in zwei Abteilungen geteilt ist, von denen die südliche *y* durch einen Kanal *k* mit dem Dampfkesselschornstein in Verbindung steht, so bildet sich ein Luftstrom aus, welcher bei x_1 x_2 einfällt, durch die Wetterthüren im Wetterscheider geht und in der Abteilung *y* aufsteigt. Ein solcher Luftstrom war aber mit Hülfe der Flamme des Grubenlichtes noch sehr leicht nachweisbar, obgleich der Kanal *k* abgeschlossen war; denn nicht der Dampfkesselschornstein allein bewirkt die Wetterführung, sondern dieselbe wird wesentlich dadurch unterstützt, dafs das Speiserohr für die beiden bei 110 m Teufe eingemauerten Dampfmaschinen der Wasserhaltung die Luft im Fahrschacht etwas erwärmt. Ich habe deshalb sämtliche Ellipsen, mit Ausnahme einer, welche sich 10 m oberhalb der Pendelbirne befand, bis hinab auf das die Tiefe des Schachtes füllende Wasser mit Hülfe einiger Bretter und wasserdichter Segel-

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/85

tuche schliessen lassen. Dies half, und erst nach dieser Zeit wurden alle diejenigen Versuche angestellt, deren Resultate in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt sind.

Bevor ich jedoch zur Mitteilung und Besprechung meiner Versuchsresultate verschreite, sei mir verstattet, den Herren, welche in liebenswürdigster Weise entweder direkt oder durch unentgeldliche Ueberlassung von Materialien meine Versuche gefördert haben, den Herren Bergdirektoren Dr. Schurtz und Berg, den Herren Fabrikdirektoren Brod und Stiehler, sowie dem Herrn Drahtseilfabrikant Falk an dieser Stelle nochmals meinen Dank auszusprechen, vor allen Dingen aber auch dankbar zu gedenken des Interesses und der freudigen Bereitwilligkeit, mich zu unterstützen, durch welche Herr Hesse und die beiden Maschinenwärter Hausdörfer und Schiller die langwierige Untersuchung wesentlich gefördert und mir zu einer Quelle manches Vergnügens gemacht haben.

In der nachfolgenden Tabelle sind unter resp. a und b die Werte der grossen und der kleinen Achse der ja angenähert elliptischen Bahn der Pendelkugel gegeben und zwar habe ich die kleine Achse b mit dem $+$ Zeichen versehen, wenn die Ellipse in einem Drehungssinne entgegengesetzt zu demjenigen des Uhrzeigers durchlaufen wurde.

Anfangsrichtung der Schwingungen O-W.

1882. Jan. 17/18.	Versuchsdauer.	a	b	Ablenkung beobachtet,	Ablenkung berechnet	$\frac{a}{b}$
1) 5h 30m	0h 00m	1500mm	0mm	0 °	0 °	
2) 10- 30-	5- 00-	605 -	+45 -	57,5-	58 -	13,4
3) 2- 30-	8- 33-	350 -	+25 -	98 -	99 -	14,0
4) 5- 3-	12- 00-	220 -	+25 -	139 -	139,2-	8,8
		O-W. Jan. 18/19.				
1) 3- 35-	0- 00-	1535 -	0 -	0 -	0 -	
2) 9- 33-	3- 58-	685 -	+50 -	46 -	46,1-	13,7
3) 2- 00-	8- 25-	335 -	+55 -	98,5-	97,5-	6,1
4) 5- 35-	12- 00-	216 -	+30 -	139,5-	139,2-	7,2
		N-S. Jan. 22/23.				
1) 6- 30-	0- 00-	1115 -	0 -	0 -	0 -	
2) 10- 25-	3- 55-	432 -	+ 8 -	45 -	45,5-	54,0
3) 3- 30-	9- 00-	235 -	+14 -	105 -	104,4-	16,8
4) 6- 30-	12- 00-	160 -	+ 5 -	137,5-	139,2-	32,0

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/86

	Zeit.	Versuchsdauer.	a	b	Ablenkung beobachtet,	Ablenkung berechnet	$\frac{a}{b}$
			N-S. Jan. 23/24.				
1)	6h 30m	0h 00m	1125mm	0mm	0 °	0 °	
2)	10- 25-	3- 55-	530 -	+18 -	44,5-	45,5-	29,4
3)	3- 45-	9- 15-	270 -	+ 6 -	110 -	107,3-	45,0
4)	6- 30-	12- 00-	190 -	+ 4 -	140 -	139,2-	47,5
			N-S. Jan. 24/25.				
1)	6- 30-	0- 00-	1097 -	0 -	0 -	0 -	
2)	10- 25-	3- 55-	530 -	+14 -	44 -	45,5-	37,8
3)	4- 00-	9- 30-	250 -	+ 5 -	110 -	110,2-	50,0
4)	6- 30-	12- 00-	180 -	+ 0 -	136 -	139,2-	∞
			N-S. Jan. 25/26.				
1)	6- 30-	0- 00-	1115 -	0	0 -	0	
2)	10- 25-	3- 55-	515 -	+15	44,5-	45,5	34,3
3)	4- 00-	9- 30-	250 -	+ 8	110 -	110,2	31,3
4)	6- 30-	12- 00-	190 -	+ 0	137 -	139,2	∞
			N-S. Jan. 28/29.				
1)	6- 30-	0- 00-	1085 -	0 -	0 -	0 -	
2)	12- 00-	5- 30-	435 -	+15 -	63,5-	63,8-	29,0
3)	4- 15-	9- 45-	214 -	+10 -	112 -	113 -	21,4
4)	6- 30-	12- 00-	195 -	+ 5 -	139,5-	139,2-	39,0
			SW-NO. Jan. 29/30.				
1)	6- 30-	0- 00-	1571 -	0	0 -	0 -	
2)	9- 45-	3- 15-	830 -	+32	39 -	39,5-	25,9
3)	1- 57-	7- 25-	450 -	+15	86 -	85,9-	30,0
4)	6- 30-	12- 00-	233 -	+ 0	139,5-	139,2-	∞
			SW-NO. Jan. 30/31.				
1)	6- 15-	0- 00-	1735 -	0	0 -	0 -	
2)	10- 25-	4- 10-	665 -	+15	46,5-	48,3-	44,3
3)	2- 00-	7- 45-	450 -	+ 0	87 -	89,8-	∞
4)	6- 15-	12- 00-	255 -	+12	134,5-	139,2-	21,3
			SW-NO. Jan. 31 — Febr. 1.				
1)	6- 15-	0- 00-	1805 -	0	0 -	0 -	
2)	9- 55-	3- 40-	805 -	+30	42 -	42,5-	26,8
3)	2- 00-	7- 45-	450 -	+30	88 -	89,8-	15,0
4)	6- 15-	12- 00-	240 -	+20	136 -	139,2-	12,0
			SW-NO. Febr. 1/2.				
1)	6- 05-	0- 00-	1805 -	0 -	0 -	0 -	
2)	9- 08-	3- 03-	880 -	+20 -	36 -	35,3-	44,0
3)	2- 05-	8- 00-	370 -	+15 -	94 -	92,8-	24,7
4)	6- 08-	12- 00-	195 -	+15 -	139,5-	139,2-	13,0

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/87

	Zeit.	Versuchsdauer.	a	b	Ablenkung beobachtet,	Ablenkung berechnet	$\frac{a}{b}$
			SW-NO. Febr. 2/3.				
1)	6h 05m	0h 00m	1755mm	0mm	6 °	0 °	
2)	9- 40-	3- 35-	825 -	0 -	40 -	41,5-	∞
3)	2- 40-	3- 35-	365 -	+25 -	98 -	99,5-	14,6
4)	6- 05-	12- 00-	210 -	+20 -	135 -	139,2-	10,5
			SW-NO. Febr. 3/4.				
1)	6- 05-	0- 00-	1790 -	0 -	0 -	0 -	
2)	10- 02-	3- 57-	770 -	+30 -	45,5-	45,9-	25,7
3)	1- 55-	7- 50-	420 -	+20 -	90 -	90,8-	21,0
4)	6- 05-	12- 00-	225 -	+20 -	135 -	139,2-	11,3
			SW-NO. März 1/2.				
1)	5- 30-	0- 00-	1790 -	0 -	0 -	0 -	
2)	10- 05-	4- 35-	695 -	+20 -	52,5-	53,1-	34,8
3)	2- 35-	9- 05-	400 -	+35 -	103 -	104,9-	11,4
4)	5- 30-	12- 00-	300 -	+35 -	138 -	139,2-	8,6
			SW-NO. März 2/3.				
1)	5- 30-	0- 00-	1830 -	0 -	0 -	0 -	
2)	10- 05-	4- 35-	630 -	+18 -	52 -	53,1-	33,0
3)	2- 35-	9- 05-	405 -	+30 -	104 -	104,9-	13,5
4)	5- 30-	12- 00-	300 -	+30 -	138 -	139,2-	10,0
			SW-NO. März 3/4.				
1)	5- 30-	0- 00-	1755 -	0 -	0 -	0 -	
2)	10- 05-	4- 35-	660 -	+20 -	52 -	53,1-	33,0
3)	2- 35-	9- 05-	375 -	+25 -	103 -	104,9-	15,0
4)	0- 30-	12- 00-	270 -	+20 -	134 -	139,2-	13,5
			SW-NO. März 4/5.				
1)	5- 30-	0- 00-	1780 -	0 -	0 -	0 -	
2)	10- 05-	4- 35-	645 -	+10 -	52 -	53,1-	64,5
3)	1- 50-	8- 20-	425 -	+15 -	96 -	96,6-	28,3
4)	5- 30-	12- 00-	300 -	+15 -	136 -	139,2-	20,0
			SW-NO. März 5/6.				
1)	5- 30-	0- 00-	1778 -	0 -	0 -	0 -	
2)	10- 05-	4- 35-	670 -	+12 -	52 -	53,1-	55,8
3)	2- 35-	9- 05-	408 -	+20 -	103 -	104,9-	22,9
4)	5- 30-	12- 00-	320 -	+30 -	134 -	139,2-	10,7
			SW-NO. März 9/10.				
1)	5- 30-	0- 00-	1740 -	0 -	0 -	0 -	
2)	9- 47-	4- 17-	695 -	0 -	49,5-	49,7-	∞
3)	1- 17-	7- 47-	445 -	+25 -	89,5-	90,3-	17,8
4)	5- 30-	12- 00-	294 -	+39 -	136 -	139,2-	7,5

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/88

	Zeit.	Versuchsdauer.	a	b	Ablenkung beobachtet,	Ablenkung berechnet	$\frac{a}{b}$
	SW-NO März 10/11.						
1)	$5^h\ 30^m$	$0^h\ 00^m$	1785^{mm}	0^{mm}	0 °	0 °	
2)	10- 00-	4- 30-	695 -	+10 -	52 -	52,2-	69,5
3)	1- 45-	8- 15-	450 -	+25 -	94 -	95,6-	18,0
4)	5- 30-	12- 00-	300 -	+40 -	135 -	139,2-	7,3
	SW-NO. März 11/12.						
1)	5- 30-	0- 00-	1765 -	0 -	0 -	0 -	
2)	10- 03-	4- 33-	665 -	0 -	53,5-	52,7-	∞
3)	2- 15-	8- 45-	410 -	+35 -	100,5-	101,5-	11,7
4)	5- 30-	12- 00-	245 -	+36 -	136,5-	139,2-	6,8
	SW-NO. März 12/13.						
1)	5- 30-	0- 00-	1710 -	0 -	0 -	0 -	
2)	9- 40-	4- 10-	696 -	+30 -	48 -	48,3-	23,2
3)	1- 30-	8- 00-	430 -	+35 -	92 -	92,8-	12,3
4)	5- 30-	12- 00-	290 -	+39 -	135 -	139,2-	7,5
	SW-NO. März 13/14.						
1)	5- 30-	0- 00-	1700 -	0 -	0 -	0 -	
2)	10- 05-	4- 35-	660 -	+20 -	52 -	53,1-	33,0
3)	2- 25-	8- 55-	390 -	+35 -	101,5-	103,5-	11,1
4)	5- 30-	12- 00-	280 -	+28 -	136 -	139,2-	10,0
	SW-NO. März 14/15.						
1)	5- 30-	0- 00-	1700 -	0 -	0 -	0 -	
2)	10- 05-	4- 35-	660 -	+10 -	53 -	53,1-	66,0
3)	2- 25-	8- 55-	390 -	+25 -	102,5-	103,5-	15,5
4)	5- 30-	12- 00-	280 -	+20 -	137 -	139,2-	14,0
	SW-NO. März 15/16.						
1)	5- 30-	0- 00-	1730 -	0 -	0 -	0 -	
2)	10- 05-	4- 35-	680 -	+20	52,5-	53,1-	34,0
3)	2- 25-	8- 55-	450 -	+35 -	102,5-	103,5-	12,9
4)	5- 30-	12- 00-	340 -	+35 -	136,5-	139,2-	9,7
	SW-NO. März 16/17.						
1)	5- 25-	0- 00-	1732 -	0 -	0 -	0 -	
2)	10- 05-	4- 40-	678 -	+18 -	54 -	54,1-	37,7
3)	2- 25-	9- 00-	453 -	+30 -	104 -	104,4-	15,1
4)	5- 25-	12- 00-	315 -	+40 -	137 -	139,2-	7,8
	SW-NO. März 17/18.						
1)	5- 30-	0- 00-	1760 -	0 -	0 -	0 -	
2)	5- 30-	12- 00-	285	+25 -	137 -	139,2-	

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/89

	Zeit.	Versuchsdauer.	a	b	Ablenkung beobachtet,	Ablenkung berechnet
			SW-NO. März 18/19.			
1)	$5^h\ 30^m$	$0^h\ 00^m$	1757^{mm}	0^{mm}	0°	0°
2)	5 - 30 -	12 - 00 -	262 -	+40 -	136 -	139,2 -
			SW-NO. März 19/20.			
1)	5 - 25 -	0 - 00 -	1758 -	0 -	0 -	0 -
2)	5 - 25 -	12 - 00 -	270 -	+35 -	136 -	139,2 -
			SW-NO. März 20/21.			
1)	5 - 30 -	0 - 00 -	1780 -	0 -	0 -	0 -
2)	5 - 30 -	12 - 00 -	290 -	+20 -	139 -	139,2 -
			SW-NO. März 21/22.			
1)	5 - 30 -	0 - 00 -	1730 -	0 -	0 -	0 -
2)	5 - 30 -	12 - 00 -	290 -	+10 -	136 -	139,2 -
			SW-NO. März 23/24.			
1)	5 - 30 -	0 - 00 -	1780 -	0 -	0 -	0 -
2)	5 - 30 -	12 - 00 -	290 -	+20 -	136 -	139,2 -
			SW-NO. März 24/25.			
1)	5 - 30 -	0 - 00 -	1770 -	0 -	0 -	0 -
2)	5 - 30 -	12 - 00 -	290 -	+35 -	136 -	139,2 -
			SW-NO. März 25/26.			
1)	5 - 30 -	0 - 00 -	1720 -	0 -	0 -	0 -
2)	5 - 30 -	12 - 00 -	290 -	+30 -	136 -	139,2 -
			SW-NO. März 26/27.			
1)	5 - 30 -	0 - 00 -	1690 -	0 -	0 -	0 -
2)	6 - 10 -	12 - 40 -	275 -	+45 -	144 -	146,9 -
			SW-NO. März 27/28.			
1)	5 - 30 -	0 - 00 -	1705 -	0 -	0 -	0 -
2)	5 - 30 -	12 - 00 -	250 -	+28 -	136,5 -	139,2 -
			SW-NO. März 28/29.			
1)	5 - 30 -	0 - 00 -	1734 -	0 -	0 -	0 -
2)	5 - 30 -	12 - 00 -	280 -	+30 -	136,5 -	139,2 -
			SW-NO. März 29/30.			
1)	5 - 30 -	0 - 00 -	1760 -	0 -	0 -	0 -
2)	5 - 30 -	12 - 00 -	290 -	+30 -	136 -	139,2 -
			SW-NO. März 30/31.			
1)	5 - 30 -	0 - 00 -	1754 -	0 -	0 -	0 -
2)	5 - 30 -	12 - 00 -	320 -	+30 -	136,5 -	139,2 -
			SW-NO. März 31—April 1.			
1)	5 - 30 -	0 - 00 -	1625 -	0 -	0 -	0 -
2)	5 - 30 -	12 - 00 -	254 -	+29 -	140 -	139,2 -

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/90

SW-NO. April 2/3.

	Zeit.	*Versuchsdauer.*	*a*	*b*	*Ablenkung beobachtet,*	*Ablenkung berechnet*
1)	$5^h\ 28^m$	$0^h\ 00^m$	1742^{mm}	0^{mm}	0^0	0^0
2)	5 - 28 -	12 - 00 -	320 -	+ 27 -	137 -	139,2 -

SW-NO. April 3/4.

1)	5 - 30 -	0 - 00 -	1775 -	0 -	0 -	0 -
2)	5 - 30 -	12 - 00 -	272 -	+ 34 -	137 -	139,2 -

Die Hullmann-Friedleinsche Formel für die scheinbare Drehung der Schwingungsebene eines Pendels. Der Wunsch, ein Pendel beobachten zu können, welches so lange schwingt, dafs dessen Schwingungsebene wirklich die volle Umdrehung um 360° ausführen kann, wurde in mir besonders lebhaft, als ich gelegentlich einer Durchreise durch Oldenburg vom Herrn Oberlehrer K. Hullmann mit einer wegen ihrer so aufserordentlich von dem Bekannten abweichenden Resultate besonders bemerkenswerten theoretischen Behandlung des Foucault'schen Pendelproblems bekannt gemacht wurde, welche derselbe unter dem Titel: „Der Foucault'sche Pendelversuch. Eine kritische Untersuchung über die Drehung der Schwingungsebene" im Verlag von Ferdinand Schmidt 1873 in Oldenburg veröffentlicht hat.

Hullmann ist nämlich zu dem Schlusse gelangt, dafs die bekannte Foucault'sche Formel: $\beta = \alpha \,.\, sin\ \varphi$, in welcher β den Winkel der scheinbaren Drehung der Schwingungsebene, α den Winkel der Erddrehung und φ die Breite bezeichnet, nur etwa für eine einstündige Beobachtung brauchbar sei, dafs die scheinbare Drehung der Schwingungsebene mit variabler Geschwindigkeit erfolge, und dafs eine vollständige Umdrehung auf unserer Erdhälfte nur in Breiten nördlich vom 45. Breitengrad, dort aber ausnahmslos in 24 Stunden, beobachtet werden könne, während für geringe Breiten die scheinbare Bewegung der Schwingungsebene eine oszillatorische sein müsse.

Ich erkannte zwar nach kurzer Zeit, dafs sich in die Rechnung Hullmanns unbemerkt eine Voraussetzung eingeschlichen hatte, welche nicht zulässig sein dürfte. Darauf gegründete Bedenken gegen die mathematischen Ableitungen Hullmanns habe ich in einer kleinen Arbeit: „Ueber den Foucault'schen Pendelversuch", Carl's Repert. Bd. XVII, p. 278—291; 1882 dargelegt. Hullmann hat in in seiner Rechnung unbeachtet gelassen, dafs sich mit der fortschreitenden Drehung der Schwingungsebene des

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/91

Pendels, oder des auf feiner Spitze äquilibrierten Balkens, durch welchen Hullmann das Pendel ersetzt, fortwährend die Richtung der von der Erde auf den Balken ausgeübten Anziehung ändert.

Das Fehlerhafte dieses Verfahrens glaube ich durch nichts treffender charakterisieren zu können als, wie dies auch l. c. geschehen, dnrch eine kurze Erwähnung einer ganz analogen unzulässigen Vernachlässigung, welche Olbers beging, als er bei der Berechnung der östlichen Abweichung eines frei fallenden Körpers blos die tangentielle, ursprüngliche Geschwindigkeit des hoch oben im Turm befindlichen Körpers in Betracht zog und von der hieraus während der Fallzeit resultierenden Bewegung nach Osten die gleichzeitige Bewegung des Fufses des Turmes subtrahierte. Wenn nämlich Fig. 5 die Ebene des Papiers diejenige Ebene darstellt, welche durch den Erdmittelpunkt und durch die im Beobachtungsorte an den Parallelkreis konstruierte Tangente bestimmt ist, wenn ferner M den Mittelpunkt der Erde, AB den Turm zu Beginn der Fallbewegung, DC zu Ende der Fallbewegung und BC die vom fallenden Körper relativ zur Erde durchlaufene Bahn darstellt, so darf man nicht aufser acht lassen, dafs die Anziehung stets nach der Mitte der Erde, nach M, gerichtet ist und folglich nur für den Anfangsmoment parallel zu BM erfolgt. Für die nachfolgenden Momente bildet die Richtung der Erdanziehung einen Winkel mit BM und vermindert infolge dessen die Geschwindigkeit nach Osten derart, dafs die beobachtete östliche Abweichung nur $^2/_3$ von der von Olbers berechneten Gröfse zeigte.

Hullmann hat bei der schweren äquilibrierten Stange, welche durch ihre Trägheit die Stabilität der Schwingungsebene des Pendels ersetzen soll, zwei simultane Bewegungen als sukzessiv erfolgend betrachtet, um sie nach dem Parallelogramme zusammensetzen zu können. Die eine dieser Bewegungen ist blos eine scheinbare und rührt von dem Beharrungsvermögen der Stange in ihrer Beziehung zu der unter ihr rotierenden Erde her, die zweite ist eine wirkliche und hat ihren Grund in der Anziehung, welche die Stange durch die Erde fortdauernd erleidet. Denn nach der von Hullmann eingeführten Vorstellung wird zum Ersatz für die Rotation der Erde der äquilibrierte Balken auf einem Parallelkreise um die Erde herumgetragen.

Ähnlich wie Olbers die Richtungsänderung der Achse des Turmes vernachlässigte, so nimmt nun Hullmann bei der Komposition der beiden erwähnten Bewegungen nicht Rücksicht darauf,

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/92

dafs der Unterstützungspunkt des Balkens auf dem Parallelkreise fortschreitet, und dafs sich damit die Richtung der von der Erde auf den Balken ausgeübten Anziehung ändert. Hullmann setzt deshalb stillschweigend voraus, dafs für die ganze betrachtete Zeit von $t = o$ bis $t = \tau$ die Bewegung des Kippens des Balkens infolge der Erdanziehung parallel erfolge mit derjenigen Ebene, welche man sich durch die infolge der Massenträgheit allein gewonnene Lage des Balkens für die Zeit $t = \tau$ normal zu der zugehörigen Tangentialebene gelegt denken kann.

Ändert man die Rechnung Hullmanns so, dafs die soeben erwähnte Ungenauigkeit vermieden wird, alsdann resultiert das bekannte *Sinusgesetz*, wie ich bereits in Carls Repert. Bd. XVII nachgewiesen habe.

Da mir zuverlässige Experimente, welche die theoretischen Betrachtungen Hullmanns widerlegen, nicht bekannt waren, so hielt ich es wenigstens für sehr wünschenswert, dafs der theoretischen Widerlegung noch eine experimentelle hinzugefügt werde. Und das gilt um so mehr, da Friedlein fast gleichzeitig mit Hullmann zu gleichem Resultat wie derselbe gelangt ist, da überhaupt die Hullmann-Friedlein'sche Formel:

$$\sin x = \frac{\sin t \sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^4\left(\frac{t}{2}\right) \sin^2\left(2\,\varphi\right)}}$$

in Zeitschriften, welche vorwiegend pädagogischen Zwecken dienen, mehrfache Zustimmung gefunden hat, und da schliefslich einige experimentelle Untersuchungen Abweichungen von der *Sinusformel* nach der Seite der Hullmann-Friedlein'schen Formel ergeben haben.

In dem vor einem Jahre veröffentlichten I. Teil der vorliegenden Arbeit habe ich schon eines Experimentes von Peirinsius gedacht, über welches etwa um die Mitte des 17. Jahrhunderts Peter Gassendi in einem Briefe an Naudé ausführlich berichtet (s. S. Günther, Über die Vorgeschichte des Foucault'schen Pendelversuchs, Sitzungsberichte der physik.-medizinischen Societät zu Erlangen, vom 26. Mai 1873).

Nach dem erwähnten Berichte soll Peirinsius mit Hülfe eines Pendels einen experimentellen Beweis für die Achsendrehung der Erde geliefert haben. Dabei soll aber das Pendel nach demselben Berichte *spontan* seine Lage in der Vertikallinie verlassen haben, zunächst nach *West-Süd-West* und *Nord-Nord-Ost* ab-

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/93

gewichen und hierauf zurückgekehrt sein. Diese Erscheinung wird der Ebbe und Flut verglichen. Peirinsius spricht also aller Wahrscheinlichkeit nach von den Ausweichungen eines zur Ruhe gebrachten Pendels, d. i. von Ausweichungen, für deren Ursachen man wohl nur irgend welche dem Beobachter entgangene Störungen annehmen kann.

Nimmt man aber an, dafs nicht von einem ruhenden, sondern von einem schwingenden Pendel berichtet werde, was ja nicht absolut ausgeschlossen ist, so ist doch zu bedenken, dafs zwar Gassendi's Brief aus Paris datiert ist, dafs jedoch Gassendi in der Provence geboren wurde und, ehe er nach Paris kam, Professor in Aix, 43° 31′ n. Br. war, dafs auch Peirinsius aus der Dauphiné stammt, welche zwischen 44° und 46′ n. Br. liegt. In dem Berichte selbst heifst es: „... *in parallelo, in quo vir nobilis degit (scilicet aequatorem inter polumque plane intermedio“).* Es wäre also immerhin möglich, dafs das Experiment *südlich* von 45° n. Br. angestellt wurde, und man könnte versucht sein, hierin teilweise eine Bestätigung der Hullmann-Friedlein'schen Formel zu finden.

Ferner haben Beobachtungen von Dufour, Wartmann und Marignac einen Unterschied in der Geschwindigkeit der scheinbaren Drehung der Schwingungsebene ergeben, je nachdem die erste Schwingung des Pendels in der Richtung des Meridians oder normal zu derselben erfolgte. Es handelt sich hier um Versuche, welche mit einem Pendel von 20 m Länge angestellt wurden, dessen Bleikugel 12 kgr wog und ihre Oszillationen über einem Kreise von 3,25 m Durchmesser ausführte. Es wurde die Zeit beobachtet, welche verstrich, bis die Schwingungsebene des Pendels einen deutlich gezogenen Durchmesser überschritt. Resultat:

Die Abweichung um 25°, ausgehend vom Meridian, vollzieht sich in	2^h, 376
Die Abweichung um 25°, ausgehend von der Normale zum Meridian, vollzieht sich in	2^h, 110
Differenz	0^h, 266

In dem Auszug aus einem Briefe, welchen General Dufour an Arago schickte, heifst es (Compt. Rend. T XXXIII 1851) über diesen Gegenstand: „Y-a-t-il un ralentissement réel en partant de la méridienne? je n'oserais pas l'affirmer; il faudrait un pendule plus grand pour faire des observations plus précises, et qui se mût plus longtemps pour arriver à de plus grandes variations, si elles

doivent avoir lieu. Mais on peut affirmer, qu'il y a accélération très sensible quand on part de la perpendiculaire; la différence du temps étant assez grande pour qu'on ne puisse pas l'attribuer à un défaut d'observation. Il y a donc une cause perturbatrice, indépendante du mouvement général, et qui agit sur le pendule pour l'écarter de la perpendiculaire. Et, en effet, cette cause s'est manifestée chaque fois, par le mouvement du pendule qui était légèrement elliptique tandisque dans l'autre direction il était rectiligne ou plutôt se faisait rigoureusement dans un plan. Cette cause perturbatrice pourrait bien être la force centrifuge."

Für Berlin, $\varphi = 52^0\,30'$, giebt Hullmann l. c. folgende kleine Tabelle, in welcher unter x die nach seiner Formel, unter a die nach der Formel $a = t \,.\, sin\, \varphi$ berechneten numerischen Werte der sukzessiven Ablenkungen der Schwingungsebene gegeben sind. Die Anfangsschwingung hat die Richtung *N-S*. Die Werte für x nach 12^h gelten nach Westen gezählt.

$t =$	1^h	3^h	6^h	$8^h\,24^m$	9^h	12^h	15^h	18^h	21^h	24^h
$x =$	$11^0\,52'$	$34^0\,30'$	$64^0\,59'$	$90^0\,\,0'$	$97^0\,33'$	$180^0\,\,0'$	$97^0\,33'$	$64^0\,59'$	$34^0\,30'$	$0^0\,\,0'$
$a =$	$11^0\,54'$	$35^0\,42'$	$71^0\,24'$	$105^0\,21'$	$107^0\,\,6'$	$142^0\,48'$	$175^0\,30'$	$214^0\,12'$	$249^0\,54'$	$285^0\,36.$

Also nach der Hullmann'schen Berechnung ergiebt sich eine schwache Verzögerung für die Drehung der Schwingungsebene in der Nähe der Meridianlage und eine starke Beschleunigung in der zu dieser normalen Lage, wie nach obigen Versuchen verlangt wurde.

Meine Versuche sprechen in bestimmter Weise gegen die Hullmann-Friedlein'sche Formel.

Ist die Sinusformel streng oder nur approximativ richtig? Die von Foucault gegebene elementare Ableitung der *Sinusformel*, welche in der That ganz wie die ihr nachgebildeten elementaren Ableitungen der modernen Lehrbücher der *Physik* der Kritik sehr verlockende Blöfsen bietet, ist in neuerer Zeit sehr oft scharf kritisch beleuchtet worden, weshalb O. Röthig in einer historisch-didaktischen Studie über den Foucault'schen Pendelversuch (Z.-S. f. Math. u. Phys. 24. 1879.) den Verfassern von Lehrbüchern der *Physik* den sehr dringenden Rat giebt, lieber auf Originalarbeiten zu verweisen, als Entwickelungen zu geben, die ganz und gar nicht in der Ordnung sind. Die Folge dieser kritischen Untersuchungen ist, dafs man jetzt das *Sinusgesetz* vielfach für nur approximativ richtig hält. Aufserdem ergiebt noch die analytische

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/95

Behandlung, welche das sphärische Pendel von Durege in dessen Theorie der elliptischen Funktionen erfahren hat, dafs wenigstens für das sphärische Pendel der Foucault'sche *Sinussatz* nur approximativ richtig sein kann. Ich wurde hierauf von Hrn. Prof. S. Günther aufmerksam gemacht, durch dessen freundliche Vermittelung ich auch zumeist die Arbeiten erhielt, in welchen die Geifsel der Kritik gegen die elementaren Ableitungen des *Sinussatzes* geschwungen wird.

Dagegen sprechen sich Poinsot, Lionville und andere, welche das Foucault'sche Pendelproblem für ein durchaus geometrisches Problem erklären und demgemäfs behandeln, für die strenge Richtigkeit des *Sinussatzes* aus. Auch ich hielt bis zum Schlufs meiner Versuche den *Sinussatz* für streng richtig in dem Sinne wenigstens, in welchem überhaupt nur von streng oder absolut richtigen physikalischen Lehrsätzen die Rede sein kann.

Da freilich die Lufthülle sich an der Rotation der Erde um ihre Achse mit beteiligt, so setzt sie der Drehung der Schwingungsebene eines Pendels einen gewissen, aber doch ziemlich minimalen Widerstand entgegen. Bei der Ableitung des *Sinussatzes* ist darauf keine Rücksicht genommen. Es ist ferner eine geringe Torsion des Pendelfadens nicht mit in Rechnung gebracht, doch darf der hierher rührende Widerstand gegen die Drehung der Schwingungsebene gewifs mit noch mehr Fug und Recht minimal genannt werden als der Widerstand der mit der Erde um ihre Achse rotierenden Lufthülle. O. Röthig moniert noch l. c., dafs man die Pendellänge stets vernachlässige, während doch bei dem Benzenberg'schen Fallversuch, also bei einem sehr verwandten Problem, die östliche Abweichung des fallenden Steines wesentlich von der dem Steine oben im Turme erteilten Anfangsgeschwindigkeit also von der Turmhöhe abhänge. Ich mufs aber gestehen, dafs ich die Vernachlässigung der Pendellänge im Foucault'schen Pendelproblem begreiflicher finde als die von O. Röthig betonte Analogie zwischen der Turmhöhe beim Benzenberg'schen und der Pendellänge beim Foucault'schen Versuch. Ferner zeigt noch O. Röthig der Einfachheit wegen an dem über dem *Pol* schwingenden Pendel, dafs dasselbe ein Raumpendel sein müsse, also keine Schwingungs*ebene* habe, da ja noch im Moment des Abbrennens des Fadens die Pendelkugel die Rotation um die Erde mitmache. Aber darf denn die Rechnung nicht von der Voraussetzung ausgehen, dafs das über dem *Pol* in vollkommener Ruhe hängende Pendel durch einen einmaligen Stofs in Schwingungen

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/96

versetzt werde? Oder, wenn das Abbrennen des die Pendelkugel ablenkenden Fadens unerlässlich ist, kann man denn da nicht noch, wenn man sich nur vom *Pol* etwas entfernt, die Pendelkugel so ablenken, dafs sie in ihrer abgelenkten Lage eine Rotation um die Erdachse von genau derselben Gröfse ausführt wie in der Ruhelage? Müfste sich nicht nach Röthig ein Unterschied zeigen, je nachdem man mit der Anfangsschwingung *N-S.* oder *S-N.* beginnt? Gegen alle vorhin genannten und gegen ähnliche Einwürfe würde ich die strenge Richtigkeit des *Sinussatzes* verteidigen, wenn man mir zugeben will, dafs es erlaubt sein soll, überhaupt noch von streng richtigen mathematisch formulierten Lehrsätzen der *Physik* zu reden; denn es zeigt sich ja nie in der Natur die Wirkung einer Ursache allein, so dafs sich also auch selbst in einem fehlerlosen Experiment nie die mathematische Formel, welche Wirkung und Ursache verknüpft, vollkommen streng darstellen kann. Es kann sich stets nur darum handeln, ob die Nebenursachen einen durch Messungen näher bestimmbaren Einflufs auf die Wirkung haben können, welche sich im Experiment als von der zu untersuchenden Hauptursache herrührend darstellt, und dies ist bei den vorhin erwähnten akzessorischen Versuchsbedingungen bei der experimentellen Behandlung des *Foucault*'schen Pendelproblems meines Erachtens sicherlich nicht der Fall.

Gleichwohl halte ich den *Sinussatz* für nur approximativ richtig, seitdem meine Experimente eine durchschnittliche Verringerung der scheinbaren Drehung der Schwingungsebene um fast 3^0 in 12 Stunden ergeben haben; denn auf Rechnung von Zufälligkeiten ist diese Differenz zwischen der nach der *Sinusformel* berechneten und der beobachteten Ablenkung bei meinen 42 Versuchen, welche erst angestellt wurden, nachdem durch zahlreiche Vorversuche alle störenden Einflüsse mit möglichster Sorgfalt entfernt waren, ganz sicherlich nicht zu setzen. Ich nehme keinen Anstand, dies mit Bestimmtheit auszusprechen, trotzdem ich durch meine Versuche die ganze Empfindlichkeit eines langen Pendels kennen gelernt und erfahren habe, dafs der geringste Luftzug, welchen selbst die Flamme einer Oellampe kaum anzeigt, recht bemerkbare Störungen herbeizuführen im Stande ist. Die erwähnten 42 Versuche ergeben im Mittel in 12 Stunden eine Ablenkung um $136{,}8^0$, während für Zwickau i/S. (50^0 $43{,}5'$ n. Br.) die *Sinusformel* für 12 Stunden mittlerer Sonnenzeit eine Ablenkung um $139^0{,}7$ ergiebt. In der Tabelle, in welcher die für

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/97

12 Stunden berechnete Ablenkung = 139°,2 gesetzt wurde, ist die Korrektur der Zeit auf mittlere Sonnenzeit unterblieben.

Ich bin überzeugt, dafs meine Versuche mit Sicherheit eine Verringerung der Drehung der Schwingungsebene eines Pendels gegen die durch die Theorie verlangte Drehung konstatiert haben, und ich halte deshalb den *Sinussatz* nur für approximativ richtig; aber ebenso sicher bin ich davon überzeugt, dafs keine der Ursachen, welche vorhin p. 86—87 als angeblich für den approximativen Charakter des *Sinussatzes* beweiskräftig aufgezählt sind, eine der beobachteten nur angenähert gleiche Verringerung der Drehung der Schwingungsebene herbeizuführen im Stande ist.

Wenn man z. B., um für die Schätzung eine gewisse Unterlage zu gewinnen, den Widerstand der mit der Erde um ihre Achse rotierenden Lufthülle in der Weise verrechnet, dafs man sich die Luft an der in mittlerer Ablenkung durch irgend welche Kräfte fixiert vorgestellten Pendelkugel vorbeistreichend vorstellt, die Pendelkugel aber auf dem durch dieselbe um die Ruhelage konstruierten Kugelkreise frei beweglich sein läfst, so ergiebt sich, dafs die Pendelkugel infolge der von der Luft empfangenen Impulse in 12 Stunden einen Weg zurücklegen würde, welcher etwa eine Drehung um 1° darstellt. Bei dieser Berechnungsweise hat aber die Pendelkugel den Stöfsen der Luftteilchen keinen andern Widerstand als den ihrer trägen Masse entgegenstellt; es ist also ganz aufser acht gelassen, dafs aus der schwingenden Bewegung der Pendelkugel nach dem Satze von der Konstanz der Achsen rotierender Körper ein keineswegs unerheblicher Widerstand gegen die durch die Stöfse der Luftteilchen angestrebte Drehung der Schwingungsebene herzuleiten ist. Wenn demnach die schwachen Stöfse der Luftteilchen der auf ihrem horizontalen Kugelkreise frei beweglichen Pendelkugel nur eine so äufsert geringe Beschleunigung zu erteilen vermochten, dafs infolge derselben in 12 Stuuden eine Drehung um etwa 1° bewirkt werden könnte, so darf man wohl annehmen, dafs die Richtungsänderung, welche die mit der Erde um ihre Achse rotierende Lufthülle an der nach dem Gesetze von der Konstanz der Achsen rotierender Körper in ihrer Lage festgehaltenen Schwingungsebene hervorzubringen vermag, sich jeder Beobachtung entzieht.

Für die hier vertretene Ansicht, dafs der Widerstand der Luft — die übrigen mit aufgezählten Momente, welche noch den approximativen Charakter des *Sinussatzes* bedingen sollen, glaube ich

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/98

unerörtert lassen zu dürfen — keinen meſsbaren Einfluſs auf die Drehung der Schwingungsebene eines Pendels haben dürfte, kann ich mich noch auf Rechnungen berufen, welche gröſsern Anspruch auf Beachtung erheben als die vorhin angedeutete Schätzungsrechnung; denn bei der Behandlung des *Foucault*'schen Pendels hat man wiederholt den Widerstand der Luft mit in Rechnung zu ziehen versucht. Ich nenne nur: Clausen, Bull. de St. Pétersb. 1852; Hansen, Pogg. Ann. XCII; St. Robert, Mem. d. Soc. ital. d. Scienze III; Mossotti, Ann. di Scienze math. e fis 1851; F. Siacci, Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino XIII. 1878.

Zunächst freilich herrscht noch keine Übereinstimmung darüber, ob man den Luftwiderstand direkt der Geschwindigkeit oder dem Quadrate derselben proportional setzen soll; denn St. Robert ist für die erstere, Mossotti für die letztere Annahme. Allen erwähnten Rechnungen ist die Voraussetzung sehr kleiner Amplituden gemein, und in den Integrationen lassen sich auch stets leicht diese oder jene Approximationen nachweisen. Mossotti kommt überhaupt zu keinem Resultat, welches geometrisch interpretiert werden könnte. Wenn aber ein geometrisch interpretierbares Resultat erzielt wurde, so lautet dies übereinstimmend dahin, daſs der Luftwiderstand *keinen* Einfluſs auf die Drehung der Schwingungsebene eines Pendels ausübt.

So sagt die aus den Rechnungen St. Roberts resultierende Formel aus, daſs der Oszillationsmittelpunkt eine Spirale beschreibe, deren Drehung um die Vertikale mit einer Geschwindigkeit erfolgt, welche mit derjenigen der Erddrehung, bezogen auf dieselbe Vertikale gleich aber entgegengesetzt gerichtet ist. Und Siacci findet, daſs das Pendel, oder genauer seine Horizontalprojektion, eine logarithmische Spirale beschreibt um einen Punkt, welcher seinerseits eine kongruente Spirale in entgegengesetztem Sinne beschreibt. Die Geschwindigkeiten auf den beiden Spiralen sind den Radienvektoren proportional; die Winkelgeschwindigkeiten sind konstant und ihr arithmetisches Mittel ist entgegengesetzt gleich der Komponente der Erdrotation, genommen nach der Richtung der Vertikalen. Siacci formuliert das Resultat seiner Untersuchungen auch noch wie folgt: „Wenn man vom Zentrum irgend zwei Grade zieht, so sind die Zeiten, welche der bewegte Punkt gebraucht, um die Strecke von der einen Graden bis zur andern zu durchlaufen, immer dieselben, welche Spiralwindung auch zwischen den beiden Graden durchlaufen wird, und der Radiusvektor

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/99

hat wieder dieselbe Geschwindigkeit, wenn er in dieselbe Richtung zurückgekehrt ist."

Aus den soeben angeführten Resultaten, der zwar noch approximativen aber immerhin doch schon sehr scharfen Rechnungen glaube ich in gleicher Weise wie aus meinen oberflächlichen Schätzungsrechnungen folgern zu dürfen, nicht etwa dafs der Widerstand der Luft absolut streng ohne irgend welchen Einflufs auf die Drehung der Schwingungsebene eines Foucault'schen Pendels sei, sondern nur, dafs dieser Einflufs ein äufserst geringfügiger sein müsse, so dafs derselbe z. B. in den Rechnungen St. Roberts leicht dadurch überdeckt worden sein mag, dafs St. Robert mit ω^2 behaftete Glieder vernachlässigt auf Grund der Annahme einer gleichmäfsig wirkenden Gravitation in den verschiedenen Punkten der Pendelbahn, ohne sich stets erst davon überzeugt zu haben, ob auch wirklich der Faktor von ω^2 kleiner höchstens gleich der Differenz der Abstände der Bahnpunkte vom Erdmittelpunkte ist.

Da mich jedoch meine eigenen experimentellen Untersuchungen, wie bereits erwähnt wurde, zwingen, den *Sinussatz* nur für approximativ richtig zu halten, so würde ich doch wohl schwerlich mit der Bestimmtheit für die Geringfügigkeit des Einflusses der mit der Erde rotierenden Lufthülle eingetreten sein, zu welcher ich mich im Vorstehenden berechtigt fühlte, wenn mir nicht der Umstand, dafs jedes ebene Pendel sehr bald in ein konisches übergeht, die Bemerkung nahe gelegt hätte, dafs man doch nicht *a priori* wissen könne, ob nicht dieselben an sich gewifs schon beachtenswerten Ursachen, welche ein längeres Konservieren ebener Schwingungen unmöglich machen, auch verzögernd auf die scheinbare Drehung der Schwingungsebene einwirken möchten, wenn ferner nicht diese Bemerkung mich auf den Gedanken gebracht hätte, dafs wohl in der Kippung, welche die Schwingungsebene des Pendels oder nach erfolgtem Übergange des ebenen Pendels in ein konisches die Bahnkurve des Schwingungsmittelpunktes infolge der Rotation der Erde um ihre Achse fortgesetzt erfährt, ein weiterer beachtenswerter Grund zugleich für die Formänderung der Pendelschwingungen und für die Verzögerung der scheinbaren Drehung der Schwingungsebene zu finden sein könne, und wenn sich mir nicht auch diese Vermutung als richtig erwiesen hätte, wie ich im Nachstehenden zu zeigen versuchen will.

Über den kausalen Zusammenhang zwischen der Verzögerung der scheinbaren Drehung der Schwingungsebene und der Formänderung

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/100

der Pendelschwingungen. Gehen wir von der Voraussetzung aus, dafs irgend etwas eine Verlangsamung der scheinbaren Drehung der Schwingungsebene eines Pendels bewirke, dafs also irgend etwas eine wirkliche Drehung der Schwingungsebene bewirke in entgegengesetztem Sinne zu demjenigen, in welchem die scheinbare Drehung der Schwingungsebene erfolgt. Für unsere nördliche Erdhälfte bedeutet dies, dafs die Schwingungsebene in der Richtung von Nord über West nach Süd gedreht wird. Den Einflufs einer solchen Drehung der Schwingungsebene auf die Form der Schwingungen machen wir uns leicht klar mit Hülfe einer dünnen mit starkem wulstigem Rande versehenen Scheibe, welche sich mittelst einer aufgewickelten Schnur um eine feste Achse innerhalb eines Ringes in rasche Rotation versetzen läfst, wie solche schon Foucault zur Erklärung der *Praecession* und *Nutation* konstruiert hat.

Hängt man nämlich einen solchen Ring auf einer Seite an einer Schnur auf wie in Fig. 6, nachdem die Scheibe in rasche Umdrehung versetzt ist, so sinkt der Ring nicht herab aus seiner horizontalen Ebene, sondern er dreht sich in derselben um die Schnur in dem durch einen Pfeil angedeuteten Sinne, wenn die Scheibe in dem ebenfalls durch einen Pfeil angedeuteten Sinne rotiert. Verzögert man die Rotation des Ringes um den Faden, an welchem er aufgehängt ist, durch leichten Druck, so sinkt derselbe aus seiner horizontalen Lage herab, er neigt sich abwärts. Wenn man dagegen die Rotation des Ringes um seinen Aufhängefaden durch leichten Druck befördert, so steigt der Ring aus seiner horizontalen Lage heraus, er wendet sich aufwärts.

Poggendorf hat für diese und ähnliche Erscheinungen eine höchst einfache Erklärung gegeben auf Grund allein des Beharrungsbestrebens aller Massen wie folgt: Suchte eine Kraft die Achse der Scheibe, welche sich in der Richtung des Pfeiles dreht und vertikal zur Ebene des Papiers vorgestellt werden mag, aus der Lage ab in die Lage cd zu bringen, s. Fig. 7, also in der durch einen Pfeil angedeuteten Richtung zu drehen, so strebt doch das Teilchen m seine Bewegung nach der Richtung me fortzusetzen. Da es aber die Richtung mf einzuschlagen gezwungen wird, so mufs es in der zu mf senkrechten Richtung einen Druck ausüben. mg tritt nach vorne aus der Ebene des Papiers heraus. Eine gleiche Betrachtung ergiebt für den diametral entgegengesetzten Punkt m_1 einen Druck, welcher entgegengesetzt gerichtet ist zu dem durch

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/101

mg repräsentierten Druck. Die beiden soeben abgeleiteten Druckkomponenten für resp. m und m_1 ergeben eine Koppelkraft, welche eine Drehung des Apparats in solchem Sinne erstrebt, dafs sich der Ring aus seiner horizontalen Lage herausbegeben und nach aufwärts wenden mufs.

Wendet man die vorstehende Betrachtung auf das Pendel an, so erkennt man leicht, dafs durch eine Drehung der Schwingungsachse in der Richtung von Nord über West nach Süd das ebene Pendel in ein konisches übergeführt werden mufs der Art, dafs der Konus gleichfalls in der Richtung von Nord über West nach Süd durchlaufen wird. Denn einer Hin-Schwingung, in welcher sich die Pendelkugel durch die Ebene der Zeichnung hindurch in den Raum hinter derselben hinein bewegt, entspricht in der Fig. 7 die Bewegung des Punktes m, und der Drehung der Schwingungsachse des Pendels von Nord über West nach Süd entspricht auch die in der Fig. 7 dargestellte Verlegung der Rotationsachse aus der Lage ab in die Lage cd. Demnach wird durch die Drehung der Schwingungsachse während der Hinschwingung die Pendelkugel veranlafst aus ihrer Bahn nach rechts abzuweichen. In gleicher Weise erkennt man leicht, wie dieselbe Pendelkugel während ihrer Rückschwingung durch dieselbe Drehung der Schwingungsachse veranlafst wird, wieder nach rechts von ihrer Bahn etwas abzuweichen, wenn wir uns in der Pendelkugel eine Person stehend vorstellen, welche stets mit dem Gesichte dahin sieht, wohin sie sich bewegt. Damit aber ist die Ursache für die Entstehung der auf der nördlichen Erdhälfte im entgegengesetzten Drehungssinne zur Drehung des Uhrzeigers durchlaufenen konischen Schwingungen zurückgeführt auf Ursachen, welche die scheinbare Drehung der Schwingungsebene eines Pendels verlangsamen.

Begleitbedingungen des Foucault'schen Pendelversuchs. Nach dem Vorstehenden mufs die Atmosphäre, indem sie die Schwingungsebene des Pendels in die von ihr selbst mit der Erde ausgeführte Rotation mit hineinzureifsen strebt, eine Formänderung der Pendelschwingungen bedingen der Art, dafs aus dem ursprünglich ebenen Pendel ein konisches wird, welches seine Rotationen von Nord über West nach Süd ausführt. Ich habe schon meine Gründe dafür entwickelt, dafs ich in dem Luftwiderstande keine hinreichende Erklärung für die von mir beobachtete Verzögerung der scheinbaren Drehung der Schwingungsebene und die gleichzeitige Formänderung der Trajektorie des Schwingungsmittelpunktes

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/102

zu finden vermag trotz vollkommener qualitativer Üebereinstimmung. Ich wurde in dieser Ansicht vorzüglich durch die sorgfältige Berücksichtigung bestärkt, welche in vielen mathematischen Behandlungen des Pendelproblems dem Luftwiderstande ohne eigentlichen Erfolg zu Teil geworden ist.

Der Grund für die Erfolglosigkeit der Bemühungen, den Luftwiderstand mit in Rechnung zu ziehen, liegt aufser in der schon erwähnten Unsicherheit über die zu subponierende Gesetzmäfsigkeit doch wohl besonders in der Schwierigkeit der auszuführenden Integrationen, bei denen es sich absolut nicht entscheiden läfst, ob nicht die unvermeidlichen kleinen Vernachlässigungen gerade hinreichen, um den geringfügigen Einflufs der Luftreibung auf die scheinbare Drehung der Schwingungsebene aus dem Rechnungsresultat verschwinden zu lassen.

Neben dem Luftwiderstande wirken noch andere Ursachen auf das an der Erdoberfläche schwingende Pendel ein; und da nun bei der Behandlung eines Problems von solcher kaum zu bewältigenden Schwierigkeit, wie uns das Pendelproblem darbietet, stets die erste Bedingung zum Erfolg in der sorgfältigsten Loslösung der grade betrefs ihres Einflusses zu untersuchenden Nebenbedingung des Experiments besteht, so dürfte wohl zweckdienlich der analytischen Behandlung des Pendelproblems eine rein mechanisch anschauliche Behandlung vorherzuschicken sein.

Die anschauliche Behandlungsweise schliefst sich am besten an das Verfahren Poinsot's, Liouville's und anderer an, welche bekanntlich das Pendelproblem wie ein rein geometrisches behandelten. So sagt Lionville z. B. — wie ich durch meine Versuche und Betrachtungen erwiesen zu haben glaube, freilich irrtümlich —: „L'idée est bien simple; elle a du se présenter a tout le monde, après la communication de M. Foucault, qui rendait tout facile; mais les développements que j'ai ajouté constituent, je crois, une démonstration mathématique qui se suffit à elle-même et qui donne tout ce que peut donner le calcul.“ Da Lionville auf die im Experimente nicht zu vermeidenden Nebenbedingungen nicht viel Gewicht legte, so war es ihm vielleicht gar nicht bekannt, dafs sich ebene Pendelschwingungen in einem Foucault'schen Pendel nicht längere Zeit konservieren lassen. Abgesehen aber davon, dafs sich hier der Physiker neben dem Mathematiker geltend machen möchte, dürfte sich vielleicht der mathematische Physiker mit Fug durch Lionville's Betrachtungen dazu anregen

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/103

lassen, die Begleitbedingungen im Foucault'schen Pendelexperiment einzeln, der Reihe nach daraufhin zu untersuchen, ob sie die Form der dynamischen Differentialgleichungen unverändert lassen also für die zu beobachtende Erscheinung einflufslos sind. Diese Untersuchungen machen sich äufserst einfach, so lange die dynamischen Differentialgleichungen in unveränderter Form aus den Transformationen wieder hervorgehen, da ja so lange keine Integrationen auszuführen sind. Ich denke hierauf noch näher einzugehen.

Die mechanisch anschauliche Behandlungsweise dürfte sich dagegen mit Vorteil an die Poggendorf'sche Behandlungsweise der rotierenden Scheiben anschliefsen, wie dies schon im Vorstehenden bei der Untersuchung des kausalen Zusammenhangs zwischen der Formänderung der Bahn des Pendels und der Verzögerung der scheinbaren Drehung der Schwingungsebene desselben geschehen ist. Und bei dieser Behandlungsweise erkennt man leicht, wenn man der Einfachheit wegen ein Kreispendel voraussetzt, wie durch das Kippen der Ebene, in welcher die Pendelkugel ihre Kreisbahn beschreibt, eine Koppelkraft erzeugt wird, welche eine Drehung in entgegengesetztem Sinne zu demjenigen der scheinbaren Drehung der Schwingungsebene anstrebt.

Das Massenteilchen m, welches sich bei freier Beweglichkeit in der Richtung ma fortbewegen würde, wird durch die Drehung der Rotationsachse in dem in der Tafel Fig. 8 angedeuteten Sinne gezwungen, sich in der Richtung mb zu bewegen, so dafs die Bewegungsgröfse ma in zwei zu einander senkrecht gerichtete Komponenten mb und mc zerlegt wird. In gleicher Weise zerlegt sich durch das Kippen der Rotationsachse die Bewegungsgröfse des diametral entgegengesetzt zu m gelegenen Massenteilchens m_1, wodurch sich eine Komponente $m_1 c_1$ ergiebt, welche mc zu einer Koppel ergänzt. Die Ebene dieser Koppel ist gegen die Vertikalebene ein wenig geneigt, so, dafs durch Zerlegung aus derselben zwei Koppel gewonnen werden, von denen die eine eine Rotation in der Horizontalebene anstrebt, welche in entgegengesetztem Sinne zur Drehung des Uhrzeigers erfolgen mufs. Ob das Massenteilchen m durch die Festigkeit einer Metallscheibe oder die Anziehung der Erde gezwungen wird, seine Bewegungsrichtung ma in die Bewegungsrichtung mb umzuwandeln, ist für das Entstehen der Koppel offenbar gleichgültig. Die zweimalige Zerlegung aber, durch welche erst die in der Horizontalebene wir-

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/104

kende Koppel erhalten wurde, deutet schon darauf hin, dafs die Kräfte derselben erst von der zweiten Potenz der Geschwindigkeit abhängen, mit welcher das Kippen der Rotationsachse erfolgt, so dafs es von vornherein leicht erklärlich ist, weshalb sich bei der üblichen analytischen Behandlungsweise des Foucault'schen Pendelproblems der Einflufs der Richtungsänderung der Gravitations wirkung im Rechnungsresultat nicht zeigt; denn man pflegt diejenigen Glieder, in denen das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ω der Erdrotation vorkommt, bei der Integration zu vernachlässigen, falls sie nicht noch einen sehr grofsen Faktor, etwa den Erdradius, enthalten.

Ich habe p. 92 gezeigt, dafs der Luftwiderstand, oder besser die Einwirkung der mit der Erde rotierenden Lufthülle auf die Schwingungsrichtung des Pendels das ebene Pendel in ein konisches überführen müsse, dessen Rotation in der Richtung von Nord über West nach Süd erfolgt. Eine Rotation in demselben Sinne habe ich in der vorstehenden Betrachtung des Kreispendels vorgestellt. Uebertragen wir also das, was vorhin von Kreisschwingungen ausgesagt wurde, auf elliptische Schwingungen, so ergiebt sich eine Verstärkung des durch die Lufthülle an dem in ihr schwingenden Pendel hervorgebrachten Effektes, so bald nur erst die ebenen Schwingungen in elliptische übergegangen sind, und wenn auch aus der vorstehenden Betrachtung klar hervorleuchtet, dafs die Kräfte der schliefslich in der Horizontalebene verzögernd auf die scheinbare Rotation der Schwingungsrichtung einwirkenden Koppel nur sehr kleine sein können, so folgt daraus durchaus noch nicht, dafs auch die Verstärkung des Effektes, welcher direkt von der mit der Erde rotierenden Lufthülle herrührt, als eine unbedeutende zu bezeichnen sei; denn im Vergleich mit der durch die rotierende Atmosphäre erzeugten Koppel mag sehr wohl noch die durch das Kippen der Rotationsachse erzeugte Koppel als eine bedeutende erscheinen.

Aber nicht blos in dem fortwährend erfolgenden Kippen der Bahn der Pendelkugel eines sphärischen Pendels, sondern schon in der Existenz sphärischer Schwingungen ohne Berücksichtigung der Erdrotation, ist nach Durège (*Theorie* der elliptischen Funktionen p. 317) direkt ein Grund für eine Drehung der Hauptschwingungsrichtung gegeben der Art, dafs auch hieraus eine Verstärkung des Effektes resultiert, welchen die mit der Erde rotierende Lufthülle am Foucault'schen Pendel hervorbringt, sobald nur erst

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/105

das ebene Pendel in ein konisches übergeführt ist. Denn aus den Rechnungen von Durège geht hervor, „dafs das sphärische Pendel bei jeder Schwingung einen Ausschlag nach der Seite der Bewegungsrichtung hin macht, und dafs dieser Ausschlag um so gröfser ausfällt, je gröfser die kleinste Ablenkung von der Vertikallinie im Vergleich zur gröfsten Ablenkung ist.“

Mit den vorstehenden Betrachtungen stimmen die Ergebnisse meiner experimentellen Untersuchungen, sowie die gelegentlich derselben gemachten Erfahrungen sehr gut überein; denn es zeigte sich, dafs nur beim sorgfältigsten Ausschlufs aller denkbaren störenden Einflüsse die ebenen Schwingungen regelmäfsig in konische übergingen, welche entgegengesetzt wie die Drehung eines Uhrzeigers verliefen, während später doch die Verringerung der Excentrität der Bahnkurve recht beträchtlich wurde, wie ja auch die Verzögerung der scheinbaren Drehung der Hauptschwingungsrichtung in dem letzten Versuchsintervall schon eine recht bemerkbare ist.

Zur nähern Klarlegung der vorstehenden Bemerkungen sei im Folgenden ein Pendel betrachtet, welches unter dem Äquator unendlich kleine Oscillationen ausführt. Wir können in diesem Falle die Vorstellung noch etwas vereinfachen, wenn wir die Pendelkugel ersetzen durch ein der Masseneinheit gleich gesetzes Massenteilchen, welches gezwungen ist, sich unter dem Einflufs einer dem jeweiligen Abstande von einem festen Punkte proportionalen Zentralkraft auf einem Teller zu bewegen, welcher auf dem Äquatorialkreise so fortgleitet, dafs er stets in die jeweilige Tangentialebene hineinfällt. Durch den Berührungspunkt des Tellers mit der Erde sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem ξ, η, ζ so gelegt, dafs die Achse der ξ in den verlängerten Erdradius, und die Achse der η in die Richtung der Tangente des Äquatorialkreises fällt. s. Fig. 9.

Der Massenpunkt passiere zur Zeit $t = o$ die Achse der ξ normal im Punkte $\zeta_0 = \alpha$ mit der Geschwindigkeit $\eta_0' = \beta$; ϱ sei der Radiusvektor der in der $(\eta\zeta)$ Ebene beschriebenen Bahnkurve, und $\varkappa$ sei die Proportionalitätskonstante, mit welcher man für jeden Moment ϱ zu multiplicieren hat, um die Zentralkraft zu erhalten. Bezeichnen wir noch mit G die Gravitationskonstante bei ruhend gedachter Erde, mit φ den Winkel, welchen ϱ mit der ζ Achse und mit δ den Winkel, welchen die ξ Achse mit der x Achse eines festen durch den Erdmittelpunkt gelegten Koordinatensystems einschliefst, wenn

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/106

die xy Ebene mit der Äquatorealebene zusammenfällt, so erhält man die dynamischen Differentialgleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} x'' = -G\cos\delta + \varkappa\varrho\sin\varphi\,.\sin\delta \\ y'' = -G\sin\delta - \varkappa\varrho\sin\varphi\cos\delta \\ z'' = \qquad\quad -\varkappa\varrho\cos\varphi \end{cases}$$

Da die Achse der ζ stets zur Achse der z parallel bleibt, so ändert sich die nach der z-Achse genommene Kräftekomponente durch die jetzt vorzunehmende Transformation der Differentialgleichungen auf das bewegliche Koordinatensystem ξ, η, ζ nicht. Ich brauche also blofs die beiden ersten der unter 1) gegebenen Gleichungen weiter zu behandeln und setze deshalb zur Abkürzung $\varkappa\varrho\,.\sin\varphi = \lambda$. Wenn ich nun die beiden Gleichungen:

$$2)\quad \begin{cases} x'' = -G\cos\delta + \lambda\sin\delta \\ y'' = -G\sin\delta - \lambda\cos\delta \end{cases}$$

einmal mit resp. $\cos\delta$ und $\sin\delta$, ein andermal mit resp. $-\sin\delta$ und $\cos\delta$ multipliciere, so erhalte ich durch Aditition:

$$3)\quad \begin{cases} x''\cos\delta + y''\sin\delta = -G \\ -x''\sin\delta + y''\cos\delta = -\lambda \end{cases}$$

Die Transformationsgleichungen lauten:

$$4)\quad \begin{cases} x = (r+\xi)\cos\delta - \eta\sin\delta \\ y = (r+\xi)\sin\delta + \eta\cos\delta\ , \end{cases}$$

wenn der Erdradius mir r bezeichnet wird. Durch Differentiation dieser Transformationsgleichungen aber erhält man:

$$5)\quad \begin{cases} x'' = \xi''\cos\delta - \eta''\sin\delta - 2\,\omega\xi'\sin\delta - 2\,\omega\eta'\cos\delta - \\ \qquad\qquad \omega^2(r+\xi)\cos\delta + \omega^2\eta\sin\delta \\ y'' = \xi''\sin\delta + \eta''\cos\delta + 2\,\omega\xi'\cos\delta - 2\,\omega\eta'\sin\delta - \\ \qquad\qquad \omega^2(r+\xi)\sin\delta - \omega^2\eta\cos\delta\ . \end{cases}$$

Hierbei ist jedoch $\delta' = \omega$ gesetzt, um in der üblichen Weise die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation mit ω zu bezeichnen.

Behandelt man die Gleichungen 5) in gleicher Weise, wie vorhin die Gleichungen 2) behandelt wurden, so erhält man:

$$6)\quad \begin{cases} x''\cos\delta + y''\sin\delta = \xi'' - 2\,\omega\eta' - \omega^2(r+\xi) \\ -x''\sin\delta + y''\cos\delta = \eta'' + 2\,\omega\xi' - \omega^2\eta \end{cases}$$

Durch Kombination der Gleichungen 6) und 3) aber erhält man:

$$7)\quad \begin{cases} \xi' - 2\,\omega\eta' - \omega^2(r+\xi) = -G \\ \eta'' + 2\,\omega\xi'' - \omega^2\eta \qquad\quad = -\lambda \end{cases}$$

Da die Winkelgeschwindigkeit ω nur halb so grofs ist wie diejenige des kleinen Zeigers einer Uhr, da also ω auf Sekunden reduziert, einen sehr kleinen Wert darstellt, so werden gewöhnlich diejenigen Glieder, welche ω^2 enthalten, weggelassen, falls in

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/107

ihnen nicht etwa neben ω^2 noch ein sehr grofser Faktor, etwa der Erdradius, vorkommt.

Ich will zunächst ebenso verfahren und dementsprechend $\omega^2\xi$ und $\omega^2\eta$ vernachlässigen. $\omega^2 r$ aber ist gleich der durch die Rotation der Erde hervorgerufenen Zentrifugalkraft; deshalb ist $G - \omega^2 r = g$, wenn ich mit g die allein experimentell bestimmbare, durch die Zentrifugalkraft verminderte Gravitationskonstante bezeichne. Somit erhalte ich die Gleichungen:

$$8)\quad \begin{cases} \xi'' - 2\,\omega\eta' = -g \\ \eta'' + 2\,\omega\xi' = -\lambda\,. \end{cases}$$

ξ' ist für jeden Moment $= o$, da der Teller, auf welchem der Massenpunkt seine Bahn beschreibt, in jedem Moment normal zur Achse der ξ liegt. Ferner ist $\lambda = \varkappa\varrho \sin\varphi = \varkappa\eta$, die zweite der beiden Gleichungen unter 8) nimmt deshalb die Gestalt an:

$$\eta'' = -\varkappa\eta\,.$$

Es ist $\zeta'' = z'' = -\varkappa\varrho\cos\varphi = -\varkappa\zeta$. Demnach erhalte ich die Differentialgleichungen:

$$9)\quad \begin{cases} \xi'' = 2\,\omega\eta' - g \\ \eta'' = -\varkappa\eta \\ \zeta'' = -\varkappa\zeta \end{cases}$$

Würde das Achsensystem der ξ, η, ζ als im Raume festliegend betrachtet, so würde man die Differentialgleichungen:

$$10)\quad \begin{cases} \xi'' = -g \\ \eta'' = -\varkappa\eta \\ \zeta'' = -\varkappa\zeta \end{cases}$$

erhalten, und wenn man bedenkt, dafs jede Beschleunigung des Massenteilchens in der Richtung der ξ-Achse durch die Festigkeit des Tellers aufgehoben wird, so ersieht man aus der Vergleichung der Gleichungen 9) mit den Gleichungen 10), dafs sich das Massenteilchen auf seinem bewegten Teller genau ebenso bewegen mufs, wie wenn der Teller ruhte.

Jetzt aber will ich die bei der vorstehenden Rechnung vernachlässigten Glieder $\omega^2\xi$ und $\omega^2\eta$ mit in Rechnung ziehen, also ausgehen von den Differentialgleichungen:

$$11)\quad \begin{cases} \xi'' - 2\,\eta\omega' - \omega^2\xi = -g \\ \eta'' + 2\,\omega\xi' - \omega^2\eta = -\lambda \end{cases}$$

Alsdann erhalte ich aus der zweiten Gleichung unter 11)

$$\eta'' = -(\varkappa - \omega^2)\,\eta$$

und die Differentialgleichungen lauten:

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/108

$$12)\quad \begin{cases} \xi'' = (2\,\varkappa\omega + \omega^2 - 2\,\omega^3) - g \\ \eta'' = \quad -(\varkappa - \omega^2)\,\eta \\ \zeta'' = \quad - \quad \varkappa\zeta \end{cases}$$

Die erste der drei Gleichungen unter 12) ist wieder gleichgültig, und die beiden letzten lassen sich leicht integrieren. Man erhält die vollständigen Integrale:

$$13)\quad \begin{cases} \eta = A\,.\cos\,(t\,.\sqrt{\varkappa - \omega^2}) + B\,\sin\,(t\sqrt{\varkappa - \omega^2}) \\ \zeta = \Gamma\,.\cos\quad (t\sqrt{\varkappa}) \quad + \Delta\,\sin\quad (t\sqrt{\varkappa}) \end{cases}$$

Durch Berücksichtigung der Anfangzustände: $\eta' = \beta$; $\zeta_0 = \alpha$; $\zeta_0' = o$; $\eta_0 = o$, erhält man hieraus, da $A = o$-; $B = \beta : \sqrt{\varkappa - \omega^2}$; $\Gamma = \alpha$; $\Delta = o$ gefunden wird:

$$14)\quad \begin{cases} \eta = \dfrac{\beta}{\sqrt{\varkappa - \omega^2}}\,.\,\sin\,(t\,.\sqrt{\varkappa - \omega^2}) \\ \zeta = \alpha\,\cos\,(t\sqrt{\varkappa}) \end{cases}$$

Unter 14) aber sind die simultanen Gleichungen einer Hypotrochoide gegeben.

Die Schwingungsdauer konischer Pendel. Bravais hat zuerst am 10. Februar 1851 in einer Arbeit: „Sur les systèmes dans lesquels les vibrations dextrogyres et lévogyres ne s'effectuent pas de la même manière“ darauf hingewiesen, dafs die Schwingungsdauer eines konischen Pendels eine andere sein müsse, je nachdem der Konus durchlaufen wird in dem Sinne der Drehung des Uhrzeigers oder in entgegengesetztem Sinnne. Bravais glaubt, dafs durch ein sorgfältiges Studium der Ursachen dieses Unterschiedes leicht ein Hülfsmittel geschaffen werden könne zur bessern Einsicht in manche optische sowohl, wie in manche elektromagnetische Erscheinungen. Bravais spricht sich hierübnr *l. c.* in der folgenden Weise aus:

„Le phénomène rotatoire du quartz n'avait pas jusqu'ici son analogue parmi les mouvements naturels actuellement bien déterminées; mais il vient de le recontrer dans la belle expérience de M. Foucault.“

„La seule différence consiste en ce que, dans le cas du quartz, suivant la théorie des ondes, chaque molécule d'éther située dans l'axe du rayon transmet son mouvement, succesivement modifié de proche en proche à la molécule qui la suit dans le sens de la propagation, pour rentrer ensuite dans l'état de repos, jusqu'à ce qu'un nouvel ébranlement intervienne pour l'en fair sortir, tandisque dans le cas du pendule la masse oscillante, étant isolée

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/109

continue à vibrer sur place, sans transmettre son déplacement à des masses voisines."

„Je vais maintenant examiner le cas, où la vibration devient circulaire. Fresnel a montré qu'une vibration circulaire pouvait être considéré comme équivalente à deux vibrations rectilignes d'égale amplitude et dont les phases différaient de 90 degrés: partant de là, il a prouvé que, si le plan de chacune de deux vibrations composantes vient à tourner avec une certaine vitesse commune, la propagation du mouvement circulaire correspondant sera modifée en plus ou en moins, selon que la vibration sera dextrogyre ou lévogure; d'ou il a conclu que le quartz ne saurait transmettre avec la même vitesse ces deux genres de vibration: enfin il a verifié ce dernier résultat par les expériences dirctes."

„En appliquant le méme méthode de raisonnement aux vibrations linéaires et très petites d'un pendule, on voit que, si la vibration devient circulaire, comme cela a lieu dans le pendule conique, sa durée ne peut pas être la même, selon qu'elle a lieu dans le sens de la rotation du plan des vibrations rectilignes, c'est-à-dire d'orient en occident, ou dans le sens contraire. La durée est raccourcie dans le premier cas, elle est augmentée dans le second, quelleque soit d'ailleure la cause à laquelle on doiee attribuer le déplacement du plan des vibrations observé par M. Foucault. Il y aura donc lieu d'appliquer aux durées des vibrations du pendule circulaire une corretion dont le signe sera variable avec le sens dans lequelle elles s'effectuent."

Und später: „On peut d'après les remarques précédentes, espérer de soumettre à une explication plus complète la propriété que possèdent certaines substances et notamment les corps soumis à l'influence électromagnétique, de fair tourner les plaus de polarisation de la lumière et de transmettre avec des vitesses inégales les vibrations dextrogyres et lévogyres de l'éther."

Bald darauf hat Bravais in einer Arbeit, Compt. Rend. *T* XXXIII. 1851. p. 195: „Sur l'influence qu'excerce la rotation de la Terre sur le mouvement d'un pendule à oscillations coniques", Beobachtungen veröffentlicht, welche seine Betrachtungen glänzend bestätigten. Bravais giebt seine Beobachtungsresultate wie folgt:

„J'ai employé deux méthodes distinctes, la méthode des observations directes et celle des coïncidences. Dans la méthode directe, j'observais la durée de 900 à 1200 oscillations lévogyres du pendule (d'occident en orient en passant par le sud) et aussitôt après

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/110

la durée pareille des oscillations dextrogyres du même pendule (orient en occident); la distance du point de suspension au centre du poids à varié de 10 187 à 10 197 millimètres. Les durées observées sont été les suivantes:

	Lévogyres	Dextrogyres	Différence
	s.	s.	s.
5. mai —	6,39887	6,39823	0,00064
11. „ .. —	9,39925	6,39849	0,00076
16. „ fil A	6,39815	6,39751	0,00064
18. „ fil A	6,39959	6,39863	0,00096
16. „ fil B	6,40106	6,40032	0,00074
18. „ fil B	6,40116	6,40044	0,00074
Différence moyenne			0,00074

„La différence indiquée par la théorie est égale à 0,$\overset{s}{0}$00716, et cet accord peut être considéré comme satisfaisant."

„La seconde méthode offre une précision beaucoup plus grande. Deux pendules pareils, mais de longueurs différents, furent placés dans les plan du méridien à 7 décimètres de distance. L'intervalle entre le point de suspension et le centre du poids était de 10 216 millimètres pour le pendule long et de 10 115 pour le pendule court. Des rotations coniques, l'une dextrogyre l'autre lévogyre, étaient imprimées simultanément aux deux pendules, et l'on observait les passages simultanés de ces fils au méridien, au moyen d'une lunette, dont l'axe optique coupait les deux fils au repos. On notait les nombres d'oscillations n, n' des deux pendules écoulées entre deux coïncidences successives; on devait $n' = n + 1$, n' se rapportant au pendule court."

„La série finie, on arrêtait les pendules et on les mettait en mouvement en sens inverse; on observait le retour des coïncidences dans ces nouvelles conditions et l'on déterminait les deux nouveaux nombres N et $N' = N + 1$. En nommant λ la latitude, T la durée du jour sidéral, t la durée de l'oscillation conique du pendule long, dégagée de l'effet de la rotation terrestre, t' la même durée pour le pendule court, on doit trouver, si la théorie est exacte

$$\frac{\sin \lambda}{T} = \frac{t}{t + t'} \left\{ \frac{1}{n + n'} - \frac{1}{N + N'} \right\}$$

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/111

„L'expérience du 25 mai donne

$n = 207{,}86$ $N = 217{,}82$

$n' = 208{,}86$ $N' = 218{,}82$

„L'expérience du 10 juin donne

$n = 206{,}31$ $N = 215{,}96$

$n' = 207{,}31$ $N' = 216{,}96$

„On peut aussi déduire de ces nombres la différence de durée entre l'oscillation lévogyre et l'oscillation dextrogyre, et l'on trouve, après l'application des corrections nécessairs:

Différence . . . . 0,000,725 le 25. mai
0,000,710 le 10. juni.

Die Differenz in der Schwingungsdauer rechtsum (wie der rotierende Uhrzeiger) und linksum schwingender konischer Pendel scheint aufser von Bravais bis jetzt von Niemandem weiter beachtet worden zu sein; wenigstens entsinne ich mich nicht, in irgend einer der zahlreichen Untersuchungen über das Foucault-sche Pendel die Bravais'schen Arbeiten erwähnt gefunden zu haben. Ich erkläre mir dies dadurch, dafs den Bravais'schen Untersuchungen doch wohl nicht die eminente Bedeutung für die Physik (speziell Optik und Elektromagnetismus) zugeschrieben werden kann, welche Bravais ihnen beizulegen erklärlicher Weise geneigt war. Denn in Wirklichkeit besteht kein Unterschied zwischen den Schwingungsdauern von rechtsum und linksum verlaufenden konischen Schwingungen, sondern diese Differenz tritt in den Beobachtungen nur deshalb auf, weil eine streng genommen nicht zulässige Methode zur Bestimmung der Schwingungsdauer verwendet worden ist.

Bei der Bestimmung der Schwingungsdauer eines Pendels beobachtet man die aufeinander folgenden Zeiten, in denen die Ruhelage passiert wird, weil zu diesen Zeiten die Bewegung der Pendelkugel die geschwindeste ist und deshalb die Feststellung des Zeitpunktes des Passierens mit möglichster Genauigkeit gestattet. Will man die Bestimmung der Schwingungsdauer mit grofser Genauigkeit ausführen, so mufs man längere Zeit in regelmäfsigen Intervallen eine Reihe von Schwingungen beobachten. Deshalb ist zu beachten, dafs sich scheinbar die Schwingungsebene eines Pendels auf der nördlichen Erdhälfte in demselben Sinne dreht wie der Zeiger einer Uhr. Bleibt die Schwingung eine ebene, so verändert einfach der Beobachter seine Stellung entsprechend der veränderten Lage der Schwingungsebene; und dies ist noch leicht ausführbar,

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/112

wenn auch das Pendel kein ebenes mehr genannt werden kann, so lange nur noch die von der Pendelkugel beschriebene Ellipse eine langgestreckte ist. Sobald aber die Ellipse runder wird oder sich gar einem Kreise nähert, so ist die Bestimmung der Zeiten des Passierens des Punktes der gröfsten Geschwindigkeit nicht wohl mehr ausführbar. Es bleibt alsdann nichts weiter übrig, als durch die Ruhelage eine beliebige Gerade zu ziehen und die Zeiten zu beobachten, in welchen diese Gerade von der Pendelkugel passiert wird.

Freilich ist auch in diesem Falle der Grund weggefallen, weshalb man als Fixationspunkte die Zeiten des Passierens der Gleichgewichtslage wählte; denn die Geschwindigkeit der Bewegung der Pendelkugel ist bei angenähert kreisförmiger Bahn angenähert eine gleichförmige. Es hat auch in der ersten Bestimmungsweise die gleiche Willkür dazu geführt, die Zeiten des Passierens der Gleichgewichtslage zu beobachten, mit welcher man in der zweiten Bestimmuugsweise die Richtung der durch die Gleichgewichtslage zu ziehenden Geraden wählte, denn die Analysis lehrt, dafs die Pendelkugel stets dieselbe Zeit gebraucht, um eine volle Umschwingung zu vollführen, welcher Punkt ihrer Bahn auch als Ansgangspunkt gewählt werden mag. Wenn also das Pendel so lang und die Amplitude so klein ist, dafs man den *Cosinus* der halben Amplitude gleich 1 setzen kann, mit andern Worten, wenn man vernachlässigen kann, dafs aus dem ebenen Pendel ein konisches geworden ist, weshalb sollte denn da nach der einen Bestimmungsweise eine andere Schwingungsdauer gefunden werden als nach der andern? Und doch ist dem so, wie wir bereits aus den Untersuchungen von Bravais wissen.

Erinnern wir uns daran, dafs der Beobachter bei der ersten Bestimmungsweise der Schwingungsdauer seinen Stand entsprechend der Änderung der Lage der Schwingungsebene änderte, während dies bei der zweiten Bestimmungsweise nicht geschieht. Denn in der That ist es der Einflufs dieses scheinbar unwesentlichen Unterschiedes, welcher sich bei genauen Bestimmungen der Schwingungsdauer dahin geltend macht, dafs sich in den elliptischen Schwingungen eine resp. gröfsere oder kleinere Schwingungsdauer ergiebt als in den ebenen Schwingungen, je nachdem die Ellipsen durchlaufen werden entgegengesetzt dem Drehungssinne eines Uhrzeigers oder in dem Drehungssinne eines solchen. Da sich die gerade Linie unter der schwingenden Pendelkugel mit der Erde

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/113

dreht, so fallen ja für eine beobachtete Umschwingung bei der zweiten Beobachtungsweise Anfangs- und Endpunkt nicht mehr in einen Punkt der Bahnkurve zusammen.

Um jedoch auch noch den Vorgang so darzustellen, wie er sich unmittelbar den Augen des Beobachters darbietet, habe ich Fig. 10 angefertigt. In derselben ist an die Stelle der Bahnellipse der Pendelkugel eine Hypotrochoide getreten, da sich ja scheinbar nicht die gerade Linie unter der Bahnkurve der Pendelkugel, sondern diese letztere über der uns als ruhend erscheinenden Geraden dreht. Die Pendelkugel hat eine volle Schwingung ausgeführt, wenn sie den Weg von B über D und F bis K zurückgelegt hat, denn die Berührungspunkte B und K des kleinen Berührungskreises sind Punkte der tiefsten Lage der Pendelkugel, und die Zeiten des Passierens dieser Punkte entsprechen vollkommen den Zeiten des Passierens der Gleichgewichtslage beim ebenen Pendel. Ist IBC diejenige Gerade, deren Passiertwerden beobachtet wird, so ergiebt die Beobachtung diejenige Zeit, welche die Pendelkugel gebraucht, um den Weg $BDFKH$ zurückzulegen und man erkennt sofort, dafs ein zu grofser Wert für die Schwingungsdauer gefunden werden mufs.

Betrachtet man noch die nächste vollständige Schwingung, für welche man bei der ersten Bestimmungsweise den Weg von K über A und G bis L erhält, während nach der zweiten Bestimmungsweise die Pendelkugel den Weg von H über A, G und L bis I zurücklegen mufs, u. s. f., so erkennt man leicht, dafs nach der zweiten Bestimmungsweise die Dauer einer vollständigen Schwingung allemal um diejenige Zeit zu grofs gefunden wird, welche die Pendelkugel gebraucht, um den Sektor zu durchlaufen, welchen in Wirklichkeit die Gerade IOC während der Dauer einer vollständigen Schwingung überstreicht. Der Winkel dieses Sektors ist $= \frac{2\pi t}{T}$, wenn t die Schwingungsdauer des ebenen Pendels und T diejenige Zeit bedeutet, welche verstreicht, bis die Haupt-Schwingungsrichtung des Pendels eine volle Umdrehung ausgeführt hat. Beim Kreispendel ist die konstante Winkelgeschwindigkeit der Pendelkugel $\alpha = \frac{2\pi}{t}$, der Winkelraum $\frac{2\pi t}{T}$ wird deshalb überschritten in der Zeit $\tau = \frac{2\pi t}{T} : \frac{2\pi}{t} = \frac{t}{N}$, wenn ich mit $N = T : t$ die Anzahl der Schwingungen bezeichne, welche das

Pendel ausführen mufs, bevor seine Hauptschwingungsrichtung eine scheinbare Drehung um 360° erfahren hat.

In derselben Weise läfst sich zeigen, dafs die zweite Beobachtungsweise für die Dauer einer vollständigen Schwingung eine Zeit ergeben mufs, welche um die Zeit τ zu kurz ist, wenn das Kreispendel seine Schwingungen in entgegengesetztem Drehungssinne ausführt. Die scheinbare Differenz der Schwingungsdauer eines rechtsum oder linksum springenden Pendels ist also $= 2\tau = \frac{2t}{N}$. Demnach ist $N = \frac{t}{\tau}$ und $T = t^2 : \tau$. Durch Bestimmung der Schwingungsdauer eines Pendels, wenn dasselbe resp. als Kreispendel rechtsum oder linksum schwingt oder drittens ebene Schwingungen ausführt, erhält man also in einfachster Weise die Data, aus denen man die Zeit berechnen kann, innerhalb welcher die Hauptschwingungsrichtung des Pendels am Beobachtungsorte eine volle Umdrehung ausführen müfste, vorausgesetzt, dafs die scheinbare Drehung der Schwingungsebene eines Pendels mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt.

Herr Oberlehrer Kunz hat auch mit dem von mir zu den soeben besprochenen Versuchen benutzten Pendel im Brückenbergschacht die Zeitdifferenz für die Dauer von rechtsum und linksum ausgeführten konischen Schwingungen nachgewiesen, da es mir selbst nicht möglich war, diese Versuche noch anzustellen. Gerade zu solchen Versuchen aber war das erwähnte Pendel ganz besonders geeignet. Da es sich nämlich nur um aufserordentlich kleine Differenzen handelt, so ist es sehr wünschenswert, über ein möglichst langes mit möglichst schwerer Pendelkugel versehenes Pendel verfügen zu können, wenn man experimentell die Richtigkeit der vorstehenden Betrachtungen erweisen will.

Denn 1) ermöglicht ein solches die Beobachtung einer möglichst grofsen Zahl von Schwingungen und somit eine möglichst genaue Bestimmung der Schwingungsdauer,

2) nimmt die Schwingungsdauer mit der Pendellänge zu, während gleichzeitig die Anzahl der Schwingungen, welche das Pendel ausführen mufs, bis sich seine Hauptschwingungsrichtung um volle 360° gedreht hat, kleiner wird, so dafs also der zu bestimmende Quotient $\tau = \frac{t}{N}$ zweifach vergröfsert wird.

3) kann man nur bei einem sehr langen Pendel so kleine Amplituden zu einer zuverlässigen Beobachtung der Schwingungs-

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/115

dauer wählen, dafs die Differenz der Schwingungsdauer bei ebenen und bei konischen Schwingungen aufser Acht gelassen werden kann.

4) läfst sich nur bei einem sehr langen Pendel mit sehr schwerer Pendelkugel einige Stunden lang, wie dies der Versuch erfordert, eine angenähert gleichförmige Form der Bahnkurve der Pendelkugel festhalten, während bei kürzerem Pendel mit wenig schwerer Pendelkugel die Öffnung des vom Pendelfaden umschriebenen Kegels leicht bedeutende Änderungen zeigt, wodurch die bei kürzerem Pendel unbedingt notwendige Korrektur und Reduktion der Schwingungsdauer auf unendlich kleine ebene Schwingungen ganz aufserordentlich erschwert, ja fast unausführbar gemacht wird.

5) ist es überhaupt sehr wünschenswert, nicht blofs aus Bequemlichkeitsgründen, dafs an den durch das Experiment gelieferten Daten nur möglichst wenige und möglichst geringfügige Korrekturen anzubringen sind.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/116

Fig. 1

Fig. 3

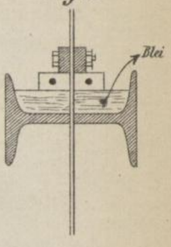


Fig. 4

Fig. 5

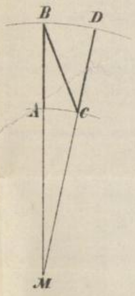


Fig. 6

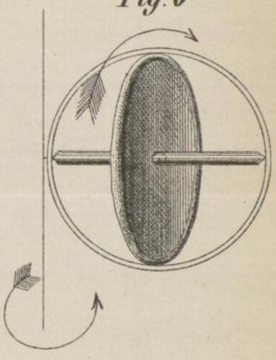
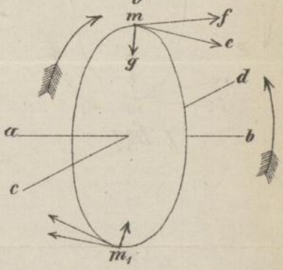


Fig. 7



Grundriß vom Schacht

Canal nach dem Schornstein

Fig. 2

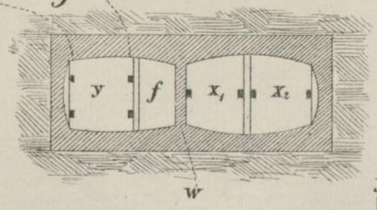


Fig. 8

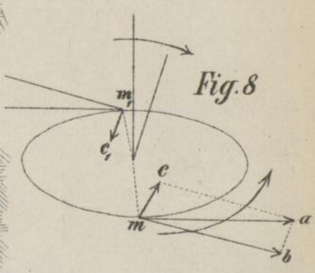


Fig. 10

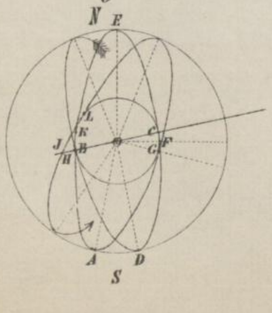
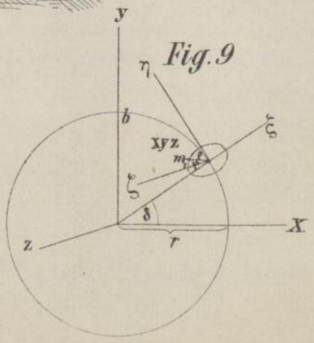


Fig. 9



Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/id392573954-18820000/117

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Jahresbericht des Vereins für Naturkunde zu Zwickau i.S.

Jahr/Year: 1882

Band/Volume: 1882

Autor(en)/Author(s): Tammen Hermann

Artikel/Article: Über den Foucault´schen Pendelversuch 73-106